Lista 1

Zadanie 1

Wykazać, że jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są zmiennymi losowymi o jednakowych wartościach oczekiwanych $\mathbb{E}X_i = m$ dla $i = 1, \ldots$ to

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = m$$

niezależnie od tego czy N jest ustaloną liczbą naturalną, czy zmienną losową niezależną od $X_1, X_2, \ldots$

Rozwiązanie:

a)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \\
=&\frac{1}{N}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \\
=&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left(X_i\right) = \\
=&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m = \\
=&\frac{N}{N}\cdot m = m
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i | N = n\right) P\left(N = n\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) P\left(N = n\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m \cdot P\left(N = n\right) = m
\end{aligned}$$

Zadanie 2

Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$. Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Y = \min\left\{\frac{X}{1-X}, \frac{1-X}{X}\right\}$.

Rozwiązanie:

- $f_X(t) = \mathbb{1}_{(0,1)}(t)$

$$\begin{gathered}
\frac{X}{1-X} = \frac{1-X}{X} \\
X^2 = \left(1-X\right)^2 \\
X^2 - \left(1-X\right)^2 = 0 \\
(2X-1) \cdot 1 = 0 \\
X = \tfrac{1}{2}
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y =&\mathbb{E}\min\left\{\tfrac{X}{1-X},\tfrac{1-X}{X}\right\} = \\
=&\int\limits_0^1 \min\left\{\tfrac{x}{1-x},\tfrac{1-x}{x}\right\} f_X(x)\,dx = \\
=&\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \tfrac{x}{1-x} f_X(x)\,dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \tfrac{1-x}{x} f_X(x)\,dx = \\
=&\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x}\,dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-x}{x}\,dx = \\
=&\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} - 1\,dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} - 1\,dx = \\
=&\ln\tfrac{1}{2} - \ln 1 + \ln 1 - \ln\tfrac{1}{2} - 1 = \\
=&2\ln 2 - 1
\end{aligned}$$

Zadanie 4

Niech $X_1,\ldots,X_n$ będzie ciągiem zmiennych niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie dwumianowym $Ber(n_i,p)$, $1\leqslant i\leqslant n$. Wykazać, że zmienna losowa $Y=X_1+\cdots+X_n$ ma rozkład dwumianowy.

Rozwiązanie:

- $\varphi_{Ber}(t)=\left(q+p^{it}\right)^n$

$$\varphi_Y=\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t)\overset{\perp\!\!\!\perp}{=}\prod_{j=1}^n\varphi_{X_j}=\prod_{j=1}^n\left(q+p^{it}\right)^{n_j}=\left(q+p^{it}\right)^{\sum_{j=1}^n n_j}$$

$$Y\sim Ber\left(\sum_{j=1}^n n_j,p\right)$$

Zadanie 5

Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie ciągiem zmiennych niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona $P(\lambda_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Wykazać, że zmienna losowa $Y = X_1 + \dots + X_n$ ma rozkład Poissona.

Rozwiązanie:

- $\varphi_P(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} = \exp\Big(\lambda(e^{it}-1)\Big)$

$$\varphi_Y = \varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j} = \prod_{j=1}^{n} \exp\Big(\lambda_j(e^{it}-1)\Big) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(e^{it}-1)\right)$$

$$Y \sim P\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right)$$

Zadanie 6

Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie ciągiem zmiennych niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Cauchy'ego $C(\alpha_i, \lambda_i)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Wykazać, że zmienna losowa $Y = X_1 + \dots + X_n$ ma rozkład Cauchy'ego.

Rozwiązanie:

- $\varphi_X(t; \alpha_i, \lambda_i) = \mathbb{E}\left[e^{iXt}\right] = e^{i\alpha_i t - \lambda_i |t|}$

$$\varphi_Y = \varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j} = \prod_{j=1}^{n} e^{i\alpha_j t - \lambda_j |t|} =$$
$$= \exp\left(\sum_{j=1}^{n} i\alpha_j t - \lambda_j |t|\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} i\alpha_j t - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |t|\right)$$

$$Y \sim C\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right)$$

Zadanie 7

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie ciągiem zmiennych niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = X_1 + \cdots + X_n$.

Rozwiązanie:

- $\varphi_{Exp}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$
- $\varphi_{\Gamma}(t) = \left(\frac{1}{1-it\lambda}\right)^p$

$$\varphi_Y = \varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) \stackrel{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda - it} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n = \left(\frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}}\right)^n$$

$$Y \sim \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n\right)$$

Zadanie 8

Niech zmienna losowa U ma rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$ i niech F będzie dystrybuantą pewnego rozkładu. Wykazać, że zmienna losowa $Y = F^{-1}(U)$ ma dystrybuantę F.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} F_Y(t) =& P\left(Y \leqslant t\right) = \\ =& P\left(F^{-1}(U) \leqslant t\right) = \\ =& P\Big(U \leqslant F(t)\Big) = \\ =& F\Big(F(t)\Big) = F(t) \end{aligned}$$

Do uzupełnienia formalizmów (trochę tego będzie).

Zadanie 9

Zmienne losowe X i Y są niezależne o gęstościach:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in (0,1) \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{dla } y > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases} \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Niech $S = X + Y$. Obliczyć $\mathbb{E}\left(S|X \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(S|X \leqslant \frac{1}{2}\right) =& \frac{1}{P\left(X \leqslant \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left(S|X = x\right) f_X(x)\, dx = \\
=& \frac{1}{\int_0^{\frac{1}{2}} 2x\, dx} \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left(X + Y|X = x\right) f_X(x)\, dx = \\
=& 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left(x + Y|X = x\right) f_X(x)\, dx = \\
=& 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left(x + Y|X = x\right) f_X(x)\, dx = \\
=& 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left(x + Y\right) f_X(x)\, dx = \\
=& 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\mathbb{E}\left(x\right) + \mathbb{E}\left(Y\right)\Big) f_X(x)\, dx = \\
=& 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \Big(x + \mathbb{E}\left(Y\right)\Big) f_X(x)\, dx = \\
=& 4 \int_0^{\frac{1}{2}} x f_X(x)\, dx + 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left(Y\right) f_X(x)\, dx = \\
=& 4 \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot 2x\, dx + 4\mathbb{E}\left(Y\right) \int_0^{\frac{1}{2}} 2x\, dx = \\
=& \frac{4}{12} + \frac{4}{4} \mathbb{E}\left(Y\right)
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}\left(Y\right) = 1$

$$\mathbb{E}\left(S|X \leqslant \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$$

Zadanie 10

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach dwumianowych $Ber(n,p)$ i $Ber(m,p)$ odpowiednio. Wyznaczyć rozkład warunkowy zmiennej losowej X pod warunkiem $X+Y=t$ oraz obliczyć $\mathbb{E}\left(X|X+Y=t\right)$.

Rozwiązanie:

- $$f_{X|Y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy}$$

- $P\left(X=k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$\begin{aligned}
P\left(X+Y=t\right) &= \sum_{k=0}^{t} P\left(X+Y=t|Y=k\right)P\left(Y=k\right) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \\
&= \sum_{k=0}^{t} P\left(X+k=t\right)P\left(Y=k\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{t} P\left(X=t-k\right)P\left(Y=k\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{t} \binom{n}{t-k} p^{t-k}(1-p)^{n-t+k}\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{t} \binom{n}{t-k}\binom{m}{k}p^t(1-p)^{n+m-t} = \\
&= p^t(1-p)^{n+m-t}\sum_{k=0}^{t}\binom{n}{t-k}\binom{m}{k} = \\
&= \binom{m+n}{t}p^t(1-p)^{n+m-t}
\end{aligned}$$

Uzasadnienie ostatniego przejścia:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}x^t &= (1+x)^{n+m} = (1+x)^n(1+x)^m = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{k-j}\binom{n}{j}\right)x^k
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P\left(X=k|X+Y=t\right)=&\frac{P\left(X=k,X+Y=t\right)}{P\left(X+Y=t\right)}=\\
=&\frac{P\left(X=k\right)P\left(Y=t-k\right)}{P\left(X+Y=t\right)}=\\
=&\frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\binom{m}{t-k}p^{t-k}(1-p)^{m-t+k}}{\binom{m+n}{t}p^t(1-p)^{n+m-t}}=\\
=&\frac{\binom{n}{k}\binom{m}{t-k}p^t(1-p)^{n+m-t}}{\binom{m+n}{t}p^t(1-p)^{n+m-t}}=\\
=&\frac{\binom{n}{k}\binom{m}{t-k}}{\binom{m+n}{t}}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{E}\left(X=k|X+Y=t\right)=\sum_{k=0}^{t}\frac{\binom{n}{k}\binom{m}{t-k}}{\binom{m+n}{t}}k\overset{wikipedia}{=}\frac{nt}{m+n}
$$

Zadanie 11

Niech N_1, N_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda_1 = 20$ i $\lambda_2 = 30$ odpowiednio. Obliczyć wariancję warunkową: $\mathrm{Var}\left(N_1|N_1+N_2=50\right)$.

