Rozdział 1

28 września 2015

Procesy stochastyczne - teoria służąca do opisu analizy (wnioskowań) zjawisk losowych ewoluujących w czasie. Wywodzą się z rachunku prawdopodobieństwa. Modelowanie rzeczywistości obarczonej niepewnością (losowością). Przeciwieństwo równań różniczkowych.

$$y' = f(y,t)$$
$$y(t) = g(t,y_0)$$

Równania różniczkowe dostarczają modeli deterministycznych. Idealizuje, możliwe w warunkach laboratoryjnych. Bardzo dużo praktycznych zagadnień nie ma charakteru deterministycznego (a jak już ma to będzie to determinizm chaotyczny). Chaos to nie to samo, co losowość. Losowość tkwi w głębi natury. Dla przykładu mechanika kwantowa.

Podstawowe elementy (pojęcia) procesów stochastycznych:
Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega,\mathcal{F},P)$

$$\left.\begin{array}{l}\Omega \text{ - zbiór zdarzeń elementarnych} \\ \omega \in \Omega \text{ - zdarzenie elementarne}\end{array}\right\} \text{pojęcia pierwotne}$$

$\mathcal{F}$ - σ-ciało podzbioru Ω

Definicja 1 (σ-ciało)
Mówimy, że rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów Ω jest σ-ciałem, jeśli spełnia:

1. $$\emptyset \in \mathcal{F}, \quad \Omega \in \mathcal{F},$$

2. $$\forall_{A \in \Omega} \left[A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^{c} = \Omega \backslash A \in \mathcal{F} \right],$$

3. $$\forall_{A_1, A_2, \cdots \in \Omega} \left[\forall_n A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \right],$$

Definicja 2
Mówimy, że funkcja zbioru P określona na $(\Omega,\mathcal{F})$ jest σ-addytywnym prawdopodobieństwem (miarą probabilistyczną σ-addytywną), jeżeli spełnia:

1. $$P : \mathcal{F} \to [0,1],$$

2. $$P(\emptyset) = 0,$$

3. $$P(\Omega) = 1,$$

4. warunek σ-addytywności
$$\forall_{A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}} \left[\forall_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \right]$$

Definicja 3 (Proces stochastyczny)
Procesem stochastycznym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega,\mathcal{F},P)$ nazywamy rodzinę zmiennych losowych $\{X_t\}_{t \in T}$ określonych na $(\Omega,\mathcal{F},P)$.
T - zbiór indeksów (czasowych, gdy T interpretujemy jako czas)

Definicja 4 (Zmienna losowa)
Zmienna losowa X_t.

$$\forall_{t\in T}\forall_{B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}} X_t^{-1}(B)\in\mathcal{F}$$

X_t jest $\mathcal{F}$ mierzalne; X_t jest $\sigma(\mathcal{F},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}) mierzalna$

- $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ - σ-ciało zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$
- $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=\sigma\left(\{(\alpha,\beta):\alpha<\beta\}\right)$

Uwaga!

$$\mathrm{card}(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}})=\mathfrak{c}<2^{\mathfrak{c}}=\mathrm{card}\left(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\right)$$

Definicja 5
Niech Ω będzie ustalonym zbiorem. Mówimy, że rodzina $\mathcal{C}$ podzbiorów Ω tworzy ciało, jeżeli spełnia:

1. $$\emptyset,\Omega\in\mathcal{C}$$

2. $$\forall_{A\subseteq\Omega}\left[A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^{\mathrm{c}}\in\mathcal{C}\right]$$

3. $$\forall_{A,B\in\Omega}\left[A<B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C}\right]\equiv$$
$$\equiv\left[A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{C},\quad n\in\mathbb{N}\Rightarrow\bigcup_{j=1}^{n}A_j\in\mathcal{C}\right]$$

Definicja 6
Mówimy, że funkcja zbioru μ określona na $(\Omega,\mathcal{C})$ jest miarą probabilistyczną σ-addytywną, jeśli spełnia:

1. $$\mu(\emptyset)=0$$
$$\mu(\Omega)=1$$
$$\forall_{A\in\mathcal{C}}\,0\leqslant\mu(A)\leqslant 1$$

