

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΛΟΓΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εύρεση απλοποιημένης λογικής παράστασης

Τα σύγχρονα ψηφιακά ολοκληρωμένα κυκλώματα είναι επιθυμητό να λειτουργούν με μεγάλη ταχύτητα, να καταλαμβάνουν την μικρότερη δυνατή επιφάνεια στο ολοκληρωμένο κύκλωμα και να καταναλώνουν την μικρότερη ισχύ.

Μία πρώτη προσέγγιση στο να επιτευχθούν οι πιο πάνω στόχοι είναι να προσδιορισθεί η απλούστερη λογική παράσταση των λογικών συναρτήσεων που θέλουμε να υλοποιήσουμε.

Οι δύο βασικοί τρόποι απλοποίησης είναι με χρήση των **κανόνων της Άλγεβρας Boole** και με **χρήση χαρτών Karnaugh**.

Απλοποίηση με κανόνες της Άλγεβρας Boole

$$\begin{aligned}f &= xy\bar{z} + xyz = \\&= xy(\bar{z} + z) \\&= xy1 \\&= xy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f &= xy\bar{z} + x\bar{y}z + xyz \\&= xy\bar{z} + x\bar{y}z + xyz + xyz \\&= xy(\bar{z} + z) + xz(\bar{y} + y) \\&= xy + xz\end{aligned}$$

Χάρτες Karnaugh

Οι **χάρτες Karnaugh** (*Karnaugh maps*) είναι διδιάστατοι πίνακες αληθείας που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση και την απλοποίηση λογικών συναρτήσεων με γραφικό τρόπο.

