Lista 5

Zadanie 52

Wyznaczyć płaszczyznę (podać jej równanie ogólne) na której skoncentrowany jest normalny wektor $X = (X_1, X_2, X_3)$ o macierzy kowariancji R i o wektorze średnim m, jeśli

$$m = (1,2,1), \qquad R = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie:

- Równanie ogólne płaszczyzny:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Sprawdzamy rząd macierzy R, bo jeśli wynosi 3 lub 1 to nie ma czego wyznaczać.

$$\det(R) = \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Zatem rząd tej macierzy to maksymalnie 2. Weźmy pod uwagę minor główny rozmiaru 2 i policzmy jego wyznacznik.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right) = 9.$$

Oznacza to, ze $rz(R) = 2$. Aby wyznaczyć szukaną płaszczyznę należy wybrać 2 liniowo niezależne wektory spośród wierszy macierzy R.

$$v_1 = (5,4,-2)$$
$$v_2 = (4,5,2)\,.$$

Wyznaczamy wektor prostopadły do wybranych wektorów v_1 i v_2 poprzez iloczyn wektorowy.

$$v_1 \times v_2 = (18, -18, 9) \cong (2, -2, 1)$$

Jest to wektor normalny szukanej przez nas płaszczyzny. Ponadto wiemy, że punkt m należy do tej płaszczyzny, więc ostatecznie równanie naszej płaszczyzny wygląda następująco

$$\begin{gathered} 2(x-1) - 2(y-2) + 1(z-1) = 0 \\ 2x - 2y + z + 1 = 0 \end{gathered}$$

Zadanie 53

Wektor losowy $X = (X_1, X_2, X_3)$ ma rozkład normalny o macierzy kowariancji R i o wektorze średnim m, gdzie

$$m = (1, 2, 1), \qquad R = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Podać równanie ogólne płaszczyzny, na której jest skoncentrowany wektor losowy $Y = AX$, jeśli

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie:

- Jeżeli $X \sim \mathcal{N}(m, R)$ to $Y \sim \mathcal{N}(Am, ARA^T)$

Nasze zadanie zaczyna się od wyznaczenia parametrów rozkładu zmiennej losowej Y.

$$m' = Am = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$R' = ARA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \\ 9 & 9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

Podobnie jak poprzednio sprawdzamy rząd macierzy R'

$$\det\left(\begin{bmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 18 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Sprawdźmy wyznacznik imnora głównego

$$\det\left(\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = 9$$

Wybieramy jako wektory dwa pierwsze wiersze macierzy R'

$$v_1 = (9, 3, 9)$$
$$v_2 = (3, 2, 0)$$

Wyznaczamy wektor prostopadły do wybranych wektorów v_1 i v_2 poprzez iloczyn wektorowy.

$$v_1 \times v_2 = (-18, 27, 9) \cong (-2, 3, 1).$$

Podobnie jak poprzednio, wyznaczamy równanie płaszczyzny

$$-2(x-2) + 3y + z - 3 = 0$$
$$-2x + 3y + z + 1 = 0$$

Zadanie 54

Wektor losowy $X = (X_1, X_2, X_3)$ ma rozkład normalny o macierzy kowariancji R i o wektorze średnim m, gdzie

$$m = (1, 2, 1), \qquad R = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Podać równanie krawędziowe prostej, na której jest skoncentrowany wektor losowy $Y = AX$, jeśli

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Wyznaczmy parametry rozważanego rozkładu.

$$m' = Am = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$R' = ARA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 16 & 10 \\ 22 & 32 & 20 \\ -11 & -16 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 106 & -53 \\ 106 & 212 & -106 \\ -53 & -106 & 53 \end{bmatrix}$$

Wiemy, że do szukanej prostej należy punkt m' oraz, że wyznacza ją wektor uzyskany z macierzy R', której rząd wynosi 1.

