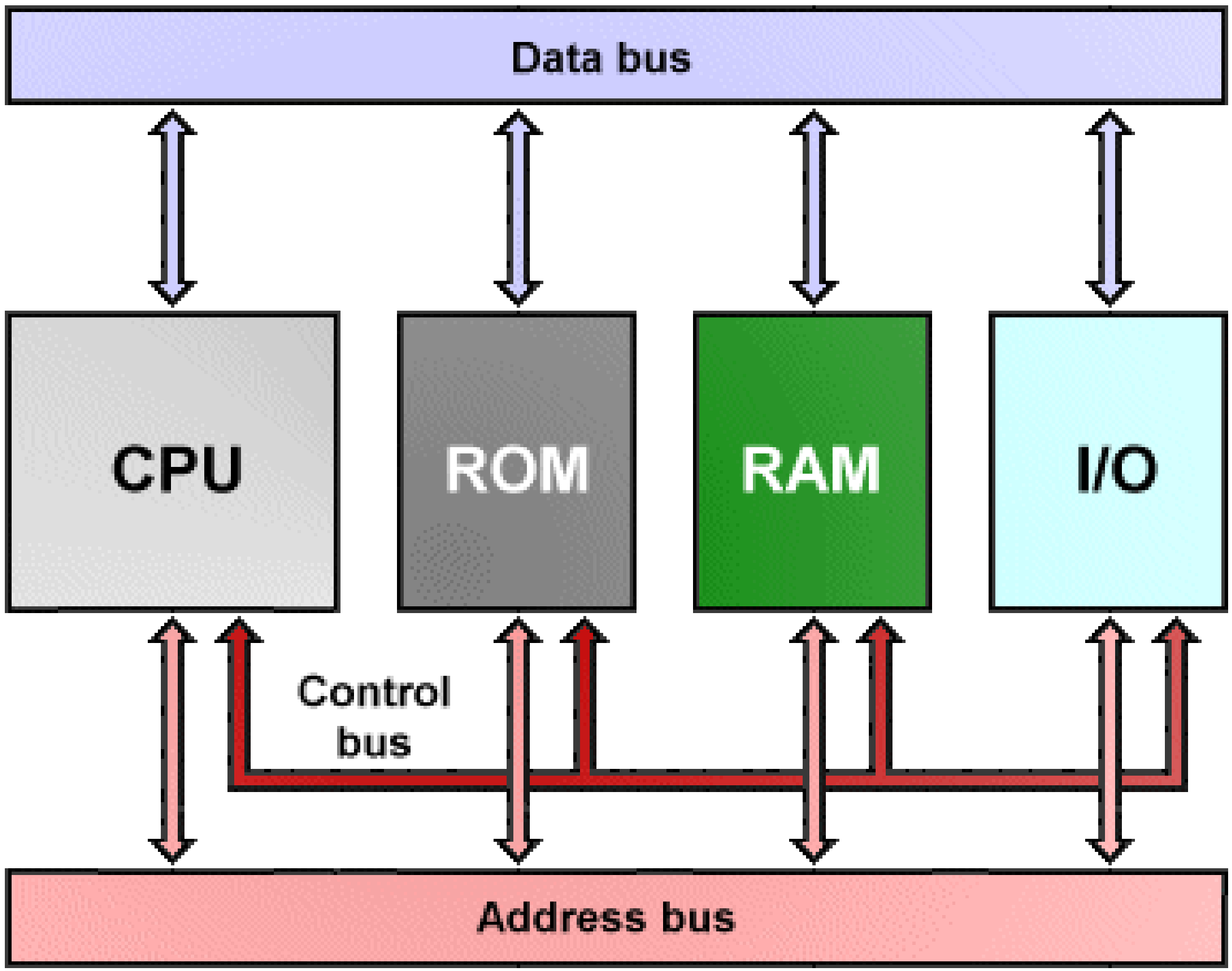
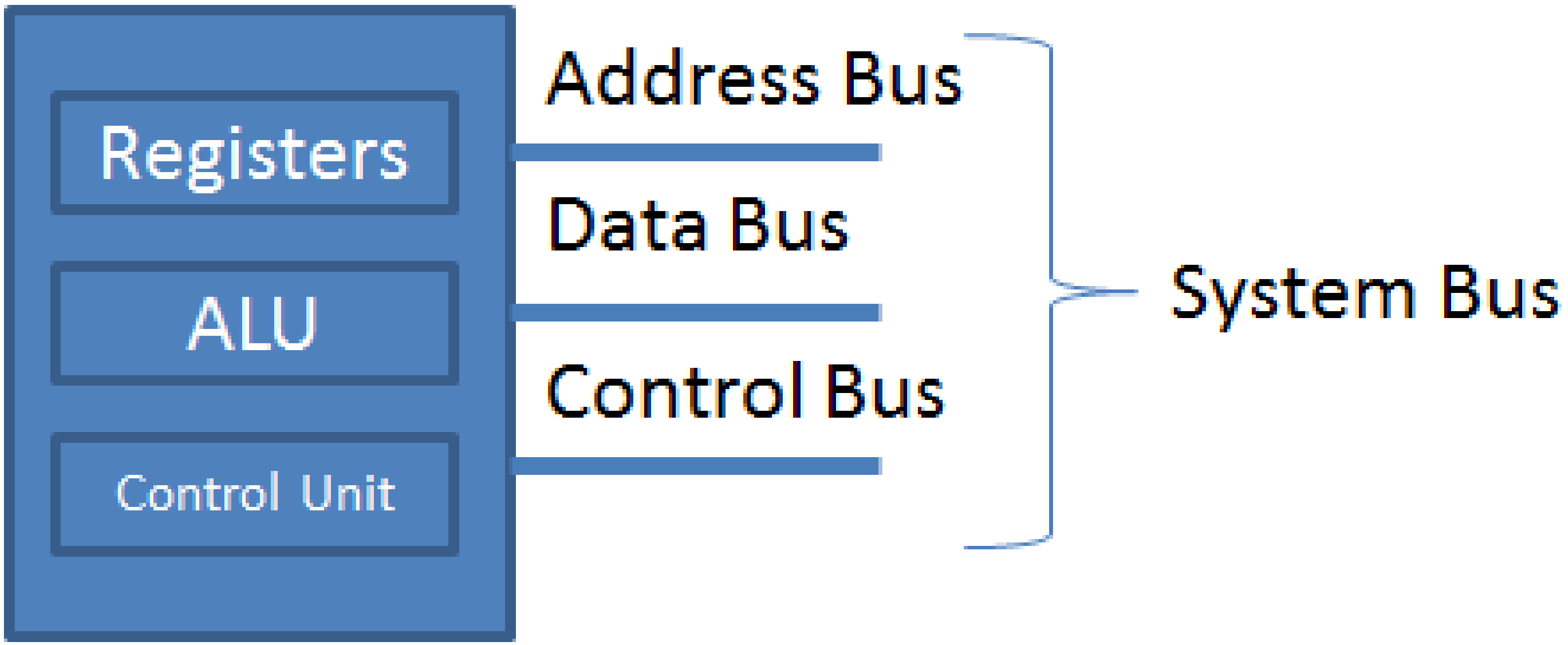
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Αρχιτεκτονική απλού υπολογιστικού συστήματος



