Rozdział 1

28 września 2015

Procesy stochastyczne - teoria służąca do opisu analizy (wnioskowań) zjawisk losowych ewoluujących w czasie. Wywodzą się z rachunku prawdopodobieństwa. Modelowanie rzeczywistości obarczonej niepewnością (losowością). Przeciwieństwo równań różniczkowych.

$$y' = f(y,t)$$
$$y(t) = g(t, y_0)$$

Równania różniczkowe dostarczają modeli deterministycznych. Idealizuje, możliwe w warunkach laboratoryjnych. Bardzo dużo praktycznych zagadnień nie ma charakteru deterministycznego (a jak już ma to będzie to determinizm chaotyczny). Chaos to nie to samo, co losowość. Losowość tkwi w głębi natury. Dla przykładu mechanika kwantowa.

Podstawowe elementy (pojęcia) procesów stochastycznych:
Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\left.\begin{array}{l} \Omega \text{ - zbiór zdarzeń elementarnych} \\ \omega \in \Omega \text{ - zdarzenie elementarne} \end{array}\right\} \text{pojęcia pierwotne}$$

$\mathcal{F}$ - σ-ciało podzbioru Ω

Definicja 1 (σ-ciało)
Mówimy, że rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów Ω jest σ-ciałem, jeśli spełnia:

1. $$\emptyset \in \mathcal{F}, \quad \Omega \in \mathcal{F},$$

2. $$\forall_{A \in \Omega} \left[A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^{\mathrm{c}} = \Omega \backslash A \in \mathcal{F} \right],$$

3. $$\forall_{A_1, A_2, \dots \in \Omega} \left[\forall_n A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \right],$$

Definicja 2
Mówimy, że funkcja zbioru P określona na $(\Omega, \mathcal{F})$ jest σ-addytywnym prawdopodobieństwem (miarą probabilistyczną σ-addytywną), jeżeli spełnia:

1. $$P : \mathcal{F} \to [0, 1],$$

2. $$P(\emptyset) = 0,$$

3. $$P(\Omega) = 1,$$

4. warunek σ-addytywności
$$\forall_{A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}} \left[\forall_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \right]$$

Definicja 3 (Proces stochastyczny)
Procesem stochastycznym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy rodzinę zmiennych losowych $\{X_t\}_{t \in T}$ określonych na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
T - zbiór indeksów (czasowych, gdy T interpretujemy jako czas)

Definicja 4 (Zmienna losowa)
Zmienna losowa X_t.

$$\forall_{t\in T}\forall_{B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}} X_t^{-1}(B)\in\mathcal{F}$$

X_t jest $\mathcal{F}$ mierzalne; X_t jest $\sigma(\mathcal{F},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}) mierzalna$

- $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ - σ-ciało zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$
- $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=\sigma\left(\{(\alpha,\beta):\alpha<\beta\}\right)$

  Uwaga!

$$\operatorname{card}(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}})=\mathfrak{c}<2^{\mathfrak{c}}=\operatorname{card}\left(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\right)$$

Definicja 5
Niech Ω będzie ustalonym zbiorem. Mówimy, że rodzina $\mathcal{C}$ podzbiorów Ω tworzy ciało, jeżeli spełnia:

1. $$\emptyset,\,\Omega\in\mathcal{C}$$

2. $$\forall_{A\subseteq\Omega}\left[A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^{\mathrm{c}}\in\mathcal{C}\right]$$

3. $$\forall_{A,B\in\Omega}\left[A<B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C}\right]\equiv$$
$$\equiv\left[A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{C},\quad n\in\mathbb{N}\Rightarrow\bigcup_{j=1}^{n}A_j\in\mathcal{C}\right]$$

Definicja 6
Mówimy, że funkcja zbioru μ określona na $(\Omega,\mathcal{C})$ jest miarą probabilistyczną σ-addytywną, jeśli spełnia:

1. $$\mu(\emptyset)=0$$
$$\mu(\Omega)=1$$
$$\forall_{A\in\mathcal{C}}\,0\leqslant\mu(A)\leqslant1$$

2. $$\forall_{A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{C}}\left[\forall_{i\neq j}A_i\cap A_j=\emptyset\wedge\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{C}\Rightarrow\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n\right)\right]$$

Rozdział 2

5 Października 2015

Twierdzenie 1
Niech $\mathcal{C}$ będzie ciałem podzbiorów Ω oraz $\mu : \mathcal{C} \to [0,1]$ będzie miarą skończenie addytywną na $(\Omega, \mathcal{C})$ nieujemną i unormowaną, czyli

$$\mu(\Omega) = 1, \forall_{a \in \mathcal{C}}\ 0 \leqslant \mu(A) \leqslant 1.$$

Wówczas następujące warunki są równoważne:

(A) μ jest σ-addytywna na $(a\Omega, \mathcal{C})$

(B) Ciągłość od dołu

$$\forall_{B_j \in \mathcal{C}} \forall_{B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_j\right)$$

(C) Ciągłość od góry

$$\forall_{C_j \in \mathcal{C}} \forall_{C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots} \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu\left(C_j\right) = 0$$

Dowód. (A) $\Rightarrow$ (B)
$A_1 = B_1$
$A_2 = B_2 \backslash B_1$
$\vdots$
$A_n = B_n \backslash B_{n-1}$
$\vdots$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

$$
\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu\left(A_j\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_n\right)
\end{aligned}
$$

(B) $\Rightarrow$ (C)
$C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$
$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$
$B_n = C_n^{\mathrm{c}} = \Omega \setminus C_n$
$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right)^{\mathrm{c}} = \emptyset^{\mathrm{c}} = \Omega$

$$
\begin{aligned}
1 = \mu\left(\Omega\right) &= \\
=&\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \\
=& \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_n\right) = \\
=& \lim_{n\to\infty} \left(\Omega \setminus C_n\right) = \\
=& \lim_{n\to\infty} \Big(\mu\left(\Omega\right) - \mu\left(C_n\right)\Big) = \\
=&\mu\left(\Omega\right) - \lim_{n\to\infty} \mu\left(C_n\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu\left(C_n\right) = 0
\end{aligned}
$$

(C) $\Rightarrow$ (A)
$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$
$\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \in \mathcal{C}$

$$
C_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \in \mathcal{C}
$$

$C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$
$\bigcap_{j=1}^{\infty} C_n = \emptyset.$

Z (C) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\left(C_n\right) = 0$

$$\begin{aligned}
&\mu\left(C_n\right) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) - \sum_{j=1}^{n-1} \mu\left(A_j\right) \to 0
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \mu\left(A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

Ostatecznie

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(A_j\right)$$

$\square$

Uwaga!
Warunek (C) jest bardzo wygodny do sprawdzenia.

Twierdzenie 2
Jeżeli μ jest prawdopodobieństwem σ-addytywnym na ciele $\mathcal{C}$ podzbiorów Ω, to istnieje dokładnie jedno rozszerzenie μ do miary probabilistycznej $\tilde{\mu}$ na $\sigma\left(\mathcal{C}\right)$ $\{\tilde{\mu}|_{\mathcal{C}} = \mu\}$

$$\left(\Omega, \mathcal{C}, \mu\right) \rightsquigarrow \left(\Omega, \sigma\left(\mathcal{C}\right), \tilde{\mu}\right)$$

Tradycyjnie $\tilde{\mu}$ piszemy μ.

Dygresja
$\Omega = \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{N}, \nu\left(A\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mu\left(A \cap \{1, 2, \ldots, n\}\right)}{n}$ gęstość zbioru A. Dobra miara

"grubości" podzbiorów $\mathbb{N}$. Nie wszystkie podzbiory mają gęstość. Z całą pewnością ν nie jest σ-addytywna, bo $\nu(k) = 0$, $\mathrm{card}(k) < \infty$

$$1 = \nu(\mathbb{N}) \neq \lim_{n\to\infty} \nu(\{1, 2, \dots, n\}) = 0$$

Przykład 1
$\Omega = (0, 1]$
$\mathcal{C}_{\text{przed.}} = \left\{\bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j, \beta_j] : n = 0, 1, \dots ; 0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_n < \beta_n\right\}$
$F : [0, 1] \to \mathbb{R}, F$ niemalejące, prawostronnie ciągłe.

$$\mu_F\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j, \beta_j]\right) \stackrel{df}{=} \sum_{j=1}^{n}\Big(F(B_j) - F(\alpha_j)\Big) \geqslant 0$$

μ_F jest skończenie addytywna na $((0, 1], {}_{\text{przed.}})$, co widać z konstrukcji. Nieco trudniej dowodzi się, że μ_F jest σ-addytywna na ciele $\mathcal{C}_{\text{przed.}}$. Zatem każda funkcja niemalejąca, prawostronnie ciągła $F : [0, 1]$ definiuje miarę σ-addytywną na $((0, 1], \sigma(\mathcal{C}_{\text{przed.}}))$

Funkcje tworzące

(p.g.f. probability geometry function)

Niech $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ będzie zmienną losową $(ychX^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \subseteq \mathbb{N}$ - dowolny podzbiór) . Nową charakterystyką takich zmiennych losowych jest funkcja charakterystyczna.

