Rozdział 1

28 września 2015

Procesy stochastyczne - teoria służąca do opisu analizy (wnioskowań) zjawisk losowych ewoluujących w czasie. Wywodzą się z rachunku prawdopodobieństwa. Modelowanie rzeczywistości obarczonej niepewnością (losowością). Przeciwieństwo równań różniczkowych.

$$y' = f(y, t)$$
$$y(t) = g(t, y_0)$$

Równania różniczkowe dostarczają modeli deterministycznych. Idealizuje, możliwe w warunkach laboratoryjnych. Bardzo dużo praktycznych zagadnień nie ma charakteru deterministycznego (a jak już ma to będzie to determinizm chaotyczny). Chaos to nie to samo, co losowość. Losowość tkwi w głębi natury. Dla przykładu mechanika kwantowa.

Podstawowe elementy (pojęcia) procesów stochastycznych:
Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\left.\begin{array}{l}\Omega \text{ - zbiór zdarzeń elementarnych} \\ \omega \in \Omega \text{ - zdarzenie elementarne}\end{array}\right\} \text{pojęcia pierwotne}$$

$\mathcal{F}$ - σ-ciało podzbioru Ω

Definicja 1 (σ-ciało)
Mówimy, że rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów Ω jest σ-ciałem, jeśli spełnia:

1. $$\emptyset \in \mathcal{F}, \quad \Omega \in \mathcal{F},$$

2. $$\forall_{A \in \Omega} \left[A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^{\mathrm{c}} = \Omega \backslash A \in \mathcal{F} \right],$$

3. $$\forall_{A_1, A_2, \dots \in \Omega} \left[\forall_n A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \right],$$

Definicja 2
Mówimy, że funkcja zbioru P określona na $(\Omega, \mathcal{F})$ jest σ-addytywnym prawdopodobieństwem (miarą probabilistyczną σ-addytywną), jeżeli spełnia:

1. $$P : \mathcal{F} \to [0, 1],$$

2. $$P(\emptyset) = 0,$$

3. $$P(\Omega) = 1,$$

4. warunek σ-addytywności
$$\forall_{A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}} \left[\forall_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \right]$$

Definicja 3 (Proces stochastyczny)
Procesem stochastycznym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy rodzinę zmiennych losowych $\{X_t\}_{t \in T}$ określonych na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
T - zbiór indeksów (czasowych, gdy T interpretujemy jako czas)

Definicja 4 (Zmienna losowa)
Zmienna losowa X_t.

$$\forall_{t\in T}\forall_{B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}} X_t^{-1}(B)\in\mathcal{F}$$

X_t jest $\mathcal{F}$ mierzalne; X_t jest $\sigma(\mathcal{F},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}) mierzalna$

- $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ - σ-ciało zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$
- $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=\sigma\left(\{(\alpha,\beta):\alpha<\beta\}\right)$

  Uwaga!

$$\operatorname{card}(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}})=\mathfrak{c}<2^{\mathfrak{c}}=\operatorname{card}\left(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\right)$$

Definicja 5
Niech Ω będzie ustalonym zbiorem. Mówimy, że rodzina $\mathcal{C}$ podzbiorów Ω tworzy ciało, jeżeli spełnia:

1. $$\emptyset,\,\Omega\in\mathcal{C}$$

2. $$\forall_{A\subseteq\Omega}\left[A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^{\mathrm{c}}\in\mathcal{C}\right]$$

3. $$\forall_{A,B\in\Omega}\left[A<B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C}\right]\equiv$$
$$\equiv\left[A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{C},\quad n\in\mathbb{N}\Rightarrow\bigcup_{j=1}^{n}A_j\in\mathcal{C}\right]$$

Definicja 6
Mówimy, że funkcja zbioru μ określona na $(\Omega,\mathcal{C})$ jest miarą probabilistyczną σ-addytywną, jeśli spełnia:

1. $$\mu(\emptyset)=0$$
$$\mu(\Omega)=1$$
$$\forall_{A\in\mathcal{C}}\,0\leqslant\mu(A)\leqslant 1$$

2. $$\forall_{A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{C}}\left[\forall_{i\neq j}A_i\cap A_j=\emptyset\wedge\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{C}\Rightarrow\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n\right)\right]$$

Rozdział 2

5 Października 2015

Twierdzenie 1
Niech $\mathcal{C}$ będzie ciałem podzbiorów Ω oraz $\mu : \mathcal{C} \to [0,1]$ będzie miarą skończenie addytywną na $(\Omega, \mathcal{C})$ nieujemną i unormowaną, czyli

$$\mu(\Omega) = 1, \forall_{a \in \mathcal{C}}\ 0 \leqslant \mu(A) \leqslant 1.$$

Wówczas następujące warunki są równoważne:

(A) μ jest σ-addytywna na $(\Omega, \mathcal{C})$

(B) Ciągłość od dołu

$$\forall_{B_j \in \mathcal{C}} \forall_{B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_j\right)$$

(C) Ciągłość od góry

$$\forall_{C_j \in \mathcal{C}} \forall_{C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots} \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu\left(C_j\right) = 0$$

Dowód. (A) $\Rightarrow$ (B)
$A_1 = B_1$
$A_2 = B_2 \backslash B_1$
$\vdots$
$A_n = B_n \backslash B_{n-1}$
$\vdots$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

$$
\begin{aligned}
&\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)=\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)= \\
&=\sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(A_j\right)=\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n} \mu\left(A_j\right)= \\
&=\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)= \\
&=\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(B_n\right)
\end{aligned}
$$

(B) $\Rightarrow$ (C)
$C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$
$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n=\emptyset$
$B_n=C_n^{\mathrm{c}}=\Omega \backslash C_n$
$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right)^{\mathrm{c}}=\emptyset^{\mathrm{c}}=\Omega$

$$
\begin{aligned}
1= & \mu(\Omega)= \\
= & \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)= \\
= & \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(B_n\right)= \\
= & \lim_{n \rightarrow \infty}\left(\Omega \backslash C_n\right)= \\
= & \lim_{n \rightarrow \infty}\Big(\mu(\Omega)-\mu\left(C_n\right)\Big)= \\
= & \mu(\Omega)-\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(C_n\right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(C_n\right)=0
\end{aligned}
$$

(C) $\Rightarrow$ (A)
$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$
$\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \in \mathcal{C}$

$$
C_n=\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j=\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \backslash \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \in \mathcal{C}
$$

$C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$
$\bigcap_{j=1}^{\infty} C_n=\emptyset .$

Z (C) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0$

$$\begin{aligned}
&\mu(C_n) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) - \sum_{j=1}^{n-1} \mu(A_j) \to 0
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

Ostatecznie

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

□

Uwaga!

Warunek (C) jest bardzo wygodny do sprawdzenia.

Twierdzenie 2

Jeżeli μ jest prawdopodobieństwem σ-addytywnym na ciele $\mathcal{C}$ podzbiorów Ω, to istnieje dokładnie jedno rozszerzenie μ do miary probabilistycznej $\tilde{\mu}$ na $\sigma(\mathcal{C})$ $\{\tilde{\mu}|_{\mathcal{C}} = \mu\}$

$$(\Omega, \mathcal{C}, \mu) \rightsquigarrow (\Omega, \sigma(\mathcal{C}), \tilde{\mu})$$

Tradycyjnie $\tilde{\mu}$ piszemy μ.

Dygresja

$\Omega = \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{N}, \nu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mu(A \cap \{1, 2, \ldots, n\})}{n}$ gęstość zbioru A. Dobra miara "grubości" podzbiorów $\mathbb{N}$. Nie wszystkie podzbiory mają gęstość. Z całą pewnością ν nie jest σ-addytywna, bo $\nu(k) = 0$, $\text{card}(k) < \infty$

$$1 = \nu(\mathbb{N}) \neq \lim_{n\to\infty} \nu(\{1, 2, \dots, n\}) = 0$$

Przykład 1
$\Omega = (0, 1]$
$\mathcal{C}_{\text{przed.}} = \left\{\bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j, \beta_j] : n = 0, 1, \dots; 0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_n < \beta_n\right\}$
$F : [0, 1] \to \mathbb{R}, F$ niemalejące, prawostronnie ciągłe.

$$\mu_F\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j, \beta_j]\right) \overset{df}{=} \sum_{j=1}^{n}\Big(F(B_j) - F(\alpha_j)\Big) \geqslant 0$$

μ_F jest skończenie addytywna na $((0, 1], {}_{\text{przed.}})$, co widać z konstrukcji. Nieco trudniej dowodzi się, że μ_F jest σ-addytywna na ciele $\mathcal{C}_{\text{przed.}}$. Zatem każda funkcja niemalejąca, prawostronnie ciągła $F : [0, 1]$ definiuje miarę σ-addytywną na $((0, 1], \sigma(\mathcal{C}_{\text{przed.}}))$

Funkcje tworzące

(p.g.f. probability geometry function)

Niech $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ będzie zmienną losową ($ychX^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \subseteq \mathbb{N}$ - dowolny podzbiór) . Nową charakterystyką takich zmiennych losowych jest funkcja charakterystyczna.

Definicja 7 (Funkcja tworząca)
Funkcją tworzącą zmiennej losowej X o wartościach w $\mathbb{N}_0$ nazywamy

$$\Upsilon_X(s) = \mathbb{E}s^X \left(= \sum_{j=0}^{\infty} s^j P(X = j) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j p_j\right)$$

Pytanie: Dom(r_X)=?
r_X określona szeregiem potęgowym; pewnie analityczna. $r_X(z), z \in K(0, R)$

Twierdzenie 3
Niech $X, \tau, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$ będą zmiennymi losowymi losowymi o wartościach w $\mathbb{N}_0$ i oznaczmy $P(X = k) = p_k$, $P\left(X^{(n)} = k\right) = p_k^{(n)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Wówczas:

1. *dom(Υ_X) $\supseteq [-1, 1]$ (W przypadku dziedziny zespolonej $\overline{K}(0, 1)$)*
   Υ_X jest niemalejąca i wypukła na $[0, 1]$oraz klasy C^∞ na $(-1, 1)$

2. $\Upsilon_X(1) = 1$

3.

$$\begin{aligned} \Upsilon'_X(0) &= P\left(X = 1\right) = p_1 \\ \Upsilon''_X(0) &= 2 \cdot P\left(X = 2\right) = 2p_2 \\ &\vdots \\ \Upsilon^{(k)}_X(0) &= k! \cdot P\left(X = k\right) = k!p_k \end{aligned}$$

4. *Dla* X

$$\mathbb{E}X^n < \infty \Leftrightarrow \lim_{n \to 1^-} \Upsilon^{(n)}_X(s) = \Upsilon^{(n)}_X(1^-) < \infty$$

Co więcej

$$\Upsilon^{(n)}_X(1^-) = \mathbb{E}X(X-1)\cdots(X-n+1)$$
n-ty moment faktorialny

W szczególności

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \Upsilon'_X(1^-) \\ \mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}X(X-1) + \mathbb{E}X &= \Upsilon''_X(1^-) + \Upsilon'_X(1^-) \end{aligned}$$

5. *Jeżeli* x *i* Y *są niezależne o wartościach w* $\mathbb{N}_0$*, to* $\Upsilon_{X+Y}(s) = \Upsilon_X(s)\Upsilon_Y(s)$

6. *Jeżeli* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ *są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i o wartościach w* $\mathbb{N}_0$ *i podobnie* τ *i dodatkowo ciąg* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ *i* τ *są niezależne, to dla*

$$U = \sum_{j=1}^{\tau} X^{(j)}$$

mamy

$$\Upsilon_U(s) = \Upsilon_\tau\Big(\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\Big)$$

7. *Dla dowolnego ciągu zmiennych losowych (niekoniecznie niezależnych)* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ *i zmiennej losowej* X *o wartościach w* $\mathbb{N}_0$ *następujące warunki są równoważne:*

   (a) $\forall_{k \in \mathbb{N}_0} \lim_{n \to \infty} P\left(X^{(n)} = k\right) = P\left(X = k\right)$

(b) $X_n \overset{\mathcal{D}}{\Rightarrow} X$ *(zbieżność słaba)*

(c) $\forall_{s\in[0,1]} \lim\limits_{n\to\infty} \Upsilon_{X^{(n)}}(s) = \Upsilon_X(s)$

Dowód.

2. $\Upsilon_X(1) = \mathbb{E}1^X = \mathbb{E}1 = 1$

1.

$$\Upsilon_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^X p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

ten szereg potęgowy jest zbieżny dla $s = 1$ nawet bezwzględnie.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |p_k| \, |s|^k\right)_{s=1}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \left|z^k\right| < \infty$$

$\Upsilon_X(z)$ jest dobrze określone na $|z| \leqslant 1$.
Υ_X jest funkcją analityczną (co najmniej) na $\{z : |z| < 1\}$, a stąd wynika, że Υ_X jest ciągła na $[-1, 1]$ i ma ciągłe pochodne na $(-1, 1)$.
$\Upsilon_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \geqslant 0$ na $[0, 1]$
$\Upsilon'_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k s^{k-1} \geqslant 0$ - niemalejąca na $[0, 1]$
$\Upsilon''_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-1} \geqslant 0$ dla $s \in [0, 1]$
Reasumując Υ_X jest nieujemna, niemalejąca, wypukła na $[0, 1]$.

$P\left(\{X + 0\} \cup \{X = 1\}\right) = 1$	$\Upsilon_X(s) = p_0 + p_1 \cdot s$
$P\left(X \geqslant 2\right) > 0$	Υ_X ściśle wypukła

3.

$$\Upsilon_X^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k}\left(\sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j\right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-k+1) p_j s^{j-k} = \sum_{j=k}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-k+1) p_j s^{j-k}$$

$$\Upsilon_X^{(k)}(0) = k(k-1)\cdots(k-k+1) p_k = k! p_k \Rightarrow p_k = P\left(X = k\right) = \frac{\Upsilon_X}{k!}$$

4.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}X = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\left(X = k\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot 1^k = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot s^k \right)_{s=1} = \\
&= \lim_{n \to 1^-} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot s^k \right) = \\
&= \lim_{n \to 1^-} \Upsilon'_X(s)
\end{aligned}
$$

Analogicznie

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}X(X+1)\cdots(X-n+1) = \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)p_k \cdot 1^{k-n+1} = \\
&= \lim_{n \to 1^-} \Upsilon_X^{(n)}(s)
\end{aligned}
$$

Uwaga!

$$
\mathbb{E}X^n < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}\Big(X(X-1)\cdots(X-n+1)\Big) < \infty
$$

5. X, Y niezależne zmienne losowe o wartościach w $\mathbb{N}_0$

$$
\Upsilon_{X+Y}(s) = \mathbb{E}s^{X+Y} = \mathbb{E}s^X \cdot s^Y = \mathbb{E}s^X \cdot \mathbb{E}s^Y = \Upsilon_X^{(s)} \Upsilon_Y^{(s)}
$$

6. $V = \sum_{j=1}^{\tau} X^{(j)}$, ustalmy $\sum_{j=1}^{0} \dots = 0$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_V(s) = \mathbb{E}s^V = \int\limits_{\Omega} s^V \, dP = \\
=\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\{\tau=n\}} s^{\sum_{j=1}^{\tau} x^{(j)}} \, dP = \\
= \int\limits_{\{\tau=0\}} s^{\sum_{j=1}^{0} x^{(j)}} \, dP + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\{\tau=n\}} s^{\sum_{j=1}^{\tau} x^{(j)}} \, dP = \\
=1 \cdot P(\tau = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \, dP \int\limits_{\Omega} s^{\sum_{j=1}^{\tau} x^{(j)}} \, dP = \\
=1^0 \cdot P(\tau = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n) \, \Upsilon_{\sum_{j=1}^{\tau} x^{(j)}}(s) = \\
=P(\tau = 0) \cdot s^0 + \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n) \left[\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\right]^n = \\
=P(\tau = 0) \cdot \left(\Upsilon_X^{(1)}(s)\right)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n) \left[\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\right]^n = \\
=\Upsilon_\tau\left(\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\right) = \Upsilon_\tau \circ \Upsilon_{X^{(1)}}(s)
\end{aligned}$$

$\square$

Rozdział 3

12 października 2015

Dowód. 7. (a)$\Rightarrow$ (b)

$$P\left(X^{(n)} \leqslant t\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(X \leqslant t\right)$$

w każdym punkcie t, w którym F_X jest ciągła; dla $t < 0$ jasne, bo $0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\begin{aligned}
&P\left(X^{(n)} \leqslant t\right) = \\
=&P\left(X^{(n)} \leqslant \lfloor t \rfloor\right) = \\
=&\sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} P\left(X^{(n)} = k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} P\left(X \leqslant \lfloor t \rfloor\right) = \\
=&P\left(X \leqslant t\right)
\end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (c)
$\Upsilon_{X^{(n)}}(s) = \mathbb{E}s^{x^{(n)}}$

$$g_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \leqslant 0 \\ s^t & \text{dla } t > 0 \end{cases} \quad \text{dla } 1 \geqslant s > 0$$
$$g_0(t) = 1 - 2t$$

$\forall_{s\in[0,1]} g_s$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną

$$X \overset{\mathcal{D}}{\Rightarrow} X \Leftrightarrow \forall_{g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \mathbb{E}g\left(X^{(n)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}g(X)$$

Dla każdego $s \in [0,1]$ g jest funkcją ciągłą i ograniczoną.

$$\mathbb{E}g_s\left(X^{(n)}\right) = \mathbb{E}s^{X^{(n)}} = \Upsilon_{X^{(n)}}(s)$$
$$\mathbb{E}g_s\left(X\right) = \Upsilon_X(s)$$
$$\mathbb{E}g_0\left(X^{(n)}\right) = 1 \cdot P\left(X^{(n)} = 0\right) + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot P\left(X^{(n)} = k\right) =$$
$$=\Upsilon_{X^{(n)}}(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}g_0(X) = \dots = \Upsilon_X(0)$$

(c) $\Rightarrow$ (a)
Mamy $\Upsilon_{X^{(n)}}(s) \to \Upsilon_X(s)$ dla $s \in [0,1]$
Podstawmy $s = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot P\left(X^{(n)} = k\right)\Bigg|_{s=0} = P\left(X^{(n)} = n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{c)} \Upsilon_X(0)$$
$$P_0^{(n)} \to P_0$$

Szkic

$$p_1^{(n)} = P\left(X^{(n)} = 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(X = 0\right)?$$
$$\Upsilon_{X^{(n)}}(s) = P\left(X^{(n)} = 0\right) + P\left(X^{(n)} = 1\right)s + P\left(X^{(n)} = 2\right)s^2 + \dots$$
$$\Upsilon_X(s) = P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right)s + P\left(X = 2\right)s^2 + \dots$$
$$\forall_{s\in[0,1]} \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X^{(n)} = k\right)s^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X = k\right)s^k$$
$$\forall_{s\in[0,1]} s\sum_{k=1}^{\infty} P\left(X^{(n)} = k\right)s^{k-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} s\sum_{k=1}^{\infty} P\left(X = k\right)s^{k-1}$$

o, ile $0 \leqslant s \leqslant 1$, to uprośćmy

$$\forall_{s\in[0,1]} \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X^{(n)} = k\right)s^{k-1} =$$
$$=P\left(X^{(n)} = 1\right) + P\left(X^{(n)} = 2\right)s + \dots + P\left(X^{(n)} = k\right)s^{k-1} + \dots \xrightarrow[n\to\infty]{}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right)s + \dots + P\left(X = k\right)s^{k-1} + \dots$$

mogą być dowolnie małe biorąc małe $s \in (0,1]$. W takim razie, gdy $n \to \infty$ mamy

$$P\left(X^{(n)} = 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(X = 0\right)$$
$$P\left(X^{(n)} = 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(X = 1\right)$$

dalej indukcyjnie

$$\forall_{k\in\mathbb{N}_0} P\left(X^{(n)} = k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(X = k\right)$$

$\square$

3.1 Funkcja generujaca momenty (Moment generating function)

Definicja 8
Niech X będzie zmienną losową określoną na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Funkcją generującą momenty nazywamy funkcję

$$M_X(s) = \mathbb{E}e^{sX} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}\, dF_X(x)$$

Wtrącenie

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X(x)\, dx$, gdy X ma gęstość f_X

$\sum_{k=1}^{\infty} e^{sx_k} P\left(X = x_k\right)$, gdy X jest typu dyskretnego

Wadą jest fakt, że $\mathrm{Dom}(M_x)$ może być mała lub trudna do określenia. Np. może się zdarzyć, że $\mathrm{Dom}(M_X) = \{0\}$, ale zawsze $0 \in \mathrm{Dom}\left(M_X\right)$