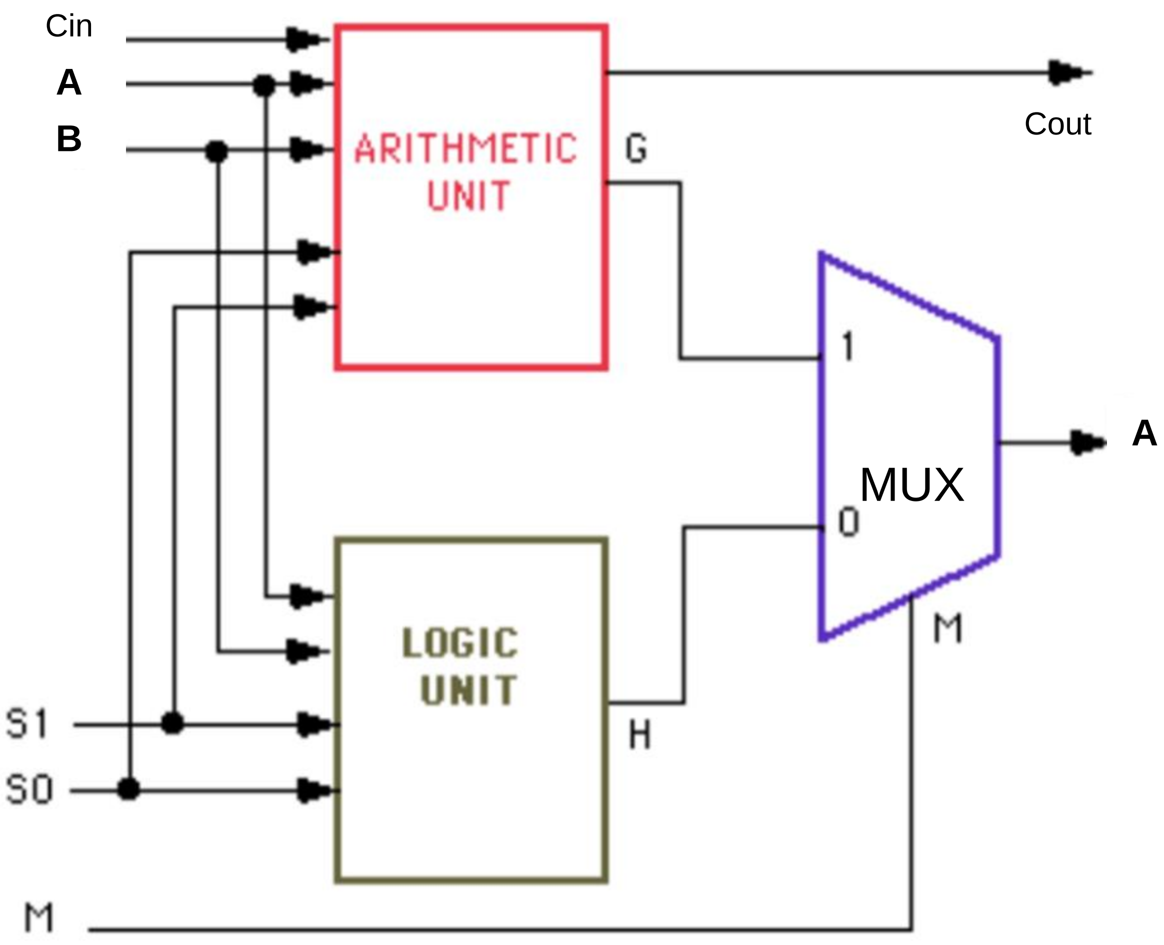
Simple CPU Architecture



CPU : Central Processing Unit

ALU : Arithmetic Logic Unit

Simple ALU architecture



ALU : Arithmetic Logic Unit

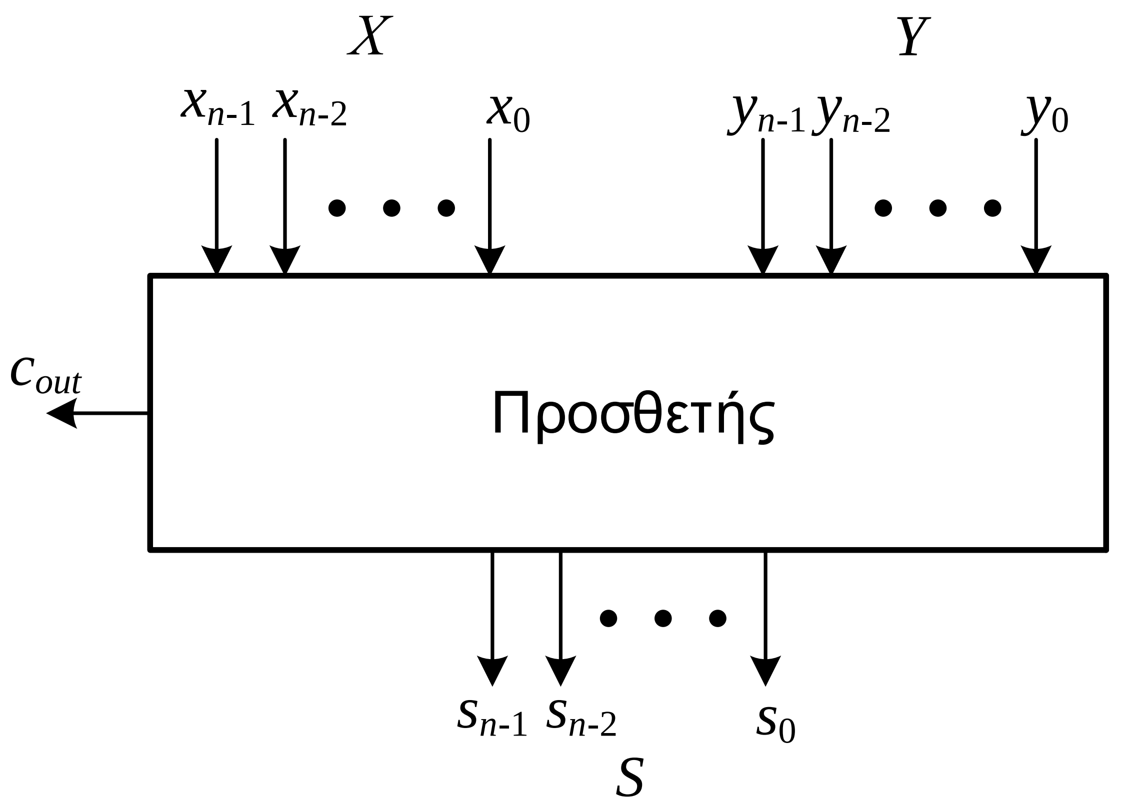
Πρόσθεση μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών των *n*-bit

Έστω οι μη προσημασμένοι αριθμοί $X=x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0$, $Y=x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0$. Ισχύει

$$X+Y=2^n c_{out}+S$$

όπου $S=s_{n-1}s_{n-2}\ldots s_1s_0$ είναι το άθροισμα και c_{out} το κρατούμενο εξόδου.

Προσθετής μη προσημασμένων αριθμών των n-bit



Η υλοποίηση με τη κλασική μέθοδο σχεδίασης η οποία καταλήγει σε δύο επίπεδα πυλών ακόμα και για σχετικά μικρό αριθμό εισόδων απαιτεί μεγάλο αριθμό πυλών με μεγάλο αριθμό εισόδων η κάθε μία. Κατά συνέπεια η διερεύνηση άλλων πιο αποδοτικών υλοποιήσεων είναι απαραίτητη.

Παράδειγμα. Να γίνει ή πρόσθεση των μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών 00111011_2 (=59_{10}), 00101010_2 (=42_{10}).

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Κρατούμενα} \rightarrow & 00111010 & \\
 & 00111011 & \\
 & 00101010 & + \\
\hline
 & \mathbf{0}01100101 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & 59 \\
+ & 42 \\
\hline
 & 101
\end{array}
$$

Πρόσθεση 4-ψήφιων μη προσημασμένων αριθμών

$$
\begin{array}{r}
c_2 c_1 c_0 \\
x_3 x_2\, x_1\, x_0 \\
+ \;\; y_3 y_2\, y_1\, y_0 \\
\hline
c_3\; s_3\; s_2\, s_1\, s_0
\end{array}
$$

$c_{out} \rightarrow c_3$

Πρόσθεση δύο δυαδικών ψηφίων

$$
\begin{array}{rcccc}
x_i & 0 & 0 & 1 & 1 \\
+\ y_i & +\ 0 & +\ 1 & +\ 0 & +\ 1 \\
\hline
c_i\ s_i & 0\,0 & 0\,1 & 0\,1 & 1\,0
\end{array}
$$

Πρόσθεση δύο δυαδικών ψηφίων και κρατουμένου

$$
\begin{array}{rcccccccc}
c_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
x_i & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
+\ y_i & +\ 0 & +\ 1 & +\ 0 & +\ 1 & +\ 0 & +\ 1 & +\ 0 & +\ 1 \\
\hline
c_i\ s_i & 0\,0 & 0\,1 & 0\,1 & 1\,0 & 0\,1 & 1\,0 & 1\,0 & 1\,1
\end{array}
$$

Πρόσθεση 4-ψήφιων μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών

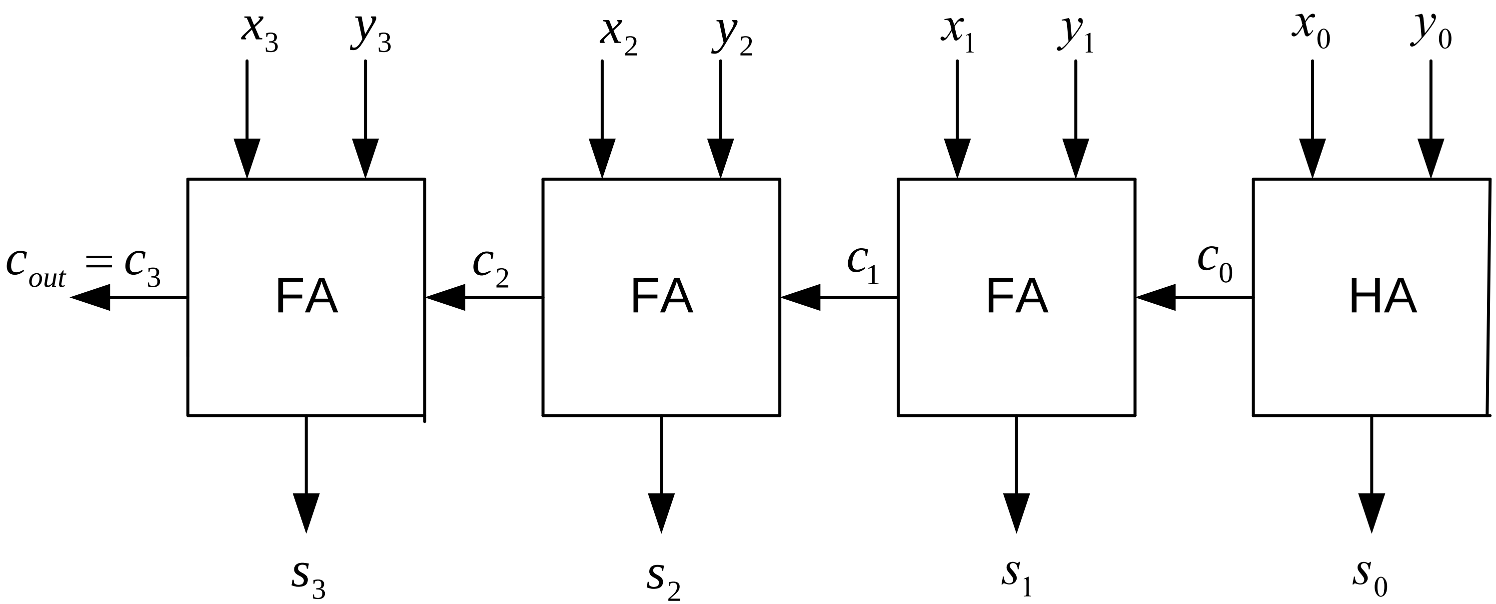
κρατούμενα

```
  011              111
  0011             1111
+ 1011           + 0011
------           ------
 01110            10010
```