2. $$\forall_{A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{C}}\left[\forall_{i\neq j}A_i\cap A_j=\emptyset\wedge\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{C}\Rightarrow\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n\right)\right]$$

Rozdział 2

5 Października 2015

Twierdzenie 1
Niech $\mathcal{C}$ będzie ciałem podzbiorów Ω oraz $\mu : \mathcal{C} \to [0{,}1]$ będzie miarą skończenie addytywną na $(\Omega,\mathcal{C})$ nieujemną i unormowaną, czyli

$$\mu(\Omega) = 1,\forall_{a\in\mathcal{C}}\ 0 \leqslant \mu(A) \leqslant 1.$$

Wówczas następujące warunki są równoważne:

(A) μ jest σ-addytywna na $(a\Omega,\mathcal{C})$

(B) Ciągłość od dołu

$$\forall_{B_j\in\mathcal{C}}\forall_{B_1\subseteq B_2\subseteq\ldots} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_j\right)$$

(C) Ciągłość od góry

$$\forall_{C_j\in\mathcal{C}}\forall_{C_1\supseteq C_2\supseteq\ldots} \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu\left(C_j\right) = 0$$

Dowód. (A) $\Rightarrow$ (B)
$A_1 = B_1$
$A_2 = B_2 \backslash B_1$
$\vdots$
$A_n = B_n \backslash B_{n-1}$
$\vdots$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

$$
\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu\left(A_j\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_n\right)
\end{aligned}
$$

(B) $\Rightarrow$ (C)
$C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$
$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$
$B_n = C_n^{\mathrm{c}} = \Omega \backslash C_n$
$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right)^{\mathrm{c}} = \emptyset^{\mathrm{c}} = \Omega$

$$
\begin{aligned}
1 &= \mu\left(\Omega\right) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_n\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\Omega \backslash C_n\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\mu\left(\Omega\right) - \mu\left(C_n\right)\Big) = \\
=&\mu\left(\Omega\right) - \lim_{n\to\infty} \mu\left(C_n\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu\left(C_n\right) = 0
\end{aligned}
$$

(C) $\Rightarrow$ (A)
$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$
$\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \in \mathcal{C}$

$$
C_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \backslash \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \in \mathcal{C}
$$

$C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$
$\bigcap_{j=1}^{\infty} C_n = \emptyset.$

Z (C) $\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0$

$$\begin{aligned}
&\mu(C_n) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) - \sum_{j=1}^{n-1} \mu(A_j) \to 0
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

Ostatecznie

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

$\square$

Uwaga!

Warunek (C) jest bardzo wygodny do sprawdzenia.

Twierdzenie 2

Jeżeli μ jest prawdopodobieństwem σ-addytywnym na ciele $\mathcal{C}$ podzbiorów Ω, to istnieje dokładnie jedno rozszerzenie μ do miary probabilistycznej $\tilde{\mu}$ na $\sigma(\mathcal{C})$ $\{\tilde{\mu}|_{\mathcal{C}} = \mu\}$

$$(\Omega, \mathcal{C}, \mu) \rightsquigarrow (\Omega, \sigma(\mathcal{C}), \tilde{\mu})$$

Tradycyjnie $\tilde{\mu}$ piszemy μ.

Dygresja

$\Omega = \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{N}, \nu(A) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\mu(A \cap \{1,2,\dots,n\})}{n}$ gęstość zbioru A. Dobra miara "grubości" podzbiorów $\mathbb{N}$. Nie wszystkie podzbiory mają gęstość. Z całą pewnością ν nie jest σ-addytywna, bo $\nu(k) = 0, \operatorname{card}(k) < \infty$

$$1 = \nu(\mathbb{N}) \neq \lim_{n\to\infty} \nu(\{1,2,\ldots,n\}) = 0$$

Przykład 1
$\Omega = (0,1]$
$\mathcal{C}_{\text{przed.}} = \left\{\bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j,\beta_j] : n = 0,1,\ldots; 0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_n\right\}$
$F : [0,1] \to \mathbb{R}, F$ niemalejące, prawostronnie ciągłe.