Definicja 7 (Funkcja tworząca)
Funkcją tworzącą zmiennej losowej X o wartościach w $\mathbb{N}_0$ nazywamy

$$\Upsilon_X(s) = \mathbb{E}s^X \left(= \sum_{j=0}^{\infty} s^j P(X = j) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j p_j\right)$$

Pytanie: Dom(r_X)=?
r_X określona szeregiem potęgowym; pewnie analityczna. $r_X(z), z \in K(0, R)$

Twierdzenie 3
Niech $X.\tau, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$ będą zmiennymi losowymi losowymi o wartościach w $\mathbb{N}_0$ i oznaczmy $P(X = k) = p_k$, $P\left(X^(n) = k\right) = p_k^{(n)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Wówczas:

1. *dom(Υ_X) $\supseteq [-1, 1]$ (W przypadku dziedziny zespolonej $\overline{K}(0, 1)$)*
   Υ_X jest niemalejąca i wypukła na $[0, 1]$oraz klasy C^∞ na $(-1, 1)$

2. $\Upsilon_X(1) = 1$

3.

$$\begin{aligned}
\Upsilon_X'(0) &= P(X=1) = p_1 \\
\Upsilon_X''(0) &= 2 \cdot P(X=2) = 2p_2 \\
&\vdots \\
\Upsilon_X^{(k)}(0) &= k! \cdot P(X=k) = k!p_k
\end{aligned}$$

4. *Dla* X

$$\mathbb{E}X^n < \infty \Leftrightarrow \lim_{n \to 1^-} \Upsilon_X^{(n)}(s) = \Upsilon_X^{(n)}(1^-) < \infty$$

Co więcej

$$\Upsilon_X^{(n)}(1^-) = \mathbb{E}X(X-1)\cdots(X-n+1)$$

n-ty moment faktorialny

W szczególności

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \Upsilon_X'(1^-) \\
\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}X(X-1) + \mathbb{E}X &= \Upsilon_X''(1^-) + \Upsilon_X'(1^-)
\end{aligned}$$

5. *Jeżeli* x *i* Y *są niezależne o wartościach w* $\mathbb{N}_0$*, to* $\Upsilon_{X+Y}(s) = \Upsilon_X(s)\Upsilon_Y(s)$

6. *Jeżeli* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ *są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i o wartościach w* $\mathbb{N}_0$ *i podobnie* τ *i dodatkowo ciąg* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ *i* τ *są niezależne, to dla*

$$U = \sum_{j=1}^{\tau} X^{(j)}$$

mamy

$$\Upsilon_U(s) = \Upsilon_\tau\Big(\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\Big)$$

7. *Dla dowolnego ciągu zmiennych losowych (niekoniecznie niezależnych)* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ *i zmiennej losowej* X *o wartościach w* $\mathbb{N}_0$ *następujące warunki są równoważne:*

   (a) $\forall_{k \in \mathbb{N}_0} \lim_{n \to \infty} P\left(X^{(n)} = k\right) = P(X = k)$

(b) $X_n \overset{\mathcal{D}}{\Rightarrow} X$ *(zbieżność słaba)*

(c) $\forall_{s\in[0,1]} \lim_{n\to\infty} \Upsilon_{X^{(n)}}(s) = \Upsilon_X(s)$

Dowód.

2. $\Upsilon_X(1) = \mathbb{E}1^X = \mathbb{E}1 = 1$

1.

$$\Upsilon_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^X p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

ten szereg potęgowy jest zbieżny dla $s = 1$ nawet bezwzględnie.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |p_k|\, |s|^k\right)_{s=1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \left|z^k\right| < \infty$$

$\Upsilon_X(z)$ jest dobrze określone na $|z| \leqslant 1$.
Υ_X jest funkcją analityczną (co najmniej) na $\{z : |z| < 1\}$, a stąd wynika, że Υ_X jest ciągła na $[-1, 1]$ i ma ciągłe pochodne na $(-1, 1)$.
$\Upsilon_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \geqslant 0$ na $[0, 1]$
$\Upsilon'_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k s^{k-1} \geqslant 0$ - niemalejąca na $[0, 1]$
$\Upsilon''_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-1} \geqslant 0$ dla $s \in [0, 1]$
Reasumując Υ_X jest nieujemna, niemalejąca, wypukła na $[0, 1]$.

$P(\{X + 0\} \cup \{X = 1\}) = 1$	$\Upsilon_X(s) = p_0 + p_1 \cdot s$
$P(X \geqslant 2) > 0$	Υ_X ściśle wypukła

3.

$$\Upsilon_X^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k}\left(\sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-k+1) p_j s^{j-k} = \sum_{j=k}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-k+1) p_j s^{j-k}$$

$$\Upsilon_X^{(k)}(0) = k(k-1)\cdots(k-k+1) p_k = k! p_k \Rightarrow p_k = P(X = k) = \frac{\Upsilon_X}{k!}$$

4.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}X = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\left(X = k\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot 1^k = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot s^k \right)_{s=1} = \\
&= \lim_{n \to 1^-} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot s^k \right) = \\
&= \lim_{n \to 1^-} \Upsilon'_X(s)
\end{aligned}
$$

Analogicznie

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}X(X+1)\cdots(X-n+1) = \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)p_k \cdot 1^{k-n+1} = \\
&= \lim_{n \to 1^-} \Upsilon_X^{(n)}(s)
\end{aligned}
$$

Uwaga!

$$
\mathbb{E}X^n < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-n+1) < \infty
$$

5. X, Y niezależne zmienne losowe o wartościach w $\mathbb{N}_0$

$$
\Upsilon_{X+Y}(s) = \mathbb{E}s^{X+Y} = \mathbb{E}s^X \cdot s^Y = \mathbb{E}s^X \cdot \mathbb{E}s^Y = \Upsilon_X^{(s)} \Upsilon_Y^{(s)}
$$

6. $V=\sum_{j=1}^{\tau}X^{(j)}$, ustalmy $\sum_{j=1}^{0}\dots=0$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_V(s) &= \mathbb{E}s^V = \int_\Omega s^V\,dP = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\{\tau=n\}} s^{\sum_{j=1}^{\tau}x^{(j)}}\,dP = \\
&= \int_{\{\tau=0\}} s^{\sum_{j=1}^{0}x^{(j)}}\,dP + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{\tau=n\}} s^{\sum_{j=1}^{\tau}x^{(j)}}\,dP = \\
&= 1\cdot P\left(\tau=0\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Omega \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\,dP\int_\Omega s^{\sum_{j=1}^{\tau}x^{(j)}}\,dP = \\
&= 1^0\cdot P\left(\tau=0\right) + \sum_{n=1}^{\infty}P\left(\tau=n\right)\Upsilon_{\sum_{j=1}^{\tau}x^{(j)}}(s) = \\
&= P\left(\tau=0\right)\cdot s^0 + \sum_{n=1}^{\infty}P\left(\tau=n\right)\left[\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\right]^n = \\
&= P\left(\tau=0\right)\cdot\left(\Upsilon_X^{(1)}(s)\right)^0 + \sum_{n=1}^{\infty}P\left(\tau=n\right)\left[\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\right]^n = \\
&= \Upsilon_\tau\left(\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\right) = \Upsilon_\tau\circ\Upsilon_{X^{(1)}}(s)
\end{aligned}$$

$\square$

Rozdział 3

12 października 2015

Dowód. 7. (a)$\Rightarrow$ (b)

$$P\left(X^{(n)} \leqslant t\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(X \leqslant t\right)$$

w każdym punkcie t, w którym F_X jest ciągła; dla $t < 0$ jasne, bo $0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\begin{aligned}
&P\left(X^{(n)} \leqslant t\right) = \\
=&P\left(X^{(n)} \leqslant \lfloor t \rfloor\right) = \\
=&\sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} P\left(X^{(n)} = k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} P\left(X \leqslant \lfloor t \rfloor\right) = \\
=&P\left(X \leqslant t\right)
\end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (c)
$\Upsilon_{X^{(n)}}(s) = \mathbb{E}s^{x^{(n)}}$

$$g_s(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{dla } t \leqslant 0 \\ s^t & \text{dla } t > 0 \end{array} \right. \quad \text{dla } 1 \geqslant s > 0$$

$$g_0(t) = 1 - 2t$$

$\forall_{s\in[0,1]} g_s$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną

$$X \overset{\mathcal{D}}{\Rightarrow} X \Leftrightarrow \forall_{g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \mathbb{E}g\left(X^{(n)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}g(X)$$

Dla każdego $s \in [0,1]$ g jest funkcją ciągłą i ograniczoną.

$$\mathbb{E}g_s\left(X^{(n)}\right) = \mathbb{E}s^{X^{(n)}} = \Upsilon_{X^{(n)}}(s)$$
$$\mathbb{E}g_s(X) = \Upsilon_X(s)$$
$$\mathbb{E}g_0\left(X^{(n)}\right) = 1 \cdot P\left(X^{(n)} = 0\right) + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot P\left(X^{(n)} = k\right) =$$
$$= \Upsilon_{X^{(n)}}(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}g_0(X) = \dots = \Upsilon_X(0)$$

(c) $\Rightarrow$ (a)
Mamy $\Upsilon_{X^{(n)}}(s) \to \Upsilon_X(s)$ dla $s \in [0,1]$
Podstawmy $s = 0$

$$\left.\sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot P\left(X^{(n)} = k\right)\right|_{s=0} = P\left(X^{(n)} = n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{c)} \Upsilon_X(0)$$
$$P_0^{(n)} \to P_0$$

