Rozdział 1

28 września 2015

Procesy stochastyczne - teoria służąca do opisu analizy (wnioskowań) zjawisk losowych ewoluujących w czasie. Wywodzą się z rachunku prawdopodobieństwa. Modelowanie rzeczywistości obarczonej niepewnością (losowością). Przeciwieństwo równań różniczkowych.

$$y' = f(y,t)$$
$$y(t) = g(t, y_0)$$

Równania różniczkowe dostarczają modeli deterministycznych. Idealizuje, możliwe w warunkach laboratoryjnych. Bardzo dużo praktycznych zagadnień nie ma charakteru deterministycznego (a jak już ma to będzie to determinizm chaotyczny). Chaos to nie to samo, co losowość. Losowość tkwi w głębi natury. Dla przykładu mechanika kwantowa.

Podstawowe elementy (pojęcia) procesów stochastycznych:

Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\left.\begin{array}{l}\Omega \text{ - zbiór zdarzeń elementarnych}\\ \omega \in \Omega \text{ - zdarzenie elementarne}\end{array}\right\}\text{pojęcia pierwotne}$$

$\mathcal{F}$ - σ-ciało podzbioru Ω

Definicja 1 (σ-ciało)
Mówimy, że rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów Ω jest σ-ciałem, jeśli spełnia:

1. $$\emptyset \in \mathcal{F}, \quad \Omega \in \mathcal{F},$$

2. $$\forall_{A \in \Omega} \left[A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^{\mathrm{c}} = \Omega \backslash A \in \mathcal{F} \right],$$

3. $$\forall_{A_1, A_2, \dots \in \Omega} \left[\forall_n A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \right],$$

Definicja 2
Mówimy, że funkcja zbioru P określona na $(\Omega, \mathcal{F})$ jest σ-addytywnym prawdopodobieństwem (miarą probabilistyczną σ-addytywną), jeżeli spełnia:

1. $$P : \mathcal{F} \to [0, 1],$$

2. $$P(\emptyset) = 0,$$

3. $$P(\Omega) = 1,$$

4. warunek σ-addytywności
$$\forall_{A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}} \left[\forall_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \right]$$

Definicja 3 (Proces stochastyczny)
Procesem stochastycznym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy rodzinę zmiennych losowych $\{X_t\}_{t \in T}$ określonych na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
T - zbiór indeksów (czasowych, gdy T interpretujemy jako czas)

Definicja 4 (Zmienna losowa)
Zmienna losowa X_t.

$$\forall_{t\in T}\forall_{B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}}\, X_t^{-1}(B)\in\mathcal{F}$$

X_t jest $\mathcal{F}$ mierzalne; X_t jest $\sigma(\mathcal{F},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}) mierzalna$

- $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ - σ-ciało zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$
- $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=\sigma\left(\{(\alpha,\beta):\alpha<\beta\}\right)$

  Uwaga!

$$\operatorname{card}(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}})=\mathfrak{c}<2^{\mathfrak{c}}=\operatorname{card}\left(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\right)$$

Definicja 5
Niech Ω będzie ustalonym zbiorem. Mówimy, że rodzina $\mathcal{C}$ podzbiorów Ω tworzy ciało, jeżeli spełnia:

1.
$$\emptyset,\,\Omega\in\mathcal{C}$$

2.
$$\forall_{A\subseteq\Omega}\left[A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^{\mathrm{c}}\in\mathcal{C}\right]$$

3.
$$\forall_{A,B\in\Omega}\left[A<B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C}\right]\equiv$$
$$\equiv\left[A_1,A_2,\dots,A_n\in\mathcal{C},\quad n\in\mathbb{N}\Rightarrow\bigcup_{j=1}^{n}A_j\in\mathcal{C}\right]$$

Definicja 6
Mówimy, że funkcja zbioru μ określona na $(\Omega,\mathcal{C})$ jest miarą probabilistyczną σ-addytywną, jeśli spełnia:

1.
$$\mu(\emptyset)=0$$
$$\mu(\Omega)=1$$
$$\forall_{A\in\mathcal{C}}\,0\leqslant\mu(A)\leqslant 1$$

2.
$$\forall_{A_1,A_2,\dots\in\mathcal{C}}\left[\forall_{i\neq j}A_i\cap A_j=\emptyset\wedge\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{C}\Rightarrow\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n\right)\right]$$