$$\mu_F\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j,\beta_j]\right) \overset{df}{=} \sum_{j=1}^{n}\Big(F(B_j) - F(\alpha_j)\Big) \geqslant 0$$

μ_F jest skończenie addytywna na $((0,1],_{\text{przed.}})$, co widać z konstrukcji. Nieco trudniej dowodzi się, że μ_F jest σ-addytywna na ciele $\mathcal{C}_{\text{przed.}}$. Zatem każda funkcja niemalejąca, prawostronnie ciągła $F : [0,1]$ definiuje miarę σ-addytywną na $((0,1],\sigma(\mathcal{C}_{\text{przed.}}))$

Funkcje tworzące

(p.g.f. probability geometry function)

Niech $X : (\Omega,\mathcal{F},P) \to \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$ będzie zmienną losową $(ychX^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \subseteq \mathbb{N}$ - dowolny podzbiór) . Nową charakterystyką takich zmiennych losowych jest funkcja charakterystyczna.

Definicja 7 (Funkcja tworząca)
Funkcją tworzącą zmiennej losowej X o wartościach w $\mathbb{N}_0$ nazywamy

$$\Upsilon_X(s) = \mathbb{E}s^X \left(= \sum_{j=0}^{\infty} s^j P(X = j) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j p_j\right)$$

Pytanie: Dom(r_X)=?
r_X określona szeregiem potęgowym; pewnie analityczna. $r_X(z), z \in K(0,R)$

Twierdzenie 3
Niech $X.\tau, X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ będą zmiennymi losowymi losowymi o wartościach w $\mathbb{N}_0$ i oznaczmy $P(X = k) = p_k$, $P\Big(X^(n) = k\Big) = p_k^{(n)}, k = 0,1,2,\ldots$. Wówczas:

1. *dom*$(\Upsilon_X) \supseteq [-1,1]$ *(W przypadku dziedziny zespolonej $\overline{K}(0,1)$)*
   Υ_X *jest niemalejąca i wypukła na* $[0,1]$*oraz klasy C^∞ na* $(-1,1)$

2. $\Upsilon_X(1) = 1$

3.

$$\Upsilon'_X(0) = P(X = 1) = p_1$$
$$\Upsilon''_X(0) = 2 \cdot P(X = 2) = 2p_2$$
$$\vdots$$
$$\Upsilon^{(k)}_X(0) = k! \cdot P(X = k) = k!p_k$$

4. Dla X

$$\mathbb{E}X^n < \infty \Leftrightarrow \lim_{n \to 1^-} \Upsilon^{(n)}_X(s) = \Upsilon^{(n)}_X(1^-) < \infty$$

Co więcej

$$\Upsilon^{(n)}_X(1^-) = \mathbb{E}X(X-1)\cdots(X-n+1)$$

n-ty moment faktorialny

W szczególności

$$\mathbb{E}X = \Upsilon'_X(1^-)$$
$$\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}X(X-1) + \mathbb{E}X = \Upsilon''_X(1^-) + \Upsilon'_X(1^-)$$

5. *Jeżeli x i Y są niezależne o wartościach w $\mathbb{N}_0$, to* $\Upsilon_{X+Y}(s) = \Upsilon_X(s)\Upsilon_Y(s)$

6. *Jeżeli $X^{(1)}$,$X^{(2)}$,… są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i o wartościach w $\mathbb{N}_0$ i podobnie τ i dodatkowo ciąg $X^{(1)}$,$X^{(2)}$,… i τ są niezależne, to dla*

$$U = \sum_{j=1}^{\tau} X^{(j)}$$

mamy

$$\Upsilon_U(s) = \Upsilon_\tau\Big(\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\Big)$$

7. Dla dowolnego ciągu zmiennych losowych (niekoniecznie niezależnych) $X^{(1)}$,$X^{(2)}$,… i zmiennej losowej X o wartościach w $\mathbb{N}_0$ następujące warunki są równoważne:

(a) $\forall_{k \in \mathbb{N}_0} \lim_{n \to \infty} P\left(X^{(n)} = k\right) = P(X = k)$

(b) $X_n \overset{\mathcal{D}}{\Rightarrow} X$ *(zbieżność słaba)*

(c) $\forall_{s\in[0,1]} \lim\limits_{n\to\infty} \Upsilon_{X^{(n)}}(s) = \Upsilon_X(s)$

Dowód.