Rozwiązanie:

- $\varphi_{Poiss}(t) = \exp\Big(\lambda(e^{it}-1)\Big)$
- $P\left(Poiss=t\right) = \frac{\lambda^t}{t!}e^{-\lambda}$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{N_1+N_2}(t)=&\varphi_{N_1}(t)\varphi_{N_2}(t)=\\
=&\exp\Big(\lambda_1(e^{it}-1)\Big)\exp\Big(\lambda_2(e^{it}-1)\Big)=\\
=&\exp\Big(\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\left(e^{it}-1\right)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(N_1=t \mid N_1+N_2=50\right)= & \frac{P\left(N_1=t, N_1+N_2=50\right)}{P\left(N_1+N_2=50\right)}= \\
= & \frac{P\left(N_1=t, N_2=50-t\right)}{P\left(N_1+N_2=50\right)}= \\
= & \frac{P\left(N_1=t\right) P\left(N_2=50-t\right)}{P\left(N_1+N_2=50\right)}= \\
= & \frac{\frac{\lambda_1^t}{t!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{50-t}}{(50-t)!} e^{-\lambda_2}}{\frac{\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^{50}}{50!} e^{-\lambda_1-\lambda_2}}= \\
= & \frac{50!}{t!(50-t)!} \cdot \frac{20^t \cdot 30^{50-t}}{(20+30)^{50}}= \\
= & \binom{50}{t} \cdot\left(\frac{2}{5}\right)^t \cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{50-t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(N_1=t \mid N_1+N_2=50\right) & \sim Ber\left(50, \tfrac{2}{5}\right) \\
\operatorname{Var}\left(N_1=t \mid N_1+N_2=50\right) & =50 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}=12
\end{aligned}
$$

Zadanie 12

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Znaleźć rozkład warunkowy zmiennej losowej X_1 pod warunkiem S_n, gdzie $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Rozwiązanie:

- $X_i \sim Poiss(\lambda)$
- $S_n \sim Poiss(n\lambda)$

$$
\begin{aligned}
P\left(X_1 = t | S_n = k\right) &\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \frac{P\left(X_1 = t, S_n = k\right)}{P\left(S_n = k\right)} = \\
&= \frac{P\left(X_1 = t, X_2 + \cdots + X_n = k - t\right)}{P\left(S_n = k\right)} = \\
&= \frac{P\left(X_1 = t\right) P\left(X_2 + \cdots + X_n = k - t\right)}{P\left(S_n = k\right)} = \\
&= \frac{\lambda^t}{t!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\Big((n-1)\lambda\Big)^{k-t}}{(k-t)!} e^{-(n-1)\lambda} \cdot \frac{k!}{(n\lambda)^k} e^{n\lambda} = \\
&= \frac{\lambda^t}{t!} \cdot \frac{\Big((n-1)\lambda\Big)^{k-t}}{(k-t)!} \cdot \frac{k!}{(n\lambda)^k} = \\
&= \frac{(n-1)^{k-t}}{n^k} \cdot \frac{k!}{t!(k-t)!} = \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-t} \left(\frac{1}{n}\right)^t \binom{k}{t}
\end{aligned}
$$

$$(X_1 = t | S_n = k) \sim Ber(k, \tfrac{1}{n})$$

Lista 2

Zadanie 13

Niech $N, X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Zmienna losowa N ma rozkład Poissona z parametrem λ, a zmienne losowe X_i, dla $i = 1, 2, \ldots$ mają rozkład dwupunktowy tj.

$$P\{X_i = 1\} = \frac{2}{3}, \qquad P\{X_i = 2\} = \frac{1}{3}$$

Niech $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Obliczyć $\mathbb{E}(N|S_N = 3)$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N|S_N = 3) = & \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(N = k|S_N = 3) = \\
= & 2 \cdot P(N = 2|S_N = 3) + 3 \cdot P(N = 3|S_N = 3) = \\
= & 2 \cdot \frac{P(N = 2, S_2 = 3)}{P(S_N = 3)} + 3 \cdot \frac{P(N = 3, S_3 = 3)}{P(S_N = 3)} = \\
= & 2 \cdot \frac{P(N = 2)\, P(S_2 = 3)}{P(S_N = 3)} + 3 \cdot \frac{P(N = 3)\, P(S_3 = 3)}{P(S_N = 3)} = \\
= & 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \cdot \frac{P(S_2 = 3)}{P(S_N = 3)} + 3 \cdot \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} \cdot \frac{P(S_3 = 3)}{P(S_N = 3)} = \\
= & \frac{1}{P(S_N = 3)} \cdot \left(\lambda^2 e^{-\lambda} \cdot P(S_2 = 3) + \frac{\lambda^3}{2} e^{-\lambda} \cdot P(S_3 = 3)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(S_2 = 3) = & P(X_1 = 1)\, P(X_2 = 2) + P(X_1 = 2)\, P(X_2 = 1) = \\
= & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(S_3 = 3) = & P(X_1 = 1)\, P(X_2 = 1)\, P(X_3 = 1) = \\
= & \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P\left(S_N=3\right)= & \sum_{n=0}^{\infty} P\left(S_N=3|N=n\right) P\left(N=n\right)= \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} P\left(S_n=3\right) P\left(N=n\right)= \\
= & P\left(S_2=3\right) P\left(N=2\right)+P\left(S_3=3\right) P\left(N=3\right)= \\
= & \frac{4}{9} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}+\frac{1}{27} \cdot \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda}= \\
= & \frac{1}{162} \lambda^3 e^{-\lambda}+\frac{2}{9} \lambda^2 e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(N|S_N=3\right)= & \frac{1}{P\left(S_N=3\right)} \cdot\left(\lambda^2 e^{-\lambda} \cdot P\left(S_2=3\right)+\frac{\lambda^3}{2} e^{-\lambda} \cdot P\left(S_3=3\right)\right)= \\
= & \frac{1}{\frac{1}{162} \lambda^3 e^{-\lambda}+\frac{2}{9} \lambda^2 e^{-\lambda}} \cdot\left(\lambda^2 e^{-\lambda} \cdot \frac{4}{9}+\frac{\lambda^3}{2} e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{27}\right)= \\
= & \frac{\frac{1}{54} \lambda^2(\lambda+24) e^{-\lambda}}{\frac{1}{162} \lambda^2(\lambda+36) e^{-\lambda}}= \\
= & \frac{3(\lambda+24)}{\lambda+36}
\end{aligned}
$$

Zadanie 14

Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem λ. Rozkład warunkowy zmiennej losowej Y przy warunku $X=k$ jest rozkładem dwumianowym z parametrami (k, p). Wykazać, że zmienna losowa Y ma Rozkład Poissona z parametrem λp. Następnie wykazać niezależność zmiennych losowych Y i $X-Y$ oraz wyznaczyć rozkład warunkowy X przy warunku $Y=y$.

