Laboration 4 - Poler, nollställen och frekvenssvar

Förberedelsuppgift

Ett linjärt tidsinvariant system beskrivs av följande differensekvation:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

1. Uttryck med hjälp av z-transformation systemets överföringsfunktion H(z).
2. Vilka poler och nollställen har systemet som beskrivs av differensekvationen y(n)=6y(n-1)-8y(n-2)+x(n)-4x(n-1)+3x(n-2)?

Ett linjärt tidsinvariant (LTI) system beskrivs fullständigt av sin överföringsfunktion

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = G\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-n_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k z^{-1})}$$

$n_1, n_2, \ldots n_M$ betecknar systemets M nollställen
$p_1, p_2, \ldots, p_N$ betecknar systemets N poler
G är en konstant förstäkningsfaktor (gain)

Frekvenssvaret hos systemet fås genom att avläsa H(z) på enhetscirkeln

$$H(\omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = G\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-n_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k e^{-j\omega})}$$

Frekvenssvaret kan uttryckas som funktion av normerad frekvens f istället för som funktion av normerad vinkelfrekvens, där $\omega = 2\pi f$.

$$H(f) = G\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-n_k e^{-j2\pi f})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k e^{-j2\pi f})}$$

Förstärkning vid frekvens f ges av frekvenssvarets magnitud $|H(f)|$. Frekvenssvaret kan därför enkelt skattas från systemets pol-nollställe plot; $|H(f)|$ blir stor nära en pol och liten nära ett nollställe. Ibland uttrycks i förstärkningen med logaritmisk skala i decibel (dB).

$$G(f) = 20|H(f)| = 10|H(f)|^2$$

Programmet MKIIR

I denna lab kommer vi att använda det egen gjorda Matlab programmet `mkiir` för att designa IIR filter genom att placera ut poler och nollställen. En kortfattad beskrivning av programmets funktioner finns i Appendix 1, och i slutet av denna handledning finns några tips.
Starta programmets grafiska användargränssnitt genom att skriva `mkiir` i matlab kommandofönstret. Notera att amplitudförstärkningen visas i dB.

1. Enkelt nollställe

Placera ut ett enkelt nollställe och flytta den runt i z-planet. Notera att *ett* enkelt nollställe betyder *ett par komplexkonjugerade* nollställen; det komplexkonjugerade nollstället syns automatiskt i pol-nollställe plotten.
Vad händer med frekvenssvaret när du flyttar nollstället?
Flytta nollstället längs enhetscirkeln.
Hur påverkas frekvenssvarets amplitud av nollställets vinkel till realaxeln? Hur påverkas frekvenssvaret av nollställets avstånd till origo, dvs radien?

2. Enkel pol

Placera ut en enkelt pol och flytta den runt i z-planet. Notera att *en* enkel pol betyder *ett par komplexkonjugerade* poler; den komplexkonjugerade polen syns automatiskt i pol-nollställe plotten.
Vad händer med frekvenssvaret när du flyttar polen?
Flytta polen längs enhetscirkeln.
Hur påverkas frekvenssvaret av polens vinkel till realaxeln? Hur påverkas frekvenssvaret av polens avstånd till origo, dvs radien?

3. Notch filter

Ett Notch filter är ett filter som helt släcker ut frekvensen *f*. Ett FIR Notch kan enkelt åstadkommas genom att placera nollställen på enhetcirkeln, vid

$$n = \left\{e^{-i2\pi f}, e^{i2\pi f}\right\}$$

Skapa ett sådant FIR Notch filter som släcker ut frekvensen f=0.1.
Vilken överföringsfunktion H(z) har FIR Notch filtret? Vilket impulssvar h(n) och vilken differensekvation motsvarar detta?

En nackdel med FIR Notch är att frekvenser i närheten av *f* också dämpas mycket. Detta kan undvikas genom att placera en pol strax innanför nollstället med radien *r<1*,

$$p = \left\{re^{-i2\pi f}, re^{i2\pi f}\right\}$$

Skapa ett IIR Notch filter som släcker ut frekvensen f=0.1.
Hur påverkas frekvenssvaret av radien r?
Vilken överföringsfunktion H(z) har IIR Notch filtret? Vilket impulssvar h(n) och vilken differensekvation motsvarar detta?

4. Lågpassfilter

Välj Filter prototype *Low pass* och en filterspecifikation för ett lågpassfilter visas i tillsammans med frekvenssvarets magnitud i det nedre fönstret. Placera poler och nollställen i z-planet för att försöka uppfylla filterspecifikationen. Använd så få poler och nollställen som möjligt. Genom att ändra *Filter gain* kan du skifta frekvenssvaret vertikalt.
Hur många poler respektive nollställen behövdes? Var placerades dessa?
Vilken överföringsfunktion H(z) har systemet? Vilket impulssvar h(n) och vilken differensekvation motsvarar detta?