Fakt

$$M_X(0) = \mathbb{E}e^{0 \cdot X} = \mathbb{E}e^0 = \mathbb{E}1 = 1$$

Chcielibyśmy, aby $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathrm{Dom}\left(M_X\right)$

Twierdzenie 4
Niech zmienna losowa $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$ ma własność $Dom(M_X) \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$ dla $\varepsilon > 0$. Wówczas

$$M_X'(0) = \mathbb{E}X$$
$$M_X''(0) = \mathbb{E}X^2 itd.$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
&M_X'(x) = \\
&= \lim_{n\to 0} \frac{M_X(x+h) - M_X(x)}{h} = \\
&= \lim_{n\to 0} \frac{\mathbb{E}e^{(x+h)X} - \mathbb{E}e^{xX}}{h} = \\
&= \lim_{n\to 0} \mathbb{E}\frac{e^{(x+h)X} - e^{xX}}{h} = \\
&=\mathbb{E} \lim_{n\to 0} \frac{e^{(x+h)X} - e^{xX}}{h} = \\
&=\mathbb{E}Xe^{xX}
\end{aligned}$$

$$M'_X(0) = \Big(M'_X(x)\Big)_{x=0} = \mathbb{E}Xe^{0X} = \mathbb{E}X$$

Indukcyjnie dla wyższych momentów. $\square$

Twierdzenie 5
Jeżeli zmienne losowe X, Y są niezależne to

$$M_{X+Y}(x) = M_X(x) \cdot M_Y(x)$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
&M_{X+Y}(x) = \\
=&\mathbb{E}e^{x(X+Y)} = \\
=&\mathbb{E}e^{xX+xY} = \\
=&\mathbb{E}\underbrace{e^{xX}e^{xY}}_{\text{niezależne}} = \\
=&\mathbb{E}e^{xX} \cdot \mathbb{E}e^{xY} = \\
=&M_X(x)M_Y(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Wniosek
Jeżeli $X_1, \ldots, X_k$ to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, to

$$M_{\sum_{j=1}^k X_j}(x) = [M_{X_1}(x)]^k$$

Uwaga!
Jeżeli X i Y mają ten sam rozkład, to oczywiście

$$M_X = M_Y$$

Przykład 2
Wyznacz M_X, gdy $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$

$$\begin{aligned}
&M_X(x) = \\
=&\mathbb{E}e^{xX} = \\
=&\sum_{k=0}^{\infty} e^{xk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \\
=&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda} = \\
=&e^{e^x\lambda} \cdot e^{-\lambda} = \\
=&e^{\lambda(e^x-1)}
\end{aligned}$$

$\mathrm{Dom}(M_{\mathrm{Poiss}}) = \mathbb{R}$
$\mathbb{E} = M_X'(0)$

$$
\begin{aligned}
M_X'(x) &= \left(e^{\lambda(e^x-1)}\right)' = e^{\lambda(e^x-1)} \cdot (\lambda \cdot e^x) \\
M_X''(x) &= \left(e^{\lambda(e^x-1)} \cdot (\lambda \cdot e^x)\right)' = \lambda \left(e^{\lambda(e^x-1)} \cdot \lambda e^x \cdot e^x + e^{\lambda(e^x-1)} \cdot e^x\right) \\
M_X''(0) &= \lambda(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda = \mathbb{E}X^2 \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}
$$

Przykład 3
$X \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$

$$
\begin{aligned}
M_X(x) = \mathbb{E}e^{xX} &= \int\limits_0^{+\infty} e^{xt}\alpha e^{-\alpha t}\, dt = \alpha \int\limits_0^{\infty} e^{(x-\alpha)t}\, dt = \\
&= \frac{\alpha}{x-\alpha} e^{(x-\alpha)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{-\alpha}{x-\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - x}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{Dom} M_{\mathrm{Exp}(\alpha)} = (-\infty, \alpha)$

$$
\begin{aligned}
M_X'(x) &= \frac{\alpha}{(x-\alpha)^2} & M_X'(0) &= \mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \\
M_X''(x) &= \frac{2\alpha}{(\alpha-x)^3} & M_X''(0) &= \mathbb{E}X^2 = \frac{2\alpha}{\alpha^3} = \frac{2}{\alpha^2}
\end{aligned}
$$

itd.

3.2 Uwagi o teorii niezawodności

Niech czas pracy bezawaryjnej urządzenia opisany będzie zmienną losową $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to [0, \infty)$

Definicja 9 (Funkcja niezawodności)
Funkcją niezawodności urządzenia nazywamy

$$R_X(t) = \overline{F}(t) = P\left(X > t\right) \text{ dla } t \in [0, \infty]$$

Uwaga!
$P\left(X = 0\right) = 0$ to nasze upraszczające założenie.

Definicja 10
Niech X będzie nieujemną zmienną losową. Mówimy, że X ma własność braku pamięci, jeżeli

$$\forall_{s,t \geqslant 0}\, P\left(X > s + t | X > t\right) = P\left(X > s\right)$$

Twierdzenie 6
Nieujemna zmienna losowa X ma własność braku pamięci wtedy i tylko wtedy, gdy ma rozkład wykładniczy.

Dowód. $\Leftarrow$
Zakładamy, że $X \sim \text{Exp}$, $P\left(X > t\right) = e^{-\alpha t}$

$$\begin{aligned} P\left(X > t+s | X > t\right) =& \frac{P\left(X > t+s \wedge X > t\right)}{P\left(X > t\right)} = \\ =& \frac{P\left(X > t+s\right)}{P\left(X > t\right)} = \\ =& \frac{e^{-\alpha(t+s)}}{e^{-\alpha}} = \\ =& e^{-\alpha s} = \\ =& P\left(X > s\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$
Zakładamy, że X ma własność braku pamięci

$$\begin{aligned} P\left(X > t+s | X > t\right) =& P\left(X > s\right) \\ \frac{P\left(X > t+s \wedge X > t\right)}{P\left(X > t\right)} =& P\left(X > s\right) \\ P\left(X > s+t\right) =& P\left(X > s\right) P\left(X > t\right) \\ \overline{F}_X(s+t) =& \overline{F}_X(s)\overline{F}_X(t) \text{ dla } s,t \geqslant 0 \end{aligned}$$

Mamy równanie funkcyjne dla $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\forall_{s,t\geqslant 0}\ g(t+s) = g(t)g(s)$$

$g(t) = \overline{F}(t)$ ograniczona, prawostronnie ciągła oraz $\overline{F}(0) = 1$ i $\lim\limits_{x\to\infty} \overline{F}(x) = 0$
Odrzucamy trywialne rozwiązania równania $g \equiv 0,\ g \equiv 1$

$$\begin{aligned} g(2s) &= g(s+s) = g(s)\cdot g(s) = g(s)^2 \geqslant 0 \\ g(1) &= \underbrace{\left(\tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{m} + \cdots + \tfrac{1}{m}\right)}_{m \text{ razy}} = g\left(\tfrac{1}{m}\right) g\left(\tfrac{1}{m}\right) \cdots g\left(\tfrac{1}{m}\right) = \left[g\left(\tfrac{1}{m}\right)\right]^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(\tfrac{1}{m}\right) &= g(1)^{\frac{1}{m}} \\ g\left(\tfrac{k}{m}\right) &= \underbrace{\left(\tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{m} + \cdots + \tfrac{1}{m}\right)}_{k \text{ składników}} = g\left(\tfrac{1}{m}\right) g\left(\tfrac{1}{m}\right) \cdots g\left(\tfrac{1}{m}\right) = \\ &= g\left(\tfrac{1}{m}\right)^k = \left[g\left(1\right)\right]^k = g\left(1\right)^{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Gdyby $g(1) = 0 \Rightarrow g\left(\frac{1}{m}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} g\left(\frac{1}{m}\right) = 0$, ale $g(0) = 1$
Zatem $g(1) > 0$.
Gdyby $g(1) > 1 \Rightarrow g(k) = g(1)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, ale $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$
Zatem $0 < g(1) < 1$. Przyjmijmy, że $g(1) = e^{-\alpha}$ dla pewnego $\alpha > 0$. Wtedy $g\left(\frac{k}{m}\right) = \left(e^{-\alpha}\right)^{\frac{k}{m}} = e^{-\alpha\frac{k}{m}}$
Dla dowolnego $x \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k^{(n)}}{m^{(n)}}$ $\left(\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\right)$

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{k^{(n)}}{m^{(n)}}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{-\alpha\frac{k^{(n)}}{m^{(n)}}}$$

$\forall_{x\geqslant 0}\ 1 - F(x) = \overline{F}(x) = e^{-\alpha x}; X \sim \text{Exp}$ $\square$

Uwaga!
W dziedzinie $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ jedynym rozkładem o własności braku pamięci jest rozkład geometryczny.

Definicja 11
Niech X będzie zmienną losową opisującą czas pracy bezawaryjnej. Intensywnością awarii nazywamy funkcję $\lambda_X : [0, \infty) \to [0, \infty)$

$$\lambda_X(t) = \frac{f_X(t)}{\overline{F}_X(t)} = \frac{f_X(t)}{R_X(t)} = -\frac{R_X'(t)}{R_X(t)}$$

$R_X' = (1 - F_X)' = -F_X' = -f_X$

Uwaga!
λ_X jest określona tylko dla zmiennych losowych absolutnie ciągłych.

W medycynie mówimy o intensywności śmierci albo ogólniej o funkcji hazardu. Rozkład (gęstość) wyznacza jednoznacznie funkcję intensywności awarii.

$$\lambda_X(t) = \frac{f_X(t)}{P\left(x > t\right)} = \frac{f_X(t)}{\int\limits_t^\infty f_X(u)\,du}$$

Interpretacja funkcji intensywności awarii.

$$\lim_{\Delta\to 0^+} \frac{P\left(t < X \leqslant t + \Delta T | X > t\right)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{\frac{P(X_t \in (t, t+\Delta t] \wedge X_t > t)}{R_X(t)}}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{\frac{P(X_t \in (t, t+\Delta t])}{\Delta t}}{R_X(t)} =$$
$$= \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{\frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} f_X(u)\, du}{R_X(t)} =$$
$$= \frac{f_X(t)}{R_X(t)}$$

Rozdział 4

19 października 2015

Twierdzenie 7
Funkcja intensywności awarii wyznacza jednoznacznie F_X. ($F_X \leftrightsquigarrow \lambda_X$)

Dowód.

$$\lambda_X = -\frac{R'_x}{R_X} = -\left(\ln R_X\right)'$$

$$\Lambda_X(x) = \int\limits_0^x \lambda_X(u)\, du = -\int\limits_0^x \left(\ln R_X\right)\, du = -\ln R_X|_0^x = -\ln R_X(x) + \ln \overbrace{R_X(0)}^{=1}$$

$$R_X(x) = e^{-\int\limits_0^x \lambda_X(u)\, du}$$
$$F_X(x) = 1 - e^{-\int\limits_0^x \lambda_X(u)\, du}$$

□

Definicja 12
Jeżeli urządzenie opisane jest funkcją intensywności awarii λ_X, to

1. mówimy, że urządzenie starzeje się, gdy $\lambda_X \nearrow$ jest funkcją rosnącą
2. mówimy, że urządzenie dociera się, gdy $\lambda_X \searrow$ jest funkcją malejącą

Uwaga!

$$\lambda_X = \text{const} \Leftrightarrow X \sim \text{Exp}$$

4.1 Klasyczne rozkłady w teorii niezawodności

Definicja 13
Mówimy, że nieujemna zmienna losowa X ma rozkład Weibulla, gdy

$$F_X(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\beta} \qquad t \geqslant 0 \qquad \lambda, \beta > 0$$
$$R_X(t) = e^{-(\lambda t)^\beta} \qquad t \geqslant 0 \qquad \lambda, \beta > 0$$

Dla rozkładu Weibulla

$$\lambda_X(t) = \frac{\lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}e^{-(\lambda t)^\beta}}{e^{-(\lambda t)^\beta}} = \lambda^\beta \beta t^{\beta-1}$$

Układ docierа się, gdy $\beta < 1$
Układ starzeje się, gdy $\beta > 1$

$$\mathrm{Weib}_{\lambda,1} = \mathrm{Exp}(\lambda)$$

W praktyce inżynierskiej

$$F_X(t) = \alpha_1 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{-\lambda_2 t} + \alpha_3 \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{t-m}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$

Czyli mieszane rozkłady Exp $\not\sim$ Exp $\not\sim$ Γ

4.2 Formalne definicje z teorii procesów stochastycznych

Definicja 14
Niech $T(\neq \emptyset)$ będzie zbiorem indeksów. Procesem stochastycznym indeksowanym elementami zbioru T nazywamy rodzinę $\{X_t : t \in T\}$ zmiennych losowych (ogólniej elementów losowych) określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Jeżeli $\mathrm{card}(T) < \infty$ albo $\mathrm{card}(T) = \aleph_0$, to mówimy o procesach z indeksem dyskretnym. Jeżeli $\mathrm{card}(T) = \mathfrak{c}$, to mówimy, o procesach nad indeksami "ciągłymi".
T identyfikujemy z biegnącym czasem
$T = \{0, 1, \ldots, N\}$ albo $T = \{1, 2, \ldots, N\}$ albo $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ albo $T = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ - procesy z czasem dyskretnym.
$T = [a, b], [a, \infty), (-\infty, 0], (-\infty, +\infty)$ - procesy z czasem ciągłym
$\mathfrak{X} = \{X_t : t \in T\}$ - matematyczny opis (model) ewolucji w czasie

Definicja 15
Dla ustalonego procesu stochastycznego $\mathfrak{X} = \{X_t : t \in T\}$ trajektorią (realizacją) odpowiadają zdarzeniu elementarnemu $\omega \in \Omega$ nazywamy funkcję
$T \ni t \to X_t(\omega) \in \mathbb{R}$

Przykład 4
W urnie mamy 1 kulę białą i 1 kulę niebieską. Po wylosowaniu jednej kuli zwracamy ją do urny dodając jedną kulę w wylosowanym kolorze (po n-tym losowaniu mamy w urnie $2 + n$ kul). Procesy stochastyczne na tym mechanizmie (losowym). ($\equiv$ procesy urnowe).

1. X_n - liczba kul białych w urnie po n-tym losowaniu

$$\begin{aligned}
&X_0 = 1 \\
&X_1 = \left(P\left(X_1 = 1\right) = P\left(X_1 = 2\right) = \frac{1}{2}\right) \\
&X_3 \in \{1, 2, 3\}, \ldots
\end{aligned}$$

   $\mathfrak{X} = \{X\}_{n=0}^{\infty}$ - proces stochastyczny z czasem dyskretnym,
   $T = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}_0$

2.

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{gdy kula wylosowana w } n\text{-tym ciągnięciu jest niebieska} \\ 3 & \text{gdy kula wylosowana w } n\text{-tym ciągnięciu jest biała} \end{cases}$$

   $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad T = \{1, 2, \ldots\}$

3. $Z_n =$ liczba wylosowanych kul białych w ciągnięciach $1, 2, \ldots, n$

4. Zrób to sam(a)

4.3 Spacer losowy na grupie

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ciąg Berboulliego niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie

$$P\left(\xi_j = 1\right) = P\left(\xi_j = -1\right) = \frac{1}{2}$$

X_0 niezależna zmienna losowa od ciągu $(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ o wartościach w $\mathbb{Z}$.
Spacerem losowym nazywamy

$$S_{X_{0,n}} = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n = X_0 + \sum_{j=1}^{b} \xi_j$$

Zauważmy, że

$$P\left(S_{X_{0,n+1}} - S_{X_{0,n}} = \pm 1\right) = P\left(\xi_{n+1} = \pm 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$P\left(S_{X_{0,n+1}} = j | S_{X_{0,n}=i} = \pm 1\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \text{gdy } |i-j| = 1 \\ 0 & , \text{gdy } |i-j| \neq 1 \end{cases}$$

Uwaga!
Jeżeli $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t\in T}$ jest procesem stochastycznym, to $Y_t = g_t(X_t), \quad t \in T$ jest też procesem stochastycznym $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (funkcja borelowska).

Definicja 16
Niech $\mathfrak{X} = \{X_t : t \in T\} = \{X_t\}_{t\in T}$ będzie procesem stochastycznym określonym na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, przy czym $T = \mathbb{Z}$ albo $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+$. Mówimy, że $\mathfrak{X}$ ma przyrosty:

- niezależne, gdy

  $$\forall_{n\in N} \forall_{t_j \in T} \forall_{t_0 < t_1 < \dots < t_n} X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

  są zmiennymi losowymi niezależnymi

- jednorodne, gdy

  $$\forall_{t_1, t_2 \in T; t_1 < t_2} \forall_{t_1+h, t_2+h \in T} (X_{t_2} - X_{t_1}) \sim (X_{t_2+h} - X_{t_1+h})$$

- stacjonarne, gdy

  $$\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{t_1, t_2 \in T; t_1 < t_2} \forall_{t_1+h, t_2+h \in T}$$
  $$\left(X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right) \sim \left(X_{t_1+h} - X_{t_0+h}, \dots, X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h}\right)$$

Uwaga!
Stacjonarność przyrostów implikuje jednorodność przyrostów.

Definicja 17
Niech $\mathfrak{X} = \{X_t : t \in T\}$ będzie procesem stochastycznym określonym na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ przy czym $T = \mathbb{Z}$ albo $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+$. Mówimy, że proces $\mathfrak{X}$ jest stacjonarny, gdy

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{t_j \in T} \forall_{t_0 < t_1 < \dots < t_n} \forall_{h: t_0+h, \dots, t_n+h \in T} \left(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\right) \sim \left(X_{t_0+h}, X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}\right)$$

Oznaczenia
$\mu_{t_0,t_1,\dots,t_n} \overset{ozn.}{=} \mu_{\left(X_{t_0},X_{t_1},\dots,X_{t_n}\right)}$ - rozkład wektora losowego
$(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2 \dots$
μ_t - rozkład X_t losowych o tym samym, czyli rozkład jednowymiarowy
$\mu_{r,t}$ rozkład (X_r, X_t), czyli rozkład dwuwymiarowy itd.
$F_{t_0,t_1,\dots,t_n} \overset{ozn.}{=} F_{\left(X_{t_0},X_{t_1},\dots,X_{t_n}\right)}$

Definicja 18
Jeżeli $\mathfrak{X} = \{X_t : t \in T\}$ jest procesem stochastycznym, to rozkładem skończenie wymiarowym odpowiadającym wyborowi indeksów $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in T^n$ nazywamy rozkład wektora losowego $(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. Oznaczam

$$\mu_{(t_1,t_2,\ldots,t_n)} \stackrel{df}{=} \mathcal{L}\left((X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})\right) \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Rodziną rozkładów skończenie wymiarowych procesów $\mathfrak{X} = \{X_t : t \in T\}$ nazywamy

$$\mathcal{M}^{\mathfrak{X}} = \left\{\mu_{(t_1,t_2,\ldots,t_n)} : t_1, t_2, \ldots, t_n \in T, n = 1, 2, \ldots\right\}$$

Uwaga!
Zmienną losową X charakteryzuje F_X
Wektor losowy $\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ charakteryzuje $F_{\overrightarrow{X}}$ dystrybuanta łączna n-wymiarowa.
Proces stochastyczny $\mathfrak{X}$ charakteryzuje $\mathcal{M}^{\mathfrak{X}}$

Lemat 1
Proces $\mathfrak{X} = \{X_t : t \in T\}$ o przyrostach niezależnych ma przyrosty stacjonarne wtedy i tylko wtedy, gdy ma przyrosty jednorodne.

Dowód.
"$\Rightarrow$" jasne
"$\Leftarrow$"
Wybieramy $t_0 < t_1, < \cdots < t_n \in T$ oraz h "dowolne", takie, że
$t_0 + h, t_1 + h, \ldots, t_n + h \in T$

$$\begin{aligned}
&\mu_{\left(X_{t_1}-X_{t_0}, X_{t_2}-X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}}\right)} = \\
=&\mu_{\left(X_{t_1}-X_{t_0}\right)} \otimes \mu_{\left(X_{t_2}-X_{t_1}\right)} \otimes \cdots \otimes \mu_{\left(X_{t_n}-X_{t_{n-1}}\right)} \stackrel{jed.}{=} \\
=&\mu_{\left(X_{t_1+h}-X_{t_0+h}\right)} \otimes \mu_{\left(X_{t_2+h}-X_{t_1+h}\right)} \otimes \cdots \otimes \mu_{\left(X_{t_n+h}-X_{t_{n-1}+h}\right)} = \\
=&\mu_{\left(X_{t_1+h}-X_{t_0+h}, X_{t_2+h}-X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h}-X_{t_{n-1}+h}\right)}
\end{aligned}$$

□

Rozdział 5

26 października 2015

Definicja 19 (Proces Poissona)
Mówimy, że proces $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ określony na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest procesem liczącym, jeżeli

1. $N_0 = 0$

$$\forall_{\omega\in\Omega}\forall_{t\in T} N_T(\omega) \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

2.

$$\forall_{0\leqslant s<t}\forall_{\omega\in\Omega}\ N_s(\omega) \leqslant N_t(\omega)$$

3. $\forall_{0\leqslant s<t}\ N_t(\omega) - N_s(\omega)$ reprezentuje liczbę zdarzeń jakie zaszły na odcinku czasowym $(s, t]$.

