ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΛΟΓΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Υλοποίηση Λογικών Παραστάσεων με Λογικές Πύλες

Η υλοποίηση μιας δοσμένης λογικής παράστασης πραγματοποιείται με τη διασύνδεση λογικών πυλών.
Ένα σύνολο από λογικές πύλες καλείται ***πλήρες*** (*universal*), εάν μόνο με τις πύλες αυτού του συνόλου μπορεί να υλοποιηθεί οποιαδήποτε λογική παράσταση.

Παραδείγματα συνόλων λογικών πυλών τα οποία είναι πλήρη:

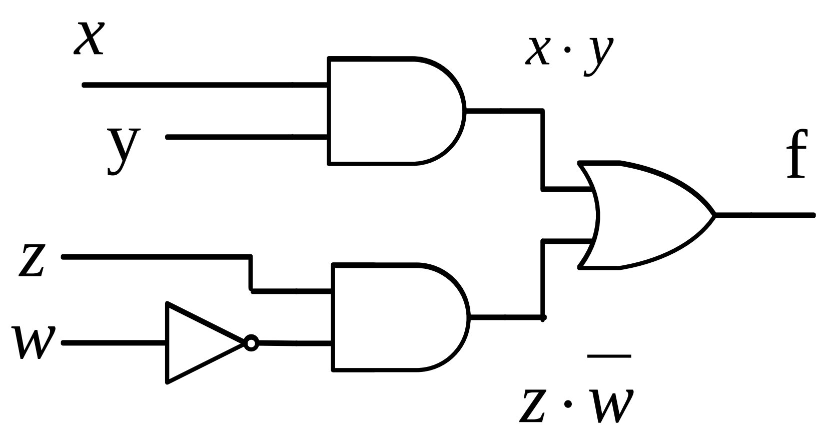
{AND, OR, NOT}, {AND, NOT}, {OR, NOT}, {NAND}, {NOR}

Σύνολο πυλών {AND, OR, NOT}

Το σύνολο πυλών {AND, OR, NOT} είναι πλήρες. Αυτό προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι κάθε συνδυαστικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί με λογικές εκφράσεις και υπάρχει αμφιμονοσήμανη αντιστοιχία μεταξύ λογικών εκφράσεων και κυκλωμάτων AND-OR-NOT.

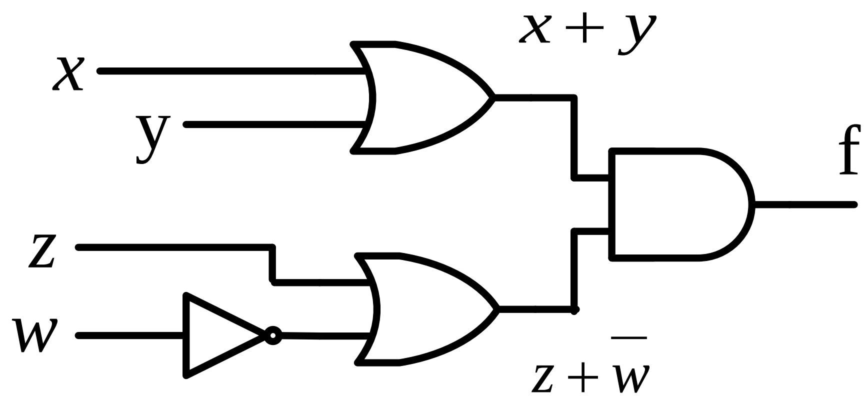
Παράδειγμα 3.28. Να υλοποιηθεί με πύλες AND, OR, NOT η λογική παράσταση

$$f = x \cdot y + z \cdot \overline{w}$$



Παράδειγμα 3.29. Να υλοποιηθεί με πύλες AND, OR, NOT η λογική παράσταση

$$f = (x + y) \cdot (z + \overline{w})$$

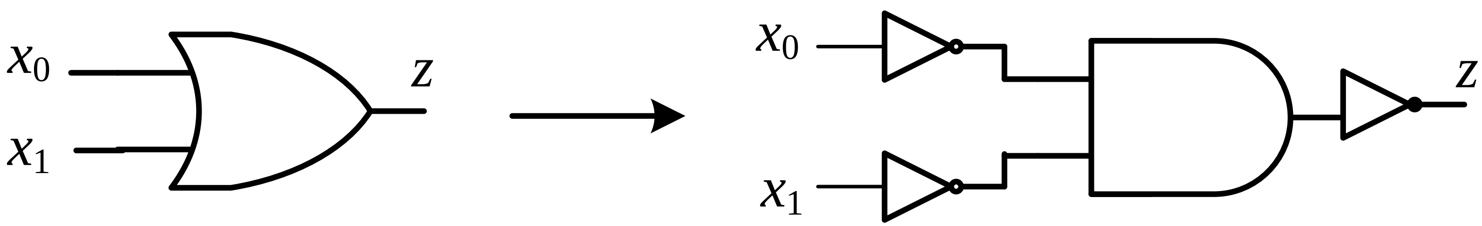


Σύνολο πυλών {AND, NOT}

Υλοποίηση πύλης OR-2 με πύλες AND-2 και NOT

$$z = x_0 + x_1 = \overline{\overline{x_0 + x_1}} \qquad \alpha = \overline{\overline{\alpha}}$$

