1) Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se les ha preguntado la cantidad de dinero que tienen en la cartera, obteniéndose una media muestral de 110 €. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 €.

a) Obtener un intervalo de confianza, al 90%, para la cantidad de dinero en la cartera de la población.
b) ¿Cuál es el error máximo cometido con la estimación anterior?
c) Si deseamos que el error cometido, con el mismo nivel de confianza, sea la décima parte dele apartado anterior, ¿cuál ha de ser el tamaño de la muestra?

a) Intervalo de confianza del 90% :

$$1-\alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 1-0,90 = 0,10 \Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,645$$

$$P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = \frac{1+\frac{N_c}{100}}{2} = \frac{1+\frac{90}{100}}{2} = \frac{1,90}{2} = 0,95$$

Por tanto al buscar dentro de la tabla de la distribución normal 0,95 se obtiene 1,645

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(100-1,645\,\frac{20}{\sqrt{100}}, 100+1,645\,\frac{20}{\sqrt{100}}\right) =$$

$$= (106,71 , 113,29)$$

b) El error máximo cometido es:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 3,29$$

c) El tamaño de la muestra con la décima parte del error anterior:

$$0,10 \cdot 3,29 = 0,329$$

$$n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,645 \cdot \frac{20}{0,329}\right)^2 = 100^2 = 10\,000$$

La vida media de un determinado modelo de bombilla sigue una distribución normal con desviación típica igual a 60 días. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98% se obtiene el intervalo (388,68 , 407,32) para la vida media. Calcule la media y el tamaño de la muestra elegida. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados.

Intervalo de confianza del 98% :

$$1-\alpha = 0.98 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1-0,98 = 0,02 \quad \Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,01} = 2,33$$

$$P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = \frac{1+\dfrac{N_c}{100}}{2} = \frac{1+\dfrac{98}{100}}{2} = \frac{1,98}{2} = 0,99$$

Por tanto al buscar dentro de la tabla de la distribución normal 0,99 se obtiene 2,33

La media de la muestra es el punto medio del intervalo:

$$\overline{x} = \frac{388,68+407,32}{2} = 398 \text{ días}$$

La amplitud del intervalo es: $407,32 - 388,68 = 18,64$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{18,64}{2} = 9,32$$

$$9,32 = 2,33 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad n = \left(\frac{2,33 \cdot 60}{9,32}\right)^2 = 15^2 = 225 \text{ bombillas}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):

91 ; 68 ; 39 ; 82 ; 55 ; 70 ; 72 ; 62 ; 54 ; 67

a) Determínese un intervalo de confianza al 90% para el tiempo medio diario dedicado a escuchar música por un estudiante.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para conseguir una estimación de la media del tiempo diario dedicado a escuchar música con un error menor que 5 minutos, con un nivel de confianza del 95%.

Solución:

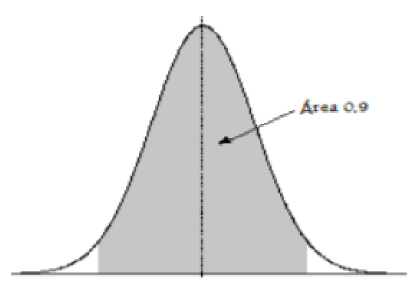
a)

La media muestral es: $\bar{x} = \frac{91+68+39+82+55+70+72+62+54+67}{10} = \frac{660}{10} = 66$

Como $\alpha = 0{,}1 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}9$ tenemos: $P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 0{,}9$

$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = P(z \leq z_{\alpha/2}) - (1 - P(z \leq z_{\alpha/2})) = 0{,}9$

$P(z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{0{,}9+1}{2} = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}64$



Intervalo de confianza:

$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(66 - 1{,}64\frac{15}{\sqrt{10}}, 66 + 1{,}64\frac{15}{10}\right) = (58{,}22; 73{,}78)$.

b)

Como $1 - \alpha = 0{,}95$ entonces $P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Error $= z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} \geq z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{Error} = 1{,}96 \cdot \frac{15}{5} = 5{,}88 \Rightarrow n \geq 34{,}57$

El tamaño mínimo de la muestra es 35.