$$l : \begin{cases} x = 53t + 6 \\ y = 106t + 12 \\ z = -53t - 6 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$l : \begin{cases} x = t + 6 \\ y = 2t + 12 \\ z = -t - 6 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$l : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Do równania krawędziowego potrzebne są dwie płaszczyzny zawierające w sobie prostą l oraz mające różne wektory normalne. Z powyższego układu równań łatwo wyodrębnić dwa równania:

$$y + 2z = 0$$
$$x + z = 0$$

ostateczna postać

$$\lambda_1(y + 2z) = \lambda_2(x + z), \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Zadanie 57

Wykazać, że składowe normalnego wektora losowego $X = (X_1, \ldots, X_n)$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy są nieskorelowane. Podać przykład wektora losowego (X, Y), którego rozkłady brzegowe są normalneg, X, Y są nieskorelowane, a rozkład (X, Y) nie jest normalny.

Rozwiązanie:
Implikacja w jedną stronę jest oczywista, ponieważ niezależne zmienne losowe są ze sobą nieskorelowane. Zajmijmy się drugą stroną równoważności. $X \sim \mathcal{N}(m, R)$.

$$\forall_{i,j}\ \mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0 \Rightarrow \forall_{i,j}\ \rho(X_i, X_j) = 0$$

Powyższe zależności implikują fakt, iż macierz R jest diagonalna, czyli funkcja gęstości zmiennej losowej X ma postać

$$\begin{aligned}
f_X(t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|R|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(t-m)^T R^{-1}(t-m)\right) = \\
= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|R|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left((t_k - m_k)^2 \cdot \frac{1}{\mathrm{Var}(X_k)}\right)\right) = \\
= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|R|^{-\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{n} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(t_k - m_k)^2}{\mathrm{Var}(X_k)}\right)\right) = \\
= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{Var}(X_k)}} \exp\left(-\frac{(t_k - m_k)^2}{2\mathrm{Var}(X_k)}\right) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k)
\end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymaliśmy, że jeżeli rozkład spełnia podane warunki to poszczególne jego składowe są niezależne od siebie.

Lista 6

Zadanie 61

Wektor losowy $W = (X, Y, Z)$ ma rozkład normalny o gęstości

$$f(x, y, z) = C \exp\left[-\frac{1}{2}\left(2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz + 4xz\right)\right]$$

Wyznaczyć C oraz macierz kowariancji tego wektora losowego oraz wyznaczyć gęstość wektora losowego $Y = AW$, jeśli

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: Aby wyznaczyć stałą C trzeba policzyć całkę z zaprezentowanej gęstości i przyrównać ją do jedynki.

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz + 4xz\right)\right] dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \exp\left[-\frac{1}{2}\left((y - x - z)^2 + (x + z)^2 + z^2\right)\right] dxdydz =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x + z)^2\right] \ldots$$

$$\ldots \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - x - z)^2\right] dydxdz =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x + z)^2\right] dxdz =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] dz =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}$$

Ponieważ

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dxdydz = 2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}$$

$$C = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}}$$

W celu znalezienia macierzy kowariancji przeanalizujmy wykładnik eksponenty

$$-\frac{1}{2}(w-\mu)^T\Sigma^{-1}(w-\mu) = -\frac{1}{2}\left(2x^2+y^2+3z^2-2xy-2yz+4xz\right)$$
$$(w-\mu)^T\Sigma^{-1}(w-\mu) = 2x^2+y^2+3z^2-2xy-2yz+4xz$$

Oznaczmy

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{1,2} & \rho_{2,2} & \rho_{2,3} \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & \rho_{3,3} \end{bmatrix}, \qquad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