Πρόσθεση 4-ψήφιων μη προσημασμένων αριθμών

$$
\begin{array}{lr}
 & c_2\,c_1\,c_0\quad \\
 & x_3\,x_2\,x_1\,x_0 \\
 & +\;\; y_3\,y_2\,y_1\,y_0 \\
c_{out} & \\
\cline{2-2}
 & c_3\;\; s_3\,s_2\,s_1\,s_0
\end{array}
$$

Προσθετής 4-ψήφιων μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών με διάδοση κρατουμένου

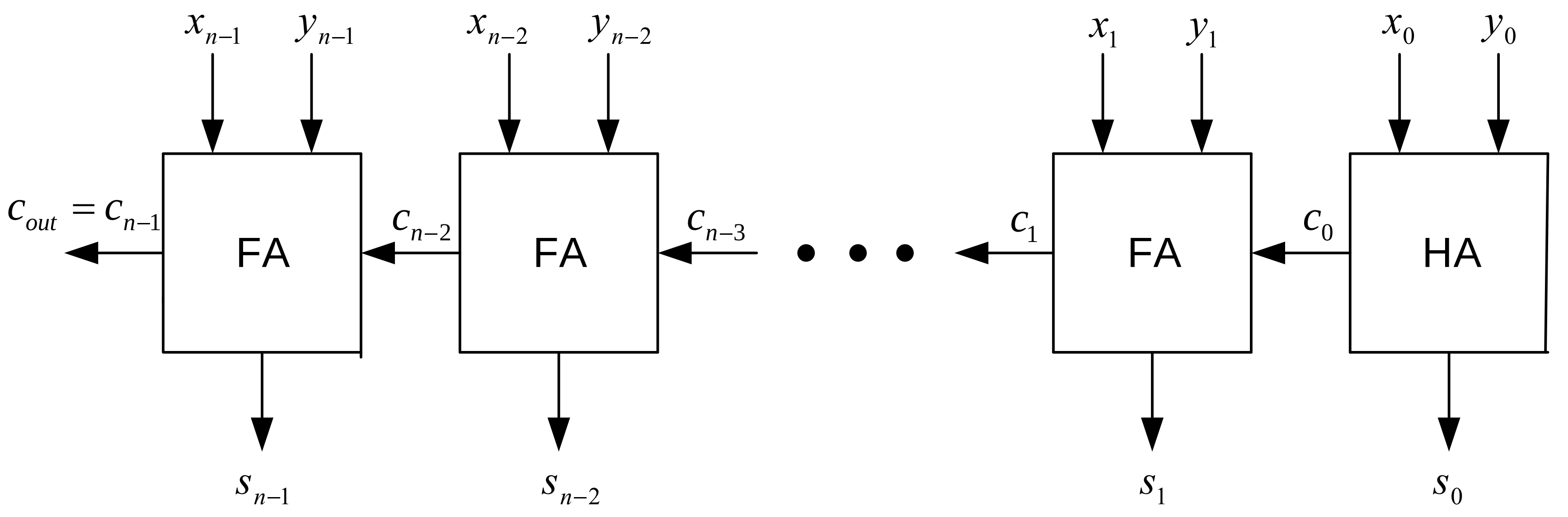


Πρόσθεση μη προσημασμένων αριθμών των *n*-bit

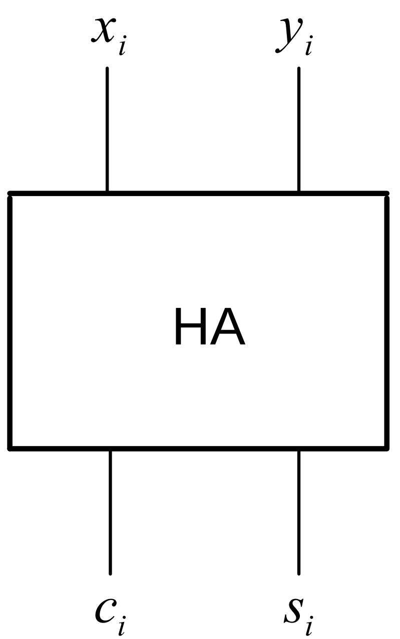
$$
\begin{array}{r}
c_{n\text{-}2}\, c_{n\text{-}3} \ldots c_1\, c_0 \\
x_{n\text{-}1}\, x_{n\text{-}2} \ldots x_2\, x_1\, x_0 \\
+\; y_{n\text{-}1}\, y_{n\text{-}2} \ldots y_2\, y_1\, y_0 \\
\hline
c_{n\text{-}1}\; s_{n\text{-}1}\, s_{n\text{-}2} \ldots s_2\, s_1\, s_0
\end{array}
$$

c_{out}

Προσθετής *n*-ψήφιων μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών με διάδοση κρατουμένου



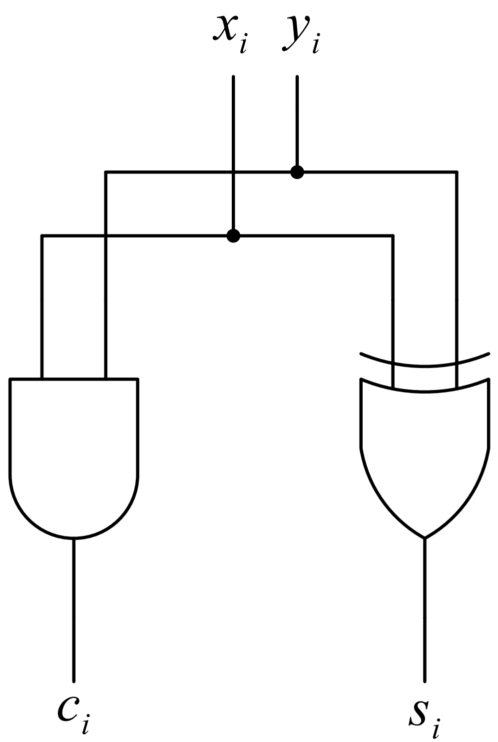
Λογικό σύμβολο και πίνακας αληθείας του ημιαθροιστή (HA)



x_i	y_i	c_i	s_i
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Σχεδίαση ημιαθροιστή

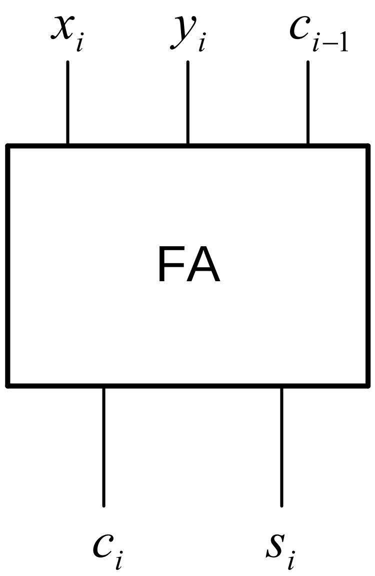
x_i	y_i	c_i	s_i
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



$$c_i = x_i y_i$$

$$s_i = x_i \bar{y}_i + \bar{x}_i y_i = x_i \oplus y_i$$

Λογικό σύμβολο και πίνακας αληθείας του πλήρη αθροιστή



x_i	y_i	c_{i-1}	c_i	s_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Σχεδίαση πλήρη αθροιστή

c_{i-1} \ $x_i y_i$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

c_i

c_{i-1} \ $x_i y_i$	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

s_i

$$c_i = x_i y_i + y_i c_{i-1} + x_i c_{i-1}$$

ή

$$c_i = x_i y_i + (x_i + y_i) c_{i-1}$$

$$s_i = \bar{x}_i \bar{y}_i c_{i-1} + \bar{x}_i y_i \bar{c}_{i-1} + x_i \bar{y}_i \bar{c}_{i-1} + x_i y_i c_{i-1}$$

