

1 Wielowskażnikowe modele regresji liniowej

G -równaniowy ekonometryczny model regresji wielorakiej - postać uogólniona.

1.1 G -równaniowy model regresji wielorakiej (bez restrykcji zerowych):

$$\begin{aligned} t_{t1} &= \gamma_{12}t_{t2} + \dots + \gamma_{1G}y_{tG} + \beta_{10} + \beta_{11}x_{t1} + \beta_{12}x_{t2} + \dots + \beta_{1k}x_{tk} + \varepsilon_{t1} \\ t_{t1} &= \gamma_{21}t_{t1} + \gamma_{23}t_{t3} + \dots + \gamma_{2G}y_{tG} + \beta_{20} + \beta_{21}x_{t1} + \beta_{22}x_{t2} + \dots + \beta_{2k}x_{tk} + \varepsilon_{t2} \\ &\vdots \\ t_{tG} &= \gamma_{G1}t_{t1} + \gamma_{G2}t_{t2} + \dots + \beta_{G0} + \beta_{G1}x_{t1} + \beta_{G2}x_{t2} + \dots + \beta_{Gk}x_{tk} + \varepsilon_{tG} \end{aligned}$$

1.1.1 SYNTETYCZNY ZAPIS MACIERZOWY MODELU

$$y_t \cdot \Gamma + x_t \cdot B = \varepsilon_t$$

gdzie:

$y_t = \begin{bmatrix} y_{t1} & y_{t2} & \dots & y_{tG} \end{bmatrix}$ - wektor zmiennych endogenicznych modelu

$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{G \times G} \end{bmatrix}$ - macierz parametrów strukturalnych zmiennych endogenicznych

$x_t = \begin{bmatrix} 1 & x_{t1} & x_{t2} & \dots & x_{tk} \end{bmatrix}$ - wektor zmiennych egzogenicznych modelu

$B = \begin{bmatrix} \beta_{(k+1) \times G} \end{bmatrix}$ - macierz parametrów strukturalnych zmiennych egzogenicznych

$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t1} & \varepsilon_{t2} & \dots & \varepsilon_{tG} \end{bmatrix}$ - wektor składników zakłócających modelu

$$Y \cdot \Gamma + X \cdot B = E$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1G} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nG} \end{bmatrix} = Y_{n \times G} \text{ - macierz obserwacji endogenicznych modelu}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} = X_{n \times (k+1)} \text{ - macierz obserwacji zmiennych egzogenicznych modelu}$$

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1G} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & \varepsilon_{nG} \end{bmatrix} = E_{n \times G} - \text{macierz składników zakłócających } G\text{-równaniowego modelu}$$

1.2 Wstępne założenia dotyczące struktury stochastycznej modelu wielorównaniowego.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\varepsilon_{tj} &= 0 & t &= 1, 2, \dots, n & j &= 1, 2, \dots, G \\ \mathbb{E}\varepsilon &= 0 \end{aligned}$$

co oznacza, że składnik zakłócający jest zmienną losową o wartości oczekiwanej równej 0, w każdym okresie t i w każdym równaniu j -tym.

$$\mathbb{E}\varepsilon_{tj}^2 = \sigma_{\varepsilon j}^2 = \text{const.} \quad j = 1, 2, \dots, G$$

co oznacza, że w każdym równaniu j -tym wariancja składnika losowego jest stała i niezależna od okresu obserwacji.

$$\mathbb{E}\varepsilon_{tj}\varepsilon_{(t-s)j} = 0 \quad , (s \neq 0)$$

co oznacza, że kowariancja między składnikami losowymi w poszczególnych równaniach dla różnych okresów jest równa 0. Klasyfikacja modeli z punktu widzenia powiązań pomiędzy zmiennymi endogenicznymi.

1.2.1 MODEL PROSTY

Model prosty jest to model, w którym nieopóźnione zmienne endogeniczne nie oddziałują na siebie. Z uwagi na brak powiązań pomiędzy nieopóźnionymi zmiennymi endogenicznymi macierz Γ jest macierz diagonalną, będąc macierzą jednostkową.

Przykład trójrównaniowego modelu prostego:

$$\begin{aligned} y_{t1} &= \beta_{10} + \beta_{11}x_{t1} + \beta_{12}x_{t2} - \varepsilon_{t1} \\ y_{t2} &= \beta_{20} + \beta_{21}x_{t2} + \beta_{23}x_{t3} - \varepsilon_{t2} \\ y_{t3} &= \beta_{30} + \beta_{32}x_{t1} + \beta_{33}x_{t3} - \varepsilon_{t3} \end{aligned}$$

Zapis w postaci macierzowej

$$Y \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + X \cdot \begin{bmatrix} -\beta_{10} & -\beta_{20} & -\beta_{30} \\ -\beta_{11} & -\beta_{21} & 0 \\ -\beta_{12} & 0 & -\beta_{32} \\ 0 & -\beta_{23} & -\beta_{33} \end{bmatrix} = E$$

Wstępne założenia stochastyczne dla modelu prostego:
Zakładając nielosowość zmiennych z góry ustalonych (egzogenicznych) musimy uznać, że zmienne egzogeniczne są niezależne od składników losowych, tzn.

$$\mathbb{E}(X'_j \cdot \varepsilon_j) = (\mathbb{E}X'_j) \cdot (\mathbb{E}\varepsilon_j) = X'_j \cdot 0 = 0$$

1.2.2 MODEL REKURENCYJNY

Model rekurencyjny jest to model, w którym występują jednokierunkowe powiązania pomiędzy zmiennymi endogenicznymi nieopóźnionymi w czasie. Oznacza to, że macierz Γ - parametrów występujących przy zmiennych endogenicznych - jest macierzą trójkątną.

Przykład trójrównaniowego modelu rekurencyjnego:

$$Y \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y_{12} & 1 & 0 \\ -y_{13} & -y_{23} & 1 \end{bmatrix} + X \cdot \begin{bmatrix} -\beta_{10} & -\beta_{20} & -\beta_{30} \\ -\beta_{11} & -\beta_{21} & 0 \\ -\beta_{12} & 0 & -\beta_{32} \\ 0 & -\beta_{23} & -\beta_{33} \end{bmatrix} = E$$

Wniosek

W modelach rekurencyjnych istnieje zawsze takie równanie, w którym występują jedynie zmienne z góry ustalone (egzogeniczne).

W przypadku pozostałych równań musimy uznać, że w zbiorze zmiennych objaśniających występują zmienne losowe, którymi są zmienne endogeniczne występujące w charakterze zmiennych objaśniających. Zmienne endogeniczne występujące w charakterze zmiennych objaśniających mogą być uznane za:

- nieskorelowane ze składnikiem zakłócającym danego równania, jeśli konstrukcja modelu nie wymusza odrzucenia takiego założenia
- skorelowane ze składnikiem zakłócającym danego równania, jeśli wynika to z założeń tkwiących u podstaw konstrukcji modelu.

1.3 Model o równaniach współzależnych

Model o równaniach współzależnych jest to model, w którym występują nieopóźnione w czasie sprzężenia zwrotne pomiędzy zmiennymi endogenicznymi. Oznacza to, że macierz Γ nie jest macierzą ani diagonalną, ani trójkątną.

Przykład trójrównaniowego modelu regresji wielorakiej:

$$\begin{aligned} y_{t1} &= \gamma_{12}y_{t2} + \gamma_{13}y_{t3} + \beta_{10} + \beta_{11}x_{t1} + \beta_{12}x_{t2} + \varepsilon_{t1} \\ y_{t2} &= \gamma_{23}y_{t3} + \beta_{20} + \beta_{21}x_{t1} + \beta_{23}x_{t3} + \varepsilon_{t2} \\ y_{t3} &= \gamma_{31}y_{t1} + \beta_{30} + \beta_{33}x_{t3} + \varepsilon_{t3} \end{aligned}$$

$$Y \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y_{12} & 1 & 0 \\ -y_{13} & -y_{23} & 1 \end{bmatrix} + X \cdot \begin{bmatrix} -\beta_{10} & -\beta_{20} & -\beta_{30} \\ -\beta_{11} & -\beta_{21} & 0 \\ -\beta_{12} & 0 & -\beta_{32} \\ 0 & -\beta_{23} & -\beta_{33} \end{bmatrix} = E$$

Uporządkowany całościowy zapis modelu z restrykcjami zerowymi

$$y_{t1} - \gamma_{12}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\gamma_{31} \\ -y_{12} & 1 & 0 \\ -y_{13} & -y_{23} & 1 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\beta_{10} & -\beta_{20} & -\beta_{30} \\ -\beta_{11} & -\beta_{21} & 0 \\ -\beta_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{23} & -\beta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Z uwagi na to, że macierz Γ nie jest ani diagonalna, ani trójkątna, model uznajemy za model o równaniach współzależnych. Oznacza to, że między zmiennymi endogenicznymi nieopóźnionymi w czasie występują sprzężenia zwrotne.