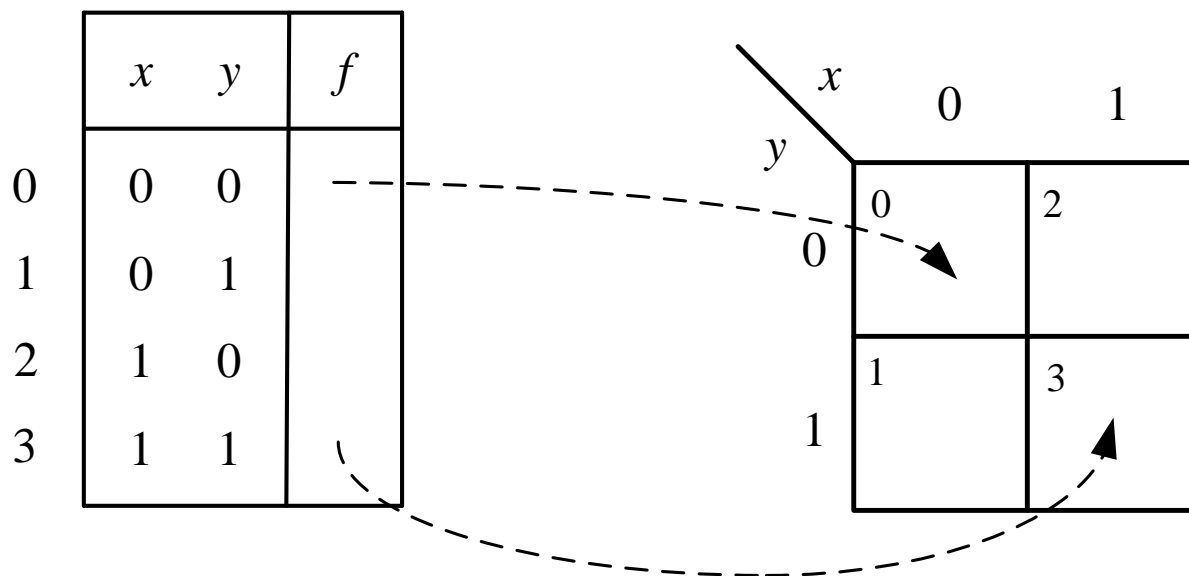
Χάρτες Karnaugh 2, 3, 4 μεταβλητών

x		0	1
y	0	0	2
	1	1	3

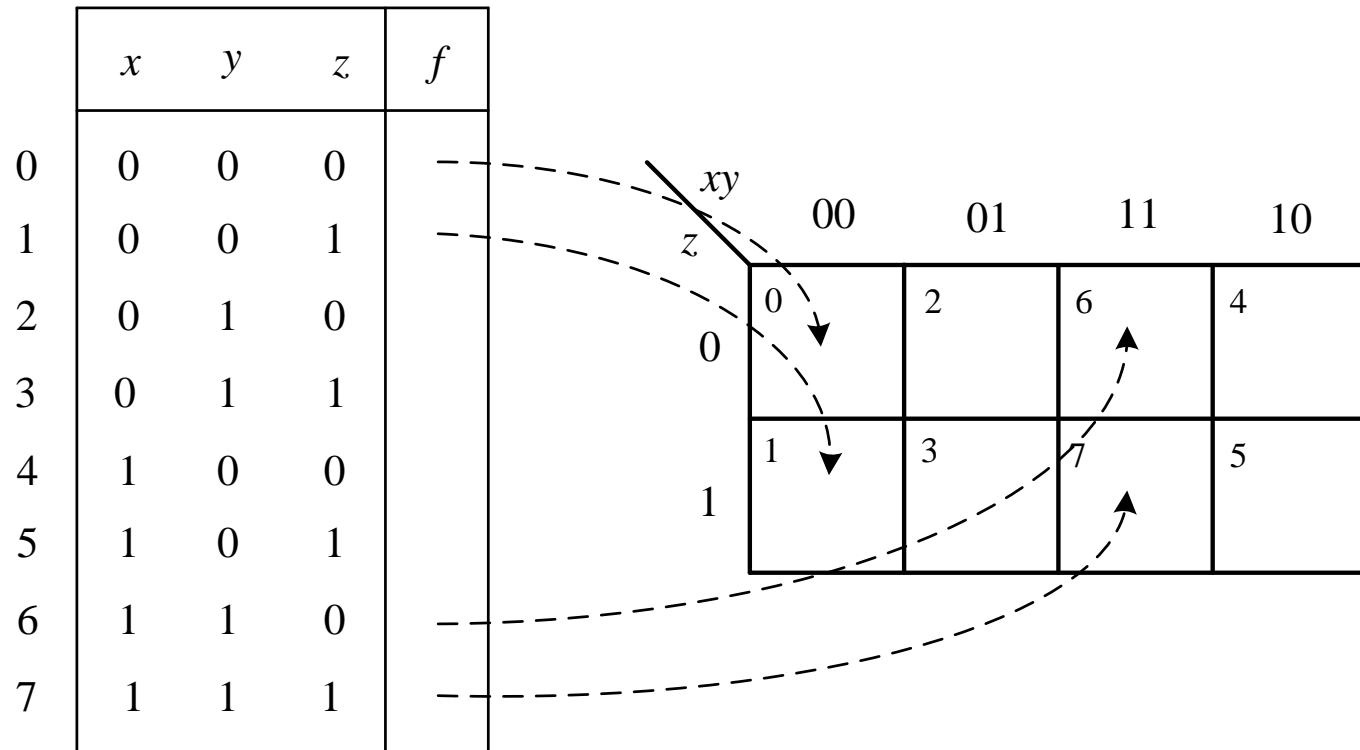
xy		00	01	11	10
z	0	0	2	6	4
	1	1	3	7	5

xy		00	01	11	10
zw	00	0	4	12	8
	01	1	5	13	9
	11	3	7	15	11
	10	2	6	14	10

Απεικόνιση πίνακα αληθείας 2 μεταβλητών σε χάρτη Karnaugh



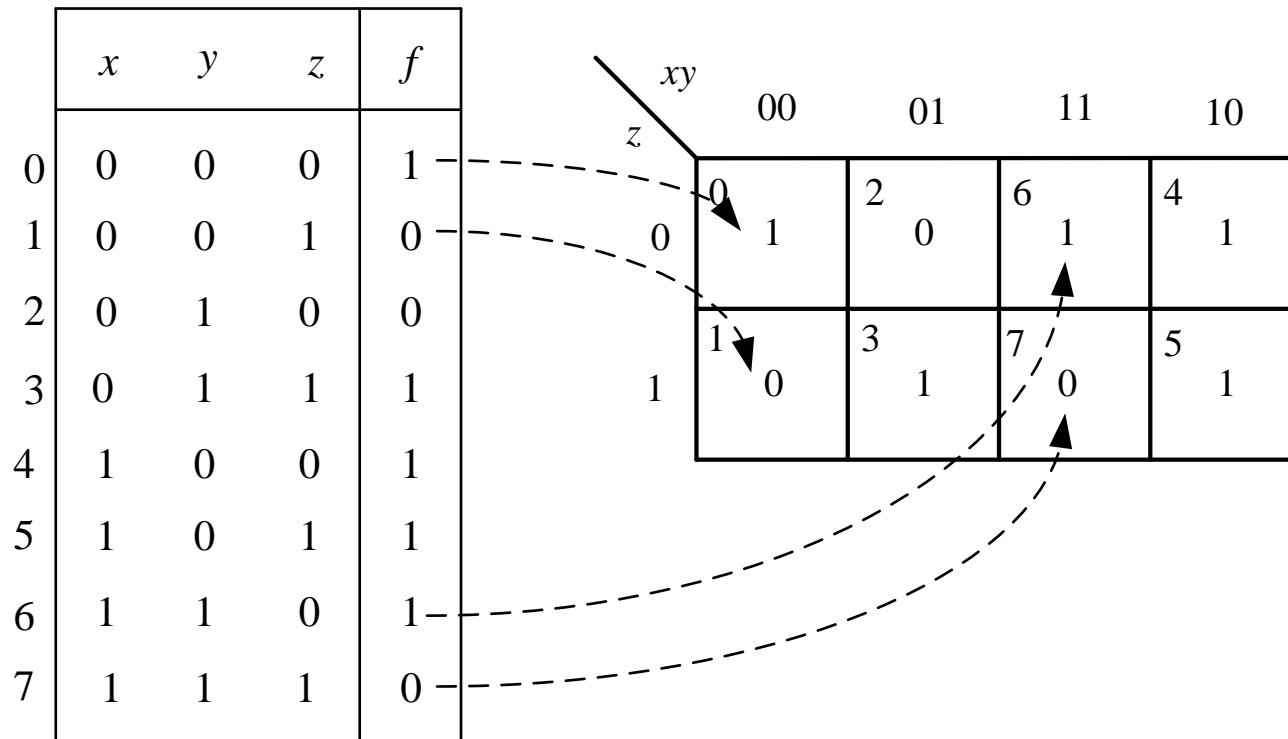
Απεικόνιση πίνακα αληθείας 3 μεταβλητών σε χάρτη Karnaugh



Παράδειγμα. Να απεικονισθεί σε χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση της οποίας ο πίνακας αληθείας δίδεται στην συνέχεια.