Przyjmując te oznaczenia i rozpisując zaprezentowaną zależność otrzymujemy

$$(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu) =$$
$$= \begin{bmatrix} x-\mu_1 & y-\mu_2 & z-\mu_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{1,2} & \rho_{2,2} & \rho_{2,3} \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & \rho_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \\ z-\mu_3 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} x-\mu_1 & y-\mu_2 & z-\mu_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (x-\mu_1)\,\rho_{1,1} + (y-\mu_2)\,\rho_{1,2} + (z-\mu_3)\,\rho_{1,3} \\ (x-\mu_1)\,\rho_{1,2} + (y-\mu_2)\,\rho_{2,2} + (z-\mu_3)\,\rho_{2,3} \\ (x-\mu_1)\,\rho_{1,3} + (y-\mu_2)\,\rho_{2,3} + (z-\mu_3)\,\rho_{3,3} \end{bmatrix} =$$
$$= \rho_{1,1}\left(\mu_1^2 + x^2 - 2\mu_1 x\right)$$
$$+ \rho_{1,2}\left(2\mu_1\mu_2 - 2\mu_2 x + 2xy - 2\mu_1 y\right)$$
$$+ \rho_{1,3}\left(2\mu_1\mu_3 - 2\mu_3 x + 2xz - 2\mu_1 z\right)$$
$$+ \rho_{2,2}\left(\mu_2^2 + y^2 - 2\mu_2 y\right)$$
$$+ \rho_{2,3}\left(2\mu_2\mu_3 - 2\mu_3 y + 2yz - 2\mu_2 z\right)$$
$$+ \rho_{3,3}\left(\mu_3^2 + z^2 - 2\mu_3 z\right)$$

Ponieważ nie ma wyrazu wolnego, oznacza to, że wektor $\mu = \vec{0}$, co upraszcza obliczenia

$$x^2\rho_{1,1} + 2xy\rho_{1,2} + 2xz\rho_{1,3} + y^2\rho_{2,2} + 2yz\rho_{2,3} + z^2\rho_{3,3} =$$
$$= 2x^2 - 2xy + 4xz + y^2 - 2yz + 3z^2$$

Spisując rozwiązania

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oto szukana macierz kowariancji.
Aby znaleźć gęstość wektora Y musimy znaleźć parametry m_Y i Σ_Y, gdzie

- $m_Y = Am$,
- $\Sigma_Y = A\Sigma A^T$.

Ponieważ wektor m jest wektorem zerowym, to również wektor m_Y jest wektorem zerowym, zatem pozostaje skupić się na macierzy kowariancji.

$$\Sigma_Y = A\Sigma A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Do wyznaczenia gęstości potrzebna jest macierz Σ_Y^{-1}

$$\Sigma_Y^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wykorzystując fakt, iż wektor średnich jest zerowy, możemy zapisać wzór na gęstość zmiennej losowej Y następująco

$$f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \det(\Sigma_Y)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} t^T \Sigma_Y^{-1} t\right),$$

gdzie t w naszym przypadku to $t = (x, y, z)$. Wykonajmy niezbędne obliczenia pomocnicze

$$\det(\Sigma_Y^{-1}) = 1$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5x - 2y - 2z & -2x + 2y + z & -2x + y + z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= \Big[x(5x - 2y - 2z) + z(-2x + y + z) + y(-2x + 2y + z) \Big] =$$

$$= \Big[5x^2 - 4x(y + z) + 2y^2 + 2yz + z^2 \Big]$$

Ostatecznie

$$f_Y(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}} \exp\left(5x^2 - 4xy - 4xz + 2y^2 + 2yz + z^2\right)$$

Zadanie 62

Dane są niezależne zmienne losowe X, Y, Z są o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Wykazać, że zmienna losowa

$$U = \frac{X + YZ}{\sqrt{1 + Z^2}}$$

ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$

Zadanie 65

Zmienna losowa X ma rozkład t Studenta o n stopniach swobody, jeśli gęstość wynosi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

gdzie $B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$ jest funkcją beta. Dane są niezależne zmienne losowe X i Y o rozkładach (odpowiednio) $\mathcal{N}(0, 1)$ i $G\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$. Wykazać, że zmienna losowa

$$Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

ma rozkład t Studenta o n stopnia swobody. Korzystając ze wzoru Stirlinga dla funkcji gamma

$$\ln\Gamma(a) = \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right)\ln a - a + \frac{\theta}{12a}, \qquad a > 0, \quad 0 < \theta < 1.$$

Wykazać, że

$$f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Rozwiązanie:

- $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$
- $f_Y(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)$

$$F_Z(t) = P\left(Z \leqslant t\right) = P\left(\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \leqslant t\right) = P\left(X \leqslant t\sqrt{\frac{Y}{n}}\right) =$$

$$= \int_0^\infty F_X\left(t\sqrt{\frac{y}{n}}\right) f_Y(y)\,dy$$

Różniczkujemy obustronnie po t

$$(F_Z(t))' = \int_0^\infty f_X\left(t\sqrt{\frac{y}{n}}\right) f_Y(y)\sqrt{\frac{y}{n}}\,dy$$

$$f_Z(t) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\cdot\frac{y}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\sqrt{\frac{y}{n}}\,dy =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} y^{\frac{n+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{1}{2}y\left(\frac{t^2}{n}+1\right)\right)dy =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} y^{\frac{n+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{1}{2}y\left(\frac{t^2}{n}+1\right)\right)dy =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{B(\frac{1}{2},\frac{n}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Do dokończenia

Zadanie 66

Zmienna losowa X ma rozkład beta $B(p,q)$, jeśli jej gęstość wynosi

$$f(x)\frac{1}{B(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

gdzie $p>0, q>0$ oraz $B(p,q)$ jest funkcją beta. Udowodnić że jeśli zmienna losowa X ma rozkład t Studenta o n stopniach swobody to zmienna losowa

$$Y=\frac{1}{1+\frac{X^2}{n}}$$

ma rozkład beta $B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Rozwiązanie:

- Gęstość rozkładu t Studenta o n stopniach swobody

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Jeżeli

$$Y=\frac{1}{1+\frac{X^2}{n}}$$

to

$$X=\pm\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{Y}-1}$$

Policzmy jeszcze potrzebną później pochodną

$$\left(\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{y}-1}\right)'=$$

$$=-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\frac{1}{y}-1}y^2}=$$

$$=-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{1-y}}\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}}=$$

$$=-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{1-y}}y^{-\frac{3}{2}}$$

Następnie

$$
\begin{aligned}
&f_Y(y) = \\
=&2f_X\left(\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{y}-1}\right)\left|-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{1-y}}y^{-\frac{3}{2}}\right| = \\
=&\frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}y^{\frac{n+1}{2}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1-y}}y^{-\frac{3}{2}} = \\
=&\frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}y^{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-y}}y^{-\frac{3}{2}} = \\
=&\frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}
\end{aligned}
$$

I gotowe.

Zadanie 67

Wykazać, że jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne o rozkładach gamma odpowiednio $G(1,p_1)$ i $G(1,p_2)$ to zmienna losowa

$$Z = \frac{X}{X+Y}$$

ma rozkład beta $B(p_1,p_2)$.

Rozwiązanie:

- $$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(p_1)}x^{p_1-1}\exp(-x)$$

- $$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(p_2)}y^{p_2-1}\exp(-y)$$

Przekształćmy dystrybuantę zmiennej Z

$$
\begin{aligned}
&F_Z(t) = P(Z \leqslant t) = P\left(\frac{X}{X+Y} \leqslant t\right) = P(X \leqslant t(X+Y)) = \\
=&P(X(1-t) \leqslant tY) = P\left(X \leqslant \frac{t}{1-t}Y\right) = F_X\left(\frac{t}{1-t}Y\right) = \\
=&\int\limits_0^\infty F_X\left(\frac{t}{1-t}y\right) f_Y(y)\,dy
\end{aligned}
$$

Różniczkujemy po t

$$
\begin{aligned}
f_Z(t) &= (F_Z(t))' = F_X'\left(\frac{t}{1-t}y\right) = \\
&= \left(\int\limits_0^\infty F_X\left(\frac{t}{1-t}y\right) f_Y(y)\,dy\right)' = \\
&= \int\limits_0^\infty f_X\left(\frac{t}{1-t}y\right) f_Y(y)\frac{Y}{(t-1)^2}\,dy = \\
&= \int\limits_0^\infty \frac{1}{\Gamma(p_1)}\left(\frac{t}{1-t}y\right)^{p_1-1} e^{-\frac{t}{1-t}y}\frac{1}{\Gamma(p_2)}y^{p_2-1}e^{-y}\frac{y}{(t-1)^2}\,dy = \\
&= \frac{1}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}t^{p_1-1}\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{1-t}\right)^{p_1+1} y^{p_1+p_2-1}e^{-\frac{1}{1-t}y}\,dy = \\
&= \frac{\Gamma(p_1+p_2)}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}t^{p_1-1}\left(1-t\right)^{p_2-1}\int\limits_0^\infty \frac{y^{p_1+p_2-1}}{\Gamma(p_1+p_2)}\left(\frac{1}{1-t}\right)^{p_1+p_2} e^{-\frac{1}{1-t}y}\,dy = \\
&= \frac{\Gamma(p_1+p_2)}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}t^{p_1-1}\left(1-t\right)^{p_2-1}
\end{aligned}
$$