Zauważmy, że zmienne endogeniczne, będąc między innymi funkcjami zmiennych losowych (ε), jednocześnie nawzajem się wyjaśniają. Tym samym musimy uznać, że zmienne te - występując w poszczególnych równaniach w charakterze zmiennych objaśniających - są skorelowane ze składnikami losowymi tychże równań.

1.3.1 REDUKCJA MODELI O RÓWNANIACH WSPÓŁZALEŻNYCH

Procedura sprowadzania modelu o równaniach współzależnych do wielorównaniowego modelu prostego nazywamy redukcją. Przykładowa procedura redukcji naszego modelu

$$y_t \cdot \Gamma + x_t \cdot \beta = \varepsilon_t$$

Przekształcona postać modelu

$$y_t \cdot \Gamma = x_t \cdot (-\beta) + \varepsilon_t$$

Zapis macierz w postaci zredukowanej

$$y_t = x_t \cdot \pi + v_t$$

gdzie

$$\pi = -B\Gamma = \begin{bmatrix} \pi_{10} & \pi_{20} & \pi_{30} \\ \pi_{11} & \pi_{21} & \pi_{31} \\ \pi_{12} & \pi_{22} & \pi_{32} \\ \pi_{13} & \pi_{23} & \pi_{33} \end{bmatrix}$$

π - macierz parametrów strukturalnych postaci zredukowanej o wymiarach $(k+1) \times G$ (gdzie $k+1=4$, $G=3$)

Wektor składników zakłócających postaci zredukowanej o wymiarach $G \times G$, $G=3$

$$v_t = \varepsilon_t \Gamma^{-1} =$$

Tym samym model w postaci macierzowej zapiszemy następująco

$$\begin{bmatrix} v_{t1} & v_{t2} & v_{t3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{t1} & x_{t2} & x_{t3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi_{10} & \pi_{20} & \pi_{30} \\ \pi_{11} & \pi_{21} & \pi_{31} \\ \pi_{12} & \pi_{22} & \pi_{32} \\ \pi_{13} & \pi_{23} & \pi_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{t1} & v_{t2} & v_{t3} \end{bmatrix}$$

Co po rozpisaniu przybierze następującą postać

$$\begin{aligned} y_{t1} &= \pi_{10} + x_{t1}\pi_{11} + x_{t2}\pi_{12} + x_{t3}\pi_{13} + v_{t1} \\ y_{t2} &= \pi_{20} + x_{t1}\pi_{21} + x_{t2}\pi_{22} + x_{t3}\pi_{23} + v_{t2} \\ y_{t3} &= \pi_{30} + x_{t1}\pi_{31} + x_{t2}\pi_{32} + x_{t3}\pi_{33} + v_{t3} \end{aligned}$$

Rozpisany zapis macierzowy modelu dla n obserwacji przedstawia się następująco

$$Y = X\Pi + V$$

Zauważmy, że w każdym z równań postaci zredukowanej występują jedynie zmienne z góry ustalone (egzogeniczne) modelu. Jeśli uznamy, że są one nielosowe, mamy prawo wykluczyć ich ewentualną zależność ze składnikami losowymi poszczególnych równań. Wynika z tego, że każde z równań możemy oszacować stosując metodę najmniejszych kwadratów.

1.3.2 IDENTYFIKACJA

Identyfikacja jest ot proces rozpoznawania (identyfikowania) parametrów strukturalnych modelu (elementów macierzy Γ i B) na podstawie parametrów

postaci zredukowanej, a więc na podstawie elementów macierzy Π . Ze zdefiniowania macierzy Π wynikają następujące konsekwencje

$$\Pi = -B\Gamma^{-1} \Leftrightarrow \Pi\Gamma = -B$$

Wykorzystując badany model oraz jego postać zredukowaną i odpowiednio zdefiniowane dla tych modeli macierze π, Γ oraz B drugi człon powyższego wyrażenia zapiszemy następująco

dużo rozpisanych macierzy

Powiemy, że j -ty układ równań:

1. Zawiera więcej parametrów γ i β aniżeli równań, to równanie M_j -te postaci strukturalnej uznajemy za **nieidentyfikowalne**.
2. Zawiera taką samą ilość parametrów γ i β aniżeli równań, to równanie M_j -te postaci strukturalnej uznajemy za **jednoznacznie identyfikowalne**.
3. Zawiera mniej parametrów γ i β aniżeli równań, to równanie M_j -te postaci strukturalnej uznajemy za **niejednoznacznie identyfikowalne**.

W rozpatrywanym przypadku otrzymujemy następujące trzy układy równań. Pierwszy układ równań (a) dla $j = 1$ równania postaci strukturalnej modelu

$$\begin{aligned}\pi_{10} - \pi_{20}\gamma_{12} - \pi_{30}\gamma_{13} &= \beta_{10} \\ \pi_{11} - \pi_{21}\gamma_{12} - \pi_{31}\gamma_{13} &= \beta_{11} \\ \pi_{12} - \pi_{22}\gamma_{12} - \pi_{32}\gamma_{13} &= \beta_{12} \\ \pi_{13} - \pi_{23}\gamma_{12} - \pi_{33}\gamma_{13} &= 0\end{aligned}$$

Z uwagi na fakt, iż liczba poszukiwanych parametrów γ i β wynosi 5 (2 parametry γ oraz 3 parametry β) jest większa od liczby równań, powyższy układ nie ma rozwiązania. Tym samym powiemy, że równanie pierwsze postaci strukturalnej jest nieidentyfikowalne.

Drugi układ równań (b) dla $j = 2$ równania postaci strukturalnej modelu

$$\begin{aligned}\pi_{20} - \pi_{30}\gamma_{23} &= \beta_{20} \\ \pi_{21} - \pi_{31}\gamma_{23} &= \beta_{21} \\ \pi_{22} - \pi_{32}\gamma_{23} &= 0 \\ \pi_{23} - \pi_{33}\gamma_{23} &= \beta_{23}\end{aligned}$$

Z uwagi na fakt, iż liczba poszukiwanych parametrów γ i β wynosi 4 (1 parametr γ i 3 parametry β) jest równa liczbie równań, powyższy układ ma

jednoznaczne rozwiązanie. Tym samym powiemy, że równanie drugie postaci strukturalnej jest jednoznacznie identyfikowalne. Zauważmy, że z równania trzeciego tego układu równań wynika, że

$$\pi_{22} - \gamma_{23}\pi_{32} = 0 \Rightarrow \gamma_{23} = \left(\frac{\pi_{21}}{\pi_{32}} \right)$$

Trzeci układ równań (c) dla $j = 3$ równania postaci strukturalnej modelu

$$\pi_{30} - \pi_{10}\gamma_{31} = \beta_{30}$$

$$\pi_{31} - \pi_{11}\gamma_{31} = 0$$

$$\pi_{32} - \pi_{12}\gamma_{31} = 0$$

$$\pi_{33} - \pi_{13}\gamma_{31} = \beta_{33}$$

Z uwagi na fakt, iż liczba poszukiwanych parametrów γ i β wynosi 3 (1 parametr γ i 2 parametry β) jest mniejsza od liczby równań, powyższy układ nie ma jednoznacznego rozwiązania. Tym samym powiemy, że równanie trzecie postaci strukturalnej jest niejednoznacznie identyfikowalne.

Aby sformułować użyteczne twierdzenia dotyczące identyfikacji modelu o równaniach współzależnych przyjmujemy następujący system oznaczeń:

- k_j - liczba zmiennych z góry ustalonych występujących w j -tym równaniu modelu łącznie z wyrazem wolnym
- K - liczba zmiennych z góry ustalonych występujących w całym modelu łącznie z wyrazem wolnym
- G_j - liczba zmiennych łącznie współzależnych (endogenicznych) występujących w j -tym równaniu
- G_{j-1} - liczba zmiennych łącznie współzależnych (endogenicznych) występujących w j -tym równaniu w charakterze zmiennych objaśniających (bez zmiennej objaśnianej w tym równaniu)
- G - liczba zmiennych łącznie współzależnych zależnych (endogenicznych) występujących w całym modelu (równa liczbie równań modelu)

$$K_j^* = K - k_j$$

$$G_j^* = G - G_j$$

Twierdzenie 1

Warunkiem koniecznym na to, aby równanie j -te było identyfikowalne, jest aby liczba zmiennych z góry ustalonych oraz łącznie współzależnych występujących w równaniu j -tym w charakterze zmiennych objaśniających była mniejsza od liczby zmiennych z góry ustalonych występujących w całym modelu

$$K \geq K_j + G_j - 1$$

Równanie możemy przekształcić w następujący sposób

$$K - k_j \geq G_j - 1$$

Wprowadzając do siebie wyrażenia otrzymujemy

$$K - k_j \geq G - G_j^* - 1$$

a stąd ostatecznie otrzymujemy

$$K_j^* + G_j^* \geq G - 1$$

Wykorzystując powyższe wyrażenie formułujemy następujące twierdzenia

Twierdzenie 2

Warunkiem koniecznym na to, aby równanie j -te postaci strukturalnej modelu było **identyfikowalne**, jest by liczba zmiennych nie występujących w j -tym równaniu była nie mniejsza od liczby równań modelu pomniejszonej o jeden.