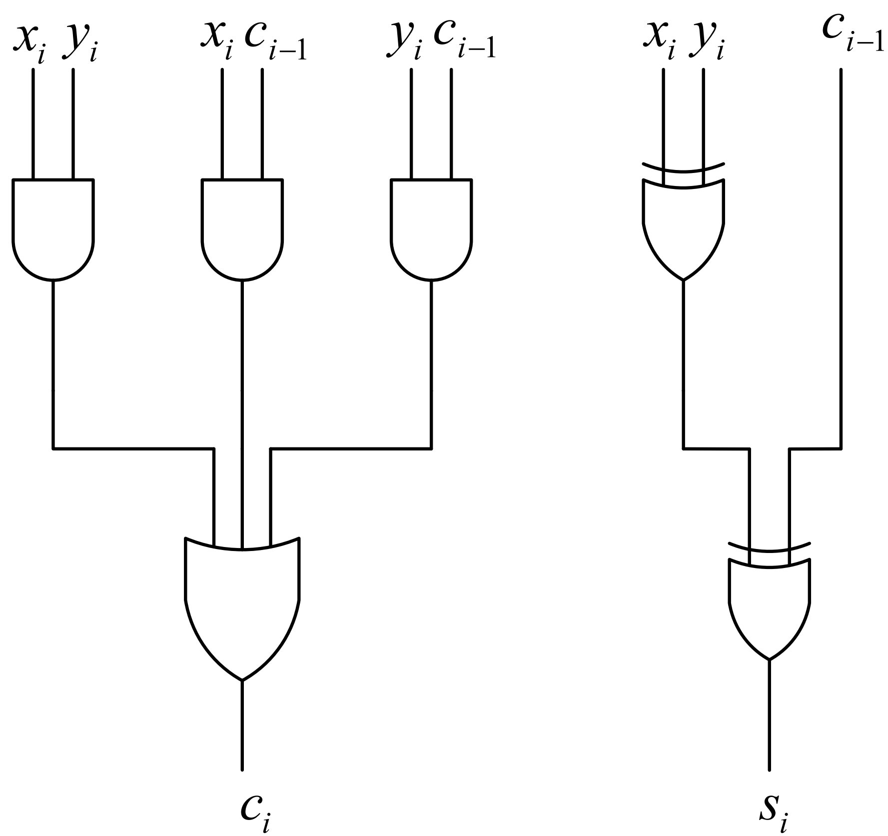
$$= (\bar{x}_i \bar{y}_i + x_i y_i) c_{i-1} + (\bar{x}_i y_i + x_i \bar{y}_i) \bar{c}_{i-1}$$

$$= (\overline{x_i \oplus y_i}) c_{i-1} + (x_i \oplus y_i) \bar{c}_{i-1} \qquad M = x_i \oplus y_i$$

$$= \overline{M} c_{i-1} + M \bar{c}_{i-1} = M \oplus c_{i-1}$$

$$s_i = (x_i \oplus y_i) \oplus c_{i-1}$$

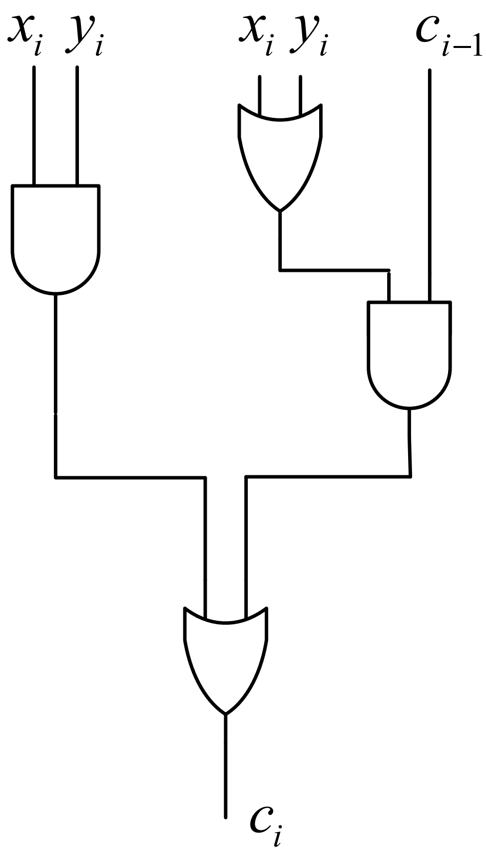
Σχεδίαση πλήρη αθροιστή (A1)

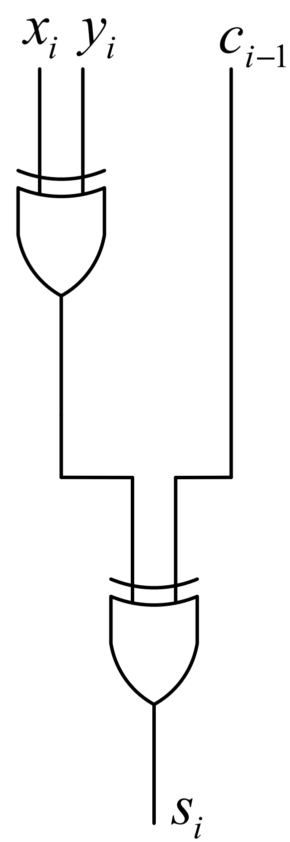


$$c_i = x_i y_i + x_i c_{i-1} + y_i c_{i-1}$$

$$s_i = (x_i \oplus y_i) \oplus c_{i-1}$$

Σχεδίαση πλήρη αθροιστή (Α2)





$$c_i = x_i y_i + (x_i + y_i) c_{i-1}$$

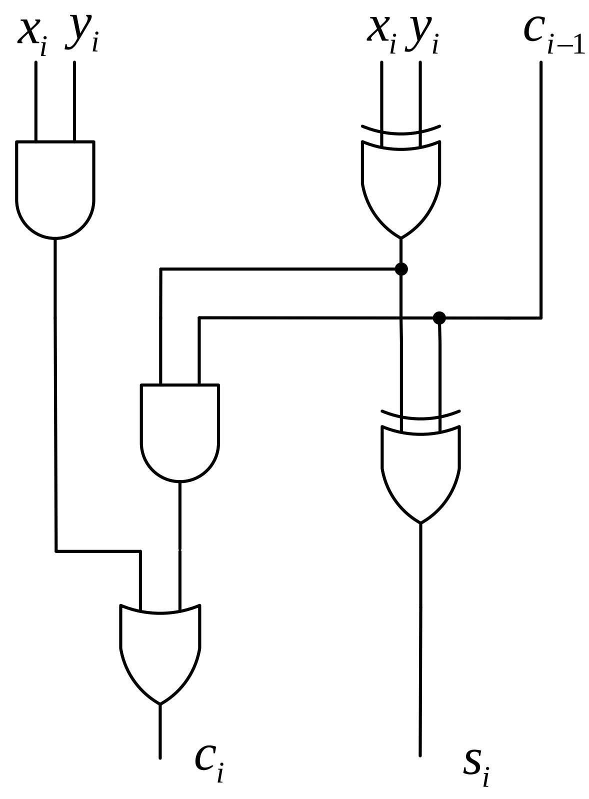
$$s_i = (x_i \oplus y_i) \oplus c_{i-1}$$

Σχεδίαση πλήρη αθροιστή Β

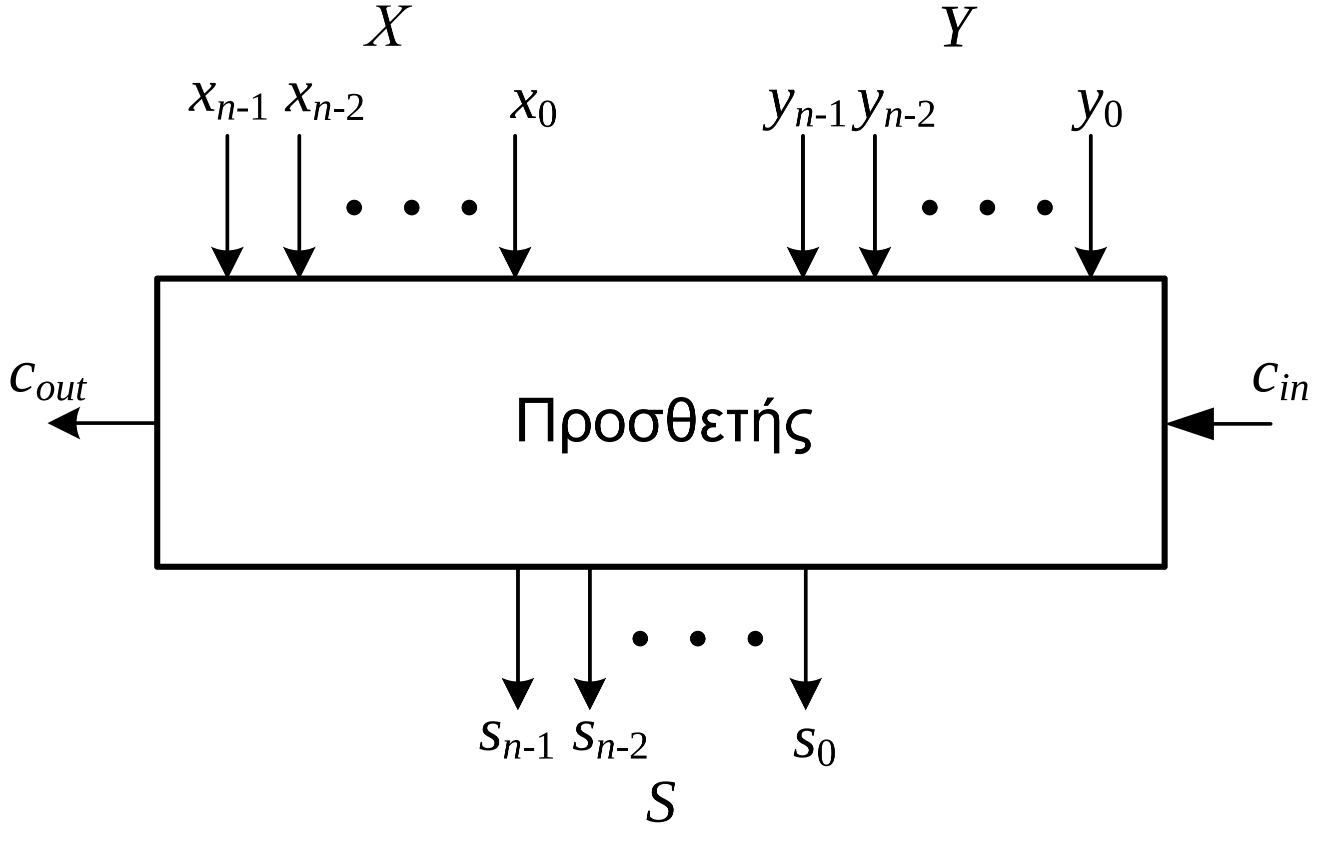
$$c_i = \bar{x}_i y_i c_{i-1} + x_i \bar{y}_i c_{i-1} + x_i y_i \bar{c}_{i-1} + x_i y_i c_{i-1}$$

$$c_i = (\bar{x}_i y_i + x_i \bar{y}_i) c_{i-1} + x_i y_i (\bar{c}_{i-1} + c_{i-1})$$

$$c_i = (x_i \oplus y_i) \cdot c_{i-1} + x_i y_i$$



Προσθετής μη προσημασμένων αριθμών των *n*-bit με κρατούμενο εισόδου



Ο προσθετής μη προσημασμένων αριθμών των n-bit με κρατούμενο εισόδου εκτελεί την πράξη