Definicja 20 (Proces jednorodny)
Mówimy, że proces liczący $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ określony na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$jest jednorodnym procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$ - liczba, jeżeli spełnia

i $N(0) = 0$ z prawdopodobieństwem 1

ii $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ ma przyrosty niezależne

iii $\forall_{0\leqslant s<t}\ N_t(\omega) - N_s(\omega)$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda(t - s)$

$$\left[\forall_{k\in\{0,1,2,\dots\}}\ P\Big(N(t) - N(s) = k\Big) = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k} e^{-\lambda(t-s)}\right]$$

Uwaga!
(iii) implikuje, że przyrosty są jednorodne

$$N(t+h)-N(s+h) \sim Poiss\Big(\lambda(t+h-(s+h))\Big) = Poiss\Big(\lambda(t-s)\Big) \sim N(t)-N(s)$$

Zatem (iii) w połączeniu z (ii) mamy proces o przyrostach stacjonarnych (niezależnych).
Uwaga!

$$\mathbb{E}N(t) = \lambda t$$
$$\mathrm{Var}N(t) = \lambda t$$

Twierdzenie 8
Niech $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ będzie procesem liczącym określonym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Wówczas $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ jest jednorodnym procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia

1. $N(0) = 0$ *z pr. 1*
2. $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ *ma jednorodne i niezależne przyrosty*
3. $$P\Big(N(h)=1\Big) = \lambda\cdot h + o(h)$$
$$\left[\frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0\right]$$
4. $$P\Big(N(h)\geqslant 2\Big) = P\Big(N(h)=2 \vee N(h)=3 \vee \dots\Big) = o(h)$$

Dowód. $\Rightarrow$
(i)$\equiv$(1)
$(ii)+(iii) \Rightarrow (2)$

$$P\Big(N(h)=1\Big) \overset{(iii)}{=} \frac{(\lambda h)^1}{1!}e^{-\lambda h} = \lambda h e^{-\lambda h}$$

3)

$$P\Big(N(h)=1\Big) - \lambda h \overset{?}{=} o(h)$$
$$\frac{\lambda h e^{-\lambda h} - \lambda h}{h} = \lambda\left(e^{-\lambda h}-1\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \left(e^{-\lambda 0}-1\right) = 0$$

4)

$$\frac{P\Big(N(h) \leqslant 2\Big)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{?} 0$$
$$\frac{1 - P\Big(N(h)=0\Big) - P\Big(N(h)=1\Big)}{h} \overset{(iii)}{=} \frac{1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h}}{h}$$

Stosując regułę de l'Hospitala

$$\lim_{h\to 0} \frac{P\Big(N(h) \leqslant 2\Big)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda e^{-\lambda h} - \lambda\left(e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h}\right)}{1} = \lim_{h\to 0} \lambda^2 h e^{-\lambda h} = 0$$

$\Leftarrow$
(i)≡(1)
(2)⇒(ii)
Jak pokazać (iii)? $P_n(t) = P\Big(N(t) = n\Big) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$
Etapami

$$P_0(t) = P\Big(N(t) = 0\Big) \overset{?}{=} e^{-\lambda h} = \frac{(\lambda h)^0}{0!} e^{\lambda h}$$

$$\begin{aligned}
P_0(t+h) =& P\Big(N(t+h) = 0\Big) = \\
=& P\Big(N(t) = 0 \wedge N(t+h) - N(t) = 0\Big) \overset{N(t) \perp\!\!\!\perp N(t+h)}{=} \\
=& P\Big(N(t) = 0\Big) P\Big(N(t+h) - N(t) = 0\Big) \overset{(2)}{=} \\
=& P_0\,(t) \cdot P\Big(N(h) = 0\Big) \overset{(3)}{=} \\
=& P_0\,(t) \cdot \Big(1 - P\Big(N(h) = 1\Big) - P\Big(N(h) \geqslant 2\Big)\Big) = \\
=& P_0(t)\,(1 - \lambda h - o(h) - o(h)) = \\
=& P_0(t) - \lambda P_0(t) h - 2o(h) P_0(t) = \\
=& P_0(t) - \lambda P_0(t) h - o(h)
\end{aligned}$$

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) - \frac{o(h)}{h}$$
$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

z warunkiem $P_0(0) = P\Big(N(0) = 0\Big) = 1$
$P_0(t) = e^{\lambda t}$
$P_0(0) = P\Big(N(0) = 0\Big) = \frac{(\lambda h)^0}{0!} e^{\lambda h}$

Indukcyjnie pokazuje się, ze

$$\forall_{n\geqslant 0}\, P\Big(N(t)=n\Big)=\frac{(\lambda h)^n}{n!}e^{\lambda h}$$

Pokazaliśmy, już I krok indukcyjny i formuła zachodzi dla n=0.

$$\begin{aligned}
P_n(t+h)=&P\Big(N(t+h)=n\Big)=\\
=&P\Big(\{N(t)=n\wedge N(t+h)-N(t)=0\}\,\dot\cup\\
&\dot\cup\,\{N(t)=n-1\wedge N(t+h)-N(t)=1\}\,\dot\cup\\
&\dot\cup\,\{N(t)<n-1\wedge N(t+h)-N(t)\geqslant 2\}\Big)=\\
=&P\Big(N(t)=n\wedge N(t+h)-N(t)=0\Big)+\\
&+P\Big(N(t)=n-1\wedge N(t+h)-N(t)=1\Big)+\\
&+P\Big(N(t)<n-1\wedge N(t+h)-N(t)\geqslant 2\Big)\overset{(2)}{=}\\
=&P\Big(N(t)=n\Big)P\Big(N(h)=0\Big)+\\
&+P\Big(N(t)=n-1\Big)P\Big(N(h)=1\Big)+\\
&+P\Big(N(t)<n-1\Big)P\Big(N(h)\geqslant 2\Big)=\\
=&P\Big(N(t)=n\Big)P\Big(N(h)=0\Big)+P\Big(N(t)=n-1\Big)P\Big(N(h)=1\Big)+o(h)=\\
=&P_n(t)e^{-\lambda h}+P_{n-1}(t)\Big(\lambda h+o(h)\Big)+o(h)=\\
=&P_n(t)\Big(1-\lambda h+o(h)\Big)+\lambda hP_{n-1}(t)+o(h)=\\
=&P_n(t)-\lambda hP_n(t)+\lambda hP_{n-1}+o(h)
\end{aligned}$$

$$P_n(t+h)=P_n(t)-\lambda hP_n(t)+\lambda hP_{n-1}+o(h)$$
$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=\frac{-\lambda hP_n(t)+\lambda hP_{n-1}(t)}{h}+\frac{o(h)}{h}$$

Przechodząc $h\to 0$

$$\begin{aligned}
&P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)\\
&P_n'(t)+\lambda P_n(t)=\lambda P_{n-1}(t)\\
&P_n'(t)e^{\lambda t}+\lambda P_n(t)e^{\lambda t}=\lambda P_{n-1}(t)e^{\lambda t}\\
&\Big(P_n(t)e^{\lambda t}\Big)'=\lambda P_{n-1}(t)e^{\lambda t}\qquad n=1,2,3,\ldots
\end{aligned}$$

dla $n=1$

$$\Big(P_1(t)e^{\lambda t}\Big)'=\lambda P_0(t)e^{\lambda t}=\lambda e^{-\lambda t}e^{\lambda t}=\lambda$$
$$P_1(t)e^{\lambda t}=\lambda t+C$$

Warunek początkowy

$$P_1(0) = P\Big(N(0) = 1\Big) = 0$$

daje

$$P_1(0)e^{\lambda 0} = \lambda \cdot 0 + C \Rightarrow C = 0$$

Ostatecznie

$$P_1(t)e^{\lambda t} = \lambda t$$
$$P_1(t) = \frac{(\lambda t)^1}{1!} e^{-\lambda t}$$

W II kroku indukcyjnym załóżmy, że

$$\Big(P_n\left(t\right) e^{\lambda t}\Big)' = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} = \frac{\lambda^n \cdot t^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$P_n\left(t\right) e^{\lambda t} = \int \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\, dt = \frac{\lambda^{n\,n}}{n!} + C$$

Warunek

$$P_n(0) = P\left(N(0) = n\right) = 0 \Rightarrow C = 0$$

Na mocy indukcji matematycznej

$$\forall_{n \geqslant 0} P\left(N(t) = n\right) = P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

(iii)

$$\begin{aligned} &P\left(N(t) - N(s) = n\right) = \\ =&P\left(N(s + (t-s)) - N(s) = n\right) \overset{(2)}{=} \\ =&P\left(N(t-s) = n\right) = \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)} \end{aligned}$$

□

5.1 Własności trajektorii Procesu Poissona

Fakt 1
Z prawdopodobieństwem 1 trajektoria ma tylko skończenie wiele skoków na każdym skończonym odcinku czasowym $[0, t]$.

A_n - zdarzenie polegające na tym, że na odcinku $[0, n]$ było nieskończenie wiele skoków
A_n - zdarzenie polegające na tym, że na odcinku skończonym było skończenie wiele skoków

$$B^{\mathrm{c}} = \Omega \backslash B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\begin{aligned}
&P\left(A_n\right) = \\
=&P\left(\text{na odcinku } [0, n] \text{ było nieskończenie wiele skoków}\right) = \\
=&P\left(\forall_{k \in \mathbb{N}} N(n) \geqslant k\right) = \\
=&P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\{N(n) \geqslant k\}\right) = \\
=&\lim_{k \to \infty} P\left(N(n) \geqslant k\right) = \\
=&\lim_{k \to \infty} P\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} N(n) = j\right) = \\
=&\lim_{k \to \infty} \underbrace{\sum_{j=k}^{\infty} \frac{(\lambda n)^j}{j!} e^{-\lambda n}}_{\text{ogon szeregu zbieżnego}} = 0
\end{aligned}$$

$$\forall_n P\left(A_n\right) = 0$$

$$\begin{gathered}
0 \leqslant P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) = 0 \\
P\left(B^{\mathrm{c}}\right) = 0 \Rightarrow P(B) = 1 - P\left(B^{\mathrm{c}}\right) = 1 - 0 = 1
\end{gathered}$$

Uwaga!
Jednorodny proces Poissona nie eksploduje (na skończonym odcinku czasu).
Fakt 2
Z prawdopodobieństwem 1 skoki trajektorii są równe 1.

$$P\left(\{\omega \in \Omega : [0, \infty) \ni t \to N_t(\omega) \text{ ma skoki równe } 1\}\right) = 1$$

Zdarzenie przeciwne

$$\begin{aligned}
&\{\omega \in \Omega : [0, \infty) \ni t \to N_t(\omega) \text{ ma skoki } \geqslant 2\} = \\
=&\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega \in \Omega : [0, \infty) \ni t \to N_t(\omega) \text{ ma skoki } \geqslant 2 \text{ na odcinku } [0, n]\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n
\end{aligned}$$

$$A_n = \bigcup_{j=0}^{n\cdot m-1} \left\{\text{skok} \geqslant 2 \text{ zdarzył się na } (\tfrac{j}{m}, \tfrac{j+1}{m}]\right\} \leqslant \bigcup_{j=0}^{n\cdot m-1} \left\{N\left(\frac{j+1}{m}\right) - N\left(\frac{j}{m}\right) \geqslant 2\right\}$$

$$0 \leqslant P\left(A_n\right) \leqslant \sum_{j=0}^{n\cdot m-1} P\Big(N\left(\tfrac{j}{m} + \tfrac{1}{m}\right) - N\left(\tfrac{j}{m}\right) \geqslant 2\Big) \underset{\text{jednorodność}}{\overset{\text{przyrostu}}{=}}$$
$$= \sum_{j=0}^{n\cdot m-1} P\Big(N\left(\tfrac{1}{m}\right) \geqslant 2\Big) = n \cdot m\Big(1 - P\left(N\left(\tfrac{1}{m}\right) = 0\right) - P\left(N\left(\tfrac{1}{m}\right) = 1\right)\Big) =$$
$$= n\left(1 - e^{-\frac{1}{m}\cdot\lambda} - \frac{1}{m}e^{-\frac{1}{m}\cdot\lambda}\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{m}} \leqslant n \cdot \varepsilon$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}}{x} \overset{\text{"H"}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\lambda e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x} + \lambda^2 x e^{-\lambda x}}{1} = 0$$

Jeśli

$$X < \delta_\varepsilon$$

wtedy

$$\left|\frac{1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}}{x}\right| < \varepsilon \text{ dla } \frac{1}{m} < \delta_\varepsilon\Big(\equiv \left(m > \tfrac{1}{\delta_\varepsilon}\right)\Big)$$

$$0 \leqslant P\left(A_n\right) \leqslant \varepsilon \cdot n$$

Zatem $\forall_n P\left(A_n\right) = 0$
Stąd

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

$$P\left(\{\omega \in \Omega : [0,\infty) \ni t \to N_t(\omega) \text{ ma skok } \geqslant 2\}\right) = 0$$
$$P\left(\{\omega \in \Omega : [0,\infty) \ni t \to N_t(\omega) \text{ ma skok } = 1\}\right) = 1$$

Fakt 3
Z prawdopodobieństwem 1 trajektorie dążą do ∞, gdy $t \to \infty$

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{t\to\infty} N_t(\omega) = \infty\right\}\right) = 1$$

Zdanie przeciwne

$$\left\{\omega \in \Omega : \lim_{t\to\infty} N_t(\omega) < \infty\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\omega \in \Omega : \lim_{t\to\infty} N_t(\omega) < n\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\begin{aligned} A_n =& \left\{\omega \in \Omega : \forall_{t\in[0,\infty)} N_t(\omega) \leqslant n\right\} = \\ =& \{\omega \in \Omega : \forall_{k\in\mathbb{N}} N_k(\omega) \leqslant n\} = \\ =& \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : N_k(\omega) \leqslant n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_n) =& P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \{N_k \leqslant n\}\right) = \\ =& \lim_{k\to\infty} P(N_k \leqslant n) = \\ =& \lim_{k\to\infty} P(N_k = 0 \vee N_k = 1 \vee \dots \vee N_k = n) = \\ =& \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{n} P(N_k = j) = \\ =& \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\lambda k)^j}{j!} \cdot e^{-\lambda k} = 0 \end{aligned}$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

Stąd z prawdopodobieństwem 1

$$\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$$

Twierdzenie 9
Jeżeli $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ jest jednorodnym procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$, to z prawdopodobieństwem 1 trajektorie $[0,\infty) \ni t \to N_t(\omega)$ są funkcjami schodkowymi, startującymi z 0, o skokach równych 1, o skończenie wielu skokach na każdym odcinku skończonym i dążących do nieskończoności (gdy $t \to \infty$) i prawostronnie ciągłymi.

Moment skoku $\equiv$ chwila skoku $(T_1, T_2, \dots)$
Czas oczekiwania na kolejny skok $X_1, X_2, \dots$ "międzyczasy"; "czasypomiędzy"

Twierdzenie 10
Ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots$ dla jednorodnego procesu Poissona z intensywnością $\lambda > 0$ jest ciągiem niezależnym o tym samym rozkładzie $Exp(\lambda)$.

Dowód.

$$P\left(X_1 \leqslant t\right) = P\left(N_t \geqslant 1\right) = 1 - P\left(N_t = 0\right) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad \text{dla } t \geqslant 0$$

$F_{X_1}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Z definicji $X_n \geqslant 0$.

$$X_1 \sim \mathrm{Exp}\left(\lambda\right)$$

□

Rozdział 6

9 listopada 2015

$\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ jednorodny proces Poissona z intensywnością $\lambda = \text{const} > 0$
$X_n(\omega)$ zmienna losowa czas pomiędzy $n-1$ i n-tym zdarzeniem ("międzyczas")
$X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.$\sim Exp(\lambda)$

Dowód. pokazaliśmy, że $X_1 \sim Exp(\lambda)$
$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ czy składowe są niezależne o rozkładzie $Exp(\lambda)$?

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \left(\lambda e^{-\lambda x_1}\right)\cdot\left(\lambda e^{-\lambda x_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\lambda e^{-\lambda x_n}\right)$$

Wystarczy. Żeby czasy skończyły się na tablicy policzymy dla $n = 2$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \lim_{\substack{\Delta t_1\to 0\\ \Delta t_2\to 0}} \frac{P\Big(X_1\in(x_1,x_1+\Delta t_1]\wedge X_2\in(x_2,x_2+\Delta t_2]\Big)}{\Delta t_1\cdot\Delta t_2} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta t_1\to 0\\ \Delta t_2\to 0}} \frac{1}{\Delta t_1\cdot\Delta t_2}\cdot P\Big(N(x_1)=0, N(x_1+\Delta t_1)-N(x_1)=1,$$

$$N(x_1+x_2)-N(x_1+\Delta t_1)=0, N(x_1+x_2+\Delta t_2)-N(x_1+x_2)=1\Big) =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta t_1\to 0\\ \Delta t_2\to 0}} \frac{1}{\Delta t_1\cdot\Delta t_2}\cdot P\Big(N(x_1)=0\Big)P\Big(N(x_1+\Delta t_1)-N(x_1)=1\Big)$$

$$P\Big(N(x_1+x_2)-N(x_1+\Delta t_1)=0\Big)P\Big(N(x_1+x_2+\Delta t_2)-N(x_1+x_2)=1\Big)\Big) =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta t_1\to 0\\ \Delta t_2\to 0}} \frac{1}{\Delta t_1\cdot\Delta t_2}\cdot e^{-\lambda x_1}(\lambda\cdot\Delta t_1)^1 e^{-\lambda\Delta t_1} P\Big(x_2-\Delta t_1)=0\Big)\cdot\lambda\Delta t_2 e^{-\lambda\Delta t_2} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta t_1\to 0\\ \Delta t_2\to 0}} \lambda e^{-\lambda x_1}\cdot e^{-\lambda\Delta t_1}\cdot e^{-\lambda(x_2-\Delta t)}\cdot\lambda e^{-\lambda\Delta t_2} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda x_1}\cdot\lambda e^{-\lambda x_2} = f_{Exp(\lambda)}(x_1) f_{Exp(\lambda)}(x_2)$$

X_1, X_2 są niezależne i $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$
Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ rozumowanie jest takie samo, jedynie rachunki dłuższe. $\square$

Wnioski
Niech $T_n = X_1 + \cdots + X_n$ czas oczekiwania na n-te zdarzenie. Wówczas T ma rozkład Erlanga z parametrami $\Gamma_{n,\lambda}$

$$f_{T_n}(t) = \frac{\lambda^n \Gamma(n)}{t^{n-1} e^{-\lambda t}}$$

Dowód. Wiemy, że

$$X_j \sim Exp(\lambda) \Rightarrow X_1 + \cdots + X_n \sim \Gamma_{n,\lambda}$$

$t > 0$
$T_n \leqslant t \Leftrightarrow N(t) \geqslant n$

$$F_{T_n}(t) = P\left(N(t) \geqslant n\right) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned}
&f_{T_n}(t) = F'_{T_n}(t) = \\
=&\sum_{j=n}^{\infty} \left(\frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}\right)' = \\
=&\sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} j t^{j+1} e^{-\lambda t} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda^j t^j}{j!} e^{-\lambda t} = \\
=&\frac{\lambda^{(n-1)+1}}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} = \\
=&\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

To rozkład Erlanga z parametrami n, λ $\square$

6.1 Statystyki pozycyjne

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ - zmienne losowe
Permutujemy, aby uzyskać ciąg niemalejący

$$\tilde{Y}_1(\omega) \leqslant \tilde{Y}_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant \tilde{Y}_n(\omega)$$
$$Y_{\alpha(1)}(\omega) \leqslant Y_{\alpha(2)}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_{\alpha(n)}(\omega)$$

Permutacja α zależy od ω
Zakładamy, że zmienne losowe $Y_1, \ldots, Y_n$ są typu ciągłego(a nawet absolutnie ciągłego) i niezależne. Z prawdopodobieństwem 1 mamy

$$\tilde{Y}_1(\omega) < \tilde{Y}_2(\omega) < \cdots < \tilde{Y}_n(\omega)$$

bo $P(Y_i = Y_j) = 0$ dla $i \neq j$
My założymy dodatkowo, że $Y_1, \ldots, Y_n$ mają ten sam rozkład.
Reasumując $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. z gęstością f_Y

$$\begin{aligned}
&f_{(\tilde{Y}_1,\ldots,\tilde{Y}_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \\
&= \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \vdots \\ \Delta t_n \to 0}} \frac{n! P(Y_1 \in [t_1, t_1 + \Delta t_1), \ldots, Y_n \in [t_n, t_n + \Delta t_n))}{\Delta t_1 \cdot \ldots \cdot \Delta t_n} = \\
&= n! \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \vdots \\ \Delta t_n \to 0}} \frac{P(Y_1 \in [t_1, t_1 + \Delta t_1))}{\Delta t_1} \cdot \frac{P(Y_2 \in [t_2, t_2 + \Delta t_2))}{\Delta t_2} \cdot \ldots \cdot \frac{P(Y_n \in [t_n, t_n + \Delta t_n))}{\Delta t_n} = \\
&= n! f_{Y_1}(t_1) \cdot f_{Y_2}(t_2) \cdot \ldots \cdot f_{Y_n}(t_n) = \\
&= n! \prod_{j=1}^{n} f_Y(t_j)
\end{aligned}$$

$$f_{(\tilde{Y}_1,\ldots,\tilde{Y}_n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{\{0 < t_1 < \cdots < t_n < t\}}$$

Twierdzenie 11
Niech $\{N(t)\}_{t \geqslant 0}$ jednorodny proces Poissona. Wówczas warunkowy rozkład momentu skoku pod warunkiem $N(t) = 1$ jest rozkładem jednostajnym na $[0, t]$.

