



FREIE UNIVERSITÄT BERLIN

MASTERARBEIT

**Effizienz und Genauigkeit einer
divergenzfreien Diskretisierung für die
stationären inkompressiblen
Navier–Stokes-Gleichungen**

Von:

Mario KODDENBROCK

Matrikelnummer:

4298300

Betreuer:

Dr. Alexander LINKE

Zweiter Betreuer:

Prof. Dr. Volker JOHN

17. Juni 2014

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
0 Mathematische Vorbemerkungen	3
1 Die stationären, inkompressiblen Gleichungen	12
1.1 Die Stokes-Gleichungen	13
1.1.1 Existenz und Eindeutigkeit	17
1.1.2 Bedeutung der Divergenzfreiheit	20
1.2 Die Navier–Stokes-Gleichungen	22
1.2.1 Existenz und Eindeutigkeit	24
2 Beispiele	31
2.1 Vorbemerkungen	31
2.1.1 Hagen–Poiseuille–Strömung	31
2.1.2 Natürliche Randbedingungen	35
2.1.3 Diskrete Punktnorm	36
2.2 Kollisionsfluss im Kreuzkanal	37
2.2.1 Symmetrierandbedingung	39
2.3 L-förmiger Fluss	43
2.4 Euler- und stokesartige Strömungsgebiete	45
2.5 Cavity-Beispiel	49
3 Effizienzbetrachtung	52
3.1 Newton- und Picarditeration	52
3.2 Effizienzanalyse	55
4 Finite-Elemente-Ansätze	58
4.1 Raviart–Thomas–Elemente	62
4.2 Crouzeix–Raviart–Elemente	64
4.3 Der Fortin–Interpolator für Raviart–Thomas–Elemente	69
4.4 Der Fortin–Interpolator für Crouzeix–Raviart–Elemente	70
5 Diskretisierungen	73
5.1 Divergenzfreie Diskretisierungen	73
5.2 Stabilisierung des Crouzeix–Raviart–Elements	78
6 Genauigkeitsanalyse	87
6.1 Genauigkeitsanalyse der Sprungstabilisierung	87
6.2 Genauigkeitsanalyse der Rekonstruktion	90
Zusammenfassung und Ausblick	95

Einleitung

In der Strömungsdynamik bilden die Navier–Stokes- und Stokes-Gleichungen die üblichen Ansätze zur Modellierung von Fluiden, die in ihrer numerischen Umsetzung jedoch eine Vielzahl an Schwierigkeiten bergen. Ein Problem besteht dabei in der Verletzung einer Invarianzeigenschaft der kontinuierlichen Lösung im Diskreten, was zur Folge hat, dass die Diskretisierungen die vorkommenden Kräfte falsch balancieren können. Konkret haben rotationsfreie Kräfte, die nur durch den Druckgradienten kompensiert werden dürfen auch Einfluss auf die diskrete Geschwindigkeit und produzieren so unphysikalische Strömungen. Verursacht wird dies durch eine fehlende Orthogonalität zwischen rotationsfreien und diskret-divergenzfreien Funktionen, worin auch der Ansatzpunkt zur Lösung des Problems besteht. Diesen Ansatz stellen divergenzfreie Verfahren dar, die die schwache Divergenzfreiheit der diskreten Lösung garantieren und somit die fehlende Orthogonalität wieder herstellen.

Das Augenmerk dieser Arbeit liegt in der Untersuchung des in [Lin14] vorgestellten Verfahrens und seiner Genauigkeitsanalyse in der Anwendung auf konvektionsdominante Probleme, bei denen im großen Maße rotationsfreie Kräfte vorkommen.

Auf Grundlage einer kurzen mathematischen Einleitung zu Beginn, werden im ersten Kapitel zunächst die wichtigsten Ergebnisse zur Existenztheorie von Lösungen der Stokes- und Navier–Stokes-Gleichungen vorgestellt und im Anschluss der Aufbau der Gleichungen analysiert, um auf das für diese Arbeit relevante Problem mit falsch balancierten Kräften hinzuweisen.

Das zweite Kapitel stellt hierzu passende Beispiele vor. Eines hat die rotationsfreien Kräfte in der rechten Seite und soll so die obigen Probleme

in den Stokes-Gleichungen demonstrieren. Zwei weitere sollen ohne äußere Kräfte das gleiche Phänomen in Navier–Stokes belegen, diesmal ausschließlich verursacht durch den nichtlinearen Term. Bei letzteren hilft das eingeführte Euler-Residuum die Bereiche des betrachteten Gebiets zu markieren, in denen ein großer Druck die beschriebenen Kräfte verursacht.

Das dritte Kapitel behandelt das zweite relevante Problem der Arbeit, welches die Effizienz der Iterationen zur Berechnung des nichtlinearen Terms in den Navier–Stokes-Gleichungen ist. Hier werden zunächst die wichtigsten theoretischen Konvergenzresultate der Picard- und Newtoniteration vorgestellt und anschließend in der Anwendung auf obige Beispiele deren Effizienz verglichen.

Die eigentlich verwendeten Diskretisierungen und Finiten-Elemente werden im vierten und fünften Kapitel vorgestellt und deren Approximationsabschätzungen hergeleitet. Diese Abschätzungen zeigen auf theoretischer Ebene die Vorteile der divergenzfreien Verfahren. Um die theoretischen Vorteile jedoch auch in der Anwendung nachzuweisen, werden die verschiedenen Diskretisierungen im letzten Kapitel auf die vorgestellten Beispiele angewendet und deren Genauigkeit analysiert.

0 Mathematische Vorbemerkungen

In diesem Kapitel soll kurz und weitestgehend ohne Beweise eine mathematische Grundlage für die Arbeit geschaffen werden. Es ist hierfür stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand Γ und \mathbf{n} dessen nach außen gerichteter Normalenvektor. Zur besseren Unterscheidung sind Vektoren stets fett geschrieben.

$L^1_{loc}(\Omega)$ ist die Menge aller Funktionen, die auf jeder kompakten Teilmenge von Ω Lebesgue-integrierbar sind und

$L^2(\Omega)$ die Menge aller Funktionen, deren Quadrat auf Ω Lebesgue-integrierbar ist. Mit dem Skalarprodukt

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 := \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx$$

und der davon induzierten Norm ist der sogenannte Lebesgue-Raum $L^2(\Omega)$ ein Hilbert-Raum. Er lässt sich, im Bezug auf die in dieser Arbeit betrachteten Fluide, auch physikalisch interpretieren. Mit Geschwindigkeit \mathbf{u} und konstanter Dichte ρ_0 , ist die kinetische Energie eines Fluids

$$\text{kinetische Energie} = \frac{1}{2} \text{ Masse} \times \text{Geschwindigkeit}^2 = \frac{1}{2} \rho_0 \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, dx.$$

Der Raum $L^2(\Omega)$ entspricht also genau den Geschwindigkeiten mit endlicher kinetischer Energie.

Definition 0.1 (Schwache und distributionelle Ableitung)

Die α -te *distributionelle Ableitung* von $\mathbf{u} \in L^1_{loc}(\Omega)^n$ ist das Funktional

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\mathbf{u}) : C_0^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot D^\alpha \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Dabei ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Multiindex mit $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \in \mathbb{N}_0$.

Falls ein $\mathbf{v} \in L^1_{loc}(\Omega)^n$ existiert, sodass

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot D^\alpha \varphi \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ist, so nennt man $D^\alpha \mathbf{u} := \mathbf{v}$ die α -te *schwache Ableitung* von \mathbf{u} . Dabei ist

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Es besitzt also jede Funktion in $L^1_{loc}(\Omega)^n$ eine distributionelle Ableitung. Eine schwache Ableitung existiert jedoch nur, wenn das Funktional der distributionellen Ableitung durch ein einzelnes $\mathbf{v} \in L^1_{loc}(\Omega)^n$ repräsentiert wird. Ganz analog definieren wir folgende Divergenz.

Definition 0.2 (Schwache und distributionelle Divergenz)

Die *distributionelle Divergenz* einer Funktion $\mathbf{u} \in L^1_{loc}(\Omega)^n$ ist das Funktional

$$\begin{aligned} \mathfrak{Div}(\mathbf{u}) : C_0^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Falls ein $\psi \in L^1_{loc}(\Omega)$ existiert, sodass

$$-\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \psi \cdot \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ist, so heißt ψ *schwache Divergenz* von \mathbf{u} .

Siehe hierzu zum Beispiel [Pfe12].

Im Folgenden schreiben wir auch für vektorielle Funktionen häufig $\mathbf{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ und meinen dies komponentenweise.

Definition 0.3 (Sobolev-Räume)

Die sogenannten *Sobolev-Räume* sind definiert als

$$W^{k,p}(\Omega) := \{\mathbf{v} \in L^p(\Omega) : D^\alpha \mathbf{v} \in L^p(\Omega), \text{ für alle } |\alpha| \leq k\}.$$

Sie sind Banach-Räume (siehe zum Beispiel [Ada78, S.60]) mittels der Norm

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{k,p}} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha \mathbf{u}|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |D^\alpha \mathbf{u}| & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Wichtige Spezialfälle sind die Hilbert-Räume

$$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega),$$

mit dem Skalarprodukt

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_k := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{v})_0.$$

Als Maß nutzen wir zum einen die induzierten H^k -Norm, zum anderen die H^k -Halbnorm, die im Gegensatz zu dieser nur aus der Summe der L^2 -Normen der k -ten Ableitungen besteht

$$\|\mathbf{u}\|_k^2 := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_0^2, \quad |\mathbf{u}|_k^2 := \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_0^2.$$

Definition 0.4

Der Raum $H_0^k(\Omega)$ ist die Vervollständigung des Raumes $C_0^\infty(\Omega)$ in $H^k(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_k$

Da Funktionen aus den Sobolev-Räumen $W^{k,p}$ nur fast überall definiert sein müssen, ist nicht klar, ob Randwerte auf $\partial\Omega$ überhaupt sinnvoll definiert

sind. Da diese aber bei Differentialgleichungen und somit den Navier–Stokes-Gleichungen unverzichtbar sind, hat der folgende Satz große Bedeutung.

Satz 0.1 (Spursatz) Für $1 \leq p < \infty$ existiert genau ein stetiger linearer Operator

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$$

sodass für alle $\mathbf{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,

$$T\mathbf{u} = \mathbf{u}|_{\partial\Omega}.$$

$T\mathbf{u}$ heißt *Spur* von \mathbf{u} und wir schreiben einfachheitshalber für $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ oft nur $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ statt $T\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Bemerkung 0.2 Der Operator T ordnet also allen stetigen Funktion \mathbf{u} (Äquivalenzklasse bezüglich des n -dimensionalen Maßes auf Ω , die einen stetigen Repräsentanten besitzt) eine Funktion $T\mathbf{u}$ (Äquivalenzklasse bezüglich des $n - 1$ -dimensionalen Oberflächenmaß auf $\partial\Omega$) auf dem Rand zu. Außerdem ist dieser Operator eindeutig auf ganz $W^{1,p}(\Omega)$ erweiterbar. Man kann also, bis auf Nullmengen bezüglich des Oberflächenmaß auf $\partial\Omega$, sinnvoll von Randwerten der Funktion \mathbf{u} sprechen.

Der folgende Satz zeigt, dass die Funktionen aus $H_0^1(\Omega)$ genau den Funktionen entsprechen, die 0 auf dem Rand sind.

Satz 0.3

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega) : T\mathbf{u} = 0 \right\}.$$

Beweis. Siehe zum Beispiel [Ada78, S.165]. □

Satz 0.4 (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung) Für $\mathbf{u} \in H_0^k(\Omega)$ existiert eine Konstante $C_F = C(k, \Omega)$, mit

$$\|\mathbf{u}\|_{k-1} \leq C_F |\mathbf{u}|_k.$$

Auf dem Raum $H_0^k(\Omega)$ sind die H^k -Halbnorm und die H^k -Norm demzufolge äquivalent.

Beweis. Siehe zum Beispiel [Wer07, S.229]. □

Satz 0.5 (Sobolev-Ungleichung) Sei $\mathbf{v} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ für ein $1 \leq p < n$. Dann existiert eine Konstante $C = C(p, q, n, \Omega)$, mit

$$\|\mathbf{v}\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)^n}$$

für $q \in [1, p^*]$ mit $p^* = \frac{np}{n-p}$.

Beweis. Siehe zum Beispiel [Ada78, S.102]. □

Satz 0.6 (Divergenzsatz) Sei $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^n$, so ist

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Beweis. Siehe zum Beispiel [Kön04]. □

Lemma 0.7 Für ein Vektorfeld $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^n$ und eine skalare Funktion $\varphi \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \varphi \cdot \mathbf{v}.$$

Beweis. Sei $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, dann ist

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}) &= (\varphi v_1)_x + (\varphi v_2)_y + (\varphi v_3)_z \\ &= \varphi v_{1x} + \varphi v_{2y} + \varphi v_{3z} + \varphi_x v_1 + \varphi_y v_2 + \varphi_z v_3 \\ &= \varphi \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \varphi \cdot \mathbf{v}.\end{aligned}$$

□

Lemma 0.8 Für eine Funktion $\mathbf{v} \in H^2(\Omega)^n$ ist $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ divergenzfrei.

Beweis. Da die partiellen Ableitungen von H^2 -Funktionen vertauscht werden dürfen, ist mit $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{v}) &= \nabla \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right) = \nabla \cdot \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} \\ &= \partial_x \partial_y v_3 - \partial_x \partial_z v_2 + \partial_y \partial_z v_1 - \partial_y \partial_x v_3 + \partial_z \partial_x v_2 - \partial_z \partial_y v_1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Lemma 0.9 Zu einer Funktion $\varphi \in H^2(\Omega)$ ist $\nabla \varphi$ rotationsfrei.

Beweis. Ganz analog zu oben, ist

$$\operatorname{rot} (\nabla \varphi) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{zy} - \varphi_{yz} \\ \varphi_{xz} - \varphi_{zx} \\ \varphi_{yx} - \varphi_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

□

Satz 0.10 Gradientenfelder, die auf dem Rand verschwinden, sind senkrecht (im L^2 -Skalarprodukt) auf dem Raum der schwach-divergenzfreien Funktionen.

Beweis. Für ein Gradientenfeld $\nabla\varphi$, das von einem glatten Skalarfeld $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ kommt, ist die Aussage leicht einzusehen. Die distributionelle Divergenz aus Definition 0.2, eines schwach-divergenzfreien $\mathbf{v} \in V := \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : (\nabla \cdot \mathbf{v}, q) = 0 \text{ für alle } q \in L_0^2(\Omega)\}$, angewendet auf dieses Skalarfeld, ist nämlich gerade gleich dem negativen L^2 -Skalarprodukt zwischen diesen beiden:

$$0 = \mathfrak{D}\mathfrak{i}\mathfrak{v}(\mathbf{v})(\varphi) = - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi \, dx = -(\mathbf{v}, \nabla\varphi)_0.$$

Für $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ ergibt sich die Aussage durch einfaches Nachrechnen.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \mathbf{v} \, dx &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}) - \varphi \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma} \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dx}_{=0} - \underbrace{\int_{\Omega} \varphi \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx}_{=0} = 0. \end{aligned} \quad (0.1)$$

Das erste Integral ist hier null, da φ auf dem Rand Γ null ist. Das zweite Integral ist nach Definition von V gleich null.

□

Satz 0.11 (Helmholtz-Zerlegung) Zu jedem $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n$ existiert ein $\psi \in H^1(\Omega)$ und ein divergenzfreies $\mathbf{w} \in L^2(\Omega)^n$, sodass sich \mathbf{f} zerlegen lässt in

$$\mathbf{f} = \mathbf{w} + \nabla\psi.$$

Beweis. Siehe [GR79].

□

Nach [GR79] lässt sich die skalare Funktion ψ des rotationsfreien Anteils

eindeutig mittels des folgenden Problems lösen.

Finde $\psi \in H^1(\Omega)$, sodass für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \varphi \, dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi \, dx, \\ \int_{\Omega} \psi \, dx &= 0. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Folglich lässt sich der divergenzfreie Anteil durch einfaches Umstellen, mittels $\mathbf{w} = \mathbf{f} - \nabla \psi$ berechnen.

Proposition 0.12 In der Helmholtz-Zerlegung ist \mathbf{w} schwach divergenzfrei.

Beweis. Wir berechnen die distributionelle Divergenz von \mathbf{w} . Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{Div}(\mathbf{w})(\varphi) &= - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &= - \int_{\Omega} (\mathbf{f} - \nabla \psi) \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi - \nabla \psi \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \varphi - \nabla \psi \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 0.13 Der rotationsfreie und der divergenzfreie Anteil von \mathbf{f} sind senkrecht zueinander.

Beweis. Analog zum obigen Beweis, nur dass wir ψ selbst für φ in die distributionelle Ableitung einsetzen und so das L^2 -Skalarprodukt zwischen \mathbf{w} und $\nabla \psi$ erhalten. □

Satz 0.14 (Lax-Milgram) Sei Y ein Hilbert-Raum und $a : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, koerzive Bilinearform mit

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\leq a_1 \|\mathbf{v}\|_Y \|\mathbf{w}\|_Y \text{ für alle } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in Y, \\ a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\geq a_0 \|\mathbf{v}\|_Y^2 \text{ für alle } \mathbf{v} \in Y, \end{aligned}$$

dann existiert zu jedem $F \in Y^*$ mit

$$F(\mathbf{v}) \leq C \|\mathbf{v}\|_V \text{ für alle } \mathbf{v} \in Y,$$

ein eindeutiges $\mathbf{u} \in Y$, das die Gleichung

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \text{ für alle } \mathbf{v} \in Y \tag{0.3}$$

löst. Außerdem ist

$$\|\mathbf{u}\|_Y \leq \frac{C}{a_0}.$$

Falls a symmetrisch ist, so ist die Lösung der Gleichung (0.3) äquivalent zur Minimierung des Funktionals

$$J(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}).$$

Beweis. Siehe zum Beispiel [Lay08] oder [GR79]. □

1 Die stationären, inkompressiblen Gleichungen

Wir behandeln in dieser Arbeit die numerische Lösung der sogenannten Navier–Stokes-Gleichungen. Diese Gleichungen modellieren die Strömung von Flüssigkeiten und Gasen (Fluiden) und ergeben sich aus den physikalischen Erhaltungsgesetzen für Masse und Impuls.

Dabei werden in dieser Arbeit ausschließlich stationäre Strömungen inkompressibler Fluide betrachtet, weshalb wir die zeitabhängigen Terme vernachlässigen und die Dichte als konstant annehmen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ für $n \in \{2, 3\}$ stets das betrachtete Gebiet und Γ dessen lipschitzstetiger Rand, \mathbf{u} die Geschwindigkeit und p der Druck. In ihrer dimensionslosen Form (hier mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen)

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \text{ in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 \text{ auf } \Gamma, \end{aligned} \tag{1.1}$$

haben die Gleichungen als einzigen, aber entscheidenden Koeffizienten die Reynoldszahl $Re = \nu^{-1}$. Sie spiegelt das Verhältnis von Trägheit zu Zähigkeit wider und hat starken Einfluss auf mögliche Lösungen.

Des Weiteren fällt auf, dass der Druck p , da er nur als Gradient in der Gleichung vorkommt, höchstens bis auf eine additive Konstante eindeutig sein kann. Diese Konstante fixieren wir mit der Forderung

$$\int_{\Omega} p \, dx = 0.$$

Bevor wir die nichtlinearen Navier–Stokes-Gleichungen weiter untersuchen, betrachten wir zunächst eine Vereinfachung dieser Gleichungen. Unter der Annahme, dass $\|\mathbf{u}\|$ und vor allem $\|\nabla \mathbf{u}\|$ klein sind, vernachlässigen wir

den Term zweiter Ordnung $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ und erhalten die sogenannten Stokes-Gleichungen. Diese sind als lineares Pendant der Navier–Stokes-Gleichungen deutlich einfacher zu lösen.

Wie zu erwarten, sind sie vor allem dann zur Modellierung von Fluiden geeignet, wenn nur kleine Geschwindigkeiten und kleine Geschwindigkeitsänderungen vorkommen. Solche Fluide haben also eine hohe Viskosität (Zähigkeit) im Verhältnis zu ihrer Trägheit, was gleichbedeutend mit einer kleinen Reynoldszahl ist.

1.1 Die Stokes-Gleichungen

Wie beschrieben, erhalten wir unter Vernachlässigung des nichtlinearen Terms $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ in den Navier–Stokes-Gleichungen (1.1), die sogenannten *Stokes-Gleichungen*

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \text{ in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 \text{ auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Eine Geschwindigkeit, die diesen Gleichungen im klassischen Sinne entsprechen soll, muss mindestens zweimal differenzierbar sein und die Nullrandbedingungen erfüllen. Eine mögliche Lösung muss also aus einer Geschwindigkeit in $C^2(\Omega)^n \cap C^0(\bar{\Omega})^n$ und einem Druck in $C^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ bestehen.

Da aber auch andere Lösungen durchaus physikalisch sinnvoll sein können, betrachten wir sogenannte *schwache Lösungen*. Dies sind Lösungen einer *schwachen Formulierung* des Problems, welche wir erhalten, indem wir zunächst die gegebene Differentialgleichung mit sogenannten *Testfunktionen* \mathbf{v} aus $H_0^1(\Omega)^n$ multiplizieren und die daraus resultierende skalare Gleichung über Ω integrieren. Durch partielle Integration werden Ableitungen von der Lösung auf die Testfunktionen transferiert, sodass die Regularitätsbedingungen an die Lösung

herabgesetzt werden. Trotzdem erfüllen genügend glatte Lösungen der schwachen Formulierung immer noch die klassische beziehungsweise starke Form der Gleichungen.

Schwache Formulierung der Gleichungen

Durch Multiplikation der Gleichungen (1.2) mit Testfunktionen $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$ beziehungsweise $q \in L_0^2(\Omega)$, erhalten wir nach Integration über dem Gebiet Ω und Anwendung des Divergenzsatzes (Satz 0.6) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx &= \int_{\Omega} (-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p) \cdot \mathbf{v} \, dx \\ &= \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \nu \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, dS}_{=0} \\ &\quad - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx + \underbrace{\int_{\Gamma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS}_{=0} \\ &= \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx \end{aligned}$$

und

$$0 = \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx.$$

Dabei ist $\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$ das Skalarprodukt von Tensoren¹. Die durch die partielle Integration auftretenden Randintegrale fallen aufgrund der 0-Randbedingung der Testfunktionen \mathbf{v} weg. Eine Lösung (\mathbf{u}, p) dieser Gleichungen muss in $X := H_0^1(\Omega)^n$ bzw. in $Q := L_0^2(\Omega)$ liegen. Folgendes Problem nennen wir deshalb

¹ $A : B = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} B_{ij}$ Skalarprodukt von Tensoren

schwache Formulierung des Problems (1.2):

Finde $(\mathbf{u}, p) \in X \times Q$, sodass für alle $(\mathbf{v}, q) \in X \times Q$:

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx, \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dass eine Lösung von (1.2) auch (1.3) löst, ist leicht einzusehen, umgekehrt erfüllen hinreichend glatte Lösungen von (1.3) aber auch (1.2).

Das Variationsproblem

Um das Problem in einer allgemeineren Form zu betrachten, schreiben wir die in (1.3) vorkommenden Integrale als Bilinear- beziehungsweise Linearformen. Diese seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &:= \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} \, dx, \\ b(\mathbf{v}, q) &:= - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx, \\ l(\mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Die schwache Formulierung (1.3) ist dann äquivalent zu folgender Form der Gleichungen:

Finde $(\mathbf{u}, p) \in X \times Q$, sodass für alle $(\mathbf{v}, q) \in X \times Q$:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= l(\mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Wenn wir nun die schwache Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit \mathbf{u} als Bedingung in unserem Lösungsraum festschreiben, lässt sich das Problem (1.5) weiter vereinfachen. Denn mit dem Raum der schwach divergenzfreien Funk-

tionen $V := \{\mathbf{v} \in X : b(\mathbf{v}, q) = 0 \text{ für alle } q \in Q\}$ als Lösungsraum für die Geschwindigkeit ist die Massengleichung (zweite Gleichung) in (1.5) immer erfüllt und die Impulsgleichung (erste Gleichung) vereinfacht sich. Das Problem sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } \mathbf{u} \in V, \text{ sodass für alle } \mathbf{v} \in V: \\ &a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Bemerkung 1.1 In dieser Form sehen wir, dass das Problem äquivalent zur Minimierung eines Funktionals auf V ist (siehe zum Beispiel [GR79]). Dieses Funktional ist

$$J(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}).$$

Als quadratisches Funktional nimmt es sein Minimum in der eindeutigen Nullstelle der ersten Ableitung an. Diese ist

$$0 = J'(\mathbf{u})(\mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v})$$

für alle $\mathbf{v} \in V$ und somit äquivalent zum Problem (1.6). Auf diese Eigenschaft der Stokes-Gleichungen werden wir später auch die Existenz einer eindeutigen Lösung zurückführen.