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Υπόδειξη



Παράδειγμα. Να απεικονισθεί σε χάρτη Karnaugh η λογική παράσταση

$$f = \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z}$$

Υπόδειξη

$$f = \underbrace{\bar{x} \cdot y \cdot z}_3 + \underbrace{x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}}_4 + \underbrace{x \cdot \bar{y} \cdot z}_5 + \underbrace{x \cdot y \cdot \bar{z}}_6 = \sum m(3, 4, 5, 6)$$

Τοποθετούμε 1 στα τετράγωνα 3, 4, 5, 6, και 0 στα υπόλοιπα

		xy			
		00	01	11	10
z	0	0 0	2 0	6 1	4 1
	1	1 0	3 1	7 0	5 1

Παράδειγμα 3.23. Να απεικονισθεί σε χάρτη Karnaugh η λογική παράσταση

$$f = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} + x \cdot \bar{y} \cdot z \cdot w + x \cdot y \cdot z \cdot \bar{w} + x \cdot y \cdot z \cdot w$$

Υπόδειξη

$$f = \underbrace{\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot \bar{w}}_0 + \underbrace{x \cdot \bar{y} \cdot z \cdot w}_{11} + \underbrace{x \cdot y \cdot z \cdot \bar{w}}_{14} + \underbrace{x \cdot y \cdot z \cdot w}_{15} = \sum m(0, 11, 14, 15)$$

Τοποθετούμε 1 στα τετράγωνα 0, 11, 14, 15 και 0 στα υπόλοιπα

		xy			
		00	01	11	10
zw	00	0 1	4 0	12 0	8 0
	01	1 0	5 0	13 0	9 0
	11	3 0	7 0	15 1	11 1
	10	2 0	6 0	14 1	10 0

Παράδειγμα. Να απεικονισθεί σε χάρτη Karnaugh η λογική παράσταση

$$f = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y$$

Υπόδειξη

Μετατρέπουμε την λογική
παράσταση σε κανονική

$$\begin{aligned} f &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y = \\ &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y1 = \\ &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y(z + \bar{z}) = \\ &= \underbrace{xyz}_7 + \underbrace{xy\bar{z}}_6 + \underbrace{\bar{x}yz}_3 + \underbrace{\bar{x}y\bar{z}}_2 \end{aligned}$$

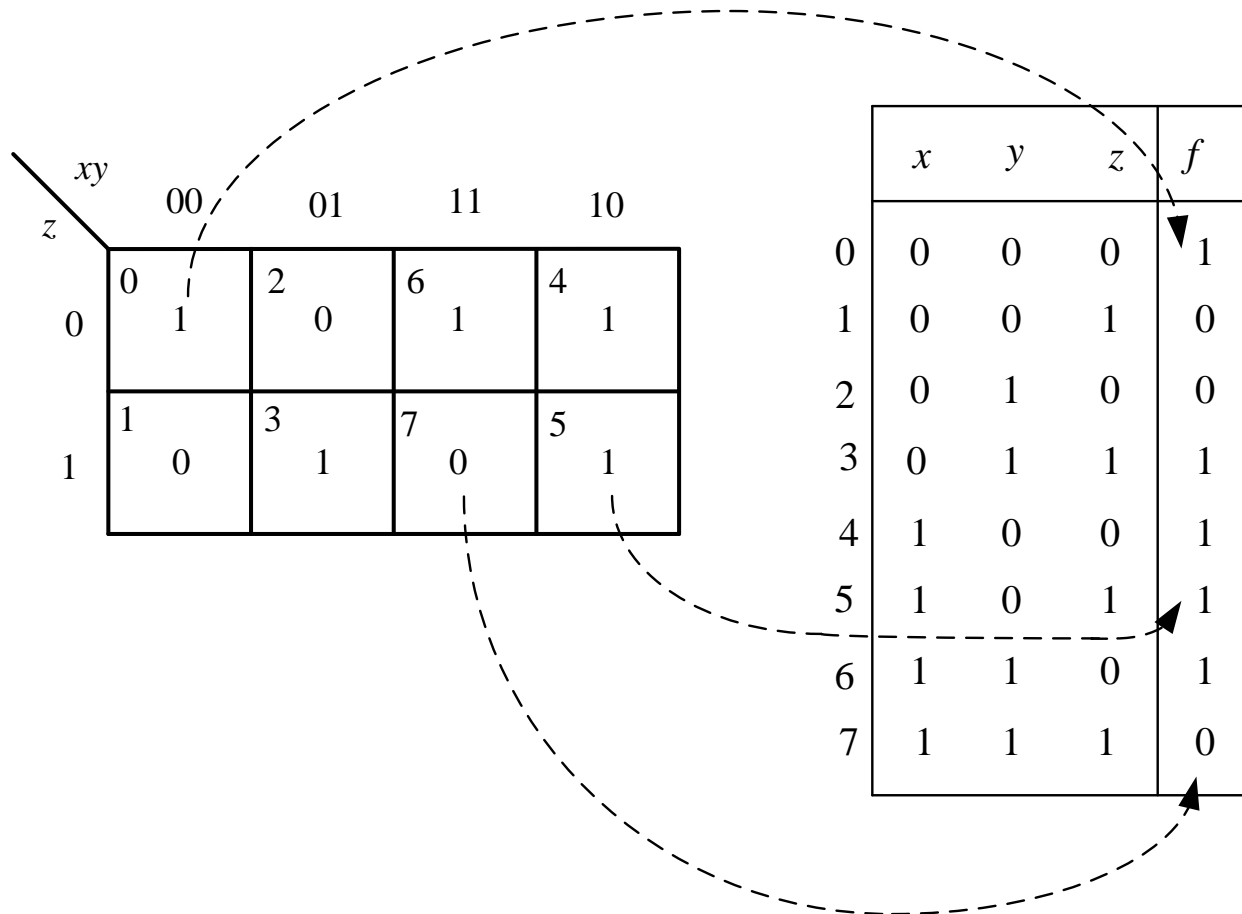
$\begin{array}{c} xy \\ z \end{array}$	00	01	11	10
0	0 0	2 1	6 1	4 0
1	1 0	3 1	7 1	5 0

Παράδειγμα. Να απεικονισθεί σε πίνακα αληθείας η λογική συνάρτηση της οποίας η απεικόνιση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στην συνέχεια.

xy		00	01	11	10
z	0	0 1	2 0	6 1	4 1
	1	1 0	3 1	7 0	5 1

Υπόδειξη

Τοποθετείται 1 στις γραμμές 0, 3, 4, 5, 6 του πίνακα αληθείας και 0 στις υπόλοιπες (1, 2, 7).