$$z = \overline{\overline{x}_0 \cdot \overline{x}_1}$$



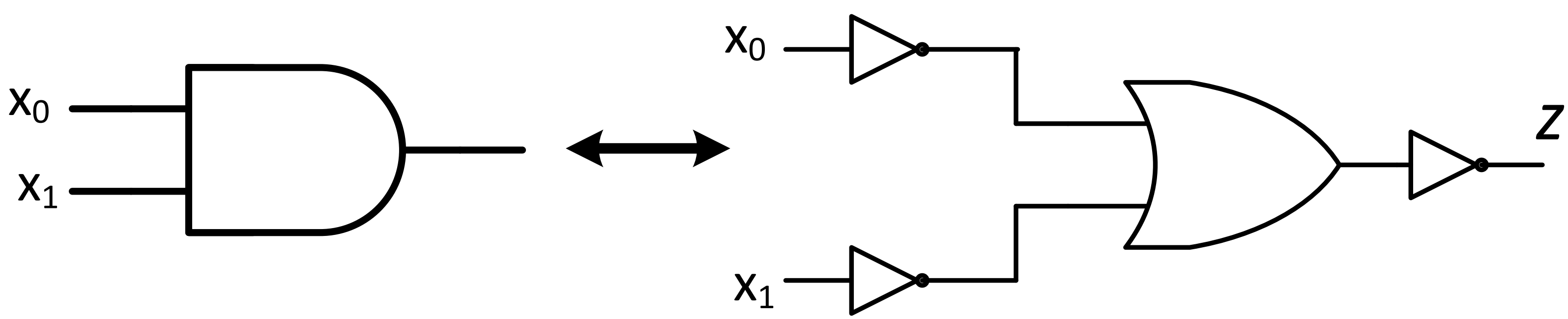
Επομένως το σύνολο {AND, NOT} είναι πλήρες

Σύνολο πυλών {OR, NOT}

Υλοποίηση πύλης AND-2 με πύλες OR-2 και NOT

$$z = x_0 \cdot x_1 \;=\; \overline{\overline{x_0 \cdot x_1}} \qquad\qquad \alpha = \bar{\bar{\alpha}}$$

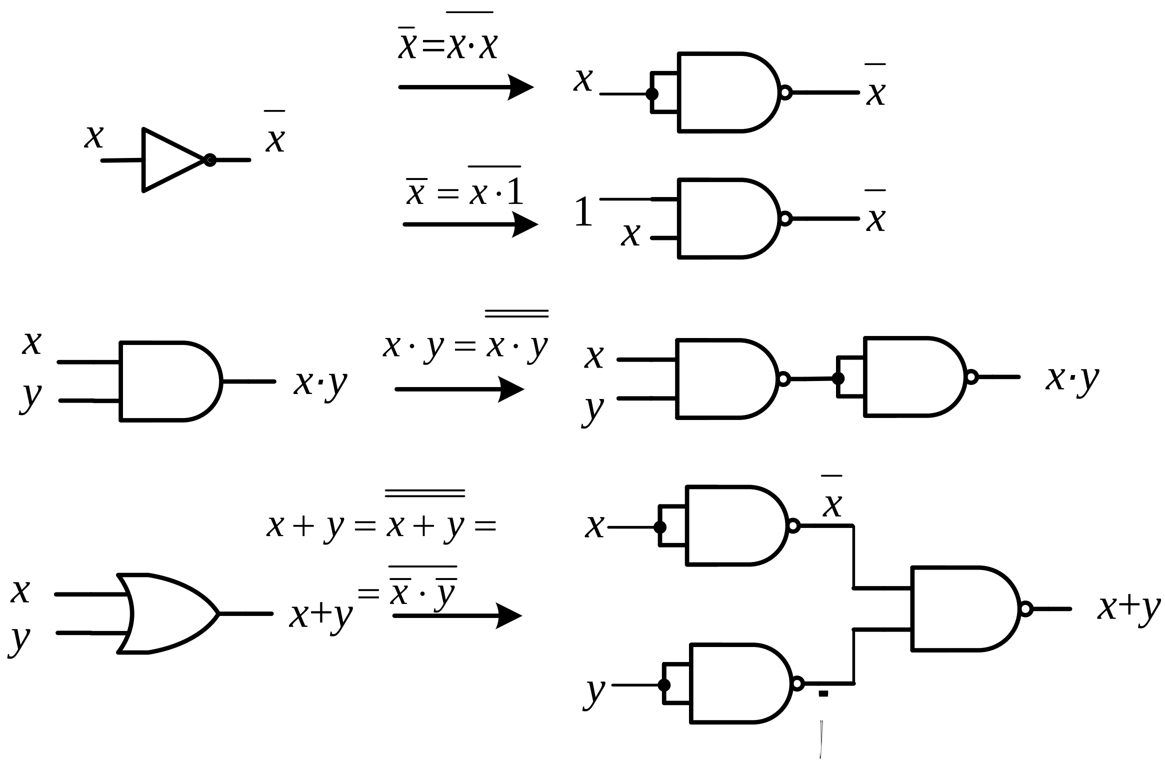
$$z = \overline{\overline{x}_0 + \overline{x}_1}$$



Επομένως το σύνολο {OR, NOT} είναι πλήρες

Σύνολο πυλών {NAND}

Σχεδίαση των πυλών AND, OR, NOT με πύλες NAND



Επομένως το σύνολο {NAND} είναι πλήρες

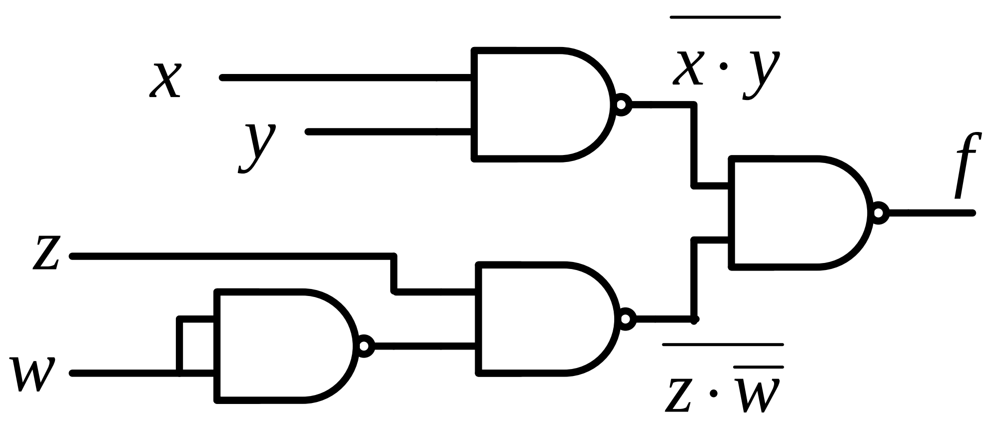
Παράδειγμα 3.30. Να υλοποιηθεί με πύλες NAND η λογική παράσταση