Szkic

$$p_1^{(n)} = P\left(X^{(n)} = 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X = 0)?$$
$$\Upsilon_{X^{(n)}}(s) = P\left(X^{(n)} = 0\right) + P\left(X^{(n)} = 1\right)s + P\left(X^{(n)} = 2\right)s^2 + \dots$$
$$\Upsilon_X(s) = P(X = 0) + P(X = 1)s + P(X = 2)s^2 + \dots$$
$$\forall_{s\in[0,1]} \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X^{(n)} = k\right)s^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)s^k$$
$$\forall_{s\in[0,1]} s\sum_{k=1}^{\infty} P\left(X^{(n)} = k\right)s^{k-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} s\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)s^{k-1}$$

o, ile $0 \leqslant s \leqslant 1$, to uprośćmy

$$\forall_{s\in[0,1]} \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X^{(n)} = k\right)s^{k-1} =$$
$$= P\left(X^{(n)} = 1\right) + P\left(X^{(n)} = 2\right)s + \dots + P\left(X^{(n)} = k\right)s^{k-1} + \dots \xrightarrow[n\to\infty]{}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} P(X = 1) + P(X = 2)s + \dots + P(X = k)s^{k-1} + \dots$$

mogą być dowolnie małe biorąc małe $s \in (0,1]$. W takim razie, gdy $n \to \infty$ mamy

$$P\left(X^{(n)} = 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X = 0)$$
$$P\left(X^{(n)} = 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X = 1)$$

dalej indukcyjnie

$$\forall_{k\in\mathbb{N}_0} P\left(X^{(n)} = k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X = k)$$

$\square$

3.1 Funkcja generujaca momenty (Moment generating function)

Definicja 8
Niech X będzie zmienną losową określoną na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Funkcją generującą momenty nazywamy funkcję

$$M_X(s) = \mathbb{E}e^{sX} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}\, dF_X(x)$$

Wtrącenie

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X(x)\, dx$, gdy X ma gęstość f_X

$\sum_{k=1}^{\infty} e^{sx_k} P\left(X = x_k\right)$, gdy X jest typu dyskretnego

Wadą jest fakt, że $\mathrm{Dom}(M_x)$ może być mała lub trudna do określenia. Np. może się zdarzyć, że $\mathrm{Dom}(M_X) = \{0\}$, ale zawsze $0 \in \mathrm{Dom}\left(M_X\right)$

Fakt

$$M_X(0) = \mathbb{E}e^{0 \cdot X} = \mathbb{E}e^0 = \mathbb{E}1 = 1$$

Chcielibyśmy, aby $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathrm{Dom}\left(M_X\right)$

Twierdzenie 4
Niech zmienna losowa $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$ ma własność Dom$(M_X) \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$ dla $\varepsilon > 0$. Wówczas

$$M_X'(0) = \mathbb{E}X$$
$$M_X''(0) = \mathbb{E}X^2 itd.$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
&M_X'(x) = \\
&= \lim_{n \to 0} \frac{M_X(x+h) - M_X(x)}{h} = \\
&= \lim_{n \to 0} \frac{\mathbb{E}e^{(x+h)X} - \mathbb{E}e^{xX}}{h} = \\
&= \lim_{n \to 0} \mathbb{E}\frac{e^{(x+h)X} - e^{xX}}{h} = \\
&= \mathbb{E} \lim_{n \to 0} \frac{e^{(x+h)X} - e^{xX}}{h} = \\
&= \mathbb{E}Xe^{xX}
\end{aligned}$$

$$M'_X(0) = \left(M'_X(x)\right)_{x=0} = \mathbb{E}Xe^{0X} = \mathbb{E}X$$

Indukcyjnie dla wyższych momentów. $\square$

Twierdzenie 5
Jeżeli zmienne losowe X, Y są niezależne to

$$M_{X+Y}(x) = M_X(x) \cdot M_Y(x)$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
&M_{X+Y}(x) = \\
=&\mathbb{E}e^{x(X+Y)} = \\
=&\mathbb{E}e^{xX+xY} = \\
=&\mathbb{E}\underbrace{e^{xX}e^{xY}}_{\text{niezależne}} = \\
=&\mathbb{E}e^{xX} \cdot \mathbb{E}e^{xY} = \\
=&M_X(x)M_Y(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Wniosek
Jeżeli $X_1, \ldots, X_k$ to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, to

$$M_{\sum_{j=1}^k X_j}(x) = [M_{X_1}(x)]^k$$

Uwaga!
Jeżeli X i Y mają ten sam rozkład, to oczywiście

$$M_X = M_Y$$

Przykład 2
Wyznacz M_X, gdy $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$

$$\begin{aligned}
&M_X(x) = \\
=&\mathbb{E}e^{xX} = \\
=&\sum_{k=0}^{\infty} e^{xk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \\
=&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda} = \\
=&e^{e^x\lambda} \cdot e^{-\lambda} = \\
=&e^{\lambda(e^x-1)}
\end{aligned}$$

$\text{Dom}(M_{\text{Poiss}}) = \mathbb{R}$
$\mathbb{E} = M'_X(0)$

$$M'_X(x) = \left(e^{\lambda(e^x-1)}\right)' = e^{\lambda(e^x-1)} \cdot (\lambda \cdot e^x)$$
$$M''_X(x) = \left(e^{\lambda(e^x-1)} \cdot (\lambda \cdot e^x)\right)' = \lambda\left(e^{\lambda(e^x-1)} \cdot \lambda e^x \cdot e^x + e^{\lambda(e^x-1)} \cdot e^x\right)$$
$$M''_X(0) = \lambda(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda = \mathbb{E}X^2$$
$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Przykład 3
$X \sim \text{Exp}(\alpha)$

$$M_X(x) = \mathbb{E}e^{xX} = \int\limits_0^{+\infty} e^{xt}\alpha e^{-\alpha t}\,dt = \alpha\int\limits_0^{\infty} e^{(x-\alpha)t}\,dt =$$
$$= \frac{\alpha}{x-\alpha}e^{(x-\alpha)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{-\alpha}{x-\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-x}$$

$\text{Dom}M_{\text{Exp}(\alpha)} = (-\infty, \alpha)$

$$M'_X(x) = \frac{\alpha}{(x-\alpha)^2} \qquad M'_X(0) = \mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$$
$$M''_X(x) = \frac{2\alpha}{(\alpha-x)^3} \qquad M''_X(0) = \mathbb{E}X^2 = \frac{2\alpha}{\alpha^3} = \frac{2}{\alpha^2}$$

itd.

3.2 Uwagi o teorii niezawodności

Niech czas pracy bezawaryjnej urządzenia opisany będzie zmienną losową $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to [0, \infty)$

Definicja 9 (Funkcja niezawodności)
Funkcją niezawodności urządzenia nazywamy

$$R_X(t) = \overline{F}(t) = P(X > t) \text{ dla } t \in [0, \infty]$$

Uwaga!
$P(X = 0) = 0$ to nasze upraszczające założenie.

Definicja 10
Niech X będzie nieujemną zmienną losową. Mówimy, że X ma własność braku pamięci, jeżeli

$$\forall_{s,t\geqslant 0}\, P(X > s+t | X > t) = P(X > s)$$

Twierdzenie 6
Nieujemna zmienna losowa X ma własność braku pamięci wtedy i tylko wtedy, gdy ma rozkład wykładniczy.

Dowód. $\Leftarrow$
Zakładamy, że $X \sim \mathrm{Exp}$, $P\left(X > t\right) = e^{-\alpha t}$

$$\begin{aligned} P\left(X > t+s | X > t\right) = & \frac{P\left(X > t+s \wedge X > t\right)}{P\left(X > t\right)} = \\ = & \frac{P\left(X > t+s\right)}{P\left(X > t\right)} = \\ = & \frac{e^{-\alpha(t+s)}}{e^{-\alpha}} = \\ = & e^{-\alpha s} = \\ = & P\left(X > s\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$
Zakładamy, że X ma własność braku pamięci

$$\begin{aligned} P\left(X > t+s | X > t\right) = & P\left(X > s\right) \\ \frac{P\left(X > t+s \wedge X > t\right)}{P\left(X > t\right)} = & P\left(X > s\right) \\ P\left(X > s+t\right) = & P\left(X > s\right) P\left(X > t\right) \\ \overline{F}_X(s+t) = & \overline{F}_X(s)\overline{F}_X(t) \text{ dla } s,t \geqslant 0 \end{aligned}$$

Mamy równanie funkcyjne dla $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\forall_{s,t\geqslant 0}\ g(t+s) = g(t)g(s)$$