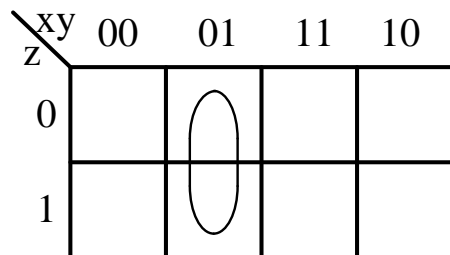
Απλοποίηση με χάρτες Karnaugh

Η απλοποίηση με τους χάρτες Karnaugh προκύπτει με την εφαρμογή των κανόνων που δίδονται στην συνέχεια.

- 1) Παρατηρούμε τον χάρτη Karnaugh και προσπαθούμε να σχηματίσουμε ομάδες με όσο το δυνατόν περισσότερα γειτονικά 1.
- 2) Ο αριθμός των 1 σε κάθε σχηματιζόμενη ομάδα πρέπει να είναι δύναμη του 2 (1, 2, 4, ...).
- 3) Κάθε 1 πρέπει να ανήκει σε μία τουλάχιστον ομάδα.
- 4) Κάθε τετραγωνίδιο με "1" πρέπει να μετέχει στον ελάχιστο αριθμό ομάδων.
- 5) Ομάδα με 2 γειτονικά 1 σημαίνει απαλοιφή μίας μεταβλητής, αυτής που αλλάζει τιμή, ενώ ομάδα με 4 γειτονικά 1 σημαίνει απαλοιφή δύο μεταβλητών αυτών που αλλάζουν τιμή.

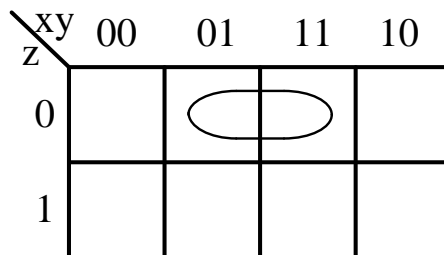
Κανόνες σχηματισμού ομάδων για τρεις μεταβλητές

$\backslash xy$ z	00	01	11	10
0				
1				



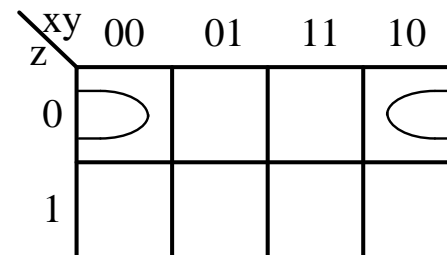
A Karnaugh map for three variables (x, y, z) with columns labeled 00, 01, 11, 10 and rows labeled 0, 1. A vertical oval groups the two cells in the 01 column, representing the expression xy .

$\backslash xy$ z	00	01	11	10
0				
1				



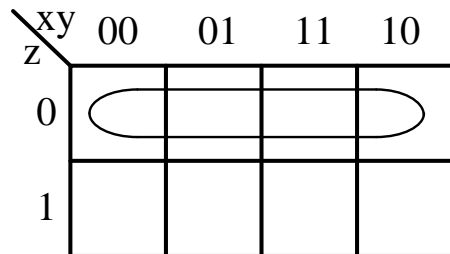
A Karnaugh map for three variables (x, y, z) with columns labeled 00, 01, 11, 10 and rows labeled 0, 1. A horizontal oval groups the two cells in the 0 row, representing the expression \bar{z} .

$\backslash xy$ z	00	01	11	10
0				
1				



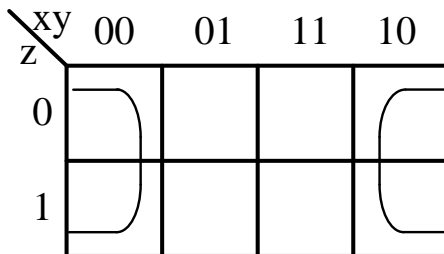
A Karnaugh map for three variables (x, y, z) with columns labeled 00, 01, 11, 10 and rows labeled 0, 1. Two groups of two cells each are shown: a horizontal group in the 0 row (representing \bar{z}) and a vertical group in the 01 column (representing xy).

$\backslash xy$ z	00	01	11	10
0				
1				



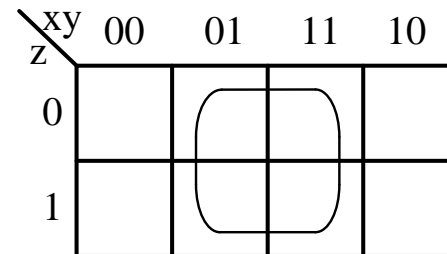
A Karnaugh map for three variables (x, y, z) with columns labeled 00, 01, 11, 10 and rows labeled 0, 1. A horizontal oval groups all four cells in the 0 row, representing the expression \bar{z} .

