Introducción a la Física Relativista II: Representaciones del Grupo de Poincaré

Mario I. Caicedo

4 de marzo de 2021

Repaso

El las clases anteriores se ha establecido que el álgebra $iso(1,3)$ es la siguiente

$$\boxed{\begin{aligned} [\mathsf{J}_{\mu\nu}, \mathsf{J}_{\lambda\sigma}] &= i\eta_{\mu\sigma}\mathsf{J}_{\lambda\nu} - i\eta_{\mu\lambda}\mathsf{J}_{\sigma\nu} + i\eta_{\nu\sigma}\mathsf{J}_{\mu\lambda} - i\eta_{\nu\lambda}\mathsf{J}_{\mu\sigma} \\ [\mathsf{P}_{\mu}, \mathsf{J}_{\rho\sigma}] &= i\eta_{\mu\sigma}\mathsf{P}_{\rho} - i\eta_{\mu\rho}\mathsf{P}_{\sigma} \\ [\mathsf{P}_{\mu}, \mathsf{P}_{\rho}] &= 0 \end{aligned}} \tag{1}$$

Esta álgebra demuestra que el álgebra de Poincaré es la *suma semidirecta* del álgebra de Lorentz y la de traslaciones, o dicho en otros términos, $IO(1,3)$ es el producto semidirecto del grupo de Lorentz y el de traslaciones.

Comentario

En general, la realización de $iso(1,3)$ actuando sobre $\mathcal{L}^2_\infty(M_4)$ (el conjunto de funciones suaves de valores complejos y cuadrado integrable definidas sobre el espacio de Minkowski) se construye haciendo,

$$\mathsf{P}_\mu = i\partial_\mu \tag{2}$$

$$\mathsf{M}_{\mu\nu} = \mathsf{L}_{\mu\nu} + \mathsf{S}_{\mu\nu} \tag{3}$$

donde $\mathsf{L}_{\mu\nu} = -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$, y $\mathsf{S}_{\mu\nu}$ es un operador de representación del álgebra de Lorentz que conmuta con ∂_μ y $\mathsf{L}_{\mu\nu}$

Razones técnicas que no discutiremos en este curso permiten demostrar que, $iso(1,3)$ posee **dos casimires** adicionales a los del grupo de Lorentz que ya se discutieron. Los autovalores de esos dos casimires adicionales permiten etiquetar las representaciones irreducibles de la misma manera que los casimires de $S\ell(2,C)$ permiten etiquetar las irreps del grupo de Lorentz.

- El primero de los casimires es el *cuadrado del cuadrimomentum*.
- El otro casimir requiere la introducción de un nuevo objeto geométrico, conocido como **Pauli-Lubanski**.

P^2

Al hablar del cuadrado del momentum nos estamos refiriendo al operador escalar

$$g^{\mu\nu}\mathsf{P}_\mu\mathsf{P}_\nu \tag{4}$$

Los autovalores de P^2 son **reales** y por tanto pueden ser mayores, menores o iguales a cero.
Momentáneamente solo comentaremos que, por estar usando la métrica $(+,-,-,-)$ nos ocuparemos únicamente de los autovalores no negativos.

Vector de Pauli-Lubanski

Definición

El vector de Pauli-Lubansky está dado por,

$$W_\mu \equiv \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} \epsilon^{\alpha\nu\beta\rho} M_{\nu\beta} P_\rho \tag{5}$$

y satisface las las siguientes identidades

1. $\eta^{\mu\nu} W_\mu P_\nu = 0$
2. $[W_\mu, P_\alpha] = 0$
3. $[M_{\alpha\beta}, W_\nu] = -i(W_\alpha g_{\beta\nu} - W_\beta g_{\mu\nu})$
4. $[W_\mu, W_\nu] = \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} W^\beta P^\gamma$

Comentarios

- W_ν es el único objeto vectorial que pude definirse de manera natural a partir de -únicamente- los generadores del grupo de Poincaré.
- Las relaciones de conmutación

$$[M_{\alpha\beta}, W_\nu] = -i(W_\alpha g_{\beta\nu} - W_\beta g_{\mu\nu})$$

constituyen la la expresión matemática de la naturaleza vectorial del W_ν.

Representacione Inducidas

Para etiquetar las irreps del álgebra de Poincaré se utiliza el método de *representaciones inducidas* o *little group method* introducido por H. Weyl, quien notó, no solo que los autovalores de estos casimires constituyen muy buenas etiquetas para las irreps sino observó que las representaciones de interés físico corresponden a estados masivos (el autovalor m^2 del cuarado del momentum es positivo) o sin masa ($m^2 = 0$).
Es decir, los autovalores positivos deben asociarse a partículas masivas como leptones o quarks, mientras que los nulos a partículas de masa nula como fotones y gravitones.