$\square$

Zadanie 68

Zmienna losowa X ma rozkład F Snedecora o (n,m) stopniach swobody, jeśli jej gęstość wynosi

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\frac{n}{m}x\right)^{-\frac{n+m}{2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$$

gdzie $B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)$ jest funkcją beta. Wykazać, że jeśli zmienna losowa X ma rozkład χ^2 o n stopniach swobody i zmienna losowa Y ma rozkład χ^2 o m stopniach swobody i zmienne te są niezależne to zmienna losowa

$$F = \frac{Xm}{Yn}$$

ma rozkład F Snedecora o (n,m) stopniach swobody.

Rozwiązanie:
Gęstości zmiennych losowych X i Y mają postać

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\exp\left(-\frac{x}{2}\right) \qquad f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)$$

Wyznaczmy rozkład F

$$F_F(t) = P\left(F \leqslant t\right) = P\left(\frac{Xm}{Yn} \leqslant t\right) = P\left(X \leqslant t\frac{Yn}{m}\right) = F_X\left(t\frac{Yn}{m}\right) =$$

$$= \int\limits_0^\infty F_X\left(\frac{ytn}{m}\right)\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)$$

Różniczkujemy obustronnie po t

$$(F_F(t))' = f_F(t) =$$

$$= \int\limits_0^\infty F_X'\left(\frac{ytn}{m}\right)\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})}\left(\frac{ytn}{2m}\right)^{\frac{n}{2}-1}\exp\left(-\frac{ytn}{2m}\right)\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\frac{yn}{m}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\int\limits_0^\infty\left(\frac{ytn}{2m}\right)^{\frac{n}{2}-1}y^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}\exp\left(-\frac{y}{2}\left(1+\frac{nt}{m}\right)\right)\frac{yn}{m}\,dy =$$

$$=$$

Zadanie 69

Wykazać, że jeżeli zmienna losowa X ma rozkład t Studenta o n stopniach swobody, to zmienna losowa $Y = X^2$ ma rozkład F Snedecora o $(1, n)$ stopniach swobody.

Rozwiązanie:

- Gęstość rozkładu t Studenta o n stopniach swobody
$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$
- Gęstość zmiennej losowej o rozkładzie F Snedecora o (n, m) stopniach swobody
$$f(y) = \frac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}y^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\frac{n}{m}y\right)^{-\frac{n+m}{2}}$$
- Gęstość zmiennej losowej o rozkładzie F Snedecora o $(1, n)$ stopniach swobody
$$f(y) = \frac{n^{\frac{n}{2}}(n+x)^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{x}B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}$$

Przekształćmy dystrybuantę

$$F_Y(t) = P\left(Y \leqslant t\right) = P\left(X^2 \leqslant t\right) = P\left(X \leqslant \sqrt{t}\right) = F_X\left(\sqrt{t}\right)$$

Różniczkując po t otrzymamy gęstość

$$\begin{aligned}
f_Y(t) = \left(F_X\left(\sqrt{t}\right)\right)' = f_X\left(\sqrt{t}\right)\frac{1}{2\sqrt{t}} = \\
=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n}}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{t}} = \\
=\frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)\sqrt{n}}\left(\frac{n}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{t}} = \\
=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)\sqrt{t}}\left(n+t\right)^{-\frac{n+1}{2}}
\end{aligned}$$

□

Zadanie 70

Wykazać, że jeśli zmienna losowa X ma rozkład F Snedecora o (m, n) stopniach swobody to zmienna

$$Y = \frac{mX}{n+mX}$$

am rozkład beta $B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$

Rozwiązanie:

- Gęstość rozkładu beta

$$f(x) = \frac{1}{B(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

- Gęstość rozkładu F Snedecora

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\frac{n}{m}x\right)^{-\frac{n+m}{2}}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$$

Przekształćmy

$$\begin{aligned}
F_Y(t) = P\left(Y \leqslant t\right) = P\left(\frac{mX}{n+mX} \leqslant t\right) = P\left(mX \leqslant t(n+mX)\right) = \\
=P\left(mX - tmX \leqslant tn\right) = P\left(X(m-tm) \leqslant tn\right) = P\left(X \leqslant \frac{tn}{m-tm}\right) = \\
=F_X(\frac{tn}{m-tm})
\end{aligned}$$

Pochodna po t

$$F_X'\left(\frac{tn}{m-tm}\right) = f_X\left(\frac{tn}{m-tm}\right)\frac{n}{m(t-1)^2} = f_Y(t)$$

Przekształcamy i podstawiamy

$$\begin{aligned}
&f_X\left(\frac{tn}{m-tm}\right)\frac{n}{m(t-1)^2} = \\
=&\frac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{tn}{m-tm}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}\cdot\frac{tn}{m-tm}\right)^{-\frac{n+m}{2}}\frac{n}{m(t-1)^2} = \\
=&\frac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{tn}{m(1-t)}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{1}{1-t}\right)^{-\frac{n+m}{2}}\frac{n}{m(t-1)^2} = \\
=&\frac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{1}{1-t}\right)^{-\frac{n+m}{2}}\frac{n}{m(t-1)^2} = \\
=&\frac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{1}{1-t}\right)^{-\frac{n+m}{2}}\frac{1}{(t-1)^2} = \\
=&\frac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)}t^{\frac{m}{2}-1}(1-t)^{\frac{n}{2}-1}
\end{aligned}$$

Inaczej. Jeśli

$$Y = \frac{mX}{n+mX}$$

otrzymujemy

$$X = \frac{nY}{m(1-Y)}$$

Potrzebna pochodna

$$\left(\frac{nY}{m(1-Y)}\right)' = \frac{n}{m(1-Y)^2}$$

Policzmy gęstość

$$
\begin{aligned}
&f_Y(y) = \\
=&f_X\left(\frac{ny}{m(1-y)}\right)\left|\frac{n}{m(1-Y)^2}\right| = \\
=&\frac{1}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{ny}{m(1-y)}\right)^{\frac{m}{2}-1}(1-y)^{\frac{n+m}{2}}\frac{n}{m(1-y)^2} = \\
=&\frac{1}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{m}{2}-1}(1-y)^{\frac{n+m}{2}}(1-y)^{-2} = \\
=&\frac{1}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}y^{\frac{m}{2}-1}(1-y)^{\frac{n+m}{2}-\frac{m}{2}+1-2} = \\
=&\frac{1}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}y^{\frac{m}{2}-1}(1-y)^{\frac{n}{2}-1}
\end{aligned}
$$

Krócej.

Zadanie 71

Niech $X = (X_1, \ldots, X_n)$ będzie próbą z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Wykazać, że statystyki

$$
\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad\qquad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2
$$

są niezależne (jako zmienne losowe) oraz $\overline{X}$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$, a Statystyka $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ ma rozkład χ^2 o $n-1$ stopniach swobody.

Rozwiązanie:

- $\varphi_{X_i} = \exp\left(itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$

Tymczasowo pomińmy badanie niezależności i przejdźmy do wyznaczania rozkładów poprzez wykorzystanie funkcji charakterystycznej.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{it\overline{X}} &= \mathbb{E}\exp\left(\frac{it}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \mathbb{E}\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{it}{n}X_i\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\exp\left(\frac{it}{n}X_i\right) = \\
&= \left(\mathbb{E}\exp\left(\frac{it}{n}X_i\right)\right)^n = \exp\left(imt + \frac{\sigma^2t^2}{2n}\right)
\end{aligned}
$$