$\backslash xy$ z	00	01	11	10
0				
1				



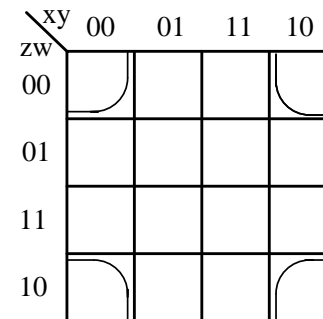
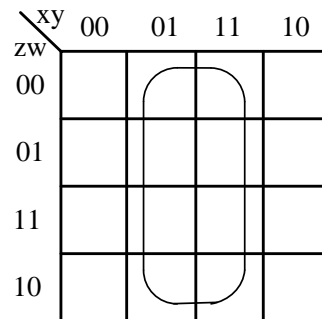
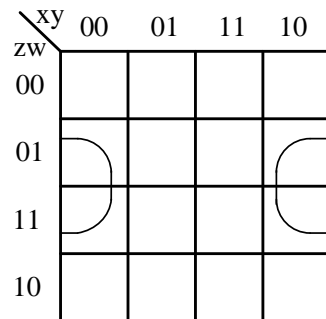
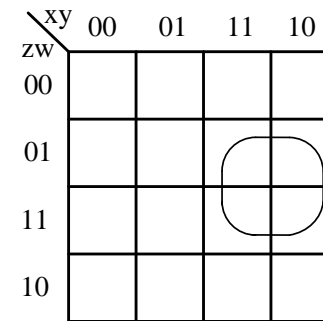
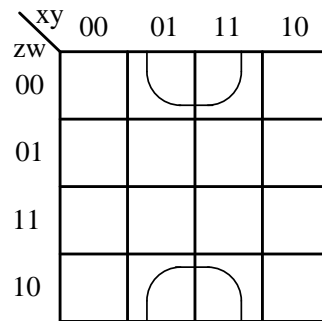
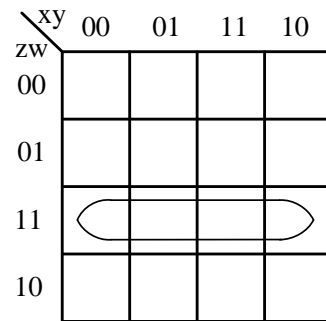
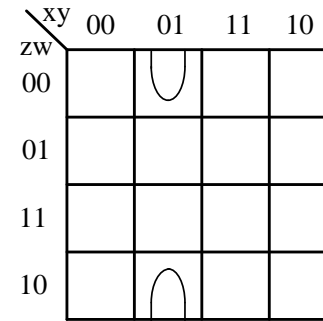
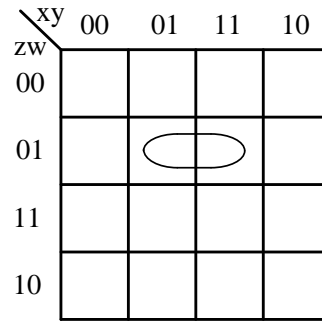
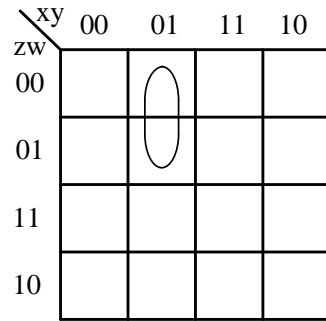
A Karnaugh map for three variables (x, y, z) with columns labeled 00, 01, 11, 10 and rows labeled 0, 1. Two groups of two cells each are shown: a horizontal group in the 0 row (representing \bar{z}) and a vertical group in the 10 column (representing $\bar{x}y$).

$\backslash xy$ z	00	01	11	10
0				
1				



A Karnaugh map for three variables (x, y, z) with columns labeled 00, 01, 11, 10 and rows labeled 0, 1. A horizontal oval groups all four cells in the 1 row, representing the expression z .

Κανόνες σχηματισμού ομάδων για τέσσερις μεταβλητές



Παράδειγμα. Απλοποίηση της λογικής συνάρτησης

$$f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$$

$$f = \underbrace{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}_2 + \underbrace{\bar{x}yz}_3$$

Με χάρτες Karnaugh

		xy			
		00	01	11	10
z	0	0 0	2 1	6 0	4 0
	1	1 0	3 1	7 0	5 0

$$f = \bar{x}y$$

Σχηματίζεται μια ομάδα των δύο 1 στα τετραγωνίδια 2, 3. Στην ομάδα αυτή η μεταβλητή x έχει την τιμή 0, οπότε στο αντίστοιχο λογικό γινόμενο συμπεριλαμβάνεται το \bar{x} η μεταβλητή y έχει την τιμή 1 οπότε συμπεριλαμβάνεται το y , ενώ η μεταβλητή z αλλάζει τιμή, και δεν συμπεριλαμβάνεται στο γινόμενο.

Ισοδύναμη απλοποίηση με κανόνες της Άλγεβρας Boole

$$\begin{aligned} f &= \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz = \\ &= \bar{x}y(\bar{z} + z) \\ &= \bar{x}y1 \\ &= \bar{x}y \end{aligned}$$