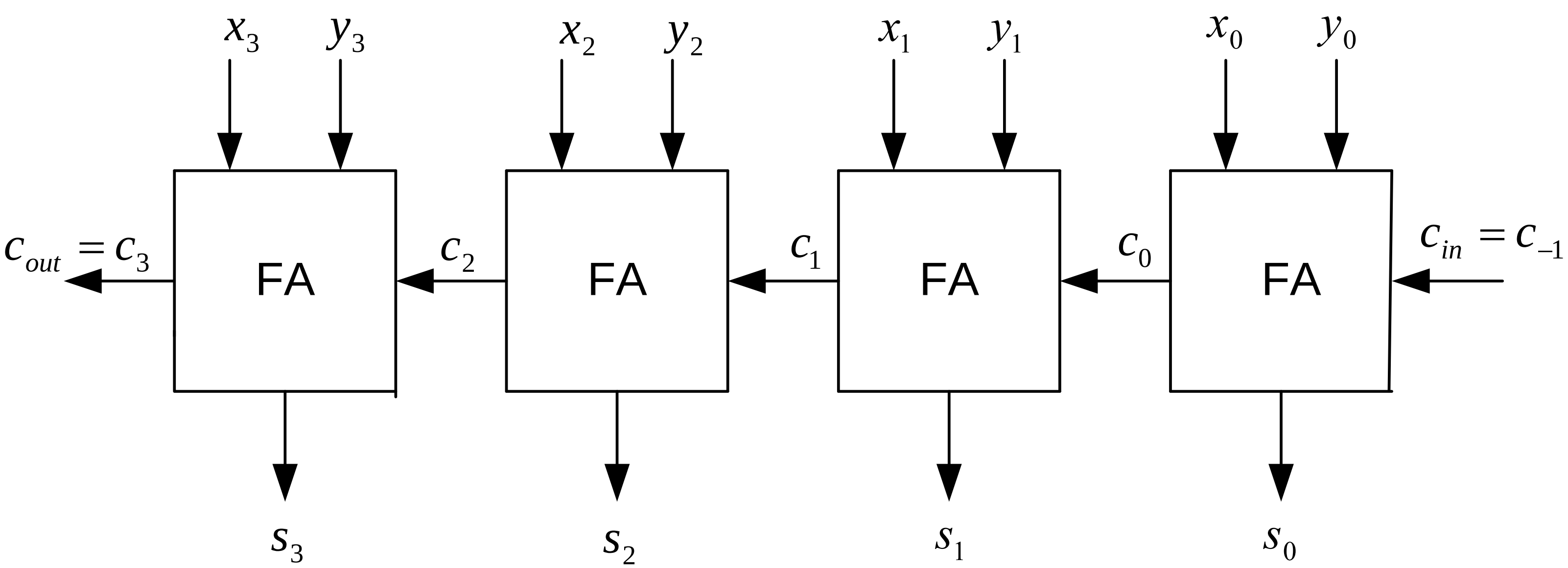
$$X+Y+c_{\mathrm{in}}=2^n c_{\mathrm{out}}+S$$

Πρόσθεση 4-ψήφιων μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών με κρατούμενο εισόδου

$$
\begin{array}{rcccc}
 & c_2 & c_1 & c_0 & c_{\text{in}} \\
 & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\
+ & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \\
\hline
c_3 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0
\end{array}
$$

c_{out}

Προσθετής 4-ψήφιων μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών με διάδοση κρατουμένου και κρατούμενο εισόδου

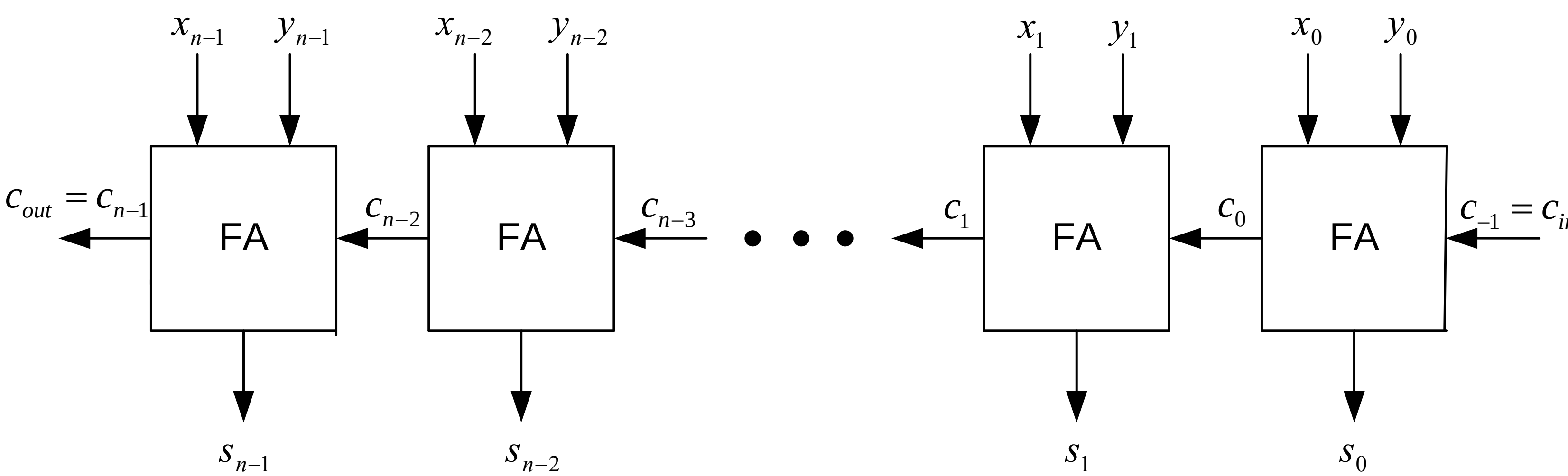


Πρόσθεση n-ψήφιων μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών με κρατούμενο εισόδου

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & & c_{n-2} & c_{n-3} & \ldots & c_1 & c_0 & c_{\text{in}} \\
 & & x_{n-1} & x_{n-2} & \ldots & x_2 & x_1 & x_0 \\
+ & & y_{n-1} & y_{n-2} & \ldots & y_2 & y_1 & y_0 \\
\hline
 & c_{n-1} & s_{n-1} & s_{n-2} & \ldots & s_2 & s_1 & s_0
\end{array}
$$

c_{out}

Προσθετής *n*-ψήφιων μη προσημασμένων δυαδικων αριθμών με διάδοση κρατουμένου και κρατούμενο εισόδου