Twierdzenie 3

Warunkiem koniecznym na to, aby równanie j -te postaci strukturalnej modelu było **jednoznacznie identyfikowalne**, jest by liczba zmiennych nie występujących w j -tym równaniu była równa liczbie równań modelu pomniejszonej o jeden.

Twierdzenie 4

Warunkiem koniecznym na to, aby równanie j -te postaci strukturalnej modelu było **niejednoznacznie identyfikowalne**, jest by liczba zmiennych nie występujących w j -tym równaniu była większa od liczby równań modelu pomniejszonej o jeden.

Twierdzenie 5

Warunkiem dostatecznym na to, aby równanie j -te postaci strukturalnej modelu było **nieidentyfikowalne**, jest by liczba zmiennych nie występujących w j -tym równaniu była mniejsza od liczby równań modelu pomniejszonej o jeden.

Zadanie

Rozpatrz następujący model o równaniach współzależnych

$$\begin{aligned}Y_t &= q_0 + q_1 L_t + a_2 k_t + a_3 H_t + a_4 ER_t + e_{t1} \\L_t &= b_0 + b_1 Y_t + b_2 K_t + b_3 W_t e_{t2} \\K_t &= c_0 + c_1 Y_t + c_2 R_t + e_{t3}\end{aligned}$$

1.3.3 METODA ZMIENNYCH INSTRUMENTALNYCH

W dotychczas przedstawianych modelach przyjmowaliśmy założenie o braku korelacji między zmiennymi uwzględnionymi w specyfikacji modelu a składnikiem losowym. Jednak w wielu ważnych z punktu widzenia teorii ekonomicznej zastosowaniach takie założenie nie jest spełnione. W takim przypadku nie można udowodnić zgodności estymatora MNK.

W modelu $Y = X\beta + \varepsilon$

- zmiennymi egzogenicznymi nazywamy zmienne, które nie są skorelowane ze składnikami losowymi
- zmiennymi endogenicznymi nazywamy zmienne, które są skorelowane ze składnikami losowymi

2 Równoczesność

O problemie równoczesności mówimy, gdy występuje niezerowa korelacja pomiędzy zmienną objaśniającą x_i a równoczesnym błędem losowym ε_j . Gdy $\mathbb{E}(\varepsilon|X) \neq 0$ to

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(b) &= \mathbb{E}\left((X'X)^{-1} X'y|X\right) \\ \mathbb{E}(b) &= \beta + (X'X)^{-1} X'\mathbb{E}(\varepsilon|X) \neq \beta\end{aligned}$$

Więc estymator wektora parametrów jest obciążony.

2.1 Przykłady

Model Keynesowski gospodarki zakłada, że

$$PKB = \text{konsumpcja} + \text{inwestycje} + \text{export netto}$$

Z drugiej strony Keynesowska funkcja konsumpcji zakłada, że $C_t = f(Y_t)$. Szacując jej parametry

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t$$

nie są spełnione założenia modelu, gdyż $\text{cov}(X_t, \varepsilon_t) \neq 0$
Szacujemy model autoregresji postaci

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) + \varepsilon_t$$

ale

$$y_{t+1} = f(y_{t-2}, y_{t-3}, \dots) + \varepsilon_{t+1}$$

zatem $\text{cov}(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) \neq 0$. Wobec tego w modelu (1) zmienne objaśniające są skorelowane z błędem losowym. Zazwyczaj w zbiorach danych mikroekonomicznych brakuje informacji o zdolnościach respondentów. Mimo wszystko szacuje się równanie płacy typu Mincera

$$\ln(placa) = \beta_0 + \beta_1 plec + \beta_2 wiek + \beta_3 wiek^2 + \beta_4 wyksz + u$$

Ponieważ w modelu pominięto zmienną niezależną zdolności to składnik losowy ma postać

$$u = \gamma_0 + \gamma_1 zdolnosci + \phi$$

Z drugiej strony poziom wykształcenia jest determinowany przez zdolności respondenta. Zatem

$$\begin{aligned} \text{cov}(u, wyksz) &= \text{cov}(zdolnosci + \phi, wyksz) = \\ &= \text{cov}(zdolnosci, wyksz) + \text{cov}(\phi, wyksz) \neq 0 \end{aligned}$$

Ponieważ zmienna pominięta jest dodatnio skorelowana z uzyskanym wykształceniem i wpływa dodatnio na zmienną zależną to parametr przy zmiennej będzie dodatnio obciążony.

Metoda zmiennych instrumentalnych pozwala na uzyskanie zgodnych estymatorów w przypadku występowania korelacji między zmiennymi objaśniającymi a składnikiem losowym. Pozwala również uzyskać zgodne oszacowania parametrów w przypadku występowania problemu równoczesności. Polega ona na zastępowaniu oryginalnych zmiennych instrumentalami. Instrumenty powinny być skorelowane ze zmiennymi objaśniającymi, ale nie powinny być skorelowane z błędem losowym. Znalezienie właściwych instrumentów jest najciekawszym, ale również najtrudniejszym etapem badania.

Oznaczmy przez Z macierz zmiennych instrumentalnych (instrumentów). Estymator MZI jest zgodny, gdy spełnione są następujące warunki

$$\begin{aligned} \text{plim} \left(\frac{1}{n} Z' \varepsilon \right) &= \text{plim} \left(\frac{1}{n} \sum_i z'_i \varepsilon_i \right) = \mathbb{E}(z'_i \varepsilon_i) = 0 \\ \text{plim} \left(\frac{1}{n} Z' X \right) &= \text{plim} \left(\frac{1}{n} \sum_i z'_i x_i \right) = \mathbb{E}(z'_i x_i) \neq 0 \end{aligned}$$

Dodatkowo $r(\mathbb{E}(z'_i x_i)) = k$

$$plim\left(\frac{1}{n}Z'Z\right) = plim\left(\frac{1}{n}\sum_i z'_i z_i\right) = \mathbb{E}(z'_i z_i) \neq 0$$

Metoda polega na zastępowaniu oryginalnych wartości zmiennych objaśniających wartościami dopasowanymi uzyskanymi z regresji pomocniczej wykorzystującej zmienne instrumentalne.

- macierz instrumentów Z musi zawierać co najmniej tyle zmiennych, ile oryginalna macierz X
- Ale nie w każdym przypadku konieczne jest posiadanie k nowych zmiennych
- Zmienne z macierzy X , które są nieskorelowane ze składnikiem losowym mogą same dla siebie stanowić instrumenty
- W rezultacie potrzeba co najmniej tylu dodatkowych zmiennych instrumentalnych ile jest zmiennych skorelowanych ze składnikiem losowym.

Macierz instrumentów uzyskujemy poprzez rzutowanie wektora X na przestrzeń rozpiętą przez kolumny macierzy instrumentów Z

$$\hat{X} = Z \underbrace{(Z'Z)^{-1} Z'X}_{\beta} = Z\beta = \hat{P}_Z X$$

Dysponując macierzą instrumentów \hat{X} budujemy estymator

$$\begin{aligned}\beta_{MZI} &= (\hat{X}'X)^{-1} \hat{X}'y = (X'P_Z X)^{-1} X'P_Z y = \\ &= (X'Z(Z'Z)^{-1}Z')^{-1} X'Z(Z'Z)^{-1}Z'y\end{aligned}$$

jeżeli $r(2) = r(X)$, czyli tyle nowych zmiennych, ile zmiennych w macierzy X skorelowanych ze składnikiem.

Estymator MZI jest również nazywany estymatorem dwustopniowej metody najmniejszych kwadratów.

- W pierwszym kroku przeprowadzana jest regresja zmiennych endogenicznych na zmienne instrumentalne
- W drugim, oryginalne wartości zmiennych są zastępowane przez zwartości dopasowane z pierwszego kroku i oblicze są oszacowania poszczególnych parametrów

- W kolejnym kroku pokażemy, że przy warunkach zdefiniowanych wcześniej estymator MZI jest zgodny

Estymator MZI jest dany wzorem

$$\beta_{MZI} = \left(X'Z (Z'Z)^{-1} Z' \right)^{-1} X'Z (Z'Z)^{-1} Z'y$$

więc

$$plim \beta_{MZI} = plim \left(X'Z (Z'Z)^{-1} Z' \right)^{-1} X'Z (Z'Z)^{-1} Z'y$$

Wnioski

- Estymator MZI jest zgodny nawet, gdy w modelu występują zmienne endogeniczne
- Ale, gdy nie ma takich zmiennych, a spełnione są założenia MNK to estymator MZI nie jest efektywny
- MZI można traktować jako uogólnienie MNK
- Wobec tego wszystkie testy stosowane przy MNK mogą być stosowane przy MZI
- Testy specyficzne dla MZI weryfikują założenie o egzogeniczności zmiennych oraz poprawności wykorzystanych instrumentów.