Dowód.

$$\begin{aligned}
&P(X_1 \leqslant t_1 | N(t) = 1) = \\
&= \frac{P(X_1 \leqslant t_q \wedge N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} = \\
&= \frac{P(N(t_1) = 1 \wedge N(t) = 1)}{P(N(t) = 0)} = \\
&= \frac{P(N(t_1) = 1) P(N(t) = 1)}{P(N(t) = 0)} = \\
&= \frac{P(N(t_1) = 1) P(N(t - t_1) = 1)}{P(N(t) = 0)} = \\
&= \frac{\lambda t_1 e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t - t_1)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{t_1}{t}
\end{aligned}$$

$$F_{X_1|N(t)=1}(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t \\ 1 & x \geqslant t \end{cases}$$

□

Twierdzenie 12
Rozkład warunkowy wektora momentu skoków $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ pod warunkiem zdarzenia $N(t) = n$ ma gęstość $f_{(T_1,\dots,T_n)}(t_1, \dots, t_n) = \frac{n!}{t^n}\mathbb{1}_{\{0<t_1<\dots<t_n<t\}}$. Czyli jest taki sam jak rozkład statystyk pozycyjnych dla $Y_1, \dots, Y_n$ i.i.d. na przedziale $[0, t]$.

Dowód. Zobaczmy jak "idzie" dla $n = 2$ $f_{(T_1,T_2)}(t_1, t_2) =?$
Oczywiście $0 < t_1 < t_2 < t$

$$f_{(T_1,T_2)}(t_1, t_2) =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \Delta t_2 \to 0}} \frac{P\Big(T_1 \in [t_1, t_1 + \Delta t_1), T_2 \in [t_2, t_2 + \Delta t_2)\Big)}{\Delta t_1 \cdot \Delta t_2} =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \Delta t_2 \to 0}} \frac{P\Big(T_1 \in [t_1, t_1 + \Delta t_1), T_2 \in [t_2, t_2 + \Delta t_2), N(t) = 2\Big)}{\Delta t_1 \cdot \Delta t_2 P\left(N(t) = 2\right)} =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \Delta t_2 \to 0}} \frac{P\Big(N(t_1)=0, N(t_1+\Delta t_1)-N(t_1)=1, N(t_2)-N(t_1+\Delta t_1)=0, N(t_2+\Delta t_2)-N(t_2)=1, N(t)-N(t_2+\Delta t_2)=0\Big)}{\Delta t_1 \cdot \Delta t_2 \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}} =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \Delta t_2 \to 0}} \frac{P\Big(N(t_1) = 0\Big) P\Big(N(t_1 + \Delta t_1) - N(t_1) = 1\Big) P\Big(N(t_2) - N(t_1 + \Delta t_1) = 0\Big)}{\Delta t_1 \cdot \Delta t_2 \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}} \cdot$$
$$\cdot P\Big(N(t_2 + \Delta t_2) - N(t_2) = 1\Big) P\Big(N(t) - N(t_2 + \Delta t_2) = 0\Big) =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \Delta t_2 \to 0}} \frac{e^{-\lambda t_1} \cdot \lambda \Delta t_1 e^{-\lambda \Delta t_1} \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{\lambda \Delta t} \cdot e^{-\lambda \Delta t_2} \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t_2} \cdot e^{\lambda \Delta t_2}}{\frac{t^2}{2} \cdot e^{-\lambda t}} =$$
$$= \frac{2!}{t^2} \mathbb{1}_{\{0<t_1<t_2<t\}}$$

□

6.2 Niejednorodny proces Poissona

$\lambda(t) \geqslant 0$ - intensywność pojawiania się zdarzeń zależny od czasu.

Definicja 21 (Niejednorodny proces Poissona)
Mówimy, że proces $\{N(t)\}_{t \geqslant 0}$ jest niejednorodnym procesem Poissona z funkcją intensywności (deterministyczną) $\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$. (ciągła)

- $N(0) = 0$ z pr. 1
- $\{N(t)\}_{t \geqslant 0}$ ma przyrosty niezależne
- $P\Big(N(t+\Delta t) - N(t) = 1\Big) = \lambda(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t)$
- $P\Big(N(t+\Delta t) - N(t) \geqslant 2\Big) = o(\Delta t)$

Twierdzenie 13
Jeżeli $\{N(t)\}_{t \geqslant 0}$ jest niejednorodnym procesem Poissona z ciągłą funkcją intensywności $\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$, to

$$P\Big(N(s+t) - N(t) = k\Big) = \frac{(\mu(s+t) - \mu(t))^k}{k!} e^{-(\mu(s+t)-\mu(t))}$$

To znaczy

$$\forall_{s,t>0} N(s+t) - N(t) \sim Poiss\Big(\mu(s+t) - \mu(t)\Big)$$

gdzie

$$\mu(t) = \int_0^t \lambda(u)\, du$$

Dowód. Ustalmy t
$P_k(s) = P\Big(N(t+s) - N(t) = k\Big)$
Czy $P\Big(N(t+s) - N(t) = k\Big) = \frac{(\mu(s+t)-\mu(t))^k}{k!} e^{-(\mu(s+t)-\mu(t))}$?
Dowód indukcyjnie po k. Rozpoczynamy od $k = 0$

$$\begin{aligned}
&P\Big(N(t+s+\Delta s) - N(t+s) = 0 \wedge N(t+s) - N(t) = 0\Big) = \\
=&P\Big(N(t+s+\Delta s) - N(t+s) = 0\Big) P\Big(N(t+s) - N(t) = 0\Big) = \\
=&\Big(1 - P\Big(N(t+s+\Delta s) - N(t+s) = 1\Big) + o(\Delta s)\Big) \cdot P_0(s) = \\
=&\Big(1 - \lambda(t+s)\Delta s + o(\Delta s)\Big) \cdot P_0(s) = \\
=&P_0(s) - \lambda(t+s) P_0(s) \Delta s + o(\Delta s)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{P_0\left(s+\Delta t\right)-P_0(s)}{\Delta s} &= -\lambda(t+s)P_0(s)-\frac{o(\Delta s)}{\Delta s}\\
P_0'(s) &= -\lambda(t+s)P_0(s)\\
\frac{P_0'(s)}{P_0(s)} &= -\lambda(t+s)\\
\Big(\ln P_0(s)\Big)' &= -\lambda(t+s)\\
\ln P_0(s) &= -\int\limits_0^s \lambda(t+n)\,dn\\
\ln P_0(s) &= -\int\limits_t^{t+s} \lambda(n)\,dn\\
P_0(s) &= \exp\left(-\int\limits_t^{t+s} \lambda(n)\,dn\right)\\
P_0(s) &= \exp\left(-\int\limits_0^{t+s} \lambda(n)\,dn+\int\limits_0^{t} \lambda(n)\,dn\right)\\
P_0(s) &= e^{-(\mu(t+s)-\mu(t))}
\end{aligned}
$$

Dla $k=1$ formuła zachodzi. Krok indukcyjny robi się tak samo jak w przypadku jednorodnym. $\square$

Ogólnie
$\left\{\tilde{N}(t)\right\}_{t\geqslant 0}$ niejednorodny proces Poissona $\supseteq \{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ standardowy proces Poissona (jednorodny z $\lambda=1$ szczególny przypadek)
Załóżmy, że $\lambda(u)>0$, ciągłe (ewentualnie $\lambda(0)=0$)

$$
\mu(t)=\int\limits_0^t \lambda(u)\,du \xrightarrow[t\to\infty]{} \int\limits_0^\infty \lambda(u)\,du=\infty
$$

$\mu(t)$ jest funkcją $\mu(0)=0$, μ ściśle rosnące i klasy $C\left([0,\infty]\right)$

Twierdzenie 14
Jeśli $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest niejednorodnym procesem Poissona z funkcją intensywności $\lambda:[0,\infty)\to\mathbb{R}_+$ ciągłą, $\lambda(u)>0$ dla $u>0$ i $\int\limits_o^\infty \lambda(u)\,du=\infty$, to proces $N(t)\overset{df}{=}\tilde{N}(\mu^{-1}(t))$ jest niejednorodnym procesem Poissona z funkcją intensywności

$$
\lambda(t)=\mu'(t)
$$

Twierdzenie 15
Niech $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ *będzie standardowym procesem Poissona oraz* $\mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *będzie funkcją klasy* C^1*, ściśle rosnącą,* $\mu(0) = 0$*,* $\lim\limits_{t\to\infty} \mu(t) = \infty$*. Wówczas proces* $\tilde{N}(t) \overset{df}{=} N(\mu(t))$ *jest niejednorodnym procesem Poissona z funkcją intensywności*

$$\lambda(t) = \mu'(t)$$

Wniosek
Niejednorodne procesy Poissona powstają przez deterministyczne przeskalowanie czasu w standardowym procesie Poissona.

Naturalnym uogólnieniem są procesy Coxa.

$$N(t+\Delta t) - N(t) = 1 \qquad \text{z intensywnością } \lambda_t$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\tilde{N}\left(\mu^{-1}(t)\right) &= N(t)\\ \tilde{N}\left(\mu^{-1}(0)\right) &= N(0)\end{aligned}$$

$N(t)$ jest rosnące, gdyż $\tilde{N}$ jest liczący.
$N(t)$ ma przyrosty niezależne, gdyż $\tilde{N}$ ma przyrosty niezależne

$$\begin{aligned}&P\Big(N(t+s) - N(t) = k\Big) =\\ =&P\Big(\tilde{N}\left(\mu^{-1}(t+s)\right) - \tilde{N}\left(\mu^{-1}(t)\right) = k\Big) =\\ =&\frac{\left(\mu\left(\mu^{-1}(t+s)\right) - \mu\left(\mu^{-1}(t)\right)\right)^k}{k!} =\\ =&e^{-\mu\left(\mu^{-1}(t+s)\right) - \mu\left(\mu^{-1}(t)\right)} =\\ =&\frac{(t+s-t)^k}{k!} e^{-s} \sim Poiss(1)\end{aligned}$$

Niezależność przyrostów $\tilde{N}(\mu^{-1}(t))$ wynika z niezależności przyrostów $\tilde{N}T = (t)$ i faktu, że μ^{-1} jest rosnąca. $\square$

Rozdział 7

16 listopada 2015

7.1 Złożony proces Poissona

Definicja 22
Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, a N zmienną losową o rozkładzie Poissona z intensywnością $\lambda > 0$ i niezależną od $X_1, X_2, \ldots$. Złożonym procesem Poissona nazywamy rozkład zmiennej losowej

$$W = \sum_{j=1}^{N} X_j$$

Wyjaśnienie dla ustalonego $\omega \in \Omega$

$$W(\omega) = \sum_{j=1}^{n(\omega)} X_j(\omega)$$

$$\sum_{j=0}^{0} \blacksquare = 0$$

Zastosowania - ubezpieczenia
Problem - znając rozkłady X_j wyznaczyć rozkład W.

Twierdzenie 16
Przy oznaczeniach z definicji

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W) &= \lambda \cdot \mathbb{E}X_1 && (o\ ile\ \mathbb{E}X_1 < \infty) \\ Var(W) &= \lambda \cdot \mathbb{E}X_1^2 && (o\ ile\ \mathbb{E}X_1^2 < \infty) \end{aligned}$$

Dowód. Uprościmy zakładając, że $\mathbb{E}e^{t|X|} < \infty$ dla $t \in (-\infty, \varepsilon]$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}e^{tW} = \\
=&\int_\Omega e^{tW}\, dP = \\
=&\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{tW} | N = k\right) P(N = k) = \\
=&\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\exp\left(t\sum_{j=i}^{N} X_j\right) | N = k\right) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\
=&\mathbb{E}\left(\exp\left(t\sum_{j=i}^{N} X_j\right) | N = 0\right) e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\exp\left(t\sum_{j=i}^{N} X_j\right) | N = k\right) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\
=&1 \cdot e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{k} \mathbb{E}e^{tX_j}\right) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\
=&e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_X(t)^k \cdot \lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \\
=&\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda M_X(t))^k}{k!}\right] e^{-\lambda} = \\
=&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda M_X(t))^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \\
=&e^{\lambda M_X(t) - \lambda} = \\
=&e^{\lambda(M_X(t) - 1)} = \\
=&M_W(t)
\end{aligned}
$$

Wariancja

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}W = M_W'(0) = e^{\lambda(M_X(0)-1)} \cdot M_X'(0) = e^0 \cdot \lambda \cdot \mathbb{E}X = \lambda \mathbb{E}X \\
\mathbb{E}W^2 = M''(0) = \lambda^2 e^{\lambda(M_X(0)-1)} M_X'(0)^2 + \lambda e^{\lambda(M_X(0)-1)} M_X''(0) = \\
= \lambda^2 (\mathbb{E}X)^2 + \lambda \mathbb{E}X^2 \\
\mathrm{Var}(W) = \mathbb{E}W^2 - (\mathbb{E}W)^2 = \lambda^2 (\mathbb{E}X)^2 + \lambda \mathbb{E}X - (\lambda \mathbb{E}X)^2 = \lambda \mathbb{E}X^2
\end{aligned}
$$

□

Uwaga!
Licząc na wprost można pozbyć się tych dodatkowych założeń.

Definicja 23 (Złożony proces Poissona)
Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym

rozkładzie oraz $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ procesem Poissona niezależnym od $X_1, X_2, \ldots$. Złożonym procesem Poissona nazywamy procesem stochastyczny

$$W(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$$

Zastosowania

- $W(t)$ - reprezentowaną kwotę roszczeń
- $N(t)$ - liczba roszczeń napływających do firmy ubezpieczeniowej na odcinku czasu $[0, t]$
- X_j - j-te roszczenie

Winosek

$$\mathbb{E}W(t) = \lambda t \mathbb{E}X_1$$
$$\mathrm{Var}W(t) = \lambda t \mathbb{E}X_1^2$$

gdy $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest jednorodnym procesem Poissona

7.1.1 Klasyczny model ryzyka

$$S(t) = \underbrace{u}_{\substack{\text{kapitał} \\ \text{początkowy}}} + \underbrace{c}_{\substack{\text{składka} \\ \text{na jednostkę} \\ \text{ubezpieczenia}}} t - \underbrace{\sum_{j=1}^{N(t)} X_j}_{\substack{\text{zagregowane} \\ \text{roszczenia}}}$$

Problem
Wyznacz $c > 0$ taki, że

$$P\left(\exists_{t\geqslant 0}\, S(t) < 0\right) \approx 0,0001$$

7.1.2 Dualny model ryzyka

$$W(t) = \underbrace{w}_{\substack{\text{kapitał} \\ \text{początkowy}}} - \underbrace{c}_{\substack{\text{koszt} \\ \text{na jednostkę} \\ \text{czasu}}} t + \underbrace{\sum_{j=1}^{N(t)} X_j}_{\substack{\text{zagregowane} \\ \text{zyski}}}$$

$$P\left(\exists_{t\geqslant 0}\, W(t) < 0\right) \approx \text{ przejęte normy bankowe}$$

7.2 Moment stopu

Niech $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ niemalejący ciąg podσ-ciał w $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$$

nazywamy filtracją

Przykład 5
$X_0, X_1, \dots$ ciąg zmiennych losowych określonych na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
$\mathcal{F}_n = \sigma\left(X_j : j \leqslant n\right)$
$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n) = (\sigma(X_j : j \leqslant n))$ - filtracja naturalna

Definicja 24
Przy ustalonej filtracji $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$ mówimy, że zmienna losowa $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0$ jest momentem stopu (momentem zatrzymania, momentem Markowa), jeśli

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_0} \ \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_n$$

Twierdzenie 17
Przy ustalonej filtracji $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$, $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0$ jest momentem stopu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{k \in \mathbb{N}_0} \ \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$$

Dowód. " $\Rightarrow$ "
Bardzo ważne uwagi

$$\{\tau \geqslant k\} \in \mathcal{F}_{k-1}$$
$$\Omega \backslash \{\tau < k\} = \Omega \backslash \bigcup_{j=0}^{k-1} \{\tau = j\} \in \mathcal{F}_{k-1}$$

$$\{\tau = k\} = \{\tau \leqslant k\} \setminus \{\tau \leqslant k-1\} \in \mathcal{F}_k$$

" $\Leftarrow$ "

$$\{\tau \leqslant n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_n$$

$\square$

Twierdzenie 18 (Tożsamość Walda)
Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i skończonej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}X_1 \in \mathbb{R}$ oraz τ będzie momentem stopu względem filtracji naturalnej. Wówczas

$$\mathbb{E}\sum_{j=1}^{T} X_j = (\mathbb{E}\tau)\cdot(\mathbb{E}X_1)$$

Dowód. (Etap I)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sum_{j=1}^{\tau}|X_j| = \\
=&\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\cdot\sum_{j=1}^{\tau}|X_j|\right) = \\
=&\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\cdot\sum_{j=1}^{n}|X_j|\right) = \\
=&\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\tau=0\}}\sum_{j=1}^{0}|X_j| + \mathbb{1}_{\{\tau=1\}}|X_1| + \dots + \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\Big(|X_1|+|X_2|+\dots+|X_n|\Big)\right) = \\
=&\mathbb{E}\left(0+\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\tau=j\}}\cdot|X_1| + \sum_{j=2}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\tau=j\}}\cdot|X_2| + \dots + \sum_{j=n}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\tau=j\}}\cdot|X_n| + \dots\right) \overset{B-L}{=} \\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\tau\geqslant n\}}\cdot|X_n|\right) = \\
=&\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\tau\geqslant n\right)\mathbb{E}|X_n| = \\
=&\mathbb{E}|X_1|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\tau\geqslant n\right) = \\
=&(\mathbb{E}\tau)\cdot(\mathbb{E}|X_1|)
\end{aligned}$$

(Etap II)
Powtarzamy cały dowód z etapem 1 opuszczając wartość bezwzględną i argumentując zamiast $\underset{dla\geqslant 0}{\overset{B-L}{=}}$ twierdzeniem Fubiniego

$$\int |f|\,d\mu_1\otimes\mu_2 < \infty \Leftrightarrow \int f\,d\mu_1\otimes\mu_2 = \int\left[\int f(\dots)\,d\mu_1\right]\,d\mu_2$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{\tau}X_j\right) = \mathbb{E}\tau\cdot\mathbb{E}(X_1)$$

$\square$

7.3 Łańcuchy Markowa

Zajmiemy się łańcuchami Markowa z czasem dyskretnym na skończonej lub przeliczalnej przestrzeni fazowej.