Rozwiązanie:

- $X \sim Poisson(\lambda)$
- $(Y|X=k) \sim Ber(k, p)$

$$
P\left(Y=t|X=n\right)=\frac{P\left(Y=t, X=n\right)}{P\left(X=n\right)}=\binom{k}{t} p^t(1-p)^{k-t}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{P\left(Y=t,X=k\right)}{P\left(X=k\right)} &= \binom{k}{t}p^t(1-p)^{k-t} \\
P\left(Y=t,X=k\right) &= \binom{k}{t}p^t(1-p)^{k-t}P\left(X=k\right) \\
P\left(Y=t,X=k\right) &= \frac{k!}{t!(k-t)!}p^t(1-p)^{k-t}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
P\left(Y=t,X=k\right) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^t(1-p)^{k-t}}{t!(k-t)!}
\end{aligned}
$$

$$
P\left(Y=t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(Y=t,X=k\right)
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(Y=t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(Y=t,X=k\right) &= \\
&= \sum_{k=t}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^t(1-p)^{k-t}}{t!(k-t)!} = \\
&= \frac{p^t\lambda^t}{t!}e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=t}^{\infty}\frac{\lambda^{k-t}(1-p)^{k-t}}{(k-t)!} = \\
&= \frac{p^t\lambda^t}{t!}e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Big(\lambda(1-p)\Big)^k}{k!} = \\
&= \frac{p^t\lambda^t}{t!}e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-p)} = \\
&= \frac{p^t\lambda^t}{t!}e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-p)} = \\
&= \frac{(p\lambda)^t}{t!}e^{-p\lambda}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(X-Y=n\right) &= \sum_{k=n}^{\infty} P\left(X-Y=n|X=k\right)P\left(X=k\right) = \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} P\left(Y=k-n|X=k\right)P\left(X=k\right) = \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} P\left(Y=k-n, X=k\right) = \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^{k-n}(1-p)^n}{(k-n)!n!} = \\
&= \frac{e^{-\lambda}(1-p)^n}{n!} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k p^{k-n}}{(k-n)!} = \\
&= \frac{e^{-\lambda}(1-p)^n}{n!} \cdot \lambda^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda p)^k}{k!} = \\
&= \frac{e^{-\lambda}(1-p)^n}{n!} \cdot \lambda^n e^{\lambda p} = \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^n(1-p)^n e^{p\lambda}}{n!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(X-Y=n\right)P\left(Y=t\right) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^n(1-p)^n e^{p\lambda}}{n!} \cdot \frac{(p\lambda)^t}{t!}e^{-p\lambda} = \\
&= \frac{\lambda^n(1-p)^n e^{-\lambda}(\lambda p)^t}{n!t!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(X-Y=n, Y=t\right) &= P\left(X=n+t, Y=t\right) = \\
&= \frac{e^{-\lambda}p^t(1-p)^n\lambda^{t+n}}{t!n!}
\end{aligned}
$$

$$
P\left(X-Y=n, Y=t\right) = P\left(X-Y=n\right)P\left(Y=t\right)
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(X=k|Y=t\right) &= \frac{P\left(X=k, Y=t\right)}{P\left(Y=t\right)} = \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^t(1-p)^{k-t}}{t!(k-t)!} \cdot \frac{t!}{(p\lambda)^t}e^{p\lambda} = \\
&= \frac{\lambda^{k-t}e^{\lambda(p-1)}(1-p)^{k-t}}{(k-t)!}
\end{aligned}
$$

Zadanie 15

Niech będzie dane σ-ciało $\mathcal{B}$ generowane przez skończone lub przeliczalne nieskończone rozbicie $\{A_i\}_{i\in I}$ zbioru Ω. Wykazać

$$P(B|\mathcal{B}) = \sum_{i\in I, P(A_i)>0} P(B|A_i)\, I_{A_i}, \qquad B \in \mathcal{F}$$

oraz dla całkowalnej zmiennej losowej X ($\mathbb{E}\,|X| < \infty$)

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \sum_{i\in I, P(A_i)>0} \frac{1}{P(A_i)} \int\limits_{A_i} X(\omega)\, dP(\omega) I_{A_i}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{B}) \overset{df}{=} \\
=&\sum_{i\in I} \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|A_i)\cdot \mathbb{1}_{A_i} = \\
=&\sum_{i\in I, P(A_i)>0} \frac{1}{P(A_i)} \int\limits_{A_i} \mathbb{1}_B\, dP \cdot \mathbb{1}_{A_i} = \\
=&\sum_{i\in I, P(A_i)>0} \frac{P(A_i\cap B)}{P(A_i)} = \\
=&\sum_{i\in I, P(A_i)>0} P(B|A_i)\cdot \mathbb{1}_{A_i}
\end{aligned}$$

Komentarz chyba wymaga, żeby podkreślić, iż zmienna losowa $Y(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega)$ dla $B \in \mathcal{B}$ jest całkowalna, a jest, bo niezależnie od B mamy $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B) = P(B) \leqslant 1 < \infty$, czyli wszystko gra.
Druga część analogicznie, ale wiemy, że $E(|X|) < \infty$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \overset{df}{=} \\
=&\sum_{i\in I} \mathbb{E}(X|A_i)\cdot \mathbb{1}_{A_i} = \\
=&\sum_{i\in I, P(A_i)>0} \frac{1}{P(A_i)} \int\limits_{A_i} X(\omega)\, dP \cdot \mathbb{1}_{A_i}
\end{aligned}$$

Zadanie 16 - poprawione

Niech $\Omega = [0,1]$, a P będzie miarą Lebegue'a na zbiorach borelowskich Ω. Niech $\mathcal{B}$ będzie σ-algebrą generowaną przez rodzinę zbiorów $\left\{\left[0,\frac{1}{3}\right), \left\{\frac{1}{3}\right\}, \left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\right\}$. Wyznaczyć dwie różne wersje $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$, jeśli:

(a) $X(\omega) = \omega$

(b) $X(\omega) = \sin \pi\omega$

(c) $X(\omega) = \omega^2$

(d) $X(\omega) = 1 - \omega$

(e)

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 2, & \omega \in \left(\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases} \qquad \omega \in \Omega$$

Rozwiązanie:

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_0)(\omega) = \sum_{j=1} \mathbb{E}(X|A_j)\mathbb{1}_{A_j}(\omega)$$

(a)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(X(\omega)|\mathcal{B}\right) = \\
=&\mathbb{E}\left(\omega|\mathcal{B}\right) = \\
=&\mathbb{E}\left(\omega|\left[0, \tfrac{1}{3}\right)\right)\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{3}\right)}(\omega) + \mathbb{E}\left(\omega|\left\{\tfrac{1}{3}\right\}\right)\mathbb{1}_{\left\{\frac{1}{3}\right\}}(\omega) + \\
+&\mathbb{E}\left(\omega|\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}\right]\right)\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]}(\omega) + \mathbb{E}\left(\omega|\left(\tfrac{1}{2}, 1\right]\right)\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{2},1\right]}(\omega) = \\
=&\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \omega\, d\lambda(\omega)\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{3}\right)}(\omega) + \mathbb{1}_{\left\{\frac{1}{3}\right\}}(\omega) + \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \omega\, d\lambda(\omega)\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]}(\omega) + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \omega\, d\lambda(\omega)\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{2},1\right]}(\omega) = \\
=&\frac{1}{18}\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{3}\right)}(\omega) + \mathbb{1}_{\left\{\frac{1}{3}\right\}}(\omega) + \frac{5}{72}\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]}(\omega) + \frac{3}{8}\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{2},1\right]}(\omega)
\end{aligned}$$

Drugie

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(X(\omega)|\mathcal{B}\right) = \\
=&\mathbb{E}\left(\omega|\mathcal{B}\right) = \\
=&\mathbb{E}\left(\omega|\left[0, \tfrac{1}{3}\right]\right)\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{3}\right]}(\omega) + \mathbb{E}\left(\omega|\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}\right]\right)\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{2},1\right]}(\omega) = \\
=&\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \omega\, d\lambda(\omega)\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{3}\right]}(\omega) + \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \omega\, d\lambda(\omega)\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]}(\omega) + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \omega\, d\lambda(\omega)\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{2},1\right]}(\omega) = \\
=&\frac{1}{18}\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{3}\right]}(\omega) + \frac{5}{72}\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]}(\omega) + \frac{3}{8}\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{2},1\right]}(\omega)
\end{aligned}$$

Zadanie 17

Niech $\Omega = [0,1]$, a P będzie miarą Lebegue'a na zbiorach borelowskich Ω. Niech $\mathcal{B}$ będzie σ-algebrą generowaną przez rodzinę zbiorów $\left\{\left[0,\frac{1}{4}\right),\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right),\left[\frac{3}{4},1\right]\right\}$. Wyznaczyć $P(\cdot|\mathcal{B})$ oraz $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$, gdzie $X(\omega)=\omega^2, \omega \in \Omega$.