Um aber erst einmal die Äquivalenz der beiden Probleme (1.5) und (1.6) einzusehen, brauchen wir folgende Eigenschaft der Bilinearform b .

Satz 1.2 (Inf-Sup-Bedingung) Die Bilinearform $b : X \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt die sogenannte *Inf-Sup-Bedingung*

$$\inf_{q \in Q \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{u} \in X \setminus \{0\}} \frac{b(\mathbf{u}, q)}{\|\mathbf{u}\|_X \|q\|_Q} \geq \beta > 0.$$

Beweis. Siehe [Lad69]. □

Satz 1.3 Aufgrund der obigen Inf-Sup-Bedingung, gibt es zu jeder Lösung $\mathbf{u} \in V$ von (1.6) genau einen Druck $p \in Q$, sodass (\mathbf{u}, p) das Problem (1.5) löst.

Beweis. Folgerung aus der obigen Inf-Sup-Bedingung aus Satz 1.2. Siehe hierzu zum Beispiel [Ver98] oder [Lay08]. □

Es gibt also zu jeder Lösung von (1.6) einen passenden Druck, um (1.5) zu lösen. Umgekehrt ist es offensichtlich, dass eine Geschwindigkeit, die Teil einer Lösung von (1.5) ist, auch (1.6) löst. Die beiden Probleme sind also äquivalent.

Nach [Tem83] können wir den passenden Druck $p \in Q$ zu einer Lösung \mathbf{u} von (1.6) durch folgendes Variationsproblem bestimmen.

Finde $p \in Q$, sodass für alle $\mathbf{v} \in V^\perp$:

$$b(\mathbf{v}, p) = l(\mathbf{v}).$$

Hierbei ist

$$V^\perp := \{\mathbf{v} \in X : a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{w} \in V\}$$

das *orthogonale Komplement* von V in X bezüglich a .

1.1.1 Existenz und Eindeutigkeit

Wie schon in Bemerkung 1.1 beschrieben, führen wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Stokes-Gleichungen auf Aussagen über das dahinter liegende Minimierungsproblem zurück (siehe zum Beispiel [Gun87]). Um außerdem eine a-priori Schranke aufzustellen, brauchen wir zunächst folgende duale Normen als geeignetes Maß der rechten Seite.

Definition 1.1 (Duale Normen)

Sei $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$, dann sind die H^{-1} - und die V^* -Norm definiert durch

$$\|\mathbf{f}\|_{-1} := \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v})}{\|\nabla \mathbf{v}\|} \quad \text{und} \quad \|\mathbf{f}\|_* := \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v})}{\|\nabla \mathbf{v}\|}.$$

Außerdem brauchen wir die Stetigkeit, Symmetrie und Koerzivität der Bilinearform a auf V . Diese Eigenschaften zeigen wir im folgenden Lemma auf ganz X , womit sie auch für den Unterraum V gelten.

Lemma 1.4 Die Bilinearform $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, symmetrisch und koerziv.

Genauer heißt das: Für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ ist $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ und es existiert ein $\gamma > 0$, sodass für alle $\mathbf{u} \in X$, $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \gamma |\mathbf{u}|_X^2$.

Beweis. Die Bilinearität ergibt sich sofort aus der Linearität des Differentialoperators ∇ . Die Stetigkeit und Koerzivität zeigen wir aufgrund der Äquivalenz von H^1 -Norm und H^1 -Halbnorm auf X in der Halbnorm. Zunächst gilt für die Stetigkeit mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|a(\mathbf{v}, \mathbf{w})| = \nu \left| \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} \, dx \right| \leq \nu \|\nabla \mathbf{v}\|_0 \|\nabla \mathbf{w}\|_0 = \nu |\mathbf{v}|_1 |\mathbf{w}|_1.$$

Die Koerzivität ergibt sich dann mit Hilfe der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung aus Satz 0.4

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \, dx = \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_0^2 = \gamma |\mathbf{u}|_1^2,$$

mit $\gamma = \nu$. □

Des Weiteren brauchen wir, dass V wirklich ein Hilbert-Raum ist. Als Unterraum des Hilbert-Raums X reicht es, die Abgeschlossenheit zu zeigen, was wir auf die Stetigkeit von b zurückführen.

Lemma 1.5 Die Bilinearform $b : X \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis. Analog zur Stetigkeit von a aus Lemma 1.4. \square

Lemma 1.6 V ist ein abgeschlossener Unterraum von X .

Beweis. Dies folgt aus der Stetigkeit von b . Ist nämlich \mathbf{v}_n eine beliebige Folge in V mit $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v} \in X$, so ist für ein festes $q \in Q$ stets

$$b(\mathbf{v}_n, q) = 0.$$

Da b stetig ist, muss $b(\mathbf{v}, q) = 0$ sein. Es ist also $\mathbf{v} \in V$ und V somit abgeschlossen. \square

Nun haben wir alle Voraussetzungen, um den Satz von Lax-Milgram 0.14 anzuwenden. Er liefert direkt folgendes Resultat:

Satz 1.7 Für jedes $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n$ existiert eine eindeutige Lösung $\mathbf{u} \in V$ der Stokes-Gleichungen (1.6). Diese minimiert als einzige Funktion in V das Funktional $J(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v})$ und erfüllt die a-priori Abschätzung

$$\|\mathbf{u}\|_X \leq \frac{1}{\gamma} \|\mathbf{f}\|_*.$$

1.1.2 Bedeutung der Divergenzfreiheit

Wie wir im einführenden Kapitel gesehen haben, sind divergenzfreie und rotationsfreie Funktionen senkrecht bezüglich des L^2 -Skalarprodukts, wenn die divergenzfreien Funktionen auf dem Rand verschwinden. In der Stokes-Gleichung (1.2) hat dies große Bedeutung (vgl. [Lin14]). Zunächst brauchen wir folgende kommutative Eigenschaft, des Laplace-Operators.

Lemma 1.8 Für $\mathbf{u} \in H^3$ ist $\nabla \cdot (\Delta \mathbf{u}) = \Delta (\nabla \cdot \mathbf{u})$.

Beweis. Aufgrund der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\Delta \mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \Delta \mathbf{u}_i \\ &= \Delta \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \mathbf{u}_i \\ &= \Delta (\nabla \cdot \mathbf{u}).\end{aligned}$$

□

Als direkte Folgerung hieraus erhalten wir, dass für divergenzfreie \mathbf{u} auch $\Delta \mathbf{u}$ divergenzfrei ist.

$$\nabla \cdot (\Delta \mathbf{u}) = \Delta \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{u})}_{=0} = \mathbf{0}.$$

Da nach der Massengleichung die Geschwindigkeit in den Stokes-Gleichungen divergenzfrei ist, ist auch $\Delta \mathbf{u}$ in der Impulsgleichung divergenzfrei.

Betrachten wir nun die Helmholtz-Zerlegung der rechten Seite

$$\mathbf{f} = \mathbf{w} + \nabla \psi,$$

wobei \mathbf{w} und $\nabla \psi$ senkrecht sind. In der Impulsgleichung haben wir

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{w} + \nabla \psi.$$

Für $\Delta \mathbf{u}$ gelten jedoch keine homogenen Dirichlet-Randbedingungen, weshalb $-\nu \Delta \mathbf{u}$ und ∇p im Allgemeinen nicht senkrecht zueinander sind. Falls jedoch die Normalenkomponente der Geschwindigkeit auf dem Rand null ist, also $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf Γ , so werden zusätzliche rotationsfreie Kräfte auf der rechten Seite ausschließlich durch den Druck balanciert.

Diese Invarianz

$$\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} + \nabla \varphi \implies (\mathbf{u}, p) \rightarrow (\mathbf{u}, p + \varphi),$$

bei $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma} = 0$, wird nach [Lin14] von vielen Diskretisierungen verletzt, was zu unphysikalischen Oszillationen in den diskreten Lösungen führt.

Beispiel 1.9 Wählen wir eine gänzlich rotationsfreie rechte Seite, also $\mathbf{f} = \nabla \varphi$, so erhalten wir bei homogenen Dirichlet-Randwerten $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ und $p = \varphi$ als Lösung.

Kehren wir zunächst zurück zu den Navier–Stokes-Gleichungen.

1.2 Die Navier–Stokes–Gleichungen

Schwache Formulierung der Gleichungen

Auch für die Navier–Stokes–Gleichungen erhalten wir durch Multiplikation der Gleichungen (1.1) mit Testfunktionen $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$ bzw. $q \in L_0^2(\Omega)$ und Integration über dem gesamten Gebiet Ω eine schwache Formulierung

Finde $(\mathbf{u}, p) \in X \times Q$, sodass für alle $(\mathbf{v}, q) \in X \times Q$:

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad (1.7) \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx &= 0. \end{aligned}$$

Auch hier erfüllt eine hinreichend glatte Lösung der schwachen Form (1.7) auch die klassische Form (1.1). Umgekehrt erfüllt jede Lösung von (1.1) auch die Gleichungen (1.7).

Das Variationsproblem

Um die schwache Form der Gleichungen mittels Linearformen zu schreiben, brauchen wir neben a , b und l aus (1.4) noch die Trilinearform

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, dx = \int_{\Omega} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbf{u}_i \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{w}_j \, dx. \quad (1.8)$$

Mit ihr kann (1.7) als

Finde $(\mathbf{u}, p) \in X \times Q$, sodass für alle $(\mathbf{v}, q) \in X \times Q$:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= l(\mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

geschrieben werden.

Wenn wir wieder die schwache Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit \mathbf{u}

als Bedingung in unserem Lösungsraum festschreiben, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{Finde } \mathbf{u} \in V, \text{ sodass für alle } \mathbf{v} \in V: \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Satz 1.10 Zu jeder Lösung $\mathbf{u} \in V$ von (1.10) gibt es genau einen Druck $p \in Q$, sodass (\mathbf{u}, p) das Problem (1.9) löst.

Beweis. Folgerung aus der Inf-Sup-Bedingung aus Satz 1.2. Siehe hierzu [Ver98]. \square

Analog zu den Stokes-Gleichungen sind also auch die beiden Formulierungen des Navier–Stokes-Problems (1.9) und (1.10) äquivalent.

Nach [Tem83] können wir den passenden Druck $p \in Q$ zu einer Lösung \mathbf{u} von (1.10) durch folgendes Variationsproblem bestimmen.

Finde $p \in Q$, sodass für alle $\mathbf{v} \in V^\perp$:

$$b(\mathbf{v}, p) = l(\mathbf{v}) - c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Mit Hilfe der neuen Darstellung (1.10) können wir a priori eine obere Schranke für Lösungen \mathbf{u} angeben.

Proposition 1.11 Jede Lösung von (1.10) erfüllt die folgende Abschätzung:

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \leq \nu^{-1} \|\mathbf{f}\|_*.$$

Beweis. Wir setzen \mathbf{u} selbst als Testfunktion in (1.10) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \underbrace{c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u})}_{=0} &= l(\mathbf{u}) \\ \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \, dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dx \\ \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 &\leq \|\mathbf{f}\|_* \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \\ \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} &\leq \nu^{-1} \|\mathbf{f}\|_* \end{aligned}$$

Dass $c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ ist, sehen wir in Lemma 1.12. \square

1.2.1 Existenz und Eindeutigkeit

Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Navier–Stokes-Gleichungen zu treffen, ist deutlich schwieriger, als bei den Stokes-Gleichungen. Unter einschränkenden Bedingungen lassen sich dennoch Aussagen treffen. Hierzu brauchen wir zunächst folgende Eigenschaften der obigen Trilinearform.

Lemma 1.12 $c : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine stetige Trilinearform und für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$ mit $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ gelten:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= -c(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \\ c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= 0. \end{aligned}$$

Beweis. Die Trilinearität von c ergibt sich aus der Linearität des Differentialoperators ∇ .

Zur Stetigkeit nutzen wir für c die Schreibweise mittels dyadischem Produkt² und wenden die Hölder'sche Ungleichung an. Damit erhalten wir zu

² $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (\mathbf{u}_i \mathbf{v}_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ dydisches Produkt

nächst

$$\begin{aligned}
|c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| &= \left| \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}) \, dx \right| \\
&\leq \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \, \|\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \, \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} \, \|\mathbf{w}\|_{L^4(\Omega)}
\end{aligned}$$

für $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$. Aufgrund von $n \leq 4$ ist nach der Sobolevungleichung aus Satz 0.5

$$\begin{aligned}
\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \, \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} \, \|\mathbf{w}\|_{L^4(\Omega)} &\leq C \, \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \, \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \, \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \, \|\mathbf{v}\|_X \, \|\mathbf{u}\|_X \, \|\mathbf{w}\|_X.
\end{aligned}$$

Die Antisymmetrie für $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$ mit $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ folgt mit dem Integralsatz von Gauss:

$$\begin{aligned}
c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbf{u}_i \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \mathbf{x}_i} \, \mathbf{w}_j \, dx \\
&= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} (\mathbf{u}_i \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j) - \mathbf{v}_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} (\mathbf{u}_i \mathbf{w}_j) \right) \, dx \\
&= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\int_{\Gamma} \underbrace{\mathbf{n}_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j}_{=0} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{v}_j \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_i} \, \mathbf{w}_j \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{v}_j \frac{\partial \mathbf{w}_j}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{u}_i \, dx \right) \\
&= - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) - c(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}).
\end{aligned}$$

□

Die kleinste Konstante, die die Ungleichung im obigen Stetigkeitsbeweis für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$ erfüllt, ist

$$M := \sup_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X} \frac{|c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|}{\|\mathbf{u}\|_X \|\mathbf{v}\|_X \|\mathbf{w}\|_X}.$$

Für den Unterraum $V \subset X$ ergibt sich mit

$$N := \sup_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V} \frac{|c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|}{\|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V \|\mathbf{w}\|_V}$$

offenbar $0 < N \leq M < \infty$.

Satz 1.13 Falls ν und \mathbf{f} die Bedingung

$$N\nu^{-2} \|\mathbf{f}\|_* < 1$$

erfüllen, hat die Gleichung (1.10) maximal eine Lösung.

Beweis. Seien \mathbf{u} und $\tilde{\mathbf{u}}$ zwei Lösungen von (1.10), dann gilt mit $\mathbf{w} := \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}$

$$\begin{aligned} 0 &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - c(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ &= a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - c(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v} \in V$. Wählen wir nun $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) - c(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) \\ &= \nu \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \underbrace{c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u})}_{=0} - \underbrace{c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}})}_{= +c(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u})} - c(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) \\ &\quad = -c(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) \\ &= \nu \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2 - c(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) + c(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) - c(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) \\ &= \nu \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2 + c(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) - c(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) \\ &= \nu \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2 + c(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit von c und der Abschätzung aus Proposition 1.11

erhalten wir mit der Umformung

$$\begin{aligned}\|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2 &= -\nu^{-1}c(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) \\ &\leq \nu^{-1}N\|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \\ &\leq \underbrace{\nu^{-2}N\|\mathbf{f}\|_*}_{<1}\|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

dass $\|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2} = 0$. Damit ist $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ und somit $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$. \square

Wir wollen nun versuchen unser nichtlineares Problem (1.10) durch eine Folge von linearen Problemen zu approximieren. Als Ansatz setzen wir ein festes $\mathbf{b} \in V$ in unserer Trilinearform c ein. Dadurch erhalten wir das sogenannte *Oseen-Problem*. Mit

$$a_{\mathbf{b}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$$

hat es folgende Form:

$$\begin{aligned}&\text{Finde } \mathbf{u} \in V, \text{ sodass für alle } \mathbf{v} \in V: \\ &a_{\mathbf{b}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}).\end{aligned}\tag{1.11}$$

Lemma 1.14 Die Bilinearform $a_{\mathbf{b}}$ ist für alle $\mathbf{b} \in V$ stetig und koerziv.

Beweis. Die Stetigkeit überträgt sich direkt aus der Stetigkeit von a und c .

$$\begin{aligned}|a_{\mathbf{b}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| + |c(\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| \\ &\leq \nu\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V + N\|\mathbf{b}\|_V\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V \\ &= (\nu + N\|\mathbf{b}\|_V)\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V.\end{aligned}$$

Die Koerzivität ergibt sich aufgrund von $c(\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$:

$$|a_{\mathbf{b}}(\mathbf{u}, \mathbf{u})| = |a(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq \gamma \|\mathbf{u}\|_1^2.$$

□

Satz 1.15 Das Problem (1.11) hat für alle $\mathbf{f} \in X^*$ und $\mathbf{b} \in V$ eine eindeutige Lösung, die folgender Abschätzung genügt:

$$\nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \leq \|\mathbf{f}\|_*.$$

Beweis. Anwendung von Lax-Milgram 0.14 unter Benutzung von Lemma 1.14.

□

Bemerkung 1.16 Da das linearisierte Problems (1.11) eine eindeutige Lösung besitzt, können wir uns einen Operator $T : V \rightarrow V$ definieren, der uns zu gegebenem $\mathbf{b} \in V$ die entsprechende Lösung $\mathbf{u} \in V$ liefert. Ein Fixpunkt \mathbf{u}^* von T ist dann gleichbedeutend mit einer Lösung von (1.10), denn für ein solches \mathbf{u}^* ist

$$a_{\mathbf{u}^*}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}).$$

Als Ansatz zur Lösung von (1.10) können wir also eine Fixpunktiteration des Operators T nutzen.

Satz 1.17 Der Operator T ist unabhängig von \mathbf{b} beschränkt. Falls zusätzlich

$$N\nu^{-2} \|\mathbf{f}\|_* < 1$$

erfüllt ist, bildet er eine Kontraktion auf V .

Beweis. Die obere Schranke für $T(\mathbf{b})$ liefert Satz 1.15. Unter der Annahme $N\nu^{-2} \|\mathbf{f}\|_* < 1$ ist T nach Satz 1.13 wohldefiniert. Für $\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{b}} \in V$ sei nun $\mathbf{u} = T(\mathbf{b})$ und $\tilde{\mathbf{u}} = T(\tilde{\mathbf{b}})$. Aufgrund von

$$\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{b}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}) \cdot \nabla \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{b}} \cdot (\nabla \mathbf{u} - \nabla \tilde{\mathbf{u}})$$

ist

$$c(\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - c(\tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}).$$

Dies setzen wir ein in

$$\begin{aligned} 0 &= a_{\mathbf{b}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - a_{\tilde{\mathbf{b}}}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - c(\tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ &= a(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Für $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}$ erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})\|^2 &= -c(\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{u}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) - \underbrace{c(\tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})}_{=0} \\ &\leq N \|\nabla(\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}})\| \|\nabla \mathbf{u}\| \|\nabla(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})\| \\ &\leq \nu^{-1} N \|\mathbf{f}\|_* \|\nabla(\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}})\| \|\nabla(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})\|. \end{aligned}$$

Umgestellt liefert uns dies, aufgrund der Äquivalenz von Norm und Halbnorm auf X , die Kontraktion von T :

$$|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}|_1 \leq \underbrace{\nu^{-2} N \|\mathbf{f}\|_*}_{<1} |\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}|_1.$$

□

Proposition 1.18 Unter der Voraussetzung von Satz 1.17 besitzt T einen Fixpunkt und damit hat das Problem (1.10) eine eindeutig Lösung.

Beweis. Anwendung des Fixpunktsatzes von Banach. □

Bemerkung 1.19 Als zwei Möglichkeiten diese Fixpunktiteration zu berechnen, werden in Kapitel 3 zwei Iterationen vorgestellt. Außerdem wird anhand eines im nächsten Kapitel eingeführten Beispiels die Effizienz dieser Methoden verglichen.

2 Beispiele

2.1 Vorbemerkungen

Die ersten beiden Beispiele simulieren zweidimensionale Strömungen in verschiedenen gearteten Kanälen. Die Fluide werden in beiden Fällen nur durch den Druck getrieben, sodass keine äußeren Kräfte wirken. Als Randbedingung dient die sogenannte *Hagen-Poiseuille-Strömung* im Einfluss-Bereich und natürliche Randbedingungen im Ausfluss-Bereich. Beides wird zunächst in einem eigenen Abschnitt kurz hergeleitet.

Das dritte Beispiel ist ein eher akademisches. Hier betrachten wir die zweidimensionale Strömung in einer quadratischen Box, die nur durch eine äußere Kraft getrieben wird. Dieses Beispiel entspricht zwar nicht einer physikalischen Modellierung, dafür kennen wir die analytische Lösung, weshalb wir exakte Fehler unserer Diskretisierungen berechnen können.

2.1.1 Hagen-Poiseuille-Strömung

Die Hagen-Poiseuille-Strömung ist eine Art Musterströmung, die entsteht, wenn ein Fluid ohne Hindernisse, und nur durch den Druck getrieben fließt (vergleiche [EGK08]).