Definicja 25
Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, S zbiór skończony lub przeliczalny z σ-ciałem $\mathcal{G} = 2^S$. Mówimy,że ciąg elementów (zmiennych) losowych $X_1, X_2, \dots, X_n : (\Omega, \mathcal{F}P) \to (S, \mathcal{G})$ jest łańcuchem Markowa, jeżeli dla dowolnych $i, j, i_{n-1}, i_{n-2}, \dots, i_0 \in S$ oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}_0$

$$P\left(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\right) = P\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right) = p_{ij}^{[n,n+1]}$$

przy założeniu

$$P\left(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\right) > 0$$

$p_{ij}^{[n,n+1]}$ - prawdopodobieństwo przejścia ze stanu $i \in S$ do stanu $j \in S$ przy zmianie cen z n na $n+1$.

Definicja 26
Jeżeli łańcuch Markowa $X_0, X_1, \dots$ spełnia

$$\forall_{i,j \in S} \forall_{n \in \mathbb{N}_0} \; p_{ij}^{[n,n+1]} = p_{ij}$$

to łańcuch Markowa nazywa się jednorodnym (w czasie)

Oznaczenie

$$P^{[n,n+1]} = \left[p_{ij}^{[n,n+1]}\right]_{S \times S}$$

nazywa się macierzą prawdopodobieństw przejść z n do $n+1$
Uwaga!
Każdy skończony lub przeliczalny zbiór S można "ponumerować".

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \qquad\qquad S = \{s_1, s_2, \dots\}$$

Można utożsamiać s_j z etykietą j. Można od razu zakładać, że

$$\begin{array}{lll} S = \{1, 2, \dots, N\} & \text{alternatywnie} & S = \{0, 1, \dots, N\} \\ S = \mathbb{N} & \text{alternatywnie} & S = \mathbb{N}_0 \end{array}$$

Zamiast elementów losowych $X_1, X_2, \dots$ mamy zmienne o wartościach w $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \{1, \dots, N\}$.

Lemat 2
Macierz prawdopodobieństw przejść $P = [p_{ij}]$ spełnia

1. $\forall_{i,j}\ 0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1$
2. $\forall_i\ \sum_j p_{ij} = 1$

Dowód.

1. $p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i) \in [0,1]$
2.

$$\sum_j p_{ij} = \sum_j P(X_1 = j | X_0 = i) = P\left(\bigcup_{j \in S} \{X_1 = j\} | X_0 = i\right) = P(\Omega | X_0 = i) = 1$$

□

Ostrzeżenie
Fizycy (również w biologii/medycynie)

$$P(X_1 = j | X_0 = i) = p_{j|i} = p_{ij}$$

Definicja 27
Niech $X_0, X_1, \ldots$ będzie łańcuchem Markowa $p_{ij}^{[m,m+n]} \overset{df}{=} P(X_{m+n} = j | X_m = i)$ prawdopodobieństwo przejścia w n krokach począwszy od chwili m do chwili $m+n$ dla jednorodnego

$$p_{ij}^{\{n\}} \overset{df}{=} P(X_{m+n} = j | X_m = i) = P(X_n = j | X_0 = i)$$

$$P^{\{n\}} \overset{ozn.}{=} \left[p_{ij}^{\{n\}}\right]_{S \times S}$$

Twierdzenie 19
Jeżeli $X_0, X_1, \ldots$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa o macierzy przejść P, to

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\ P^{\{n\}} = \underbrace{P \circ P \circ \cdots \circ P}_{n \text{ złożeń}} = P^n$$

Dowód. Indukcja po n

1. Dla $n = 1$

$$p^{\{1\}} = \left[p_{ij}^{\{1\}}\right] = [p_{ij}] = P$$

2.

$$\begin{aligned}
&p_{ij}^{\{n+1\}} = \\
=&P\left(X_{n+1}=j|X_0=i\right) = \\
=&\frac{P\left(X_{n+1}=j, X_0=i\right)}{P\left(X_0=i\right)} = \\
=&\frac{P\left(X_{n+1}=j, \overbrace{\bigcup_l \{X_n=l\}}^{\Omega}, X_0=i\right)}{P\left(X_0=i\right)} = \\
=&\sum_l \frac{P\left(X_{n+1}=j, X_n=l, X_0=i\right)}{P\left(X_0=i\right)} = \\
=&\sum_l \frac{P\left(X_{n+1}=j, X_n=l, X_0=i\right)}{P\left(X_n=l, X_0=i\right)} \cdot \frac{P\left(X_n=l, X_0=i\right)}{P\left(X_0=i\right)} = \\
=&\sum_l P\left(X_{n+1}=j|X_n=l, X_0=i\right) \cdot P\left(X_n=l|X_0=i\right) = \\
=&\sum_l P\left(X_{n+1}=j|X_n=l\right) \cdot P\left(X_n=l|X_0=i\right) = \\
=&p_{lj} \cdot p_{il}^{\{n\}}
\end{aligned}$$

3. $p_{il}^{\{n\}} = \left(P^n\right)_{il}$

$$p_{ij}^{\{n+1\}} = \sum_l \underbrace{p_{il}^{\{n\}}}_{\text{z założenia indykcyjnego}} p_{lj} = \sum_l \left(P^n\right)_{il} (P)_{lj} = \left(P^{n+1}\right)_{ij}$$

□

Twierdzenie 20 (Twierdzenie Chapmana-Kołmogorowa)
Niech $x_0, x_1, \ldots$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejść $P = [p_{ij}]_{S\times S}$. Wówczas dla dowolnych $n, m \geqslant 0$ oraz stanów $i, j \in S$

$$P\left(X_{n+m}=j|X_0=i\right) = \sum_l P\left(X_n=l|X_0=i\right) P\left(X_m=j|X_0=l\right)$$

$$\forall_{i\,j\in S}\; p_{ij}^{\{n+m\}} = \sum_{l\in S} p_{il}^{\{n\}} p_{lj}^{\{m\}}$$

Dowód. $P^{n+m} = P^n \circ P^m$

$$\underbrace{P\circ\cdots\circ P}_{n+m \text{ razy}} = \underbrace{P\circ\cdots\circ P}_{n \text{ razy}} \circ \underbrace{P\circ\cdots\circ P}_{m \text{ razy}}$$

$$\left[P_{ij}^{\{n+m\}}\right] = \left[P_{ij}^{\{n\}}\right] \circ \left[P_{ij}^{\{m\}}\right]$$

□

Twierdzenie 21
Niech $x_0, x_1, \dots$ *będzie jednorodnym łańcuchem Markowa i* $P(X_0 = i) = \mu_i$ *((*$\mu_0\mu_1\mu_2, \dots$*) rozkład początkowy). Wówczas* $\rho_j = P(X_n = j)$ *rozkład procesu w chwili* n *spełnia*

$$\rho = (\rho_0, \rho_1, \dots) = (\mu_0\mu_1, \dots) \circ P^n \qquad \left(= \mathcal{L}(X_0) \circ P^n\right)$$

Dowód.

$$P(X_n = j) = \sum_i P(X_n = j | X_0 = i) \underbrace{P(X_0 = i)}_{\mu_i} = \sum_i \mu_i \cdot p_{ij}^{\{n\}} = (\mu \circ P)_j^n$$
$$\mathcal{L}(X_{n+1}) = \mathcal{L}(X_0) \circ P^n$$

□

Rozdział 8

31 listopada 2015

Przykład 6
Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ ciąg zmiennych losowych niezależnych o tym samym rozkładzie, skoncentrowanych na $\mathbb{Z}$.

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$$

$$\forall_{n \neq 1} \, P(\varepsilon_n = k) = \mu_k \qquad \left(\mu_k \geqslant 0, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k = 1\right)$$

$(X_n)_{n \geqslant 1}$ jest procesem Markowa o przestrzeni stanów $S = \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} & P\left(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1\right) = \\ &= \frac{P\left(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1\right)}{P\left(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{P\left(\varepsilon_{n+1} = j, \varepsilon_n = i, \varepsilon_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \varepsilon_1 = i_1\right)}{P\left(\varepsilon_n = i, \varepsilon_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \varepsilon_1 = i_1\right)} = \\ = & \frac{P\left(\varepsilon_{n+1} = j\right) P\left(\varepsilon_n = i\right) P\left(\varepsilon_{n-1} = i_{n-1}\right) \ldots P\left(\varepsilon_1 = i_1\right)}{P\left(\varepsilon_n = i\right) P\left(\varepsilon_{n-1} = i_{n-1}\right) \ldots P\left(\varepsilon_1 = i_1\right)} = \\ = & P\left(\varepsilon_{n+1 = j-i}\right) = \mu_{j-1} = p_{i,j} \end{aligned}$$

Mamy własność Markowa. Co więcej jest to łańcuch Markowa jednorodny w czasie $\left[\mu_{(j+l)+(i+l)}\right]$, ale i jednorodny w przestrzeni.

Jeżeli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ byłyby niezależne, ale o różnych rozkładach, to $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ też jest łańcuchem markowa, ale niejednorodnym.

Twierdzenie 22 (Prawdopodobieństwo ścieżki (path, string, trajektorii))
Niech $(X_n)_{n \geqslant 0}$ *będzie łańcuchem Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejść*

$P = [p_{ij}]$.

$$P\left(X_{n+k} = i_{n+k}, X_{n+k-1} = i_{n+k-1}, \ldots, X_n = i_n\right) =$$
$$= P\left(X_{n+k} = i_{n+k} | X_{n+k-1} = i_{n+k-1}, \ldots, X_n = i_n\right) P\left(X_{n+k-1} = i_{n+k-1}, \ldots, X_n = i_n\right)$$

Dowód. $k \geqslant 0$ indukcyjnie

$$\begin{aligned}
&p_{i_{n+k-1},i_{n+k}} p_{i_{n+k-2},i_{n+k-1}} \ldots p_{i_n,i_{n+1}} \cdot P\left(X_n = i_n\right) = \\
=&p_{i_{n=k-1},i_{n+k}} \cdot P\left(X_{n+k-1} = i_{n+k-1}, \ldots, X_n = i_n\right) = \\
=&P\left(X_n = i_n\right) \cdot \prod_{l=n+1}^{n+k} p_{i_{l-1},i_l}
\end{aligned}$$

W szczególności, gdy $n = 0$

$$\begin{aligned}
&P\left(X_k = i_k, \ldots, X_0 = i_0\right) = \\
=&P\left(X_0 = i_0\right) \cdot \prod_{l=1}^{k} p_{i_{l-1},i_l} = \\
=&\mu_{i_0} \cdot \prod_{l=1}^{k} p_{i_{l-1},i_l}
\end{aligned}$$

□

Oznaczenie

$$\mu = \left(\mu_i\right)_{i \in S} = \mu^{(0)} = \left(P\left(X_0 = i\right)\right)_{i \in S} = \mathcal{L}\left(X_0\right)$$

Rozkład początkowy procesu $\left(X_n\right)_{n \geqslant 0}$

$$\begin{aligned}
&P\left(X_{n+k} = i_{n+k}, \ldots, X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0\right) = \\
=&P\left(X_{n+k} = i_{n+k}, \ldots, X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\right)
\end{aligned}$$

dla dowolnych $n, k, i, \ldots$.

Dowód.

$$\begin{aligned}
&P\left(X_{n+k} = i_{n+k}, \ldots, X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0\right) = \\
=&\frac{P\left(X_{n+k} = i_{n+k}, \ldots, X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0\right)}{P\left(X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0\right)} = \\
=&\frac{p_{i_{n+k-1},i_{n+k}} \ldots p_{i_0,i_1} \cdot P\left(X_0 = i_0\right)}{p_{i_{n-1},i_n} \ldots p_{i_0,i_1} \cdot P\left(X_0 = i_0\right)} = \\
=&\prod_{l=0}^{n=k-1} p_{i_l,i_{l+1}} = \\
=&P\left(X_{n+k} = i_{n+k}, \ldots, X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\right)
\end{aligned}$$

□

Własność Markowa (sprzęgająca przeszłość z przyszłością; symetrie przeszłości z przyszłością)
$\mathcal{F}_{n,\infty} = \sigma\left(X_n, X_{n+1}, \dots\right)$
$\mathcal{F}_{0,n} = \sigma\left(X_0, \dots, X_n\right)$
$\mathcal{F}_{-\infty,n} = \sigma\left(\dots, X_{n-1}, X_n\right)$ Jeżeli proces stochastyczny $\left(X_n\right)_{n\geqslant 0}$ spełnia własność Markowa, to

$$\forall_{\substack{A\in\mathcal{F}_{0,n}\\ B\in\mathcal{F}_{n,\infty}}} P\left(A\cap B|X_n=i\right) = P\left(A|X_n=i\right)P\left(B|X_n=i\right)$$

Warunek Markowa $\equiv$ $\mathcal{F}_{0,n}$ i $\mathcal{F}_{n,\infty}$ są warunkowo X_n niezależne.

Równość wystarczy udowodnić dla

$$A = \left\{X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\right\}$$
$$B = \left\{X_n = i, X_{n+1} = i_{n+1}, \dots, X_{n+k} = i_{n+k}\right\} \in C_{n,n+k}$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
&P\left(A\cap B|X_n=i\right) = \\
=&\frac{P\left(A\cap B\cap\left\{X_n=i\right\}\right)}{P\left(X_n=i\right)} = \\
=&\frac{P\left(X_{n+k}=i_{n+k},\dots,X_{n+1}=i_{n+1},X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},\dots,X_0=i_0\right)}{P\left(X_n=i,\dots,X_0=i_0\right)}\cdot \\
&\cdot\frac{P\left(X_n=i,\dots,X_0=i_0\right)}{P\left(X_n=i\right)} = \\
=&P\left(X_{n+k}=i_{n+k},\dots,X_{n+1}=i_{n+1},X_n=i|X_n=i,\dots,X_0=i_0\right)\cdot \\
&\cdot P\left(X_n=i,\dots,X_0=i_0|X_n=i\right) = \\
=&P\left(A|X_n=i\right)P\left(B|X_n=i\right)
\end{aligned}$$

□

8.1 Mocna własność Markowa

Twierdzenie 23 (Mocna własność Markowa)
Niech $\left(X_n\right)_{n\geqslant 0}$ będzie łańcuchem Markowa, jednorodnym o macierzy prawdopodobieństw przejść $P = \left[p_{ij}\right]$. Jeżeli T jest momentem Markowa względem filtracji naturalnej) to proces stochastyczny

$$Y_n \overset{df}{=} X_{n+T} \qquad , n = 0, 1, \dots$$

jest też łańcuchem Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejść $\left[p_{ij}\right]$.

Dowód.

$$\begin{aligned}
&P\left(Y_{n+1}=j|Y_n=i,Y_{n-1}=i_{n-1},\ldots,Y_0=i_0\right)=\\
=&P\left(X_{n+1+T}=j|X_{n+T}=i,X_{n-1+T}=i_{n-1},\ldots,X_T=i_0\right)=\\
=&\frac{P\left(X_{n+1+T}=j,X_{n+T}=i,X_{n-1+T}=i_{n-1},\ldots,X_T=i_0\right)}{P\left(X_{n+T}=i,X_{n-1+T}=i_{n-1},\ldots,X_T=i_0\right)}=\\
=&\frac{\sum_{k=0}^{\infty}P\left(X_{n+1+T}=j,X_{n+T}=i,X_{n-1+T}=i_{n-1},\ldots,X_T=i_0,T=k\right)}{\sum_{k=0}^{\infty}P\left(X_{n+T}=i,X_{n-1+T}=i_{n-1},\ldots,X_T=i_0,T=k\right)}=\\
=&\frac{\sum_{k=0}^{\infty}P\left(X_{n+1+k}=j,X_{n+k}=i,X_{n-1+k}=i_{n-1},\ldots,X_k=i_0,T=k\right)}{\sum_{k=0}^{\infty}P\left(X_{n+k}=i,X_{n-1+k}=i_{n-1},\ldots,X_k=i_0,T=k\right)}=
\end{aligned}$$

Zauważmy, że zachodzi

$$\{T=k\}\in\sigma\{X_0,X_1,\ldots,X_k\}$$
$$\{T=k\}=\dot{\bigcup_m}\underbrace{\{X_k=m_k,\ldots,X_0=m_0\}}_{\text{atom}}$$

wykorzystując powyższy opis

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{k=0}^{\infty}P\left(X_{n+1+k}=j,X_{n+k}=i,X_{n-1+k}=i_{n-1},\ldots,X_k=i_0,\dot{\bigcup_m}\{X_k=m_k,\ldots,X_0=m_0\}\right)}{\sum_{k=0}^{\infty}P\left(X_{n+k}=i,X_{n-1+k}=i_{n-1},\ldots,X_k=i_0,\dot{\bigcup_m}\{X_k=m_k,\ldots,X_0=m_0\}\right)}=\\
=&\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_m P\left(X_{n+1+k}=j,X_{n+k}=i,X_{n-1+k}=i_{n-1},\ldots,X_k=i_0,X_k=m_k,\ldots,X_0=m_0\right)}{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_m P\left(X_{n+k}=i,X_{n-1+k}=i_{n-1},\ldots,X_k=i_0,X_k=m_k,\ldots,X_0=m_0\right)}=\\
=&\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_m P\left(X_{n+1+k}=j|X_{n+k}=i,X_{n-1+k}=i_{n-1},\ldots,X_k=i_0,X_k=m_k,\ldots,X_0=m_0\right)}{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_m P\left(X_{n+k}=i,X_{n-1+k}=i_{n-1},\ldots,X_k=i_0,X_k=m_k,\ldots,X_0=m_0\right)}\\
&\frac{P\left(X_{n+k}=i,X_{n-1+k}=i_{n-1},\ldots,X_k=i_0,X_k=m_k,\ldots,X_0=m_0\right)}{}=\\
=&\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_m p_{ij}P\left(X_{n+k}=i,X_{n-1+k}=i_{n-1},\ldots,X_k=i_0,X_k=m_k,\ldots,X_0=m_0\right)}{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_m P\left(X_{n+k}=i,X_{n-1+k}=i_{n-1},\ldots,X_k=i_0,X_k=m_k,\ldots,X_0=m_0\right)}=\\
=&p_{ij}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_m P\left(X_{n+k}=i,X_{n-1+k}=i_{n-1},\ldots,X_k=i_0,X_k=m_k,\ldots,X_0=m_0\right)}{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_m P\left(X_{n+k}=i,X_{n-1+k}=i_{n-1},\ldots,X_k=i_0,X_k=m_k,\ldots,X_0=m_0\right)}=\\
=&p_{ij}
\end{aligned}$$

□

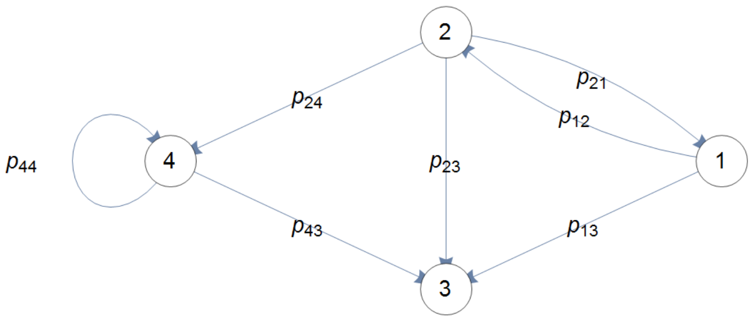
Rozkład początkowy Y_0?

$$P\left(Y_0=i\right)=P\left(X_T=i\right)=\sum_{k=0}^{\infty}P\left(X_k=i,T=k\right)$$

Wniosek

$$
\begin{aligned}
P\left(X_{T+n}=j|X_T\right) &= p^{(n)}_{X_T,j}\\
\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X_{T+n}=j\}}|X_T\right) &= p^{(n)}_{X_T,j}
\end{aligned}
$$

Grafowa wizualizacja łańcucha Markowa
Stany - wierzchołki grafu
Prawdopodobieństwa przejść $[p_{ij}]$ - krawędzie skierowane tylko te, gdzie $p_{ij} > 0$



Definicja 28
Niech $(X_n)_{n\geqslant 0}$ będzie łańcuchem Markowa. Mówimy, że stan $j \in S$ jest osiągalny ze stanu $i \in S$, jeżeli istnieje $n \geqslant 0$, że $P\left(X_n = j|X_0 = i\right) > 0$.

- $p^{(n)}_{i,j} > 0$
- $p^{[0,n]}_{i,j} > 0$

$p^{[0,n]}_{i,j} > 0$ dla niejednorodnego łańcucha markowa nie Będzie przedmiotem rozważań.
Piszemy wtedy $i \longrightarrow j$ dokładniej $i \xrightarrow{\text{"n"}} j$

$$\equiv P\left(X_0 = i, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = j\right) > 0$$

dla pewnej ścieżki $[i, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, j]$

Definicja 29
Mówimy, że stan $i, j < inS$ komunikują się, gdy $i \longrightarrow j$ oraz $j \longrightarrow i$

$$\left[p^{(n)}_{ij} > 0 \wedge p^{(m)}_{ji} > 0\right]$$

Piszemy wtedy

$$i \longleftrightarrow j$$

Twierdzenie 24
Relacja komunikowania się $\longleftrightarrow$ jest relacją równoważności.