Rozwiązanie:

- Odwołując się do zadania 15
$$P(B|\mathcal{B}) = \sum_{i\in I, P(A_i)>0} P(B|A_i)\, I_{A_i}, \qquad B \in \mathcal{F}$$
- Podobnie
$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \sum_{i\in I, P(A_i)>0} \frac{1}{P(A_i)} \int\limits_{A_i} X(\omega)\, dP(\omega) I_{A_i}$$

Na start

$$P\left(\left[0,\tfrac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}$$
$$P\left(\left[\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}$$
$$P\left(\left[\tfrac{3}{4},1\right]\right) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
&P(Y|\mathcal{B}) = \\
=&P\left(Y|\left[0,\tfrac{1}{4}\right)\right)\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{4}\right)} + P\left(Y|\left[\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}\right)\right)\mathbb{1}_{\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)} + P\left(Y|\left[\tfrac{3}{4},1\right]\right)\mathbb{1}_{\left[\frac{3}{4},1\right]} = \\
=&\frac{P\left(Y\cap\left[0,\frac{1}{4}\right)\right)}{P\left(\left[0,\frac{1}{4}\right)\right)}\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{4}\right)} + \frac{P\left(Y\cap\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\right)}{P\left(\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\right)}\mathbb{1}_{\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)} + \frac{P\left(Y\cap\left[\frac{3}{4},1\right]\right)}{P\left(\left[\frac{3}{4},1\right]\right)}\mathbb{1}_{\left[\frac{3}{4},1\right]} = \\
=&4\cdot P\left(Y\cap\left[0,\tfrac{1}{4}\right)\right)\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{4}\right)} + 2\cdot P\left(Y\cap\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\right)\mathbb{1}_{\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)} + 4\cdot P\left(Y\cap\left[\frac{3}{4},1\right]\right)\mathbb{1}_{\left[\frac{3}{4},1\right]}
\end{aligned}$$

Wartość oczekiwana

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \\
=&\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{4}\right)}\mathbb{E}\left(X|\left[0,\tfrac{1}{4}\right)\right) + \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)}\mathbb{E}\left(X|\left[\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}\right)\right) + \mathbb{1}_{\left[\frac{3}{4},1\right]}\mathbb{E}\left(X|\left[\tfrac{3}{4},1\right]\right) = \\
=&4\cdot\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{4}\right)}\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\omega^2\,dP + 2\cdot\mathbb{1}_{\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)}\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\omega^2\,dP + 4\cdot\mathbb{1}_{\left[\frac{3}{4},1\right]}\int\limits_{\frac{3}{4}}^{1}\omega^2\,dP = \\
=&\frac{1}{48}\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{4}\right)} + \frac{13}{48}\mathbb{1}_{\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)} + \frac{37}{48}\mathbb{1}_{\left[\frac{3}{4},1\right]}
\end{aligned}$$

Zadanie 20

Niech X będzie nieujemną zmienną losową i niech $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ będzie σ-algebrą. Wykazać, że $\mathbb{E}\left(X|\mathcal{B}\right) < \infty$ (P - p.w.) wtedy i tylko wtedy, gdy miara Q określona wzorem

$$Q(A) = \int\limits_A X(\omega)\, dP(\omega), \qquad A \in B$$

jest σ-skończona.

Rozwiązanie:

- Miara jest σ-skończona, gdy przestrzeń, w której występuje może być przedstawiona jako suma przeliczalnie wielu zbiorów miary skończonej.

Gdy $\{A_i\} \subset \mathcal{B}$ jest rozbiciem Ω

$$\mathbb{E}\left(X|\mathcal{B}\right) = \sum_i \mathbb{E}\left(X|A_i\right) \mathbb{1}_{A_i} < \infty$$

Czyli

$$\begin{aligned}
&\forall_i \mathbb{E}\left(X|A_i\right) < \infty \\
&\forall_i \frac{1}{P\left(A_i\right)} \int\limits_{A_i} X(\omega)\, P(\omega) < \infty \\
&\forall_i \int\limits_{A_i} X(\omega)\, P(\omega) < \infty
\end{aligned}$$

$Q(A)$ jest σ-skończona.

"$\Leftarrow$" Gdy $Q(A)$ jest σ-skończona to dla A_i takich, że $\bigcup_i A_i = \Omega$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$

$$Q(A_i) < \infty$$

Dla A_i takich, że $P(A_i) > 0$

$$\frac{Q(A_i)}{P(A_i)} < \infty$$

Pamiętając, że

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X|\mathcal{B}\right) &= \sum_{i \in I, P(A_i) > 0} \frac{1}{P\left(A_i\right)} \int\limits_{A_i} X(\omega)\, dP(\omega) I_{A_i} = \\
&= \sum_{i \in I, P(A_i) > 0} \frac{Q(A_i)}{P\left(A_i\right)} I_{A_i} < \infty
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest oczywista ze względu na funkcję charakterystyczną.

Zadanie 22

Niech $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie. Wykazać, że

$$\mathbb{E}(X|X+Y) = \mathbb{E}(Y|X+Y) = \frac{X+Y}{2}, \qquad P \text{ prawie wszędzie}$$

Rozwiązanie:

- $$\mathbb{E}(X|X) = X$$

$$\mathbb{E}(X|X+Y) + \mathbb{E}(Y|X+Y) = \mathbb{E}(X+Y|X+Y) = X+Y$$
$$\mathbb{E}(X|X+Y) = \mathbb{E}(Y|X+Y) = \frac{X+Y}{2}$$

Zadanie 24

Zmienne losowe X i Y są niezależne o skończonej wariancji. Wykazać, że

$$\mathrm{Var}(XY) = \mathbb{E}\Big(\mathrm{Var}(XY|X)\Big) + \mathrm{Var}\Big(\mathbb{E}(XY|X)\Big)$$

Rozwiązanie:

$$\mathrm{Var}(XY) = \mathbb{E}(XY)^2 - \Big(\mathbb{E}(XY)\Big)^2$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\mathrm{Var}(XY|X)\Big) + \mathrm{Var}\Big(\mathbb{E}(XY|X)\Big) = \\
=&\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left((XY)^2|X\right) - \left(\mathbb{E}\left((XY)^2|X\right)\right)\right) + \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\left((XY)^2|X\right)\Big) - \Big(\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(XY|X)\Big)\Big)^2 = \\
=&\mathbb{E}(XY)^2 - \cancel{\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\left((XY)^2|X\right)\Big)} + \cancel{\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\left((XY)^2|X\right)\Big)} - \Big(\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(XY|X)\Big)\Big)^2 = \\
=&\mathbb{E}(XY)^2 - \Big(\mathbb{E}(XY)\Big)^2 = \\
=&\mathrm{Var}(XY)
\end{aligned}$$

Lista 3

Zadanie 25

Wykazać, że zmienna losowa X jest niezależna od σ-algebry $\mathcal{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej funkcji borelowskiej ograniczonej φ takiej, że $\mathbb{E}\,|\varphi(X)| < \infty$ spełniony jest warunek

$$\mathbb{E}\left(\varphi(X)|\mathcal{B}\right) = \mathbb{E}\varphi(X)$$

Rozwiązanie:

- $\mathcal{B} = \sigma\left(A_1, A_2, \dots\right)$

"$\Rightarrow$"

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\varphi(X)|\mathcal{B}\right) = \\
=&\sum_{i\in\mathbb{N}, P(A_i)>0} \mathbb{E}\left(\varphi(X)|\mathcal{A}_i\right) I_{A_i} \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \\
=&\sum_{i\in\mathbb{N}, P(A_i)>0} \mathbb{E}\varphi(X) I_{A_i} = \\
=&E\varphi(X)
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" Dowód przez sprzeczność

$$\exists_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\left(\varphi(X)|\mathcal{A}_i\right) \neq \mathbb{E}\left(\varphi(X)\right)$$
$$\sum_{i\in\mathbb{N}, P(A_i)>0} \mathbb{E}\left(\varphi(X)|\mathcal{A}_i\right) I_{A_i} \neq \sum_{i\in\mathbb{N}, P(A_i)>0} \mathbb{E}\varphi(X) I_{A_i}$$
$$\mathbb{E}\left(\varphi(X)|\mathcal{B}\right) \neq \mathbb{E}\varphi(X)$$

czyli, $\varphi(X)$ i A_i są zależne dla ustalonego i, a tym samym $\varphi(X)$ i $\mathcal{B}$ są zależne. Czyli z prawa kontrapozycji zachodzi implikacja przeciwna.

Zadanie 31

Niech dwuwymiarowy wektor losowy (X,Y) ma gęstość

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & \text{dla} \quad x^2+y^2<1\\ 0 & \text{dla} \quad x^2+y^2\geqslant 1\end{cases} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Wyznaczyć $F_{X|Y}$ oraz obliczyć $\mathrm{Cov}(X,Y)$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
f_{X|Y} &= \frac{f(x,y)}{\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx} = \\
&= \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{\{x^2+y^2<1\}}(x,y)\left(\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}\,dx\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{\{x^2+y^2<1\}}(x,y)\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{1-y^2}} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\mathbb{1}_{\{x^2+y^2<1\}}(x,y)
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}Y=\int\limits_{-1}^{1}\frac{y}{\pi}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\,dy=0$$

$$\mathbb{E}XY=\iint\limits_{x^2+y^2<1}\frac{xy}{\pi}\,dxdy=0$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}XY-\mathbb{E}X\mathbb{E}Y=0$$

Zadanie 32

Niech dwuwymiarowy wektor losowy (X,Y) ma gęstość postaci:

$$f(x,y)=\begin{cases} cx(2-2y-x) & \text{dla} \quad x,y>0\wedge\frac{x}{2}+y\leqslant 1\\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałe } x,y\end{cases} \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

(i) Wyznaczyć stałą c.

(ii) Obliczyć gęstości brzegowe f_X i f_Y.

(iii) Wyznaczyć gęstości warunkowe $f_{X|Y}$ i $f_{Y|X}$.

(iv) Obliczyć warunkowe wartości oczekiwane $\mathbb{E}\,(X|Y=y)$ i $\mathbb{E}\,(Y|X=x)$.

(v) Obliczyć warunkowe wariancje $\mathrm{Var}\,(X|Y=y)$ i $\mathrm{Var}\,(Y|X=x)$

Rozwiązanie:

(i)

$$\int_0^1 \int_0^{2-2y} cx(2-2y-x)\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2y} cx(2-2y) - cx^2\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 c\,(2-2y)\cdot\frac{(2-2y)^2}{2} - c\cdot\frac{(2-2y)^3}{3}\,dy =$$

$$= \int_0^1 c\,(1-y)^3\cdot\frac{8}{6}\,dy = \frac{c}{3}$$

$c = 3$

(ii)

$$f_X(x) = \int_0^{1-\frac{x}{2}} 3x(2-2y-x)\,dy =$$

$$= \int_0^{1-\frac{x}{2}} 3(2-x)x - 6xy\,dy =$$

$$= \frac{3x^3}{4} - 3x^2 + 3x$$

$$f_Y(y) = \int_0^{2-2y} 3x(2-2y-x)\,dx =$$

$$= \int_0^{2-2y} 3(2-x)x - 6xy\,dy =$$

$$= -4(y-1)^3$$

(iii)

$$f_{X|Y} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$\begin{aligned} &f_{X|Y}(x) = \\ =&\frac{3x(2-2y-x)}{-4(y-1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f_{X|Y}(x) = \\ =&\frac{3x(2-2y-x)}{\frac{3x^3}{4} - 3x^2 + 3x} = \\ =&-\frac{4(x+2y-2)}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(X|Y=y\right) = \\ =&\int_0^{2-2y} x \cdot \frac{3x(2-2y-x)}{-4(y-1)^3}\,dx = \\ =&\int_0^{2-2y} \frac{3x^3}{4(y-1)^3} + \frac{3x^2}{2(y-1)^2}\,dx = \\ =&1-y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(Y|X=x\right) = \\ =&\int_0^{1-\frac{x}{2}} -y \cdot \frac{4(x+2y-2)}{(x-2)^2}\,dy = \\ =&\int_0^{1-\frac{x}{2}} -\frac{8y^2}{(x-2)^2} - \frac{4y}{x-2}\,dy = \\ =&\frac{2-x}{6} \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(X|Y=y\right)^2 = \\ =&\int_0^{2-2y} x^2 \cdot \frac{3x(2-2y-x)}{-4(y-1)^3}\,dx = \\ =&\int_0^{2-2y} \frac{3x^4}{4(y-1)^3} + \frac{3x^3}{2(y-1)^2}\,dx = \\ =&\frac{6}{5}(y-1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(Y|X=x\right) = \\ =&\int_0^{1-\frac{x}{2}} -y \cdot \frac{4(x+2y-2)}{(x-2)^2}\,dy = \\ =&\int_0^{1-\frac{x}{2}} -\frac{8y^3}{(x-2)^2} - \frac{4y^2}{x-2}\,dy = \\ =&\frac{1}{24}(x-2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}\left(X|Y=y\right) = \\ =&\frac{6}{5}(y-1)^2 - \left(1-y\right)^2 = \\ =&\frac{1}{5}(y-1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}\mathbb{E}\left(Y|X=x\right) = \\ =&\frac{1}{24}(x-2)^2 - \left(\frac{2-x}{6}\right)^2 = \\ =&\frac{1}{72}(x-2)^2 \end{aligned}$$

Zadanie 33

Wyznaczyć gęstość wektora losowego X, Y, jeśli gęstość brzegowa f_X jest postaci

$$f_X(x) = \begin{cases} c(x-2)^2 & \text{dla} \quad 2 < x \leqslant 7 \\ c(12-x)^2 & \text{dla} \quad 7 < x \leqslant 12 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałe } x \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$

dla pewnej stałej c oraz dana jest gęstość brzegowa $f_{Y|X}$ postaci

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{dla} \quad \frac{x}{2} - 1 \leqslant y \leqslant \frac{x}{2} + 2 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{else} \end{cases} \qquad y \in \mathbb{R}, x \in (2, 12)$$

Rozwiązanie:

$$\int_2^{12} f_X(x)\, dx = 1$$

$$\begin{aligned} &\int_2^{12} f_X(x)\, dx = \\ =&\int_2^7 c(x-2)^2\, dx + \int_7^{12} c(12-x)^2\, dx = \\ =&\frac{250c}{3} = 1 \end{aligned}$$