Representaciones Masivas

Consideremos un estado masivo $|\psi>$, es decir, un estado que satisface

$$P_\mu P^\mu |\psi >= m^2 |\psi > , \qquad m^2 > 0 \tag{6}$$

En vista de que todos los operadores de momentum conmutan entre sí, es posible imponer las siguientes condiciones adicionales,

$$P_\mu |\psi >= p_\mu |\psi > , \tag{7}$$

es decir, pedir que $|\psi>$ esté en un espacio de representación en que todos los operadores de momentum sean diagonales.

En vista de que los autovalores de los operadores de momentum pueden identificarse con las entradas del cuadrimomentum (medible) del estado, que por construcción es masivo, podemos pensar en el sistema comovil con la partícula en que el cuadrimomentum es $(m, 0, 0, 0,)$.
Es decir,

$$\mathrm{P}_\mu|\psi>_{Rest} = m\,\delta^0{}_\mu|\psi>_{Rest} \tag{8}$$

en consecuencia,

$$\mathrm{W}_\mu \mathrm{P}^\mu|\psi>_{Rest} = m\mathrm{W}_0|\psi>_{Rest}, \tag{9}$$

Por construcción $W_\mu P^\mu$ es un operador nulo, por lo tanto, tiene que ocurrir que

$$W_0|\psi>_{Rest} = 0 \tag{10}$$

esta identidad expresa que $|\psi>_{Rest}$ es un autoestado de W_0 con autovalor nulo. Por otra parte,

$$\begin{aligned} W_i|\psi>_{Rest} &= \epsilon_{i\mu\nu\alpha} M^{\mu\nu} P^\alpha |\psi>_{Rest} = \\ &= m\epsilon_{i\mu\nu 0} M^{\mu\nu}|\psi>_{Rest} = \\ &= -m\epsilon_{oijk} M^{jk}|\psi>_{Rest} = -mJ_i|\psi>_{Rest}\,, \end{aligned} \tag{11}$$

donde hemos usado que $J_i = \epsilon_{ijk} M_{jk} = N_i + N_i^\dagger$.

La igualdad

$$W_i|\psi>_{Rest} = -mJ_i|\psi>_{Rest}$$

prueba rigurosamente que, en el sistema comovil, el operador operator

$$S_i \equiv \frac{W_i}{m}$$

satisface[1] el álgebra $su(2)$, en consecuencia, los autovalores del vector de Pauli-Lubanski en el sistema comovil están dados por

$$\begin{aligned} W_\mu W^\mu|\psi>_{Rest} &= \{(W_0)^2 - W_i W_i\}|\psi>_{Rest} \\ &= 0 - W_i W_i\}|\psi>_{Rest} \\ &= -m^2 s(s+1)|\psi>_{Rest} \end{aligned} \qquad (12)$$

[1] $[S_i, S_j]|\psi>_{Rest} = i\epsilon_{ijk} S_k|\psi>_{Rest}$

Interpretación

- Comencemos por notar que el sistema comovil puedepensarse como un referencoial en que la partícula se encuentra en reposo
- El es sistema en **reposo** los tres operadores $S_i \equiv \frac{W_i}{m}$ generan $su(2)$.
- Sabemos que el mometum angular genera $su(2)$. ¡Notable, los operadores S_i son operadores de momentum angular de una partícula en reposo!, ¡no puede haber momentum angular orbital!, estamos hablando de momentum orbital intrínseco.
- Los autovalores que aparecen en $W_i W_i|\psi>_{Rest} = m^2 s(s+1)|\psi>_{Rest}$ definen el spin de la partícula

Representaciones sin Masa

Como se hizo antes, consideramos un estado $|\psi_p>$ que es autoestado de tosdos los operadores demomentum, es decir,

$$\mathsf{P}_\mu|\psi_p>= p_\mu|\psi_p>\,, \tag{13}$$

como estamos en el la representación sin masa[2] ($\mathsf{P}_\mu \mathsf{P}^\mu = 0$) P_μ es un vector nulo lo que permite escoger un referencial en el que los autovalores sean $p_\mu = (p, 0, 0, p)$.