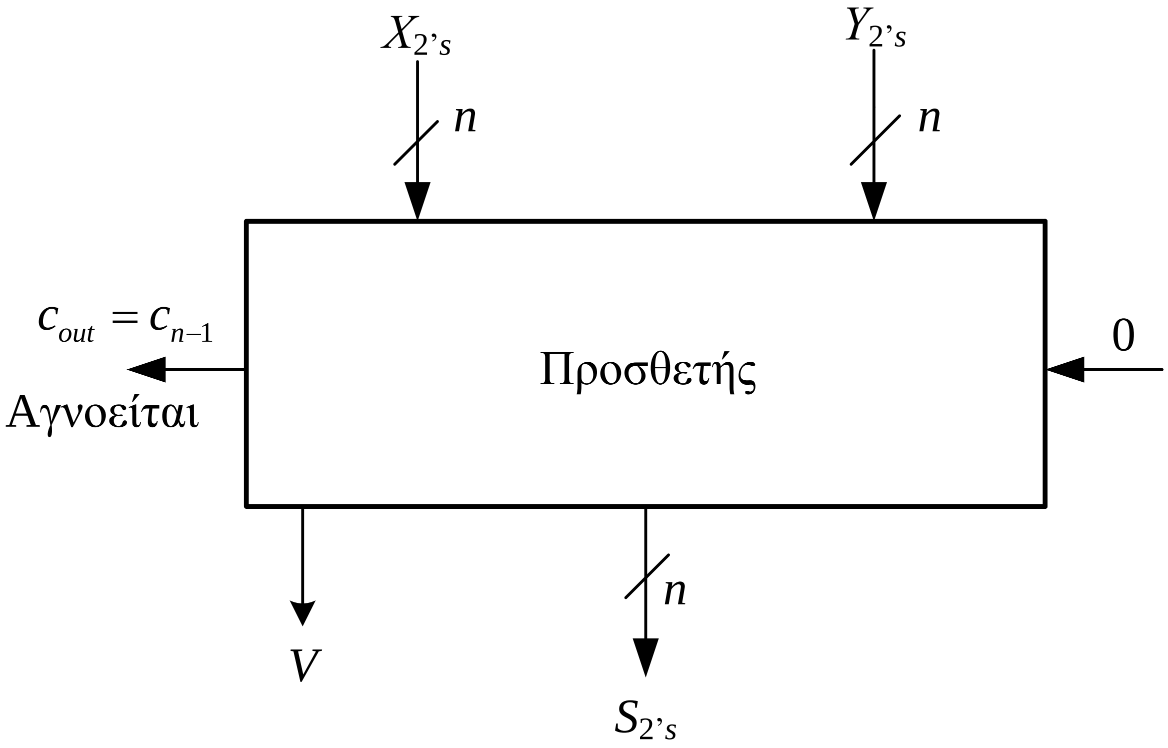


Πρόσθεση προσημασμένων αριθμών σε σύστημα συμπληρώματος του 2

-3	1101	+5	0101
+ -2	+1110	-2	+1110
-5	1) 1011 = -5	+3	1) 0011 = +3

Το κρατούμενο εξόδου αγνοείται

Προσθετής n-ψήφιων προσημασμένων αριθμών σε σύστημα συμπληρωματος του 2



V=oVerflow

Overflow

Στα συστήματα συμπληρωμάτων υπάρχει *υπερχείλιση* (*overflow*) όταν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δεν μπορεί να παρασταθεί με το επιλεγμένο μήκος λέξης. Είναι προφανές ότι υπερχείλιση δεν μπορεί να υπάρξει στην πρόσθεση ετεροσήμων αριθμών. Υπερχείλιση σε μία πρόσθεση υπάρχει όταν οι προσθετέοι είναι ομόσημοι και το πρόσημο του αθροίσματος είναι διαφορετικό από αυτό των προσθετέων.

Overflow

Παραδείγματα πρόσθεσης αριθμών που είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 2 και κατά την πρόσθεσή τους γίνεται υπερχείλιση.

$$
\begin{array}{r}
-3 \\
+\ -6 \\
\hline
-9
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1101 \\
+1010 \\
\hline
1)\ 0111 \ = \ +7
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
+5 \\
+6 \\
\hline
+11
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0101 \\
+0110 \\
\hline
0)1011 \ = \ -5
\end{array}
$$

Υλοποίηση του bit oVerflow σε προσθετή των n bit

x_{n-1}	y_{n-1}	s_{n-1}	V
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	1	0
0	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$V = \bar{x}_{n-1}\bar{y}_{n-1}s_{n-1} + x_{n-1}y_{n-1}\bar{s}_{n-1}$$

Υλοποίηση του bit oVerflow σε προσθετή των n bit

x_{n-1}	y_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-1}	s_{n-1}	V
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

$$V = c_{n-1} \oplus c_{n-2}$$

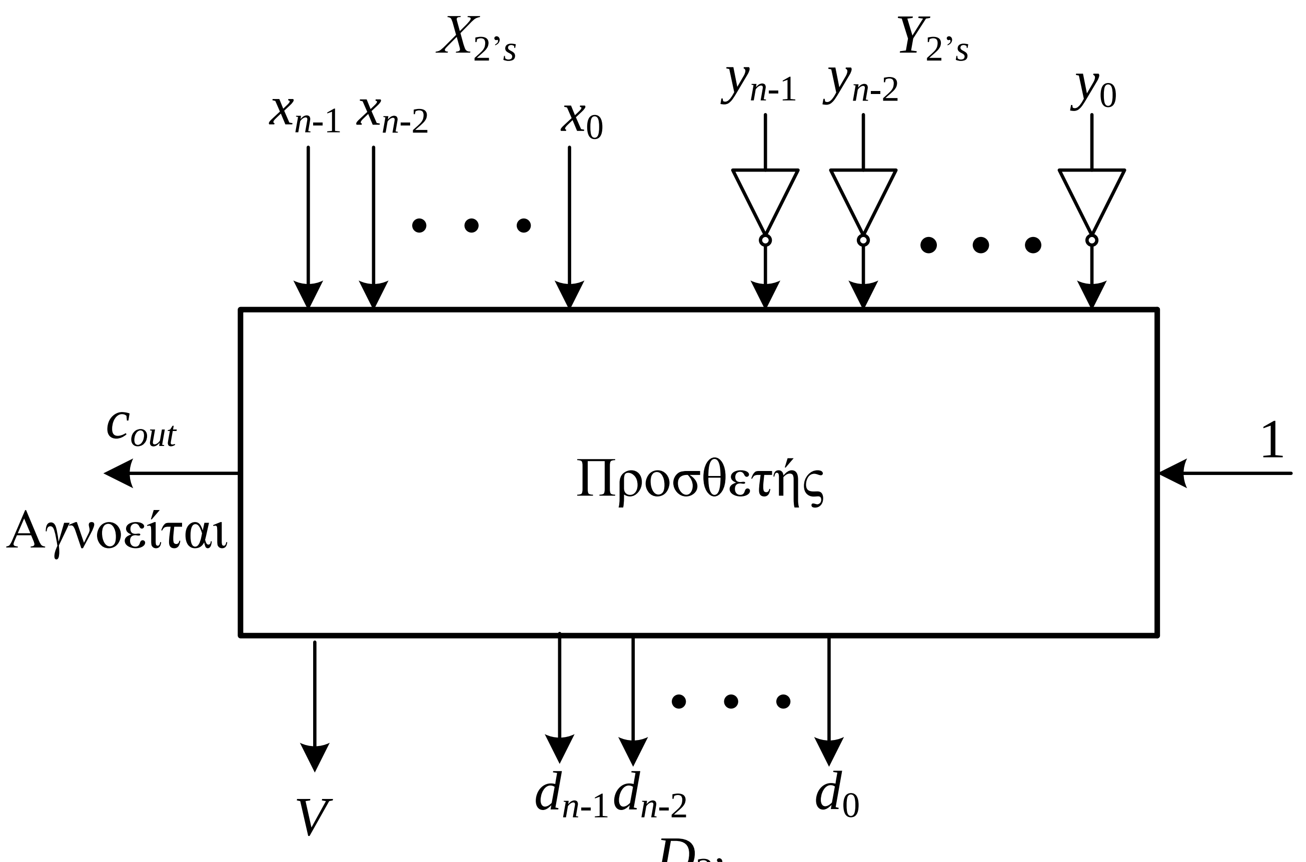
0111
0001
1000

Αφαιρέτης n-ψήφιων προσημασμένων αριθμών σε σύστημα συμπληρώματος του 2

$$D_{2's}=(X_{2's}-Y_{2's})_{2's}=(X_{2's}+(-Y_{2's}))_{2's}$$

$$D_{2's}=(X_{2's}+\overline{Y_{2's}}+1)_{2's}$$

Αφαιρέτης σε σύστημα συμπληρώματος του 2

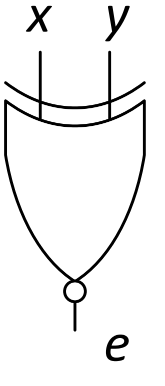


Συγκριτές ισότητος

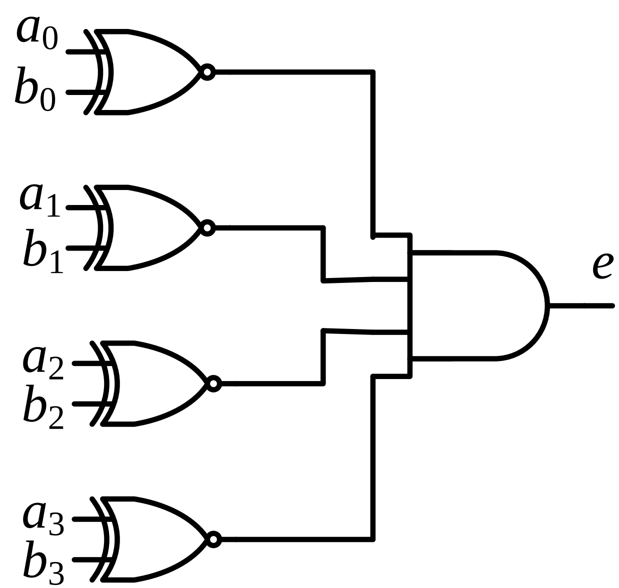
Οι *συγκριτές ισότητος* δύο μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών των *n*-bit θα δίνει ένδειξη ισότητας όταν οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι ψηφίο προς ψηφίο.

Παράδειγμα Να σχεδιασθεί συγκριτής ισότητας μονοψήφιων δυαδικών αριθμών.

x	y	e
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Παράδειγμα Να σχεδιασθεί συγκριτής ισότητας τετραψήφιων μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών.