Jest to funkcja charakterystyczna rozkładu normalnego $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$. Zajmijmy się w podobny sposób drugą statystyką. Na początek zbadajmy rozkład zmiennej losowej $\overline{X} - X_i$

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{\overline{X}-X_i}(t) = \\
=&\varphi_{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - X_i}(t) = \\
=&\varphi_{\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} X_k - \frac{n-1}{n}X_i}(t) = \\
=&\varphi_{\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} X_k}(t)\varphi_{-\frac{n-1}{n}X_i}(t) = \\
=&\varphi_{\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} X_k}\left(\tfrac{t}{n}\right)\varphi_{X_i}\left(-\frac{n-1}{n}t\right) = \\
=&\exp\left(itm\frac{n-1}{n} - \frac{\sigma^2t^2}{2}\cdot\frac{n-1}{n^2}\right)\exp\left(-itm\frac{n-1}{n} - \frac{\sigma^2t^2}{2}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) = \\
=&\exp\left(-\frac{\sigma^2t^2}{2}\cdot\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Wyrażenie w nawiasie ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2)$. Oznaczmy $Y_i = \sigma\sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(X_i - \overline{X}\right)$, które mają rozkład standardowy normalny. Wtedy

$$
\begin{aligned}
\frac{nS^2}{\sigma^2} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}Y_i\right)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{n}Y_i^2
\end{aligned}
$$

Przejdźmy na funkcję charakterystyczną

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{\frac{nS^2}{\sigma^2}}(t) = \\
=&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{it\frac{nS^2}{\sigma^2}} =& \mathbb{E}\exp\left(it\frac{n}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)= \\
=& \mathbb{E}\exp\left(it\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)= \\
=& \mathbb{E}\exp\left(\frac{it}{\sigma^2}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)= \\
=& \mathbb{E}\exp\left(\frac{it}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X}^2-2\overline{X}X_i+X_i^2\right)\right)= \\
=& \mathbb{E}\exp\left(\frac{it}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2-\sum_{i=1}^{n}2\overline{X}X_i+\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)\right)= \\
=& \mathbb{E}\exp\left(\frac{it}{\sigma^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}X_iX_k-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}X_iX_k+\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)\right)= \\
=& \mathbb{E}\exp\left(\frac{it}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}X_iX_k\right)\right)
\end{aligned}
$$

Zadanie 72

Niech $X=(X_1,\ldots,X_n)$ będzie próbą z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Wykazać, że statystyka t Studenta określona wzorem

$$t_n=\frac{\overline{X}-m}{S}\sqrt{n-1}$$

ma rozkład t Studenta o $n-1$ stopniach swobody.

Rozwiązanie:

- Gęstość rozkładu t Studenta o

$$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Pamiętajmy, że $\overline{X}$ oraz S są niezależne. Policzmy

$$\frac{\overline{X}-m}{S}\sqrt{n-1}=\frac{\overline{X}-m}{\sigma}\sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{nS^2}{\sigma^2}}}\sqrt{n-1}$$

Zauważmy, że $\frac{\overline{X}-m}{\sigma}\sqrt{n}$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, natomiast $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ ma rozkład χ^2 o $n-1$. Oznaczmy je odpowiednio A i B

$$P\left(t_n \leqslant t\right) = P\left(\frac{A}{\sqrt{B}}\sqrt{n-1} \leqslant t\right) = P\left(A \leqslant t\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{n-1}}\right) =$$
$$= \int_0^\infty F\left(t\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{n-1}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{b^{\frac{n-1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{b}{2}\right)\, db$$

$$f(t) = \int_0^\infty F'\left(t\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{n-1}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{b^{\frac{n-1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{b}{2}\right)\, db =$$
$$= \int_0^\infty f\left(t\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{n-1}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{b^{\frac{n-1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{b}{2}\right) \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{n-1}}\, db =$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\cdot\frac{b}{n-1}\right)\sqrt{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{b^{\frac{n-1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{b}{2}\right) \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{n-1}}\, db =$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{b^{\frac{n-1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{b}{2}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)\right) \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{n-1}}\, db =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty \left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{b^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{b}{2}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{n-1}}\, db$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

Lista 7

Zadanie 75

Niech $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $n \geqslant 1$ będzie próbą z populacji, w której cecha ma X ma rozkład gamma $G(a, p)$. Wyznaczyć rozkład statystyki $\overline{X}$.

