Introducción a la Física Relativista II: Campos y sus Leyes de Transfromación Bajo el Grupo de Lorentz

Mario I. Caicedo

9 de marzo de 2021

- En diversas ramas de la física, en altas energías en particular, la representación de ciertos fenómenso físicos es en términos de campos de diferentes tipos.
- En el caso de la física de altas energías, los campos deben poseer cietas reglas de transformación bajo el grupo de Lorentz.
- El propósito de esta discusión es presentar bevemente las herramientas que permiten definir tales leyes de transformación.

Repaso

- Se ha comentado (sin demostración) que la realización de $iso(1,3)$ sobre $\mathcal{L}^2_\infty(M_4)$ se construye con los operadores,

$$\mathsf{P}_\mu = i\partial_\mu\,, \qquad \mathsf{M}_{\mu\nu} = \mathsf{L}_{\mu\nu} + \mathsf{S}_{\mu\nu}$$

- donde $\mathsf{L}_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$, $\mathsf{S}_{\mu\nu}$, es un operador de representación del álgebra de Lorentz y
- $[\mathsf{P}_\mu, \mathsf{S}_{\mu\nu}] = 0\,, \quad [\mathsf{S}_{\mu\nu}, \mathsf{L}_{\mu\nu}] = 0$

Transformaciones del Espacio/Tiempo

- Estaremos interesados en transformaciones infinitesimales de la forma
$$x^\mu \to x'^\mu(x^\alpha) = x^\mu + \delta x^\mu \,, \tag{1}$$
- Como ejemplo, puede pensarse en cambios generales de coordenadas (difeomorfismos),
$$x^\mu \to x'^\mu = x'^\mu(x^\alpha) \,, \tag{2}$$
cuya forma infinitesimal es
$$x'^\mu(x^\alpha) = x^\mu + \xi^\mu(x^\alpha) \,, \tag{3}$$
donde, $\xi^\mu(x^\alpha)$ es un campo vectorial de componentes iinfinitesimales

Transformaciones de los Campos

Definición

Dados un grupo de matrices que constituye una representación del Grupo de Lorentz, $\mathrm{M}(\Lambda_1)\mathrm{M}(\Lambda_2) = \mathrm{M}(\Lambda_1\Lambda_2)$, *y una familia de campos indexados* $\Phi_{a_1 a_2 \ldots a_n}(x)$. *Se dice que los campos constituyen una representación del Grupo de Lorentz sii, transforman según las reglas*

$$\begin{aligned} \Phi_{a_1 a_2 \ldots a_n}(x) \rightarrow \Phi'_{a_1 a_2 \ldots a_n}(x') &\equiv M^{b_1}_{a_1} \ldots M^{b_n}_{a_n} \Phi_{b_1 \ldots b_n}(x) = \\ &= M^{b_1}_{a_1} \ldots M^{b_n}_{a_n} \Phi_{b_1 \ldots b_n}(\Lambda^{-1} x') \end{aligned} \tag{4}$$

Frame Title

- Desde el punto de vista de la teoría de grupos, la familia de campos $\Phi_{a_1 a_2 \ldots a_n}(x)$ pertenece a alguna representación construida como producto tensorial de representaciones.
- Como ocurre con cualquier representación, es necesario encontrar la forma adecuada de los generadores infinitesimales del grupo de Lorentz
- Para simplicidad de la notación a veces utilizaemos un solo índice en mayúsculas para representar a todo el conjunto de índices $a_1 a_2 \ldots a_n$ (notación de multiíndices).

Variaciones Total y Local

Definición

La variación total de un conjunto de campos indexados es

$$\Delta\Phi_{a_1 a_2 \ldots a_n}(x) \equiv \Phi'_{a_1 a_2 \ldots a_n}(x) - \Phi_{a_1 a_2 \ldots a_n}(x) \tag{5}$$

Definición

La variación local está dada por

$$\delta\Phi(x) = \Phi'_{a_1 a_2 \ldots a_n}(x') - \Phi_{a_1 a_2 \ldots a_n}(x)\,, \tag{6}$$