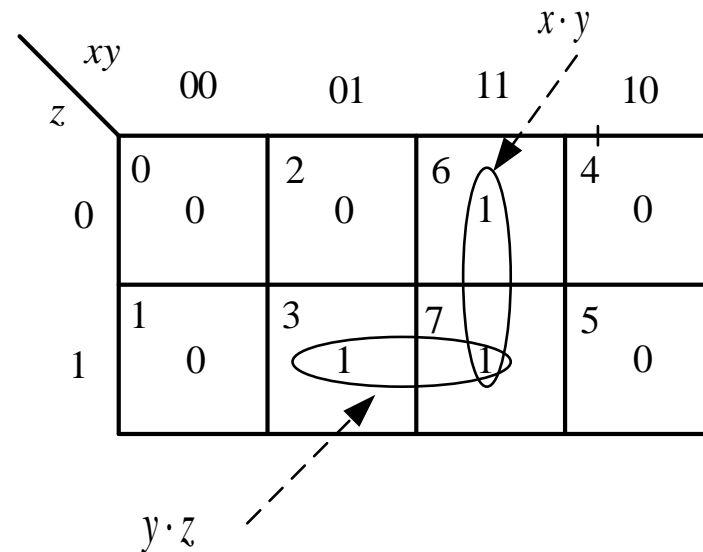
Παράδειγμα. Απλοποίηση της λογικής συνάρτησης

$$f = \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz$$

Με χάρτες Karnaugh

$$f = \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz$$

3 6 7



$$f = xy + yz$$

Με κανόνες της Άλγεβρας Boole

$$\begin{aligned} f &= \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz = \\ &= \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz + xyz = \\ &= (x + \bar{x})yz + xy(\bar{z} + z) \\ &= yz + xy \\ &= xy + yz \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.24. Να απλοποιηθεί με χάρτες Karnaugh η λογική συνάρτηση

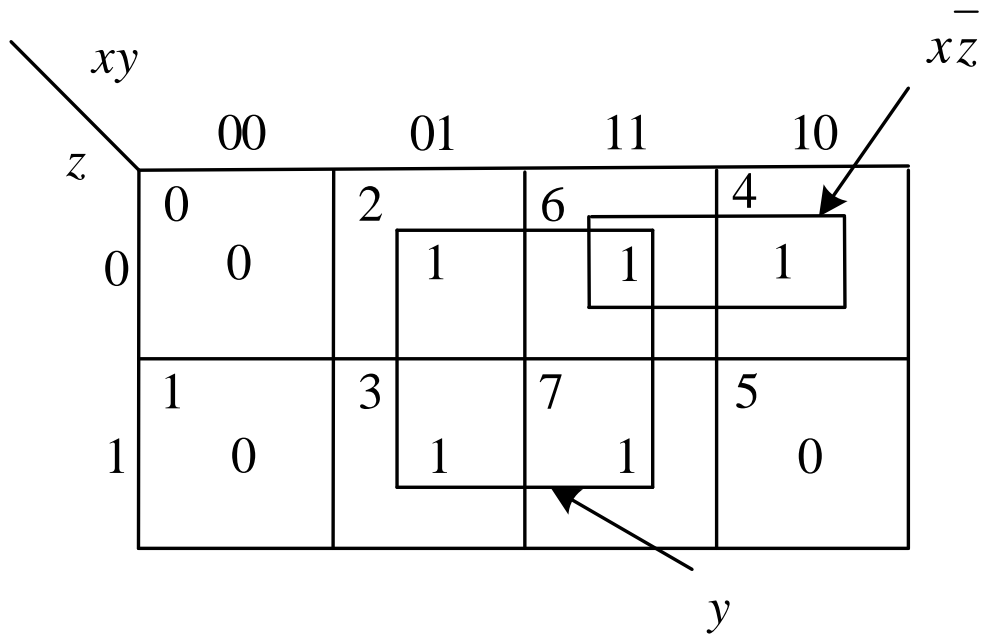
$$f(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + xyz$$

Υπόδειξη

$$f(x, y, z) = \underbrace{\bar{x}y\bar{z}}_2 + \underbrace{\bar{x}yz}_3 + \underbrace{x\bar{y}\bar{z}}_4 + \underbrace{xy\bar{z}}_6 + \underbrace{xyz}_7$$

		xy			
		00	01	11	10
z	0	0 1	2 1	6 1	4 1
	1	1	3 1	7 1	5

Υπόδειξη



$$f = \bar{x}z + y$$

Παράδειγμα. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η απεικόνιση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στην συνέχεια.

xy z	00	01	11	10
0	0 1	2 1	6 1	4 1
1	1 0	3 1	7 1	5 0

Υπόδειξη

$\begin{array}{c} xy \\ \swarrow \searrow \\ z \end{array}$		00		01		11		10		
		0		2		6		4		
0		1		1		1		1		y
1		1		1		1		0		\bar{z}

$$f = y + \bar{z}$$

Παράδειγμα. Απλοποίηση της λογικής παράστασης

$$f = \bar{x} \bar{y} z + x \bar{y} z$$

$$f = \underbrace{\bar{x} \bar{y} z}_1 + \underbrace{x \bar{y} z}_5$$

Με χάρτες Karnaugh

		xy			
		00	01	11	10
z	0	0 0	2 0	6 0	4 0
	1	1 1	3 0	7 0	5 1

$\bar{y}z$ (indicated by a dashed line and arrow pointing to the right side of the map)

$$f = \bar{y}z$$

Με κανόνες της Άλγεβρας Boole

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} \bar{y} z + x \bar{y} z \\ &= (\bar{x} + x) \bar{y} z \\ &= 1 \bar{y} z \\ &= \bar{y} z \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η απεικόνιση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στην συνέχεια.