$$f = x \cdot y + z \cdot \overline{w}$$

Υπόδειξη

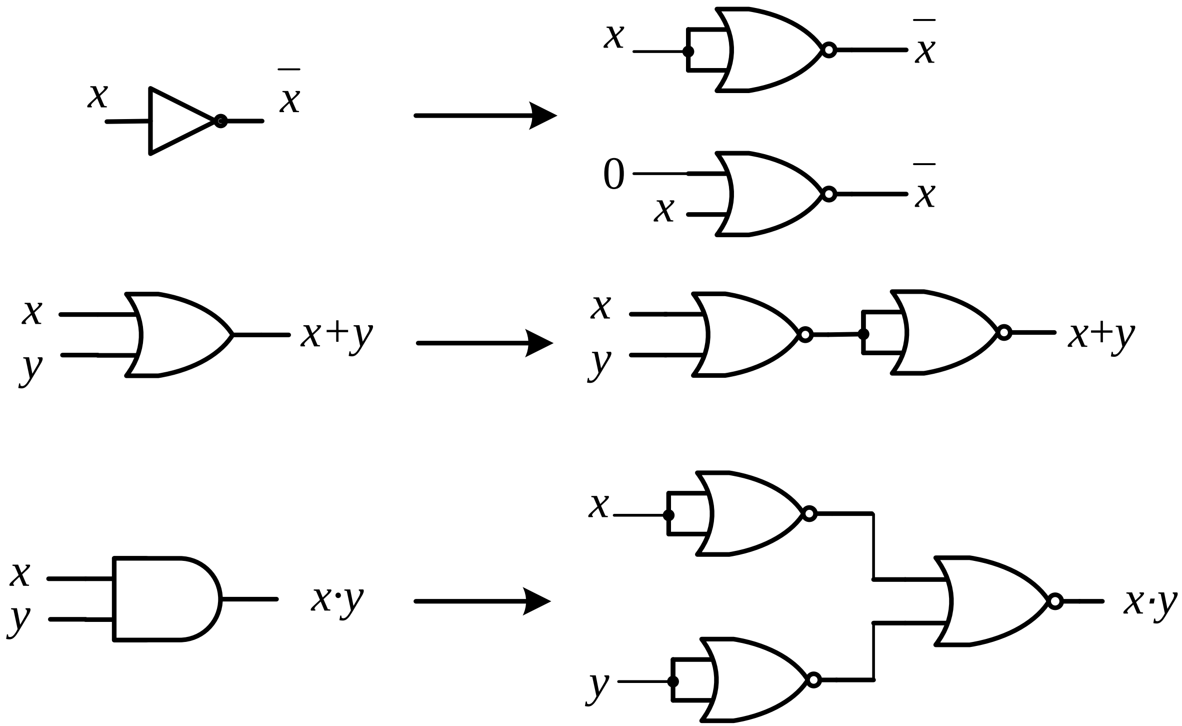
$$\alpha = \overline{\overline{\alpha}}$$

$$f = \overline{\overline{x \cdot y + z \cdot \overline{w}}} = \overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{z \cdot \overline{w}}}$$



Σύνολο πυλών {NOR}

Σχεδίαση των πυλών AND, OR, NOT με πύλες NOR



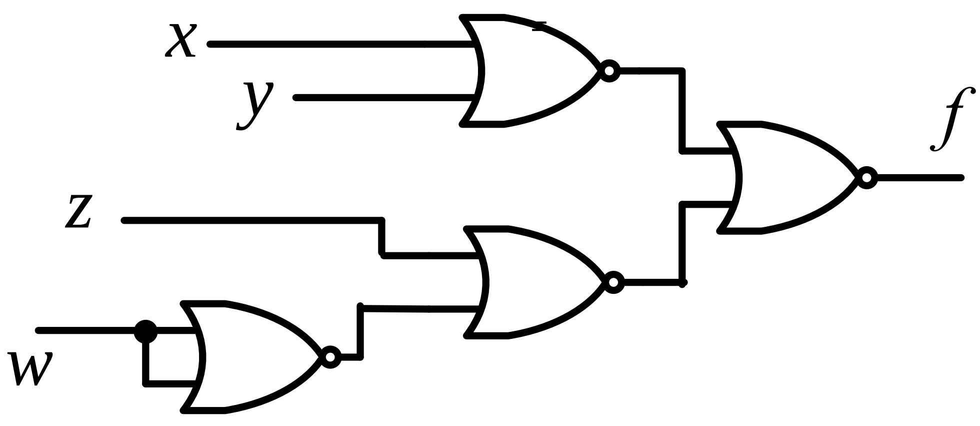
Επομένως το σύνολο {NOR} είναι πλήρες

Παράδειγμα 3.31. Να υλοποιηθεί με πύλες NOR η λογική παράσταση

$$f = (x+y)\cdot(z+\overline{w})$$

Υπόδειξη

$$f = \overline{\overline{(x+y)\cdot(z+\overline{w})}} = \overline{\overline{(x+y)}+\overline{(z+\overline{w})}}$$



Συναρτήσεις XOR (Exclusive-OR) και XNOR (Exclusive-NOR)