Dowód. 1. Zwrotność $i \longleftrightarrow i$

$$p_{ii}^{(0)} = 1 > 0$$

2. Symetria $i \longleftrightarrow j \overset{df}{\Leftrightarrow} i \longrightarrow j \wedge j \longrightarrow i$

3. Przechodniość $i \longleftrightarrow j \wedge j \longleftrightarrow k \Rightarrow i \longleftrightarrow k$
   $i \longleftrightarrow k$?
   $i \longrightarrow j \wedge j \longrightarrow k$
   $p_{ij}^{(n)} > 0 \wedge p_{jk}^{(m)} > 0$

$$p_{ik}^{(n=k)} \overset{GK}{=} \sum_{l \in S} p_{il}^{(n)} p_{lk}^{(m)} \geqslant p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)}$$

   Zatem $i \longrightarrow k$. Analogicznie $k \longrightarrow i$.

□

Wniosek.
przestrzeń stanów $S = \dot{\bigcup}[i]_{/\leftrightarrow}$, $[i]_{/\leftrightarrow} = \{j \in S : i \longleftrightarrow j\}$

$$S_{/\leftrightarrow} \quad \text{przestrzeń ilorazowa}$$

Przestrzeń stanów dzieli się na rozłączne klasy. Niektóre klasy są jednoelementowe. Czasami $[i]_{\leftrightarrow} = \{i\}$

Definicja 30
Dla ustalonego łańcucha Markowa $(X_n)_{n \geqslant 0}$ o macierzy prawdopodobieństw przejść $P = [p_{ij}]$ okresem stanu i nazywamy liczbę

$$d(i) = NWD\left\{n \geqslant 0 : p_{ij}^{(n)} > 0\right\} = NWD\left\{n - m : pp_{ij}^{(n)}, P_{ij}^{(m)} > 0\right\}$$

Uwaga!
Jeżeli $\forall_{n \geqslant 1}\, p_{ii}^{(n)} = 0$, to $d(i) = \infty$.
Jeżeli $d(i) = 1$, to stan i nazywamy aperiodycznym.

Przykład 7

$$P\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right) = \begin{cases} p & j = i + 1 \\ q & j = i - 1 \\ 0 & \text{pozostałe} \end{cases}$$

$P_{ii}^{(2n)} > 0$
$p_{ii}^{(2n+1)} \equiv 0$
Konkluzja

$$\forall_{i \in \mathbb{Z}}\ d(i) = d = 2.$$

$i \longleftrightarrow j$ dla dowolnych $i, j \in \mathbb{Z}$

Definicja 31
Niech $(X_n)_{n \geqslant 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa. Mówimy, że łańcuch Markowa jest nieprzewiedlny (*irreducible*), jeśli

$$\forall_{i,j \in S}\ i \longleftrightarrow j.$$

Rozdział 9

7 grudnia 2015

Definicja 32
Niech $(X_n)_{n\geqslant 0}$ będzie łańcuchem Markowa (z czasem dyskretnym i skończoną lub przeliczalną przestrzenią stanów S). Mówimy, że łańcuch $X\ ({}_n)_{n\geqslant 0}$ jest nieprzewiedlny, gdy

$$\forall_{i,j\in S}\ i \longleftrightarrow j.$$

Twierdzenie 25
Niech $(X_n)_{n\geqslant 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa(z czasem dyskretnym i skończoną lub przeliczalną przestrzenią stanów S) o macierzy prawdopodobieństw przejść $[p_{ij}]_{S\times S}$. Jeżeli $i \longleftrightarrow j$, to $d(i) = d(j)$.
Przypomnienie: $d(i) = NWD\left\{n \geqslant 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$

Dowód. $i \longleftrightarrow j, P_{ij}^{(n)} > 0, p_{ji}^{(m)} > 0$ dla pewnych $n.m$ (myślimy, że $i \neq j$)

$$p_{ii}^{(n+m)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \geqslant p_{ij}^{(m)} > 0$$

$p_{ii}^{l(n+m)} > 0$

$$\underbrace{p_{ii}^{(n+m)} \cdot p_{ii}^{(n+m)} \dots p_{ii}^{(n+m)}}_{l \text{ razy}}$$

$d(j) = p_{jj}^{(s)} > 0$

$$p_{ii}^{(n+s+m)} \geqslant p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(s)} p_{ji}^{(m)}$$

$p_{ii}^{(n+m)} > 0$
$d(i)|n + s + m = n + m + s$

$d9i)|n+m$
Stąd $d(i)|s$ każde takie s, ze $p_{jj}^{(s)}>0$.
Z teorii podzielności liczb naturalnych $d(i)|d(j)$.
Z symetrii $\longleftrightarrow$ $d(j)|d(i)$.
Ostatecznie $d(i)=d(j)$ $\square$

Winosek
Jeżeli łańcuch Markowa jest nieprzewiedlny, to

$$\forall_{i,j\in S}\ d(i)=d(j)$$

Oznaczenia:
$(X_n)_{n\geqslant 0}$ - łańcuch Markowa jednorodny o macierzy prawdopodobieństw przejść $P=[p_{ij}]_{S\times S}$

$$\begin{aligned}
f_{ij}^{(n)} &= P\left(X_1\neq j,\dots,X_{n-1}\neq j, X_n=j\right), \quad n\geqslant 1\\
f_{ij} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(X_1\neq j,\dots,X_{n-1}\neq j, X_n=j\right) =\\
=&P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_1\neq j,\dots,X_{n-1}\neq j, X_n=j\}\right) =\\
=&P\left(\exists_{n\geqslant 1}\ X_n=j|X_0=i\right)
\end{aligned}$$

Moment Markowa

$$T_{ij}\overset{df}{=}\inf\{n\geqslant 1: X_n=j, X_0=i\}$$

Pierwsza chwila uderzenia w stan j.

$$T_j\overset{df}{=}\inf\{n\geqslant 1: X_n=j\}$$

Ogólnie

$$\begin{aligned}
&T_D\overset{df}{=}\inf\{n\geqslant 1: X_n\in D\}, D\subseteq S \qquad \text{hitting time}\\
&P\left(T_{ij}<\infty|X_0=i\right)=P_i\left(T_{ij}<\infty\right)=f_{ij}
\end{aligned}$$

Definicja 33
Niech $(X_n)_{n\geqslant 1}$ będzie łańcuchem Markowa z macierzą prawdopodobieństw przejść $P\left[p_{ij}\right]_{S\times S}$. Mówimy, że stan $j\in S$ jest powracający, jeżeli $f_{jj}=1$.
Mówimy, że stan $j\in S$ jest chwilowy, jeżeli $f_{jj}<1$.

Twierdzenie 26 (Charakteryzacja stanów powracających)
Neich $(X_n)_{n\geqslant 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem markowa z macierzą prawdopodobieństw przejść $P=[p_{ij}]_{S\times S}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. stan j jest powracający

2. $P\left(\{\omega\in\Omega : X_n(\omega)=j \text{ dla nieskończenie wielu } n\in\mathbb{N}\}\,|X_0=j\right)=1$

3. $\sum_{n=1} p_{jj}^{(n)}=\infty$

$$
\begin{aligned}
&L(\omega)=\#\{n\geqslant 1 : X_n=j\}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{j\}}\left(X_n(\omega)\right)\\
&\{L_j\geqslant 1\}=\{T_j(\omega)<\infty\}\\
&\{L_j\geqslant 2\}=\left\{\exists_{n\geqslant 1}\ X_{t_j+n}=j\right\}\\
&T_j^{[2]}(\omega)=\inf\{n>T_j(\omega) : X_n(\omega)=j\} \qquad \text{chwila drugiego trafienia w } j\\
&T_j^{[k]}(\omega)=\inf\left\{n>T_j^{[k-1]}(\omega) : X_n(\omega)=j\right\} \qquad \text{chwila } k\text{-tego trafienia do } j
\end{aligned}
$$

$f_{jj}=P\left(T_j<\infty\right)=P\left(L_j\geqslant 1\right)$
$P\left(L_j\geqslant 2\right)=P\left(\exists_{n\geqslant 1}\ X_{t_j^{[1]}=j|X_0=j}\right)$

$$
\begin{aligned}
T_j^{[1]} =&\sum_{l=1}^{\infty}P\left(\exists_{n\geqslant 1}\ X_{T_j^{[1]}+n}(\omega)=j|T_j^{[1]}=l\right)P\left(T_j^{[1]}=l|X_0=j\right)=\\
=&\sum_{l=1}^{\infty}f_{jj}\cdot P\left(T_j^{[1]}=l|X_0=j\right)=\\
=&f_{jj}\cdot\sum_{l=1}^{\infty}P\left(T_j^{[1]}=l|X_0=j\right)=\\
=&f_{jj}\cdot P\left(T_j^{[1]}<\infty|X_0=j\right)=f_{jj}^2
\end{aligned}
$$

W ten sam sposób

$$P\left(L_j\geqslant m\right)=f_{jj}^m$$

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2)
Jeżeli $f_{jj}=1$, to

$$
\begin{aligned}
&\forall_{n\in\mathbb{N}}\ P\left(L_j\geqslant m\right)=f_{jj}^m=1^m=1\\
&P\left(\{\omega\in\Omega : L_j(\omega)=\infty\}\right)=P\left(\bigcap_{n=1}\infty\left\{L_j\geqslant m\right\}\right)=\lim_{m\to\infty}P\left(L_j\geqslant m\right)=1\\
&P\left(\left\{\omega\in\Omega : \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{j\}}\left(X_n(\omega)=\infty\right)\right\}\right)=P\left(\{\omega\in\Omega : L_j(\omega)=\infty\}\right)=1
\end{aligned}
$$

$(2) \Rightarrow (3)$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \\
=&\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{j\}}\left(X_n\right) dP_j = \\
=&\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_j \mathbb{1}_{\{j\}}\left(X_n\right) = \\
=&\mathbb{E}_j \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{j\}}\left(X_n\right) = \\
=&\mathbb{E}_j L_j(\omega) = \infty
\end{aligned}$$

$(3) \Rightarrow (1)$
Przypuśćmy, że $f_{jj} < 1$.
$P_j\left(L_j \geqslant m\right) = f_{jj}^m$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_j\left(L_j \geqslant m\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^m = \frac{f_{jj}}{1 - f_{jj}} < \infty$$
$$\mathbb{E}_{P_j}\left(L_j\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$$

Sprzeczność. □

Lemat 3
$\left(X_n\right)_{n\geqslant 0}$ jednorodny łańcuch Markowa z macierzą prawdopodobieństw przejść $P = \left[p_{ij}\right]_{S\times S}$. Jeżeli j jest stanem powracającym oraz $j \longleftrightarrow i (f_{ji} > 0)$. Wówczas $f_{ij} = 1$.

Dowód.
$j \longrightarrow i \Rightarrow \exists_{n_0}\, p_{ji}^{(n_0)} > 0$
$P\left(L_j = \infty | X_0 = j\right) = 1$. Zatem istnieje $n > n_0$ takie, że $X_n = j$.
$P\left(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = j \text{ dla pewnego } n > n_0 | X_0 = j\}\right) = 1$

$$\begin{aligned}
1 =&P_j\left(\exists_{n>n_0}\, X_n = j\right) = \\
=&\sum_{l\in S} P\left(\exists_{n>n_0}\, X_n = j | X_{n_0} = l\right) P_j\left(X_{n_0} = l\right) = \\
=&\sum_{l\in S} P_j\left(\exists_{n\geqslant 1}\, X_{n+n_0} = j | X_{n_0} = l\right) p_{jl}^{(n_0)} = \\
=&\sum_{l\in S} f_{ij} p_{jl}^{(n_0)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
1-\sum_{l\in S} f_{ij}p_{jl}^{(n_0)} &= \\
=\sum_{l\in S} p_{jl}^{(n_0)} - \sum_{l\in S} f_{ij}p_{jl}^{(n_0)} &= \\
=\sum_{l\in S} \underbrace{p_{jl}^{(n_0)}}_{\geqslant 0}\underbrace{(1-f_{lj})}_{\geqslant 0}
\end{aligned}
$$

Jeżeli $p_{jl}^{(n_0)} > 0$, to $1-f_{lj}=0$

Właśnie $j \longrightarrow i$ spełnia $p_{ji}^{(n_0)} > 0$ zatem ostatecznie $f_{ij}=1$ $\square$

Lemat 4

Niech $(X_n)_{n\geqslant 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejść $P=[p_{ij}]$. Jeżeli $j\in S$ jest stanem chwilowym to dla dowolnego $i\in S$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$$

co implikuje

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

Dowód. Ustalmy $i\in S$. Jeżeli $\forall_{n\geqslant 1}\ p_{ij}^{(n)}=0$ (tzn. $\neg\,(i\longleftrightarrow j)$), to oczywiście

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Zatem będziemy rozpatrywali przypadek $\exists_{n\geqslant 1}\ p_{ij}^{(n)} > 0$.

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} =& P\left(X_n=j|X_0=i\right) = \\
=&\frac{P\left(X_n=j, X_0=i\right)}{P\left(X_0=i\right)} = \\
=&\frac{P\left(\{X_n=j\}\cap\{T_j\leqslant n\}\cap\{X_0=i\}\right)}{P\left(X_0=i\right)} = \\
=&\frac{P\left(\{X_n=j\}\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}\{T_j=k\}\cap\{X_0=i\}\right)}{P\left(X_0=i\right)} = \\
=&\sum_{k=1}^{n}\frac{P\left(\{X_n=j\}\cap\{X_1\neq j,\ldots,X_{k-1}\neq j, X_k=j\}\cap\{X_0=i\}\right)}{P\left(X_0=i\right)} = \\
=&\sum_{k=1}^{n}\frac{P\left(X_n=j|X_k=j, X_{k-1}\neq j,\ldots,X_0=i\right)}{P\left(X_0=i\right)}P\left(X_k=j, X_{k-1}\neq j,\ldots,X_0=i\right) = \\
=&\sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{[k]} = p_{ij}^{(n)}
\end{aligned}
$$

W ostatnim przejściu pamiętamy, że $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} p_d^{(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{[k]} p_{jj}^{(n-k)} \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{[k]} \sum_{n=k}^{n} p_{jj}^{(n-k)} = \\
&= \left(\sum_{n=1}^{n} p_{jj}^{(n)} \right) \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{[k]} < \infty
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$$

$\square$

Wniosek

Jeżeli przestrzeń stanów S dla jednorodnego łańcucha Markowa $(X_n)_{n \geqslant 0}$ jest skończona ($\#S < \infty$), to istnieje co najmniej jedne stan powracający.

Dowód. Przypuśćmy, że wszystkie stany są chwilowe.

$$\forall_{i \in S} \forall_{j \in S} \sum_{n=0}^{\infty} p_d^{(n)} = \rho_{ij} < \infty$$

$$\sum_{j \in S} \sum_{i \in S} \sum_{n=0}^{\infty} p_d^{(n)} = \sum_{i,j \in S} \rho_{ij} < \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} p_d^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} (\#S \cdot 1) = \infty$$

$\square$

Uwaga!

Może się zdarzyć, że dla $\#S = \infty$ nie ma w ogóle stanów powracających.

Oznaczenia

Część konserwatywna procesu $(X_n)_{n \geqslant 0}$

$$C = \{j \in S : j \text{ jest stanem powracającym}\} = \left\{ j \in S : \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty \right\}$$

Część dysypatywna procesu $(X_n)_{n \geqslant 0}$

$$D = \left\{ j \in S : p_{jj}^{(n)} \infty \right\}$$

Definicja 34
Niech $(X_n)_{n\geqslant 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów S o macierzy prawdopodobieństw przejść $P = [p_{ij}]_{S\times S}$. Mówimy, że $A \subseteq S$ jest zamknięty (niezmienniczy), jeśli spełnia

$$\forall_{i\in A}\forall_{j\notin A}\, p_{ij} = 0$$

Inaczej

$$P\mathbb{1}_A(i) = \sum_{j\in A} p_{ij} = \sum_{j\in A} \mathbb{1}_A(j)p_{ij}$$

Twierdzenie 27
Część konserwatywna procesu jest zbiorem zamkniętym.

Dowód. Niech $i \in C$ oraz $i \longleftrightarrow j$. Przypuśćmy $p_{ij}^{(n_0)} > 0$. Wtedy $f_{ij} = 1$ z lematu.

$$\exists_{n_0\geqslant 1}\, p_{ij}^{(n_0)} > 0$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)} \geqslant \\
&\geqslant \sum_{k=m_0+n_0+1}^{\infty} p_{jj}^{(k)} \geqslant \\
&\geqslant \sum_{k=m_0+n_0+1}^{\infty} p_{ji}^{(m_0)} p_{ii}^{(k-n_0-m_0)} p_{ij}^{(n_0)} = \\
&= \underbrace{p_{ji}^{(m_0)}}_{\geqslant 0} \sum_{l=1}^{\infty} \underbrace{p_{ii}^{(l)}}_{\infty} \underbrace{p_{ij}^{(n_0)}}_{\geqslant 0} = \infty
\end{aligned}$$

□

Rozdział 10

14 grudnia 2015

Komentarz związany z kolokwium
$\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ jednorodny proces Poissona z intensywnością $\lambda > 0$
$cov\left(N(t), N(s)\right) = \lambda\left(t \wedge s\right) = \lambda \cdot \min\left\{s, t\right\}$
$\mathbb{E}\left(N(t)\cdot N(s)\right) = cov\left(N(t), N(s)\right) + \mathbb{E}N(t)\mathbb{E}N(s) = \lambda\cdot\min\left\{s,t\right\} + \lambda s\cdot\lambda t$ dla $t \geqslant s$
$\mathbb{E}\left(N(t)\cdot N(s)\right) = \mathbb{E}\left(\left(N(t)\cdot N(s)\right)\cdot N(s) + N(t)^2\right)$ koniec komentarza

Niech $(X_n)_{n\geqslant 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem markowa z macierzą prawdopodobieństw przejść $P = [p_{ij}]$. Oznaczmy

$$\tau_j = \begin{cases} \min\left\{n \geqslant 1 : X_n(\omega) = j\right\} \\ \infty, \text{ jeżeli } \forall_{n\geqslant 1}\, X_n(\omega) \neq j \end{cases}$$

moment Markowa.

$$m_{jj} = \mathbb{E}_j\left(\tau_j\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{jj}^{[n]} = \int\limits_{\Omega} \tau_j\, dP\left(\cdot | X_0 = j\right)$$

Przypomnienie

$$f_{jj}^{[n]} = P\left(X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j | X_0 = j\right)$$

Definicja 35
Mówimy, że stan $j \in C$ jest dodatnio powracający, jeżeli $m_{jj} < \infty$.
Mówimy, że stan $j \in C$ jest 0 powracający, jeżeli $m_{jj} = \infty$.

Uwawga!
Oczywiście, jeżeli $j \in D = S\backslash C$ to $P_j\left(\tau_j = \infty\right) > 0$. Zatem

$$\forall_{j\in D}\, m_{jj} = \infty$$

Definicja 36
Mówimy, że miara probabilistyczna μna $(S, 2^S)$ jest niezmiennicza (stacjonarna) dla j łańcucha Markowa $(X_n)_{n\geqslant 0}$ o macierzy prawdopodobieństw przejść P, jeżeli

$$\forall_{j\in S} \sum_{i\in S} \mu_i \cdot p_{ij} = \mu_j$$
$$\underline{\mu} \circ P = \underline{\mu}$$

$$\mathcal{P}(S) \ni \underline{\mu} \to \underline{\mu} \circ P \in \mathcal{P}(S)$$
$$(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots) \circ \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$$

Uwaga!
Niech X_0 ma rozkład $\underline{\mu}\,[P(X_0 = i) = \mu_i]$. Rozkład x_1?

$$P(X_1 = j) = \sum_{j\in S} P(X_1 = j|X_0 = i)\, P(X_0 = i) = \sum_{i\in S} \mu_i \cdot p_{ij} = \underline{\mu} \circ P$$

$$\underline{\mu} \text{ rozkład } X_0$$
$$\underline{\mu} \circ P \text{ rozkład } X_1$$
$$\underline{\mu} \circ P^2 \text{ rozkład } X_2$$

Twierdzenie 28
Niech $(X_n)_{n\geqslant 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejść $P = [p_{ij}]_{S\times S}$. Jeżeli $r \in C$ jest stanem dodatnio powracającym, wówczas istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna niezmiennicza π o własności $\pi_r > 0$. Co więcej

$$\pi_r = \begin{cases} \frac{1}{m_{rr} = \frac{1}{\mathbb{E}_r \tau_r}}, & j = r \\ 0, & j \notin [r] \\ \frac{1}{\mathbb{E}_r \tau_r} \cdot \left(1 + P_{r_j} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_n \in S\setminus\{r\}} p_{ri_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \ldots p_{i_{n-1}j}\right), & j \in [r] \wedge j \neq r \end{cases}$$

Wniosek

$$C = C_+ \cup C_0$$
$$C_+ = \{r \in C : \mathbb{E}_r \tau_r < \infty\} = \left\{j \in C : \mu_j > 0 \text{ dla pewnej } \underline{\mu} \circ P = \underline{\mu}\right\}$$

Twierdzenie 29
Niech $(X_n)_{n\geqslant 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów S o macierzy prawdopodobieństw przejść $P[p_{ij}]$. Łańcuch $(X_n)_{n\geqslant 0}$jest stacjonarny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu^{(0)} = \mathcal{L}(X_0)$ rozkład początkowy jest miarą niezmienniczą.

