Introducción a la Física Relativista II: Álgebra del Grupo de Poincaré

Mario I. Caicedo

10 de febrero de 2021

Introducción

- Esta sección del curso estará particularmente llena de *indexología*, parte de la cuál será dejada como ejercicio.
- En ningún momento pierda de vista la interpretación del desarrollo
- Recuerde el repositorio.

Comentarios y Notación

- El grupo de Poincaré ($ISO(1,3)$) actúa sobre vectores en la forma
$$x^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} + a^{\mu}$$
- Estaremos interesados en representaciones unitarias y para ellas utilizaremos la notación, $U(\Lambda, \mathrm{a})$
- De acuerdo a esta notación, la acción iterada de dos transformaciones de Poincaré se expresa como

$$U(\Lambda_2, \mathrm{a}_2)U(\Lambda_1, \mathrm{a}_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2)$$

Comentarios y Notación II

- Note que

$$U^{-1}(\Lambda, \mathrm{a}) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}\mathrm{a})$$

- El interés de tener representaciones unitarias incide en que los generadores han de ser **hermíticos**.
- Para transformaciones cercanas a la identidad,

$$\boxed{U(\mathrm{I} + \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\epsilon}) = \mathrm{I} + \frac{1}{2} i\omega^{\mu\nu} \mathrm{J}_{\mu\nu} - i\epsilon^{\rho} \mathrm{P}_{\rho}} \tag{1}$$

con $\mathrm{J}_{\mu\nu}$ y P_{ρ} hermíticos.

Con el fin de estudiar el álgebra del grupo analizaremos el objeto

$$\boxed{U(\Lambda, a)U(I+\omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a)}$$

Con ese objetivo en mente, comenzamos por mirar:

$$\begin{aligned} U(I+\omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) &= U(I+\omega, \epsilon)U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = \\ &= U[(I+\omega)\Lambda^{-1}, \epsilon - (I+\omega)\Lambda^{-1}a)] \end{aligned}$$

Al reinsentar el primer factor en el producto,

$$U(\Lambda, \mathrm{a})U(\mathrm{I} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, \mathrm{a}) \, ,$$

sigue

$$\begin{aligned} U(\Lambda, \mathrm{a})U(\mathrm{I} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, \mathrm{a}) = & \\ &= U(\Lambda, \mathrm{a})U[\Lambda^{-1} + \omega\Lambda^{-1}, \epsilon - \Lambda^{-1}\mathrm{a} - \omega)\Lambda^{-1}\mathrm{a}] = \\ &= U[\Lambda\Lambda^{-1} + \Lambda\omega\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\Lambda^{-1}\mathrm{a} - \Lambda\omega\Lambda^{-1}\mathrm{a} + \mathrm{a}] \end{aligned}$$

$$\boxed{U(\Lambda, \mathrm{a})U(\mathrm{I} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, \mathrm{a}) = U[\mathrm{I} + \Lambda\omega\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}\mathrm{a}]} \tag{2}$$

Examinando los términos de primer orden en $\boldsymbol{\epsilon}$ y $\boldsymbol{\omega}$ de la identidad 2 a la luz de la igualdad

$$U(\mathsf{I}+\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\epsilon}) = \mathsf{I} + \frac{1}{2} i\omega^{\mu\nu}\mathsf{J}_{\mu\nu} - i\epsilon^{\rho}\mathsf{P}_{\rho}$$

$$U(\Lambda,\mathsf{a})\left[\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\mathsf{J}_{\mu\nu} - \epsilon^{\rho}\mathsf{P}_{\rho}\right]U(\Lambda,\mathsf{a})^{-1} = \frac{1}{2}(\Lambda\boldsymbol{\omega}\Lambda^{-1})^{\mu\nu}\mathsf{J}_{\mu\nu} - (\Lambda\boldsymbol{\epsilon} - \Lambda\boldsymbol{\omega}\Lambda^{-1}\mathsf{a})^{\mu}\mathsf{P}_{\mu}$$

Obtenemos

$$\boxed{\begin{aligned} U(\Lambda,\mathsf{a})\mathsf{J}_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda,\mathsf{a}) &= \Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}(\mathsf{J}_{\rho\sigma} - \mathsf{a}_{\rho}\mathsf{P}_{\sigma} + \mathsf{a}_{\sigma}\mathsf{P}_{\rho}) \\ U(\Lambda,\mathsf{a})\mathsf{P}_{\mu}U^{-1}(\Lambda,\mathsf{a}) &= \Lambda^{\rho}{}_{\mu}\,\mathsf{P}_{\rho}\end{aligned}}$$

En ruta al Álgebra de Lie

Invocando una vez más la igualdad

$$U(\mathsf{I}+\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\epsilon}) = \mathsf{I} + \frac{1}{2} i\omega^{\mu\nu}\mathsf{J}_{\mu\nu} - i\epsilon^{\rho}\mathsf{P}_{\rho}$$

y considerando y las reglas 6 para el caso de una transformación infinitesimal (a pesar de la notación estos parámetros son independientes de los que nos trajeron hasta este punto),

$$\boxed{\begin{aligned} i[\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\mathsf{J}_{\mu\nu} - \epsilon^{\nu}P_{\nu}, \mathsf{J}_{\rho\sigma}] &= \omega^{\mu}{}_{\rho}\mathsf{J}_{\mu\sigma} + \omega^{\nu}{}_{\sigma}\mathsf{J}_{\rho\nu} - \epsilon_{\rho}\mathsf{P}_{\sigma} + \epsilon_{\sigma}\mathsf{P}_{\rho} \\ i[\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\mathsf{J}_{\mu\nu} - \epsilon^{\nu}P_{\nu}, \mathsf{P}_{\rho}] &= \omega^{\mu}{}_{\rho}\mathsf{P}_{\mu} \end{aligned}} \quad (3)$$