$g(t) = \overline{F}(t)$ ograniczona, prawostronnie ciągła oraz $\overline{F}(0) = 1$ i $\lim\limits_{x\to\infty} \overline{F}(x) = 0$
Odrzucamy trywialne rozwiązania równania $g \equiv 0,\ g \equiv 1$

$$\begin{aligned} g(2s) &= g(s+s) = g(s) \cdot g(s) = g(s)^2 \geqslant 0 \\ g(1) &= \underbrace{\left(\tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{m} + \cdots + \tfrac{1}{m}\right)}_{m \text{ razy}} = g\left(\tfrac{1}{m}\right) g\left(\tfrac{1}{m}\right) \cdots g\left(\tfrac{1}{m}\right) = \left[g\left(\tfrac{1}{m}\right)\right]^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(\tfrac{1}{m}\right) &= g(1)^{\frac{1}{m}} \\ g\left(\tfrac{k}{m}\right) &= \underbrace{\left(\tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{m} + \cdots + \tfrac{1}{m}\right)}_{k \text{ składników}} = g\left(\tfrac{1}{m}\right) g\left(\tfrac{1}{m}\right) \cdots g\left(\tfrac{1}{m}\right) = \\ &= g\left(\tfrac{1}{m}\right)^k = \left[g\left(1\right)\right]^k = g\left(1\right)^{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Gdyby $g(1) = 0 \Rightarrow g\left(\frac{1}{m}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} g\left(\frac{1}{m}\right) = 0$, ale $g(0) = 1$
Zatem $g(1) > 0$.
Gdyby $g(1) > 1 \Rightarrow g(k) = g(1)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, ale $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$
Zatem $0 < g(1) < 1$. Przyjmijmy, że $g(1) = e^{-\alpha}$ dla pewnego $\alpha > 0$. Wtedy $g\left(\frac{k}{m}\right) = (e^{-\alpha})^{\frac{k}{m}} = e^{-\alpha\frac{k}{m}}$
Dla dowolnego $x \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k^{(n)}}{m^{(n)}}$ $\left(\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\right)$

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{k^{(n)}}{m^{(n)}}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{-\alpha\frac{k^{(n)}}{m^{(n)}}}$$

$\forall_{x\geqslant 0}\ 1 - F(x) = \overline{F}(x) = e^{-\alpha x}; X \sim \text{Exp}$ $\square$

Uwaga!
W dziedzinie $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ jedynym rozkładem o własności braku pamięci jest rozkład geometryczny.

Definicja 11
Niech X będzie zmienną losową opisującą czas pracy bezawaryjnej. Intensywnością awarii nazywamy funkcję $\lambda_X : [0, \infty) \to [0, \infty)$

$$\lambda_X(t) = \frac{f_X(t)}{\overline{F}_X(t)} = \frac{f_X(t)}{R_X(t)} = -\frac{R'_X(t)}{R_X(t)}$$

$R'_X = (1 - F_X)' =$
$= -F'_X = -f_X$

Uwaga!
λ_X jest określona tylko dla zmiennych losowych absolutnie ciągłych.

W medycynie mówimy o intensywności śmierci albo ogólniej o funkcji hazardu. Rozkład (gęstość) wyznacza jednoznacznie funkcję intensywności awarii.

$$\lambda_X(t) = \frac{f_X(t)}{P(x > t)} = \frac{f_X(t)}{\int\limits_t^\infty f_X(u)\, du}$$

Interpretacja funkcji intensywności awarii.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta\to 0^+} \frac{P\left(t < X \leqslant t + \Delta T | X > t\right)}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{\frac{P(X_t \in (t, t+\Delta t] \wedge X_t > t)}{R_X(t)}}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{\frac{P(X_t \in (t, t+\Delta t])}{\Delta t}}{R_X(t)} = \\
&= \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{\frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} f_X(u)\, du}{R_X(t)} = \\
&= \frac{f_X(t)}{R_X(t)}
\end{aligned}
$$

Rozdział 4

19 października 2015

Twierdzenie 7
Funkcja intensywności awarii wyznacza jednoznacznie F_X. ($F_X \leftrightsquigarrow \lambda_X$)

Dowód.

$$\lambda_X = -\frac{R'_x}{R_X} = -\left(\ln R_X\right)'$$

$$\Lambda_X(x) = \int\limits_0^x \lambda_X(u)\,du = -\int\limits_0^x \left(\ln R_X\right)\,du = -\ln R_X|_0^x = -\ln R_X(x) + \ln \overbrace{R_X(0)}^{=1}$$

$$R_X(x) = e^{-\int\limits_0^x \lambda_X(u)\,du}$$
$$F_X(x) = 1 - e^{-\int\limits_0^x \lambda_X(u)\,du}$$

□

Definicja 12
Jeżeli urządzenie opisane jest funkcją intensywności awarii λ_X, to

1. mówimy, że urządzenie starzeje się, gdy $\lambda_X \nearrow$ jest funkcją rosnącą
2. mówimy, że urządzenie dociera się, gdy $\lambda_X \searrow$ jest funkcją malejącą

Uwaga!

$$\lambda_X = \text{const} \Leftrightarrow X \sim \text{Exp}$$

4.1 Klasyczne rozkłady w teorii niezawodności

Definicja 13
Mówimy, że nieujemna zmienna losowa X ma rozkład Weibulla, gdy

$$F_X(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\beta} \qquad t \geqslant 0 \qquad \lambda, \beta > 0$$
$$R_X(t) = e^{-(\lambda t)^\beta} \qquad t \geqslant 0 \qquad \lambda, \beta > 0$$

Dla rozkładu Weibulla

$$\lambda_X(t) = \frac{\lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1} e^{-(\lambda t)^\beta}}{e^{-(\lambda t)^\beta}} = \lambda^\beta \beta t^{\beta-1}$$

Układ dociera się, gdy $\beta < 1$
Układ starzeje się, gdy $\beta > 1$

$$\mathrm{Weib}_{\lambda,1} = \mathrm{Exp}(\lambda)$$

W praktyce inżynierskiej

$$F_X(t) = \alpha_1 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{-\lambda_2 t} + \alpha_3 \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{t-m}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$

Czyli mieszane rozkłady Exp $\not\approx$ Exp $\not\approx$ Γ

4.2 Formalne definicje z teorii procesów stochastycznych

Definicja 14
Niech $T(\neq \emptyset)$ będzie zbiorem indeksów. Procesem stochastycznym indeksowanym elementami zbioru T nazywamy rodzinę $\{X_t : t \in T\}$ zmiennych losowych (ogólniej elementów losowych) określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Jeżeli $\mathrm{card}(T) < \infty$ albo $\mathrm{card}(T) = \aleph_0$, to mówimy o procesach z indeksem dyskretnym. Jeżeli $\mathrm{card}(T) = \mathfrak{c}$, to mówimy, o procesach nad indeksami "ciągłymi".
T identyfikujemy z biegnącym czasem
$T = \{0, 1, \ldots, N\}$ albo $T = \{1, 2, \ldots, N\}$ albo $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ albo $T = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ - procesy z czasem dyskretnym.
$T = [a, b], [a, \infty), (-\infty, 0], (-\infty, +\infty)$ - procesy z czasem ciągłym
$\mathfrak{X} = \{X_t : t \in T\}$ - matematyczny opis (model) ewolucji w czasie

Definicja 15
Dla ustalonego procesu stochastycznego $\mathfrak{X} = \{X_t : t \in T\}$ trajektorią (realizacją) odpowiadają zdarzeniu elementarnemu $\omega \in \Omega$ nazywamy funkcję
$T \ni t \to X_t(\omega) \in \mathbb{R}$

Przykład 4
W urnie mamy 1 kulę białą i 1 kulę niebieską. Po wylosowaniu jednej kuli zwracamy ją do urny dodając jedną kulę w wylosowanym kolorze (po n-tym losowaniu mamy w urnie $2 + n$ kul). Procesy stochastyczne na tym mechanizmie (losowym). ($\equiv$ procesy urnowe).

1. X_n - liczba kul białych w urnie po n-tym losowaniu

$$\begin{aligned} &X_0 = 1 \\ &X_1 = \left(P\left(X_1 = 1\right) = P\left(X_1 = 2\right) = \frac{1}{2}\right) \\ &X_3 \in \{1, 2, 3\}, \ldots \end{aligned}$$

   $\mathfrak{X} = \{X\}_{n=0}^{\infty}$ - proces stochastyczny z czasem dyskretnym,
   $T = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}_0$

2.

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{gdy kula wylosowana w } n\text{-tym ciągnięciu jest niebieska} \\ 3 & \text{gdy kula wylosowana w } n\text{-tym ciągnięciu jest biała} \end{cases}$$

   $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad T = \{1, 2, \ldots\}$

3. $Z_n =$ liczba wylosowanych kul białych w ciągnięciach $1, 2, \ldots, n$

4. Zrób to sam(a)

4.3 Spacer losowy na grupie

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ciąg Berboulliego niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie

$$P(\xi_j = 1) = P(\xi_j = -1) = \frac{1}{2}$$

X_0 niezależna zmienna losowa od ciągu $(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ o wartościach w $\mathbb{Z}$.
Spacerem losowym nazywamy

$$S_{X_{0,n}} = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n = X_0 + \sum_{j=1}^{b} \xi_j$$

Zauważmy, że

$$P\left(S_{X_{0,n+1}} - S_{X_{0,n}} = \pm 1\right) = P\left(\xi_{n+1} = \pm 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$P\left(S_{X_{0,n+1}} = j | S_{X_{0,n}=i} = \pm 1\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{, gdy } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{, gdy } |i-j| \neq 1 \end{cases}$$

Uwaga!
Jeżeli $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t\in T}$ jest procesem stochastycznym, to $Y_t = g_t(X_t), \quad t \in T$ jest też procesem stochastycznym $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (funkcja borelowska).