2.2 Test Hausmana

Przy estymacji MZI test Hausmana jest testem na egzogeniczność zmiennych. Estymator MZI jest estymatorem zawsze zgodnym.

Przy prawdziwej H_0 o egzogeniczności zmiennych X oba estymatory są zgodne, ale estymator MZI ma większą wariancję niż estymator MNK.

Przy fałszywej H_0 estymator MZI jest zgodny i efektywny, a estymator MNK nie jest zgodny.

Statystyka testowa jest dana przez formę kwadratową

$$(\beta_{MZI} - \beta_{MNK})' \Sigma_{\beta_{MZI} - \beta_{MNK}}^{-1} (\beta_{MZI} - \beta_{MNK}) \xrightarrow{D} \chi^2(r(\Sigma))$$

Gdy różnica jest duża sugeruje to wykorzystanie MNK.

2.3 Test Surgana

- Test Surgana weryfikuje poprawność instrumentów
- Zauważmy, że reszty modelu są równe

$$e = \left(I - X (X' P_Z X)^{-1} X' P_Z \right) \varepsilon$$

- Oczywiście M_Z jest macierzą idempotentną, rzędu $p - k$
- Przy prawdziwości H_0 jest brak korelacji instrumentów z błędami losowymi

$$\frac{e' P_Z e}{\sigma^2} \sim \chi_{p-k}^2$$

- Niestety przeprowadzenie testu jest wyłącznie możliwe, gdy liczba instrumentów przekracza liczbę zmiennych objaśniających

3 Uogólniona metoda zminnych instrumentalnych

Zakładamy, że mamy więcej instrumentów niż zminnych objaśniających

wymiar macierzy $X \neq$ wymiar macierzy Z

Założyliśmy, że $\mathbb{E}(Z'\varepsilon) = 0$, zatem $\mathbb{E}(Z'(y - X\beta)) = 0$

Skoro średnia z próby jest oceną wartości oczekiwanej, to

$$\frac{1}{n} (Z'(y - X\beta)) = 0$$

3.1 Estymator uogólnionej MZI (UMZI, GIV)

Przy powyższym założeniu, UMZI polega na minimalizacji następującego wyrażenia

$$Q_n(\beta) = \left[\frac{1}{n} Z'(y - X\beta) \right]' W_n \left[\frac{1}{n} Z'(y - X\beta) \right]$$

gdzie W_n jest symetryczną, kwadratową macierzą wag, o wymiarze równym liczbie instrumentów w macierzy Z . Macierz ta wskazuje jakie wagi należy przypisać poszczególnym równaniom w układzie równań $\frac{1}{n} (Z'(y - X\beta)) =$

0, czyli określa które instrumenty są bardziej, a które mniej ważne. Minimalizując Q_n pierwszą pochodną po β przyrównujemy do zera

$$-ZX'ZW_nZ'y + ZX'ZW_nZ'X\hat{\beta} = 0$$

co oznacza, że

$$X'ZW_nZ'y = X'ZW_nZ'X\hat{\beta}$$

Zakładając, że

$$\det(X'ZW_nZ'X) \neq 0$$

uzyskujemy estymator UMZI

$$\hat{\beta}_{GIV} = (X'ZW_nZ'X)^{-1} X'ZW_nZ'y$$

W jaki sposób dobieramy macierz wag W_n ?

Różne macierze wag prowadzą do estymatorów różnej postaci, ale przy spełnieniu wymaganych założeń wszystkie uzyskane estymatory są nieobciążone i zgodne. Optymalna macierz W_n jest proporcjonalna do odwrotności macierzy wariancji i kowariancji parametrów. W szczególnym przypadku, jeśli przyjmujemy, że składnik losowy jest sferyczny, uzyskujemy optymalną postać W_n

$$W_n^{opt} = \left(\frac{1}{n}Z'Z\right)^{-1}$$

Podstawiając optymalną macierz wag do estymatora, uzyskujemy estymator

$$\hat{\beta}_{GIV} = \left(X'Z \left(\frac{1}{n}Z'Z\right)^{-1} Z'X\right)^{-1} X'Z \left(\frac{1}{n}Z'Z\right)^{-1} Z'y$$

Estymator ten, przyjmuje różną postać, w zależności od wybranej macierzy wag.

4 Estymator potrójnej metody najmniejszy kwadratów (3MKNK)

- Estymacja parametrów równania za pomocą KMKNK abstrahuje od endogeniczności niektórych zmiennych objaśniających
- 2MKNK uwzględnia endogeniczność, lecz za jej pomocą estymujemy parametry każdego równania osobno

- Korelacje między składnikami losowymi poszczególnych równań nie zostają uwzględnione w procesie estymacji
- Wady te w modelu nie będzie, gdy przeprowadzimy łączną estymację parametrów wszystkich równań, uwzględniając korelacje składników losowych poszczególnych równań

Potraktujemy model wielorównaniowy jako macierzowy model jednorównaniowy. Zapisujemy nasz n -wymiarowy model jako

$$\begin{aligned} y_1 &= \tilde{Z}_1 \cdot \tilde{F}_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 &= \tilde{Z}_2 \cdot \tilde{F}_2 + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ y_m &= \tilde{Z}_m \cdot \tilde{F}_m + \varepsilon_m \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{Z}_i = [\tilde{Y}_i \quad \tilde{Z}_i]$ - wektor zmiennych objaśniających (endo- i egzogenicznych) w n -tym równaniu modelu.

Niech \tilde{F}_j^{2MNK} - wektor oszacowań parametrów j -tego równania za pomocą 2MNK.

Znając go, możemy oszacować macierz wariancji-kowariancji wektora składników losowych modelu

$$\begin{aligned} \text{Var}(\varepsilon_t) &= \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_t^T) \\ \hat{\Sigma} &= [\hat{\sigma}_{ij}] \\ \hat{\sigma}_{ij} &= (y_i - Z_i \tilde{F}_i^{2MNK})(y_j - Z_j \tilde{F}_j^{2MNK})^T / T \end{aligned}$$

gdzie T - liczba obserwacji.

Alternatywnie zamiast T , można podzielić sumę iloczynów w liczniku przez średnią geometryczną liczbę stopni swobody obu równań i oraz j

$$\sqrt{(T - \tilde{M}_i - \tilde{K}_i)(T - \tilde{M}_j - \tilde{K}_j)}$$

Zapisujemy cały model w jednym równaniu macierzowym

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{Z}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{Z}_m \end{bmatrix}}_Z \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \vdots \\ \tilde{F}_m \end{bmatrix}}_F + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}}_\varepsilon$$

Przy czym $\varepsilon - 1, \varepsilon - 2, \dots$ są wektorami pionowymi o wymiarach $T \times 1$

4.1 Kolejne kroki w estymacji 3MNK

Krok 1. Estymacja w postaci zredukowanej (MNK) i obliczenie wartości teoretycznych dla równania j

$$\hat{\tilde{Z}}_j = X\Pi_j = X(X^T X)^{-1} X^T \tilde{Z}_j$$

Macierzowo dla całego systemu

$$\begin{bmatrix} X(X^T X)^{-1} X^T \tilde{Z}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X(X^T X)^{-1} X^T \tilde{Z}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X(X^T X)^{-1} X^T \tilde{Z}_m \end{bmatrix}$$

lub inaczej

$$\left\{ I_m \otimes \left[X(X^T X)^{-1} X^T \right] \right\} Z$$

Krok 2. Estymacja w postaci strukturalnej parametrów pojedynczych równań (2MNK). Wartości z próby w KMNK zamienione na wartości teoretyczne

$$\hat{F}^{2MNK} = (\hat{Z}^T \hat{Z}) \hat{Z}^T y$$

Krok 3. Uwzględnienie jednoczesnych korelacji składników losowych w procesie estymacji. Jeżeli poszczególne składniki losowe są sferyczne, to każdy taki wektor ma macierz wariancji-kowariancji postaci

$$\begin{bmatrix} \sigma_{jj}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{jj}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{jj}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{12}^2 & 0 & \dots & 0 & \dots & \sigma_{1m}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{11}^2 & \dots & 0 & 0 & \sigma_{12}^2 & \dots & 0 & \dots & 0 & \sigma_{1m}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \sigma_{11}^2 & \vdots & \vdots & \vdots & \sigma_{12}^2 & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \sigma_{1m}^2 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{11}^2 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{12}^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & \sigma_{1m}^2 \\ \sigma_{21}^2 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{22}^2 & 0 & \dots & 0 & \dots & \sigma_{2m}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{21}^2 & \dots & 0 & 0 & \sigma_{22}^2 & \dots & 0 & \dots & 0 & \sigma_{2m}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \sigma_{21}^2 & \vdots & \vdots & \vdots & \sigma_{22}^2 & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \sigma_{2m}^2 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{21}^2 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{22}^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & \sigma_{2m}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{m1}^2 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{m2}^2 & 0 & \dots & 0 & \dots & \sigma_{mm}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{m1}^2 & \dots & 0 & 0 & \sigma_{m2}^2 & \dots & 0 & \dots & 0 & \sigma_{mm}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \sigma_{m1}^2 & \vdots & \vdots & \vdots & \sigma_{m2}^2 & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \sigma_{mm}^2 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{m1}^2 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{m2}^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & \sigma_{mm}^2 \end{pmatrix}$$

