Rozdział 1

1 marca 2016

$\mathbb{K}$ - ciało liczbowe, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Definicja 1
Przestrzenią wektorową (liniową) nad ustalonym ciałem K nazywamy strukturę algebraiczną

$$\Big(\mathfrak{X}, +, (\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)\,, \cdot\Big),$$

gdzie:

- $\mathfrak{X}$ - przestrzeń wektorowa
- $+$ - dodawanie wektorów
- * - opis ciała $\mathbb{K}$
- $\cdot$ - mnożenie wektorów przez skalar

spełniają:

1. $(\mathfrak{X}, +)$ - grupa przemienna ze względu na dodawania wektorów

$$x, y \in \mathfrak{X} \to x + y \in \mathfrak{X} \text{ jest wykonywalne}$$

$$\begin{aligned}
&\forall_{x,y,z\in\mathfrak{X}}\ (x+y)+z = x+(y+z)\\
&\forall_{x\in\mathfrak{X}}\exists_{(-x0)}\ x+(-x) = 0\\
&\exists_{0\in\mathfrak{X}}\forall_{x\in\mathfrak{X}}\ x+0 = 0+x = x\\
&\forall_{x,y\in\mathfrak{X}}\ x+y = y+x
\end{aligned}$$

2. $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$ jest ciałem

3. $\forall_{x,y\in\mathfrak{X}}\forall_{\alpha\in\mathbb{K}}\ \alpha\cdot(x+y)=\alpha x+\alpha y$

4. $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}\forall_{x\in\mathfrak{X}}\ (\alpha+\beta)\cdot x=\alpha x+\beta x$

5. $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}\forall_{x\in\mathfrak{X}}\ (\alpha\cdot\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$

6. $\forall_{x\in\mathfrak{X}}\ 1\cdot x=x$

Jeżeli $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, to mówimy, że $\mathfrak{X}$ jest przestrzenią wektorową rzeczywistą (nad ciałem liczb rzeczywistych).
Jeżeli $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, to mówimy, że $\mathfrak{X}$ jest przestrzenią wektorową zespoloną (nad ciałem liczb zespolonych).

0) $\mathfrak{X}=\{0\}$ zerowa (trywialna) przestrzeń wektorowa.

1) $\mathfrak{X}=\mathbb{K}$
$\mathfrak{X}=\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$, $\dim(\mathbb{R})=1$
$\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$ albo $\mathbb{R}$
$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})=1$
$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})=2$

2) $\mathfrak{X}=\mathbb{R}^n=\{(x_1,\dots,x_n):x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ nad $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

3) $\mathfrak{X}=\mathbb{C}^n=\{(z_1,\dots,z_n):z_j\in\mathbb{C}\}=\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}$ nad $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ albo $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)=n$
$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)=2n$

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$
$$t\cdot(x_1,\dots,x_n)=(tx_1,\dots,tx_n)$$

4) $\mathbb{R}^\infty=\{(r_1,r_2,\dots)\ r_j\in\mathbb{R}\}$ przestrzeń nieskończonych ciągów rzeczywistych nad ciałem $\mathbb{R}$
$\mathbb{C}^\infty=\{(z_1,z_2,\dots)\ r_j\in\mathbb{C}\}$ przestrzeń nieskończonych ciągów zespolonych nad ciałem $\mathbb{C}$

5) Ω - dowolny zbiór (niepusty)
$F(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R}:$ wszystkich funkcji rzeczywistych określonych na $\Omega\}$
$\mathbb{R}^\infty=F(\mathbb{N})$

6) $G(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{C}:$ wszystkich funckji zespolnych o dziedzinie $\Omega\}$
$(f_1+f_2)(\omega)=f_1(\omega)+f_2(\omega)$
$(\alpha f)(\omega)=\alpha\cdot f(\omega)$

7) $M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \{[a_{j,k}]_{m\times n} : a_{j,k} \in \mathbb{R}\}$
$M_{m\times n}(\mathbb{C}) = \{[a_{j,k}]_{m\times n} : a_{j,k} \in \mathbb{C}\}$
$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
$(\alpha A)_{jk} = \alpha a_{jk}$