Definicja 16
Niech $\mathfrak{X} = \{X_t : t \in T\} = \{X_t\}_{t\in T}$ będzie procesem stochastycznym określonym na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, przy czym $T = \mathbb{Z}$ albo $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+$. Mówimy, że $\mathfrak{X}$ ma przyrosty:

- niezależne, gdy

  $$\forall_{n\in N} \forall_{t_j \in T} \forall_{t_0<t_1<\cdots<t_n} X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

  są zmiennymi losowymi niezależnymi

- jednorodne, gdy

  $$\forall_{t_1,t_2\in T; t_1<t_2} \forall_{t_1+h, t_2+h \in T} (X_{t_2} - X_{t_1}) \sim (X_{t_2+h} - X_{t_1+h})$$

- stacjonarne, gdy

  $$\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{t_1,t_2\in T; t_1<t_2} \forall_{t_1+h, t_2+h\in T}$$
  $$\left(X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right) \sim \left(X_{t_1+h} - X_{t_0+h}, \ldots, X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h}\right)$$

Uwaga!
Stacjonarność przyrostów implikuje jednorodność przyrostów.

Definicja 17
Niech $\mathfrak{X} = \{X_t : t \in T\}$ będzie procesem stochastycznym określonym na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ przy czym $T = \mathbb{Z}$ albo $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+$. Mówimy, że proces $\mathfrak{X}$ jest stacjonarny, gdy

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{t_j\in T} \forall_{t_0<t_1<\cdots<t_n} \forall_{h: t_0+h, \ldots, t_n+h \in T} \left(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\right) \sim \left(X_{t_0+h}, X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h}\right)$$

Oznaczenia
$\mu_{t_0,t_1,\ldots,t_n} \overset{ozn.}{=} \mu_{\left(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\right)}$ - rozkład wektora losowego
$(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2\ldots$
μ_t - rozkład X_t losowych o tym samym, czyli rozkład jednowymiarowy
$\mu_{r,t}$ rozkład (X_r, X_t), czyli rozkład dwuwymiarowy itd.
$F_{t_0,t_1,\ldots,t_n} \overset{ozn.}{=} F_{\left(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\right)}$

Definicja 18
Jeżeli $\mathfrak{X} = \{X_t : t \in T\}$ jest procesem stochastycznym, to rozkładem skończenie wymiarowym odpowiadającym wyborowi indeksów $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in T^n$ nazywamy rozkład wektora losowego $(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. Oznaczam

$$\mu_{(t_1,t_2,\ldots,t_n)} \stackrel{df}{=} \mathcal{L}\left((X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})\right) \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Rodziną rozkładów skończenie wymiarowych procesów $\mathfrak{X} = \{X_t : t \in T\}$ nazywamy

$$\mathcal{M}^{\mathfrak{X}} = \left\{\mu_{(t_1,t_2,\ldots,t_n)} : t_1, t_2, \ldots, t_n \in T, n = 1, 2, \ldots\right\}$$

Uwaga!
Zmienną losową X charakteryzuje F_X
Wektor losowy $\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ charakteryzuje $F_{\overrightarrow{X}}$ dystrybuanta łączna n-wymiarowa.
Proces stochastyczny $\mathfrak{X}$ charakteryzuje $\mathcal{M}^{\mathfrak{X}}$

Lemat 1
Proces $\mathfrak{X} = \{X_t : t \in T\}$ o przyrostach niezależnych ma przyrosty stacjonarne wtedy i tylko wtedy, gdy ma przyrosty jednorodne.

Dowód.
"$\Rightarrow$" jasne
"$\Leftarrow$"
Wybieramy $t_0 < t_1, < \cdots < t_n \in T$ oraz h "dowolne", takie, że
$t_0 + h, t_1 + h, \ldots, t_n + h \in T$

$$\begin{aligned}
&\mu_{\left(X_{t_1}-X_{t_0}, X_{t_2}-X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}}\right)} = \\
=&\mu_{\left(X_{t_1}-X_{t_0}\right)} \otimes \mu_{\left(X_{t_2}-X_{t_1}\right)} \otimes \cdots \otimes \mu_{\left(X_{t_n}-X_{t_{n-1}}\right)} \stackrel{jed.}{=} \\
=&\mu_{\left(X_{t_1+h}-X_{t_0+h}\right)} \otimes \mu_{\left(X_{t_2+h}-X_{t_1+h}\right)} \otimes \cdots \otimes \mu_{\left(X_{t_n+h}-X_{t_{n-1}+h}\right)} = \\
=&\mu_{\left(X_{t_1+h}-X_{t_0+h}, X_{t_2+h}-X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h}-X_{t_{n-1}+h}\right)}
\end{aligned}$$

$\square$

Rozdział 5

26 października 2015

Definicja 19 (Proces Poissona)
Mówimy, że proces $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ określony na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest procesem liczącym, jeżeli

1. $N_0 = 0$

$$\forall_{\omega\in\Omega}\forall_{t\in T} N_T(\omega) \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

2.

$$\forall_{0\leqslant s<t}\forall_{\omega\in\Omega}\ N_s(\omega) \leqslant N_t(\omega)$$

3. $\forall_{0\leqslant s<t}\ N_t(\omega) - N_s(\omega)$ reprezentuje liczbę zdarzeń jakie zaszły na odcinku czasowym $(s, t]$.

Definicja 20 (Proces jednorodny)
Mówimy, że proces liczący $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ określony na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$jest jednorodnym procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$ - liczba, jeżeli spełnia

i $N(0) = 0$ z prawdopodobieństwem 1

ii $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ ma przyrosty niezależne

iii $\forall_{0\leqslant s<t}\ N_t(\omega) - N_s(\omega)$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda(t - s)$

$$\left[\forall_{k\in\{0,1,2,\dots\}}\ P\Big(N(t) - N(s) = k\Big) = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k} e^{-\lambda(t-s)}\right]$$

Uwaga!
(iii) implikuje, że przyrosty są jednorodne

$$N(t+h) - N(s+h) \sim Poiss\Big(\lambda(t+h-(s+h))\Big) = Poiss\Big(\lambda(t-s)\Big) \sim N(t) - N(s)$$

Zatem (iii) w połączeniu z (ii) mamy proces o przyrostach stacjonarnych (niezależnych).
Uwaga!

$$\mathbb{E}N(t) = \lambda t$$
$$\mathrm{Var}N(t) = \lambda t$$

Twierdzenie 8
Niech $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ będzie procesem liczącym określonym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Wówczas $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ jest jednorodnym procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia

1. $N(0) = 0$ *z pr. 1*
2. $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ *ma jednorodne i niezależne przyrosty*
3. $$P\Big(N(h)=1\Big) = \lambda\cdot h + o(h)$$
$$\left[\frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0\right]$$
4. $$P\Big(N(h)\geqslant 2\Big) = P\Big(N(h)=2 \vee N(h)=3 \vee \dots\Big) = o(h)$$

Dowód. $\Rightarrow$
(i)$\equiv$(1)
$(ii) + (iii) \Rightarrow (2)$

$$P\Big(N(h)=1\Big) \stackrel{(iii)}{=} \frac{(\lambda h)^1}{1!}e^{-\lambda h} = \lambda h e^{-\lambda h}$$

3)

$$P\Big(N(h)=1\Big) - \lambda h \stackrel{?}{=} o(h)$$
$$\frac{\lambda h e^{-\lambda h} - \lambda h}{h} = \lambda\left(e^{-\lambda h} - 1\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \left(e^{-\lambda 0} - 1\right) = 0$$

4)

$$\frac{P\Big(N(h) \leqslant 2\Big)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{?} 0$$

$$\frac{1 - P\Big(N(h) = 0\Big) - P\Big(N(h) = 1\Big)}{h} \overset{(iii)}{=} \frac{1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h}}{h}$$

Stosując regułę de l'Hospitala

$$\lim_{h\to 0} \frac{P\Big(N(h) \leqslant 2\Big)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda e^{-\lambda h} - \lambda\left(e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h}\right)}{1} = \lim_{h\to 0} \lambda^2 h e^{-\lambda h} = 0$$

$\Leftarrow$

(i)$\equiv$(1)

(2)$\Rightarrow$(ii)

Jak pokazać (iii)? $P_n(t) = P\Big(N(t) = n\Big) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Etapami

$$P_0(t) = P\Big(N(t) = 0\Big) \overset{?}{=} e^{-\lambda h} = \frac{(\lambda h)^0}{0!} e^{\lambda h}$$

$$\begin{aligned}
P_0(t+h) =& P\Big(N(t+h) = 0\Big) = \\
=& P\Big(N(t) = 0 \wedge N(t+h) - N(t) = 0\Big) = && N(t) \perp\!\!\!\perp N(t+h) \\
=& P\Big(N(t) = 0\Big) P\Big(N(t+h) - N(t) = 0\Big) \overset{(2)}{=} \\
=& P_0\left(t\right) \cdot P\Big(N(h) = 0\Big) \overset{(3)}{=} \\
=& P_0\left(t\right) \cdot \Big(1 - P\Big(N(h) = 1\Big) - P\Big(N(h) \geqslant 2\Big)\Big) = \\
=& P_0(t)\left(1 - \lambda h - o(h) - o(h)\right) = \\
=& P_0(t) - \lambda P_0(t) h - 2o(h) P_0(t) = \\
=& P_0(t) - \lambda P_0(t) h - o(h)
\end{aligned}$$

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) - \frac{o(h)}{h}$$

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

z warunkiem $P_0(0) = P\Big(N(0) = 0\Big) = 1$

$P_0(t) = e^{\lambda t}$

$P_0(0) = P\Big(N(0) = 0\Big) = \frac{(\lambda h)^0}{0!} e^{\lambda h}$

Indukcyjnie pokazuje się, ze

$$\forall_{n\geqslant 0}\ P\Big(N(t)=n\Big)=\frac{(\lambda h)^n}{n!}e^{\lambda h}$$