Wie in Abbildung 1 dargestellt, soll das Fluid zwischen zwei Platten fließen, die sich parallel zur $x_1 - x_2$ -Ebene auf der Höhe $x_3 = 0$ und $x_3 = d$ befinden. Es soll ausschließlich durch den Druckunterschied in x_1 Richtung, und nicht durch eine äußere Kraft getrieben werden. Wir betrachten den Abschnitt

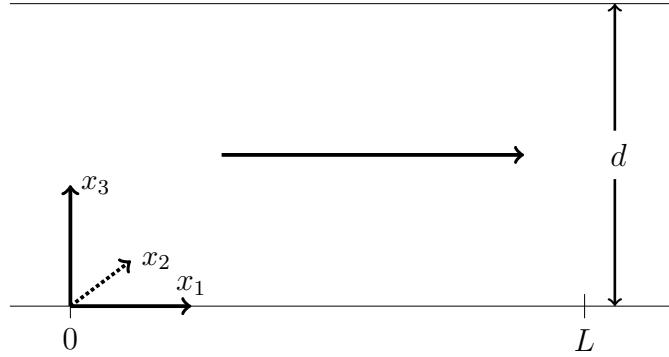


Abbildung 1: Hagen-Poiseuille-Strömung zwischen zwei parallelen Platten mit Abstand d , auf dem Abschnitt $x_1 \in [0, L]$

$x_1 = 0$ bis $x_1 = L$. Hier sollen die Werte

$$p(\mathbf{x}) = p_1 \text{ für } x_1 = 0,$$

$$p(\mathbf{x}) = p_2 \text{ für } x_1 = L,$$

mit $p_1 > p_2$ vorgegeben sein. Der Druckabfall von $x_1 = 0$ zu $x_1 = L$ sorgt also für eine Strömung in positiver x_1 -Richtung. Da die beiden Platten parallel und in x_2 -Richtung nicht beschränkt sind, kann man außerdem davon ausgehen, dass die Strömung lediglich von der x_3 -Komponente abhängt und in x_1 -Richtung fließt. Dies nehmen wir als Ansatz

$$\mathbf{u} = u(x_3) \mathbf{e}_1,$$

wobei \mathbf{e}_1 der erste Einheitsvektor ist, und setzen ihn mit $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ in die Stokes-Gleichung (1.5) ein

$$-\nu u''(x_3) \mathbf{e}_1 = -\nabla p(\mathbf{x}) = -\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}\right)(\mathbf{x}).$$

Als Randwerte haben wir

$$u(0) = u(d) = 0.$$

Da die zweite und dritte Komponente von $\nabla p(\mathbf{x})$ offenbar gleich null sind, hängt p und damit auch ∇p nur von x_1 ab. Die linke Seite der obigen Gleichung hängt jedoch nur von x_3 ab. Damit trotzdem Gleichheit gilt, müssen beide Seiten gleich einer Konstanten c sein

$$\nu u''(x_3) = p'(x_1) = c. \quad (2.1)$$

Der Druck berechnet sich also mittels der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$p'(x_1) = c, p(0) = p_1 \text{ und } p(L) = p_2$$

mit der Lösung

$$p(x_1) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{L}x_1 \text{ und } c = \frac{p_2 - p_1}{L}.$$

Es entsteht also ein linearer Druckabfall auf dem Intervall $[0, L]$. Aus (2.1) erhalten wir aber noch eine zweite Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Geschwindigkeit.

$$\nu u''(x_3) = c \text{ und } u(0) = u(d) = 0.$$

Sie hat als Lösung:

$$u(x_3) = \frac{p_1 - p_2}{2\nu L}x_3(d - x_3).$$

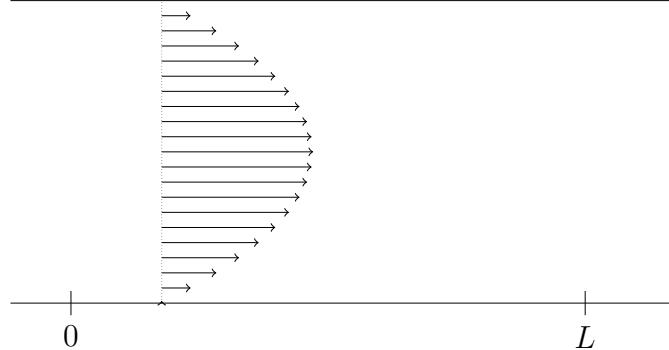


Abbildung 2: Quadratisches Geschwindigkeitsprofil der Hagen-Poiseuille-Strömung

Wie in Abbildung 2 dargestellt, entsteht ein quadratisches Strömungsprofil mit Maximum bei

$$u\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{p_1 - p_2}{8\nu L} d^2.$$

Bemerkung 2.1 Die Hagen-Poiseuille-Strömung erfüllt auch die Navier–Stokes-Gleichungen, denn für $\mathbf{u} = u(x_3) \mathbf{e}_1$ ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= (u(x_3) \mathbf{e}_1 \cdot \nabla) u(x_3) \mathbf{e}_1 \\ &= (u(x_3) \partial_{x_1}) u(x_3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir wollen nun dieses Strömungsprofil einer hindernisfreien Strömung in den folgenden zwei Beispielen als Randbedingung einführen. Auf diese Weise soll eine vollkommen gleichmäßige Strömung bei Eintritt in das betrachtete Gebiet simuliert werden.

2.1.2 Natürliche Randbedingungen

Im Ausfluss-Bereich Γ_A des Gebiets Ω soll die Strömung zu keinem unphysikalischen Verhalten gezwungen werden. Da wir hier trotzdem Randbedingungen brauchen, leiten wir sie aus der schwachen Formulierung der Stokesbeziehungsweise Navier–Stokes-Gleichungen her, sodass die Strömung sie auf natürliche Weise erfüllt (siehe zum Beispiel [ESW05]).

Betrachten wir hierfür zunächst die Herleitung unserer schwachen Formulierung:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx &= \int_{\Omega} (-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p) \cdot \mathbf{v} \, dx \\ &= \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \nu \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \, dS \\ &\quad - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned}$$

Da wir bisher stets $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$ annahmen, verschwanden die auftretenden Randintegrale. Falls wir nun aber davon ausgehen, dass die Testfunktionen auf dem Ausfluss-Bereich Γ_A nicht verschwinden, so erhalten wir für alle diese Testfunktionen

$$\int_{\Gamma_A} \left(p \mathbf{n} - \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot \mathbf{v} \, dS = 0.$$

In starker Form sieht die sogenannte *natürliche Randbedingung* also folgendermaßen aus:

$$p \mathbf{n} - \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_A.$$

2.1.3 Diskrete Punkt norm

Da in nicht allen Beispielen eine analytische Lösung bekannt ist, stellt sich die Frage, was überhaupt ein geeignetes Maß für die Konvergenz der diskreten Lösungen ist. Hierfür nehmen wir den diskreten Fehler zu einer Referenzlösung, welche auf einem sehr feinen Gitter berechnet wurde. Sei \mathbf{u}_h die jeweilige diskrete Lösung und \mathbf{u}_{ref} die Referenzlösung, dann ist der diskrete Fehler auf K ausgewählten Punkten P_1, \dots, P_K definiert als

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{ref}\| := \frac{1}{K} \sqrt{\sum_{i=1}^K \left(\mathbf{u}_h^1(P_i) - \mathbf{u}_{ref}^1(P_i) \right)^2 + \left(\mathbf{u}_h^2(P_i) - \mathbf{u}_{ref}^2(P_i) \right)^2}.$$

2.2 Kollisionsfluss im Kreuzkanal

Als erstes Beispiel betrachten wir ein Fluid, dass in einem Kanal frontal kollidiert und senkrecht zur Einflussrichtung aus dem Kollisionsbereich abfließen kann. Das Gebiet sei hierzu

$$\tilde{\Omega} := [-8, 9] \times [0, 1] \cup [0, 1] \times [-8, 9].$$

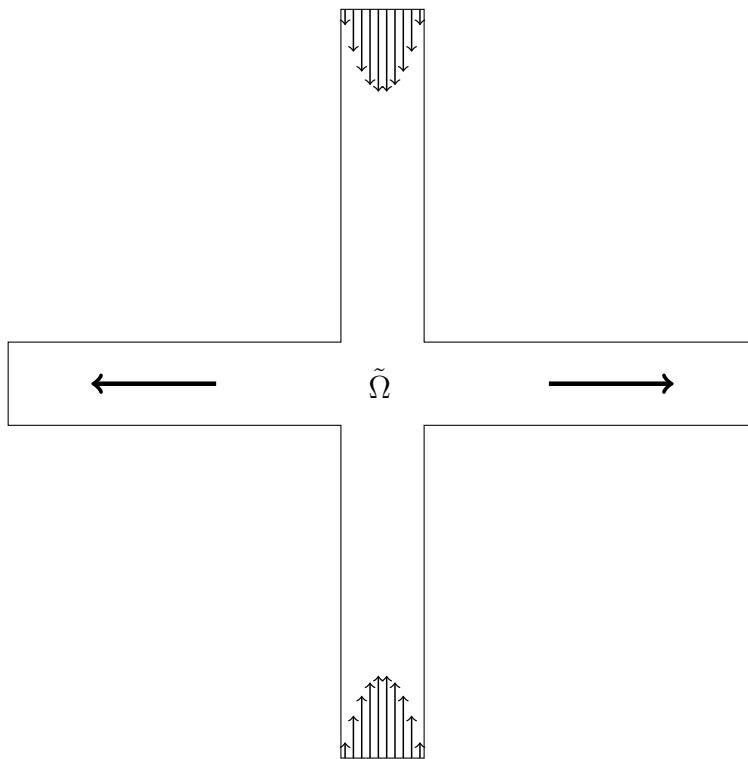


Abbildung 3: $\tilde{\Omega}$ mit eingezeichnetem Hagen-Poiseuille-Profil am Einfluss-Bereich

Aus Symmetriegründen können wir später den benötigten Speicher reduzieren, indem wir nur ein Viertel dieses Gebietes betrachten. Unsere dortige Lösung muss dann zweimal gespiegelt werden um eine Lösung auf ganz $\tilde{\Omega}$ zu liefern. Außerdem können wir aufgrund der natürlichen Ausfluss-Randbedingungen, den Kanal im weniger interessanten Ausfluss-Bereich ver-

kürzen. Wir betrachten nun also das Gebiet

$$\Omega := \left[-4, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[-8, \frac{1}{2}\right].$$

Der Rand teilt sich dann auf in $\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_A \cup \Gamma_D \cup \Gamma_S$, mit

$$\begin{aligned}\Gamma_E &:= \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \{-8\}, \\ \Gamma_A &:= \{-4\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \Gamma_D &:= [-4, 0] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-8, 0], \\ \Gamma_S &:= \left[-4, \frac{1}{2}\right] \times \{\frac{1}{2}\} \cup \{\frac{1}{2}\} \times \left[-8, \frac{1}{2}\right].\end{aligned}$$

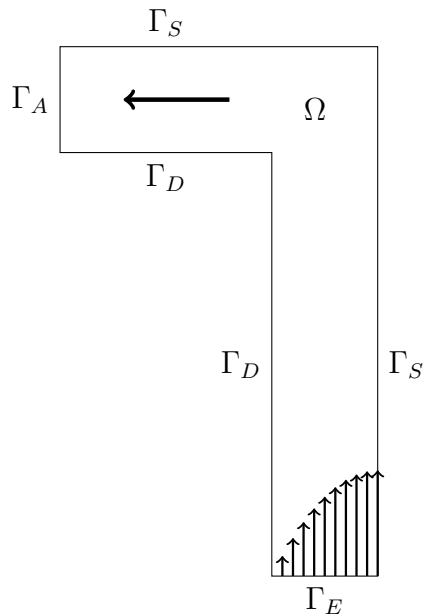


Abbildung 4: Ω mit den einzelnen Randabschnitten Γ_E , Γ_A , Γ_D und Γ_S . Im Einfluss-Bereich Γ_E ist das Hagen-Poiseuille-Profil eingezeichnet

Γ_E stellt den Einflussbereich dar. Wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben soll die Strömung hier als Randbedingung das Hagen-Poiseuille-Profil erfüllen. Bei

dieser Kanalbreite ergibt sich folgende Geschwindigkeit:

$$\mathbf{u}(x, y) = (0, 4x(1 - x)) \quad \text{auf } \Gamma_E.$$

Im Ausfluss-Bereich Γ_A sollen, wie in Abschnitt 2.1.2 beschrieben, natürliche Ausfluss-Bedingungen gelten

$$p \mathbf{n} - \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_A.$$

Auf der Kanalbegrenzung Γ_D sollen homogene Dirichlet-Bedingungen

$$\mathbf{u}(x, y) = (0, 0) \quad \text{auf } \Gamma_D$$

gelten.

2.2.1 Symmetrierandbedingung

Die Symmetrie-Randbedingung (vgl. [Lin09]) auf Γ_S hat die Form

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ und } \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ auf } \Gamma_S. \quad (2.2)$$

Das heißt einerseits, dass auf dem Rand die Normalenkomponente der Geschwindigkeit null ist, und andererseits, dass sich die Tangentialkomponente nicht in Normalenrichtung verändert. Die Strömung fließt also auf der Spiegelachse nur in Tangentialrichtung und betrachtet auf einem Querschnitt durch den Kanal, hat diese Komponente dort ein lokales Minimum oder Maximum.

Dass die Randbedingung (2.2) wirklich geeignet ist, die Strömung sich also wirklich symmetrisch verhält, zeigt die Abbildung 6. Hier sieht man den in Abschnitt 2.1.3 eingeführten diskreten Fehler zwischen der Lösung auf dem vollständigen Gebiet $\tilde{\Omega}$ und der, auf dem reduzierten Gebiet Ω mit Symmetrierand. Die 10325 Punkte, auf denen die Lösungen verglichen werden, sind

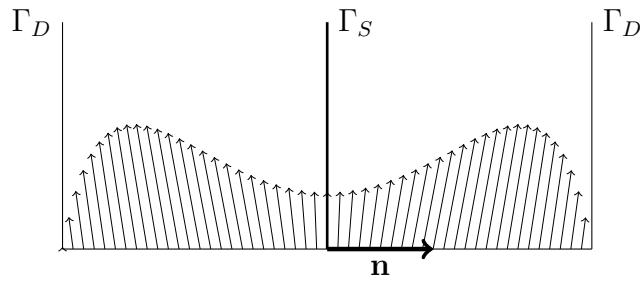


Abbildung 5: Geschwindigkeitsfeld der Kanalströmung im Querschnitt. Sie erfüllt die Symmetrierandbedingung (2.2)

äquidistant im Bereich

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \quad (2.3)$$

gesetzt.

Gelöst wurden einmal die Stokes-Gleichungen und einmal die Navier–Stokes-Gleichungen mit $\nu = 1$. Dass sich die beiden Fehler kaum unterscheiden, ist nicht verwunderlich, da die Strömung aufgrund der kleinen Reynoldszahl ($\nu = 1$) sehr zäh ist. Der nichtlineare Term $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ist also, aufgrund der geringen Geschwindigkeiten und der geringen Geschwindkeitsänderungen, klein. Als Diskretisierung diente das Schema CR^+ aus Abschnitt 5. Wie man sieht, konvergieren beide Fehler bei Gitterverfeinerung gegen null.

Die verwendeten Gitter sind in beiden Fällen im Wesentlichen äquidistant und nur um die Ecken verfeinert. Die Verfeinerung wurde a priori so gewählt, da in diesen Bereichen ein komplexeres Strömungsverhalten zu erwarten ist. Im Falle von $\tilde{\Omega}$ heißt das, dass um die Punkte $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 1)$, im Fall von Ω , wie in Abbildung 7 dargestellt, um den Punkt $(0, 0)$ verfeinert wurde.

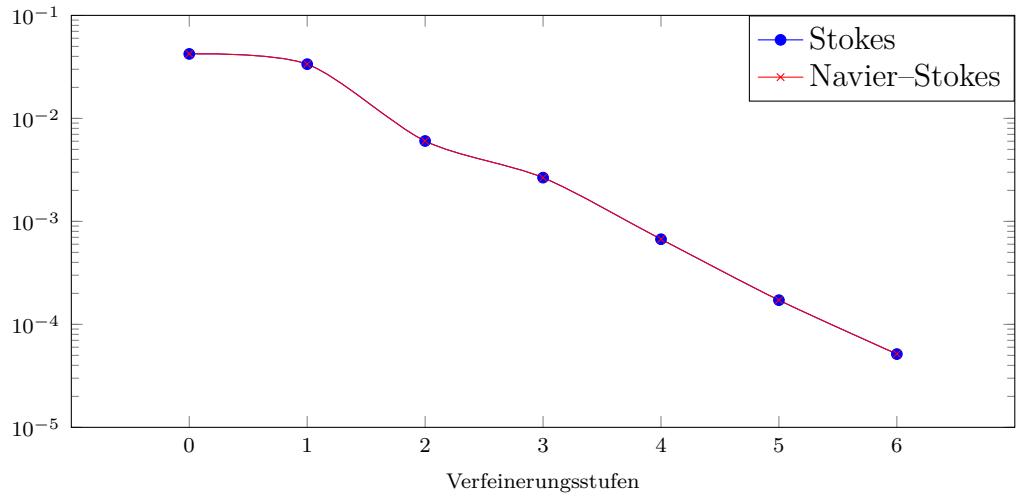


Abbildung 6: Diskreter Fehler zwischen den Lösungen mit und ohne Symmetrieraumbedingung. Der Fehler wurde auf 10.325 Punkten im Bereich aus (2.3) berechnet. In allen Fällen ist $\nu = 1$ und die y -Achse logarithmisch gezeichnet

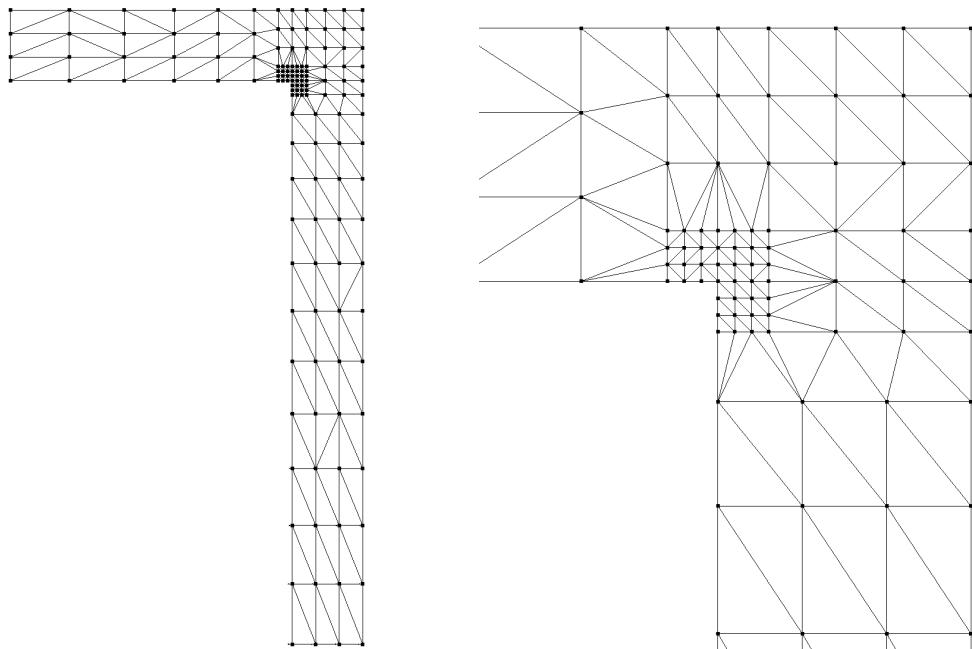


Abbildung 7: Triangulierung von Ω mit 139 Konten. Links das gesamte Gitter, rechts ein Ausschnitt des Kollisionsbereichs

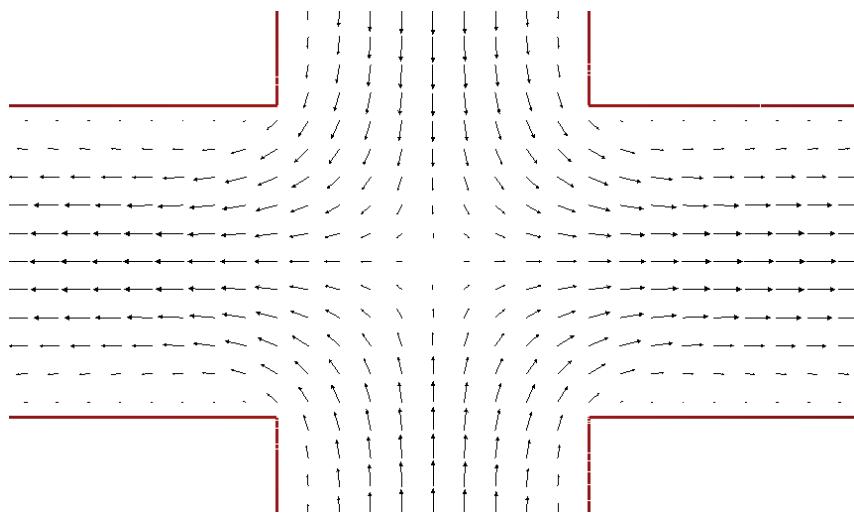


Abbildung 8: Geschwindigkeitsfeld, berechnet mit 207.136 Freiheitsgraden und $\nu^{-1} = 250$

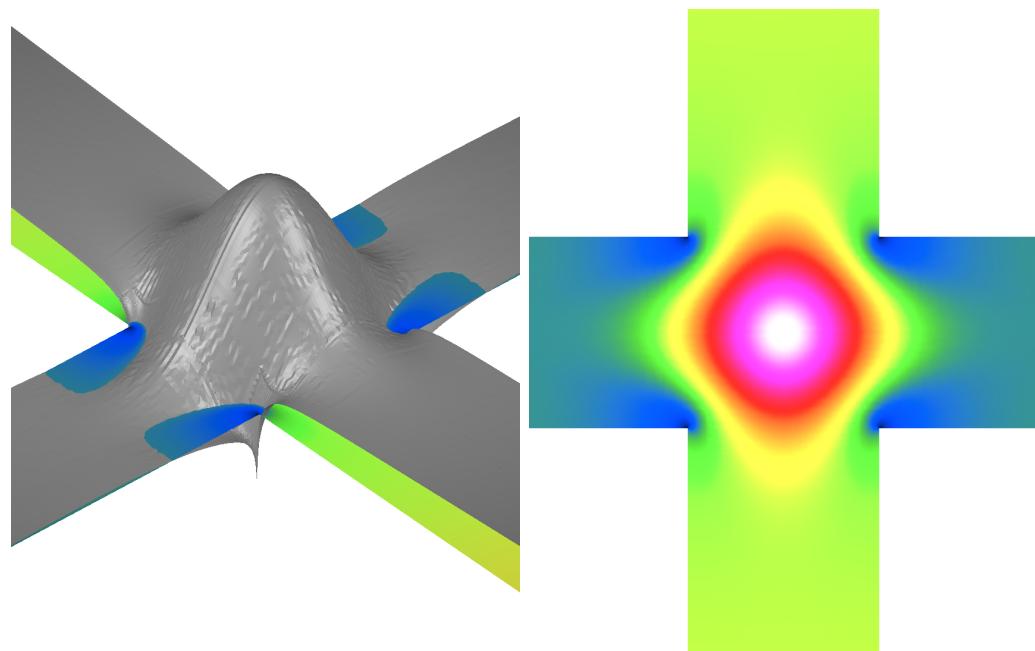


Abbildung 9: Druck, berechnet mit 207.136 Freiheitsgraden und $\nu^{-1} = 250$. Im linken Bild ist er als Höhe in einem 3D-Bild veranschaulicht, im rechten Bild über die Farbskala in 2D

2.3 L-förmiger Fluss

Als zweites Beispiel betrachten wir den Fluss in einem L-förmigen Kanal. Hier prallt die Strömung, im Unterschied zum vorherigen Beispiel, nicht auf sich selbst, sondern auf die Kanalbegrenzung. Die Symmetrie bezüglich des Kollisionsmittelpunkts, die wir bisher hatten, geht dabei verloren. Wie wir sehen werden, entstehen stattdessen Wirbel, die die Strömung bei größer werdender Reynoldszahl schneller instationär werden lassen.

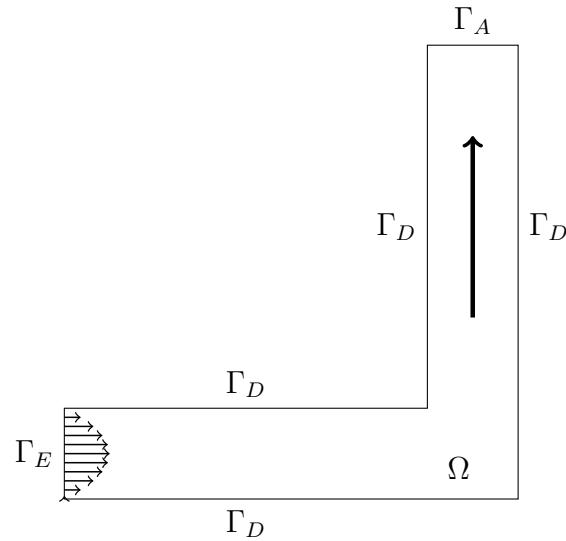


Abbildung 10: Ω mit den einzelnen Randabschnitten Γ_E , Γ_A und Γ_D

Der Rand des betrachteten Gebiets Ω teilt sich auf in $\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_A \cup \Gamma_D$, mit

$$\Gamma_E := \{-4\} \times [0, 1],$$

$$\Gamma_A := [0, 1] \times \{5\},$$

$$\Gamma_D := \Gamma \setminus (\Gamma_E \cup \Gamma_N).$$

Γ_E und Γ_A stellen wie im vorherigen Beispiel Einfluss- und Ausfluss-Bereich dar. Auf der gesamten Kanalbegrenzung Γ_D sollen in diesem Beispiel jedoch homogene Dirichlet-Bedingungen und keine Symmetrierandbedingungen gel-

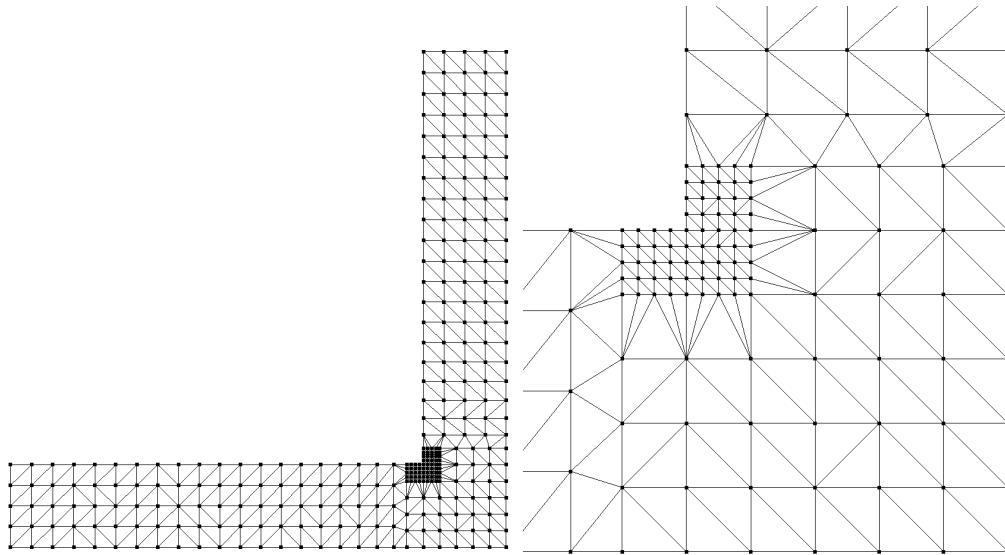


Abbildung 11: Triangulierung von Ω mit 305 Konten. Links das gesamte Gitter, rechts ein Ausschnitt des Kollisionsbereichs

ten.