Συγκριτές μεγέθους

Οι *συγκριτές μεγέθους* (*magnitude comparators*) είναι συνδυαστικά κυκλώματα που έχουν σαν εισόδους δύο μη προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς των *n*-bit και δείχνουν την σχέση μεγέθους μεταξύ των αριθμών *X*, *Y*.

$$Z = \begin{cases} 100, & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad X > Y \\ 010, & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad X = Y \\ 001, & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad X < Y \end{cases}$$

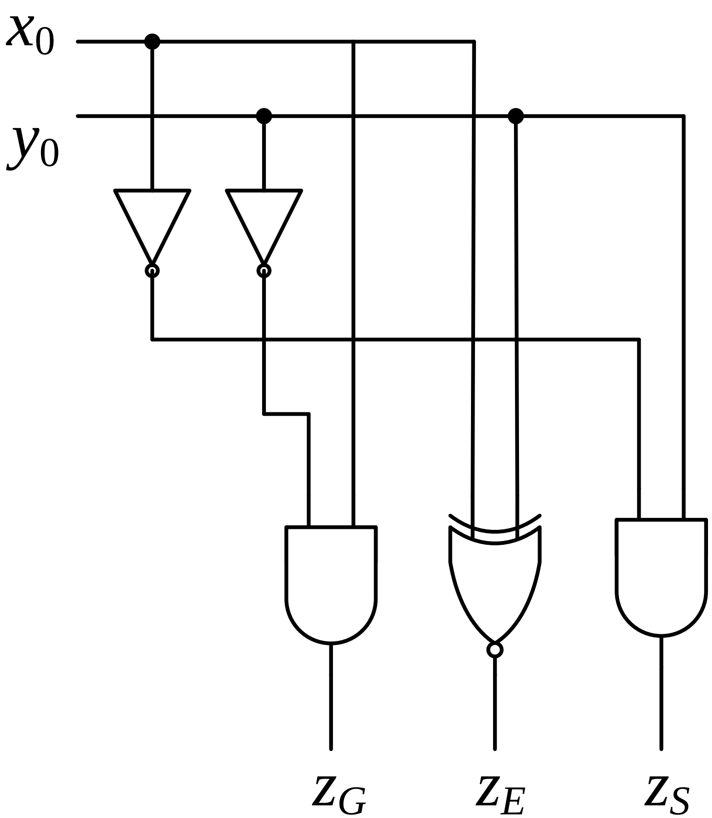
Παράδειγμα 5.21. Σχεδίαση συγκριτή μεγέθους δύο μονοψήφιων δυαδικών αριθμών.

x_0	y_0	z_G	z_E	z_s
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0

$$z_G = x_0 \bar{y}_0 \qquad (x_0 > y_0)$$

$$z_E = \overline{x_0 \oplus y_0} \qquad (x_0 = y_0)$$

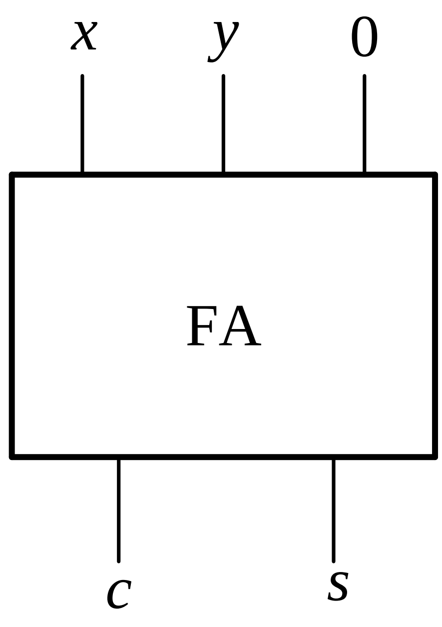
$$z_S = \bar{x}_0 y_0 \qquad (x_0 < y_0)$$



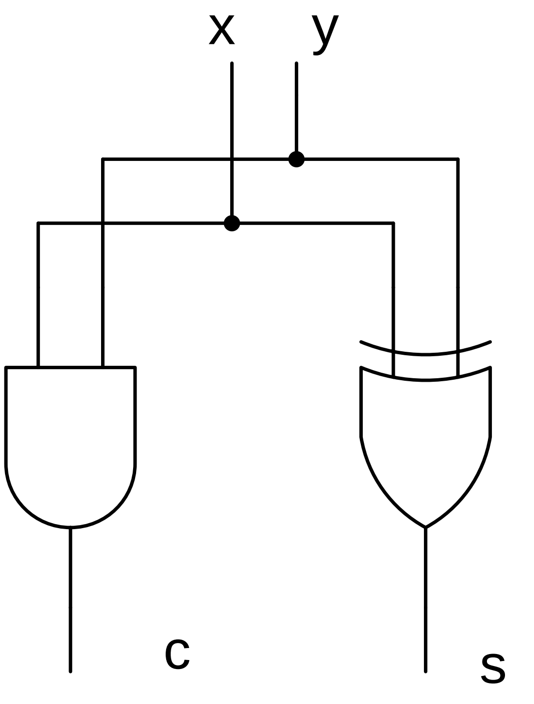
x_0
y_0
z_G
z_E
z_S

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

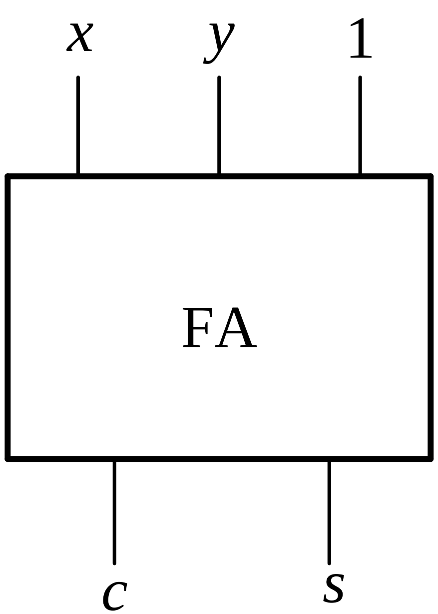
9.1 Να δοθεί ο πίνακας αληθείας του κυκλώματος που δίδεται στη συνέχεια. Ακολούθως να σχεδιαστεί ισοδύναμο κύκλωμα χρησιμοποιώντας απλές λογικές πύλες. Σχολιάστε.



x	y	c	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



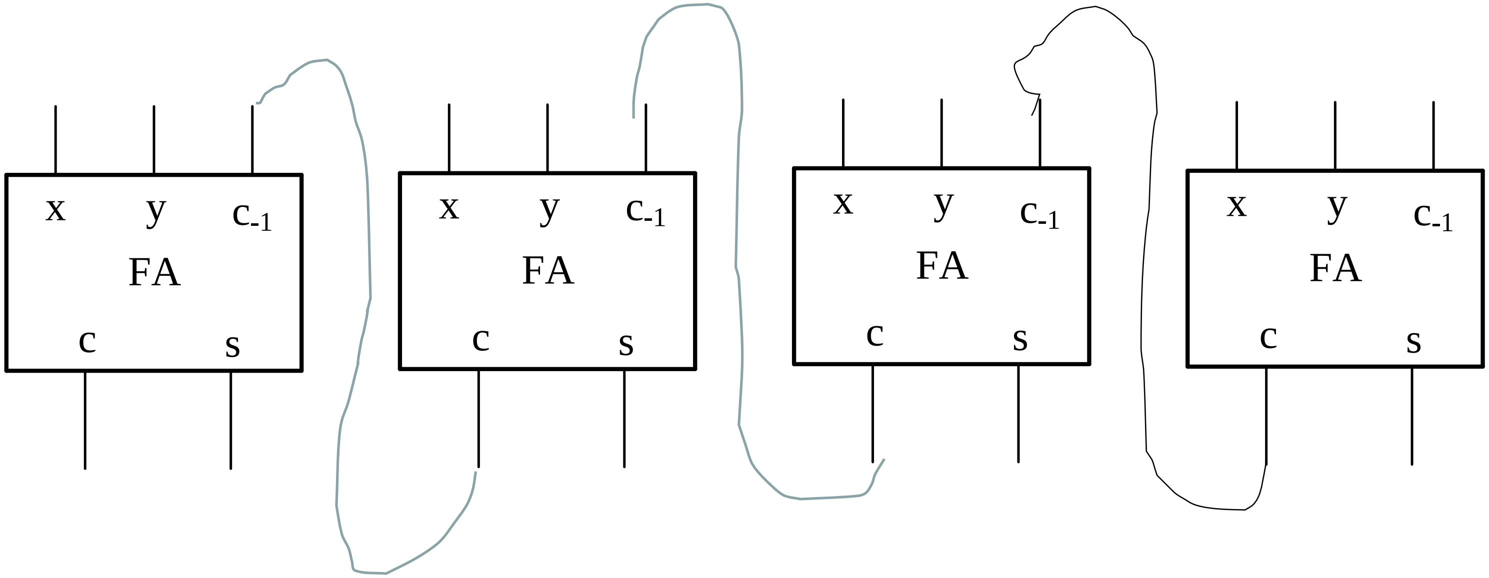
9.2 Να δοθεί ο πίνακας αληθείας του κυκλώματος που δίδεται στη συνέχεια. Ακολούθως να σχεδιαστεί ισοδύναμο κύκλωμα χρησιμοποιώντας απλές λογικές πύλες.