Rozdział 2

5 Października 2015

Twierdzenie 1
Niech $\mathcal{C}$ będzie ciałem podzbiorów Ω oraz $\mu : \mathcal{C} \to [0,1]$ będzie miarą skończenie addytywną na $(\Omega, \mathcal{C})$ nieujemną i unormowaną, czyli

$$\mu(\Omega) = 1, \forall_{a \in \mathcal{C}}\ 0 \leqslant \mu(A) \leqslant 1.$$

Wówczas następujące warunki są równoważne:

(A) μ jest σ-addytywna na $(a\Omega, \mathcal{C})$

(B) Ciągłość od dołu

$$\forall_{B_j \in \mathcal{C}} \forall_{B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_j\right)$$

(C) Ciągłość od góry

$$\forall_{C_j \in \mathcal{C}} \forall_{C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots} \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu\left(C_j\right) = 0$$

Dowód. (A) $\Rightarrow$ (B)
$A_1 = B_1$
$A_2 = B_2 \backslash B_1$
$\vdots$
$A_n = B_n \backslash B_{n-1}$
$\vdots$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu\left(A_j\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_n\right)
\end{aligned}$$

(B) $\Rightarrow$ (C)
$C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$
$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$
$B_n = C_n^{\mathrm{c}} = \Omega \backslash C_n$
$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right)^{\mathrm{c}} = \emptyset^{\mathrm{c}} = \Omega$

$$\begin{aligned}
&1 = \mu\left(\Omega\right) = \\
&= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_n\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\Omega \backslash C_n\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\mu\left(\Omega\right) - \mu\left(C_n\right)\Big) = \\
&= \mu\left(\Omega\right) - \lim_{n\to\infty} \mu\left(C_n\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu\left(C_n\right) = 0
\end{aligned}$$

(C) $\Rightarrow$ (A)
$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$
$\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \in \mathcal{C}$

$$C_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \backslash \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \in \mathcal{C}$$

$C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$
$\bigcap_{j=1}^{\infty} C_n = \emptyset.$

Z (C) $\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0$

$$\begin{aligned}
&\mu(C_n) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) = \\
=&\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) - \sum_{j=1}^{n-1} \mu(A_j) \to 0
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

Ostatecznie

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

$\square$

Uwaga!

Warunek (C) jest bardzo wygodny do sprawdzenia.

Twierdzenie 2

Jeżeli μ jest prawdopodobieństwem σ-addytywnym na ciele $\mathcal{C}$ podzbiorów Ω, to istnieje dokładnie jedno rozszerzenie μ do miary probabilistycznej $\tilde{\mu}$ na $\sigma(\mathcal{C})$ $\{\tilde{\mu}|_{\mathcal{C}} = \mu\}$

$$(\Omega, \mathcal{C}, \mu) \rightsquigarrow (\Omega, \sigma(\mathcal{C}), \tilde{\mu})$$

Tradycyjnie $\tilde{\mu}$ piszemy μ.

Dygresja

$\Omega = \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{N}, \nu(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(A \cap \{1, 2, \ldots, n\})}{n}$ gęstość zbioru A. Dobra miara "grubości" podzbiorów $\mathbb{N}$. Nie wszystkie podzbiory mają gęstość. Z całą pewnością ν nie jest σ-addytywna, bo $\nu(k) = 0$, $\mathrm{card}(k) < \infty$

$$1 = \nu\left(\mathbb{N}\right) \neq \lim_{n\to\infty} \nu\left(\{1, 2, \ldots, n\}\right) = 0$$

Przykład 1
$\Omega = (0, 1]$
$\mathcal{C}_{\text{przed.}} = \left\{\bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j, \beta_j] : n = 0, 1, \ldots; 0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_n\right\}$
$F : [0, 1] \to \mathbb{R}, F$ niemalejące, prawostronnie ciągłe.

$$\mu_F\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j, \beta_j]\right) \overset{df}{=} \sum_{j=1}^{n}\Big(F\left(B_j\right) - F\left(\alpha_j\right)\Big) \geqslant 0$$