Relación Entre las Variaciones

En notación de Multiíndices, la variación local puede expresarse como

$$\begin{aligned}\delta\Phi(x)_I &= \Phi'_I(x') - \Phi_I(x) = \\ &= \Phi'_I(x') \underbrace{- \Phi'_I(x) + \Phi'_I(x)}_{0} - \Phi(x)_I = \\ &= \underbrace{\Phi'_I(x') - \Phi'_I(x)}_{\delta\Phi_I(x)} + \underbrace{\Phi'_I(x) - \Phi(x)_I}_{\Delta\Phi_I(x)}\end{aligned} \tag{7}$$

Variaciones Infinitesimales

En el caso de cambios infinitesimales,

$$\delta\Phi(x)_I = \underbrace{\Phi'_I(x+\delta x) - \Phi'_I(x)}_{\delta\Phi_I} + \Delta\Phi_I(x) = \qquad (8)$$
$$= \delta x^\alpha \partial_\alpha \Phi'_I(x) + \Delta\Phi_I(x).$$

A primer orden en δx, $\delta x^\alpha \partial_\alpha \Phi'(x) = \delta x^\alpha \partial_\alpha \Phi(x)$, así que

$$\boxed{\delta\Phi_I(x) = \Delta\Phi_I(x) + \delta x^\alpha \partial_\alpha \Phi_I(x).} \qquad (9)$$

Definición

El objeto

$$\delta x^{\mu}\partial_{\mu}\Phi_{a_1 a_2 \ldots a_n}(x) \tag{10}$$

que recibe el nombre de término de transpote aisla la parte de la variación local que es proporcional a δx^{μ}.

Transformaciones de Lorentz Infinitesimales I

- Bajo Transformaciones de Lorentz infinitesimales, $\delta x^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\rho} x^{\rho}$, donde las seis cantidades $\omega^{\mu\rho}$ son los parámetros (infinitesimales) de la transfroamción.
- Usando la fórmula 9 para la variación local,

$$\begin{aligned} \delta\phi_I(x) &= \Delta\Phi_I(x) + \delta x^{\alpha}\partial_{\alpha}\Phi_I(x) = \\ &= \Delta\phi_I(x) + \omega^{\alpha}{}_{\rho} x^{\rho}\partial_{\alpha}\phi_I(x) = \\ &= \Delta\phi_I(x) + \omega^{\alpha\beta} g_{\beta\rho} x^{\rho}\partial_{\alpha}\phi_I(x) = \\ &= \Delta\phi_I(x) + \omega^{\alpha\beta} x_{\beta}\partial_{\alpha}\phi_I(x) \end{aligned} \tag{11}$$

Transformaciones de Lorentz Infinitesimales II

Continuaremos el cálculo anterior con una manipulación sencilla

$$\begin{aligned}\delta\phi_I(x) &= \Delta\phi_I(x) + \omega^{\alpha\beta}\, x_\beta \partial_\alpha \phi_I(x) = \\ &= \Delta\phi_I(x) - \omega^{\mu\nu}\, x_\mu \partial_\nu \phi_I(x) = \\ &= \Delta\phi_I(x) - \omega^{\mu\nu}\, \frac{1}{2}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\phi_I(x) = \\ &= \Delta\phi_I(x) + i\frac{\omega^{\mu\nu}}{2}\, i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\phi_I(x)\end{aligned} \tag{12}$$

Transformaciones de Lorentz Infinitesimales III

En conclusión

$$\boxed{\delta\phi_I(x) = \Delta\phi_I(x) + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu}\delta_I^J\phi_J(x)} \tag{13}$$

Donde:

$$\boxed{L_{\mu\nu} \equiv i\{x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\}} \tag{14}$$

Comentarios

- El término de transporte ha llevado a la conclusión de que parte de la variación local de los campos bajo transformaciones infinitesimales se debe al "momentum angular orbital" $\mathrm{L}_{\mu\nu}$
- Por otra parte, se espera que la variación total sea proporcional a los parámetros de la transformación, es decir $\Delta\phi(x)_I \propto \omega^{\mu\nu}\phi_I$, y la estructura geométrica implica que, en general ha de ocurrir que

$$\Delta\phi(x)_I = \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} S^{J}_{\mu\nu\, I}\phi_J \,,$$

Donde $S^{J}_{\mu\nu\, I}$ ha de satisfacer el álgebra de Lorentz y tiene que conmutar con $\mathrm{L}_{\mu\nu}$