Pokazaliśmy, już I krok indukcyjny i formuła zachodzi dla n=0.

$$\begin{aligned}
P_n(t+h) =& P\Big(N(t+h)=n\Big)= \\
=& P\Big(\{N(t)=n \wedge N(t+h)-N(t)=0\}\,\dot\cup \\
& \dot\cup\,\{N(t)=n-1 \wedge N(t+h)-N(t)=1\}\,\dot\cup \\
& \dot\cup\,\{N(t)<n-1 \wedge N(t+h)-N(t)\geqslant 2\}\Big)= \\
=& P\Big(N(t)=n \wedge N(t+h)-N(t)=0\Big)+ \\
& +P\Big(N(t)=n-1 \wedge N(t+h)-N(t)=1\Big)+ \\
& +P\Big(N(t)<n-1 \wedge N(t+h)-N(t)\geqslant 2\Big)\overset{(2)}{=} \\
=& P\Big(N(t)=n\Big)P\Big(N(h)=0\Big)+ \\
& +P\Big(N(t)=n-1\Big)P\Big(N(h)=1\Big)+ \\
& +P\Big(N(t)<n-1\Big)P\Big(N(h)\geqslant 2\Big)= \\
=& P\Big(N(t)=n\Big)P\Big(N(h)=0\Big)+P\Big(N(t)=n-1\Big)P\Big(N(h)=1\Big)+o(h)= \\
=& P_n(t)e^{-\lambda h}+P_{n-1}(t)\Big(\lambda h+o(h)\Big)+o(h)= \\
=& P_n(t)\Big(1-\lambda h+o(h)\Big)+\lambda hP_{n-1}(t)+o(h)= \\
=& P_n(t)-\lambda hP_n(t)+\lambda hP_{n-1}+o(h)
\end{aligned}$$

$$P_n(t+h)=P_n(t)-\lambda hP_n(t)+\lambda hP_{n-1}+o(h)$$
$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=\frac{-\lambda hP_n(t)+\lambda hP_{n-1}(t)}{h}+\frac{o(h)}{h}$$

Przechodząc $h\to 0$

$$\begin{aligned}
&P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t) \\
&P_n'(t)+\lambda P_n(t)=\lambda P_{n-1}(t) \\
&P_n'(t)e^{\lambda t}+\lambda P_n(t)e^{\lambda t}=\lambda P_{n-1}(t)e^{\lambda t} \\
&\Big(P_n(t)e^{\lambda t}\Big)'=\lambda P_{n-1}(t)e^{\lambda t} \qquad n=1,2,3,\dots
\end{aligned}$$

dla $n=1$

$$\Big(P_1(t)e^{\lambda t}\Big)'=\lambda P_0(t)e^{\lambda t}=\lambda e^{-\lambda t}e^{\lambda t}=\lambda$$
$$P_1(t)e^{\lambda t}=\lambda t+C$$

Warunek początkowy

$$P_1(0) = P\Big(N(0) = 1\Big) = 0$$

daje

$$P_1(0)e^{\lambda 0} = \lambda \cdot 0 + C \Rightarrow C = 0$$

Ostatecznie

$$P_1(t)e^{\lambda t} = \lambda t$$
$$P_1(t) = \frac{(\lambda t)^1}{1!}e^{-\lambda t}$$

W II kroku indukcyjnym załóżmy, że

$$\Big(P_n\,(t)\,e^{\lambda t}\Big)' = \lambda\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} = \frac{\lambda^n \cdot t^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$P_n\,(t)\,e^{\lambda t} = \int \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \frac{\lambda^{n\,n}}{n!} + C$$

Warunek

$$P_n(0) = P\,(N(0) = n) = 0 \Rightarrow C = 0$$

Na mocy indukcji matematycznej

$$\forall_{n \geqslant 0} P\,(N(t) = n) = P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

(iii)

$$\begin{aligned} &P\,(N(t) - N(s) = n) = \\ =&P\,(N(s + (t-s)) - N(s) = n) \overset{(2)}{=} \\ =&P\,(N(t-s) = n) = \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}e^{-\lambda(t-s)} \end{aligned}$$

□

5.1 Własności trajektorii Procesu Poissona

Fakt 1
Z prawdopodobieństwem 1 trajektoria ma tylko skończenie wiele skoków na każdym skończonym odcinku czasowym $[0, t]$.

A_n - zdarzenie polegające na tym, że na odcinku $[0, n]$ było nieskończenie wiele skoków
A_n - zdarzenie polegające na tym, że na odcinku skończonym było skończenie wiele skoków

$$B^c = \Omega \backslash B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\begin{aligned}
&P\left(A_n\right) = \\
=&P\left(\text{na odcinku } [0, n] \text{ było nieskończenie wiele skoków}\right) = \\
=&P\left(\forall_{k \in \mathbb{N}} N(n) \geqslant k\right) = \\
=&P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \{N(n) \geqslant k\}\right) = \\
=&\lim_{k \to \infty} P\left(N(n) \geqslant k\right) = \\
=&\lim_{k \to \infty} P\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} N(n) = j\right) = \\
=&\lim_{k \to \infty} \underbrace{\sum_{j=k}^{\infty} \frac{(\lambda n)^j}{j!} e^{-\lambda n}}_{\text{ogon szeregu zbieżnego}} = 0
\end{aligned}$$

$$\forall_n P\left(A_n\right) = 0$$

$$\begin{gathered}
0 \leqslant P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) = 0 \\
P\left(B^c\right) = 0 \Rightarrow P\left(B\right) = 1 - P\left(B^c\right) = 1 - 0 = 1
\end{gathered}$$

Uwaga!
Jednorodny proces Poissona nie eksploduje (na skończonym odcinku czasu).
Fakt 2
Z prawdopodobieństwem 1 skoki trajektorii są równe 1.

$$P\left(\{\omega \in \Omega : [0, \infty) \ni t \to N_t(\omega) \text{ ma skoki równe } 1\}\right) = 1$$

Zdarzenie przeciwne

$$\begin{aligned}
&\{\omega \in \Omega : [0, \infty) \ni t \to N_t(\omega) \text{ ma skoki } \geqslant 2\} = \\
=&\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : [0, \infty) \ni t \to N_t(\omega) \text{ ma skoki } \geqslant 2 \text{ na odcinku } [0, n]\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n
\end{aligned}$$

$$A_n = \bigcup_{j=0}^{n\cdot m-1} \left\{ \text{skok} \geqslant 2 \text{ zdarzył się na } (\tfrac{j}{m}, \tfrac{j+1}{m}] \right\} \leqslant \bigcup_{j=0}^{n\cdot m-1} \left\{ N\left(\frac{j+1}{m}\right) - N\left(\frac{j}{m}\right) \geqslant 2 \right\}$$

$$0 \leqslant P\left(A_n\right) \leqslant \sum_{j=0}^{n\cdot m-1} P\Big(N\left(\tfrac{j}{m}+\tfrac{1}{m}\right) - N\left(\tfrac{j}{m}\right) \geqslant 2\Big) \underset{\text{jednorodność}}{\overset{\text{przyrostu}}{=}}$$
$$= \sum_{j=0}^{n\cdot m-1} P\Big(N\left(\tfrac{1}{m}\right) \geqslant 2\Big) = n\cdot m\Big(1 - P\left(N\left(\tfrac{1}{m}\right) = 0\right) - P\left(N\left(\tfrac{1}{m}\right) = 1\right)\Big) =$$
$$= n\left(1 - e^{-\frac{1}{m}\cdot\lambda} - \frac{1}{m} e^{-\frac{1}{m}\cdot\lambda}\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{m}} \leqslant n\cdot\varepsilon$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}}{x} \overset{\text{"H"}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\lambda e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x} + \lambda^2 x e^{-\lambda x}}{1} = 0$$

Jeśli

$$X < \delta_\varepsilon$$

wtedy

$$\left| \frac{1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}}{x} \right| < \varepsilon \text{ dla } \frac{1}{m} < \delta_\varepsilon \Big(\equiv \left(m > \tfrac{1}{\delta_\varepsilon}\right)\Big)$$

$$0 \leqslant P\left(A_n\right) \leqslant \varepsilon \cdot n$$

Zatem $\forall_n P\left(A_n\right) = 0$
Stąd

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

$$P\left(\{\omega \in \Omega : [0,\infty) \ni t \to N_t(\omega) \text{ ma skok } \geqslant 2\}\right) = 0$$
$$P\left(\{\omega \in \Omega : [0,\infty) \ni t \to N_t(\omega) \text{ ma skok } = 1\}\right) = 1$$

Fakt 3
Z prawdopodobieństwem 1 trajektorie dążą do ∞, gdy $t \to \infty$

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{t\to\infty} N_t(\omega) = \infty\right\}\right) = 1$$

Zdanie przeciwne

$$\left\{\omega \in \Omega : \lim_{t\to\infty} N_t(\omega) < \infty\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\omega \in \Omega : \lim_{t\to\infty} N_t(\omega) < n\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\begin{aligned} A_n =& \left\{\omega \in \Omega : \forall_{t\in[0,\infty)} N_t(\omega) \leqslant n\right\} = \\ =& \{\omega \in \Omega : \forall_{k\in\mathbb{N}} N_k(\omega) \leqslant n\} = \\ =& \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : N_k(\omega) \leqslant n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(A_n\right) =& P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \{N_k \leqslant n\}\right) = \\ =& \lim_{k\to\infty} P\left(N_k \leqslant n\right) = \\ =& \lim_{k\to\infty} P\left(N_k = 0 \vee N_k = 1 \vee \cdots \vee N_k = n\right) = \\ =& \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{n} P\left(N_k = j\right) = \\ =& \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\lambda k)^j}{j!} \cdot e^{-\lambda k} = 0 \end{aligned}$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

Stąd z prawdopodobieństwem 1

$$\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$$

Twierdzenie 9
Jeżeli $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ jest jednorodnym procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$, to z prawdopodobieństwem 1 trajektorie $[0,\infty) \ni t \to N_t(\omega)$ są funkcjami schodkowymi, startującymi z 0, o skokach równych 1, o skończenie wielu skokach na każdym odcinku skończonym i dążących do nieskończoności (gdy $t \to \infty$) i prawostronnie ciągłymi.