8) $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{K} : f$ - funkcja ciągła$\}$
$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$
$(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$

9) $C^1[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{K} : f'$ istnieje i jest ciągła$\}$

10) $W[a,b] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : a_j \in \mathbb{K}, n \in \{0,1,\dots\}\}$
$W[\mathbb{R}] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : a_j \in \mathbb{K}, n \in \{0,1,\dots\}\}$

11) $W_n[a,b] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : a_j \in \mathbb{K}\}$
$W_n[\mathbb{R}]$ przestrzeń wektorowa wielomianów stopnia $\leqslant n$

12) $l^p = \left\{(x_1, x_2, \dots) : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\right\}$
$1 \leqslant p < \infty$

13) $L^p(\mu) = \left\{f : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{K} : \int\limits_{\Omega} |f|^p \, d\mu < \infty\right\} \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C}$

14) $l^\infty(\mu) = \left\{(x_1, x_2, \dots) : x_j \in \mathbb{K}, \sup\limits_j |x_j| < \infty\right\}$
$L^\infty(\mu) = \{f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to \mathbb{K} : \exists_M \ \mu\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > M\} = 0\} \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C}$

Definicja 2
Niech $\mathfrak{X}$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$. Mówimy, że $\mathcal{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni wektorowej $\mathfrak{X}$, jeśli:

1. $\forall_{y_1, y_2 \in \mathcal{Y}} \ y_1 + y_2 \in \mathcal{Y}$
2. $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathcal{Y}} \ \alpha \cdot y \in \mathcal{Y}$

Wniosek.

$$\left(\mathcal{Y}, +, (\mathbb{K}, +\cdot, 0, 1), \cdot\right) \text{ - przestrzeń wektorowa}$$

Przykład 1

0. $\mathcal{Y} = \{0\}$, $\mathfrak{X}$ - dowolne, bo $0 \in \mathfrak{X}$
$\mathcal{Y}$ jest podprzestrzenią wektorową trywialną.

1. $\mathcal{Y} = \mathfrak{X}$ jest też podprzestrzenią wektorową
2. $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^2,\ \mathcal{Y} = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$
3. $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^2,\ \mathcal{Y} = \{(2t, 3t) : t \in \mathbb{R}\}$
   $\dim \mathfrak{X} = 2$
   $\dim \mathcal{Y} = 1$
4. $\mathfrak{X} = M_{2\times 2}(\mathbb{C}),\ \mathcal{Y} = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} y_{11} & 0 \\ y_{21} & y_{22} \end{smallmatrix}\right] : y_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$
   $\dim \mathfrak{X} = 4$
   $\dim \mathcal{Y} = 3$
5. $C^1[a, b] \subseteq C[a, b]$
6. $W[a, b] = \mathcal{Y} \subseteq \mathfrak{X} = W[a, b]$
7. $c_0 = \left\{ (x_1, x_2, \dots) : x_j \in \mathbb{R} \wedge x_j \in \mathbb{C}, \lim\limits_{j\to\infty} x_j = 0 \right\}$

$$l^p \subseteq c_0 \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \mathfrak{X} = l^\infty \subseteq \mathcal{Z} = \mathbb{R}^\infty$$

Dlaczego l^p jest przestrzenią wektorową?

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots) \in l^p \qquad \underline{y} = (y_1, y_2, \dots) \in l^p$$

Czy $(x_1 + yy_1, x_2 + y_2, \dots) \in l^p$?
$\underline{x} + \underline{y}$ jest wykonalne w l^p

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \wedge \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p < \infty$$

$$\begin{aligned} &|X_j + y_j|^p \leqslant \\ &\leqslant (|x_j| + |y_j|)^p \leqslant \\ &\leqslant (2 \max\{|x_j|, |y_j|\})^p = \\ &= 2^p \cdot (\max\{|x_j|^p, |y_j|^p\})^p \leqslant \\ &\leqslant 2^p (|x_j|^p + |y_j|^p) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} 2^p (\|x_j\|^p + |y_j|^p) = 2^p \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p + 2^p \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p < \infty$$