$c = \frac{3}{250}$

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) =& \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \\ f_{Y|X}(y|x) f_X(x) =& f_{X,Y}(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \mathbb{1}_{\left[\frac{x}{2}-1, \frac{x}{2}+2\right]}(y) \cdot \left(\frac{3}{250}(x-2)^2 \mathbb{1}_{(2,7]}(x) + \frac{3}{250}(12-x)^2 \mathbb{1}_{(7,12]}(x) \right) = \\ =&\frac{1}{250} \left((x-2)^2 \mathbb{1}_{(2,7]}(x) \mathbb{1}_{\left[\frac{x}{2}-1, \frac{x}{2}+2\right]}(y) + (12-x)^2 \mathbb{1}_{(7,12]}(x) \mathbb{1}_{\left[\frac{x}{2}-1, \frac{x}{2}+2\right]}(y) \right) \end{aligned}$$

Zadanie 34

Wektor losowy (X, Y) ma gęstość

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{dla} \quad (x,y) \in [0,1] \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) \notin [0,1] \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Wyznaczyć $\mathbb{E}\left(X|Y=y\right)$ oraz $\mathbb{E}\left(X \exp\left(Y + \frac{1}{Y}\right)|Y=y\right)$

Rozwiązanie:

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx = $$
$$= \int_0^1 x + y\,dx = y + \frac{1}{2}$$

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}} = \frac{2x+2y}{2y+1}$$

$$\mathbb{E}\left(X|Y=y\right) = \int_0^1 x \cdot \frac{2x+2y}{2y+1}\,dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{2x^2}{2y+1} + \frac{2xy}{2y+1}\,dx =$$
$$= \frac{2}{3(2y+1)} + \frac{y}{2y+1} =$$
$$= \frac{3y+2}{6y+3}$$

Własność

$$\mathbb{E}\left(X\varphi(Y)|Y\right) = \varphi(Y)\mathbb{E}\left(X|Y\right)$$

Stosujemy

$$\mathbb{E}\left(X \exp\left(Y + \tfrac{1}{Y}\right)|Y=y\right) =$$
$$= \exp\left(y + \tfrac{1}{y}\right)\mathbb{E}\left(X|Y=y\right) =$$
$$= \exp\left(y + \tfrac{1}{y}\right)\frac{3y+2}{6y+3}$$

Zadanie 36

Dwuwymiarowy wektor losowy (X,Y) ma gęstość

$$f(x,y) = \begin{cases} 0,2(x+2y) & \text{dla} \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,2] \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) \notin [0,1] \times [0,2] \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Wyznaczyć:
$\mathbb{E}\left(X|Y=y\right)$
$\mathbb{E}\left(X^2+1|Y=y\right)$
$\mathbb{E}\left(Y|X=x\right)$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} & f_{X|Y}(x|y) = \\ =& \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \\ =& \frac{\frac{1}{5}(x+2y)}{\int\limits_0^1 \frac{1}{5}(x+2y)\,dx} = \\ =& \frac{2(x+2y)}{4y+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_{Y|X}(y|x) = \\ =& \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \\ =& \frac{\frac{1}{5}(x+2y)}{\int\limits_0^2 \frac{1}{5}(x+2y)\,dy} = \\ =& \frac{(x+2y)}{2(x+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(X|Y=y\right) = \\ =& \int\limits_0^1 x \cdot \frac{2(x+2y)}{4y+1}\,dx = \\ =& \int\limits_0^1 \frac{2x^2}{4y+1} + \frac{4xy}{4y+1}\,dx = \\ =& \frac{6y+2}{12y+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(Y|X=x\right) = \\ =& \int\limits_0^2 y \cdot \frac{(x+2y)}{2(x+2)}\,dy = \\ =& \int\limits_0^2 \frac{y^2}{x+2} + \frac{xy}{2x+4}\,dy = \\ =& \frac{3x+8}{3x+6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(X^2+1|Y=y\right)= \\
=&\int\limits_0^1 (x^2+1)\cdot\frac{2(x+2y)}{4y+1}\,dx= \\
=&\int\limits_0^1 x^2\cdot\frac{2(x+2y)}{4y+1}\,dx+\cancelto{1}{\int\limits_0^1 \frac{2(x+2y)}{4y+1}\,dx}= \\
=&\int\limits_0^1 \frac{2x^3}{4y+1}+\frac{4x^2y}{4y+1}\,dx+1= \\
=&\frac{32y+9}{24y+6}
\end{aligned}$$

Lista 4

Zadanie 37

Niech wektor losowy (X,Y) ma gęstość daną wzorem ($k \geqslant 2$)

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k(k-1)(y-x)^{k-2} & \text{dla} \quad 0<x<y<1 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{else} \end{cases} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Wyznaczyć $\mathbb{E}\left(X|Y\right)$ oraz $\mathbb{E}\left(Y|X\right)$. Wykorzystując otrzymane wzory obliczyć $\mathbb{E}\left(X\right)$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} & f_{X|Y}(x|y) = \\ =& \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \\ =& \frac{k(k-1)(y-x)^{k-2}}{\int\limits_0^y k(k-1)(y-x)^{k-2}\,dx} = \\ =& \frac{(k-1)(y-x)^{k-2}}{y^{k-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_{Y|X}(y|x) = \\ =& \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \\ =& \frac{k(k-1)(y-x)^{k-2}}{\int\limits_x^1 k(k-1)(y-x)^{k-2}\,dy} = \\ =& \frac{(k-1)(y-x)^{k-2}}{(1-x)^{k-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(X|Y=y\right) = \\ =& \int\limits_0^y x \cdot \frac{(k-1)(y-x)^{k-2}}{y^{k-1}}\,dx = \\ =& \int\limits_0^y \frac{(y-x)^{k-1}}{y^{k-1}}\,dx = \\ =& \frac{y}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(Y|X=x\right) = \\ =& \int\limits_x^1 y \cdot \frac{(k-1)(y-x)^{k-2}}{(1-x)^{k-1}}\,dy = \\ =& \, y \cdot \frac{(y-x)^{k-1}}{(1-x)^{k-1}}\bigg|_x^1 - \int\limits_x^1 \frac{(y-x)^{k-1}}{(1-x)^{k-1}}\,dy = \\ =& 1 - \frac{1-x}{k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&E\left(X\right) = \\
=&E\left(E\left(X|Y\right)\right) = \\
=&\int\limits_0^1 E\left(X|Y=y\right) f_Y(y)\,dy = \\
=&\int\limits_0^1 \frac{y}{k}\cdot k y^{k-1}\,dy = \\
=&\int\limits_0^1 y^k\,dy = \\
=&\frac{1}{k+1}
\end{aligned}
$$

Zadanie 38

Niech $X_1,\ldots,X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\alpha=1$. Znaleźć rozkład S_n oraz rozkład warunkowy X_1 pod warunkiem S_n, gdzie $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$.

Rozwiązanie:

- $\varphi(t)=\frac{a}{a-it}$
- $S_{n-1}=\sum_{i=2}^n X_i$

$$
f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^n e^{-x_i}=\exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i\right)
$$

$$
\varphi_{S_n}(t)=\prod_{i=1}^n\varphi_{x_1}(t)=\Big(\varphi_{x_1}(t)\Big)^n=\left(\frac{1}{1-it}\right)^n=\varphi_{\Gamma(n,1)}(t)
$$

$$
f_{S_n}(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\qquad\qquad f_{S_{n-1}}(t)=\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{-t}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{X_1|S_n}(x|t) = \\
=&\frac{f_X(x)f_{S_{n-1}}(t-x)}{f_{S_n}(t)} = \\
=&e^{-x}\frac{(t-x)^{n-2}}{(n-2)!}e^{-(t-x)}\frac{(n-1)!}{t^{n-1}}e^t = \\
=&\frac{n-1}{t}\left(\frac{t-x}{t}\right)^{n-2}\mathbb{1}_{(0,t)}(x)\cdot\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)
\end{aligned}
$$

Zadanie 39

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(m, 1)$. Znaleźć rozkład warunkowy zmiennej warunkowe losowej X_1 pod warunkiem $\frac{S_n}{n}$, gdzie $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Rozwiązanie:

- $X_1 \sim \mathcal{N}(m, 1)$
- $S_n \sim \mathcal{N}(nm, n)$
- $S_{n-1} = \sum_{i=2}^n X_i \sim \mathcal{N}\Big((n-1)m, (n-1)\Big)$

$$
\begin{aligned}
&f(X_1 = x | S_n = ns) = \\
=&\frac{f(X_1 = x, S_n = ns)}{f_{S_n}(ns)} = \\
=&\frac{f(X_1 = x, S_{n-1} = ns - x)}{f_{S_n}(ns)} = \\
=&\frac{f(X_1 = x) \cdot f(S_{n-1} = ns - x)}{f_{S_n}(ns)} = \\
=&\frac{e^{-\frac{1}{2}(x-m)^2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{(-m(n-1)+ns-x)^2}{2(n-1)}\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n-1}} \cdot \sqrt{2\pi}\sqrt{n} e^{\frac{(ns-mn)^2}{2n}} = \\
=&\frac{\sqrt{n}\exp\left(-\frac{(-m(n-1)+ns-x)^2}{2(n-1)} + \frac{(ns-mn)^2}{2n} - \frac{1}{2}(x-m)^2\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n-1}} = \\
=&\frac{e^{-\frac{n(s-x)^2}{2(n-1)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n}}} = \frac{e^{-\frac{n(x-s)^2}{2(n-1)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n}}}
\end{aligned}
$$

$$
\left(X_1 \middle| \frac{S_n}{n}\right) \sim \mathcal{N}\left(s, \frac{n-1}{n}\right)
$$

Zadanie 40 - NR

Niech $A_1, \ldots, A_d$ będą podzbiorami otwartymi $\mathbb{R}^k$ takimi, że dla wektora losowego $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ mamy

$$
P\left\{X \in \bigcup_{i=1}^d A_i\right\} = 1, \qquad P\left\{X \in A_i \cap A_j\right\} = 0, \qquad i \neq j \qquad i, j, = 1, 2, \ldots, d
$$

Załóżmy ponadto, ze odwzorowanie $g : \bigcup_{i=1}^d A_i \to \mathbb{R}^k$ będzie funkcją o następujących własnościach:

a) funkcja g jest ciągła i różnowartościowa na każdym $A_i,\ i = 1, \ldots, d$

b) funkcja g^{-1} jest lokalnie lipschitzowska na każdym $g(A_i),\ i = 1 \ldots, d$

Udowodnić, że jeśli f_X jest gęstością wektora losowego X to wektor losowy $Y = g(X)$ ma gęstość postaci

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{d} f_X\Big(g_i^{-1}(y)\Big) \left|J\Big(g_i^{-1}(y)\Big)\right| I_{g(A_i)}(y) \qquad y \in \mathbb{R}^k$$

Rozwiązanie:

Zadanie 41

Wektor losowy (X, Y) ma gęstość

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{dla} \quad (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) \notin [0,1]^2 \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

a) Wyznaczyć gęstość $f(U,V)$ wektora losowego $(U,V) = \Big(\sin(\pi X), \cos(\pi Y)\Big)$

b) Wyznaczyć gęstość $f(U,V)$ wektora losowego $(U,V) = \Big(X \exp\left(\frac{Y+1}{Y}\right), Y\Big)$, a następnie obliczyć $\mathbb{E}\left(X \exp\left(\frac{Y+1}{Y}\right) |Y = y\right)$

Rozwiązanie:

a) $(U,V) = \Big(\sin(\pi X), \cos(\pi Y)\Big)$

$$(X,Y) = \left(\frac{\arcsin(U)}{\pi}, \frac{\arccos(V)}{\pi}\right)$$

Macierz Jakobiego

$$J = \left|\begin{bmatrix} \frac{1}{\pi\sqrt{1-U^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\pi\sqrt{1-V^2}} \end{bmatrix}\right|$$

$$|J| = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}$$

Kończąc

$$f_{(U,V)}(u,v) =$$
$$= f_{(X,Y)}(x,y)|J| =$$
$$= \left(\frac{\arcsin(U)}{\pi} + \frac{\arccos(V)}{\pi}\right) \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(u) \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(v)$$

b) $(U, V) = \left(X \exp\left(\frac{Y+1}{Y}\right), Y\right)$

$$\begin{cases} X = Ue^{-\frac{V+1}{V}} \\ Y = V \end{cases}$$

Macierz Jakobiego

$$J = \left|\begin{bmatrix} e^{-\frac{v+1}{v}} & \frac{u}{v^2}e^{-\frac{v+1}{v}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right|$$
$$|J| = e^{-\frac{v+1}{v}}$$

$$\begin{aligned} &f_{(U,V)}(u, v) = \\ =&f_{(X,Y)}(x, y)|J| = \\ =&\left(ue^{-\frac{v+1}{v}} + v\right) \cdot e^{-\frac{v+1}{v}} \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana

$$f_Y(y) = \int_0^1 x + y \, dx = \frac{1}{2} + y$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(X \exp\left(\frac{Y+1}{Y}\right)|Y = y\right) = \\ =&\exp\left(\frac{y+1}{y}\right)\mathbb{E}\left(X|Y = y\right) = \\ =&\exp\left(\frac{y+1}{y}\right)\int_0^1 \frac{x+y}{\frac{1}{2}+y}\,dx = \\ =&\exp\left(\frac{y+1}{y}\right) \end{aligned}$$

Zadanie 43

Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych $Y = -\lambda \ln(1 - X)$ i $U = -\lambda \ln(X)$

Rozwiązanie:

$$F_X(t) = t \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$$

$$
\begin{aligned}
&F_Y(t) = \\
=&P\left(Y \leqslant t\right) = \\
=&P\left(-\lambda \ln\left(1-X\right) \leqslant t\right) = \\
=&P\left(\ln\left(1-X\right) \geqslant -\frac{t}{\lambda}\right) = \\
=&P\left(1-X \geqslant e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) = \\
=&P\left(X \leqslant 1-e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) = \\
=&F_X\left(1-e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) = \\
=&\left(1-e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)\mathbb{1}_{[0,1)}(1-e^{-\frac{t}{\lambda}}) = \\
=&\left(1-e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_U(t) = \\
=&P\left(U \leqslant t\right) = \\
=&P\left(-\lambda \ln\left(X\right) \leqslant t\right) = \\
=&P\left(\ln\left(X\right) \geqslant -\frac{t}{\lambda}\right) = \\
=&P\left(X \geqslant e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) = \\
=&1-F_X\left(e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) = \\
=&\left(1-e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)\mathbb{1}_{(0,1]}\left(e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) = \\
=&\left(1-e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)
\end{aligned}
$$

Zadanie 44

Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, \pi)$. Wykazać, że zmienna losowa $Y = \mathrm{tg}(X)$ ma rozkład Cauchy'ego.

Rozwiązanie:

$$
\begin{aligned}
&F_Y(t) = \\
=&P\left(Y \leqslant t)\right) = \\
=&P\left(\mathrm{tg}(X) \leqslant t\right) = \\
=&P\left(\mathrm{tg}(X) \leqslant t | X \leqslant \frac{\pi}{2}\right) + P\left(\mathrm{tg}(X) \leqslant t | X > \frac{\pi}{2}\right) = \\
=&P\left(X \leqslant \arctan(t) | X \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \cdot P\left(X \leqslant \frac{\pi}{2}\right) + \\
+&P\left(X \leqslant \arctan(t) + \pi | X > \frac{\pi}{2}\right) \cdot P\left(X > \frac{\pi}{2}\right) = \\
=&F_{U|X\leqslant\frac{\pi}{2}}\left(\arctan(t)\right) \cdot P\left(X \leqslant \tfrac{\pi}{2}\right) + F_{U|X>\frac{\pi}{2}}\left(\arctan(t)+\pi\right) \cdot P\left(X > \tfrac{\pi}{2}\right) = \\
=&\frac{1}{\pi}\arctan(t) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\Big(\arctan(t)+\pi\Big) \cdot \frac{1}{2} = \\
=&\frac{1}{\pi}\arctan(t) + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

To jest dystrybuanta rozkładu Cauchy'ego.