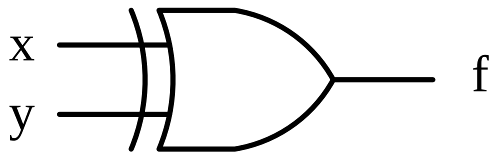
x	y	$x \oplus y$	$\overline{x \oplus y}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

XOR : $x \oplus y = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y} = (x+y)(\bar{x}+\bar{y})$

XNOR : $\overline{x \oplus y} = \bar{x} \cdot \bar{y} + x \cdot y = (x+\bar{y})(\bar{x}+y)$

Πύλες XOR, XNOR δύο εισόδων

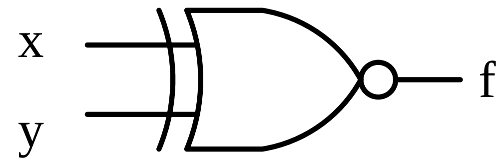
XOR



$$f = x \oplus y$$

x	y	f
0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0

XNOR



$$f = \overline{x \oplus y} = x \otimes y$$

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Βασικές σχέσεις για τις συναρτήσεις XOR, XNOR

$x \oplus 0 = x \qquad x \oplus 1 = \overline{x}$

$x \oplus x = 0 \qquad x \oplus \overline{x} = 1$

$x \oplus \overline{y} = \overline{x} \oplus y = \overline{x \oplus y}$

$x \oplus y = y \oplus x$ (Αντιμεταθετική)

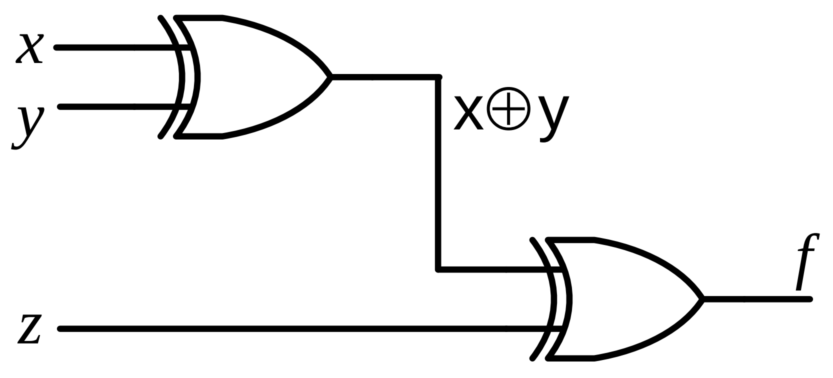
$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ (Προσεταιριστική)

Παράδειγμα. Να υλοποιηθεί με πύλες XOR-2 η λογική συνάρτηση

$$f=x\oplus y\oplus z$$

Υπόδειξη

$$f=x\oplus y\oplus z=(x\oplus y)\oplus z$$



Παράδειγμα 3.32. Να σχεδιασθεί μόνο με χρήση πυλών XOR και XNOR δύο εισόδων λογικό κύκλωμα με 3 εισόδους του οποίου η έξοδος να γίνεται 1 όταν ο αριθμός των 1 στις εισόδους του είναι άρτιος αριθμός.

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

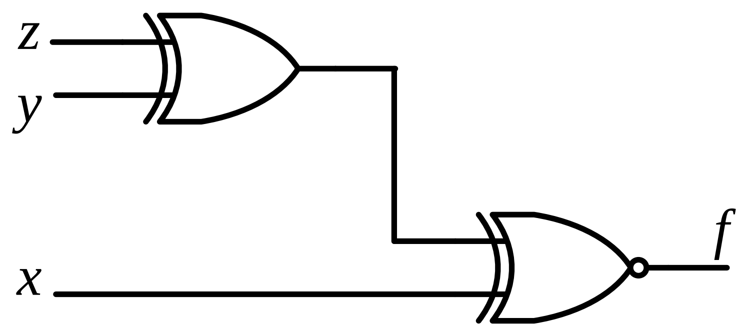
Υπόδειξη

$$f=\sum(0,3,5,6)=\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}+\bar{x}\cdot y\cdot z+x\cdot\bar{y}\cdot z+x\cdot y\cdot\bar{z}$$

$$=\bar{x}\cdot(\bar{y}\cdot\bar{z}+y\cdot z)+x\cdot(\bar{y}\cdot z+y\cdot\bar{z})$$