xy z	00	01	11	10
0	0 1	2 0	6 1	4 0
1	1 0	3 0	7 1	5 0

Υπόδειξη

		$\overline{x} \overline{y} \overline{z}$			
		00	01	11	10
$\begin{matrix} xy \\ z \end{matrix}$	0	0 1	2 0	6 1	4 0
	1	1 0	3 0	7 1	5 0

$$f = \overline{x} \overline{y} \overline{z} + xy$$

Παράδειγμα 3.25. Να απλοποιηθεί με χάρτες Karnaugh η λογική συνάρτηση

$$f(x, y, z, w) = \sum m(0, 2, 5, 7, 8, 10, 13, 15)$$

Υπόδειξη

$xy \backslash zw$					
		00	01	11	10
00	0	0	4	12	8
	1	1	0	0	1
01	1	1	5	13	9
	0	0	1	1	0
11	3	0	7	15	11
	0	0	1	1	0
10	2	1	6	14	10
	1	1	0	0	1

$$f = \overline{y} \overline{w} + y w$$

Παράδειγμα. Να απλοποιηθεί με χάρτες Karnaugh η λογική συνάρτηση

$$f = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y$$

Υπόδειξη

Μετατρέπουμε πρώτα την συνάρτηση σε κανονική

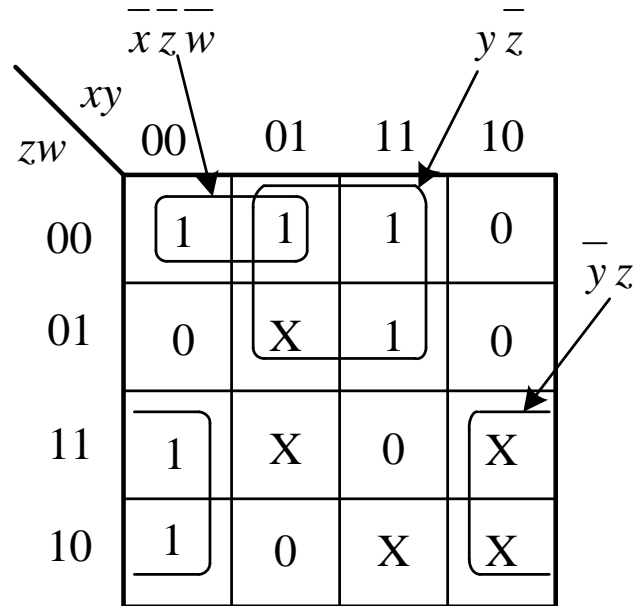
$$\begin{aligned} f &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y = \\ &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y1 = \\ &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y(z + \bar{z}) = \\ &= \underbrace{xyz}_7 + \underbrace{xy\bar{z}}_6 + \underbrace{\bar{x}yz}_3 + \underbrace{\bar{x}\bar{z}}_2 \end{aligned}$$

$\begin{array}{c} xy \\ z \end{array}$	00	01	11	10
0	0 0	2 1	6 1	4 0
1	1 0	3 1	7 1	5 0

$$f=y$$

Απλοποίηση με χάρτες Karnaugh μη πλήρως καθορισμένων λογικών συναρτήσεων*

x	y	z	w	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	X
0	1	1	0	0
0	1	1	1	X
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	X
1	1	1	1	0



$$f = \bar{x} \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} + y \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot z$$

Απλοποίηση σε γινόμενο αθροισμάτων

Παράδειγμα 3.27. Να απλοποιηθεί με χάρτες Karnaugh η λογική συνάρτηση

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + xyz$$

Υπόδειξη

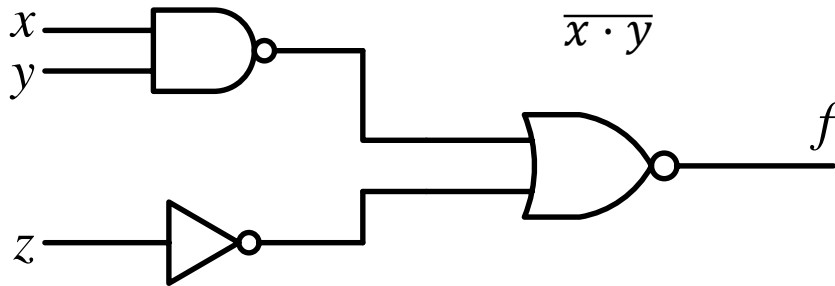
$$f(x, y, z) = \underbrace{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}_2 + \underbrace{\bar{x}yz}_3 + \underbrace{x\bar{y}\bar{z}}_4 + \underbrace{xy\bar{z}}_6 + \underbrace{xyz}_7$$

		xy			
		00	01	11	10
z	0	0	1	1	1
	1	1	1	1	0

$$f(x, y, z) = (x + y)(y + \bar{z})$$

Ασκήσεις

4.1 Να δοθεί σε απλοποιημένη μορφή η λογική παράσταση που υλοποιεί το κύκλωμα που δίνεται στη συνέχεια καθώς και ο αντίστοιχος πίνακας αληθείας.



Υπόδειξη

$$f = \overline{\overline{x \cdot y + z}}$$

$$= \overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{z}}$$

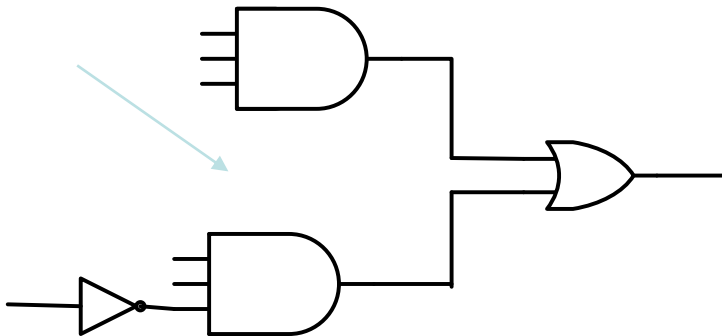
$$= xyz$$

4.2 Να απλοποιηθεί με κανόνες της Άλγεβρας Boole η λογική παράσταση που δίδεται στην συνέχεια

$$f = xyz + xy\bar{z}$$

Υλοποιήστε την δοσμένη, αλλά και την απλοποιημένη της μορφή με λογικές πύλες AND, OR, NOT. Συγκρίνατε.