Czyli $\underline{x} + \underline{y} \in l^p$.
$\alpha\underline{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots)$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha x_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha|^p \cdot |x_j|^p = |\alpha|^p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty$$

Czyli $\alpha\underline{x} \in l^p$

Definicja 3 (Odwzorowanie liniowe)
Niech $\mathfrak{X}, \mathcal{Y}$ będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$. Mówimy, że odwzorowanie $T : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ jest odwzorowaniem liniowym, jeżeli spełnia:

1. Addytywność

$$\forall_{x_1, x_2 \in \mathfrak{X}}\ T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$$

2. Jednorodność

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \forall_{x \in \mathfrak{X}}\ T(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot T(x)$$

Standardowe uproszczenie to zamiast $T(x)$ możemy pisać Tx.

Definicja 4 (Funkcjonał liniowy)
Jeżeli $\mathcal{Y} = \mathbb{K}$, to odwzorowanie liniowe $T : \mathfrak{X} \to mathbbK$ nazywamy funkcjonałem liniowym.

Tradycyjnie zamiast T piszemy $\lambda, \xi, \tau, \dots$ (małe literki grackie)

Definicja 5 (Jądro i obraz odwzorowania)
Niech $T : \mathfrak{X} \to mathcalY$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas:

1. Jądrem odwzorowania T nazywamy

$$\ker(T) = \{x \in \mathfrak{X} : T(x) = 0\} = T^{-1}(\{0\})$$

2. Obrazem odwzorowanie T nazywamy

$$R(T) = \mathrm{Range}(T) = \{T(x) : x \in \mathfrak{X}\} = T(\mathfrak{X})$$

Fakt
$\ker(T)$ jest podprzestrzenią wektorową $\mathfrak{X}$
$R(T)$ jest podprzestrzenią wektorową $\mathcal{Y}$

Rozdział 2

8 marca 2016

Przykład 2
Przykłady funkcjonałów liniowych.

1. $\mathfrak{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{K}$
   $T(x) = a \cdot x$, gdzie $a \in \mathbb{K}$ ustalony

2. $=\mathbb{K}^m, \mathcal{Y} = \mathbb{K}^n$
   $T : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$
   $T\left((x_1, \ldots, x_m)\right) = a \circ (x_1, \ldots, x_m)$ dla ustalonej macierzy $A = [a_{jk}]_{n \times m}$
   $T \longleftrightarrow A$

$$T(x)_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} \cdot x_k,\ j = 1, 2, \ldots, n$$
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

3. $\mathfrak{X} = W_n(\mathbb{R}), Af(t) = f;(t), \mathcal{Y} = W_{n-1}(\mathbb{R})$

4. $\mathfrak{X} = C[0, 1] = \mathcal{Y}$
   $Tf(x) = \int\limits_0^x f(u)\, du$

5. $K \in C\left([0, 1] \times [0, 1]\right)$
   $Sg(x) = \int\limits_0^1 K(x, y)g(y)\, dy$
   $Rh(y) = \int\limits_0^1 h(x)K(x, y)\, dx$

6. $\mathfrak{X} = l^p = \mathcal{Y}$
   $\sigma\left((x_0, x_1, \dots)\right) = (x_1, x_2, \dots)$
   $\sigma^*\left((x_0, x_1, \dots)\right) = (0, x-1, x_2, \dots)$

2.1 Przestrzenie unormowane

Definicja 6 (Norma)
Niech $\mathfrak{X}$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$. Funkcjonał $\|\cdot\| : \mathfrak{X} \to \mathbb{K}$ nazywamy normą, jeżeli spełnia:

1. $\forall_{x \in \mathfrak{X}} \ \|x\| \geqslant 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\forall_{\lambda \in \mathbb{K}} \forall_{x \in \mathfrak{X}} \ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
4. $\forall_{x_1, x_2 \in \mathfrak{X}} \ \|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$

Definicja 7 (Przestrzeń unormowana)
Przestrzenią wektorową unormowaną nazywamy parę $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$, gdzie

- $\mathfrak{X}$ - przestrzeń wektorowa
- $\|\cdot\|$ - ustalona norma

Uwaga!
Jeżeli funkcjonał $|\cdot| : \mathfrak{X} \to R_+$ nie spełnia $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, a spełnia pozostałe warunki normy, to $|\cdot|$ nazywamy seminormą.