Wykorzystanie iloczynu Kroneckera w 3MNK

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix}$$

Macierz wariancji-kowariancji składników reszt z 2MNK

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{1m}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2m}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}^2 & \sigma_{m2}^2 & \dots & \sigma_{mm}^2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{T \times T} = \Sigma \otimes I_T$$

W praktyce korzystamy z 2MNK i otrzymujemy wektor wartości teoretycznych i reszt dla każdego z równań osobno

$$\forall_{j=1,\dots,m} \hat{Y}_j \hat{\varepsilon}_j$$

Obliczamy kowariancje między resztami losowymi poszczególnych równań

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\hat{\varepsilon}_i^T \hat{\varepsilon}_j}{T}$$

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11}^2 & \hat{\sigma}_{12}^2 & \dots & \hat{\sigma}_{1m}^2 \\ \hat{\sigma}_{21}^2 & \hat{\sigma}_{22}^2 & \dots & \hat{\sigma}_{2m}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{m1}^2 & \hat{\sigma}_{m2}^2 & \dots & \hat{\sigma}_{mm}^2 \end{bmatrix}$$

Jeżeli znamy macierz wariancji-koowariancji całego wektora składników losowych po oszacowaniu $\hat{\Sigma}$, to możemy zastosować UMNK w odniesieniu do modelu $yZF + \varepsilon, \varepsilon \sim (o, \Omega)$

$$\tilde{F}^{UMNK} = \left(Z^T \Omega^{-1} Z \right)^{-1} Z^T \Omega^{-1} y$$

Przy jednoczesnym zastosowaniu 2MNK zastępujemy w powyższym wzorze Z wartościami teoretycznymi z kroku 1.

$$\hat{F}^{UMNK} = \left(\hat{Z}^T \Omega^{-1} \hat{Z} \right)^{-1} \hat{Z}^T \Omega^{-1} y$$

Skoro $\hat{\Omega} = \hat{\Sigma} \otimes I_T$ oraz $\hat{Z} = \left\{ I_m \otimes \left[X (X^T X)^{-1} X^T \right] \right\} Z$, to

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{UMNK} &= \\ &= \left[Z^T \left\{ I_m \otimes \left[X (X^T X)^{-1} X^T \right] \right\} (\hat{\Sigma} \otimes I_T)^{-1} \left\{ I_m \otimes \left[X (X^T X)^{-1} X^T \right] \right\} Z \right]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot Z^T \left\{ I_m \otimes \left[X (X^T X)^{-1} X^T \right] \right\}^T (\hat{\Sigma} \otimes I_T)^{-1} y \end{aligned}$$

Z własności iloczynu Kroneckera

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{UMNK} &= \\ &= \left[Z^T \left\{ \hat{\Sigma}^{-1} \otimes \left[X (X^T X)^{-1} X^T \right] \right\} Z \right]^{-1} Z^T \left\{ \hat{\Sigma}^{-1} \otimes \left[X (X^T X)^{-1} X^T \right] \right\} y \end{aligned}$$

4.2 Własności estymatora 3MNK

1. Jest zgodny
2. Jest asymptotycznie najlepszy w pewnej klasie estymatorów zmiennych instrumentalnych (do której należy 2MNK), więc jest bardziej efektywny od 2MNK.
3. Jeżeli założymy normalność ε , estymator jest asymptotycznie równoważny estymatorowi MNK z pełną informacją (przedstawionej dalej): 3MNK ma ten sam rozkład asymptotyczny, ale nie oznacza to numerycznej równoważności oszacowań w skończonej próbie.

4.3 Szczególne przypadki 3MNK

- W sytuacji, gdy wiem, *a priori*, że Σ jest macierzą diagonalną, czyli równoczesne kowariancje składników losowych są zerowe, metoda 3MNK

oczywiście nie poprawia efektywności. W takim przypadku 3MNK sprowadza się do 2MNK. Taki sąd *a priori* jest jednak dość mocny i w praktyce zakładamy, raczej niezerowe równoczesne kowariancje.

- Kiedy wszystkie równania są jednoznacznie identyfikowalne, 3MNK sprowadza się do 2MNK.

5 Estymator metody największej wiarygodności z pełną informacją (MNWPO, FIML)

Układ równań w postaci strukturalnej $Ay + BX = \varepsilon$. Składnik losowy postaci zredukowanej ma macierz wariancji-kowariancji $\hat{\Sigma}$. Jeżeli poszczególne wektory składnika losowego z różnych okresów (i) są niezależne i (ii) mają wielowymiarowy rozkład normalny, to ich łączna funkcja gęstości

$$L_\varepsilon = (2\pi)^{-\frac{mT}{2}} |\hat{\Sigma} \otimes I_T|^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \varepsilon^T (\hat{\Sigma} \otimes I_T)^{-1} \varepsilon \right)$$

Funkcja gęstości obserwacji i składnika losowego zależą od siebie $L_y = L_\varepsilon \cdot |\det A|$

$$(2\pi)^{-\frac{mT}{2}} |\hat{\Sigma} \otimes I_T|^{-\frac{1}{2}} |\det A| \exp \left(-\frac{1}{2} (y - \tilde{Z}\tilde{F})^T (\hat{\Sigma} \otimes I_T)^{-1} (y - \tilde{Z}\tilde{F}) \right)$$

Po zlogarytmowaniu

$$L_y = -\frac{mT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln |\Sigma| + T \cdot \ln |\det A| - \frac{1}{2} \left((y - \tilde{Z}\tilde{F})^T (\hat{\Sigma} \otimes I_T)^{-1} (y - \tilde{Z}\tilde{F}) \right)$$

Oszacowanie FIML otrzymamy maksymalizując powyższe wyrażenie ze względu na niezerowe wartości parametrów modelu.

5.1 Estymacja parametrów modelu liniowego estymatorem uogólnionym Aitkena

W sytuacji, w której niesferyczność składników zakłócających, przejawiająca się zmiennością wariancji, bądź kowariancji w czasie składników zakłócających, nie jest wynikiem błędów konstrukcji modelu estymator KMNK nie jest efektywny. Zdefiniujemy strukturę stochastyczną modelu, w którym składniki zakłócające nie są sferyczne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\varepsilon &= 0 \\ \mathbb{E}\varepsilon\varepsilon' &= \sigma_\varepsilon^2 \Omega, \end{aligned}$$

gdzie Ω jest $T \times T$ wymiarową macierzą, określoną dodatnio

$$\mathbb{E}X'\varepsilon = 0$$

Jeżeli składniki zakłócające są nieskorelowane w czasie, ale mają zmienne w czasie wariancje, wtedy macierz Ω ma postać

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{TT} \end{bmatrix}$$

gdzie $\sigma_\varepsilon^2 \omega_{tt}$ jest wariancją jednoczesnych składników zakłócających.

Jeśli składniki zakłócające mają stałe wariancje, ale są skorelowane w czasie, wtedy macierz Ω może być zapisana następująco

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \omega_{12} & \dots & \omega_{1T} \\ \omega_{21} & 1 & \dots & \omega_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{T1} & \omega_{T2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie $\sigma_\varepsilon^2 \omega_{ij}$ jest kowariancją niejednoczesnych składników zakłócających modelu.