$$f = xyz + xy\bar{z}$$

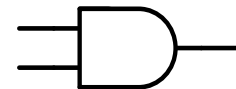


$$f = xyz + xy\bar{z}$$

$$= xy(z + \bar{z})$$

$$= xy1$$

$$= xy$$



4.3 Να απεικονισθεί σε χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση που περιγράφεται στον επόμενο πίνακα αληθείας.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Υπόδειξη

	x	y	z	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

		xy			
		00	01	11	10
z	0	0 0	2	6	4
	1	1	3	7	5

4.4 Να απεικονισθούν σε χάρτη Karnaugh οι λογικές παραστάσεις που δίδεται στην συνέχεια.

$$f = xy + \bar{x}\bar{y}$$

$$g = x\bar{y} + \bar{x}y$$

Υπόδειξη

		x	
		0	1
y	0	0	2
	1	1	3

		x	
		0	1
y	0	0	2
	1	1	3

4.5 Να απεικονισθούν σε χάρτη Karnaugh οι λογικές παραστάσεις που δίδεται στην συνέχεια.

$$f = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z$$

$$g = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z$$

$z \backslash xy$		00	01	11	10
		0	2	6	4
0					
1					

$z \backslash xy$		00	01	11	10
		0	2	6	4
0					
1					

4.6 Να απεικονισθούν σε χάρτη Karnaugh η λογική παράσταση που δίδεται στην συνέχεια.

$$f = xy + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}$$

4.7 Από τον χάρτη Karnaugh που δίδεται στη συνέχεια να εξαχθεί η λογική συνάρτηση σε μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων.

xy		00	01	11	10
z	0	0 0	2 1	6 1	4 0
	1	1 1	3 0	7 0	5 1

4.8 Από τον χάρτη Karnaugh που δίδεται στη συνέχεια να εξαχθεί η λογική συνάρτηση σε μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων.

xy		00	01	11	10
zw	00	0 0	4 0	12 1	8 0
	01	1 0	5 1	13 0	9 0
	11	3 0	7 0	15 1	11 1
	10	2 0	6 1	14 0	10 0

Υπόδειξη

$$f = \sum m(5, 6, 11, 12, 15)$$

$$f = \bar{x} \bar{y} \bar{z} w + \bar{x} y z \bar{w} + x \bar{y} z w + x y \bar{z} \bar{w} + x y z w$$

4.9 Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η απεικόνιση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στην συνέχεια.

xy z		00	01	11	10			
0	0	1	2	1	6	1	4	1
1	1	0	3	1	7	1	5	0

Υπόδειξη

xy z		00	01	11	10
0	0	0 1	2 1	6 1	4 1
	1	1 0	3 1	7 1	5 0

4.10 Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η παράσταση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στην συνέχεια.

xy z	00	01	11	10
0	0 0	2 1	6 1	4 0
1	1 1	3 0	7 0	5 1

Υπόδειξη

$\begin{array}{c} xy \\ z \end{array}$		00	01	11	10
0	0	0 0	2 1	6 1	4 0
	1	1 1	3 0	7 0	5 1

4.11 Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η απεικόνιση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στη συνέχεια.

xy		00	01	11	10
zw					
00	0 0	4 1	12 0	8 0	
01	1 1	5 1	13 1	9 1	
11	3 0	7 1	15 0	11 0	
10	2 0	6 1	14 0	10 0	

4.12 Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η απεικόνιση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στη συνέχεια.

xy		00	01	11	10
zw	00	0 1	4 0	12 0	8 1
	01	1 0	5 1	13 1	9 0
	11	3 0	7 1	15 1	11 0
	10	2 1	6 0	14 0	10 1

Υπόδειξη

xy		00	01	11	10
zw	00	0 1	4 0	12 0	8 1
	01	1 0	5 1	13 1	9 0
	11	3 0	7 1	15 1	11 0
	10	2 1	6 0	14 0	10 1

4.13 Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η παράσταση σε με χάρτη Karnaugh δίδεται στην συνέχεια

xy \ zw	00	01	11	10
00	0 1	4 1	12 0	8 0
01	1 1	5 1	13 1	9 0
11	3 0	7 1	15 1	11 0
10	2 0	6 0	14 0	10 0

Υπόδειξη

xy \ zw		00	01	11	10
zw	00	0 1	4 1	12 0	8 0
	01	1 1	5 1	13 1	9 0
	11	3 0	7 1	15 1	11 0
	10	2 0	6 0	14 0	10 0

4.14 Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η παράσταση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στην συνέχεια.

xy zw		00	01	11	10
00	0 0	4 1	12 1	8 0	
01	1 1	5 0	13 0	9 1	
11	3 1	7 0	15 0	11 1	
10	2 0	6 1	14 1	10 0	

Υπόδειξη

xy		00	01	11	10
zw	00	0 0	4 1	12 1	8 0
	01	1 1	5 0	13 0	9 1
	11	3 1	7 0	15 0	11 1
	10	2 0	6 1	14 1	10 0

4.15 Να υλοποιηθεί με πύλες AND, OR, NOT η κανονική λογική παράσταση που δίδεται στην συνέχεια.

$$f = xyz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$$

Στην συνέχεια να απλοποιηθεί με χάρτες Karnaugh. Να υλοποιηθεί η απλοποιημένη λογική παράσταση με πύλες AND, OR, NOT. Συγκρίνατε.

Υπόδειξη

$$f = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz = \sum m(3, 6, 7)$$

$\begin{array}{c} xy \\ z \end{array}$		00		01		11		10	
		0	1	0	1	0	1	0	1
z	0	0	0	0	0	1	1	0	0
	1	0	1	1	1	1	1	0	0

$$f = xy + yz$$