Zadanie 45

Wykazać, że jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie standardowym normalnym to zmienna losowa $\frac{X}{Y}$ ma rozkład Cauchy'ego.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} Y &= V \\ \tfrac{X}{Y} &= U \\ X &= UV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x,y) &= (\tfrac{x}{y}, y) = (u,v) \\ g^{-1}(u,v) &= (uv, v) \end{aligned}$$

$$J = \left\| \begin{matrix} v & u \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = |v|$$

$$\begin{aligned} &f_{U,V}(u,v) = \\ =&f_{X,Y}(uv,v)|v| = \\ =&f_X(uv)f_Y(v)|v| = \\ =&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(uv)^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}|v| = \\ =&\frac{|v|}{2\pi}e^{-\frac{(uv)^2+v^2}{2}} \end{aligned}$$

Rozkład brzegowy

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|v|}{2\pi}e^{-\frac{(uv)^2+v^2}{2}}\,dv = \\ =&\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|v|}{2\pi}e^{-\frac{v^2\left(u^2+1\right)}{2}}\,dv = \\ =&\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} ve^{-\frac{v^2\left(u^2+1\right)}{2}}\,dv = \\ =&\frac{1}{\pi(u^2+1)}\int\limits_{0}^{\infty} v(u^2+1)e^{-\frac{v^2\left(u^2+1\right)}{2}}\,dv = \\ =&\frac{1}{\pi(u^2+1)}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-w}\,dw = \\ =&\frac{1}{\pi(u^2+1)} \end{aligned}$$

To gęstość rozkładu Cauchy'ego.

Zadanie 46

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\alpha = 1$. Oznaczmy $U = X - Y, V = Y$. Wyznaczyć gęstość wektora losowego (U, V).

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} U &= X - Y \qquad & X &= U + V \\ V &= Y & Y &= V \end{aligned}$$

$$g(x, y) = (x - y, y)$$
$$g^{-1}(u, v) = (u + v, v)$$

Jakobian

$$|J| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = 1$$

gęstość

$$\begin{aligned} &f_{U,V}(u, v) = \\ =&f_{X,Y}(u + v, v) \cdot 1 = \\ =&e^{-u-v}e^{-v} = e^{-u-2v}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(v)\mathbb{1}_{[-v,\infty)}(u) \end{aligned}$$

Zadanie 47

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, 1)$. Określmy

$$U = \sqrt{-2\ln(X)}\cos(2\pi Y) \qquad\qquad V = \sqrt{-2\ln(X)}\sin(2\pi Y)$$

Wykazać, że U i V są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$.

Rozwiązanie:

Niech $U, V \sim \mathcal{N}(0, 1)$ oraz $U \perp\!\!\!\perp V$

$$g(x, y) = \left(\sqrt{-2\ln(x)}\cos(2\pi y), \sqrt{-2\ln(x)}\sin(2\pi y)\right)$$

$$|J| = \begin{Vmatrix} -\frac{\cos(2\pi y)}{\sqrt{2}x\sqrt{-\log(x)}} & -2\sqrt{2}\pi\sqrt{-\log(x)}\sin(2\pi y) \\ -\frac{\sin(2\pi y)}{\sqrt{2}x\sqrt{-\log(x)}} & 2\sqrt{2}\pi\sqrt{-\log(x)}\cos(2\pi y) \end{Vmatrix} =$$

$$= \left|-\frac{2\pi\cos^2(2\pi y)}{x} - \frac{2\pi\sin^2(2\pi y)}{x}\right| = \left|-\frac{2\pi}{x}\right| = \frac{2\pi}{x}$$

$$
\begin{aligned}
&f_{U,V}(u,v) = \\
=&f_{X,Y}(u,v)|J| = \\
=&\frac{e^{\frac{1}{2}\left(-u^2-v^2\right)}}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{x} = \\
=&\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{2}\left(2\log(x)\sin^2(2\pi y) + 2\log(x)\cos^2(2\pi y)\right)\right) = \\
=&\frac{1}{x}\exp\left(\log(x)\right) = \\
=&1
\end{aligned}
$$

Zadanie 48

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,1)$. Wyznaczyć gęstość wektora losowego (U,V), gdzie

$$
U = \sqrt{X^2+Y^2} \qquad\qquad V = \frac{X}{Y}
$$

Czy zmienne losowe U i V są niezależne?

Rozwiązanie:

$$
X = \frac{UV}{\sqrt{V^2+1}} \qquad\qquad Y = \frac{U}{\sqrt{V^2+1}}
$$

alternatywnie

$$
X = -\frac{UV}{\sqrt{V^2+1}} \qquad\qquad Y = -\frac{U}{\sqrt{V^2+1}}
$$

Ale okazuje się, że w sumie ta alternatywa wcale nie jest do niczego potrzebna, bo wystarczy tylko dobrze i porządnie wyliczyć Jakobian, a nie filozofować o jakichś tam dziwnych przypadkach...

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= \left(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{x}{y}\right) \\
g^{-1}(u,v) &= \left(\frac{uv}{\sqrt{v^2+1}}, \frac{u}{\sqrt{v^2+1}}\right)
\end{aligned}
$$

Jakobian

$$
|J| = \left\|\begin{matrix} \frac{v}{\sqrt{v^2+1}} & \frac{u}{\sqrt{v^2+1}} - \frac{uv^2}{(v^2+1)^{3/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{v^2+1}} & -\frac{uv}{(v^2+1)^{3/2}} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \frac{v}{\sqrt{v^2+1}} & \frac{u}{(v^2+1)^{3/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{v^2+1}} & -\frac{uv}{(v^2+1)^{3/2}} \end{matrix}\right\| = \left|\frac{-uv^2-u}{(v^2+1)}\right| = \left|\frac{-u}{v^2+1}\right| = \\
= \frac{|u|}{v^2+1}
$$

BARDZO ISTOTNA jest tutaj wartość bezwzględna przy Jakobianie, bo bez tego, wszystko się posypie. Obliczanie końcowe

$$\begin{aligned}
&f_{U,V}(u,v) = \\
=&f_{X,Y}(x,y)|J| = \\
=&\frac{1}{2\pi}e^{\frac{1}{2}\left(-x^2-y^2\right)}|J| = \\
=&f_{X,Y}\left(\frac{uv}{\sqrt{v^2+1}}, \frac{u}{\sqrt{v^2+1}}\right)|J| = \\
=&\frac{1}{2\pi}e^{\frac{1}{2}\left(-\frac{u^2v^2}{v^2+1}-\frac{u^2}{v^2+1}\right)} \cdot \frac{|u|}{v^2+1} = \\
=&\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{|u|}{v^2+1}
\end{aligned}$$

Rozkłady brzegowe:

$$\begin{aligned}
&f_U(u) = \\
=&\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{|u|}{v^2+1}\,dv = \\
=&\frac{|u|}{2\pi}e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \Big(\arctan(+\infty) - \arctan(-\infty)\Big) = \\
=&\frac{|u|}{2\pi}e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \pi = \\
=&\frac{|u|}{2}e^{-\frac{u^2}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&f_V(v) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{|u|}{v^2+1}\, du = \\
&= \frac{1}{v^2+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u|}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du = \\
&= \frac{1}{v^2+1} \left(\int_0^{\infty} \frac{u}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du + \int_{-\infty}^{0} \frac{-u}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \right) = \\
&= \frac{1}{v^2+1} \left(\int_0^{\infty} \frac{u}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du + \int_0^{\infty} \frac{u}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \right) = \\
&= \frac{1}{v^2+1} \int_0^{\infty} \frac{u}{\pi} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \\
&= \frac{1}{\pi(v^2+1)}
\end{aligned}
$$

$$
f_U(u) f_V(v) = \frac{|u|}{2} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{1}{\pi(v^2+1)} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{|u|}{v^2+1} = f_{U,V}(u,v)
$$

Tak. Są niezależne.