W przypadku, gdy występuje zarówno skorelowanie w czasie, jak również zmienność wariancji, wtedy

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1T} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{T1} & \omega_{T2} & \dots & \omega_{TT} \end{bmatrix}$$

Rozważmy estymator parametrów strukturalnych $\hat{\beta}$ modelu $y = X\beta + \varepsilon$, w którym składniki zakłócające są niesferyczne i który minimalizuje uogólnioną sumę kwadratów reszt

$$\tilde{S} = \tilde{\varepsilon}'\Omega^{-1}\tilde{\varepsilon}$$

gdzie $\tilde{\varepsilon} = y - X\tilde{\beta}$ jest wektorem reszt. Rozwijając otrzymujemy

$$\tilde{S} = y'\Omega^{-1}y - 2\tilde{\beta}'X'\Omega^{-1}y + \tilde{\beta}'X'\Omega^{-1}X\tilde{\beta}.$$

Szukać będziemy takiego $\tilde{\beta}$, dla którego zachodzi

$$\tilde{S} \xrightarrow{\tilde{\beta}} \min$$

Obliczamy wektor pochodnych cząstkowych \tilde{S} względem $\tilde{\beta}$ i przyrównujemy go do zera. Otrzymamy w ten sposób

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{\beta}} = -2X'\Omega^{-1}y + 2X'\Omega^{-1}X\tilde{\beta} = 0$$

W konsekwencji możemy zapisać tzw. uogólniony układ równań normalnych

$$X'\Omega^{-1}X\tilde{\beta} = X'\Omega^{-1}y$$

którego rozwiązaniem jest, jeśli X jest macierzą o pełnym rzędzie kolumnowym, tak, że $|X'\Omega^{-1}X| > 0$, estymator uogólnionej metody najmniejszych kwadratów, zwany estymatorem Aitkena i mającym postać

$$\tilde{\beta} = (X'\Omega X)^{-1} X'\Omega^{-1}y$$

Ponieważ macierz drugich pochodnych \tilde{S} względem $\tilde{\beta}$, tj.

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \tilde{\beta} \partial \tilde{\beta}'} = 2X'\Omega^{-1}X$$

jest macierzą określoną dodatnio, zatem estymator Aitkena rzeczywiście minimalizuje uogólnioną sumę kwadratów reszt.

Estymator $\tilde{\beta}$ należy do klasy estymatorów liniowych, który można zapisać jako

$$\tilde{\beta} = \tilde{C}'y$$

gdzie $\tilde{C}' = (X'\Omega X)^{-1} X'\Omega^{-1}$ jest macierzą $(K+1) \times T$ wymiarową. Jeśli elementy macierzy X są nielosowe lub losowe, ale nieskorelowane ze składnikami zakłócającymi modelu, estymator Aitkena jest nieobciążony. Możemy zapisać, że

$$\tilde{\beta} = \beta + \tilde{C}'\varepsilon$$

dlatego, że spełniony jest warunek konieczny nieobciążoności, tj.

$$\tilde{C}'X = I_{K+1}$$

Zatem możemy zapisać, że

$$\mathbb{E}\tilde{\beta} = \beta$$

Można udowodnić, zakładając nielosowość macierzy X , że macierz wariancji-kowariancji błędów estymacji w tym przypadku jest równa

$$\Sigma_{\tilde{\beta}}^2 = \mathbb{E} \left(\tilde{\beta} - \beta \right) \left(\tilde{\beta} - \beta \right)' = \mathbb{E} \tilde{C}' \varepsilon \left(\tilde{C}' \varepsilon \right)' = \tilde{C}' \sigma_{\varepsilon}^2 \Omega \tilde{C} = \sigma_{\varepsilon}^2 \tilde{C}' \Omega \tilde{C}$$

Znając postać macierzy \tilde{C}' możemy wykazać, że

$$\Sigma_{\tilde{\beta}} = \sigma_{\varepsilon}^2 \left(X' \Omega^{-1} X \right)^{-1}$$

Estymator Aitkena jest najlepszym liniowym, nieobciążonym estymatorem w klasie liniowych estymatorów dla modelu z niesferycznymi składnikami zakłócającymi. Zatem dowolny estymator nieobciążony typu

$$\tilde{\beta}_D = \tilde{C}_D' y$$

dla którego zachodzi $\tilde{C}_D X = I_{K+1}$, charakteryzuje się macierzą wariancji-kowariancji

$$\Sigma_{\tilde{\beta}_D}^2 = \mathbb{E} \left(\tilde{\beta}_D - \beta \right) \left(\tilde{\beta}_D - \beta \right)' = \sigma_{\varepsilon}^2 \tilde{C}_D' \Omega \tilde{C}_D$$

której elementy są nie mniejsze niż macierz wariancji-kowariancji estymatora Aitkena. Jeśli macierz Ω jest określona dodatnio, wtedy istnieje $T \times T$ wymiarowa macierz P spełniająca następujące własności

$$\begin{aligned} P' P &= \Omega^{-1} \\ P \Omega \Omega' &= I_T \end{aligned}$$

gdzie I_T jest macierzą jednostkową stopnia T . Macierz P nazywać będziemy macierzą transformacji. Macierz ta umożliwia ukazanie estymatora Aitkena jako specyficznego estymatora MNK, dla transformowanych obserwacji zmiennych modelu. Niech pierwotny model

$$y = X\beta + \varepsilon$$

zostanie przemnożony przez macierz P tak, że

$$Py = PX\beta + P\varepsilon$$

Ponieważ macierz P ma nielosowe elementy, zatem jest prawdą, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E} P \varepsilon &= 0 \\ \mathbb{E} P \varepsilon \left(P \varepsilon \right)' &= \sigma_{\varepsilon}^2 P \Omega \Omega' = \sigma_{\varepsilon}^2 I_T \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że składniki zakłócające modelu transformowanego mają sferyczne składniki zakłócające i parametry tego modelu można szacować metodą najmniejszych kwadratów. Niech

$$Y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$$

gdzie

$$Y^* = Py$$

$$X^* = PX$$

$$\varepsilon^* = P\varepsilon$$

Stosując MNK modelu, w którym pierwotne obserwacje zostały zważone elementami macierzy Ω jest równoważne estymacji uogólnioną metodą najmniejszych kwadratów.

5.2 Przypadek zmienności wariancji

Dla przypadku składników zakłócających o zmiennych wariancjach z macierzą Ω o postaci

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{TT} \end{bmatrix}$$

można wykazać, że

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\omega_{TT}} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega_{11}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_{22}}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\omega_{TT}}} \end{bmatrix}$$

Macierze te spełniają równania

$$P'P = \Omega^{-1}$$

$$P\Omega P' = I_T$$

5.3 Przypadek autokorelacji

W przypadku, gdy składniki zakłócające są skorelowane w czasie i gdy skorelowanie nie jest wynikiem niepoprawnej specyfikacji modelu, staramy się wykorzystać estymator Aitkena w celu eliminacji skutków jej występowania.

W takim przypadku elementy macierzy Ω i P są funkcjami parametrów występujących w procesie generującym skorelowane w czasie składniki losowe. Rozważmy przykład, w którym składniki zakłócające w liniowym modelu.

$$y_t\beta_0 + \beta_1x_{1t} + \cdots + \beta_kx_{kt} + \varepsilon_t$$

są generowane przez stacjonarny proces autoregresyjny rzędu pierwszego.

$$\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \eta_t$$

gdzie

- $|\rho_1| < 1$ jest współczynnikiem autokorelacji rzędu pierwszego
- η_t jest czysto losowym (sferycznym) składnikiem zakłócającym, spełniającym następujące warunki
 - $\mathbb{E}\eta_t = 0$
 - $\mathbb{E}\eta_t^2 = \sigma_\eta^2$
 - $\mathbb{E}\eta_t\eta_s = 0$ dla $t \neq s$

Rozważmy jakie parametry rozkładu charakteryzować będą kolejne składniki zakłócające ε_t , generowane przez model autoregresyjny. Przedstawiamy obecnie składnik zakłócający jako funkcję wszystkich przeszłych i bieżących zakłóceń η_t . Drogą kolejnych podstawień otrzymamy

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \rho_1 \underbrace{(\rho_1\varepsilon_{t-2} + \eta_{t-1})}_{\varepsilon_{t-1}} + \eta_t = \rho_1^2\varepsilon_{t-2} + \rho_1\eta_{t-1} + \eta_t \\ \varepsilon_t &= \rho_1^2 \underbrace{(\rho_1\varepsilon_{t-3} + \eta_{t-2})}_{\varepsilon_{t-2}} + \rho_1\eta_{t-1} + \eta_t = \rho_1^3\varepsilon_{t-3} + \rho_1^2\eta_{t-2} + \rho_1\eta_{t-1} + \eta_t \\ &\vdots \\ \varepsilon_t &= \rho_1^{s+1}\varepsilon_{t-s-1} + \rho_1^s\eta_{t-s} + \cdots + \rho_1^2\eta_{t-2} + \rho_1\eta_{t-1} + \eta_t\end{aligned}$$