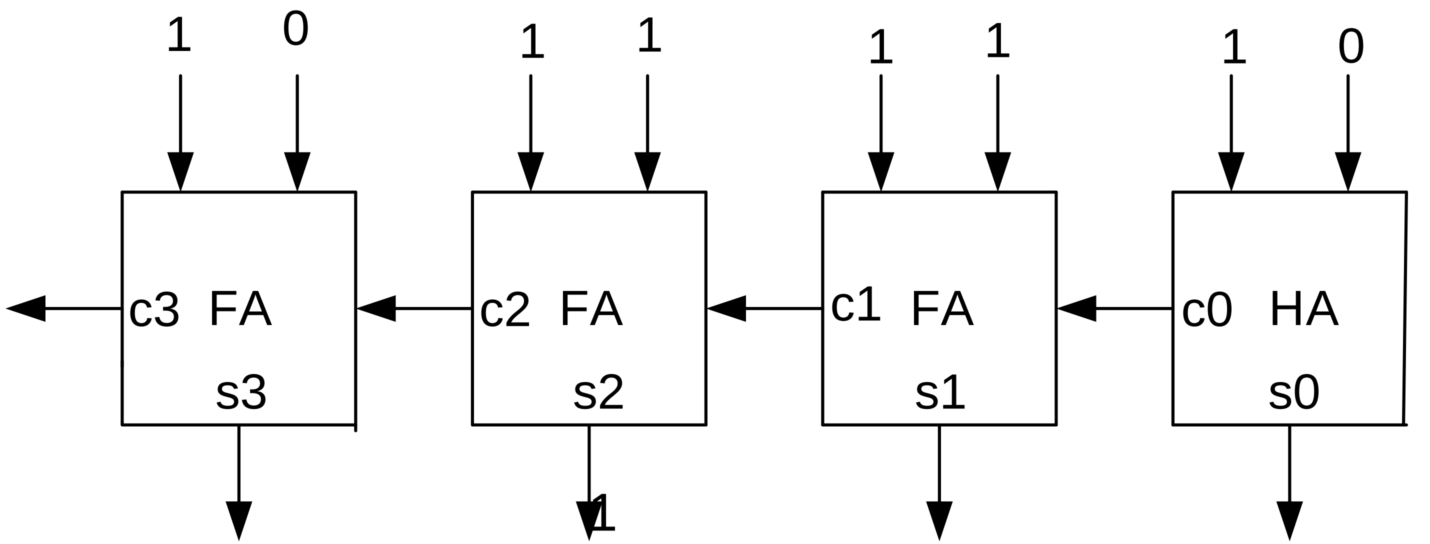
x	y	c	s
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

x	y	c	s
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

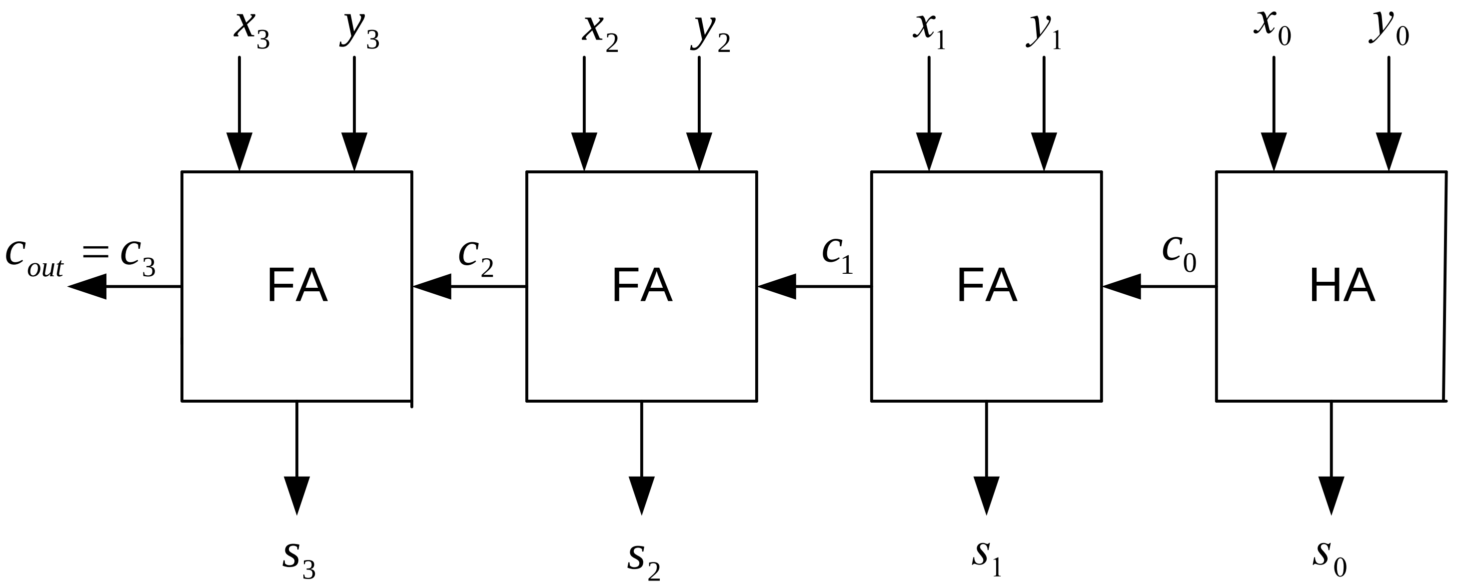
9.3 Στο σχήμα που δίδεται στην συνέχεια να γίνουν οι κατάλληλες συνδέσεις ώστε να υλοποιηθεί ένας προσθετής των 4 bit με κρατούμενο εισόδου. Σημειώστε το κρατούμενο εισόδου και το κρατούμενο εξόδου.



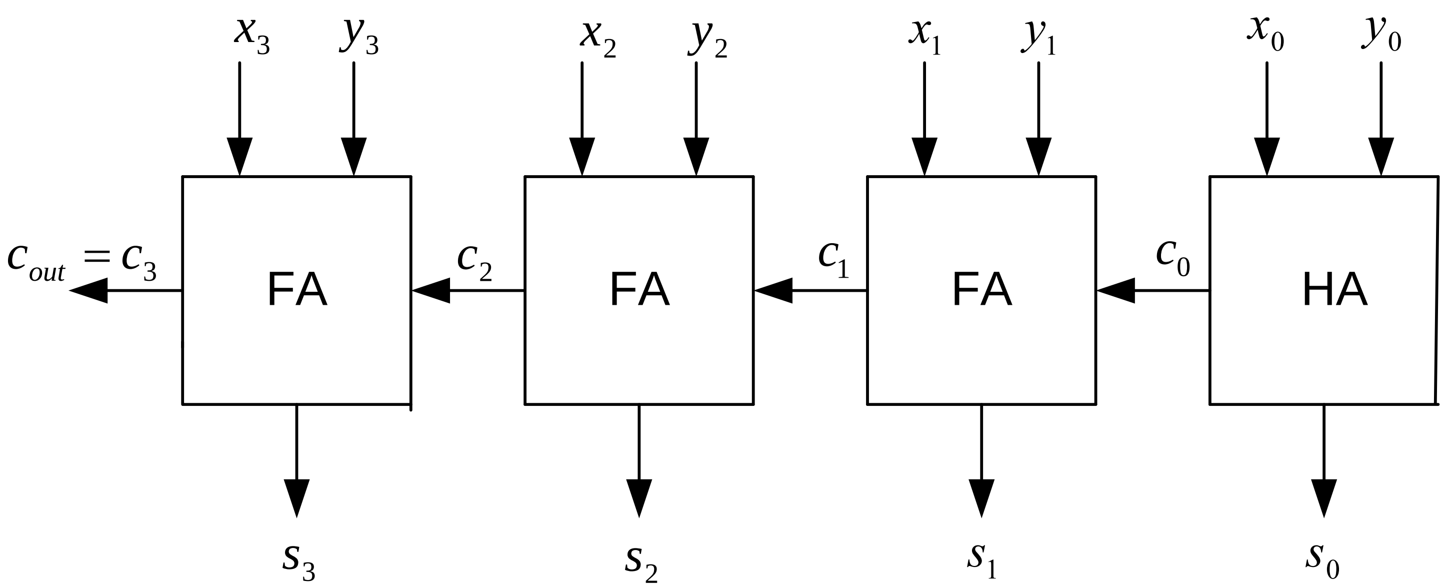
9.4 Να υπολογισθούν οι έξοδοι των FA και του HA για τις δοσμένες εισόδους.



9.5 Να γίνει η κατάλληλη προσθήκη στον προσθετή των 4 bit που δίδεται στην συνέχεια ώστε να έχει ένδειξη μηδενικής τιμής (=1) του αποτελέσματος για μη προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς και για αριθμούς σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 2.



9.6 Στον προσθετή των 4 bit που δίδεται στην συνέχεια να προστεθεί το κατάλληλο κύκλωμα ώστε να έχει ένδειξη υπερχείλισης για να χρησιμοποιείται και για την πρόσθεση αριθμών σε παράσταση συμπληρώματος του 2.



$$V = c_3 \oplus c_2$$

9.7 Να σχεδιασθεί ένα κύκλωμα ένδειξης ισότητας για δύο διψηφιους μη προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς. Ένδειξη ισότητας να θεωρηθεί το λογικό 1.

9.8 Να σχεδιασθεί ένα κύκλωμα το οποίο να δείχνει πότε ένας διψήφιος αριθμός X=$\boldsymbol{x}_1 x_0$ είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό $Y=y_1y_0$.

Υπόδειξη

Ο X είναι μεγαλύτερος του Y όταν $x_1=1$ και $y_1=0$ ή όταν $x_1=y_1$ και $x_0=1$ και $y_0=0$

$$G = x_1\overline{y}_1 + (\overline{x_1 \oplus y_1})x_0\overline{y}_0$$

9.9 Να σχεδιασθεί ένα κύκλωμα το οποίο να δείχνει πότε ένας διψήφιος αριθμός $X = \boldsymbol{x}_1 x_0$ είναι μικρότερος από έναν αριθμό $Y = y_1 y_0$.

Υπόδειξη

Ο X είναι μικρότερος του Y όταν $x_1=0$ και $y_1=1$ ή όταν $x_1=y_1$ και $x_0=0$ και $y_0=1$

$$L = \overline{x}_1 y_1 + (\overline{x_1 \oplus y_1})\overline{x}_0 y_0$$