Rozdział 1

28 września 2015

Definicja 1
Mówimy, że ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo do funkcji $g : P \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{x \in P} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_o \in \mathbb{N}} \forall_{n > n_o} \, |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Przykład 1

a)

$$P = \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$
$$f_n(x_0) = \frac{x_0}{n} \to 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

b)

$$P = \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = xe^{-nx}$$
$$\forall_x \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

c)

$$P = [0{,}1]$$
$$f_n(x) = x^n$$
$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0{,}1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Definicja 2
Ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie na zbiorze P do funkcji $g : P \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_o\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_o}\forall_{x\in P}\,|f_n(x)-g(x)|<\varepsilon$$

Twierdzenie 1
Założenia:

- (f_n) *funkcje ciągłe*
- $f_n \to f$ *jednostajnie zbieżny na* P

Teza:

$$f : P \to \mathbb{R} \text{ jest ciągła}$$

$$\mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ \text{ciągła}\}$$

- przestrzeń liniowa $(f+g; \alpha\cdot f)$
- przestrzeń unormowana $\|f\|_0 = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$

Twierdzenie 2
Ciąg $(f_n) \in \mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ *jest zbieżny do* $f \in \mathcal{C}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_0 = 0$$

Dowód. Mamy pokazać, że f jest ciągła w x_0.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in P}\,|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ ustalone:

$$\begin{aligned}&\exists_\delta\forall_x\,|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f_n(x)-f_n(x_0)|<\tfrac{\varepsilon}{3}\\&\exists_{n_o}\forall_{n>n_0}\forall_x\,|f_n(x)-f(x)|<\tfrac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$\square$

Twierdzenie 3 (Kryterium Diniego)
Załóżmy, że $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest monotoniczny i zbieżny punktowo do funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Jeśli f_n i f są ciągłe to zbieżność jest jednostajna.

Przykład 2
Brak ciągłości funkcji granicznej $\quad f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$
Brak monotoniczności $\quad nxe^{-nx^2}$ na $[0,2]$
Brak ciągłości funkcji $\quad \chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right)} : [0,1] \to \mathbb{R}$
Brak zwartości dziedziny $\quad f_n(x) = x^n$ na $[0,1)$