Dowód. $\Rightarrow$ Ze stacjonarności $(X_0, X_1, \ldots, X_n) \sim (X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$. $\mathcal{L}(X_0) = \mathcal{L}(X_1)$. Ale pamiętamy, że $\underline{\mu}^{(1)} = \underline{\mu}^{(0)} \circ P$, czyli mamy $\underline{\mu}^{(0)} = \mu^{(0)} \circ P$. **Uwaga!** Iterując $\underline{\mu}^{(n)} = \underline{\mu}^{(0)} \circ P^n$ dla dowolnego $n \geqslant 0$
$\Leftarrow$
Załóżmy, że $\underline{\mu}^{(0)} = \underline{\mu}^{(0)} \circ P$.
$\mu_{(X_0,\ldots,X_n)} = \mu_{(X_k,\ldots,X_{n+k})}$ dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots$?

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = P(X_k = i_0, X_{k+1} = i_1, \ldots, X_{k+n} = i_n)$$

dla dowolnego wyboru $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$

$$P(X_0 = i_0)\, p_{i_0 i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n}$$
$$P(X_k = i_0)\, p_{i_0 i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n}$$
$$P(X_k = i_0) = \left(\underline{\mu}^{(0)} \circ P^k\right)_{i_0} = \mu^{(0)}_{i_0} = P(X_0 = i_0)$$

Stąd $P(X_0 = i_0)\, p_{i_0 i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} = P(X_k = i_0)\, p_{i_0 i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n}$ dla dowolnego $k \geqslant 0$. Czyli otrzymaliśmy stacjonarność $X_0, X_1, \ldots$ □

Twierdzenie 30
Niech $(X_n)_{n\geqslant 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z macierzą prawdopodobieństw przejść $P = [p_{ij}]$. Wówczas

1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)} = \frac{1}{m_{jj}}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{m_{jj}}$$

jeśli dodatkowo założymy, że j jest aperiodyczny

3.

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{d}{m_{jj}}$$

jeżeli dodatkowo założymy, że $d(j) = d$.

Uwaga!
Powyższe twierdzenie nosi nazwę średniego twierdzenia ergodycznego na l^1.

Proces ruchu Browna

Intuicyjne wprowadzenie w teorię procesów ruchu Browna (procesów Wienera).
$X_1, \ldots$ ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie takich, że
$P(X_k = -1) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$
$X_t^{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \Delta x \cdot X_1 + \Delta x \cdot X_2 + \ldots \Delta x \cdot X_{\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor}$ dla $t \geqslant 0$
Spacer losowy o skokach $\pm \Delta x$

$$\mathbb{E} X_t^{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor} \mathbb{E} \Delta x \cdot X_1 = 0$$

$$\mathrm{Var} X_t^{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor} \mathrm{Var}\left(\Delta x \cdot X_j\right) = \Delta x^2 \cdot \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \cdot 1$$

Dobieramy $\Delta x, \Delta t$

Rozdział 11

21 grudnia 2015

$X_t^{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \Delta x \cdot X_1 + \dots + \Delta x \cdot X_{\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor}, X_1, X_2, \dots$ - i.i.d.
$X_j \in \{-1, 1\}$
$P\left(X_j = 1\right) = P\left(X_j = -1\right) = \frac{1}{2}$

$$X_t^{\frac{\Delta x}{\Delta t}} \xrightarrow[\substack{\Delta x \to 0^+ \\ \Delta t \to 0^+}]{?}$$

Załóżmy, że $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$
$c > 0$ - stała

$$\frac{\Delta x \cdot X_1 + \dots + \Delta x \cdot X_{\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor}}{\sqrt{\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor} \Delta x} \overset{\mathcal{D}}{\Longrightarrow} \mathfrak{X} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\Delta x \cdot X_1 + \dots + \Delta x \cdot X_{\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor} =$$

$$= \sqrt{\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \Delta x^2} \cdot \frac{\Delta x \cdot X_1 + \dots + \Delta x \cdot X_{\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor}}{\sqrt{\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor} \Delta x} \overset{\mathcal{D}}{\Longrightarrow} \mathcal{N}(0, c^2 t)$$

$$\left(\frac{t}{\Delta t} - 1 \right) \Delta x^2 \leqslant \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \Delta x^2 \leqslant \frac{t \Delta x^2}{\Delta t}$$

Definicja 37
Dla $t \geqslant 0$ niech

$$X_t \overset{df}{=} \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta x = c\sqrt{\Delta t}}} X_t^{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

Wniosek

$X_t \sim \mathcal{N}(\mu = 0, \mathrm{Var} = c^2 t)$

$$\underbrace{\Delta x X_1 + \cdots + \Delta x X_{\lfloor \frac{s}{\Delta t} \rfloor}}_{X_s} + \underbrace{\Delta x X_{\lfloor \frac{s}{\Delta t} \rfloor + 1} + \cdots + \Delta x X_{\lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor}}_{X_{t-s}} \to X_t$$

$$X_s \sim \mathcal{N}(0, c^2 s) \qquad\qquad X_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, c^2(t-s))$$

$X_t - X_s$ ten sam rozkład co X_{t-s} oraz $X_{t-s} \perp\!\!\!\perp X_s$

Otrzymany proces jest procesem o przyrostach niezależnych, jednorodnych. Mała kolizja oznaczeń; proces graniczny oznaczamy $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$ i wyjściowy ciąg Bernoulliego niestety oznaczamy $X_1, X_2, \ldots$.

Definicja 38
Mówimy, że proces stochastyczny $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t \geqslant 0}$ jest procesem ruchu Browna, jeżeli spełnia

1. $X_0 = 0$ z pr. 1
2. $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$ jest procesem o przyrostach niezależnych i jednorodnych
3. $\forall_{t \geqslant 0}\ X_t \sim \mathcal{N}(0, c^2 t)$
4. Trajektorie $X_t(\omega)$ są funkcjami ciągłymi (zmiennej t) dla P prawie wszystkich $\omega \in \Omega$

Pytanie
Czy taki proces stochastyczny istnieje?
Heurystycznie pokazaliśmy, że atk.
Tak, istnieje (dowód pełny podał Wiener; w latach 60 piękny dowód istnienia podał Z. Ciesielski (Sopot, IMPAN))

Uwaga!
(10,(2),(3) implikuje (4) [z dokładnością do wersji]
Od tej pory będziemy zakładali $c = 1$.
Standardowy proces ruchu Browna ma rozkłady $X_t \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$. $\mathrm{Var} X_t = t$

Definicja 39
Mówimy, że proces stochastyczny $\{Y_t\}_{t \geqslant 0}$ określony na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i wartościach w przestrzeni fazowej (stanów) $(S < \mathcal{G})$ jest procesem Markowa, jeżeli

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{Y_{n-1}, Y_{n-2}, \ldots, Y_0 \in S} \forall_{B \in \mathcal{G}} \forall_{t_n > t_{n-1} > \cdots > t_0}$$

zachodzi warunek Markowa

$$P\left(Y_{t_n} \in B | Y_{t_{n-1}} = y_{n-1}, Y_{t_{n-2}} = y_{n-2}, \ldots, Y_{t_0} = y_0\right) = P\left(Y_{t_n} \in B | Y_{t_{n-1}} = y_{n-1}\right)$$

$$F_{Y_{t_n} | Y_{t_{n-1}} = y_{n-1}, Y_{t_{n-2}} = y_{n-2}, \ldots, Y_{t_0} = y_0} = F_{Y_{t_n} | Y_{t_{n-1}} = y_{n-1}}$$

Oznaczenie

$$P\left(Y_t \in B | Y_s = y\right) = P^{[s,t]}(y, B) \qquad 0 \leqslant s < t$$

funkcja prawdopodobieństwa przejścia. Czas ciągły i przestrzeń stanów (może być ciągła).

Twierdzenie 31
Proces ruchu Browna jest procesem Markowa.

Dowód. Ustalmy $n \in \mathbb{N},\ t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n,\ y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$, $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ $\square$

$$\begin{aligned}
&P\left(X_{t_n} \in B | X_{t_{n-1}} = y_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = y_0\right) = \\
=&P\left(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in B - y_{n-1} | X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} = y_{n-1} - y_{n-2}, \ldots, X_{t_1} - X_{t_0} = y_1 - y_0,\right. \\
&\left. X_{t_0} = y_0\right)
\end{aligned}$$

Niezależność przyrostów

$$\begin{aligned}
&P\left(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in B - y_{n-1}\right) = \\
=&\int\limits_{B - y_{n-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\left(t_n - t_{n-1}\right)}\right) dx = \\
=&\int\limits_{B - y_{n-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} \exp\left(-\frac{\left(x - y_{n-1}\right)^2}{2\left(t_n - t_{n-1}\right)}\right) dx = \\
=&P^{[t_{n-1}, t_n]}\left(y_{n-1}, B\right)
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X_{t_n} \in B\}} | X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_0}\right) \stackrel{?}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X_{t_n} \in B\}} | X_{t_{n-1}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&P\left(X_{t_n} \in B | X_{t_{n-1}} = y_{n-1}\right) = \\
=&P\left(X_{t_n} - y_{n-1} \in B - y_{n-1} | X_{t_{n-1}} - X_0 = y_{n-1} - 0\right) = \\
=&P\left(X_{t_n} - y_{n-1} \in B - y_{n-1} | X_{t_{n-1}} - X_0 = y_{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Niezależność przyrostów $X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \perp\!\!\!\perp X_{t_{n-1}} - X_0$

$$\begin{aligned}
&P\left(X_{t_n} - y_{n-1} \in B - y_{n-1}\right) = \\
=&P\left(X_{t_n - t_{n-1}} \in B - y_{n-1}\right) = \\
=&\int\limits_{B-y_{n-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\left(t_n - t_{n-1}\right)}\right) dx = \\
=&\int\limits_{B} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} \exp\left(-\frac{\left(x - y_{n-1}\right)^2}{2\left(t_n - t_{n-1}\right)}\right) dx
\end{aligned}$$

Dygresja formalna

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X_{t_n} \in B\}} | X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_0}\right) = P^{[t_{n-1}, t_n]}\left(X_{t_{n-1}, B}\right)$$

Twierdzenie 32
Jeżeli $\{B_t\}_{t \in [0,\infty)}$ *jest standardowym procesem ruchu Browna to*

$$cov(B_s, B_t) = s \wedge t \ \ (= \min\{s,t\})$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}\left(B_s, B_t\right) = \\
=&\mathbb{E}B_sB_t - \mathbb{E}B_s\mathbb{E}B_t = \\
=&\mathbb{E}B_sB_t \stackrel{s=s\wedge t}{=} \\
=&\mathbb{E}\left(\left(B_t - B_s + B_s\right)B_s\right) = \\
=&\mathbb{E}\left(\left(B_t - B_s\right)B_s + B_s^2\right) = \\
=&\mathbb{E}\left(\left(B_t - B_s\right)B_s\right) + \mathbb{E}B_s^2 = \\
=&\mathbb{E}\left(B_t - B_s\right)\mathbb{E}\left(B_s\right) + \operatorname{Var}B_s^2 = s = s \wedge t
\end{aligned}$$

□

Ostrzeżenie
Dwa różne procesy $\{N_t\}_{t \geqslant 0}, \{B_t\}_{t \geqslant 0}$ mają tę samą funkcję autokorelacji $c(s,t) = s \wedge t$

Twierdzenie 33
Niech $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$ *będzie standardowym procesem ruchu Browna. Dla dowolnych* $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $n \geqslant 1$, *wektor gaussowski* $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ *ma gęstość n-wymiarową (niezdegenerowaną) postaci*

$$f_{\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\right)}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{B} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(-\frac{\left(x_j - y_{j-1}\right)^2}{2\left(t_j - t_{j-1}\right)}\right) dx$$

Dowód. $\left(X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$ ma gęstość

$$f_{\left(X_{t_1}, X_{t_2}-X_{t_1}, \dots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}}\right)}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} f_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}}\left(x_j\right) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}}\left(x_j\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(-\frac{x_j^2}{2\left(t_j - t_{j-1}\right)}\right)$$

$$\psi\left(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right) = \left(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\right)$$

Jak wygląda $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$?

$$\psi\left(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\right) = \left(x_1, \dots, x_n\right)$$

$$\psi\left(y_1, y_2, \dots, y_n\right) = \left(y_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3, \dots, y_1 + y_2 + \dots + y_n\right)$$

ψ operacja liniowa.

$$f_{\psi(\vec{Z})}\left(z_1, \dots, z_n\right) = f\left(\psi^{-1}\right)\left|J_{\psi^{-1}}\right|$$

$$\psi^{-1}\left(z_1, \dots, z_n\right) = \left(z_1, z_2 - z_1, \dots, z_n - z_{n-1}\right)$$

Macierz

$$J_{\psi^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|J_{\psi^{-1}}\right| = 1$$

$$f_{\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\right)}\left(x_1, \dots, x_n\right) = f_{\left(X_{t_1}, X_{t_2}-X_{t_1}, \dots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}}\right)}\left(\psi^{-1}\left(x_1, \dots, x_n\right)\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(-\frac{\left(x_j - y_{j-1}\right)^2}{2\left(t_j - t_{j-1}\right)}\right)$$

□

11.1 Własności trajektorii standardowego procesu ruchu Browna

$\mathbb{R}_+ \ni t \to B_t(\omega)$ jest funkcją ciągłą dla P p.w. $\omega \in \Omega$.
Problem różniczkowalności

$$P\left(\left|\frac{X_{t+\Delta t}(\omega) - X_t(\omega)}{\Delta t}\right| > n\right) = 2\int_{n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{1}{\Delta t}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \frac{1}{\Delta t}}\right) dx \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 1$$

Według prawdopodobieństwa $\left|\frac{X_{t+\Delta t}-X_t}{\Delta t}\right| \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \infty$
Trajektorie procesu ruchu Browna są nigdzie różniczkowalne z prawdopodobieństwem 1.

Twierdzenie 34 (Prawo iterowania logarytmu)
Niech $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ będzie standardowym procesem Wienera (ruch Browna). Wówczas

$$P\left(\left\{\omega\in\Omega : \limsup_{t\to+\infty}\frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t\ln(\ln t)}} = 1\right\}\right) = 1$$
$$P\left(\left\{\omega\in\Omega : \liminf_{t\to+\infty}\frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t\ln(\ln t)}} = -1\right\}\right) = 1$$

Twierdzenie 35 (Lokalne prawo iterowania logarytmu)
Niech $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ będzie standardowym procesem Wienera (ruch Browna). Wówczas

$$P\left(\left\{\omega\in\Omega : \limsup_{t\to 0^+}\frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t\ln(\ln t)}} = 1\right\}\right) = 1$$
$$P\left(\left\{\omega\in\Omega : \liminf_{t\to 0^+}\frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t\ln(\ln t)}} = -1\right\}\right) = 1$$

Wniosek
Z prawdopodobieństwem 1, trajektoria $B_t(\omega)$ w okolicy $t_0 = -0$ przecina poziom 0 nieskończenie wiele razy.

Wniosek
Z prawdopodobieństwem 1, trajektoria $B(\omega)$

$$\limsup_{t\to 0^+}\frac{B_t(\omega)}{t} = +\infty \qquad\qquad \liminf_{t\to 0^+}\frac{B_t(\omega)}{t} = -\infty$$

Syntezując punkty skupienia $\frac{B_t(\omega)}{t} \underset{t\to 0^+}{=} [-\infty, +\infty]$

Widać

$$\frac{B_t(\omega)}{t} = \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t\ln|\ln t|}}\cdot\frac{2t\ln|\ln t|}{t}$$

11.2 Procesy stacjonarne

Definicja 40
Mówimy, że proces stochastyczny $\{X_t\}_{t\in T}$ jest procesem stacjonarnym w większym

sensie (ściśle stacjonarnym, mocno stacjonarnym, *strickly stationary,...*), jeżeli

$$\forall_n \forall_{t_0<t_1<\dots<t_n} \forall_h \; \mu_{\left(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\right)} = \mu_{\left(X_{t_0+h}, X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}\right)}$$
$$\forall_n \forall_{t_0<t_1<\dots<t_n} \forall_h \forall_{B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}} \; P\left((X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B\right) = P\left((X_{t_0+h}, X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}) \in B\right)$$

$T = \mathbb{Z}, \mathbb{N}_0, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}$, operacja $t_0 + h, t_1 + h, \dots, t_n + h$ nie może wyprowadzić poza T

Definicja 41
Mówimy, że proces stochastyczny $\{X_t\}_{t \in T}$ jest stacjonarny w szerszym sensie (słabo stacjonarny, *weakly stationary*), jeżeli $\forall_{t \in T} \; X_t \in L^2(P)$

1.
$$\forall_{t \in T} \; m_t = \mathbb{E} X_t = m = const$$

2.
$$\forall_{s,t \in T} \forall_h \; c(s,t) = \operatorname{cov}(X_s, X_t) = \operatorname{cov}(X_{s+h}, X_{t+h}) = c(s+h, t+h)$$
$$(= c(0, t-s) = c(t-s))$$

$$\operatorname{Var}(X_0) = c(0) = \operatorname{Var}(X_t) = const$$

Twierdzenie 36
Jeżeli $\{X_t\}_{t \in T}$ jest stacjonarny w węższym sensie i $X_t \in L^2(P)$ to jest stacjonarny w szerszym sensie (ale nie na odwrót).