Álgebra de Lie

Hemos alcanzado el objetivo de esta sección, el álgebra de Lie del Grupo de Poincaré o Grupo de Lorentz inhomogéneo

$$\boxed{\begin{aligned} [\mathsf{J}_{\mu\nu}, \mathsf{J}_{\lambda\sigma}] &= i\eta_{\mu\sigma}\mathsf{J}_{\lambda\nu} - i\eta_{\mu\lambda}\mathsf{J}_{\sigma\nu} + i\eta_{\nu\sigma}\mathsf{J}_{\mu\lambda} - i\eta_{\nu\lambda}\mathsf{J}_{\mu\sigma} \\ [\mathsf{P}_{\mu}, \mathsf{J}_{\rho\sigma}] &= i\eta_{\mu\sigma}\mathsf{P}_{\rho} - i\eta_{\mu\rho}\mathsf{P}_{\sigma} \\ [\mathsf{P}_{\mu}, \mathsf{P}_{\rho}] &= 0 \end{aligned}} \tag{4}$$

En azul destaca claramente el álgebra $so(1,3)$ cuyo origen no habíamos exhibido antes. En rojo notamos la forma en que el grupo de Lorentz actúa sobre los generadoes de las traslaciones y finalnete en negro, la subálgebra de traslaciones que es conmutativa.

Repasando Conceptos I

- Las traslaciones y rotaciones son transformaciones aparentemente triviales pero de una importancia fundamental.
- Bajo traslaciones, el momentum lineal es invariante (¿por qué?)
- El momentum angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, por otra parte, no es invariante bajo traslaciones.

Repasando Conceptos II

- Las dos consecuencias inmediatas del **Teorema de Noether** para sistemas con un número finito de grados de libertad son las siguientes:
  - La invariancia de un sistema bajo traslaciones implica la conseración del momentum lineal $\vec{p}$
  - La invariancia de un sistema bajo rotaciones implica la conservación del momentum angular ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$)
- Los cambios en las coordenadas del vector de posición de una particula bajo traslaciones y rotaciones son $\delta x^i = \epsilon^i$ y $\delta x^i = \delta\theta(\hat{n} \times \vec{r})^i$, donde ϵ^i son las componentes del vector de traslación y $\delta\theta$ y $\hat{n}$ el ángulo infinitesimal y el vector director de la rotación.

Repasando Conceptos III

Si se utilizan coordenadas cartesianas, los cambios infinitesimales en las coordenadas de una partícula (cuyo movimiento sea invariante bajo traslaciones y rotaciones) descrita en la formulación canónica pueden calcularse a través de los corchetes de Poisson,

$$\begin{aligned} \delta x^i &= \{x^i, \epsilon^j p_j\}, \\ \delta x^i &= \{x^i, \delta\theta \hat{n}.\vec{L}\} \end{aligned} \tag{5}$$

en palabras bien llanas, bajo simetrías traslacional y rotacional , el momentum lineal es el generador de las traslaciones mientras que el momentum angular genera las rotaciones.

Repasando Conceptos IV

En el caso de los sistemas autónomos (invariantes bajo el origen del tiempo), el Hamiltoniano no solo genera la evolución temporal sino que es una cantidad conservada (la energía)

- En el caso de una partícula relativista, el cuadrimomentum y la generalización del momentum angular siguen siendo los generadores de traslaciones y "rotaciones" (transformaciones de Lorentz).
- Si pensamos en una partícula, los generadores P_μ y $\mathrm{J}_{\mu\nu}$ de que hemos estado hablando desde el principio del curso deben ser identificados con el cuadrimomemtum y "momentum angular" generalizado de la partícula
- El cuadrimomentum usual es $(E_c, \vec{p})$ de manera que P_0 es la energía.
- ¿Como se traslada todo esto al álgebra de Poincaré?.

- Para $a = 0$, las reglas

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a) J_{\mu\nu} U^{-1}(\Lambda, a) &= \Lambda^{\rho}{}_{\mu} \Lambda^{\sigma}{}_{\nu} (J_{\rho\sigma} - a_{\rho} P_{\sigma} + a_{\sigma} P_{\rho}) \\ U(\Lambda, a) P_{\mu} U^{-1}(\Lambda, a) &= \Lambda^{\rho}{}_{\mu} P_{\rho} \end{aligned} \tag{6}$$

  nos dicen que $J_{\mu\nu}$ es un tensor y P_{μ} un vector.
- Bajo una traslación pura ($a \neq 0$, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$), P_{μ} es invariante mientras que $J_{\mu\nu}$ no lo es, exactamente como esperamos del momentum y el momentum angular.

Problemas

- Encuentre los corchetes de Poisson $\{L_i, L_j\}$ entre las componentes cartesianas del momentum angular de una partícula (no relativista) e interprete el resultado
- Demuestre lo que se afirma en las ecuaciones 5
- Demuestre las fórmulas 3
- Use el resultado anterior para demostrar el álgebra de Poincaré 4. Ayuda, considere las transformaciones de Lorentz y las traslaciones por separado.