5. Högpassfilter

Välj Filter prototype *High pass* och en filterspecifikation för ett högpassfilter visas i tillsammans med frekvenssvarets magnitud i det nedre fönstret. Placera poler och nollställen i z-planet för att försöka uppfylla filterspecifikationen. Använd så få poler och nollställen som möjligt. Genom att ändra *Filter gain* kan du skifta frekvenssvaret vertikalt.
Hur många poler respektive nollställen behövdes? Var placerades dessa?
Vilken överföringsfunktion H(z) har systemet? Vilket impulssvar h(n) och vilken differensekvation motsvarar detta?

6. Bandpassfilter

Välj Filter prototype *Bandpass* och en filterspecifikation för ett bandpassfilter visas i tillsammans med frekvenssvarets magnitud i det nedre fönstret. Placera poler och nollställen i z-planet för att försöka uppfylla filterspecifikationen. Använd så få poler och nollställen som möjligt. Genom att ändra *Filter gain* kan du skifta frekvenssvaret vertikalt.
Hur många poler respektive nollställen behövdes? Var placerades dessa?
Vilken överföringsfunktion H(z) har systemet? Vilket impulssvar h(n) och vilken differensekvation motsvarar detta?

Tips 1: Filterkoefficienterna motsvarande pol-nollställe placeringen från mkiir kan sparas ner till en fil och läsas in i Matlab, och filterkoefficienter som skapats i Matlab kan importeras till mkiir.

Tips 2: Följande standardfunktioner i Matlab kan vara användbara vid analys av filter
impz – beräkna och plotta impulssvar h(n) från koefficienterna i A(z) och B(z)
freqz – beräkna och plotta frekvenssvar H(f) från koefficienterna i A(z) och B(z)
zplane – beräkna och plotta poler och nollställen från koefficienterna i A(z) och B(z)
poly – konverterar rötter till polynom. Kan användas för att skapa koefficienterna i B(z) från en vektor med nollställen eller för att skapa koefficienterna i A(z) från en vektor med poler.
roots –konverterar polynom till rötter. Kan användas för att skapa en vektor med nollställen från B(z) eller för att skapa en vektor med poler från A(z).

Tips 3: Det finns optimerade metoder för design av digitala filter från filterspecifikationer [1], men dessa ingår inte i denna kurs. Metoderna för design av digitala IIR filter är ofta baserade på metoder för analoga filter. Exempel på sådana metoder är Butterworth och Chebychev, som finns implementerade i Matlab.
`[b,a]=butter(N, [f1, f2]*2)` ger koefficienterna till A(z) och B(z) till ett Butterworth bandpassfilter av N:te ordningen (N poler) med passband mellan de normerade frekvenserna f1 och f2. Notera att multiplikationen med faktorn 2 är pga att Matlab använder en annan notation där 1 är den högsta ingående frekvensen istället för 0.5.
`[b,a]=cheby2(N, 40, [f1 f2]*2)` ger koefficienterna till A(z) och B(z) till ett Chebychev bandpassfilter av N:te ordningen (N poler) med passband mellan de normerade frekvenserna f1 och f2 och med 40 dB dämpning i stopbanden.
Även lågpassfilter, högpassfilter och stoppbandfilter kan designas med dessa funktioner, se `help butter` respektive `help cheby2`.
[1] Proakis & Manolakis Ch. 10.

Appendix 1 – Programet mkiir

IIR Filter Design Application
The program mkiir, shown in figure 1 allows you to visually design an IIR filter by placing poles and zeros in the z-plane. The program shows a complex pole-zero plane (top) and the filter amplitude response (bottom) on the left hand side, and program options on the right hand side.

Pole-Zero Plot
The pole-zero plot shows the unit circle and the real and imaginary axes. This area is where you place, move and delete your poles and zeros. Poles and zeros are automatically placed in complex conjugate pairs. Therefore, only IIR filters with odd-ordered numerator and denominator polynomials can be designed by and imported to the program.

Amplitude Response
The amplitude response updates continuously with the current filter response as you add, move or delete poles or zeros from the filter. This area can also display a prototype filter specification you can attempt to design using poles and zeros.

Program Options
The settings panel on the right hand side allows you to control the behaviour and actions of the filter design application.

Modify Poles or Zeros
Select whether to add, move and delete poles or zeros. Poles or zeros, depending on this option, are added to the filter by left clicking on the pole-zero plot. Poles or zeros are moved by left clicking and dragging an existing pole or zero, and are removed by left clicking near an existing pole or zero.

Poles and zeros can only be placed on or inside the unit circle on the z-plane. Poles or zeros placed outside the unit circle will be projected onto the unit circle so that you can place a point exactly on the unit circle.

Filter Prototype
Show a filter prototype in the amplitude response area. Selecting a filter prototype overlays a pre-defined design constraint on the amplitude response for you to design a filter against.

Filter Gain
Set a global filter gain or attenuation to vertically shift the amplitude response. This option allows you to scale the frequency response to fit within the design constraint.

Mirror and Switch Poles and Zeros

Mirror poles and zeros across the imaginary axis, or switch poles to zeros and zeros to poles.

Import and Export Filter

Import pre-designed filter coefficients from Matlab, or export your filter to Matlab. This allows you to design a filter in Matlab and import it into the design application to see how different filter designs places the poles and zeros, or to export your filter coefficients for use in Matlab.

Reset Filter

Removes all poles and zeros from the filter design.