Przykład 3
Przykłady przestrzeni unormowanych:

1. $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, gdzie $|\cdot|$ - wartość bezwzględna
2. $\mathfrak{X} = \{0\}, |x| = 0$ dla $x = 0$.
3. $\mathfrak{X} = \mathbb{K}^n, \|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|\right)^{\frac{1}{p}}$
4. $\mathfrak{X} = \mathbb{K}^n, \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$
5. $C[0,1], \|f\|_{\sup} = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$
6. l^p dla $(1 \leqslant p < \infty)$
   $\|(x_1, x_2, \dots)\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

7. $l^\infty, \|(x_1, x_2, \dots)\|_\infty = \sup_{1 \leqslant j} |x_j|$

8. $W_n(\mathbb{R}), w(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$
   $\|w\|_{\text{sup}} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |w(t)|$
   albo $\|w\| = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$
   albo $\|w\| = \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}$

Definicja 8 (Metryka)
W przestrzeni unormowanej $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ funkjca $d_{\|\cdot\|} : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}_+$ zdefiniowana $d_{\|\cdot\|}(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$ nazywa się metryką generowaną przez normą $\|\cdot\|$.

Twierdzenie 1
$d_{\|\cdot\|}$ jest metryką, tzn.

1. $d_{\|\cdot\|}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. $d_{\|\cdot\|}(x, y) = d_{\|\cdot\|}(y, x) \leqslant 0$

3. $d_{\|\cdot\|}(x, y) \leqslant d_{\|\cdot\|}(x, z) + d_{\|\cdot\|}(z, y)$

$K(x, r) = \{y \in \mathfrak{X} : \|x - y\| < r\}$ - kula otwarta w normie $\|\cdot\|$.
$\overline{K}(x, r) = \{y \in \mathfrak{X} : \|x - y\| \leqslant r\}$ - kula domknięta w normie $\|\cdot\|$.

Definicja 9 (Zbieżność)
Niech $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Mówimy, że ciąg wektorów $x_n \in \mathfrak{X}$ jest zbieżny w normie $\|\cdot\|$ do wektora $x \in \mathfrak{X}$, jeżeli

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Piszemy wtedy $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ później będzie pojęcie $\xrightharpoonup[n \to \infty]{} x$, $x_\alpha \rightharpoonup x$

Twierdzenie 2
Jeżeli $\mathfrak{X}, \|\cdot\|$ jest przestrzenią unormowaną i $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ i $\lim_{n \to \infty} y_n = y$ (w normie $\|\cdot\|$) oraz $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$, $\lim_{n \to \infty} \beta_n = \beta$ (w ciele skalarnym $\mathbb{K}$) to ciąg $\alpha_n x_n + \beta_n y_n$ jest zbieżny w normie $\|\cdot\|$ oraz

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha_n x_n + \beta_n y_n) = \alpha x + \beta y$$

Operacje liniowe są ciągłe w normie.

Definicja 10
Niech $\mathfrak{X}, \|\cdot\|$ będzie przestrzenią unormowaną oraz $x_1, x_2, \dots \in \mathfrak{X}$. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny w normie $\|\cdot\|$ do $x \in \mathfrak{X}$, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j - x \right\| = 0,$$

co zapisujemy

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x.$$

Definicja 11
Mówimy, że ciąg $x_n \in \mathfrak{X}$ w przestrzeni wektorowej $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ jest ciągiem Cauchy'ego, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N_\varepsilon} \forall_{n,k \geqslant N_\varepsilon} \ \|x_n - x_k\| < \varepsilon$$

Inaczej

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} \|x_n - x\| = 0$$

Twierdzenie 3
Jeżeli ciąg $x_n \in \mathfrak{X}$ jest zbieżny w normie $\|\cdot\|$, to jest ciągiem Cauchy'ego.