Rozwiązanie:

- Gęstość rozkładu gamma

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} a^p \exp(-ax)$$

- Funkcja charakterystyczna

$$\varphi_x(t) = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-p}$$

Policzmy rozkład przy użyciu funkcji charakterystycznej

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k}(t) = \\
&= \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\frac{X_k}{n}}(t) = \\
&= \left(\varphi_{\frac{X_k}{n}}(t)\right)^n = \\
&= \left(\varphi_{X_k}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \\
&= \left(\left(1 - \frac{it}{an}\right)^{-p}\right)^n = \\
&= \left(1 - \frac{it}{an}\right)^{-np}
\end{aligned}$$

Statystyka ta ma rozkład $G(an, ap)$.

Zadanie 79

Niech $X = (X_1, \ldots, X_n)$ będzie próbą z rozkładu o ciągłej dystrybuancie F. Wykazać, że zmienna losowa $F(X_{(k)})$ ma rozkład beta $B(k, n-k+1)$.

Rozwiązanie:

- Gęstość rozkładu beta

$$f(x) = \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} = f(x) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

Spróbujmy

$$\begin{aligned}
&P\left(F\left(X_{(k)}\right) \leqslant t\right) = \\
=&\sum_{l=1}^{n} P\left(F\left(X_{(k)}\right) \leqslant t | X_{(k)} = X_l\right) P\left(X_{(k)} = X_l\right) = \\
=&\sum_{l=1}^{n} P\left(F\left(X_l\right) \leqslant t | X_{(k)} = X_l\right) P\left(X_{(k)} = X_l\right) = \\
=&\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} P\left(F(X_l) \leqslant t\right) P\left(F(X) \leqslant t\right)^{k-1} P\left(F(X) > t\right)^{n-k} = \\
=&\frac{n}{\binom{n}{k}} t^{k-1}\left(1-t\right)^{n-k} = \\
=&n \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} t^k \left(1-t\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

Poddaję się

Lista 8

Zadanie 93

Sprawdzić, czy

1. Rozkłady beta tworzą dwuparametrową rodzinę wykładniczą;
2. Rodzina rozkładów Rayleigha z paramterem $\sigma > 0$ należy do rodziny wykładniczej;
3. Dwuparametrowe rozkłady normalne tworzą pięcioparametrową rodzinę wykładniczą;
4. Rodzina rozkładów normlanych $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ należy do rodziny wykładniczej;
5. Rodzina rozkładów o gęstościach

$$f_\theta(x) = \frac{2(x+\theta)}{1+2\theta}, \qquad x \in (0,1), \qquad \theta \in \Theta = (0, \infty)$$

należy do rodziny wykładniczej.

Rozwiązanie:

1.

$$\begin{aligned}
f_B(x) &= \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} = \\
=& \frac{1}{B(p,q)} \exp\Big(\ln x \cdot (p-1) + \ln(1-x) \cdot (q-1)\Big) = \\
=& \frac{1}{B(p,q)} \exp\Big(\ln x \cdot p + \ln(1-x) \cdot q - \ln x - \ln(1-x)\Big) = \\
=& \frac{1}{B(p,q)} \exp\Big(\ln x \cdot p + \ln(1-x) \cdot q\Big) \frac{1}{x(1-x)}
\end{aligned}$$

Wypisać funkcje składowe

$$
\begin{aligned}
&C(\theta) = C(p,q) = \frac{1}{B(p,q)} && h(x) = \frac{1}{x(1-x)} \\
&T_1(x) = \ln x && T_2(x) = \ln(1-x) \\
&Q_1(\theta) = Q_1(p,q) = p && Q_2(\theta) = Q_1(p,q) = q
\end{aligned}
$$

2. Rayleigh...

3. Dwuwymiarowy rozkład normalny

$$
f_N(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{1,1}\sigma_{2,2} - \sigma_{1,2}^2}}
$$