Dowód. $\mu_{X_t} = \mu_{X_s}$ dla dowolnych $s, t \in T$ □

$$\mathbb{E} X_t = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mu_{X_t}(x) = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mu_{X_s}(x) = \mathbb{E} X_s = m = const$$
$$cov(X_s, X_t) \stackrel{?}{=} cov(X_{s+h}, X_{t+h})$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} (x-m)(y-m) \; d\mu_{(X_s, X_t)}(x,y) = \\
=&\int_{\mathbb{R}^2} (x-m)(y-m) \; d\mu_{(X_{s+h}, X_{t+h})}(x,y) = \\
=&cov(X_{s+h}, X_{t+h})
\end{aligned}$$

Definicja 42
Mówimy, że proces stochastyczny $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ jest procesem gaussowskim, jeżeli

$$\forall_n \forall_{t_1<t_2<\cdots<t_n} \ (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \text{ ma rozkład gaussowski}$$

$\mu_{\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\right)}$ jest miarą gaussowską na $\mathbb{R}^n$ (być może zdegenerowaną). Czyli

$$\varphi_{\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\right)}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \tau_k \cdot \mathbb{E}X_{t_k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} v_{k,l} \cdot \tau_k \tau_l\right)$$

gdzie $\operatorname{cov}(X_{t_k}, X_{t_l})$

Oznaczenia

$$V(t_1, \ldots, t_n) = \left[\operatorname{cov}(X_{t_k}, X_{t_l})\right]_{n\times n}$$
$$m(t_1, t_2, \ldots, t_n) = (\mathbb{E}X_{t_1}, \mathbb{E}X_{t_2}, \ldots, \mathbb{E}X_{t_n})$$

Rozdział 12

11 stycznia 2016

Twierdzenie 37
Niech $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t \in T}$ *będzie procesem gaussowskim. Wówczas* $\mathfrak{X}$ *jest stacjonarny w węższym sensie wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathfrak{X}$ *jest stacjonarny w szerzym sensie.*

Dowód. $\Rightarrow$ mocna stacjonarność implikuje słabą stacjonarność

$$X_t \in L^2 \left(\text{gdyż } X_t \in \bigcap_p L^p, \text{ a nawet } \mathbb{E}e^{\alpha |X_t|^2} < \infty \text{ dla pewnej } \alpha > 0 \right)$$

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned} &\mu_{t_1,\ldots,t_n} \sim \mathcal{N}\left(m_{t_1,\ldots,t_n}, V_{t_1,\ldots,t_n}\right), \qquad m_{t_1+h,\ldots,t_n+h} = \left(\mathbb{E}X_{t_1+h}, \ldots, \mathbb{E}X_{t_n+h}\right) = \\ &= \left(\mathbb{E}X_{t_1}, \ldots, \mathbb{E}X_{t_n}\right) = \\ &= m_{t_1,\ldots,t_n} \end{aligned}$$

i analogicznie

$$V_{t_1+h,\ldots,t_n+h} = \left[\operatorname{cov}\left(X_{t_j+h}, X_{t_k+h}\right)\right]_{n\times n} = \left[\operatorname{cov}\left(X_{t_j}, X_{t_k}\right)\right]_{n\times n} = V_{t_1,\ldots,t_n}$$

$$\begin{aligned} \mu^{\mathfrak{X}}_{t_1+h,\ldots,t_n+h} &= \mathcal{N}\left(m_{t_1+h,\ldots,t_n+h}, V_{t_1+h,\ldots,t_n+h}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(m_{t_1,\ldots,t_n}, V_{t_1,\ldots,t_n}\right) = \mu^{\mathfrak{X}}_{t_1,\ldots,t_n} \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 38
Proces gaussowski $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t \in T}$ *jest procesem Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\begin{aligned} &\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{t_1<\cdots<t_n=s<t}\ \mathbb{E}\left(X_t | X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}, X_s\right) = \mathbb{E}\left(X_t | X_s\right) \\ &\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{t_1<\cdots<t_n=s<t} \forall_{g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\ \mathbb{E}\left(g\left(X_t\right) | X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}, X_s\right) = \mathbb{E}\left(g\left(X_t\right) | X_s\right) \end{aligned}$$

gdzie g *jest ograniczoną funkcją borelowską.*

Przykład 8
Funkcja autokorelacji gaussowskiego procesu stacjonarnego i markowskiego. $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{E}X_t = m_t = 0$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(X_{t+s}|X_s\right) = \\
=&\frac{\operatorname{cov}\left(_{t+s}, X_s\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}X_{t+s}}\sqrt{\operatorname{Var}X_s}} \cdot \frac{\sqrt{X_{t+s}}}{\sqrt{\operatorname{Var}X_s}} X_s + (0 + \cdots + 0) = \\
=&\frac{\operatorname{cov}\left(_t, X_0\right)}{\operatorname{Var}X_s} \cdot X_s = \frac{c(t)}{c(0)} X_s = \\
=&\frac{\operatorname{cov}\left(_t, X_0\right)}{\operatorname{Var}X_s} \cdot X_s = \frac{c(t)}{\operatorname{Var}X_0} X_s
\end{aligned}$$

$\operatorname{cov}\left(X_{t+s}, X_s\right) = \operatorname{cov}\left(X_t, X_0\right) = c(t)$

$$\begin{aligned}
&c(0) \cdot \operatorname{cov}\left(X_0, X_{t+s}\right) = \\
=&c(0) \cdot \mathbb{E}\left(X_0 \cdot X_{t+s}\right) = \\
=&c(0) \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_0 \cdot X_{t+s}|X_0, X_s\right)\right) = \\
=&c(0) \cdot \mathbb{E}\left(X_0 \cdot \mathbb{E}\left(X_{t+s}|X_0, X_s\right)\right) = \\
=&c(0) \cdot \mathbb{E}\left(X_0 \cdot \frac{c(t)}{c(0)} X_s\right) = \\
=&c(0) \cdot \frac{c(t)}{c(0)} \mathbb{E}\left(X_0 \cdot X_s\right) = \\
=&c(t)\mathbb{E}\left(X_0 \cdot X_s\right) = \\
=&c(t) \cdot c(s)
\end{aligned}$$

Jak rozwiązać równanie funkcyjne $C(0) \cdot c(t+s) = c(t) \cdot c(s)$? Dla uproszczenia załóżmy, że $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą (borelowską)

$$\varphi(s) = \frac{c(s)}{c(0)}$$
$$\varphi(s+t) = \frac{c(s+t)}{c(0)} = \frac{c(t)c(s)}{c(0)c(0)} = \varphi(t) \cdot \varphi(s)$$
$$\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$$
$$\forall_{s,t>0}\ \varphi(s) = e^{-\alpha|s|}$$

dla pewnej stałej $\alpha > 0$ $\operatorname{cov}(X_0, X_s) = e^{-\alpha|s|}$
Gdy $\alpha = 0$ daje proces stały $X_t = X$

12.1 Procesy gałązkowe

Z_0 - liczba osobników, cząstek w chwili $t = 0$ - generacja zerowa
Z_1 - liczba osobników, cząstek w chwili $t = 1$ - pierwsza generacja
$\vdots$
Z_n - liczba osobników, cząstek w chwili $t = n$ - n-ta generacja

$(Z_n)_{n \geqslant 0}$ proces z czasem dyskretnym, $Z_n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. W chwili $k \geqslant 0$ mamy Z_k ochotników. Każda osobniczka rodzi $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X^k_{Z_k}, X^k_{Z_{k+1}}, \dots,$ "dzieci". $X^k_j, \quad j = 1, 2, \dots$ niezależne zmienne losowe o wartościach w $\mathbb{N}_0$ i tych samych rozkładach.
$G_{X^k_j}(s) = G_X(s)$ - funkcja tworząca

$$\begin{aligned} Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} X^{n-1}_j \Rightarrow \\ G_{Z_n} \mathbb{E} s^{Z_n} = \\ = G_{\sum_{j=1}^{Z_{n-1}} X^{n-1}_j}(s) = \\ = G_{Z_{n-1}}\left(G_Z(s)\right) = \\ = G_{Z_{n-1}} \circ G_Z(s) = \\ = G_{Z_0} \circ G^{\circ n}_X(s) \end{aligned}$$

Wniosek
Jeżeli $Z_0 = 1$ z pr. $1 (G_{Z_0}(s) = s)$, to $G_{Z_n}(s) = G_{Z_0}\left(G^{\circ n}_X(s)\right) = G^{\circ n}_X(s)$

Twierdzenie 39
Dla procesu gałązkowego $\{Z_n\}_{n \geqslant 0}, Z_0 = 1$ *z pr. 1.*

1.

$$\mathbb{E} Z_n = \mu^n$$

gdzie $\mu = \mathbb{E} X^k_j = \mathbb{E} X$

2.

$$Var Z_n = \begin{cases} n\sigma^2 & , \ gdy\ \mu = 1, \sigma^2 = Var(X) \\ \frac{\sigma^2(\mu^n - 1)\mu^{n-1}}{\mu - 1} & , \ gdy\ \mu \neq 1 \end{cases}$$

Dowód. □

Twierdzenie 40
Reich $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ *będzie procesem gałązkowym;* $Z_0 = 1$*. Wówczas prawdopodobieństwo wymarcia populacji (w skończonym czasie) jest równe najmniejszemu pierwiastkowi równania*

$$G_X(s) = s.$$

Dowód. Jeżeli $Z_n = 0$, to $Z_{n+1} = Z_{n+2} = \cdots = 0$

$$\{Z_1 = 0\} \subseteq \{Z_2 = 0\} \subseteq \{Z_3 = 0\} \subseteq \cdots \subseteq \{Z_n = 0\} \subseteq \{Z_{n+1} = 0\} \subseteq \ldots$$
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(Z_n = 0\right) = \lim_{n\to\infty} G_{Z_n}(0) = \lim_{n\to\infty} G_X^{\circ n}(0) = s^* = G_X(s^*)$$

Rozpatrzmy przypadki:
$X = 1$ z pr. 1; $G_X(s)$ ma najmniejszy pierwiastek $s^* = 0$. Oczywiście prawdopodobieństwo wynosi 0.
$\mu = \mathbb{E}X = 1 = G'_X(1)$
$s^* = 1 =$ prawdopodobieństwo wymarcia populacji □

Paradoks $P\left(\exists_{n\geqslant 1}\, Z_n = 0\right) = 1$, ale $\mathbb{E}Z_n = 1 = \mu^n$ dla każdego n

Rozdział 13

18 stycznia 2016

13.1 Twirdzenie Kołmogorowa o rozkładach zgodnych

Definicja 43
Niech $(S, \mathcal{G})$ będzie przestrzenią mierzalną taką, że $\forall_{s \in S}\ \{s\} \in \mathcal{G}$ oraz $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ przestrzeń probabilistyczna. Procesem stochastycznym na przestrzeni stanów (fazowej) $(S, \mathcal{G})$ nazywamy rodzinę elementów losowych $X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (S, \mathcal{G})$ (tzn. $\forall_{t \in T} \forall_{B \in \mathcal{G}}\ X_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}$), gdzie $t \in T$ (zbiór indeksów). Jeżeli $S = \mathbb{R}, \mathcal{G} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, wtedy proces $\{X_t\}_{t \in T}$ nazywamy procesem stochastycznym rzeczywistym.

- X - zmienna losowa ($T = \{t\}, X = X_t$) - charakteryzowany jest przez $F_X(\equiv \mu_X, f_X, \varphi_X, M_X)$
- $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ ($T = \{1, 2, \ldots, n\}$) - charakteryzowany jest przez $F_{\vec{X}}(\equiv \mu_{\vec{X}}, f_{\vec{X}}, \varphi_{\vec{X}}, M_{\vec{X}})$
- $X_1, X_2, \ldots$ ciąg zmiennych losowych - (np. łańcuch Markowa) $P = [p_{ij}]$
- $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t \in T}$ przez co jest charakteryzowany?

Definicja 44
Niech $\{X_t\}_{t \in T}$ będzie procesem stochastycznym Dla ustalonego $(t_1, \ldots, t_n) \in T^n, n \in \mathbb{N}$

$$\mu_{t_1, \ldots, t_n}(A) \stackrel{df}{=} P\left((X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A\right) (= \mu_{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})})$$

$A \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}$. ($\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$, gdy mamy proces stochastyczny rzeczywisty)
$\mu_{t_1, \ldots, t_n}$ nazywamy rozkładem skończenie wymiarowym odpowiadającym $(t_1, \ldots, t_n)$.

Definicja 45
Niech $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t\in T}$ będzie procesem stochastycznym. Rodzinę rozkładów skończenie wymiarowych procesu $\mathfrak{X}$ nazywamy rodzinę (wszystkich) miar na $S^n = S \times S \times \cdots \times S$ $\mu_{(t_1,\ldots,t_n)}, t_j \in T, n \in \mathbb{N}$, tzn.

$$M^{\mathfrak{X}} = \left\{\mu_{(t_1,\ldots,t_n)} : t_1, t_2, \ldots, t_n \in T, n = 1, 2, \ldots\right\}$$

Dygresja 1. $\mathcal{M}^{\mathfrak{X}}$ jest charakterystyką procesu $\mathfrak{X}$
Dygresja 2. Ewolucja teorii stochastycznej $F_X \rightsquigarrow F_{\vec{X}} \rightsquigarrow \mathcal{M}^{\mathfrak{X}}$
Uwaga!
Nie wykluczamy $t_i = t_j$ dla niektórych $i \neq j$.

Definicja 46
Przestrzenią kanoniczną dla procesu $= \{X_t\}_{t\in T}$ nazywamy $S^T = \{f : T \to S\}$. W przypadku procesów rzeczywistych $S^T = R^T$.

Dygresja

$$card\mathbb{R}^{[0,\infty]} = \mathfrak{C}^{\mathfrak{C}} = 2^{\aleph_0\times\mathfrak{C}} = 2^{\mathfrak{C}}$$

Uwaga!
$S^T = \left\{(f(t))_{t\in T}\right\} \leftrightarrow$ rodzina wszystkich trajektorii i hipotetycznych przekrojów procesu $\mathfrak{X}$.

$$\begin{aligned} &\underline{t} = (t_1, \ldots, t_n), A \in \mathcal{G}^{\otimes n} (\mathfrak{B}^n_{\mathbb{R}}) \\ &C_{\underline{t},A} = \left\{f \in S^T : (f(t_1), \ldots, f(t_n)) \in A\right\} \end{aligned}$$

Definicja 47
$C_{\underline{t},A}$ nazywamy cylindrem (skończenie wymiarowym o bazie $\underline{t} \in T^n$ i $A \in \mathcal{G}^{\otimes n}$)

Uwaga!
Cylindry nie są wyznaczone jednoznacznie.

$$\begin{aligned} &C_{t,A} = \left\{f \in S^T : f(t) \in A\right\} = C_{(t,t),A\times A} \\ &C_{(t,s),A\times S} = \left\{f \in S^T : (f(t), f(s)) \in A \times S\right\} \end{aligned}$$

Definicja 48
Ciałem cylindrów procesu $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t\in T}$ nazywamy
$\mathcal{C} = \left\{C_{\underline{t},A} : (t_1, \ldots, t_n) \in T^n, A \in \mathcal{G}^{\otimes n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

Twierdzenie 41
$\mathcal{C}$ jest ciałem podzbiorów przestrzeni kanonicznej S^T.

Dowód. 1.

$$\Phi = C_{t,\Phi} = \{f : T \to S : f(t) \in \Phi\} = C_{(t,t),A\times A\mathrm{c}}$$

2. $C \in \mathcal{C}$; $C \in C_{\underline{t},A}$,

$$C^{\mathrm{c}} = C_{\underline{t},A^{\mathrm{c}}} = \{f : T \to S : (f(t_1),\dots,f(t_n)) \in A^{\mathrm{c}}\}$$
$$C^{\mathrm{c}} = C_{\underline{t},A^{\mathrm{c}}} = \{f : T \to S : (f(t_1),\dots,f(t_n)) \notin A\}$$

3.

$$\begin{aligned}
&C_{(t_1,\dots,t_n),A_1} \cup C_{(t_1,\dots,t_n),A_2} = \\
=&\{f : T \to S : (f(t_1),\dots,f(t_n)) \in A_1 \vee (f(t_1),\dots,f(t_n)) \in A_2\} = \\
=&\{f : T \to S : (f(t_1),\dots,f(t_n)) \in A_1 \cup A_2\} = \\
=&C_{(t_1,\dots,t_n),A_1\cup A_2} \in \mathcal{C} \\
&C_{(t_1,\dots,t_n),A_1} = C_{(t_1,\dots,t_n,s_1,\dots,s_m),A_1\times S^m} \\
&C_{(s_1,\dots,s_m),A_2} = C_{(t_1,\dots,t_n,s_1,\dots,s_m),S^n\times A_2} \\
&C_{\underline{t},A_1} \cup C_{\underline{s},A_2} = C_{(t_1,\dots,t_n,s_1,\dots,s_m),A_1\times S^m\cup S^n\times A_2} \in \mathcal{C}
\end{aligned}$$

□

Definicja 49
Niech $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t\in T}$ będzie procesem stochastycznym. σ-ciałem cylindrycznym nazywamy $\mathcal{G}^T = \sigma(\mathcal{C})$. (dla rzeczywistego procesu stochastycznego B^T).

Twierdzenie 42
$A \in \mathcal{G}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $(t_1,t_2,\dots) \in T\times T\times\cdots = T^{\mathbb{N}}$ i baza $B \in \mathcal{G}\otimes\mathcal{G}\otimes\cdots = G^{\otimes\mathbb{N}}$, $A = \left\{f \in S^T : (f(t_1),f(t_2),\dots) \in B\right\}$

Dowód. Rozpatrzmy rodzinę
$\mathcal{H} = \left\{A \in \mathcal{G}^T : \exists_{(t_1,t_2,\dots)\in T^{\mathbb{N}}}\exists_{B\in\mathcal{G}^{\otimes\mathbb{N}}}\ A = D_{\underline{t},B} = \{f : T \to S : (f(t_1),f(t_2),\dots) \in B\}\right\}$
$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$
$C_{(t_1,\dots,t_n),E} = C_{(t_1,\dots,t_n,s_{n+1},dots),E\times S^\infty}$
Sprawdzamy, że $\mathcal{H}$ jest σ-ciałem podzbiorów S^T.
$\Phi \in \mathcal{H}, D_{\underline{t},B} = D_{\underline{t},B^{\mathrm{c}}}$
$\bigcup_{j=1}^{\infty} D_{\underline{t}^{(j)},B^{(j)}}$
$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}^T = \sigma(\mathcal{C})$
$\mathcal{G}^T = \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}^T$
Stąd $\mathcal{H} = \mathcal{G}^T$ □

Wniosek
$T = [0,1], C([0,1]) \subseteq \mathbb{R}^T = \mathbb{R}^{[0,1]}, C([0,1]) \notin B^{[0,1]}$ nie jest mierzalna względem sig-ciała cylindrycznego.

Twierdzenie 43
Niech $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t\in T}$ będzie procesem stochastycznym na przestrzeni $(S, \mathcal{G})$. Wówczas

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = \omega \longrightarrow (X_t(\omega))_{t\in T} \in \left(S^T, \mathcal{G}^T\right)$$

jest odwzorowaniem mierzalnym. Zatem $\mu_{\mathfrak{X}}(A) \stackrel{df}{=} P\left((X_t(\cdot))_{t\in T} \in A\right)$ definiuje miarę σ-addytywną na $\left(S^T, \mathcal{G}^T\right)$ i w konsekwencji otrzymujemy przestrzeń probabilistyczną $\left(S^T, \mathcal{G}^T, \mu_{\mathfrak{X}}\right)$.

Definicja 50
Niech $\left\{\nu_{(t_1,\dots,t_n)} : n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in T\right\}$ będzie rodziną miar probabilistycznych $\nu_{t_1,\dots,t_n}$ miara probabilistyczna σ-addytywna na $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n})$. Mówimy, że ta rodzina jest zgodna, jeżeli spełnia:

- dla dowolnego $n, B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$, dowolnych $t_1, \dots, t_n \in T$, dowolnego $t_{n+1} \in T$

$$\nu_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(B \times \mathbb{R}) = \nu_{t_1,\dots,t_n}(B)$$

- dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, dowolnych $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$ i dowolnej permutacji $\gamma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$

$$\nu_{t_1,\dots,t_n}(A_1 \times \dots \times A_n) = \nu_{t_{\gamma(1)},\dots,t_{\gamma(n)}}\left(A_{\gamma(1)} \times \dots \times A_{\gamma(n)}\right)$$

Prosty fakt

$$\nu_{t_{n+1},t_1,\dots,t_n}(\mathbb{R} \times B) = \nu_{t_1,\dots,t_n}(B)$$

Twierdzenie 44
Niech $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t\in T}$ będzie procesem stochastycznym. Wówczas rodzina rozkładów skończenie wymiarowych $\mathcal{M}^{\mathfrak{X}} = \{\mu_{t_1,\dots,t_n} : t_j \in T, n \in \mathbb{N}\}$ jest zgodna.

Dowód. 1.

$$\begin{aligned}
&\mu_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(B \times \mathbb{R}) = \\
=&P\left(\left(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, X_{t_{n+1}}\right) \in B \times \mathbb{R}\right) = \\
=&P\left((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B\right) = \\
=&\mu_{t_1,\dots,t_n}(B)
\end{aligned}$$

2. Podobnie

□

Twierdzenie 45
Niech $\mathcal{M}$ będzie rodziną rozkłądów skończenie wymiarowych. Wówczas istnieje proces stochastyczny $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t\in T}$ rzeczywisty (ewentualnie S - przestrzeń metryczna, ośrodkowa, zupełna), taka, że $\mathcal{M}^{\mathfrak{X}} = \mathcal{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{M}$ jest zgodna.

Dowód. $\Rightarrow$ z poprzedniego twierdzenia
$\Leftarrow$ (Znajdź $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ oraz $\{X_t\}_{t\in T}$) $\square$

Definicja 51 (Miara ciasna)
Niech (S, d) będzie przestrzenią metryczną oraz ν będzie miarą probabilistyczną σ-addytywną na $(S, \mathfrak{B}_s)$. Mówimy, że $\nu jest ciasna$ (*tight*), jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{K_\varepsilon\subseteq S}\ \nu\left(K_\varepsilon\right) > 1-\varepsilon$$

Twierdzenie 46 (Ulama)
Jeżeli (S, d) jest przestrzenią metryczną, zupełną i ośrodkową (przestrzeń polska), to dowolna miara probabilistyczna (σ-addytywna) ν na S jest ciasna.