Rozdział 1

28 września 2015

Definicja 1
Mówimy, że ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo do funkcji $g : P \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{x \in P} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_o \in \mathbb{N}} \forall_{n > n_o} |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Przykład 1

a)

$$P = \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$
$$f_n(x_0) = \frac{x_0}{n} \to 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

b)

$$P = \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = xe^{-nx}$$
$$\forall_x \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

c)

$$P = [0,1]$$
$$f_n(x) = x^n$$
$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Definicja 2
Ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie na zbiorze P do funkcji $g : P \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_o\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_o}\forall_{x\in P}\, |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Twierdzenie 1
Założenia:

- (f_n) *funkcje ciągłe*
- $f_n \to f$ *jednostajnie zbieżny na* P

Teza:

$$f : P \to \mathbb{R} \textit{ jest ciągła}$$

$$\mathcal{C}\left([a,b]\,,\mathbb{R}\right) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ \text{ciągła}\}$$

- przestrzeń liniowa $(f + g; \alpha \cdot f)$
- przestrzeń unormowana $\|f\|_0 = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$

Twierdzenie 2
Ciąg $(f_n) \in \mathcal{C}\left([a,b]\,,\mathbb{R}\right)$ *jest zbieżny do* $f \in \mathcal{C}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_0 = 0$$

Dowód. Mamy pokazać, że f jest ciągła w x_0.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in P}\, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ ustalone:

$$\begin{aligned}&\exists_{\delta}\forall_x\, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3}\\ &\exists_{n_o}\forall_{n>n_0}\forall_x\, |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

□

Twierdzenie 3 (Kryterium Diniego)
Załóżmy, że $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest monotoniczny i zbieżny punktowo do funkcji* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Jeśli* f_n *i* f *są ciągłe to zbieżność jest jednostajna.*

Przykład 2
Brak ciągłości funkcji granicznej $\quad f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$
Brak monotoniczności $\quad nxe^{-nx^2}$ na $[0,2]$
Brak ciągłości funkcji $\quad \chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right)} : [0,1] \to \mathbb{R}$
Brak zwartości dziedziny $\quad f_n(x) = x^n$ na $[0,1)$

Rozdział 2

5 października 2015

Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ to ciag sum częściowych

$$S(_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$$

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Wniosek
Jeżeli funkcje $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ są nieujemne, ciągłe i szereg $\sum f_n(x)$ jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej to f_n jest zbieżny jednostajnie

Kryterium Weierstrassa
$f_n : A \to \mathbb{R}$ $\sum f_n(x)$. Jeśli $u_n := \sup_{x\in A} |f_n(x)|$ i $\sum u_n$ zbieżny, to $\sum f - n(x)$ jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie na A.

Warunek Cauchy'ego

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>k>n_0} |f_k(x) + \cdots + f_n(x)| < \varepsilon$$

warunek konieczny i dostateczny na zbieżność jednostajną $\sum f_n(x)$

$$|f_k(x) + \cdots + f_n(x)| \leqslant |f_k(x)| + \cdots + |f_n(x)| \leqslant u_k + \cdots + u_n < \varepsilon$$

Warunek Cauchy'ego dal ciagu
$a - n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,k>n_0} |a_n - a_k| < \varepsilon$$

dla szeregu $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
$s_n - s_k = a_{k+1} + \cdots + a_n$

Przykład 3

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \text{zbieżny jednostajnie na} \qquad [-\alpha,\alpha]\subset\mathbb{R},\ \alpha>0$$

$$\frac{x^n}{n!}\leqslant\frac{\alpha^n}{n!}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\alpha}{n+1}\to 0\Rightarrow \text{ zbieżny}$$

Przykład 4
$\sum_{n=1}^{\infty}e^{nx^2}n^2$,$x\in\mathbb{R}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}$ $\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ - zbieżność jednostajna, bezwzględna na $\mathbb{R}$

Przykłady szeregów zbieżnych, do których nie nadaje się kryterium Weierstrassa.

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\ \text{zbieżność jednostajna na } A\subset[0,2\pi]$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$
$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\in[n,n+1)\\ 0 & x\notin[n,n+1)\end{cases}$$
$$\sup_{x\geqslant 1}|f_n(x)|=\frac{1}{n}$$
$$\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=\frac{1}{x}\mathbb{1}_{[q,n+1)}=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\in[1,n+1)\\ 0 & x\geqslant n+1\end{cases}$$
$$\sup_{n\geqslant 1}|s_n(x)-s(x)|=\sup_{x\geqslant 1}\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{2} & x\in[1,n+1)\\ 0 & x\geqslant n+1\end{array}\right\}=\frac{1}{n+1}\to 0$$

Twierdzenie 4 (Kryterium Abela)
Załóżmy, że sumy częściowe $\sum f_n(x)$ są jednostajnie ograniczone na zbiorze A, tzn.

$$\exists_{M>0}\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{x\in A}\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|\leqslant M$$

Jeśli $a_n\to 0$ to szereg $\sum a_nf_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na A.

Przykład 5

$sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

$a_n \to 0$

$$\exists_{M>0} \forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in A} \left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leqslant M$$