Jeśli proces generujący składniki zakłócające jest stacjonarny, tj $|\rho_1| < 1$ wtedy

$$\rho_1^{s+1}\varepsilon_{t-s-1} \rightarrow 0$$

i w postaci końcowej

$$\varepsilon_t = \rho_1^s\eta_{t-s} + \cdots + \rho_1^2\eta_{t-2} + \rho_1\eta_{t-1} + \eta_t$$

Składnik losowy ε_t jest przedstawiony jako ważona funkcja wszystkich (przyszłych i bieżącego) sferycznych składników η . Ponieważ parametry rozkładu η_t są zadane, zatem można wyznaczyć parametry rozkładu ε_t . W przypadku wariancji możemy zapisać, że

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\varepsilon_t^2 &= \mathbb{E}\left(\rho_1^s \eta_{t-s} + \dots + \rho_1^2 \eta_{t-2} + \rho_1 \eta_{t-1} + \eta_t\right)^2 = \\ &= \rho_1^{2s} \mathbb{E}\eta_{t-s}^2 + \dots + \rho_1^4 \mathbb{E}\eta_{t-2}^2 + \rho_1^2 \mathbb{E}\eta_{t-1}^2 + \mathbb{E}\eta_t^2\end{aligned}$$

gdzie wszystkie kowariancje niejednoczesnych składników zakłócających η_t, η_s , dla $t \neq s$ przyrównano do zera. W konsekwencji można zapisać, że

$$\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = \eta_1^{2s} \sigma_\eta^2 + \dots + \eta_1^4 \sigma_\eta^2 + \eta_1^2 \sigma_\eta^2 + \sigma_\eta^2 = \sigma_\eta^2 (\eta_1^{2s} + \dots + \eta_1^4 + \eta_1^2 + 1)$$

ponieważ suma elementów w nawiasie stanowi szereg geometryczny zbieżny o ilorazie ρ_1^2 , zatem jego suma jest równa $\frac{1}{1-\rho_1^2}$. Ostatecznie więc mamy:

$$> E\varepsilon_t^2 = \sigma_\eta^2 \cdot \frac{1}{1-\rho_1^2} = \sigma_\varepsilon^2$$

Z powyższego zapisu widać, że skorelowane w czasie składniki zakłócające mają stałe w czasie wariancje. Aby obliczyć kowariancje przeprowadzimy niestępującą procedurę kolejnych podstawień

$$\begin{aligned}\varepsilon_{t+1} &= \rho_1 \varepsilon_t + \eta_{t+1} \\ \varepsilon_{t+2} &= \rho_1 \underbrace{(\rho_1 \varepsilon_t + \eta_{t+1})}_{\varepsilon_{t+1}} + \eta_{t+2} = \rho_1^2 \varepsilon_t + \rho_1 \eta_{t+1} + \eta_{t+2} \\ \varepsilon_{t+3} &= \rho_1 \underbrace{(\rho_1^2 \varepsilon_t + \rho_1 \eta_{t+1} + \eta_{t+2})}_{\varepsilon_{t+2}} + \eta_{t+3} = \rho_1^3 \varepsilon_t + \rho_1^2 \eta_{t+1} + \rho_1 \eta_{t+2} + \eta_{t+3} \\ &\vdots \\ \varepsilon_{t+\tau} &= \rho_1^\tau \varepsilon_t + \rho_1^{\tau-1} \eta_{t+1} + \dots + \rho_1^2 \eta_{t+\tau-2} + \rho_1 \eta_{t+\tau-1}\end{aligned}$$

Mnożąc obie strony ostatniej równości przez ε_t i obliczając wartość oczekiwaną otrzymamy

$$\mathbb{E}\varepsilon_t \varepsilon_{t+\tau} = \rho_1^\tau \mathbb{E}\varepsilon_t^2 + \rho_1^{\tau-1} \mathbb{E}\varepsilon_t \eta_{t+1} + \dots + \rho_1^2 \mathbb{E}\varepsilon_t \eta_{t+\tau-2} + \rho_1 \mathbb{E}\varepsilon_t \eta_{t+\tau-1} = \rho_1^\tau \sigma_\varepsilon^2$$

Ponieważ ε_t zależy tylko od opóźnionych i bieżących składników zakłócających η_{t-i} oraz η_t , nie zależy natomiast od przyszłych składników η_{t+j} . Jeśli składniki zakłócające generowane są przez proces autoregresyjny rzędu

pierwszego, to prawdziwe są następujące własności:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\varepsilon_t &> 0 \\ \mathbb{E}\varepsilon_t^2 &= \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \rho_1^2} \\ \mathbb{E}\varepsilon_t\varepsilon_{t+\tau} &= \rho_1^\tau \sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

Możemy pokazać, że $T \times T$ macierz wariancji-kowariancji składników zakłócających $\sigma_\varepsilon^2 \Omega$ ma elementy będące funkcjami współczynnika ρ_1 . Możemy zapisać, że

$$\begin{aligned}\Omega &= \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1^2 & \rho_1^3 & \dots & \rho_1^5 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_1^2 & \dots & \rho_1^4 \\ \rho_1^2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_1^3 \\ \rho_1^3 & \rho_1^2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_1^5 & \rho_1^4 & \rho_1^3 & \rho_1^2 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ \Omega^{-1} &= \frac{1}{1 - \rho_1^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\rho_1 & 1 + \rho_1^2 & -\rho_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_1 & 1 + \rho_1^2 & -\rho_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 1 + \rho_1^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + \rho_1^2 & -\rho_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\rho_1 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Macierz transformacji P może być przedstawiona w postaci

$$P = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_1^2}} \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \rho_1^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\rho_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\rho_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozważmy równanie $Py = PX\beta + P\varepsilon$. Ponieważ obie strony tej równości możemy podzielić przez stałą $\frac{1}{\sqrt{1 - \rho_1^2}}$, zatem transformowanymi obserwacjami zmiennej endogenicznej, zmiennych objaśniających oraz składników zakłóca-

jących są

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\rho_1^2}Py &= \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho_1^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\sqrt{1-\rho_1^2} \\ y_2 - \rho_1 y_1 \\ y_3 - \rho_1 y_2 \\ \vdots \\ y_T - \rho_1 y_{T-1} \end{bmatrix} \\ \sqrt{1-\rho_1^2}Px &= \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho_1^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{14} & \dots & x_{1T} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{24} & \dots & x_{2T} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & x_{34} & \dots & x_{3T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{T1} & x_{T2} & x_{T4} & \dots & x_{TT} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho_1^2} & \sqrt{1-\rho_1^2}x_{11} & \sqrt{1-\rho_1^2}x_{12} & \dots & \sqrt{1-\rho_1^2}x_{1T} \\ 1-\rho_1 & x_{21}-\rho_1x_{11} & x_{22}-\rho_1x_{12} & \dots & x_{2T}-\rho_1x_{1T} \\ 1-\rho_1 & x_{31}-\rho_1x_{21} & x_{32}-\rho_1x_{22} & \dots & x_{3T}-\rho_1x_{2T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-\rho_1 & x_{T1}-\rho_1x_{(T-1)1} & x_{T2}-\rho_1x_{(T-1)2} & \dots & x_T-\rho_1x_{(T-1)T} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Zatem typowe przekształcenia autoregresyjne mają postać

$$\begin{aligned}\text{dlat} = 1 & \quad y_1^* = y_1\sqrt{1-\rho_1^2} \quad x_{ti}^* = x_{ti}\sqrt{1-\rho_1^2} \quad i = 1, \dots, k \\ \text{dlat} = 2, \dots, T & \quad y_t^* = y_t - \rho_1 y_{t-1} \quad x_{ti}^* = x_{ti} - \rho_1 x_{t-1,i} \quad i = 1, \dots, k\end{aligned}$$

Jeśli nie przeprowadzone jest autoregresyjne przekształcenie pierwszych obserwacji zmiennych, wtedy zamiast macierzy P występuje macierz Q o wymiarach $)T + 1 = < timesT$

$$Q = \begin{bmatrix} -\rho_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\rho_1 \end{bmatrix}$$

Macierz ta nie spełnia warunków takich jak P . W ogólnym przypadku zachodzi bowiem, że $Q'Q \neq P'P = \Omega^{-1}$. Różnica występuje w górnym lewym elemencie obu macierzy.