$$=\bar{x}\cdot(\overline{y\oplus z})+x\cdot(y\oplus z)$$

$$f=\overline{x\oplus(y\oplus z)}$$

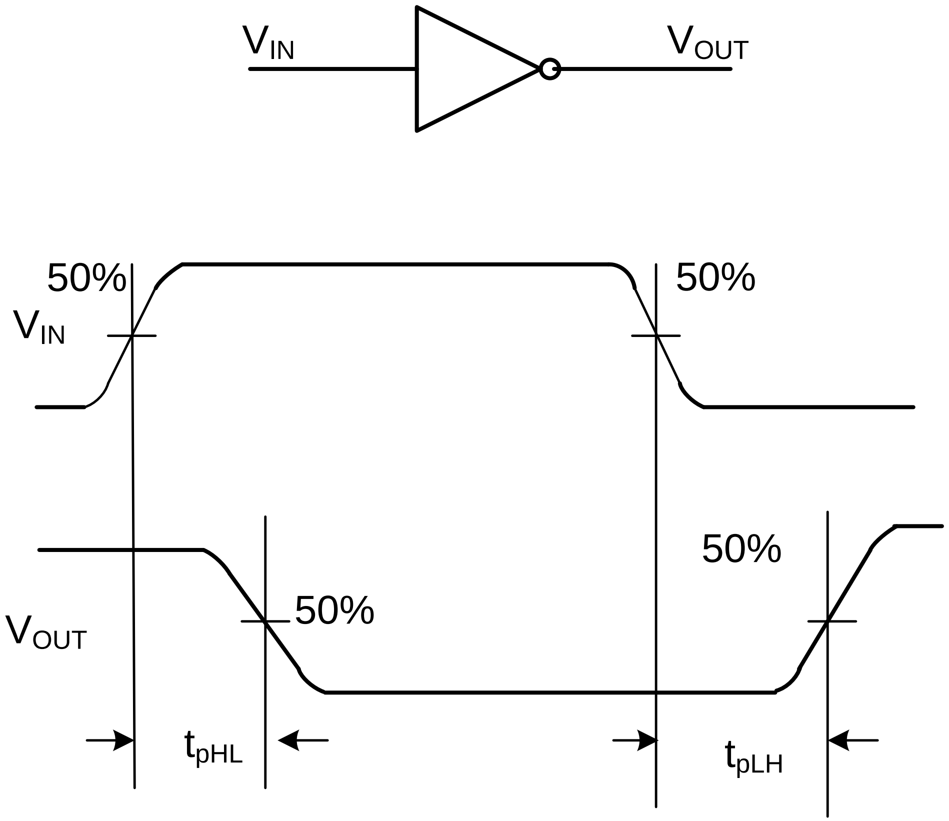


Καθυστέρηση των πυλών

Όταν γίνεται μία αλλαγή στην είσοδο μιας λογικής πύλης αυτή δεν επηρεάζει την τιμή της εξόδου ακαριαία, αλλά μεσολαβεί κάποιο χρονικό διάστημα.

Καθυστέρηση διάδοσης (*propagation delay*) είναι ο χρόνος που μεσολαβεί ώστε μία μεταβολή στο λογικό επίπεδο μιας εισόδου μιας πύλης να προκαλέσει μία αλλαγή στο λογικό επίπεδο της εξόδου της.

Καθυστέρηση αντιστροφέα

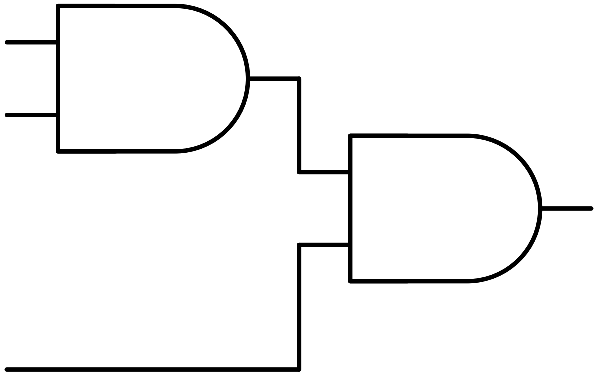


$$\boldsymbol{t_{pd} = \max(t_{pHL}, t_{pLH})}$$

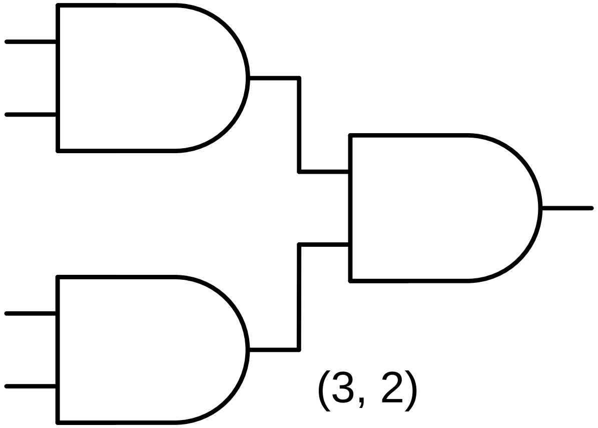
Unit gate model

Για μία πρώτη συγκριτική προσέγγιση της πολυπλοκότητος των λογικών κυκλωμάτων χρησιμοποιείται το "unit gate model". Στο μοντέλο αυτό οι λογικές πύλες δύο εισόδων AND, OR, NAND, NOR θεωρούνται σαν μοναδιαίες όσον αφορά την κυκλωματική πολυπλοκότητα και την καθυστέρηση που εισάγουν. Οι πύλες XOR, XNOR δύο εισόδων ακαι οι 2→1 πολυπλέκτες θεωρούνται ότι ισοδυναμούν με 2 μοναδιαίες πύλες όσον αφορά την κυκλωματική πολυπλοκότητα, αλλά και την καθυστέρηση που εισάγουν. Λογικές πύλες AND, OR, NAND, NOR *n* εισόδων ισοδυναμούν με *n*-1 μοναδιαίες πύλες και $\lceil \log_2 n \rceil$ μοναδιαίες πύλες όσον αφορά την καθυστέρηση που εισάγουν. $\log_2 n$ είναι ο λογάριθμός με βάση 2 του *n*. $\lceil x \rceil$ είναι ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος ή ίσος ενός πραγματικού αριθμού *x*.