Auch das verwendete Gitter ist analog zum vorherigen Beispiel äquidistant und nur um die Ecke $(0, 1)$ verfeinert (siehe Abbildung 11).

Wie man in Abbildung 12 sieht, tauchen in diesem Beispiel bei der Lösung von Navier–Stokes schon bei kleiner Reynoldszahl Wirbel auf, die das System schnell instationär werden lassen. Bei späteren Berechnungen in Kapitel 6 konnte die Reynoldszahl maximal auf 400 gesetzt werden.

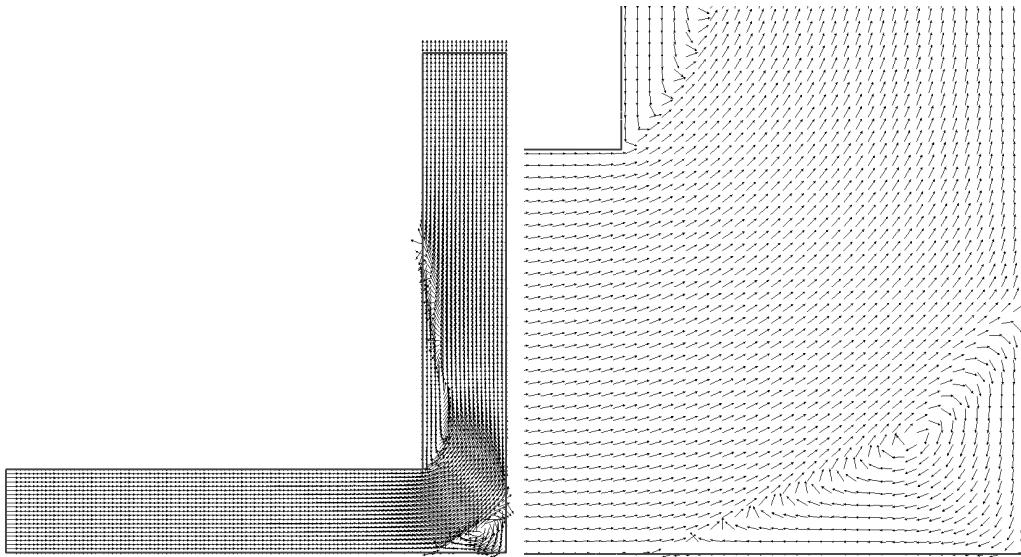


Abbildung 12: Geschwindigkeitsfeld der Strömung bei Navier–Stokes. Zur besseren Visualisierung sind die Vektoren unabhängig ihres absoluten Werts gezeichnet, sie geben also nur die Richtung des Fluxes, nicht seine Geschwindigkeit wider

2.4 Euler- und stokesartige Strömungsgebiete

Um die Lösungen unserer Beispiele genauer zu untersuchen, führen wir zwei Residuen ein, die das Verhalten der Strömung angeben sollen. Sie messen, wie gut eine Lösung der Navier–Stokes-Gleichungen (1.9) die Stokes-Gleichungen (1.5) bzw. die nichtlineare Euler-Gleichung $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$ erfüllt. Wir nennen eine Strömung dementsprechend *stokesartig* beziehungsweise *eulerartig*, je nachdem welches Residuum klein ist. Hierzu definieren wir das *Stokesresiduum*

$$\text{res}_{\text{Stokes}} := -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f}$$

und das *Eulerresiduum*

$$\text{res}_{\text{Euler}} := (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f}.$$

Diese Residuen können wir in jedem Gitterpunkt unserer Diskretisierung berechnen und so sogar untersuchen, in welchen Bereichen eine Strömung eher stokesartig oder eher eulerartig ist.

Bemerkung 2.2 Eine stokesartige Strömung bedeutet, dass der nichtlineare Term in den Navier–Stokes-Gleichungen klein ist. Die Strömung erfüllt also, genau wie die Hagen-Poiseuille-Strömung, gleichzeitig die Navier–Stokes- und die Stokes-Gleichungen.

In den beiden obigen Beispielen 2.2 und 2.3 ist dies vor allem im Einfluss- und Ausfluss-Bereich des Gebiets von Interesse. Im Einfluss-Bereich misst das Stokesresiduum, ob sich die Strömung aufgrund der Kollision schon verändert hat oder ob sie sich noch wie die Hagen-Poiseuille-Strömung am Rand verhält. Ganz analog gibt es im Ausfluss-Bereich an, wann sich die Strömung nach der Kollision wieder normalisiert hat und aufgrund der Reibung ins Hagen-Poiseuille-Profil zurück fällt. Auf diese Weise können wir feststellen, ob das betrachtete Gebiet geeignet ist. Ist das Stokesresiduum in der Nähe von Γ_E oder Γ_A nicht klein, so müssen wir das Gebiet in diesem Bereich vergrößern. Ist es bereits weit im Innern des Kanals klein, so können wir den Rechenaufwand minimieren, indem wir das Gebiet verkleinern und so Freiheitsgrade einsparen.

In der oberen Zeile der Abbildung 13 haben wir das Stokesresiduum der kollidierenden Kanalströmung aus Abschnitt 2.2 berechnet und farbig visualisiert. Die roten Bereiche sind dabei Bereiche mit großem Residuum im Vergleich zu den blauen Bereichen. Wie man sieht, hätte das Gebiet im Einfluss-Bereich noch weiter verkürzt werden können.

Die entsprechenden Ergebnisse zum L-förmigen Fluss aus Abschnitt 2.3 sind in Abbildung 14 dargestellt.

Bemerkung 2.3 Ein kleines Eulerresiduum bedeutet, dass der Term $-\nu\Delta\mathbf{u}$ klein ist. Offensichtlich ist dies bei großer Reynoldszahl auf natürliche Weise gegeben. Ist das Residuum trotzdem groß, muss $\Delta\mathbf{u}$ sehr große Werte angenommen haben. Die Strömung variiert in diesen Bereichen also stark.

In den beiden obigen Beispielen 2.2 und 2.3 ist die rechte Seite gleich null, weshalb das Eulerresiduum die Form

$$\text{res}_{Euler} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p$$

hat. Falls eine Strömung nun eulerartig ist, hat dies zur Konsequenz, dass der nichtlineare Term vom Druckgradienten bilanziert wird und somit rotationsfrei ist. Die in Abschnitt 1.1.2 beschriebenen Probleme vieler Diskretisierungen der Stokes-Gleichungen mit rotationsfreien Kräften auf der rechten Seite, sind in solchen Fällen also auch bei Navier–Stokes zu erwarten. Sie sind dann jedoch nicht durch die rechte Seite, sondern durch den nichtlinearen Term verursacht.

Der in Bemerkung 5.1 beschriebene Vorteil der Diskretisierung CR^+ gegenüber CR ist also besonders in Gebieten mit kleinem Eulerresiduum zu erwarten.

In den Abbildungen 13 und 14 ist in der jeweils unteren Zeile das Eulerresiduum der kollidierenden Kanalströmung aus Abschnitt 2.2 und dem L-förmigen Fluss aus Abschnitt 2.3 dargestellt. Wie zu erwarten, wird das Eulerresiduum bei großer Reynoldszahl im Kollisionsbereich klein. Die roten Bereiche an der Ecke des Kollisionsbereichs, werden durch die dort entstehenden Singularitäten verursacht. Da hier die Geschwindigkeit sprungartig auf null fällt, ist die Krümmung sehr groß, weshalb auch $-\nu\Delta\mathbf{u}$ trotz kleinem ν

groß wird.

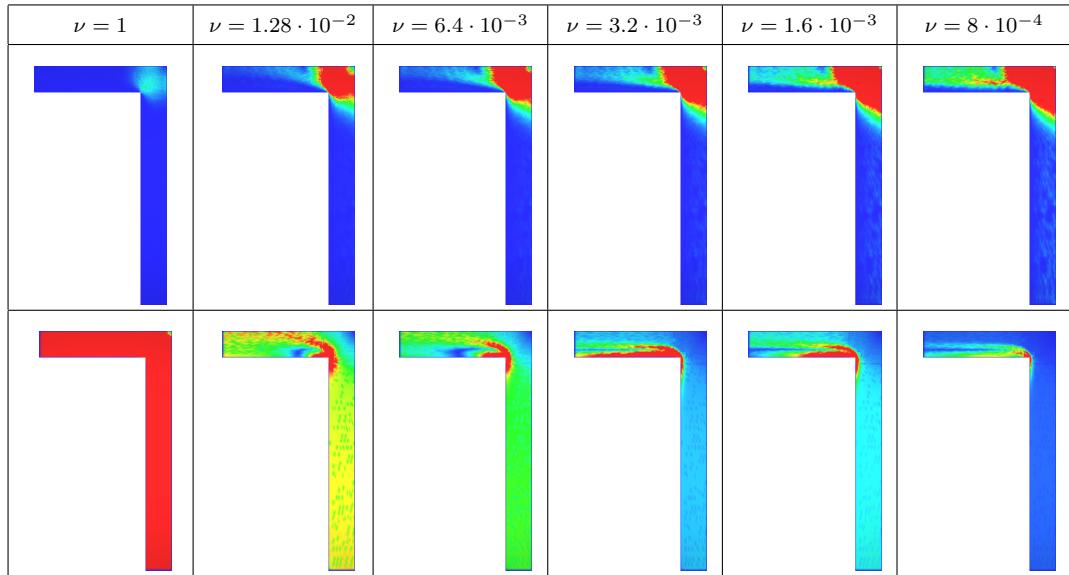


Abbildung 13: Kollisionsfluss mit Symmetrierand. Oben das Stokesresiduum, unten das Eulerresiduum. Diskretisierung mittels des Schemas CR^+ aus Kapitel 5 bei 205.386 Freiheitsgraden

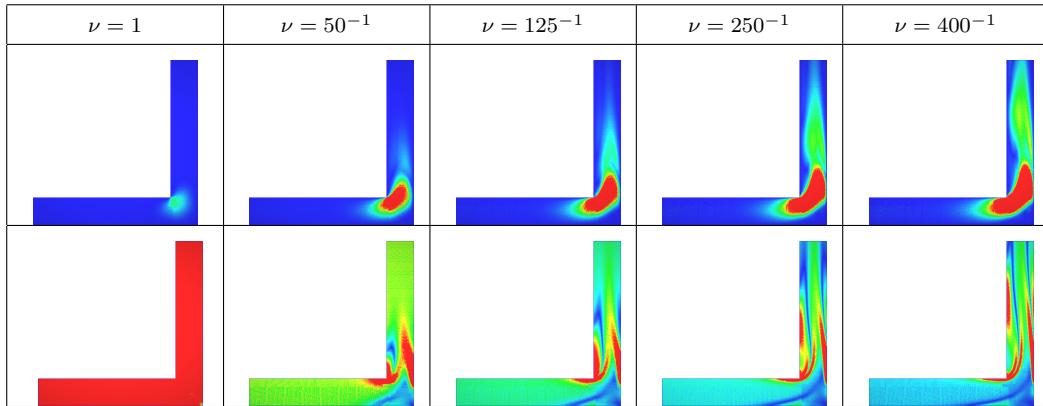


Abbildung 14: L-förmigen Fluss. Oben das Stokesresiduum, unten das Eulerresiduum. Diskretisierung mittels des Schemas CR^+ aus Kapitel 5 bei 494.528 Freiheitsgraden

2.5 Cavity-Beispiel

Diesem Beispiel liegt keine physikalische Modellierung zu Grunde. Es soll lediglich eine Strömung simuliert werden, deren analytische Lösung wir schon kennen. Das betrachtete Gebiet ist das Einheitsquadrat $\Omega = [0, 1]^2$ mit homogenen Dirichlet-Randwerten. Die Geschwindigkeit soll von der Stromfunktion

$$\psi(x, y) = x^2(1 - x^2)y^2(1 - y)^2$$

getrieben werden. Das bedeutet

$$\mathbf{u} = \text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}$$

und nach Lemma 0.8 ist die Lösung somit divergenzfrei. Für den Druck wählen wir

$$p(x, y) = x^3 + y^3 - \frac{1}{2}.$$

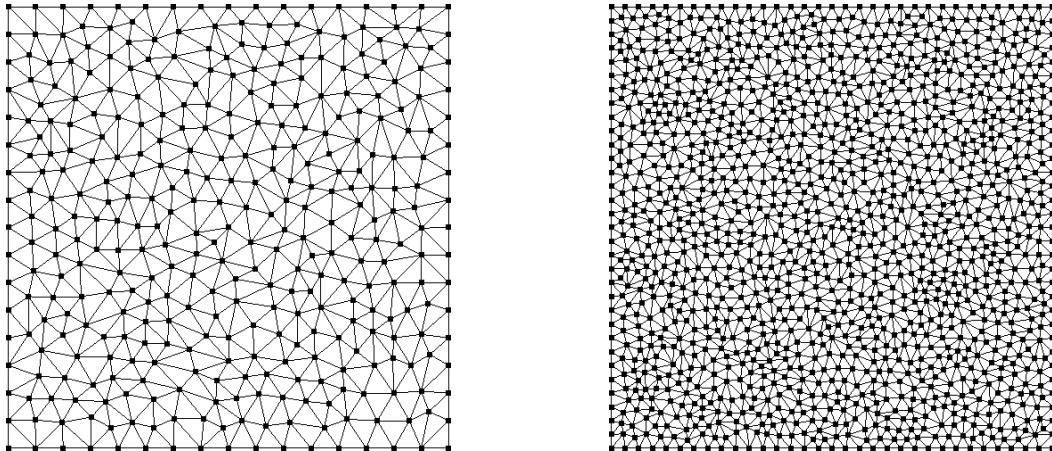


Abbildung 15: Eine Verfeinerungsstufe der Delaunay-Triangulierung. Links mit 361 Knoten, rechts mit 1.321 Knoten.

Setzen wir nun

$$\mathbf{f} = -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p.$$

als rechte Seite, ist (\mathbf{u}, p) offenbar die entsprechende Lösung von (1.5).

Zur Gittererzeugung wird eine Delaunay-Triangulierung (siehe zum Beispiel [Kle05]) verwendet, die über die Angabe der maximalen Flächeninhalte der Dreiecke gesteuert wird.

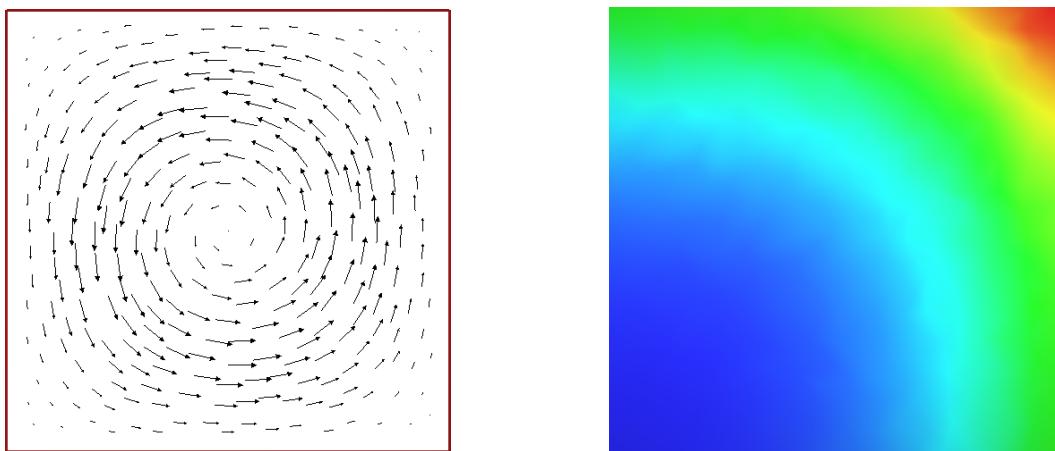


Abbildung 16: Geschwindigkeit und Druck der Strömung. Berechnet bei $\nu^{-1} = 1000$.

3 Effizienzbetrachtung

3.1 Anwendung von Newton- und Picarditeration

Zwei verschiedene Iterationen zur Lösung des nichtlinearen Problems sollen im Folgenden betrachtet werden. Zunächst ist dies die Picarditeration, angewendet als Fixpunktiteration auf T .

Definition 3.1

Die *Picarditeration* zu einem Startwert $\mathbf{u}^0 \in V$ ist definiert als

$$\mathbf{u}^{n+1} := T(\mathbf{u}^n).$$

Das bedeutet, \mathbf{u}^{n+1} berechnet sich als Lösung des Variationsproblems:

Zu festem $\mathbf{u}^n \in V$, finde $\mathbf{u}^{n+1} \in V$, sodass für alle $\mathbf{v} \in V$:

$$a(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}).$$

Satz 3.1 Falls $N\nu^{-2} \|f\|_* < 1$ ist, konvergiert die Picarditeration für beliebiges $\mathbf{u}^0 \in V$ mit linearer Konvergenzordnung.

Beweis. Wie wir bereits in Satz 1.17 gesehen haben, bildet T unter diesen Voraussetzungen eine Kontraktion auf V . Dass die Picarditeration konvergiert, ihre lineare Konvergenzordnung und die Eindeutigkeit ihres Grenzwerts, sind also Folgerungen des Fixpunktsatzes von Banach. \square

Als weitere Iteration betrachten wir die Newtonmethode angewendet auf

$$F(\mathbf{u}) := a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}).$$

Definition 3.2

Die *Newtoniteration* zu einem Startwert $\mathbf{u}^0 \in V$ ist definiert über das lineare Gleichungssystem

$$J_F(\mathbf{u}^n)(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) = -F(\mathbf{u}^n).$$

Dabei ist

$$J_F(\mathbf{u})(\mathbf{w}) := a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$$

die Ableitung von F und der Stelle \mathbf{u} . Eingesetzt ergibt dies:

$$\begin{aligned} J_F(\mathbf{u}^n)(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) &= a(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) \\ &\quad + c(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) \\ &= a(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}^n, \mathbf{v}) \\ &\quad + c(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) - 2c(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

\mathbf{u}^{n+1} berechnet sich also in diesem Fall durch folgendes Problem:

Zu festem $\mathbf{u}^n \in V$, finde $\mathbf{u}^{n+1} \in V$, sodass für alle $\mathbf{v} \in V$:

$$a(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) + c(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}).$$

Bei der späteren Implementierung der Newtoniteration muss also lediglich ein weiterer Term ($c(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n, \mathbf{v})$) auf der linken Seite implementiert werden. Die rechte Seite muss in jedem Iterationsschritt um den Term $c(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v})$ erweitert werden.

Lemma 3.2 Die Ableitung J_F ist Lipschitz-stetig.

Beweis. Aufgrund der Stetigkeit von a und c erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \|J_F(\mathbf{u}^1) - J_F(\mathbf{u}^2)\| \\
&= \sup_{\substack{\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \\ \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1}} \left\{ |a(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{w}, \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2, \mathbf{v})| \right\} \\
&\leq \sup_{\substack{\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \\ \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1}} \left\{ |a(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2, \mathbf{v})| + |c(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2, \mathbf{w}, \mathbf{v})| + |c(\mathbf{w}, \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2, \mathbf{v})| \right\} \\
&\leq C \sup_{\substack{\mathbf{v} \in V \\ \|\mathbf{v}\|=1}} \{\|\mathbf{v}\|\} \cdot \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\| + 2N \sup_{\substack{\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \\ \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1}} \{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|\} \cdot \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\| \\
&\leq 2 \max \{C, 2N\} \cdot \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\|.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.3 Falls die Ableitung von F beim Startwert \mathbf{u}^0 beschränkt invertierbar ist, also die Bedingung

$$\left\| J_F(\mathbf{u}^0)^{-1} \right\| \leq \beta_0 < \infty$$

erfüllt, so ist sie in einer ganzen Umgebung von \mathbf{u}^0 beschränkt invertierbar.

Genauer gesagt, ist

$$\left\| J_F(\mathbf{u})^{-1} \right\| \leq \beta \leq \frac{\beta_0}{1 - \beta_0 \gamma \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\|}$$

für alle $\mathbf{u} \in V$ mit

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\| \leq \frac{1}{\beta_0 \gamma}.$$

Beweis. Folgerung aus Lemma 3.2 (siehe [Deu06]). □

Satz 3.4 (Newton-Kantorovich) Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.3 konvergiert die Newtoniteration quadratisch gegen einen eindeutigen Grenzwert.

Beweis. Siehe [Deu06]. □

3.2 Effizienzanalyse

Anhand des Beispiels 2.2, dem Kollisionsfluss im Kreuzkanal, betrachten wir die Effizienz der Picard- und der Newtoniteration. Die Iterationen wurden an den beiden Diskretisierungen CR und CR^+ getestet.

CR bedeutet dabei, dass das Crouzeix–Raviart-Elemente verwendet wurden und CR^+ , dass auf die Testfunktionen im nichtlinearen Term und der rechten Seite, der Fortin-Interpolator für das Raviart–Thomas-Element angewendet wurde, siehe hierzu Bemerkung 5.1. In diesem Beispiel ist jedoch $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$, sodass der Unterschied der beiden Schemata lediglich in der Diskretisierung des nichtlinearen Terms liegt.

Die Reynoldszahl ist stets 500 und als Gitter dienen verschiedene Verfeinerungsstufen des in Abschnitt 2.2 beschriebenen Gitters (siehe Abbildung 7). Als Abbruchbedingung diente die Kontraktion des nichtlinearen Residuums. Falls dieses also nicht mehr kleiner wird, stoppt die Iteration und nimmt die vorherige Lösung.

Die Abbildung 1 zeigt bereits den deutlich geringeren Aufwand in Zeit und Iterationsschritten der Newtoniteration im Gegensatz zur Picarditeration, bei beiden Diskretisierungen und auf allen drei Gittern. Gemessen wurde die CPU-Zeit, die sich aus der Anzahl der Prozessorzugriffe des Programms errechnet, sodass Prozessorgeschwindigkeit und Auslastung keine Rolle spielen.