Nieznany współczynnik ρ_1 estymujemy następująco

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^T \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}$$

Utwórzmy macierz $\hat{\Omega}$ zgodnie z

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{\rho}_1 & \tilde{\rho}_1^2 & \dots & \tilde{\rho}_1^{T-1} \\ \tilde{\rho}_1 & 1 & \tilde{\rho}_1 & \dots & \tilde{\rho}_1^{T-2} \\ \tilde{\rho}_1^2 & \tilde{\rho}_1 & 1 & \dots & \tilde{\rho}_1^{T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\rho}_1^{T-1} & \tilde{\rho}_1^{T-2} & \tilde{\rho}_1^{T-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Wykorzystując powyższą macierz zdefiniujemy dwukrotnie estymator Aitkena w następujący sposób

$$\hat{\hat{\beta}} = (X' \hat{\Omega}^{-1} X)^{-1} X' \hat{\Omega}^{-1} y$$

Estymator ten jest przybliżeniem optymalnego estymatora Aitkena za znaną macierzą wariancji-kowariancji zakłóceń modelu. Jego macierz wariancji-kowariancji jest przybliżeniem macierzy wariancji-kowariancji estymatora Aitkena. Można tę macierz zapisać

$$\Sigma_{\hat{\hat{\beta}}}^2 \approx (X' \hat{\Omega}^{-1} X)^{-1}$$

5.4 Konsekwencje występowania niesferycznych składników losowych

Istotnym pytaniem jest jakie własności posiada estymator MNK, jeśli prawdziwym modelem generującym obserwacje zmiennej endogenicznej nie jest model klasyczny, lecz uogólniony. Aby to prześledzić rozważmy raz jeszcze estymator MNK zapisany w postaci

$$\tilde{\beta} = \beta + (X' X)^{-1} X' \varepsilon$$

Niesferyczność składników losowych nie wpływa na nieobciążenie estymatora MNK, jeśli tylko zmienne objaśniające pozostają nieskorelowane ze składnikami losowymi modelu. Istotne konsekwencje związane są z szacowaniem wariancji składników losowych oraz z szacowaniem macierz wariancji-kowariancji błędów estymacji. Wariancja reszt oblicza na "klasycznie" jako suma kwadratów reszt podzielona przez liczbę stopni swobody nie jest już nieobciążonym estymatorem wariancji składników losowych. Zauważmy, że wariancja reszt KMNK jest zdefiniowana jako

$$\tilde{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T - K - 1} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2 = \frac{1}{T - K - 1} \hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon} = \frac{1}{T - K - 1} \varepsilon' M \varepsilon$$

gdzie

$$M = I_T - X(X'X)^{-1}X'$$

jest macierzą idempotentną o wymiarach $T \times T$, taką, że $M = M'$ oraz $MM = M$.

Suma kwadratów reszt jest kwadratową formą wektora składników losowych. Obliczając jej wartość oczekiwaną, przy wykorzystaniu własności śladu macierzy otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} &= \\ &= \mathbb{E}\varepsilon' M \varepsilon = \\ &= \mathbb{E}tr(\varepsilon' M \varepsilon) = \\ &= \mathbb{E}tr(M \varepsilon' \varepsilon) = \\ &= tr \mathbb{E}(M \varepsilon' \varepsilon) = \\ &= tr M \sigma_\varepsilon^2 \Omega = \\ &= \sigma_\varepsilon^2 tr M \Omega \end{aligned}$$

Aby wariancja reszt była nieobciążonym estymatorem wariancji składników losowych, wyrażenie powyższe powinno równać się

$$\mathbb{E}\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = \sigma_\varepsilon^2 (T - K - 1)$$

Jest to możliwe wtedy, gdy $\Omega = I_T$. W takim przypadku, z uwagi na własności macierz M zachodzi

$$\begin{aligned} tr M &= \\ &= tr(I_T - X(X'X)^{-1}X') = \\ &= T - tr X(X'X)^{-1}X' = \\ &= T - tr(X'X)^{-1}X'X = \\ &= T - tr I_{K+1} = \\ &= T - K - 1 \end{aligned}$$

Jeśli zatem $\Omega \neq I_T$, wtedy $\mathbb{E}\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} \neq \sigma_\varepsilon^2 (T - K - 1)$ i w konsekwencji

$$\mathbb{E}\sigma_\varepsilon^2 \neq \mathbb{E}\frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{T-K-1} = \sigma_\varepsilon^2$$

zatem wariancja reszt jest w takim przypadku obciążonym estymatorem wariancji składników losowych. Jeszcze poważniejszy problem związany jest z macierzą wariancji-kowariancji błędów estymacji. Jest ona równa macierzy

$\Sigma_{\hat{\beta}}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 (X'X)$ tylko wtedy, gdy $\Omega = I_T$. Jeśli powyższa równość nie zachodzi, wtedy macierz wariancji-kowariancji przyjmuje postać

$$\Sigma_{\hat{\beta}}^2 = \mathbb{E} \left(\hat{\beta} - \beta \right) \left(\hat{\beta} - \beta \right)' = \sigma_{\varepsilon}^2 (X'X)^{-1} (X'\Omega X)^{-1}$$

Wykorzystując estymator macierzy wariancji-kowariancji, prawdziwy dla sferycznych składników losowych, tj. $\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 (X'X)^{-1}$, w sytuacji, gdy składniki te nie są sferyczne popełniamy błąd zarówno z tytułu niewłaściwej postaci macierzy wariancji-kowariancji, jak również z tytułu obciążonej estymacji wariancji składników losowych. Na dodatek nie potrafimy w ogólnym przypadku określić jakiego rodzaju obciążenie towarzyszy wykorzystaniu macierzy $\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 (X'X)^{-1}$ sytuacji niesferycznych składników zakłócających. Wykorzystanie tej macierzy prowadzi do wyznaczenia niepoprawnych średnich błędów ocen parametrów strukturalnych. Sugestia jest zatem następująca: budując model ekonometryczny należy dążyć do wyeliminowania niesferycznych składników losowych (drogą respecyfikacji modelu) lub jeśli nie jest to możliwe, oszacować parametry modelu UMNK, tj. eliminować skutki występowania niesferycznych składników losowych.

6 Wybrane jednowymiarowe modele zmienności cen i stóp zwrotu

Analiza szeregów czasowych rynku finansowego o wysokiej częstotliwości obejmuje

- cechy analizy krótkookresowej (szeregi z tzw. krótką pamięcią)
- podstawowy i uogólniony model grupowania wariancji ARCH
- testowanie efektu ARCH i uogólnionego GARCH
- niestandardowe modele ARCH (tzw. in mean, z symetrią, E-GARCH)
- estymację i wykorzystanie modeli klasy GARCH

6.1 Cechy analizy krótkookresowej

Do cech procesów losowych (najczęściej procesów na rynkach finansowych) charakteryzującą się wysoką częstotliwością zalicza się:

- naprzemienne występowanie okresów o zwiększonej fluktuacji i okresów niskiej zmienności zmiennej finansowej

- skupiania wariancji w kolejnych jednostkach czasu, tj. dodatniej korelacji w dziedzinie zmienności zmiennej będącej przedmiotem zainteresowania, co przejawia się w wysokiej wariancji zmiennej powodowanej wzrostem tej wariancji w okresie poprzedzającym i analogicznie spadkiem wariancji na skutek niskiej wariancji w okresie poprzedzającym.

6.2 Podstawowy i uogólniony model ARCH

Rodzaje nieliniowych procesów stochastycznych.

W nieliniowej analizie jednowymiarowych szeregów czasowych poszukuje się funkcji f wiążącej dany proces z ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie

$$Y_t = f(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$$

gdzie ε_t jest zmienną losową o średniej zero i jednostkowej wariancji. Powyższa reprezentacja jest na tyle ogólna, że nie wiadomo jak dobierać postać funkcji f . Najczęściej przyjmuje się, że nieliniowy proces ekonomiczny ma postać

$$Y_t = g(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) + \varepsilon_t h(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$$

Procesy Y_t wyrażone z nieliniową funkcją g nazywamy procesami nieliniowymi w warunkowej wariancji.

Powyższa klasyfikacja ma sens, gdyż:

1. Warunkowa wartość oczekiwana Y_t może być zapisana

$$\mathbb{E}(Y_t | \Omega_{t-1}) = g(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$$

funkcja g opisuje zmiany wartości średniej procesu Y_t warunkowo względem informacji z przeszłości (zbiór Ω_{t-1} oznacza zbiór wszystkich informacji dostępnych do momentu $t-1$).

2. Kwadrat funkcji h przedstawia zmiany warunkowej wariancji procesu Y_t

$$\begin{aligned} D^2(Y_t | \Omega_{t-1}) &= \\ &= \mathbb{E} \left[Y_t - \mathbb{E}(Y_t | \Omega_{t-1})^2 | \Omega_{t-1} \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\varepsilon_t^2 h^2(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) | \Omega_{t-1} \right] = \\ &= h^2(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \\ &= h^2(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) \end{aligned}$$

Do najbardziej znanych modeli nieliniowych w warunkowej wartości średniej należą: procesy dwuliniowe, nieliniowe procesy autoregresji i średniej ruchomej, autoregresyjne modele progowe, przełącznikowe i wygładzonej przejścia, procesy autoregresyjne o losowych współczynnikach. Znanymi procesami o zmiennej wariancji warunkowej są procesy ARCH/GARCH