Υλοποίηση πυλών AND 3 και 4 εισόδων με πύλες AND-2

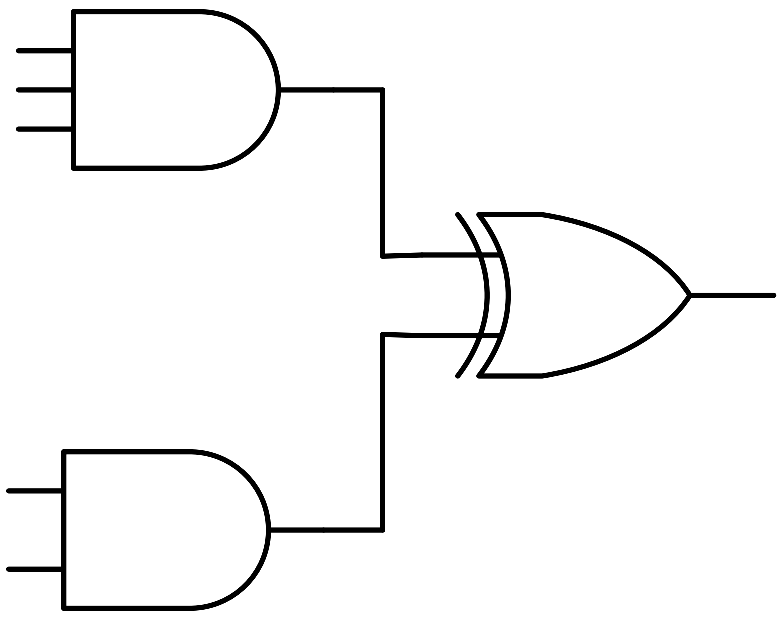


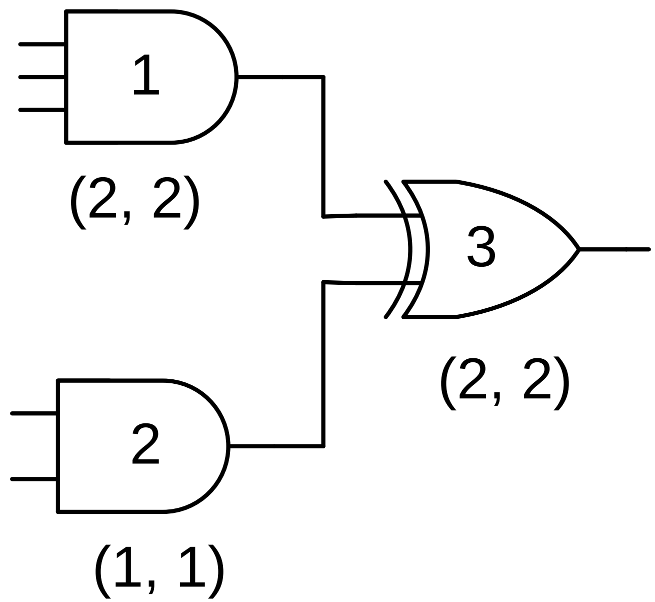
(2, 2)



(3, 2)

Παράδειγμα 4.2. Να υπολογισθεί με βάση το unit gate model η πολυπλοκότητα του κυκλώματος που δίδεται στην συνέχεια





Η διαδρομή από είσοδο στην έξοδο που εισάγει την μέγιστη καθυστέρηση είναι από τις εισόδους της πύλης 1 στην έξοδο της πύλης 3.
Επομένως η συνολική κυκλωματική πολυπλοκότητα είναι 5 και ή μέγιστη καθυστέρηση διάδοσης 4 (από την πύλη 1 στην πύλη 3).

Ασκήσεις

5.1 Να υλοποιηθεί με πύλες AND, OR , NOT η λογική παράσταση που δίδεται στη συνέχεια

$$f = \bar{x}y + y\bar{z} + xz$$

5.2 Να υλοποιηθεί με πύλες NAND η λογική παράσταση που δίδεται στη συνέχεια

$$f = \bar{x}y + y\bar{z} + xz$$

Υπόδειξη

$$f = \overline{\overline{\bar{x}y + y\bar{z} + xz}} = \overline{\overline{\bar{x}y} \cdot \overline{y\bar{z}} \cdot \overline{xz}}$$

5.3 Να υλοποιηθεί με πύλες AND, OR , NOT η λογική παράσταση που δίδεται στη συνέχεια.

$$f = (x + y)(x + z)(\bar{z} + x)$$

5.4 Να υλοποιηθεί με πύλες NAND η λογική παράσταση που δίδεται στη συνέχεια.

$$f = (x + y)(x + z)(\bar{z} + x)$$

Υπόδειξη

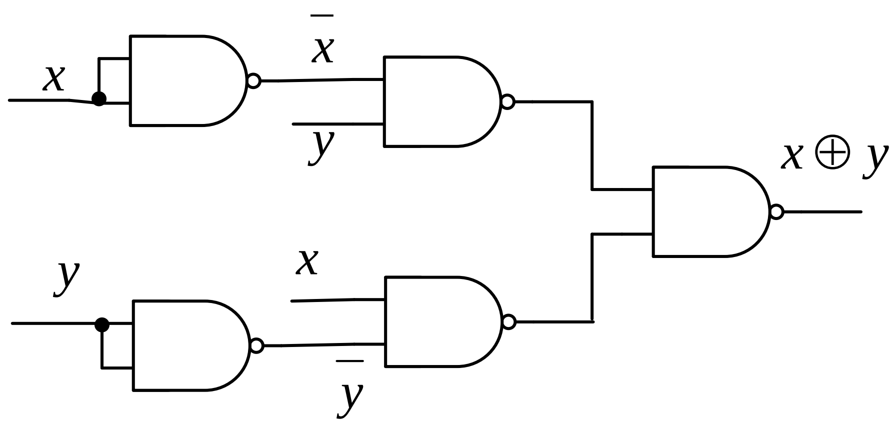
$$f = \overline{\overline{(\bar{x} + y)(y + \bar{z})(x + z)}} = \overline{\overline{(\bar{x} + y)} + \overline{(y + \bar{z})} + \overline{(x + z)}}$$

5.5 Να σχεδιασθεί μία πύλη XOR 2 εισόδων χρησιμοποιώντας πύλες AND-2, OR-2, NOT.