Przykład 4
Niech $\mathfrak{X} = W([0,1])$ z normą $\|w\|_{\sup} = \sup\limits_{t\in[0,1]} |w(t)|$
$w_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!}$
$w_n \in \mathfrak{X}$
Czy $(w-n)_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego?

$$\begin{aligned}
&\|w_n - w_k\|_{\sup} = \\
&= \sup_{t\in[0,1]} |w_n(t) - w_k(t)| = \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \left| 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} - e^t - \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^k}{k!}\right) + e^t \right| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{t\in[0,1]} \left(\left| 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} - e^t \right| + \left| 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^k}{k!} + e^t \right| \right) \leqslant \\
&\leqslant \sup_{t\in[0,1]} \left(\left| \frac{e^\theta t^{n+1}}{(n+1)!} \right| + \left| \frac{e^{\tilde{\theta}} t^{k+1}}{(k+1)!} \right| \right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{e}{(n+1)!} + \frac{e}{(k+1)!} \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Ale oczywiście $w_n \nrightarrow w \in W([0,1])$, bo $w_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^t \notin W([0,1])$.

Nie w każdej przestrzeni unormowanej ciąg Cauchy'ego jest zbieżny. $\mathfrak{X} = W[0,1]$ z $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ nie jest zupełna.

Definicja 12 (Przestrzeń Banacha)
Mówimy, że przestrzeń unormowana $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha, jeżeli $\mathfrak{X}$ z metryka $d_{\|\cdot\|}$ jest przestrzenią metryczną zupełna tzn. każdy ciąg Cauchy'ego $x_n \in \mathfrak{X}$ jest zbieżny w normie $\|\cdot\|$ do $x \in \mathfrak{X}$.

Definicja 13 (Szereg bezwzględnie zbieżny)
Niech $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny bezwzględnie, jeżeli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

Twierdzenie 4
Jeżeli w przestrzeni Banacha $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ *szereg* $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ *jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny.*

Uwaga!
Zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nie pociąga zbieżności bezwzględnej $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

Przykład 5
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ zbieżny (anharmoniczny), ale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^n|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (harmoniczny)

Definicja 14
Zbieżność bezwarunkowa Niech $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha oraz $x-1, x-2, \dots \in \mathfrak{X}$.Mówimy, że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ jest zbieżny bezwarunkowo, jeżeli dla dowolnego ciągu skalarów $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \in \{0,1\}$ szereg

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j x_j$$

jest zbieżny w $\mathfrak{X}$ tzn.

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j x_j - x(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) \right\| = 0$$

Uwaga!

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\varepsilon_j x_j\| \leqslant \sum_{=1}^{\infty} \|x_j\|$$

Zbieżność bezwzględna implikuje zbieżność bezwarunkową.
Czy zbieżność bezwarunkowa pociąga zbieżność bezwzględną?
Oczywiście zbieżność bezwarunkowa pociąga zbieżność ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 1$).
Riemman udowodnił, że dla $\dim \mathfrak{X} < \infty$ zbieżność bezwarunkowa implikuje zbieżność bezwzględną.

Twierdzenie 5
W przestrzeni Banacha $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ *szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *jest zbieżny bezwarunkowo wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej permutacji* $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow[na]{1\text{-}1} \mathbb{N}$ *szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$$

jest zbieżny w $\mathfrak{X}$.

Uwaga!
W 1958 udowodniono, że w każdej nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha istnieje szereg zbieżny bezwarunkowo, który nie jest zbieżny bezwzględnie.