Der verwendete direkte Löser PARDISO (siehe [KLS13, SBR08, SWH07]) benötigt allerdings bei den verschiedenen Rechnungen unterschiedliche

nodes	dof	FE	method	cpu time	its	min. residuum
1.753	13.326	<i>CR</i>	Picard	0 : 12	44	$1,4435 \cdot 10^{-14}$
			Newton	0 : 02	9	$1,5165 \cdot 10^{-14}$
		<i>CR</i> ⁺	Picard	0 : 14	75	$2,2029 \cdot 10^{-14}$
			Newton	0 : 02	8	$2,2226 \cdot 10^{-14}$
6.673	52.002	<i>CR</i>	Picard	0 : 38	33	$3,5085 \cdot 10^{-14}$
			Newton	0 : 04	8	$3,7352 \cdot 10^{-14}$
		<i>CR</i> ⁺	Picard	0 : 14	37	$8,5335 \cdot 10^{-14}$
			Newton	0 : 04	8	$8,1031 \cdot 10^{-14}$
26.017	205.386	<i>CR</i>	Picard	5 : 16	30	$1,5347 \cdot 10^{-13}$
			Newton	0 : 23	9	$1,0901 \cdot 10^{-13}$
		<i>CR</i> ⁺	Picard	0 : 49	33	$5,1284 \cdot 10^{-13}$
			Newton	0 : 27	11	$3,1308 \cdot 10^{-13}$

Tabelle 1: Aufwand der Picard- und Newtoniteration bei Gitterverfeinerung. Die Reynoldszahl ist $\nu^{-1} = 500$. **nodes**: Anzahl der Gitterknoten, **dof**: Anzahl der Freiheitsgrade, **cpu time**: Benötigte CPU-Zeit in min:sec, **its**: Anzahl der benötigten Iterationen, **min. residuum**: minimales nichtlineares Residuum

Einstellungen, sodass sich die Zeit pro Iterationsschritt in Echtzeit, als auch in CPU-Zeit, stark unterscheidet. So benötigt ungewöhnlicherweise eine Picard-Schritt bei *CR* stets mehr Zeit, als bei *CR*⁺. Die benötigte Zeit ist in diesem Fall also nicht geeignet die Effizienz der beiden Methoden zu vergleichen.

In Abbildung 17 sind die nichtlinearen Residuen zu jedem Iterationsschritt als Graphen dargestellt. Hier sieht man nach wenigen Iterationsschritten bereits die quadratische Konvergenz der Newtoniteration, die erst im Rundungsfehlerbereich wieder langsamer wird. Bei der Picarditeration sieht man sehr deutlich die lineare Konvergenz.

Bemerkung 3.5 Der Speicheraufwand der Newtoniteration ist im Gegensatz zur Picarditeration deutlich höher.

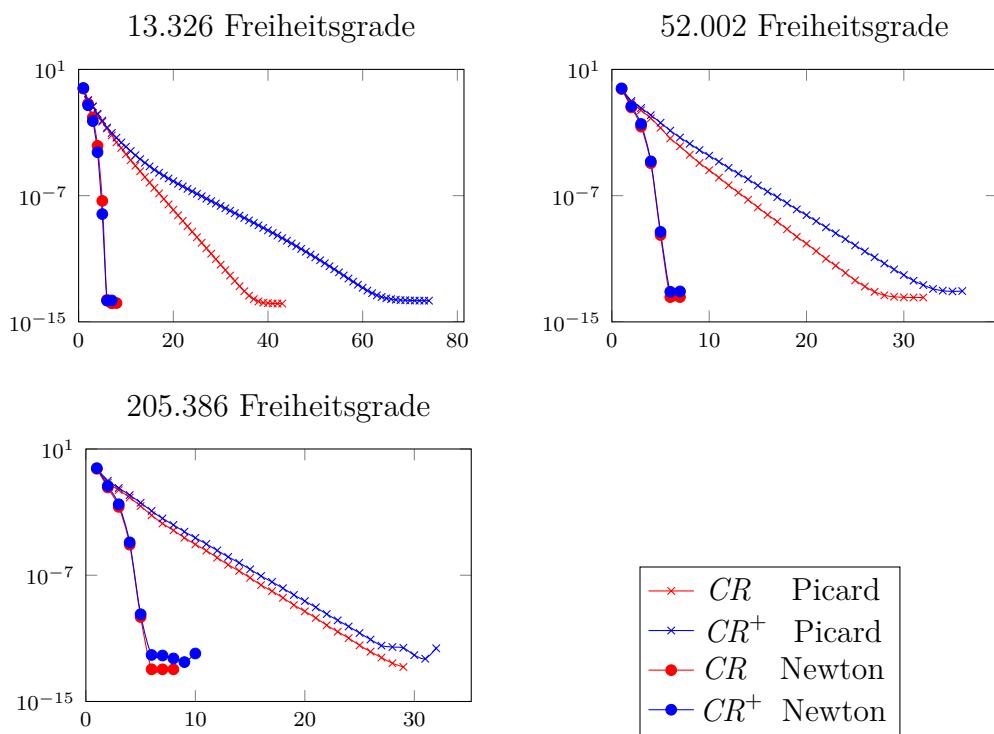


Abbildung 17: Nichtlineares Residuum für $\nu = 500^{-1}$ über den jeweiligen Iterationsschritten. Die y -Achse ist logarithmisch gezeichnet

4 Finite-Elemente-Ansätze

Zu einer Triangulierung \mathcal{T}_h des polyederförmigen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei \mathcal{F}_h^* die Menge aller Faces und \mathcal{F}_h die Menge aller inneren Faces. Dabei soll h ein nicht weiter spezifizierter Parameter des Gitters sein, der im Grenzwert gegen Null ein immer feiner werdendes Gitter garantieren soll. Um geeignete Diskretisierungsansätze zu finden, seien zunächst X_h und Q_h beliebige Ansatzräume für Geschwindigkeit und Druck.

Wir erweitern außerdem den Begriff des Gradienten und der Divergenz zu gebrochenen Versionen, die nur stückweise auf jedem Simplex definiert sein müssen.

Definition 4.1

Der *gebrochene Gradient* und die *gebrochene Divergenz* sind Operatoren

$$\begin{aligned}\nabla_h : X_h &\longrightarrow L^2(\Omega)^{n^2}, \\ \operatorname{div}_h : X_h &\longrightarrow L^2(\Omega),\end{aligned}$$

sodass für alle $T \in \mathcal{T}_h$ und $\mathbf{v}_h \in X_h$

$$\begin{aligned}(\nabla_h \mathbf{v}_h) \Big|_T &= \nabla \left(\mathbf{v}_h \Big|_T \right), \\ (\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h) \Big|_T &= \operatorname{div} \left(\mathbf{v}_h \Big|_T \right)\end{aligned}$$

gilt. Mit diesem gebrochenen Gradienten können wir eine diskrete Norm in unserem Ansatzraum X_h definieren.

$$\|\mathbf{v}_h\|_{1,h} := \left(\int_{\Omega} \nabla_h \mathbf{v}_h : \nabla_h \mathbf{v}_h \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir nennen die Ansatzräume *konform*, falls $X_h \subset X$ und $Q_h \subset Q$ ist.

Bemerkung 4.1 Bei konformen Ansätzen gilt $X_h \subset X$, weshalb solche Finite-Elemente-Funktionen immer als Testfunktionen benutzt werden können. Falls ein Element $\mathbf{u}_h \in X_h$ die kontinuierlichen Stokes-Gleichung in ihrer schwachen Form (1.5) erfüllt, können wir es selbst als Testfunktion einsetzen und erhalten:

$$\nu \|\mathbf{u}_h\|_{1,h}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_h.$$

Wenn wir nun, wie im Beispiel 1.9, eine rotationsfreie rechte Seite wählen, erhalten wir mit $\mathbf{f} = \nabla \varphi$:

$$\|\mathbf{u}_h\|_{1,h} = \sqrt{\frac{1}{\nu} < \nabla \varphi, \mathbf{u}_h >}$$

Falls \mathbf{u}_h nun nicht schwach-divergenzfrei ist und damit $< \nabla \varphi, \mathbf{u}_h > \neq 0$ für ein φ mit $\nabla \varphi \neq 0$ ist, so ist $\|\mathbf{u}_h\|_{1,h} \neq 0$. Wie wir gesehen haben, ist die kontinuierliche Lösung $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, die Norm des Gradienten der Diskretisierung allerdings nicht. Bei kleinem ν können nicht divergenzfreie Diskretisierungsansätze also unter Umständen schlechte Ergebnisse liefern.

Diesen Vorteil der divergenzfreien Diskretisierungen möchte ich im Folgenden weiter beleuchten. Zu gegebenen Ansatzräumen X_h und Q_h sei zunächst folgende Definition eine Abschwächung der schwachen Divergenzfreiheitseigenschaft.

Definition 4.2

Eine Funktion $\mathbf{v}_h \in X_h$ heißt *diskret-divergenzfrei*, falls für alle $q_h \in Q_h$

$$\int_{\Omega} q_h \cdot \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, dx = 0$$

gilt. Außerdem sei

$$V_h := \left\{ \mathbf{v}_h \in X_h : \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, dx = 0 \text{ für alle } q_h \in Q_h \right\}$$

der Raum der diskret-divergenzfreien Funktionen und

$$H(\text{div}; \Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n : \mathbf{v} \text{ besitzt eine schwache Divergenz in } L^2(\Omega) \right\}$$

der Raum aller Funktionen, die nach Definition 0.2 eine schwache Divergenz besitzen. Dass $H(\text{div}; \Omega)$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\text{div}} := \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, dx$$

ein Hilbert-Raum ist, findet sich beispielsweise in [Auc06].

Definition 4.3

Der Sprung einer Funktion φ an einer Stelle \mathbf{x} auf dem Face F zweier Simplizes T_1 und T_2 ist definiert durch

$$[\varphi](\mathbf{x}) := \left(\lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \in T_1}} \varphi(\mathbf{y}) \mathbf{n}_{T_1, F} + \lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \in T_2}} \varphi(\mathbf{y}) \mathbf{n}_{T_2, F} \right) \cdot \mathbf{n}_F.$$

Bemerkung 4.2 Der Normalenvektor \mathbf{n}_F an einem äußeren Face F stets nach außen gerichtet und an inneren Faces beliebig, aber fest gewählt. Für vektorwertige Funktionen \mathbf{v} ist der Sprung komponentenweise zu nehmen.

$$[\mathbf{v}] := ([\mathbf{v}_i])_{i=1}^n$$

Satz 4.3 Eine Funktion

$$\mathbf{v}_h \in Y := \left\{ \mathbf{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : \mathbf{w}|_T \in C_0^\infty(T)^n \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

besitzt genau dann eine schwache Divergenz, falls ihre Normalenkomponenten stetig sind. Das heißt, für jedes $F \in \mathcal{F}_h$ gilt in jedem Punkt $\mathbf{x} \in F$

$$[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_F](\mathbf{x}) = 0.$$

Beweis. Da $\mathbf{v}_h \in Y$ ist, existiert $\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h$. Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{Div}(\mathbf{v}_h)(\varphi) &= - \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \varphi \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h \, dx - \int_{\partial T} \varphi (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) \, dS \right) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \varphi \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h \, dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F \varphi (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) \, dS \\ &= \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h \, dx \\ &\quad - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \varphi [(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n})] \, dS - \underbrace{\sum_{F \in \mathcal{F}_h^* \setminus \mathcal{F}_h} \int_F \varphi (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) \, dS}_{= 0}. \end{aligned}$$

Falls nun die Normalkomponenten von \mathbf{v}_h stetig sind, verschwindet der mittlere Summand für alle φ . Dass sich solche Ausdrücke wirklich nicht in der Form

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \varphi [(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n})] \, dS = - \int_{\Omega} \psi \varphi \, dx$$

schreiben lassen, wie es notwendig wäre für die Existenz einer schwachen Divergenz, sieht man zum Beispiel in Satz 4.4. \square

Betrachten wir nun zwei konkrete Finite-Elemente-Ansätze, zunächst die konformen Raviart–Thomas–Elemente und dann die sehr ähnlichen, aber nicht-konformen Crouzeix–Raviart–Elemente.

4.1 Raviart–Thomas–Elemente

Die *Raviart–Thomas–Elemente* RT_h^0 (vgl. [Lin14]) sind stückweise lineare Elemente, deren Normalenkomponenten stetig sind. Das heißt, dieser Ansatz ist nach Satz 4.3 $H(\text{div}; \Omega)$ -konform. Die Forderung, dass der Sprung im Baryzentrum \mathbf{x}_F jedes inneren Faces $F \in \mathcal{F}_h$ die Bedingung

$$[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_F](\mathbf{x}_F) = 0 \quad (4.1)$$

erfüllt, ist wie wir sehen werden ausreichend um die Stetigkeit auf ganz F zu gewährleisten. Außerdem wird auf jedem äußeren Face $F \in \mathcal{F}_h^* \setminus \mathcal{F}_h$

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{x}_F) \cdot \mathbf{n}_F = 0 \quad (4.2)$$

gefordert. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{RT}_h^0 := & \left\{ \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega) : \mathbf{v}_h \text{ erfüllt (4.1), (4.2) und für alle } T \in \mathcal{T}_h \text{ ist} \right. \\ & \left. \mathbf{v}_h|_T = \mathbf{a}_T + \frac{b_T}{n}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) \text{ mit } \mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^n \text{ und } b_T \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Dabei ist \mathbf{x}_T das Baryzentrum des Simplex $T \in \mathcal{T}_h$.

Die Forderung nach Stetigkeit im Baryzentrum \mathbf{x}_F reicht aus, da die Normalenkomponente von \mathbf{v}_h konstant ist. Um dies einzusehen betrachten wir die eindeutige Zerlegung von $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T)$ in seinen tangentialen- und normalen Anteil bezüglich des Faces F ,

$$\mathbf{x}_{tan} + \mathbf{x}_{normal} := (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T).$$

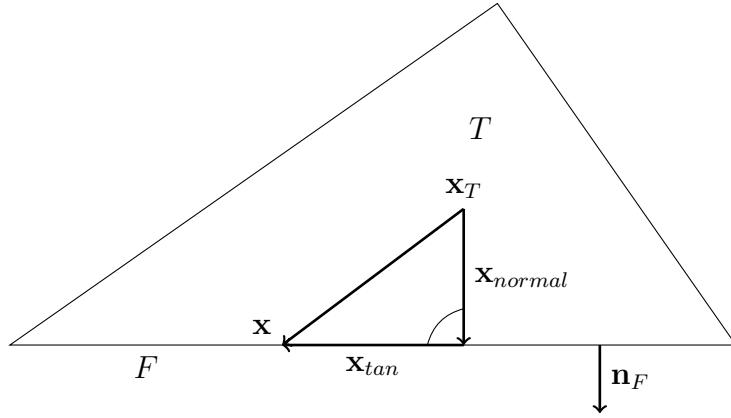


Abbildung 18: Simplex T mit Baryzentrum \mathbf{x}_T und der Aufspaltung von $\mathbf{x} - \mathbf{x}_T$ in Tangential- und Normalanteil bezüglich des Faces F . \mathbf{n}_F ist der nach außen gerichteter Normalenvektor

Für alle $\mathbf{x} \in F$ ist dann \mathbf{x}_{normal} konstant und nur \mathbf{x}_{tan} variiert. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_F &= \left(\mathbf{a}_T + \frac{b_T}{n} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) \right) \cdot \mathbf{n}_F \\
 &= \left(\mathbf{a}_T + \frac{b_T}{n} (\mathbf{x}_{tan} + \mathbf{x}_{normal}) \right) \cdot \mathbf{n}_F \\
 &= \mathbf{a}_T \cdot \mathbf{n}_F + \underbrace{\frac{b_T}{n} \mathbf{x}_{tan} \cdot \mathbf{n}_F}_{=0} + \underbrace{\frac{b_T}{n} \mathbf{x}_{normal} \cdot \mathbf{n}_F}_{=const.} \\
 &= const.
 \end{aligned}$$

Die Normalkomponente ist, da sie konstant auf F und stetig in \mathbf{x}_F ist, also auf ganz F stetig. Da die Elemente außerdem stückweise konstant sind, sind sie auch quadratisch integrierbar, womit $RT_h^0 \subset H(\text{div}; \Omega)$ erfüllt ist.

4.2 Crouzeix–Raviart–Elemente

Die sogenannten *Crouzeix–Raviart–Elemente* (vgl. [CR73]) sind ein nicht $H(\text{div}; \Omega)$ -konformer (und nicht $H^1(\Omega)$ -konformer) Finite-Elemente-Ansatz (wie wir im folgenden Satz 4.4 sehen werden). Sie sind definiert durch

$$\begin{aligned} CR_h^0 := \left\{ \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega) : \mathbf{v}_h|_T \in \mathcal{P}_1^n \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h \right. \\ \left. [\mathbf{v}_h](\mathbf{x}_F) = 0 \text{ für alle } F \in \mathcal{F}_h \right. \\ \left. \mathbf{v}_h(\mathbf{x}_F) = 0 \text{ für alle } F \in \mathcal{F}_h^* \setminus \mathcal{F}_h \right\}. \end{aligned}$$

Der einzige Unterschied zu den Raviart–Thomas–Elementen besteht also darin, dass nicht die Stetigkeit der Normalenkomponente, sondern lediglich die Stetigkeit auf jedem Faces verlangt wird. Dieser Unterschied ist aber wesentlich für die Konformität der beiden Ansätze.

Satz 4.4 Crouzeix–Raviart–Elemente besitzen im Allgemeinen keine schwache Divergenz. Es gilt also $CR_h^0 \not\subseteq H(\text{div}; \Omega)$.

Beweis. Wir betrachten das Element $\mathbf{v}_h \in CR_h^0$, dass auf $\Omega = [-1, 1] \times [0, 1]$ durch Angabe seiner Werte auf den Face-Mittelpunkten folgendermaßen definiert ist:

\mathbf{v}_h hat also folgende Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_h|_{T_0}(x, y) &= \mathbf{v}_0(x, y) := (0, 0) && \text{mit } \text{div}_h \mathbf{v}_0 = 0, \\ \mathbf{v}_h|_{T_1}(x, y) &= \mathbf{v}_1(x, y) := (1 + 2x, 0) && \text{mit } \text{div}_h \mathbf{v}_1 = 2, \\ \mathbf{v}_h|_{T_2}(x, y) &= \mathbf{v}_2(x, y) := (2y, 0) && \text{mit } \text{div}_h \mathbf{v}_2 = 0, \\ \mathbf{v}_h|_{T_3}(x, y) &= \mathbf{v}_3(x, y) := (3 - 2x - 2y, 0) && \text{mit } \text{div}_h \mathbf{v}_3 = -2. \end{aligned}$$

Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, ergibt sich, ganz analog zum Beweise von Satz 4.3 folgende

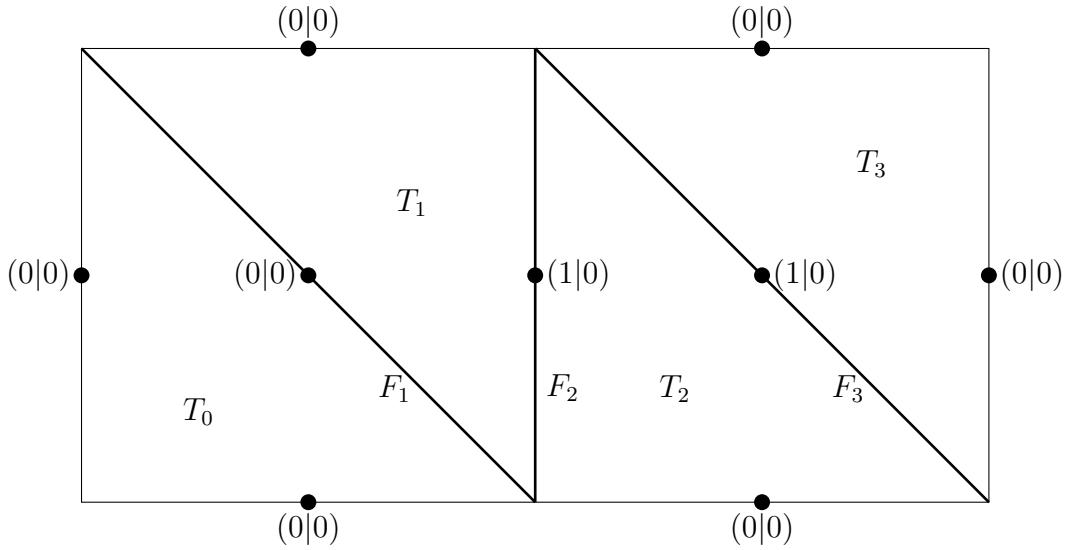


Abbildung 19: Triangulierung von Ω und eingezeichnet die Werte des Crouzeix–Raviart-Elements \mathbf{v}_h auf den Kantenmittelpunkten

distributionelle Divergenz von \mathbf{v}_h :

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\mathfrak{i}\mathfrak{v}(\mathbf{v}_h)(\varphi) &= - \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &= \sum_{i=0}^3 \int_{T_i} \varphi \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h \, dx + \sum_{i=1}^3 \int_{F_i} \varphi [(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n})] \, dS.\end{aligned}$$

Diese Integrale berechnen wir nun einzeln. Zunächst sind

$$\begin{aligned}\int_{T_0} \varphi \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h \, dx &= 0, \\ \int_{T_1} \varphi \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h \, dx &= 2 \int_{T_1} \varphi \, dx, \\ \int_{T_2} \varphi \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h \, dx &= 0, \\ \int_{T_3} \varphi \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h \, dx &= -2 \int_{T_3} \varphi \, dx.\end{aligned}$$

Dann berechnen wir die Sprünge

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{F_1})] \Big|_{F_1} &= \left(\lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \in T_0}} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{F_1}) \mathbf{n}_{T_0} + \lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \in T_1}} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{F_1}) \mathbf{n}_{T_1} \right) \cdot \mathbf{n}_{F_1} \\
&= \left(0 + \left((1+2x, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} (1+2x), \\
[(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{F_2})] \Big|_{F_2} &= \left(\lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \in T_1}} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{F_2}) \mathbf{n}_{T_1} + \lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \in T_2}} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{F_2}) \mathbf{n}_{T_2} \right) \cdot \mathbf{n}_{F_2} \\
&= \left(((1+2x, 0) \cdot (1, 0)^T) (1, 0) + ((2y, 0) \cdot (1, 0)^T) (-1, 0) \right) \cdot (1, 0)^T \\
&= 1+2x - 2y, \\
[(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{F_3})] \Big|_{F_3} &= \left(\lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \in T_2}} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{F_3}) \mathbf{n}_{T_2} + \lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \in T_3}} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{F_3}) \mathbf{n}_{T_3} \right) \cdot \mathbf{n}_{F_3} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (2y) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} (3-2x-2y) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T \\
&= \sqrt{2} \left(x+2y - \frac{3}{2} \right).
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Div}(\mathbf{v}_h)(\varphi) &= 2 \int_{T_1} \varphi \, dx - 2 \int_{T_3} \varphi \, dx \\
&\quad + \int_{F_1} -\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi (1+2x) \, dS + \int_{F_2} \varphi (1+2x-2y) \, dS \\
&\quad + \int_{F_3} \sqrt{2} \varphi \left(x+2y - \frac{3}{2} \right) \, dS.
\end{aligned}$$

Wir wählen nun eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq \varphi_n(x) \leq 1$, sodass $\varphi_n \equiv 1$ auf $I := \{0\} \times [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. Außerdem soll gelten, dass $\text{supp}(\varphi_n) \subset [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$ für alle $x \in \Omega \setminus I$. Wir definieren noch $I^\varepsilon := [-\varepsilon, \varepsilon] \times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, für ein $\varepsilon > 0$.

Mit dieser Konstruktion hängt $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht von ε ab. Da nun der einzige Bereich, in dem die Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Grenzwert nicht null ist, echt in unserem Hilfsbereich I^ε enthalten ist (siehe Abbildung 20), erhalten wir außerhalb dieses Bereichs eine gleichmäßige Konvergenz der Folge bezüglich \mathbf{x} , wenn wir $\varepsilon > 0$ fixieren. Also konvergiert auch $\sup_{\mathbf{x} \in \Omega \setminus I^\varepsilon} \{\varphi_n(\mathbf{x})\}$, bei festem $\varepsilon > 0$ und $n \rightarrow \infty$, gegen null.

Dies nutzen wir in der folgenden Abschätzung.