μ_F jest skończenie addytywna na $((0, 1], {}_{\text{przed.}})$, co widać z konstrukcji. Nieco trudniej dowodzi się, że μ_F jest σ-addytywna na ciele $\mathcal{C}_{\text{przed.}}$. Zatem każda funkcja niemalejąca, prawostronnie ciągła $F : [0, 1]$ definiuje miarę σ-addytywną na $((0, 1], \sigma\left(\mathcal{C}_{\text{przed.}}\right))$

Funkcje tworzące

(p.g.f. probability geometry function)

Niech $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ będzie zmienną losową $(ychX^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \subseteq \mathbb{N}$ - dowolny podzbiór) . Nową charakterystyką takich zmiennych losowych jest funkcja charakterystyczna.

Definicja 7 (Funkcja tworząca)
Funkcją tworzącą zmiennej losowej X o wartościach w $\mathbb{N}_0$ nazywamy

$$\Upsilon_X(s) = \mathbb{E}s^X\left(= \sum_{j=0}^{\infty} s^j P(X = j) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j p_j\right)$$

Pytanie: Dom(r_X)=?
r_X określona szeregiem potęgowym; pewnie analityczna. $r_X(z), z \in K(0, R)$

Twierdzenie 3
Niech $X.\tau, X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ będą zmiennymi losowymi losowymi o wartościach w $\mathbb{N}_0$ i oznaczmy $P\left(X = k\right) = p_k$, $P\left(X^(n) = k\right) = p_k^{(n)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Wówczas:

1. *dom*(Υ_X) $\supseteq [-1, 1]$ *(W przypadku dziedziny zespolonej $\overline{K}(0, 1)$)*
   Υ_X *jest niemalejąca i wypukła na* $[0, 1]$*oraz klasy* C^∞ *na* $(-1, 1)$

2. $\Upsilon_X(1) = 1$

3.

$$\begin{aligned}\Upsilon'_X(0) &= P(X=1) = p_1\\ \Upsilon''_X(0) &= 2\cdot P(X=2) = 2p_2\\ &\vdots\\ \Upsilon^{(k)}_X(0) &= k!\cdot P(X=k) = k!p_k\end{aligned}$$

4. *Dla* X

$$\mathbb{E}X^n < \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to 1^-} \Upsilon^{(n)}_X(s) = \Upsilon^{(n)}_X(1^-) < \infty$$

Co więcej

$$\Upsilon^{(n)}_X(1^-) = \mathbb{E}X(X-1)\cdots(X-n+1)$$
n-ty moment faktorialny

W szczególności

$$\mathbb{E}X = \Upsilon'_X(1^-)$$
$$\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}X(X-1) + \mathbb{E}X = \Upsilon''_X(1^-) + \Upsilon'_X(1^-)$$

5. *Jeżeli* x *i* Y *są niezależne o wartościach w* $\mathbb{N}_0$*, to* $\Upsilon_{X+Y}(s) = \Upsilon_X(s)\Upsilon_Y(s)$

6. *Jeżeli* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ *są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i o wartościach w* $\mathbb{N}_0$ *i podobnie* τ *i dodatkowo ciąg* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ *i* τ *są niezależne, to dla*

$$U = \sum_{j=1}^{\tau} X^{(j)}$$

mamy

$$\Upsilon_U(s) = \Upsilon_\tau\Big(\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\Big)$$

7. *Dla dowolnego ciągu zmiennych losowych (niekoniecznie niezależnych)* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ *i zmiennej losowej* X *o wartościach w* $\mathbb{N}_0$ *następujące warunki są równoważne:*

   (a) $\forall_{k\in\mathbb{N}_0} \lim_{n\to\infty} P\left(X^{(n)} = k\right) = P(X=k)$

(b) $X_n \overset{\mathcal{D}}{\Rightarrow} X$ *(zbieżność słaba)*

(c) $\forall_{s\in[0,1]} \lim\limits_{n\to\infty} \Upsilon_{X^{(n)}}(s) = \Upsilon_X(s)$

Dowód.