2.2 Funkcje (przekształcenia) ciągłe na przestrzeniach unormowanych $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|), (\mathcal{Y}, \|\cdot\|)$ - przestrzenie metryczne

Ma sens rozpatrywanie $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ i pytać o ciągłość.
Przypomnienie
Mówimy, że $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ jest ciągła wtdy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x_n \in \mathfrak{X}} \left[\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \right]$$

co jest równoważne twierdzenie topologicznemu

$$\forall_{U \mathcal{Y} \ni \text{ - otwarty zbiór}} \; f^{-1}(U) \text{ otwarty w } \mathfrak{X}.$$

Mówimy, że $f : Dom(f) \to Range(f)$ jest jednostajnie ciągłe

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x_1, x_2, \in Dom(f)} \; \|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$$

Ciągłość jednostajna implikuje ciągłość.
$f(x) = \alpha x + \beta, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f$ - funkcja jednostajnie ciągła
$h(x) = x^2, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h$ - funkcja ciągła, ale nie ciągła jednostajnie

Twierdzenie 6
Niech $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|), (\mathcal{Y}, \|\cdot\|)$ *będą przestrzeniami unormowanymi nad tym samym ciałem skalarów* $\mathbb{K}$. *Wówczas następujące warunki są równoważne dla odwzorowania liniowego* $T : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$*:*

a) T jest ciągła w pewnym $x_0 \in \mathfrak{X}$

b) istnieje stała $M \geqslant 0$ *taka, że*

$$\forall_{x \in \mathfrak{X}};\ \|Tx\|_{\mathcal{Y}} \leqslant M \|x_{\mathfrak{X}}\|$$

c) T jest ciągłe w każdym punkcie $x \in \mathfrak{X}$

d) T jest ciągłe w $0 \in \mathfrak{X}$

Wniosek
Odwzorowanie liniowe $T : (\mathfrak{X}, \|\|) \to (\mathcal{Y}, \|\cdot\|)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy T jest ciągłe jednostajnie.

Dowód. "$\Leftarrow$" - oczywiste
"$\Rightarrow$"
T jest ciągłe liniowe (zastosujemy (b))

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta=\frac{\varepsilon}{n}} \forall_{x_1,x_2,\in\mathfrak{X}}\ \|x_1 - x_2\| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow \|Tx_1 - Tx_2\| =$$
$$= \|T(x_1 - x_2)\| \leqslant M \cdot \|x_1 - x_2\| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

□

Oznaczenie
Niech $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|), (\mathcal{Y}, \|\cdot\|)$ będą przestrzeniami unormowanymi.

$$\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}) = \{T : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y} : T \text{ - liniowe, ciągłe}\}$$

Twierdzenie 7
$\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$ *jest przestrzenią wektorową nad ciałem* $\mathbb{K}$.

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) \overset{df}{=} T_1(x) + T_2(x) \\ (\alpha T)(x) = \alpha \cdot (T(x)) \end{cases}$$

Twierdzenie 8
Dla przestrzeni unormowanych $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|), (\mathcal{Y}, \|\cdot\|)$ *funkcjonalny* $\|\cdot\| : \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}) \to \mathbb{R}_+$ *zdefiniowany*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leqslant 1\}$$

jest normą na $\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$.

Twierdzenie 9
Przy poprzednich oznaczeniach $\|T\| = \inf\{M > 0 : \forall_{x\in\mathfrak{X}}\ \|Tx\| \leqslant M\|x\|\}$.

Przykład 6 1. Jeżeli $\dim(\mathfrak{X}) < \infty$, to każde odwzorowanie $T : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ jest ciągłe

$$\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}) = L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$$

2. $\mathfrak{X} = l^p = \mathcal{Y}$ z normą $\|\cdot\|_p$
Niech $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{K}, (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in l^\infty$
$T_{\underline{\alpha}}(x_1, x_2, \dots) = T_{\underline{\alpha}}(\underline{x}) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$

$$\begin{aligned} &\left\|T_{\underline{\alpha}}(\underline{x})\right\|_p = \\ =&\|(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)\|_p = \\ =&\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^p |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\ \leqslant&\left(\sum_{j=1}^{\infty} M^P |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \\ =&M\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \\ =&M \cdot \|\underline{x}\|_p \end{aligned}$$

$\left\|T_{\underline{\alpha}}\right\| = M$