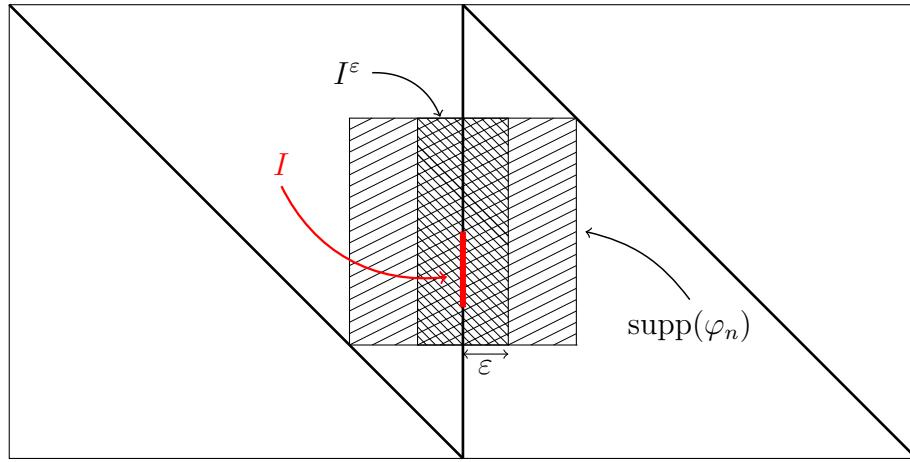


Abbildung 20: Träger der Testfunktionen, Abschnitt I und Hilfsbereich I^ε

Angenommen \mathbf{v}_h besitzt nun eine schwache Divergenz $\psi \in L^1_{loc}(\Omega)$, so müsste für diese gelten:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega} \psi \varphi_n \, dx \right| &\leq \int_{\Omega} |\psi| |\varphi_n| \, dx \\
 &= \int_{\Omega \setminus I^\varepsilon} |\psi| |\varphi_n| \, dx + \int_{I^\varepsilon} |\psi| |\varphi_n| \, dx \\
 &\leq \int_{\Omega \setminus I^\varepsilon} |\psi| \sup_{\mathbf{x} \in \Omega \setminus I^\varepsilon} \{\varphi_n(\mathbf{x})\} \, dx + \int_{I^\varepsilon} |\psi| |\varphi_n| \, dx \\
 &= \|\psi\|_{L^1(\Omega \setminus I^\varepsilon)} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega \setminus I^\varepsilon} \{\varphi_n(\mathbf{x})\} + \int_{I^\varepsilon} |\psi| |\varphi_n| \, dx \\
 &=: A^{\varepsilon,n} + B^\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ wird B^ε beliebig klein, da I^ε zur Nullmenge wird. Anschließend

können wir n so groß wählen, dass $A^{\varepsilon,n}$ beliebig klein wird, denn für festes ε ist $\|\psi\|_{L^1(\Omega \setminus I^\varepsilon)}$ fest und $\sup_{x \in \Omega \setminus I^\varepsilon} \{\varphi_n(x)\}$ geht wie oben beschrieben gegen null. Das heißt, es gibt eine Folge von Testfunktionen $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$, sodass zu jeder beliebigen Funktion $\psi \in L^1_{loc}(\Omega)$ das obige Integral verschwindet. Demzufolge muss die distributionelle Divergenz von \mathbf{v}_h gleich null sein. Wie oben gesehen, gilt jedoch:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Div}(\mathbf{v}_h)(\varphi) &= 2 \int_{T_1} \varphi \, dx - 2 \int_{T_3} \varphi \, dx \\ &\quad + \int_{F_1} -\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi (1+2x) \, dS + \int_{F_2} \varphi (1+2x-2y) \, dS \\ &\quad + \int_{F_3} \sqrt{2} \varphi \left(x+2y-\frac{3}{2}\right) \, dS\end{aligned}$$

Hier verschwinden für $n \rightarrow \infty$ alle Integrale, bis auf das über F_2 . Hierfür gilt

$$\int_{F_2} \varphi_n (1+2x-2y) \, dS = \int_0^1 \varphi_n(0,y) (1-2y) \, dy,$$

und wir erhalten:

$$\mathfrak{Div}(\mathbf{v}_h)(\varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 1-2y \, dy = \frac{1}{36} \neq 0.$$

Die für die Existenz einer schwachen Divergenz geforderte Gleichheit

$$-\int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, dx = \int_{\Omega} \psi \varphi_n \, dx$$

ist also im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ nicht erfüllt, womit es keine schwache Divergenz $\psi \in L^1_{loc}(\Omega)$ von \mathbf{v}_h geben kann. \square

Die Crouzeix–Raviart-Elemente sind im Bezug zu den vorher betrachteten Raviart–Thomas-Elementen deshalb von Bedeutung, weil wir jedem Crouzeix–Raviart-Element eindeutig ein Raviart–Thomas-Element, durch Angabe der Normalkomponente auf jedem Face, zuordnen können. Somit haben wir zwei Finite-Elemente-Ansätze, die sehr ähnlich sind, sich aber in der für uns interessanten Eigenschaft unterscheiden. Dies ist die Erhaltung der Divergenzfreiheit. Wie oben gesehen, müssen Crouzeix–Raviart-Elemente nicht einmal eine schwache Divergenz besitzen, wohingegen wir im Folgenden sehen werden, dass die Raviart–Thomas-Rekonstruktion die gebrochene Divergenz erhält.

4.3 Der Fortin-Interpolatör für Raviart–Thomas-Elemente

Sei im Folgenden stets $X_h := CR_h^0$. Der sogenannte *Fortin-Interpolatör* $\pi_h^{RT} : X \cup X_h \rightarrow RT_h^0$ realisiert die Rekonstruktion für Crouzeix–Raviart-Elemente und alle Elemente aus X durch Mittelung der Normalkomponente auf jedem Face. Er ist definiert durch

$$\mathbf{n}_F \cdot (\pi_h^{RT} \mathbf{v}) (\mathbf{x}_F) := \begin{cases} \frac{1}{|F|} \int_F \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_F \, dS, & F \in \mathcal{F}_h, \\ 0, & F \in \mathcal{F}_h^* \setminus \mathcal{F}_h. \end{cases}$$

Zu einer Basisfunktion \mathbf{v}_h aus X_h berechnet sich die Fortin-Interpolation $\pi_h^{RT} \mathbf{v}_h$ auf jedem Simplex T durch

$$\begin{aligned} b_T &= \frac{1}{|T|} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} |F| \mathbf{v}_h(\mathbf{x}_F) \cdot \mathbf{n}_{T,F} = \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h, \\ \mathbf{a}_T &= \frac{1}{|T|} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} |F| (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_T) \mathbf{v}_h(\mathbf{x}_F) \cdot \mathbf{n}_{T,F}. \end{aligned}$$

Diese erhält dort die Divergenz:

$$\operatorname{div} (\pi_h^{RT} \mathbf{v}_h) = \frac{b_T}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = b_T = \operatorname{div} \mathbf{v}_h.$$

Das folgende Diagramm kommutiert also:

$$\begin{array}{ccc}
 H_0^1(\Omega)^d & \xrightarrow{\text{div}} & L_0^2 \\
 \pi_h^{RT} \downarrow & & \downarrow \pi_h^{L^2, \mathcal{P}_0} \\
 RT_h^0 & \xrightarrow[\text{div}]{} & \mathcal{P}_0(\mathcal{T}_h)
 \end{array}$$

Abbildung 21: Kommutative-Diagramm-Eigenschaft des Raviart–Thomas-Element. $\mathcal{P}_0(\mathcal{T}_h)$ ist der Raum der stückweise konstanten Funktionen und $\pi_h^{L^2, \mathcal{P}_0}$ die Projektion von L_0^2 auf $\mathcal{P}_0(\mathcal{T}_h)$

Lemma 4.5 Die Fortin-Interpolation genügt für $\mathbf{v} \in X \cup X_h$ folgender Abschätzung:

$$\|\mathbf{v} - \pi_h^{RT} \mathbf{v}\|_0 \leq ch |\mathbf{v}|_1.$$

Die Konstante c hängt dabei nur von der sogenannten maximalen Winkelbedingung (siehe [AD00, S.15]) ab.

Beweis. Siehe [AD00, S.18]. □

4.4 Der Fortin-Interpolator für Crouzeix–Raviart-Elemente

Ganz analog wie oben definiert sich der Fortin-Interpolator für das Crouzeix–Raviart-Element $\pi_h^{CR} : X \rightarrow CR_h^0$ durch Mittelung der Funktionswerte auf jedem Face. Er berechnet sich mittels

$$(\pi_h^{CR} \mathbf{v})(\mathbf{x}_F) := \begin{cases} \frac{1}{|F|} \int_F \mathbf{v} \, dS, & F \in \mathcal{F}_h \\ 0, & F \in \mathcal{F}_h^* \setminus \mathcal{F}_h. \end{cases}$$

Wie wir bereits in Satz 4.4 gesehen haben, muss diese Interpolation nicht einmal eine Divergenz besitzen. Auf jedem Simplex erhält sie aber die Divergenz. Also kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 H_0^1(\Omega)^d & \xrightarrow{\text{div}} & L_0^2 \\
 \pi_h^{CR} \downarrow & & \downarrow \pi_h^{L^2, \mathcal{P}_0} \\
 CR_h^0 & \xrightarrow{\text{div}_h} & \mathcal{P}_0(\mathcal{T}_h)
 \end{array}$$

Abbildung 22: Kommutative-Diagramm-Eigenschaft des Crouzeix–Raviart-Elements

Ähnlich der Interpolationsabschätzung in Lemma 4.5 gilt hier folgende Fehlerschranke.

Lemma 4.6 Die Fortin-Interpolation genügt für $\mathbf{v} \in X \cap H^2(\Omega)^d$ und $q \in L^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{v} - \pi_h^{CR}\mathbf{v}\|_0 &\leq ch^2 |\mathbf{v}|_2, \\
 \|\mathbf{v} - \pi_h^{CR}\mathbf{v}\|_{1,h} &\leq ch |\mathbf{v}|_2, \\
 \|q - \pi_h q\|_0 &\leq ch |q|_2.
 \end{aligned}$$

Beweis. Siehe [CR73]. □

Hierbei ist $\pi_h : Q \rightarrow Q_h$ die Projektion auf den diskreten Ansatzraum für den Druck

$$Q_h := \left\{ q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_T \in \mathcal{P}_0 \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Sie ist als Lösung des folgenden Problems eindeutig definiert:

Finde $\pi_h q \in Q_h$, sodass für alle $q_h \in Q_h$:

$$\int_{\Omega} q_h \pi_h q \, dx = \int_{\Omega} q_h q \, dx.$$

5 Diskretisierungen

5.1 Divergenzfreie Diskretisierungen

Wie bisher ist $X_h := CR_h^0$. Um das kontinuierliche Stokes- und Navier-Stokes-Problem ins Diskrete zu übersetzen, definieren wir die diskreten Multilinearformen

$$\begin{aligned} a_h : X_h \times X_h &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ b_h : X_h \times Q_h &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ c_h : X_h \times X_h \times X_h &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ l_h : X_h &\longrightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &:= \nu \int_{\Omega} \nabla_h \mathbf{u}_h : \nabla_h \mathbf{v}_h \, dx, \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) &:= - \int_{\Omega} q_h \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h \, dx, \\ c_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &:= \int_{\Omega} ((\mathbf{w}_h \cdot \nabla_h) \mathbf{u}_h) \cdot \pi_0^{RT} \mathbf{v}_h \, dx, \\ l_h(\mathbf{v}_h) &:= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \pi_0^{RT} \mathbf{v}_h \, dx. \end{aligned}$$

Das *diskrete Stokes-Problem* hat dann folgende Form:

Finde $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times Q_h$, sodass für alle $(\mathbf{v}_h, q_h) \in X_h \times Q_h$:

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= l_h(\mathbf{v}_h), \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Analog sieht das *diskrete Navier–Stokes-Problem* folgendermaßen aus:

Finde $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times Q_h$, sodass für alle $(\mathbf{v}_h, q_h) \in X_h \times Q_h$:

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = l_h(\mathbf{v}_h), \quad (5.2)$$

$$b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0.$$

Bemerkung 5.1 Zu beachten ist, dass diese Diskretisierung die Testfunktionen \mathbf{v}_h in der rechten Seite $l_h(\mathbf{v}_h)$ und dem nichtlinearen Term $c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$ mittels Fortin-Interpolator rekonstruiert. Hierdurch werden die diskret-divergenzfreien Crouzeix–Raviart-Funktionen \mathbf{v}_h auf schwach-divergenzfreie Funktionen abgebildet.

Im Folgenden werden wir sehen, dass solche *divergenzfreien Diskretisierungen* von Vorteil sein können, da sie die Trennung von rotationsfreien und divergenzfreien Kräften erhalten und deshalb der Druck in der Abschätzung des Approximationsfehlers für das Geschwindigkeitsfeld verschwinden.

Diese Schemata werden stets mit CR^+ , beziehungsweise als „mit Rekonstruktion“ bezeichnet, wohingegen die gleichen Schemata ohne Rekonstruktion in der rechten Seite, sowie dem nichtlinearen Term $c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$, mit CR , beziehungsweise als „ohne Rekonstruktion“ bezeichnet werden.

Satz 5.2 Sei (\mathbf{u}, p) die Lösung der Stokes-Gleichungen (1.5) mit $\mathbf{u} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $p \in H^1(\Omega)$ und (\mathbf{u}_h, p_h) die Lösung der Diskretisierung (5.1), dann genügt die Approximation folgender Abschätzung:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,h} \leq Ch|\mathbf{u}|_2,$$

$$\|p - p_h\|_0 \leq Ch(\nu|\mathbf{u}|_2 + |p|_1).$$

Beweis. Siehe [Lin14]. □

Bemerkung 5.3 Bei der Verwendung der nicht-divergenzfreien Diskretisierung CR erhält man laut [BF91] die Fehlerabschätzung

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,h} \leq C_1 h |\mathbf{u}|_2 + \frac{C_2}{\nu} h |p|_1.$$

Dies weist darauf hin, dass diese Diskretisierung die Invarianzeigenschaft der kontinuierlichen Lösung

$$\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} + \nabla \varphi \implies (\mathbf{u}, p) \rightarrow (\mathbf{u}, p + \varphi)$$

aus Abschnitt 1.1.2 verletzt. Denn zusätzliche rotationsfreie Kräfte auf der rechten Seite \mathbf{f} dürften nur durch den Druck balanciert werden. Die obere Schranke der Abschätzung vergrößert sich also, obwohl sich die Geschwindigkeit nicht verändert haben dürfte.

Bemerkung 5.4 In Bemerkung 4.1 haben wir diskutiert, dass nicht-divergenzfreie Diskretisierungsansätze Lösungen mit unphysikalisch großen Gradienten liefern können. Diese kommen durch Oszillationen zu Stande, die wir bei der Betrachtung der Geschwindigkeitskomponenten sehr gut beobachten können. In Abbildung 23 betrachten wir die kollidierenden Kanalströmung aus Abschnitt 2.2 und in Abbildung 24 die L-förmigen Kanalströmung aus Abschnitt 2.3. In den Abbildungen 25 und 26 ist die Strömung aus dem Cavity-Beispiel 2.5 zu verschiedenen Verfeinerungsstufen dargestellt. In allen Fällen haben wir die jeweiligen x und y -Komponenten der Geschwindigkeit dargestellt und zur besseren Veranschaulichung wurden zusätzlich die Höhenlinien eingezeichnet. Diese machen sehr deutlich, dass CR Oszillationen generiert, die bei CR^+ nicht zu sehen sind. Wie zu erwarten verstärkt sich der Effekt bei größerer Reynoldszahl, weshalb die Oszillationen in Abbildung 23 deutlicher zu sehen sind, als in Abbildung 24.

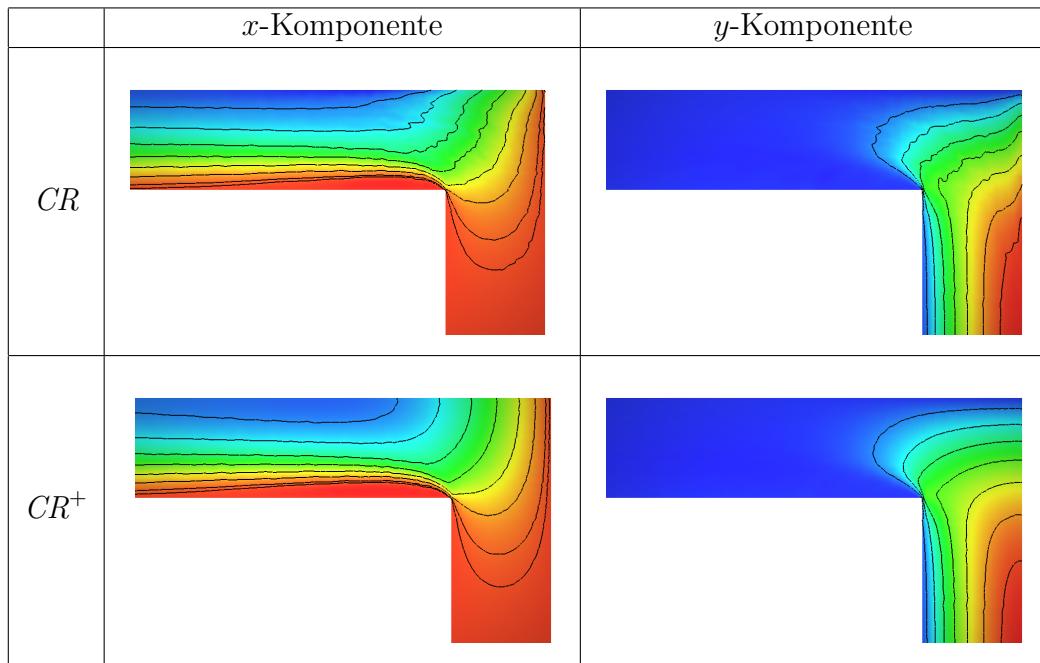


Abbildung 23: Geschwindigkeitskomponenten des Kollisionsfluss aus Beispiel 2.2 bei $\nu = 1000^{-1}$ und 52.002 Freiheitsgraden

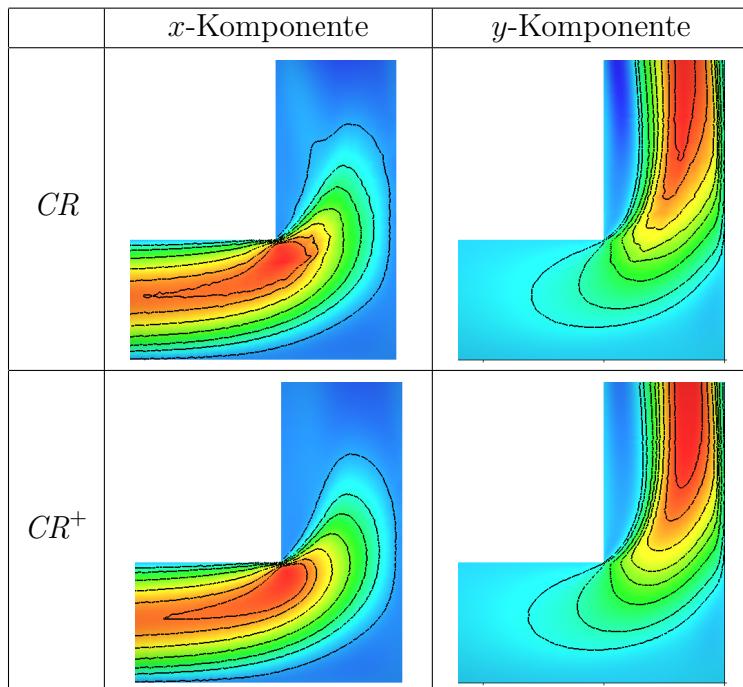


Abbildung 24: Geschwindigkeitskomponenten der L-förmigen Kanalströmung aus Beispiel 2.3 bei $\nu = 400^{-1}$ und 124.384 Freiheitsgraden

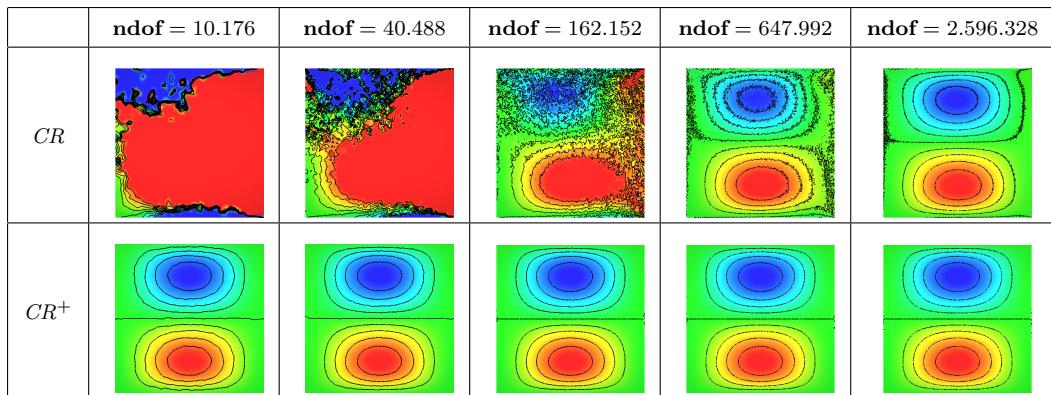


Abbildung 25: x-Komponente der Geschwindigkeit im Cavity-Beispiel. $\nu = 1000^{-1}$. **ndof:** Anzahl der Freiheitsgrade

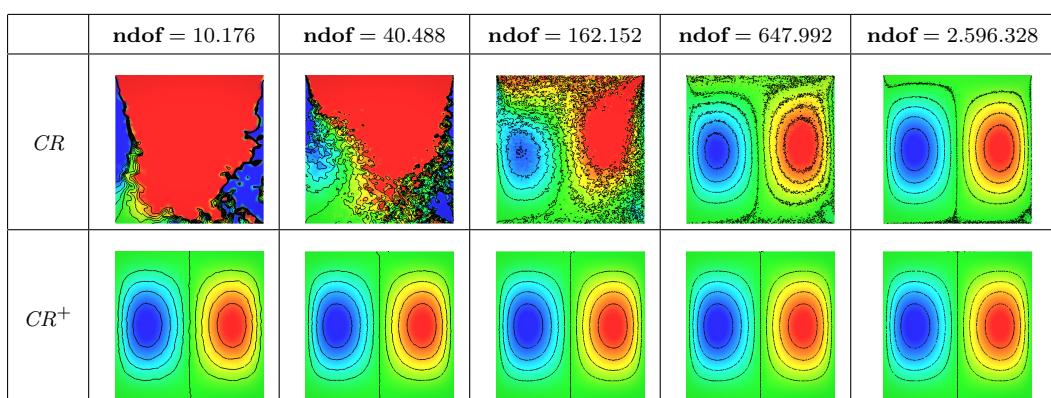


Abbildung 26: y-Komponente der Geschwindigkeit im Cavity-Beispiel. $\nu = 1000^{-1}$. **ndof:** Anzahl der Freiheitsgrade

5.2 Stabilisierung des Crouzeix–Raviart–Elements

Wie wir bereits gesehen haben, ist das Crouzeix–Raviart–Element nicht-konform, da der Sprung lediglich im Baryzentrum jedes Faces stetig ist. Unter

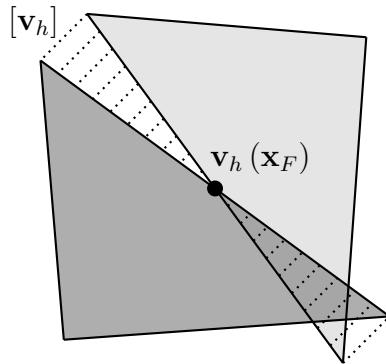


Abbildung 27: Crouzeix–Raviart–Element auf zwei Dreiecken. Die Stetigkeit ist nur im Baryzentrum x_F des Faces F gegeben. Eingezeichnet ist der Sprung über F

Umständen wird der Sprung gerade auf groben Gittern sehr groß und das Element dadurch instabil. Dies kann kontrolliert werden, durch die Einführung des Strafterms

$$J_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \delta_\nu \frac{\nu}{|F|} \int_F [\mathbf{u}] \cdot [\mathbf{v}] \, dS.$$

Dieser misst die Sprünge über allen Faces und seine Minimierung kann zur Stabilität des Elements beitragen. Hierzu addieren wir ihn auf die zu lösende Gleichung. Der Koeffizient δ_ν regelt als eine Art Gewichtung dieses Terms den Grad der Stabilisierung. Im Grenzfall $\delta_\nu \rightarrow \infty$ wären die Crouzeix–Raviart–Elemente zur Stetigkeit gezwungen. In [BH05] wird die Wahl von $\delta_\nu = 1$ empfohlen, was mit den Ergebnissen aus Abschnitt 6.1 und der Abschätzung aus Lemma 5.9 weitestgehend übereinstimmt.