Moment skoku $\equiv$ chwila skoku $(T_1, T_2, \dots)$
Czas oczekiwania na kolejny skok $X_1, X_2, \dots$ "międzyczasy"; "czasypomiędzy"

Twierdzenie 10
Ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots$ dla jednorodnego procesu Poissona z intensywnością $\lambda > 0$ jest ciągiem niezależnym o tym samym rozkładzie Exp(λ).

Dowód.

$$P(X_1 \leqslant t) = P(N_t \geqslant 1) = 1 - P(N_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad \text{dla } t \geqslant 0$$

$F_{X_1}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Z definicji $X_n \geqslant 0$.

$$X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

$\square$

Rozdział 6

9 listopada 2015

$\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ jednorodny proces Poissona z intensywnością $\lambda = \text{const} > 0$
$X_n(\omega)$ zmienna losowa czas pomiędzy $n-1$ i n-tym zdarzeniem ("międzyczas")
$X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.$\sim Exp(\lambda)$

Dowód. pokazaliśmy, że $X_1 \sim Exp(\lambda)$
$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ czy składowe są niezależne o rozkładzie $Exp(\lambda)$?

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \Big(\lambda e^{-\lambda x_1}\Big)\cdot\Big(\lambda e^{-\lambda x_2}\Big)\cdot\cdots\cdot\Big(\lambda e^{-\lambda x_n}\Big)$$

Wystarczy. Żeby czasy skończyły się na tablicy policzymy dla $n = 2$

$$\begin{aligned}
&f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \lim_{\substack{\Delta t_1\to 0\\ \Delta t_2\to 0}} \frac{P\Big(X_1\in(x_1,x_1+\Delta t_1]\wedge X_2\in(x_2,x_2+\Delta t_2]\Big)}{\Delta t_1\cdot\Delta t_2} = \\
&= \lim_{\substack{\Delta t_1\to 0\\ \Delta t_2\to 0}} \frac{1}{\Delta t_1\cdot\Delta t_2}\cdot P\Big(N(x_1)=0, N(x_1+\Delta t_1)-N(x_1)=1, \\
&\quad N(x_1+x_2)-N(x_1+\Delta t_1)=0, N(x_1+x_2+\Delta t_2)-N(x_1+x_2)=1\Big) = \\
&= \lim_{\substack{\Delta t_1\to 0\\ \Delta t_2\to 0}} \frac{1}{\Delta t_1\cdot\Delta t_2}\cdot P\Big(N(x_1)=0\Big)P\Big(N(x_1+\Delta t_1)-N(x_1)=1\Big) \\
&\quad P\Big(N(x_1+x_2)-N(x_1+\Delta t_1)=0\Big)P\Big(N(x_1+x_2+\Delta t_2)-N(x_1+x_2)=1\Big)\Big) = \\
&= \lim_{\substack{\Delta t_1\to 0\\ \Delta t_2\to 0}} \frac{1}{\Delta t_1\cdot\Delta t_2}\cdot e^{-\lambda x_1}(\lambda\cdot\Delta t_1)^1 e^{-\lambda\Delta t_1} P\Big(x_2-\Delta t_1)=0\Big)\cdot\lambda\Delta t_2 e^{-\lambda\Delta t_2} = \\
&= \lim_{\substack{\Delta t_1\to 0\\ \Delta t_2\to 0}} \lambda e^{-\lambda x_1}\cdot e^{-\lambda\Delta t_1}\cdot e^{-\lambda(x_2-\Delta t)}\cdot\lambda e^{-\lambda\Delta t_2} = \\
&= \lambda e^{-\lambda x_1}\cdot\lambda e^{-\lambda x_2} = f_{Exp(\lambda)}(x_1) f_{Exp(\lambda)}(x_2)
\end{aligned}$$

X_1, X_2 są niezależne i $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$
Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ rozumowanie jest takie samo, jedynie rachunki dłuższe. $\square$

Wnioski
Niech $T_n = X_1 + \cdots + X_n$ czas oczekiwania na n-te zdarzenie. Wówczas T ma rozkład Erlanga z parametrami $\Gamma_{n,\lambda}$

$$f_{T_n}(t) = \frac{\lambda^n \Gamma(n)}{t^{n-1} e^{-\lambda t}}$$

Dowód. Wiemy, że

$$X_j \sim Exp(\lambda) \Rightarrow X_1 + \cdots + X_n \sim \Gamma_{n,\lambda}$$

$t > 0$
$T_n \leqslant t \Leftrightarrow N(t) \geqslant n$

$$F_{T_n}(t) = P\left(N(t) \geqslant n\right) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned}
&f_{T_n}(t) = F'_{T_n}(t) = \\
=&\sum_{j=n}^{\infty} \left(\frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}\right)' = \\
=&\sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} j t^{j+1} e^{-\lambda t} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda^j t^j}{j!} e^{-\lambda t} = \\
=&\frac{\lambda^{(n-1)+1}}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} = \\
=&\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

To rozkład Erlanga z parametrami n, λ $\square$

6.1 Statystyki pozycyjne

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ - zmienne losowe
Permutujemy, aby uzyskać ciąg niemalejący

$$\tilde{Y}_1(\omega) \leqslant \tilde{Y}_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant \tilde{Y}_n(\omega)$$
$$Y_{\alpha(1)}(\omega) \leqslant Y_{\alpha(2)}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_{\alpha(n)}(\omega)$$

Permutacja α zależy od ω
Zakładamy, że zmienne losowe $Y_1, \ldots, Y_n$ są typu ciągłego(a nawet absolutnie ciągłego) i niezależne. Z prawdopodobieństwem 1 mamy

$$\tilde{Y}_1(\omega) < \tilde{Y}_2(\omega) < \cdots < \tilde{Y}_n(\omega)$$

bo $P(Y_i = Y_j) = 0$ dla $i \neq j$
My założymy dodatkowo, że $Y_1, \ldots, Y_n$ mają ten sam rozkład.
Reasumując $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. z gęstością f_Y

$$\begin{aligned}
&f_{(\tilde{Y}_1,\ldots,\tilde{Y}_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \\
&= \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \vdots \\ \Delta t_n \to 0}} \frac{n! P(Y_1 \in [t_1, t_1 + \Delta t_1), \ldots, Y_n \in [t_n, t_n + \Delta t_n))}{\Delta t_1 \cdot \ldots \cdot \Delta t_n} = \\
&= n! \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \vdots \\ \Delta t_n \to 0}} \frac{P(Y_1 \in [t_1, t_1 + \Delta t_1))}{\Delta t_1} \cdot \frac{P(Y_2 \in [t_2, t_2 + \Delta t_2))}{\Delta t_2} \cdot \ldots \cdot \frac{P(Y_n \in [t_n, t_n + \Delta t_n))}{\Delta t_n} = \\
&= n! f_{Y_1}(t_1) \cdot f_{Y_2}(t_2) \cdot \ldots \cdot f_{Y_n}(t_n) = \\
&= n! \prod_{j=1}^{n} f_Y(t_j)
\end{aligned}$$

$$f_{(\tilde{Y}_1,\ldots,\tilde{Y}_n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{\{0 < t_1 < \cdots < t_n < t\}}$$

Twierdzenie 11
Niech $\{N(t)\}_{t \geqslant 0}$ jednorodny proces Poissona. Wówczas warunkowy rozkład momentu skoku pod warunkiem $N(t) = 1$ jest rozkładem jednostajnym na $[0, t]$.

Dowód.

$$\begin{aligned}
&P(X_1 \leqslant t_1 | N(t) = 1) = \\
=&\frac{P(X_1 \leqslant t_q \wedge N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} = \\
=&\frac{P(N(t_1) = 1 \wedge N(t) = 1)}{P(N(t) = 0)} = \\
=&\frac{P(N(t_1) = 1) P(N(t) = 1)}{P(N(t) = 0)} = \\
=&\frac{P(N(t_1) = 1) P(N(t - t_1) = 1)}{P(N(t) = 0)} = \\
=&\frac{\lambda t_1 e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t - t_1)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{t_1}{t}
\end{aligned}$$

$$F_{X_1|N(t)=1}(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t \\ 1 & x \geqslant t \end{cases}$$

□

Twierdzenie 12
Rozkład warunkowy wektora momentu skoków (zawarto...$T_1, T_2, \ldots, T_n$) pod warunkiem zdarzenia $N(t) = n$ ma gęstość $f_{(T_1,\ldots,T_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{\{0<t_1<\cdots<t_n<t\}}$. Czyli jest taki sam jak rozkład statystyk pozycyjnych dla $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. na przedziale $[0, t]$.

