Rozdział 1

28 września 2015

Procesy stochastyczne - teoria służąca do opisu analizy (wnioskowań) zjawisk losowych ewoluujących w czasie. Wywodzą się z rachunku prawdopodobieństwa. Modelowanie rzeczywistości obarczonej niepewnością (losowością). Przeciwieństwo równań różniczkowych.

$$y' = f(y,t)$$
$$y(t) = g(t,y_0)$$

Równania różniczkowe dostarczają modeli deterministycznych. Idealizuje, możliwe w warunkach laboratoryjnych. Bardzo dużo praktycznych zagadnień nie ma charakteru deterministycznego (a jak już ma to będzie to determinizm chaotyczny). Chaos to nie to samo, co losowość. Losowość tkwi w głębi natury. Dla przykładu mechanika kwantowa.

Podstawowe elementy (pojęcia) procesów stochastycznych:
Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega,\mathcal{F},P)$

$$\left.\begin{array}{l}\Omega \text{ - zbiór zdarzeń elementarnych}\\ \omega \in \Omega \text{ - zdarzenie elementarne}\end{array}\right\} \text{pojęcia pierwotne}$$

$\mathcal{F}$ - σ-ciało podzbioru Ω

Definicja 1 (σ-ciało)
Mówimy, że rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów Ω jest σ-ciałem, jeśli spełnia:

1. $$\emptyset \in \mathcal{F}, \quad \Omega \in \mathcal{F},$$

2. $$\forall_{A \in \Omega} \left[A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{F} \right],$$

3. $$\forall_{A_1, A_2, \cdots \in \Omega} \left[\forall_n A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \right],$$

Definicja 2
Mówimy, że funkcja zbioru P określona na $(\Omega,\mathcal{F})$ jest σ-addytywnym prawdopodobieństwem (miarą probabilistyczną σ-addytywną), jeżeli spełnia:

1. $$P : \mathcal{F} \to [0,1],$$

2. $$P(\emptyset) = 0,$$

3. $$P(\Omega) = 1,$$

4. warunek σ-addytywności
$$\forall_{A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}} \left[\forall_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \right]$$

Definicja 3 (Proces stochastyczny)
Procesem stochastycznym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega,\mathcal{F},P)$ nazywamy rodzinę zmiennych losowych $\{X_t\}_{t \in T}$ określonych na $(\Omega,\mathcal{F},P)$.
T - zbiór indeksów (czasowych, gdy T interpretujemy jako czas)

Definicja 4 (Zmienna losowa)
Zmienna losowa X_t.

$$\forall_{t \in T} \forall_{B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}} X_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

X_t jest $\mathcal{F}$ mierzalne; X_t jest $\sigma(\mathcal{F},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}) mierzalna$

- $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ - σ-ciało zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$
- $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\left(\{(\alpha,\beta) : \alpha < \beta\}\right)$

Uwaga!

$$\operatorname{card}(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}) = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = \operatorname{card}\left(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\right)$$

Definicja 5
Niech Ω będzie ustalonym zbiorem. Mówimy, że rodzina $\mathcal{C}$ podzbiorów Ω tworzy ciało, jeżeli spełnia:

1.
$$\emptyset, \Omega \in \mathcal{C}$$

2.
$$\forall_{A \subseteq \Omega} \left[A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{C}\right]$$

3.
$$\forall_{A,B \in \Omega} \left[A < B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}\right] \equiv$$
$$\equiv \left[A_1,A_2,\ldots,A_n \in \mathcal{C}, \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{C}\right]$$

Definicja 6
Mówimy, że funkcja zbioru μ określona na $(\Omega,\mathcal{C})$ jest miarą probabilistyczną σ-addytywną, jeśli spełnia:

1.
$$\mu(\emptyset) = 0$$
$$\mu(\Omega) = 1$$
$$\forall_{A \in \mathcal{C}}\, 0 \leqslant \mu(A) \leqslant 1$$

2.
$$\forall_{A_1,A_2,\ldots \in \mathcal{C}} \left[\forall_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset \wedge \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)\right]$$