2. $\Upsilon_X(1) = \mathbb{E}1^X = \mathbb{E}1 = 1$

1.

$$\Upsilon_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^X p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

ten szereg potęgowy jest zbieżny dla $s = 1$ nawet bezwzględnie.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |p_k|\,|s|^k\right)_{s=1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\left|z^k\right| < \infty$$

$\Upsilon_X(z)$ jest dobrze określone na $|z| \leqslant 1$.
Υ_X jest funkcją analityczną (co najmniej) na $\{z : |z| < 1\}$, a stąd wynika, że Υ_X jest ciągła na $[-1,1]$ i ma ciągłe pochodne na $(-1,1)$.
$\Upsilon_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \geqslant 0$ na $[0,1]$
$\Upsilon'_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k s^{k-1} \geqslant 0$ - niemalejąca na $[0,1]$
$\Upsilon''_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-1} \geqslant 0$ dla $s \in [0,1]$
Reasumując Υ_X jest nieujemna, niemalejąca, wypukła na $[0,1]$.

$P(\{X+0\} \cup \{X=1\}) = 1$	$\Upsilon_X(s) = p_0 + p_1 \cdot s$
$P(X \geqslant 2) > 0$	Υ_X ściśle wypukła

3.

$$\Upsilon_X^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k}\left(\sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-k+1)p_j s^{j-k} = \sum_{j=k}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-k+1)p_j s^{j-k}$$

$$\Upsilon_X^{(k)}(0) = k(k-1)\cdots(k-k+1)p_k = k!p_k \Rightarrow p_k = P(X=k) = \frac{\Upsilon_X}{k!}$$

4.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}X = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\left(X = k\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot 1^k = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot s^k\right)_{s=1} = \\
&= \lim_{n \to 1^-} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot s^k\right) = \\
&= \lim_{n \to 1^-} \Upsilon'_X(s)
\end{aligned}
$$

Analogicznie

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}X(X+1)\cdots(X-n+1) = \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)p_k \cdot 1^{k-n+1} = \\
&= \lim_{n \to 1^-} \Upsilon_X^{(n)}(s)
\end{aligned}
$$

Uwaga!

$$
\mathbb{E}X^n < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-n+1) < \infty
$$

5. X,Y niezależne zmienne losowe o wartościach w $\mathbb{N}_0$

$$
\Upsilon_{X+Y}(s) = \mathbb{E}s^{X+Y} = \mathbb{E}s^X \cdot s^Y = \mathbb{E}s^X \cdot \mathbb{E}s^Y = \Upsilon_X^{(s)}\Upsilon_Y^{(s)}
$$

6. $V = \sum_{j=1}^{\tau} X^{(j)}$, ustalmy $\sum_{j=1}^{0} \cdots = 0$

$$
\begin{aligned}
\Upsilon_V(s) = \mathbb{E}s^V = \int\limits_{\Omega} s^V \, dP = \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\{\tau=n\}} s^{\sum_{j=1}^{\tau} x^{(j)}} \, dP = \\
= \int\limits_{\{\tau=0\}} s^{\sum_{j=1}^{0} x^{(j)}} \, dP + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\{\tau=n\}} s^{\sum_{j=1}^{\tau} x^{(j)}} \, dP = \\
=1 \cdot P(\tau = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \, dP \int\limits_{\Omega} s^{\sum_{j=1}^{\tau} x^{(j)}} \, dP = \\
=1^0 \cdot P(\tau = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n) \, \Upsilon_{\sum_{j=1}^{\tau} x^{(j)}}(s) = \\
=P(\tau = 0) \cdot s^0 + \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n) \left[\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\right]^n = \\
=P(\tau = 0) \cdot \left(\Upsilon_X^{(1)}(s)\right)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n) \left[\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\right]^n = \\
=\Upsilon_\tau\left(\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\right) = \Upsilon_\tau \circ \Upsilon_{X^{(1)}}(s)
\end{aligned}
$$

□