Conclusión Parcial

Hasta este punto, ha sido posible deducir que en general

$$\delta\Phi_I(x) = \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S^{J}_{\mu\nu I}\Phi(x)_J + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu}\delta^J_I\Phi_J(x) \tag{15}$$

Es decir,

$$\delta\Phi(x)_I = \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M^{J}_{\mu\nu I}\Phi_J \tag{16}$$

Observación

Los generadores del Álgebra de Lorentz son de la formna

$$M^{J}_{\mu\nu I} = S^{J}_{\mu\nu I} + \delta^{J}_{I} L_{\mu\nu} \tag{17}$$

donde

$$L_{\mu\nu} \equiv i\{x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu\}\,, \tag{18}$$

y $S^{J}_{\mu\nu\,I}$ *es un operador que ha de satisfacer el álgebra de Lorentz y conmuta con* $\mathrm{L}_{\mu\nu}$

Vector de Pauli-Lubanski

- Recordando la definición

$$W_\mu \equiv \eta_{\mu\alpha}\epsilon^{\alpha\nu\beta\rho}M_{\nu\beta}P_\rho \tag{19}$$

- La forma general de los generadores de Lorentz,

$$M^J_{\mu\nu I} = S^J_{\mu\nu I} + \delta^J_I L_{\mu\nu} \tag{20}$$

- y la relación de conmutación $[\partial_\mu, L_{\mu\nu}] = 0$,
- Se obtiene

$$W_\mu \equiv \eta_{\mu\alpha}\epsilon^{\alpha\nu\beta\rho}[S^J_{\nu\beta I} + \delta^J_I L_{\nu\beta}]P_\rho = \eta_{\mu\alpha}\epsilon^{\alpha\nu\beta\rho}S^J_{\nu\beta I}P_\rho \tag{21}$$

All observar detenidamente que

- $$W_\mu = \eta_{\mu\alpha}\epsilon^{\alpha\nu\beta\rho} S^J_{\nu\beta I} P_\rho \tag{22}$$

- $$\mathrm{P} = \begin{cases} (m, 0, 0, 0,) & \text{sistema comovil, cuando } m \neq 0 \\ (p, 0, 0, p) & m = 0 \end{cases} \tag{23}$$

Queda claro que el spin y la helicidad están codificados en el operador $S^J_{\mu\nu I}$ y por tanto son cantidades intrínsecas.

El Campo Escalar

- Un campo se denomina escalar sii su ley de transformación es

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{24}$$

- De esta ley de transformación se deduce de u¿inmediato que

$$\delta\phi(x) = 0$$

.

- Queremos estudiar lo que ocure cuando las transformaciones de Lorentz consideradas son cercanas a la identidad $(\delta x^\mu = \omega^\alpha{}_\beta x^\beta,\ \phi'(x') = \phi'(x + \delta x))$

Un cálculo a la fuerza nos muestra que

$$\begin{aligned}
\phi'(x') &\approx \phi'(x) + \omega^{\alpha}{}_{\beta} x^{\beta} \partial_{\alpha} \phi'(x) = & (25)\\
&= \phi'(x) + \omega^{\alpha\beta} x_{\beta} \partial_{\alpha} \phi'(x) = & (26)\\
&= \phi'(x) - \omega^{\beta\alpha} x_{\beta} \partial_{\alpha} \phi'(x) = \\
&= \phi'(x) - \frac{\omega^{\beta\alpha}}{2} \{ x_{\beta} \partial_{\alpha} \phi(x) - x_{\alpha} \partial_{\beta} \phi'(x) \} = \\
&= \phi'(x) + \frac{i^2}{2} \omega^{\mu\nu} \{ x_{\nu} \partial_{\mu} - x_{\mu} \partial_{\nu} \} \phi'(x) \\
&= \phi'(x) + \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \phi'(x)
\end{aligned}$$

(27)

Hemos mostrado que (a primer orden en los parámetros)

$$\phi'(x') = \phi'(x) + \phi(x) - \phi(x) + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu}\phi(x) \tag{28}$$

$$\phi'(x') - \phi(x) = \Delta\phi(x) + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu}\phi(x) = 0\,, \tag{29}$$

así que

$$\Delta\phi(x) = -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu}\phi(x) \tag{30}$$

que implica que $S^{I}_{\mu\nu\ J} = 0$ como se espera. Como conclusión, se ha demostrado que el spin del campo escalar masivo es cero.