[2] No hay un sistema comovil a un vector nulo

Al calcular $W_\mu P^\mu (= 0)$ se obtiene

$$W_\mu P^\mu |\psi_p >= p(W_0 - W_3)|\psi_p >= 0, \tag{14}$$

y de acá se decude que $W_0|\psi_p >= W_3|\psi_p >$. Con este resultado en la mano, y recordando que $[W_\mu, W_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu}^{\lambda\rho} W_\lambda P_\rho$, se prueba que

$$\begin{aligned} [W_1, W_2]\,|\psi_p > &= i\epsilon_{1230}(W^3P^0 - W^0P^3)|\psi_p >= \\ &= iP(W^0 - W^3)|\psi_p >= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

De manera similar, puede probarse que

$$\begin{aligned} [W_3, W_1]\,|\psi_p > &= ipW_2|\psi_p > \\ [W_3, W_2]\,|\psi_p > &= -ipW_1|\psi_p > \end{aligned} \tag{16}$$

Definiendo $J_3 \equiv \frac{W_3}{p}$ podemos resumir los resultados recientes afirmando que para todo estado para el cual los autovalores de momentum tengan la forma $(p, 0, 0, p)$ $(p \in \Re)$, los tres operadores W_1, W_2 and J_3 satisfacen el álgebra de rototraslaciones en un plano euclídeo,

$$
\begin{aligned}
[W_1, W_2] &= 0 && (17)\\
[J_3, W_1] &= iW_1 && (18)\\
[J_3, W_2] &= -iW_1\,. && (19)
\end{aligned}
$$

Eta álgebra posee un solo casimir, $W_1^2 + W_2^2$, que, en principio puede tomar cualquier valor real no negativo.

Aora bien, estamos considerano partículas reales (los tquiones quedan fuera de discusión) y por lo tanto,

$$(W_1^2 + W_2^2)|\psi_p >= 0, \tag{20}$$

pero como $[W_1, W_2] = 0$, esto implica $W_i|\psi_p >= 0$ $(i = 1, 2)$. Más aún, la identidad operatorial$W_\mu P^\mu = 0$ asegura que

$$W_\mu|\psi_p >= \lambda P_\mu|\psi_p > \tag{21}$$

que es válida para $|\psi_p >$, pero como W_μ y P_μ transforman de manera idéntica, el resultado ha de ser cierto para todo el espacio de Hilbert, (es decir, λ es invariante).

Surge una pregunta obvia, ¿cuál es el significado de λ?. Para contestar, examinemos $W_0|\psi_p>$, un cálculo trivial muestra que calculation yields

$$W_0|\psi_p >= \lambda P_0|\psi_p >= \lambda p|\psi_p >, \tag{22}$$

de donde,

$$\lambda|\psi_p >= \frac{w_0}{p}|\psi_p >= \frac{w_3}{p}|\psi_p >= j_3|\psi_p > \tag{23}$$

Para los estados que estamos considerando,

$$j_3|\psi_p >= J_3|\psi_p >= \vec{J}.\frac{\vec{P}}{p}|\psi_p > \tag{24}$$

En palabras, λ es la proyección del momentum angular a lo largo del momenum del estado.
La cantidad λ es denominada *helicidad*.

Helicidad y Paridad

Un hecho muy interesante es el siguiente, el operador de paridad (Π) puede cambiar la helicidad de λ a $-\lambda$.
Πactúa sobre los generadors del grupo de Poincaré de la siguiente manera,

$$\Pi P_0 \Pi^\dagger = P_0 \tag{25}$$
$$\Pi P_i \Pi^\dagger = -P_i \tag{26}$$
$$\Pi M_{ij} \Pi^\dagger = M_{ij} \tag{27}$$
$$\Pi M_{0i} \Pi^\dagger = -M_{0i} \tag{28}$$

La acción de Π implica a su vez que, bajo paridad, N y $N^\dagger$ mix themselves as $\Pi N \Pi^\dagger = N^\dagger$ y $\Pi N^\dagger \Pi^\dagger = N$ lo que demuestra que los espinores derechos e izquierdos están relacionados por paridad

- Las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré que nos interesan se clasifican en dos clases disjuntas, masivas y sin masas.
- En el caso masivo el spin debe entenderse como el vector de Pauli Lubanski en el sistema comovil con las partículas.
- Las representaciones masivas tienen por etiquetas los valores de m, el spin, las componentes espaciales del momentum y la proyección del spin a lo largo del eje z, es decir, $|m, s; p_1, p_2, p_3, s_z > |$
- En el caso sin masa las etiquetas son las compoentes espaciales del mimentunm y la helicidad $|\lambda, \vec{p} >$, donde λ tiene que ser estrictamente positivo o negativo.

Problemas

- Demuestre que $\eta^{\mu\nu} W_\mu W_\mu$ conmuta con todos los geeradores del grupo de Poincaré.
- Demuestre que $W_\mu P^\mu = 0$ implica $W_\mu |\psi_p\rangle = \lambda P^\mu |\psi_p\rangle$