Υπόδειξη

$$x \oplus y = \bar{x}y + x\bar{y} =$$

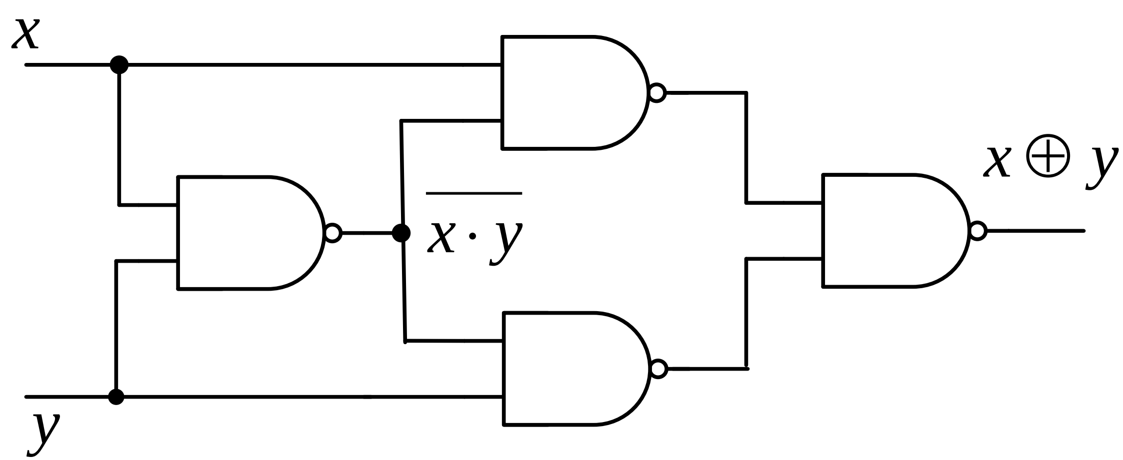
$$= \overline{\overline{\bar{x}y + x\bar{y}}} = \overline{\overline{\bar{x}y} \cdot \overline{x\bar{y}}}$$



5.6 Να σχεδιασθεί αναλυτικά μια πύλη XOR-2 (2 εισόδων) χρησιμοποιώντας 4 μόνο πύλες NAND 2 εισόδων.

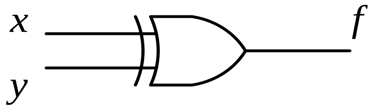
Υπόδειξη

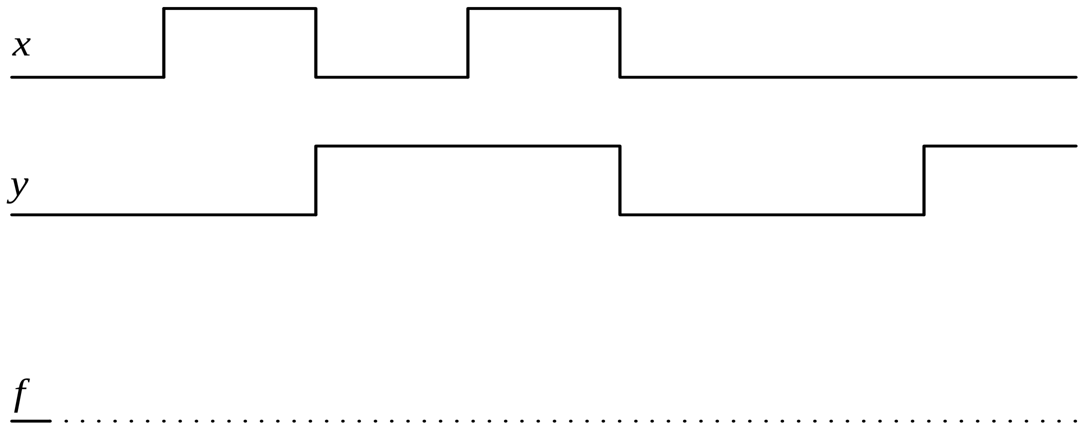
$$
\begin{aligned}
f &= (x+y)(\bar{x}+\bar{y}) = \\
&= (x+y)(\overline{x\cdot y}) = \\
&= x(\overline{x\cdot y}) + y(\overline{x\cdot y}) = \\
&= \overline{\overline{x(\overline{x\cdot y}) + y(\overline{x\cdot y})}} = \\
&= \overline{\overline{x(\overline{x\cdot y})}\cdot\overline{y(\overline{x\cdot y})}}
\end{aligned}
$$