Wir führen nun die Bilinearform

$$A_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + J_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

ein, und erhalten aus den diskreten Stokes-Gleichungen (5.1) die *stabilisierten diskreten Stokes-Gleichungen*:

Finde $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times Q_h$, sodass für alle $(\mathbf{v}_h, q_h) \in X_h \times Q_h$:

$$\begin{aligned} A_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= l_h(\mathbf{v}_h), \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Bemerkung 5.5 Die Stabilisierung der diskreten Navier–Stokes-Gleichungen (5.2) ist in [BH06] ausführlich behandelt. Hier wird der Strafterm auf die diskreten Oseen-Gleichungen addiert.

Um den Sprung in der Fehlerberechnung zwischen kontinuierlicher und diskreter Lösung mit zu beachten, führen wir folgende, von A_h induzierte Norm ein:

$$\|\mathbf{u}\|_J^2 := A_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \nu \|\mathbf{u}\|_{1,h}^2 + J_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Die in J_ν auftretenden Randintegrale können mit Hilfe der sogenannte *Spuridentität* in Flächenintegrale umgewandelt werden.

Satz 5.6 [Spuridentität] Sei F eine beliebige Face eines Simplizes $T \in \mathcal{T}_h$ und P deren gegenüberliegender Eckpunkt. Für $\varphi \in H^1(T)$ gilt dann:

$$\frac{1}{|F|} \int_F \varphi \, dS = \frac{1}{|T|} \int_T \varphi \, dx + \frac{1}{n|T|} \int_T \nabla \varphi \cdot (\mathbf{x} - P) \, dx.$$

Beweis. Zunächst erhalten wir mittels Kettenregel und partieller Integration

$$\begin{aligned} \frac{1}{n|T|} \int_T \nabla \varphi \cdot (\mathbf{x} - P) \, d\mathbf{x} &= \frac{1}{n|T|} \int_T \nabla \cdot (\varphi(\mathbf{x} - P)) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{n|T|} \int_T \varphi \underbrace{\nabla \cdot (\mathbf{x} - P)}_{=n} \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{n|T|} \int_F \varphi(\mathbf{x} - P) \cdot \mathbf{n} \, dS - \frac{1}{|T|} \int_T \varphi \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Hier ist $(\mathbf{x} - P) \cdot \mathbf{n}$ gerade gleich der Höhe h_F des Simplex T bezüglich des Faces F . Denn bei einer Aufspaltung

$$\mathbf{x}_{tan} + \mathbf{x}_{normal} := \mathbf{x} - P$$

in Tangential- und Normalenanteil bezüglich F , ergibt der Kosinussatz:

$$(\mathbf{x} - P) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{x}_{normal} \cdot \mathbf{n} = \underbrace{\cos(\angle(\mathbf{x}_{normal}, \mathbf{n}))}_{=1} \underbrace{\|\mathbf{x}_{normal}\|}_{=h_F} \underbrace{\|\mathbf{n}\|}_{=1} = h_F.$$

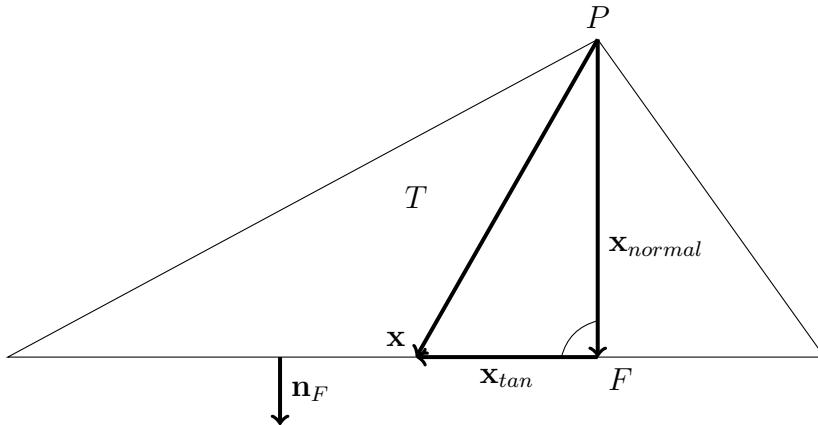


Abbildung 28: Zweidimensionaler Simplex T mit Face F und gegenüberliegendem Knoten P . Zu einem Punkt \mathbf{x} auf F ist $\mathbf{x} - P$ in Tangential- und Normalanteil bezüglich F aufgespalten. \mathbf{n}_F ist der nach außen gerichteter Normalenvektor

Für die Höhe gilt aber auch

$$h_F = n \frac{|T|}{|F|}.$$

Eingesetzt erhalten wir also

$$\frac{1}{n|T|} \int_T \nabla \varphi (\mathbf{x} - P) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{|F|} \int_F \varphi \, dS - \frac{1}{|T|} \int_T \varphi \, dx.$$

□

Als Folgerung dieser Spuridentität ergibt sich die sogenannte *Spurungleichung*.

Satz 5.7 [Spurungleichung] Sei $T \in \mathcal{T}_h$ ein beliebiger Simplex und h_F dessen Höhe bezüglich eines seiner Faces F , dann gilt für beliebiges $\mathbf{v} \in X$

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(F)}^2 \leq 2n \frac{1}{h_F} \|\mathbf{v}\|_{L^2(T)}^2 + \frac{2}{n} h_F \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(T)^n}^2.$$

Beweis. Wir wenden die Spuridentität aus Satz 5.6 auf $\varphi = \mathbf{v}^2$ an. Dabei sei P der F gegenüberliegende Knoten von T :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{L^2(F)}^2 &= \int_F \mathbf{v}^2 \, dS = \frac{|F|}{|T|} \int_T \mathbf{v}^2 \, dx + \frac{|F|}{n|T|} \int_T \nabla(\mathbf{v}^2) \cdot (\mathbf{x} - P) \, dx \\ &= \frac{n}{h_F} \|\mathbf{v}\|_{L^2(T)}^2 + \frac{1}{h_F} \int_T 2(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - P) \, dx \\ &\leq \frac{n}{h_F} \|\mathbf{v}\|_{L^2(T)}^2 + \frac{2}{h_F} \|(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}\|_{L^1(T)} \underbrace{\|\mathbf{x} - P\|_{L^\infty(T)}}_{\leq h_F} \\ &\leq \frac{n}{h_F} \|\mathbf{v}\|_{L^2(T)}^2 + 2 \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(T)^n} \|\mathbf{v}\|_{L^2(T)}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Umformung

$$a^2 + 2ab \leq (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2,$$

erhalten wir mit $a = \|\mathbf{v}\|_{L^2(T)}^2$ und $b = \frac{h_F}{n} \|\mathbf{v}\|_{L^2(T)}$ schließlich

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(F)}^2 \leq 2n \frac{1}{h_F} \|\mathbf{v}\|_{L^2(T)}^2 + \frac{2}{n} h_F \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(T)^n}^2.$$

□

Bemerkung 5.8 Im Folgenden ist $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^n$ stets die Lösung der kontinuierlichen Stokes-Gleichungen (1.5), \mathbf{u}_h die Lösung der stabilisierten diskreten Stokes-Gleichungen (5.3) und wie bisher $\pi_h^{CR}\mathbf{u}$ die Fortin-Interpolation für das Crouzeix–Raviart-Element, angewendet auf \mathbf{u} .

Lemma 5.9 Mit den obigen Definitionen von \mathbf{u} und $\pi_h^{CR}\mathbf{u}$ erhalten wir folgende Fehlerabschätzung:

$$\|\mathbf{u} - \pi_h^{CR}\mathbf{u}\|_J \leq C \left(\nu^{\frac{1}{2}} h + \delta_{\nu}^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} h \right) |\mathbf{u}|_2.$$

Beweis. Nach Definition ist

$$\|\mathbf{u} - \pi_h^{CR}\mathbf{u}\|_J^2 = \nu \|\mathbf{u} - \pi_h^{CR}\mathbf{u}\|_{1,h}^2 + J_\nu (\mathbf{u} - \pi_h^{CR}\mathbf{u}, \mathbf{u} - \pi_h^{CR}\mathbf{u}).$$

Zunächst schätzen wir den Strafterm ab. Hierzu schreiben wir $\mathbf{e} := \mathbf{u} - \pi_h^{CR}\mathbf{u}$ und

$$\mathbf{e}_{F,1} := \lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \in T_{1,F}}} \mathbf{e}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{e}_{F,2} := \lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \in T_{2,F}}} \mathbf{e}(\mathbf{y}),$$

wobei $T_{1,F}$ und $T_{2,F}$ die beiden an das Face F angrenzenden Simplizes sind.

Es gilt dann:

$$[\mathbf{e}]^2 = (\mathbf{e}_{F,1} - \mathbf{e}_{F,2})^2 = \mathbf{e}_{F,1}^2 + \mathbf{e}_{F,2}^2 - 2\mathbf{e}_{F,1}\mathbf{e}_{F,2} \leq 2\mathbf{e}_{F,1}^2 + 2\mathbf{e}_{F,2}^2.$$

Dies nutzen wir nun, um den Strafterm mittels der Spurungleichungen aus Satz 5.7 abzuschätzen. Ohne Einschränkung sei dabei $\mathbf{e}_{F,1}^2 \geq \mathbf{e}_{F,2}^2$.

$$\begin{aligned} J_\nu(\mathbf{e}, \mathbf{e}) &= \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \delta_\nu \frac{\nu}{|F|} \int_F [\mathbf{e}]^2 \, dS \\ &\leq \delta_\nu \nu \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \frac{1}{|F|} \int_F 2\mathbf{e}_{F,1}^2 + 2\mathbf{e}_{F,2}^2 \, dS \\ &\leq C\delta_\nu \nu \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \frac{1}{|F|} \int_F \mathbf{e}_{F,1}^2 \, dS \\ &= C\delta_\nu \nu \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \frac{1}{|F|} \|\mathbf{e}_{F,1}\|_{L^2(F)}^2 \\ &\leq C\delta_\nu \nu \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \frac{1}{|F|} \left(\frac{1}{h_F} \|\mathbf{e}\|_{L^2(T_{1,F})}^2 + h_F \|\nabla \mathbf{e}\|_{L^2(T_{1,F})}^2 \right) \\ &\leq C\delta_\nu \nu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{1}{|F|h_F} \|\mathbf{e}\|_{L^2(T)}^2 + \frac{h_F}{|F|} \|\nabla \mathbf{e}\|_{L^2(T)}^2 \right). \end{aligned}$$

Dabei ist $\frac{h_F}{|F|}$ aufgrund der Gitterregularität beschränkt. Nun nutzen wir die Interpolationsabschätzungen für das Crouzeix–Raviart-Element aus Lemma 4.6

$$\|\mathbf{e}\|_0 \leq ch^2 |\mathbf{u}|_2,$$

$$\|\mathbf{e}\|_{1,h} \leq ch |\mathbf{u}|_2$$

und erhalten damit

$$J_\nu(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \leq C\delta_\nu \nu h^2 |\mathbf{u}|_2^2$$

mit einer von h unabhängigen Konstanten C . Es bleibt ein weiterer Term abzuschätzen, dessen obere Schranke uns wieder Lemma 4.6 liefert. Zusammen

ergibt dies:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \pi_h^{CR}\mathbf{u}\|_J &\leq \left(\nu \|\mathbf{u} - \pi_h^{CR}\mathbf{u}\|_{1,h}^2 + J_\nu (\mathbf{u} - \pi_h^{CR}\mathbf{u}, \mathbf{u} - \pi_h^{CR}\mathbf{u}) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\nu h^2 |\mathbf{u}|_2^2 + \delta_\nu \nu h^2 |\mathbf{u}|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\nu^{\frac{1}{2}} h + \delta_\nu^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} h \right) |\mathbf{u}|_2.\end{aligned}$$

□

Lemma 5.10 Falls die Lösung \mathbf{u} von (1.5) in $H^2(\Omega)^n$ ist, so ist

$$\sup_{\mathbf{w} \in V+V_h} \frac{|A_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - l_h(\mathbf{w})|}{\|\mathbf{w}\|_J} \leq C \nu^{\frac{1}{2}} h |\mathbf{u}|_2.$$

Beweis. Nach [Lin14] ist für $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^n$

$$\frac{1}{\nu} \sup_{\mathbf{w} \in V+V_h} \frac{|a_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - l_h(\mathbf{w})|}{\|\mathbf{w}\|_{1,h}} \leq Ch |\mathbf{u}|_2.$$

Da für $n = 2, 3$ alle $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^n$ stetig sind, ist $J_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$, unabhängig von \mathbf{w} . Somit ist $A_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = a_h(\mathbf{u}, \mathbf{w})$. Da außerdem

$$\|\mathbf{w}\|_J = \left(\nu \|\mathbf{w}\|_{1,h}^2 + J_\nu(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \right)^{\frac{1}{2}} \geq \nu^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{w}\|_{1,h}$$

ist, ist die Behauptung gezeigt. □

Satz 5.11 Mit den obigen Definitionen von \mathbf{u} und \mathbf{u}_h erhalten wir folgende Fehlerabschätzung:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_J \leq C \left(\nu^{\frac{1}{2}} h + \delta_\nu^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} h \right) |\mathbf{u}|_2.$$

Beweis. Für beliebiges $\mathbf{v}_h \in V_h$ sei $\mathbf{w}_h := \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h$. Damit ist $\mathbf{w}_h \in V_h$ und

somit $A_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = l_h(\mathbf{w}_h)$. Dies nutzen wir in folgender Umformung aus

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_h\|_J^2 &= A_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h) \\ &= A_h(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \\ &= A_h(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + A_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) - A_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \\ &= A_h(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + l_h(\mathbf{w}_h) - A_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \\ &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_J \|\mathbf{w}_h\|_J + |A_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - l_h(\mathbf{w}_h)|. \end{aligned}$$

Dividiert durch $\|\mathbf{w}_h\|_J$ ergibt dies

$$\|\mathbf{w}_h\|_J \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_J + \frac{|A_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - l_h(\mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_J}.$$

Dies setzen wir nun in unseren abzuschätzenden Fehler ein

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_J &= \|(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \mathbf{w}_h\|_J \\ &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_J + \|\mathbf{w}_h\|_J \\ &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_J + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_J + \frac{|A_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - l_h(\mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_J}. \end{aligned}$$

Da $\mathbf{v}_h \in V_h$ beliebig gewählt werden kann, können wir in dieser Ungleichung zu Grenzwerten übergehen

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_J \leq 2 \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_J + \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{|A_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - l_h(\mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_J}.$$

Da $\pi_h^{CR}\mathbf{u} \in V_h$ ist, gilt

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_J \leq \|\mathbf{u} - \pi_h^{CR}\mathbf{u}\|_J.$$

Wir können den ersten Summanden also mittels Lemma 5.9 und den zweiten Summanden mittels Lemma 5.10 abschätzen. Damit haben wir insgesamt:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_J &\leq \|\mathbf{u} - \pi_h^{CR}\mathbf{u}\|_J + C\nu^{\frac{1}{2}}h|\mathbf{u}|_2 \\ &\leq C\left(\nu^{\frac{1}{2}}h + \delta_\nu^{\frac{1}{2}}\nu^{\frac{1}{2}}h\right)|\mathbf{u}|_2. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.12 Die Fehlerabschätzung aus Satz 5.11 zeigt, dass die Wahl von $\delta_\nu = \mathcal{O}(1)$ optimal ist.

6 Genauigkeitsanalyse

6.1 Genauigkeitsanalyse der Sprungstabilisierung

Um den Einfluss des Sprungparameters δ_ν auf die stabilisierten Diskretisierungen für Stokes und Navier–Stokes zu untersuchen, haben wir verschiedene Beispiele aus Kapitel 2 mit verschiedenen Werten für δ_ν berechnet.

Zunächst betrachten wir die kollidierende Kanalströmung aus Abschnitt 2.2. In Abbildung 29 sieht man den Fehler der stabilisierten diskreten Stokes-Gleichungen (5.3) über sechs Verfeinerungsstufen, bei sieben verschiedenen Einstellungen für δ_ν . Der Parameter variiert zwischen 0,01 und 100. Dabei fällt auf, dass die optimale Einstellung, anders als in [BH05] angegeben, eher bei 10, als bei 1 zu liegen scheint.

In Abbildung 30 sieht man bei gleichem Setting den Fehler der stabilisierten diskreten Navier–Stokes-Gleichungen. Hier ermöglicht eine immer größere Wahl von δ_ν eine frühere Konvergenz der nichtlinearen Iteration auf groben Gittern. Die optimale Wahl scheint allerdings auch hier eher bei 10 zu liegen.

Als zweites wird die Strömung aus Abschnitt 2.5 zu Sprungparametern zwischen 0,01 und 1000 berechnet. Da in diesem Beispiel eine exakte Lösung bekannt ist, können wir den exakten L^2 -Fehler (in Abbildung 31) und den exakten H^1 -Fehler (in Abbildung 32) berechnen. Wie man sieht, ist für die L^2 -Konvergenz die Wahl von $\delta_\nu = 1$ optimal, während für die H^1 -Konvergenz die Wahl von $\delta_\nu = 10$ besser ist. Die optimale L^2 -Konvergenz unterstützt also die analytischen Ergebnisse aus dem vorherigen Kapitel.

Auf die Vorteile der stabilisierten gegenüber der nicht-stabilisierten Diskretisierung wird in Abschnitt 6.2 genauer eingegangen.

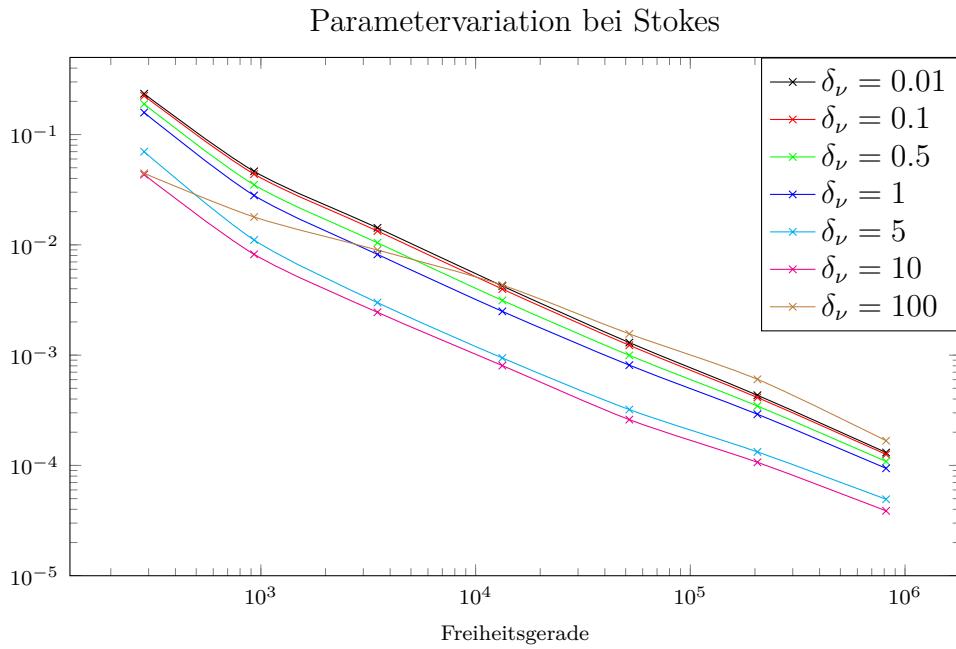


Abbildung 29: Diskreter Fehler der Stokes-Lösung bei $\nu = 500^{-1}$. Die Referenzlösung wurde mit 3.254.586 Freiheitsgeraden berechnet. Die Achsen sind logarithmisch gezeichnet

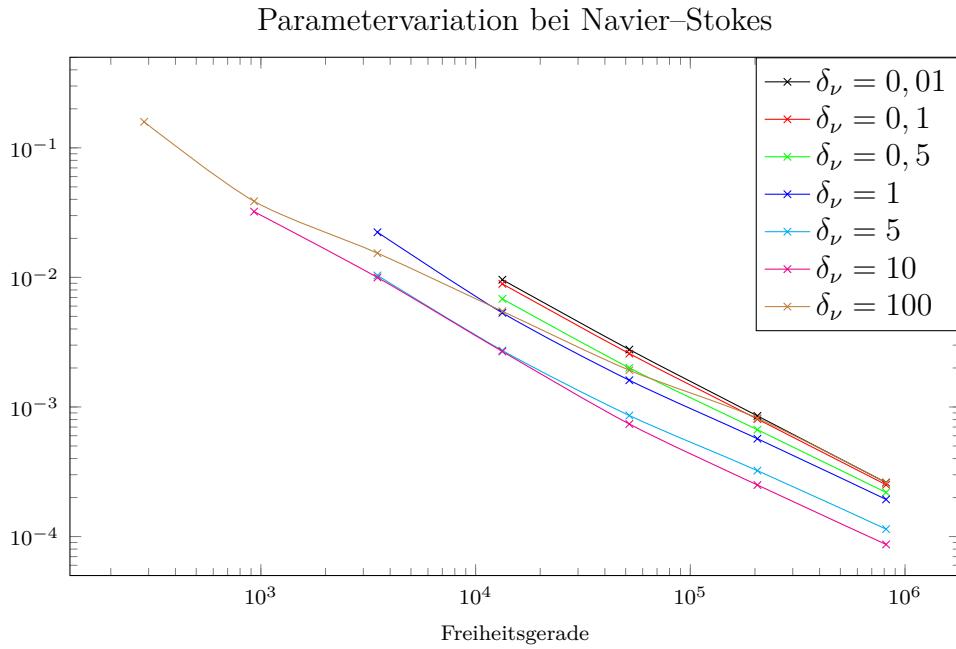


Abbildung 30: Diskreter Fehler der Navier–Stokes-Lösung bei $\nu = 500^{-1}$. Die Referenzlösung wurde mit 3.254.586 Freiheitsgeraden berechnet. Die Achsen sind logarithmisch gezeichnet

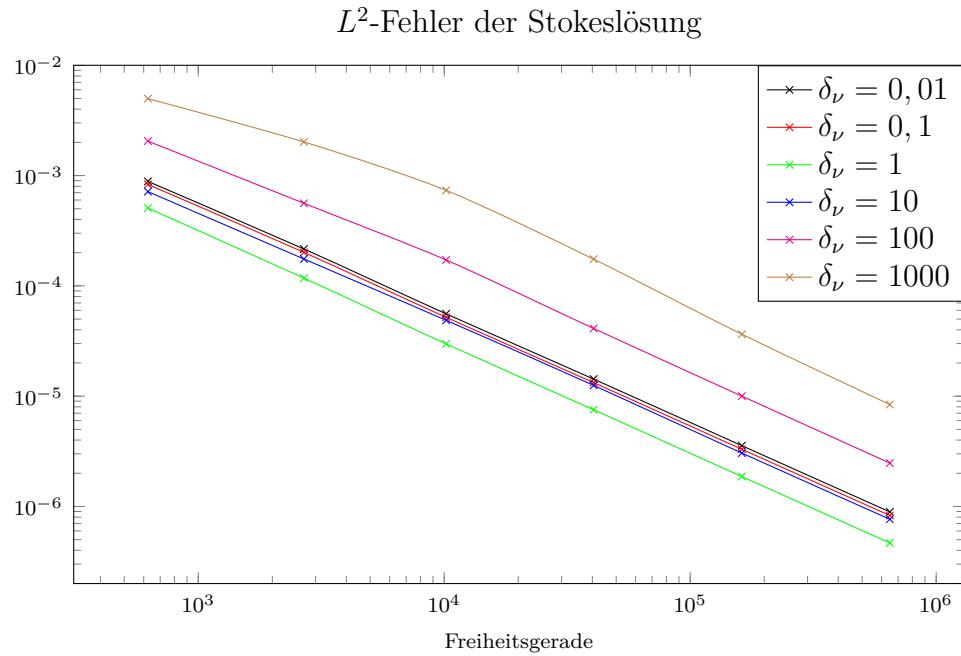


Abbildung 31: L^2 -Fehler bei Parametervariation. $\nu^{-1} = 1000$ ist fest. Die Achsen sind logarithmisch gezeichnet

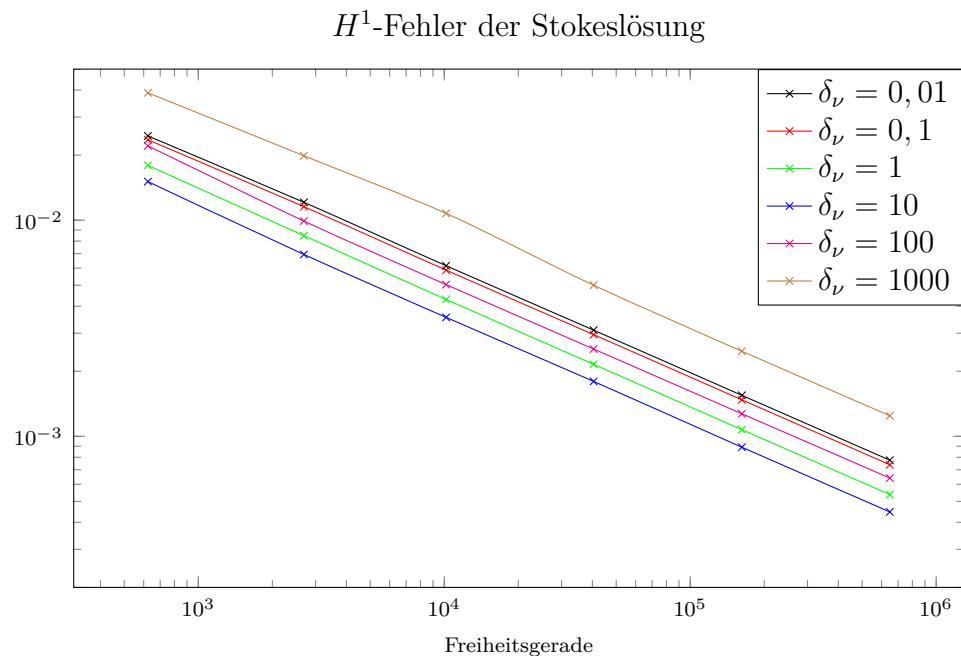


Abbildung 32: H^1 -Fehler bei Parametervariation. $\nu^{-1} = 1000$ ist fest. Die Achsen sind logarithmisch gezeichnet

6.2 Genauigkeitsanalyse der Rekonstruktion

In diesem Abschnitt soll die Genauigkeit der beiden Verfahren CR und CR^+ aus Abschnitt 5, jeweils mit und ohne der Sprungstabilisierung aus Abschnitt 5.2 verglichen werden.