Dowód. Zobaczmy jak "idzie" dla $n = 2$ $f_{(T_1,T_2)}(t_1, t_2) =$?
Oczywiście $0 < t_1 < t_2 < t$

$$\begin{aligned}
&f_{(T_1,T_2)}(t_1, t_2) = \\
&= \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \Delta t_2 \to 0}} \frac{P\Big(T_1 \in [t_1, t_1 + \Delta t_1), T_2 \in [t_2, t_2 + \Delta t_2)\Big)}{\Delta t_1 \cdot \Delta t_2} = \\
&= \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \Delta t_2 \to 0}} \frac{P\Big(T_1 \in [t_1, t_1 + \Delta t_1), T_2 \in [t_2, t_2 + \Delta t_2), N(t) = 2\Big)}{\Delta t_1 \cdot \Delta t_2 P\left(N(t) = 2\right)} = \\
&= \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \Delta t_2 \to 0}} \frac{P\Big(\scriptstyle N(t_1)=0, N(t_1+\Delta t_1)-N(t_1)=1, N(t_2)-N(t_1+\Delta t_1)=0, N(t_2+\Delta t_2)-N(t_2)=1, N(t)-N(t_2+\Delta t_2)=0\Big)}{\Delta t_1 \cdot \Delta t_2 \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}} = \\
&= \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \Delta t_2 \to 0}} \frac{P\Big(N(t_1) = 0\Big) P\Big(N(t_1 + \Delta t_1) - N(t_1) = 1\Big) P\Big(N(t_2) - N(t_1 + \Delta t_1) = 0\Big)}{\Delta t_1 \cdot \Delta t_2 \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}} \cdot \\
&\cdot P\Big(N(t_2 + \Delta t_2) - N(t_2) = 1\Big) P\Big(N(t) - N(t_2 + \Delta t_2) = 0\Big) = \\
&= \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \Delta t_2 \to 0}} \frac{e^{-\lambda t_1} \cdot \lambda \Delta t_1 e^{-\lambda \Delta t_1} \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{\lambda \Delta t} \cdot e^{-\lambda \Delta t_2} \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t_2} \cdot e^{\lambda \Delta t_2}}{\frac{t^2}{2} \cdot e^{-\lambda t}} = \\
&= \frac{2!}{t^2} \mathbb{1}_{\{0<t_1<t_2<t\}}
\end{aligned}$$

□

6.2 Niejednorodny proces Poissona

$\lambda(t) \geqslant 0$ - intensywność pojawiania się zdarzeń zależny od czasu.

Definicja 21 (Niejednorodny proces Poissona)
Mówimy, że proces $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest niejednorodnym procesem Poissona z funkcją intensywności (deterministyczną) $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$. (ciągła)

- $N(0) = 0$ z pr. 1
- $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma przyrosty niezależne
- $P\Big(N(t+\Delta t) - N(t) = 1\Big) = \lambda(t)\cdot \Delta t + o(\Delta t)$
- $P\Big(N(t+\Delta t) - N(t) \geqslant 2\Big) = o(\Delta t)$

Twierdzenie 13
Jeżeli $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ *jest niejednorodnym procesem Poissona z ciągłą funkcją intensywności* $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$*, to*

$$P\Big(N(s+t) - N(t) = k\Big) = \frac{(\mu(s+t)-\mu(t))^k}{k!}e^{-(\mu(s+t)-\mu(t))}$$

To znaczy

$$\forall_{s,t>0} N(s+t) - N(t) \sim Poiss\Big(\mu(s+t)-\mu(t)\Big)$$

gdzie

$$\mu(t) = \int\limits_0^t \lambda(u)\,du$$

Dowód. Ustalmy t
$P_k(s) = P\Big(N(t+s) - N(t) = k\Big)$
Czy $P\Big(N(t+s) - N(t) = k\Big) = \frac{(\mu(s+t)-\mu(t))^k}{k!}e^{-(\mu(s+t)-\mu(t))}$?
Dowód indukcyjnie po k. Rozpoczynamy od $k = 0$

$$\begin{aligned}
&P\Big(N(t+s+\Delta s) - N(t+s) = 0 \wedge N(t+s) - N(t) = 0\Big) = \\
=&P\Big(N(t+s+\Delta s) - N(t+s) = 0\Big)P\Big(N(t+s) - N(t) = 0\Big) = \\
=&\Bigg(1 - P\Big(N(t+s+\Delta s) - N(t+s) = 1\Big) + o(\Delta s)\Bigg)\cdot P_0(s) = \\
=&\Bigg(1 - \lambda(t+s)\Delta s + o(\Delta s)\Bigg)\cdot P_0(s) = \\
=&P_0(s) - \lambda(t+s)P_0(s)\Delta s + o(\Delta s)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{P_0\left(s+\Delta t\right)-P_0(s)}{\Delta s} &= -\lambda(t+s)P_0(s)-\frac{o(\Delta s)}{\Delta s}\\
P_0'(s) &= -\lambda(t+s)P_0(s)\\
\frac{P_0'(s)}{P_0(s)} &= -\lambda(t+s)\\
\Big(\ln P_0(s)\Big)' &= -\lambda(t+s)\\
\ln P_0(s) &= -\int\limits_0^s \lambda(t+n)\,dn\\
\ln P_0(s) &= -\int\limits_t^{t+s} \lambda(n)\,dn\\
P_0(s) &= \exp\left(-\int\limits_t^{t+s} \lambda(n)\,dn\right)\\
P_0(s) &= \exp\left(-\int\limits_0^{t+s} \lambda(n)\,dn+\int\limits_0^{t} \lambda(n)\,dn\right)\\
P_0(s) &= e^{-(\mu(t+s)-\mu(t))}
\end{aligned}
$$

Dla $k=1$ formuła zachodzi. Krok indukcyjny robi się tak samo jak w przypadku jednorodnym. $\square$

Ogólnie
$\left\{\tilde{N}(t)\right\}_{t\geqslant 0}$ niejednorodny proces Poissona $\supseteq \{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ standardowy proces Poissona (jednorodny z $\lambda=1$ szczególny przypadek)
Załóżmy, że $\lambda(u)>0$, ciągłe (ewentualnie $\lambda(0)=0$)

$$
\mu(t)=\int\limits_0^t \lambda(u)\,du \xrightarrow[t\to\infty]{} \int\limits_0^\infty \lambda(u)\,du=\infty
$$

$\mu(t)$ jest funkcją $\mu(0)=0$, μ ściśle rosnące i klasy $C\left([0,\infty]\right)$

Twierdzenie 14
Jeśli $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest niejednorodnym procesem Poissona z funkcją intensywności $\lambda:[0,\infty)\to\mathbb{R}_+$ ciągłą, $\lambda(u)>0$ dla $u>0$ i $\int\limits_o^\infty \lambda(u)\,du=\infty$, to proces $N(t)\overset{df}{=}\tilde{N}(\mu^{-1}(t))$ jest niejednorodnym procesem Poissona z funkcją intensywności

$$
\lambda(t)=\mu'(t)
$$

Twierdzenie 15
Niech $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ *będzie standardowym procesem Poissona oraz* $\mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *będzie funkcją klasy* C^1*, ściśle rosnącą,* $\mu(0) = 0$*,* $\lim\limits_{t\to\infty} \mu(t) = \infty$*. Wówczas proces* $\tilde{N}(t) \overset{df}{=} N(\mu(t))$ *jest niejednorodnym procesem Poissona z funkcją intensywności*

$$\lambda(t) = \mu'(t)$$

Wniosek
Niejednorodne procesy Poissona powstają przez deterministyczne przeskalowanie czasu w standardowym procesie Poissona.

Naturalnym uogólnieniem są procesy Coxa.

$$N(t+\Delta t) - N(t) = 1 \qquad \text{z intensywnością } \lambda_t$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\tilde{N}\left(\mu^{-1}(t)\right) &= N(t)\\ \tilde{N}\left(\mu^{-1}(0)\right) &= N(0)\end{aligned}$$

$N(t)$ jest rosnące, gdyż $\tilde{N}$ jest liczący.
$N(t)$ ma przyrosty niezależne, gdyż $\tilde{N}$ ma przyrosty niezależne

$$\begin{aligned}&P\Big(N(t+s) - N(t) = k\Big) =\\ =&P\Big(\tilde{N}\left(\mu^{-1}(t+s)\right) - \tilde{N}\left(\mu^{-1}(t)\right) = k\Big) =\\ =&\frac{\left(\mu\left(\mu^{-1}(t+s)\right) - \mu\left(\mu^{-1}(t)\right)\right)^k}{k!} =\\ =&e^{-\mu\left(\mu^{-1}(t+s)\right) - \mu\left(\mu^{-1}(t)\right)} =\\ =&\frac{(t+s-t)^k}{k!}e^{-s} \sim Poiss(1)\end{aligned}$$

Niezależność przyrostów $\tilde{N}(\mu^{-1}(t))$ wynika z niezależności przyrostów $\tilde{N}T = (t)$ i faktu, że μ^{-1} jest rosnąca. $\square$