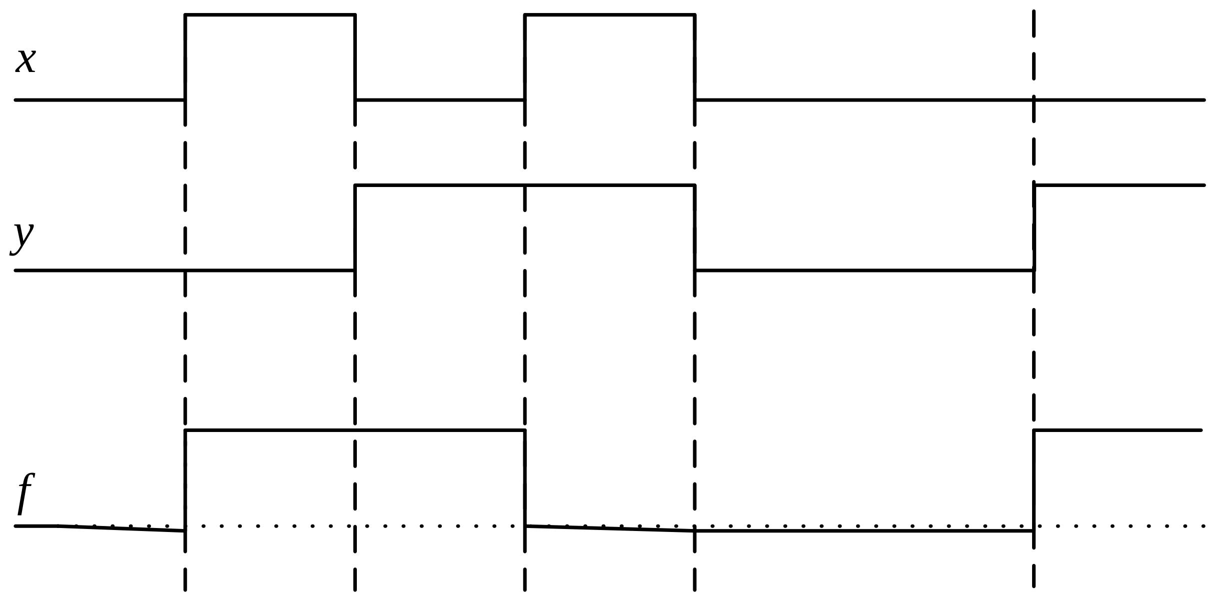
x
y
$\overline{x \cdot y}$
$x \oplus y$

5.7 Να σχεδιασθεί η έξοδος της πύλης XOR-2 για τις δοσμένες εισόδους.





Υπόδειξη



5.8 Να μετατραπεί σε αντιστροφέα (πύλη NOT)

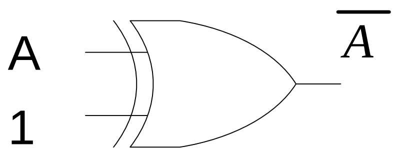
α) Μία πύλη XOR δύο εισόδων

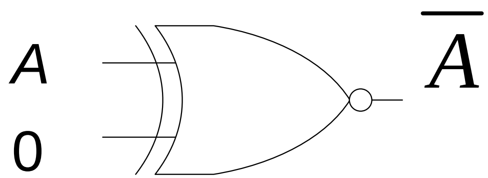
β) Μία πύλη XNOR δύο εισόδων.

Υπόδειξη

$$A \oplus 1 = \overline{A}$$

$$\overline{A \oplus 0} = \overline{A} \oplus 0 = \overline{A}$$





5.9 Να σχεδιασθεί αναλυτικά κύκλωμα ισοδύναμο μιας πύλης XOR-2 μόνο με πύλες XNOR-2.

Υπόδειξη

$$x \oplus y = \overline{\overline{x \oplus y}}$$

5.10 Να μετασχηματισθεί αλγεβρικά η λογική συνάρτηση που δίδεται στη συνέχεια ώστε να μπορεί να υλοποιηθεί με πύλες XOR δύο εισόδων. Ακολούθως να σχεδιασθεί το αντίστοιχο λογικό κύκλωμα

$$f = \bar{x}\bar{y}z + xyz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

5.11 Να μετασχηματισθεί αλγεβρικά η λογική συνάρτηση που δίδεται στη συνέχεια ώστε να μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με πύλες AND και XOR. Ακολούθως να σχεδιασθεί το αντίστοιχο κύκλωμα.

$$f = x\overline{y}z\overline{w} + \overline{x}yz\overline{w} + x\overline{y}\,\overline{z}w + \overline{x}y\overline{z}w$$

5.12 Να αποδειχθούν με χρήση των προτάσεων της Άλγεβρας Boole οι ταυτότητες

$$0 \oplus x = x \qquad 1 \oplus x = \overline{x}$$

Υπόδειξη

$$0 \oplus x = \overline{0}x + 0\overline{x} = 1x + 0\overline{x} = x + 0 = x$$

5.13 Να αποδειχθούν χρήση των προτάσεων της Άλγεβρας Boole οι ταυτότητες

$$\bar{x} \oplus y = \overline{x \oplus y} \qquad x \oplus \bar{y} = \overline{x \oplus y}$$

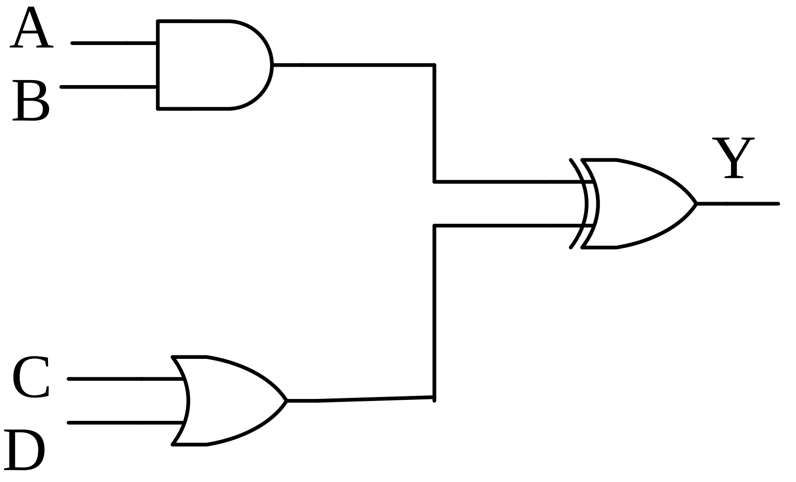
Υπόδειξη

$$\bar{x} \oplus y = \bar{\bar{x}}y + \bar{x} \cdot \bar{y} = xy + \bar{x}\,\bar{y} = \overline{x \oplus y}$$

5.14 Να υπολογισθούν α) το $\log_2 8$ β) το $\lceil \log_2 9 \rceil$

5.15 Να υπολογισθεί με βάση το unit gate model η κυκλωματική και χρονική πολυπλοκότητα μιας πύλης AND–3 (AND 3 εισόδων) και μιας πύλης AND-4 (AND 4 εισόδων).

5.16 Να υπολογισθεί με βάση το unit gate model η κυκλωματική και χρονική πολυπλοκότητα του κυκλώματος που δίδεται στην συνέχεια.



5.17 Να υπολογισθεί με βάση το unit gate model η κυκλωματική και χρονική πολυπλοκότητα του κυκλώματος που δίδεται στην συνέχεια.