Die vier Verfahren werden an den drei Beispielen aus Abschnitt 2 getestet. Bei Beispiel 2.2 und 2.3 messen wir die Konvergenzgeschwindigkeit bei Gitterverfeinerung in der diskreten Norm aus Abschnitt 2.1.3. Die Norm wird auf 10325 Punkten berechnet, die äquidistant im Kollisionsbereich verteilt sind. Bei Beispiel 2.5 können wir die exakten L^2 - und H^1 -Fehler der diskreten Lösungen berechnen, da wir die analytische Lösung kennen.

Der Sprungparameter ist stets $\delta_\nu = 1$.

L-förmiger Fluss

Wie man in Abbildung 33 sieht, ist die Diskretisierung mit Rekonstruktion CR^+ , im Vergleich zur Standard-Crouzeix–Raviart-Diskretisierung CR , nie von Nachteil. Sie wird im Verhältnis sogar immer besser, je größer die Reynoldszahl ν^{-1} wird. Dies stimmt mit den analytischen Ergebnissen dieser Arbeit überein. Bei einer Reynoldszahl von 250 ($\nu = 4 \cdot 10^{-3}$) ist CR^+ bereits eine Verfeinerungsstufe besser.

Bei stärkerer Verfeinerung werden die Vorteile von CR^+ gegenüber CR allerdings geringer, da als Referenz immer eine Lösung in CR dient.

Die Stabilisierung hingegen liefert bei beiden Ansätzen, CR und CR^+ , und unabhängig der Reynoldszahl eine leichte Verbesserung der Genauigkeit.

Kollisionsfluss

Als Zweites untersuchen wir die Konvergenzgeschwindigkeiten am Beispiel der kollidierenden Kanalströmung. Hier haben wir auch bei deutlich größerer Reynoldszahl ($\nu^{-1} = 1250$) noch stationäre Lösungen berechnen können. Dies

verdeutlicht den im obigen Beispiel angesprochenen Vorteil der Rekonstruktion bei wachsender Reynoldszahl noch deutlicher. So sieht man in Abbildung 34, dass bei Reynoldszahl 1250 ($\nu = 8 \cdot 10^{-4}$) die Rekonstruktion bereits ein um zwei Verfeinerungsstufen genaueres Ergebnis liefert.

Auch hier wurde eine CR -Lösung als Referenz genommen, weshalb die Vorteile von CR^+ gegenüber CR bei stärkerer Verfeinerung abnehmen.

Die Stabilisierung scheint, bis auf den Fall $\nu = 1$, unabhängig von der Reynoldszahl eine leichte Verbesserung zu liefern.

Cavity-Beispiel

Am allerdeutlichsten sieht man den Vorteil von CR^+ im Cavity-Beispiel aus Abschnitt 2.5. Dies war zu erwarten, da das Beispiel künstlich so konstruiert wurde, dass der gewünschte Effekt auftritt. Die Rekonstruktion liefert hier sogar ein um sieben beziehungsweise zehn Verfeinerungsstufen besseres Ergebnis, je nachdem ob man die L^2 - oder die H^1 -Norm betrachtet. Beide Normen können wir in diesem Beispiel exakt berechnen, da wir die analytische Lösung kennen. Somit ist der Unterschied zwischen CR^+ und CR , anders als in den beiden vorherigen Beispielen, über allen Verfeinerungsstufen gleich. In Abbildung 35 ist der L^2 -Fehler und in Abbildung 36 der H^1 -Fehler dargestellt. Die Sprungstabilisierung verbessert in beiden Fällen das Ergebnis noch einmal leicht. Der Sprungparameter δ_ν war dabei stets auf 1 gesetzt.

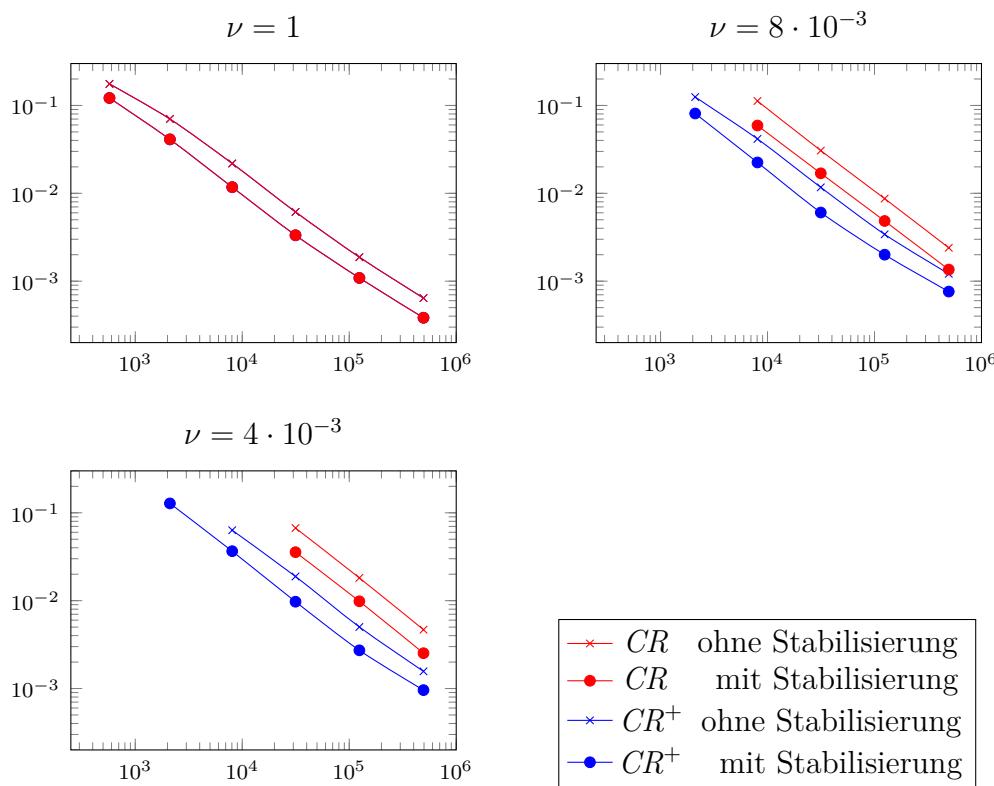


Abbildung 33: Diskrete Fehler über der Anzahl der Freiheitsgrade am Beispiel des L-förmigen Flusses. Als Referenz \mathbf{u}_{ref} diente eine Lösung der Diskretisierung CR mit 7.876.352 Freiheitsgraden, ohne Sprungstabilisierung. Bei $\nu = 1$ sind die Ergebnisse für CR und CR^+ fast identisch, weshalb nur zwei Graphen zu sehen sind

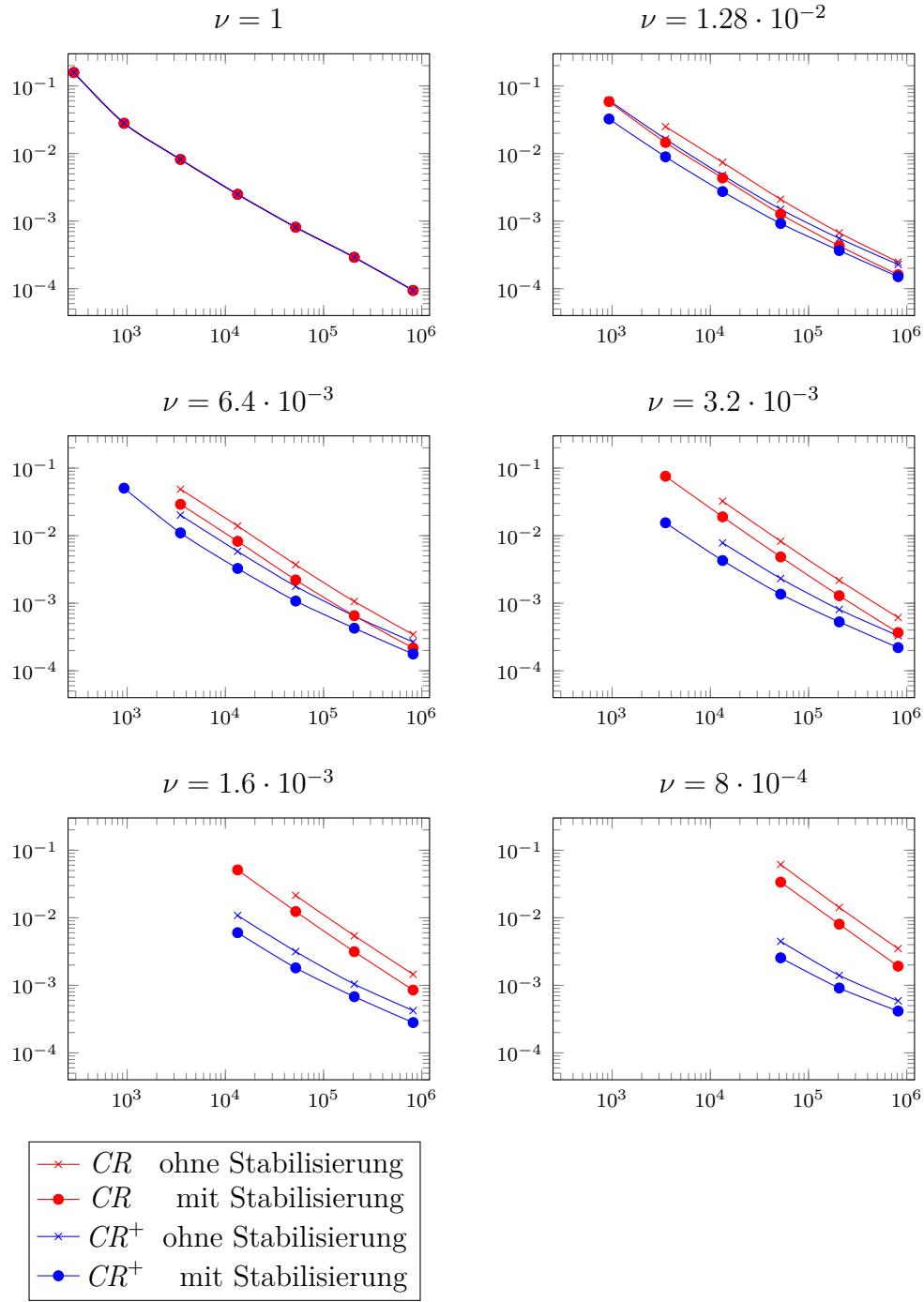


Abbildung 34: Diskrete Fehler über der Anzahl der Freiheitsgrade am Beispiel des Kollisionsflusses. Als Referenz diente eine Lösung der Diskretisierung CR bei 12.997.242 Freiheitsgraden und ohne Sprungstabilisierung. Bei $\nu = 1$ sind die Ergebnisse fast identisch, weshalb die vier Graphen identisch sind

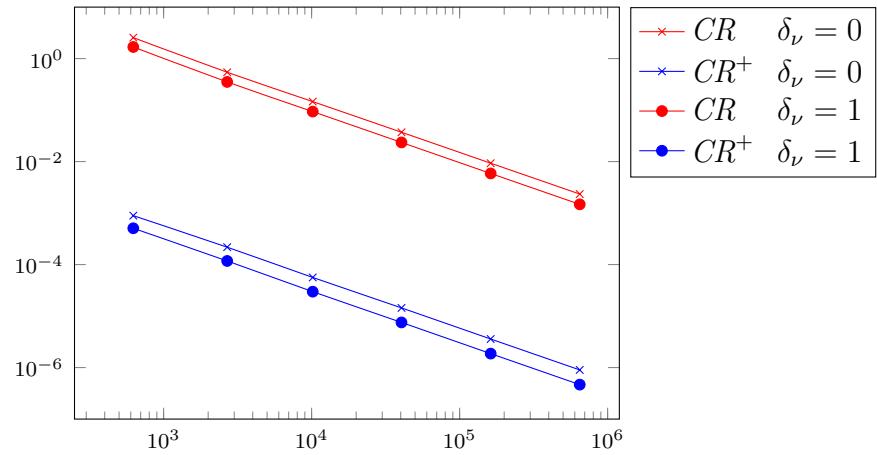


Abbildung 35: L^2 -Fehler der Geschwindigkeit im Cavity-Beispiel. $\nu = 1000$

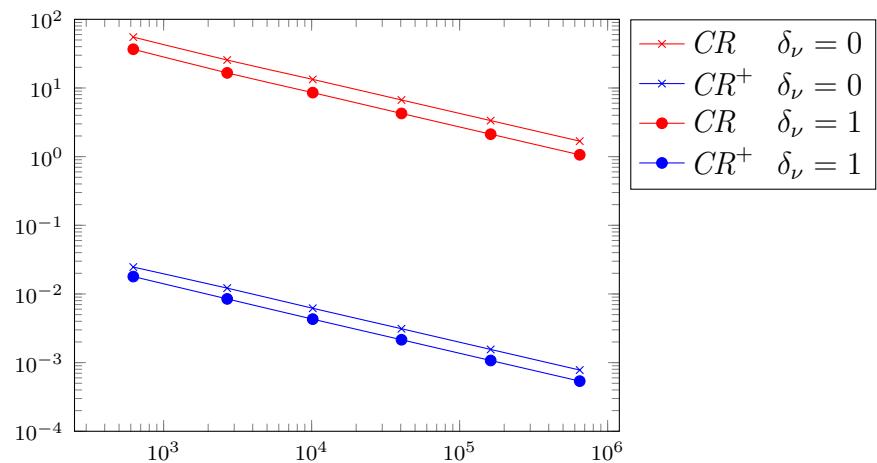


Abbildung 36: H^1 -Fehler der Geschwindigkeit im Cavity-Beispiel. $\nu = 1000$

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit stellte ein Verfahren zur divergenzfreien Rekonstruktion der klassischen Crozeix–Raviart-Elemente vor, die die verletzte Orthogonalität zwischen rotationsfreien und diskret-divergenzfreien Funktionen wieder herstellt. Diese Rekonstruktion nutzten wir analog zu [Lin14] in einer Diskretisierung der stationären inkompressiblen Navier–Stokes-Gleichungen und entkoppelten damit die Fehlerabschätzung der Geschwindigkeit vom Druckgradienten. Dieser Vorteil des vorgestellten Verfahrens lässt sich also besonders in Anwendungen mit großen Drücken, allgemein aber auch bei großen rotationsfreien Kräften beobachten. Hierzu wurden entsprechende Beispiele konstruiert, in denen das Verfahren gegenüber der Diskretisierung ohne divergenzfreier Rekonstruktion eine deutlich höhere Konvergenzrate erzielt. Der Genauigkeitsvorteil der divergenzfreien Methode ist damit sowohl auf analytischer Ebene, als auch in tatsächlichen Anwendungen belegt. Dabei bleibt darauf hinzuweisen, dass die Beispiele nicht nur rein theoretischer Natur sind, sondern durchaus eine physikalisch sinnvolle Strömungsmodellierung darstellen.

Ein Problem das auch bei den vorgestellten Beispiele immer wieder vorkommt, ist die hohe Anzahl an benötigten Freiheitsgraden. Vor allem bei großer Reynoldszahl werden sehr schnell extrem feine Gitter benötigt, um überhaupt die Konvergenz des Verfahrens sicherzustellen. Um dies auch auf größeren Gittern zu ermöglichen, wäre die Betrachtung der instationären Gleichungen im zeitlichen Grenzwert eine vielversprechende Möglichkeit. So könnte mit Hilfe einer hinreichenden Steuerung von Zeit- und Newtonschritten auch bei geringerer Anzahl von Freiheitsgraden ein stationärer Zustand berechnet werden. Die Implementierung des zeitabhängigen Terms würde dann außerdem die Möglichkeit bieten, die bei noch größerer Reynoldszahl

entstehenden instationären Lösungen zu berechnen.

Eine andere Möglichkeit die Divergenzfreie Rekonstruktion auszuführen, ist die sogenannte BDM-Rekonstruktion. Hier werden die Crozeix–Raviart–Elemente anstatt wie in dieser Arbeit auf Raviart–Thomas–Elemente, auf sogenannte BDM–Elemente (siehe [BF91]) abgebildet. Dies liefert ebenfalls eine vom Druck unabhängige Fehlerschranke der Geschwindigkeit, hat aber laut [CB14] optimale Konvegenzrate.

Literatur

- [AD00] ACOSTA, GABRIEL und RICARDO D. DURAN: *The Maximum Angle Condition for Mixed and Nonconforming Elements: Application to the Stokes Equations.* SIAM Journal on Numerical Analysis, 37(1):pp. 18–36, 2000.
- [Ada78] ADAMS, ROBERT ALEXANDER: *Sobolev spaces.* Pure and applied mathematics. Academic Press, New York, 1978.
- [Auc06] AUCHMUTY, GILES: *Divergence L₂-coercivity Inequalities.* Numerical Functional Analysis and Applications, 27:499–516, 2006.
- [BF91] BREZZI, FRANCO und MICHEL FORTIN: *Mixed and hybrid finite elements methods.* Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, 1991.
- [BH05] BURMAN, ERIK und PETER HANSBO: *Stabilized Couzeix-Raviart Element for the Darcy-Stokes Problem.* Numerical Methods for Partial Differential Equations, 21(5):986–997, 2005.
- [BH06] BURMAN, ERIK und PETER HANSBO: *A Stabilized Nonconforming Finite Element Method For Incompressible Flow.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(23-24):2881–2899, 2006.
- [CB14] CHRISTIAN BRENNECKE, ALEXANDER LINKE, CHRISTIAN MERDON JOACHIM SCHÖBERL: *Optimal and pressure-independent L₂ velocity error estimates for a modified Crouzeix-Raviart Stokes element with BDM reconstructions,* Band WIAS Preprint No. 1929. Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, 2014.

- [CR73] CROUZEIX, MICHEL und PIERRE-ARNAUD RAVIART: *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I*. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, 7(R3):33–75, 1973.
- [Deu06] DEUFLHARD, PETER: *Newton Methods for Nonlinear Problems. Affine Invariance and Adaptive Algorithms*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2006.
- [EGK08] ECK, CHRISTOF, HARALD GARNKE und PETER KNABNER: *Mathematische Modellierung*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2008.
- [ESW05] ELMAN, HOWARD, DAVID SILVESTER und ANDY WATHEN: *Finite Elements and Fast Iterative Solvers: With Applications in Incompressible Fluid Dynamics*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. OUP Oxford, 2005.
- [GR79] GIRAUT, VIVETTE und PIERRE-ARNAUD RAVIART: *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979.
- [Gun87] GUNZBURGER, MAX: *The inf-sup Condition in Mixed Finite Element Methods with Application to the Stokes System*, Kapitel 6, Seiten 93–121. Collected Lectures on the Preservation of Stability Under Discretization (Proceedings in Applied Mathematics) von D. Estep and S. Tavener. SIAM, 1987.
- [Kle05] KLEIN, ROLF: *Algorithmische Geometrie: Grundlagen, Methoden, Anwendungen*. eXamen.press Series. Springer, 2005.

-
- [KLS13] KUZMIN, ANDREY, MATHIEU LUISIER und OLAF SCHENK: *Fast Methods for Computing Selected Elements of the Greens Function in Massively Parallel Nanoelectronic Device Simulations*. In: WOLF, F., B. MOHR und D. MEY (Herausgeber): *Euro-Par 2013 Parallel Processing*, Band 8097 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 533–544. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [Kön04] KÖNIGSBERGER, KONRAD: *Analysis 2*. Nummer Bd. 2 in *Springer-Lehrbuch*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2004.
- [Lad69] LADYZHENSKAYA, OLGA A.: *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Band 2nd edition. Gordon and Breach, New York, 1969.
- [Lay08] LAYTON, WILLIAM: *Introduction to the Numerical Analysis of Incompressible Viscous Flows*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2008.
- [Lin09] LINKE, ALEXANDER: *Collision in a cross-shaped domain - A steady 2D Navier-Stokes example demonstrating the importance of mass conservation in CFD*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198(41-44):3278–3286, 2009.
- [Lin14] LINKE, ALEXANDER: *On the role of the Helmholtz-decomposition in mixed methods for incompressible flows and a new variational crime*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 268:pp. 782–800, 2014.
- [Pfe12] PFEFFER, WASHEK FRANK: *The Divergence Theorem and Sets of Finite Perimeter*. Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. Taylor & Francis, 2012.

- [SBR08] SCHENK, OLAF, MATTHIAS BOLLHÖFER und RUDOLF A. RÖMER:
On Large-Scale Diagonalization Techniques for the Anderson Model of Localization. SIAM Rev., 50(1):91–112, Februar 2008.
- [SWH07] SCHENK, OLAF, ANDREAS WÄCHTER und MICHAEL HAGEMANN:
Matching-based preprocessing algorithms to the solution of saddle-point problems in large-scale nonconvex interior-point optimization. Computational Optimization and Applications, 36(2-3):321–341, 2007.
- [Tem83] TEMAM, ROGER: *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1983.
- [Ver98] VERFÜRTH, RÜDIGER: *Scriptum: Numerische Strömungsmechanik.* Vorlesungsskript, Ruhr-Universität Bochum, <http://www.ruhr-uni-bochum.de/num1/files/lectures/SM.pdf>, WS 1998.
- [Wer07] WERNER, DIRK: *Funktionalanalysis.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2007.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind ausnahmslos als solche kenntlich gemacht.

Berlin, 17. Juni 2014