2. $\Upsilon_X(1) = \mathbb{E}1^X = \mathbb{E}1 = 1$

1.

$$\Upsilon_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^X p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

ten szereg potęgowy jest zbieżny dla $s = 1$ nawet bezwzględnie.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |p_k|\,|s|^k\right)_{s=1}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\left|z^k\right| < \infty$$

$\Upsilon_X(z)$ jest dobrze określone na $|z| \leqslant 1$.
Υ_X jest funkcją analityczną (co najmniej) na $\{z : |z| < 1\}$, a stąd wynika, że Υ_X jest ciągła na $[-1,1]$ i ma ciągłe pochodne na $(-1,1)$.
$\Upsilon_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \geqslant 0$ na $[0,1]$
$\Upsilon'_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k s^{k-1} \geqslant 0$ - niemalejąca na $[0,1]$
$\Upsilon''_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-1} \geqslant 0$ dla $s \in [0,1]$
Reasumując Υ_X jest nieujemna, niemalejąca, wypukła na $[0,1]$.

$P\left(\{X+0\} \cup \{X=1\}\right) = 1$	$\Upsilon_X(s) = p_0 + p_1 \cdot s$
$P\left(X \geqslant 2\right) > 0$	Υ_X ściśle wypukła

3.

$$\Upsilon_X^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k}\left(\sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j\right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-k+1) p_j s^{j-k} = \sum_{j=k}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-k+1) p_j s^{j-k}$$

$$\Upsilon_X^{(k)}(0) = k(k-1)\cdots(k-k+1)p_k = k!p_k \Rightarrow p_k = P\left(X=k\right) = \frac{\Upsilon_X}{k!}$$

4.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}X = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\left(X = k\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot 1^k = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot s^k\right)_{s=1} = \\
&= \lim_{n \to 1^-} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot s^k\right) = \\
&= \lim_{n \to 1^-} \Upsilon'_X(s)
\end{aligned}
$$

Analogicznie

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}X(X+1)\cdots(X-n+1) = \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)p_k \cdot 1^{k-n+1} = \\
&= \lim_{n \to 1^-} \Upsilon_X^{(n)}(s)
\end{aligned}
$$

Uwaga!

$$\mathbb{E}X^n < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-n+1) < \infty$$

5. X, Y niezależne zmienne losowe o wartościach w $\mathbb{N}_0$

$$\Upsilon_{X+Y}(s) = \mathbb{E}s^{X+Y} = \mathbb{E}s^X \cdot s^Y = \mathbb{E}s^X \cdot \mathbb{E}s^Y = \Upsilon_X^{(s)}\Upsilon_Y^{(s)}$$

6. $V = \sum_{j=1}^{\tau} X^{(j)}$, ustalmy $\sum_{j=1}^{0} \cdots = 0$

$$
\begin{aligned}
\Upsilon_V(s) &= \mathbb{E}s^V = \int\limits_{\Omega} s^V \, dP = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\{\tau=n\}} s^{\sum_{j=1}^{\tau} x^{(j)}} \, dP = \\
&= \int\limits_{\{\tau=0\}} s^{\sum_{j=1}^{0} x^{(j)}} \, dP + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\{\tau=n\}} s^{\sum_{j=1}^{\tau} x^{(j)}} \, dP = \\
&= 1 \cdot P(\tau = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \, dP \int\limits_{\Omega} s^{\sum_{j=1}^{\tau} x^{(j)}} \, dP = \\
&= 1^0 \cdot P(\tau = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n) \, \Upsilon_{\sum_{j=1}^{\tau} x^{(j)}}(s) = \\
&= P(\tau = 0) \cdot s^0 + \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n) \left[\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\right]^n = \\
&= P(\tau = 0) \cdot \left(\Upsilon_X^{(1)}(s)\right)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n) \left[\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\right]^n = \\
&= \Upsilon_\tau\Big(\Upsilon_{X^{(1)}}(s)\Big) = \Upsilon_\tau \circ \Upsilon_{X^{(1)}}(s)
\end{aligned}
$$

$\square$

Rozdział 3

12 października 2015

Dowód. 7. (a)$\Rightarrow$ (b)

$$P\left(X^{(n)} \leqslant t\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(X \leqslant t\right)$$

w każdym punkcie t, w którym F_X jest ciągła; dla $t < 0$ jasne, bo $0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\begin{aligned}
&P\left(X^{(n)} \leqslant t\right) = \\
=&P\left(X^{(n)} \leqslant \lfloor t \rfloor\right) = \\
=&\sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} P\left(X^{(n)} = k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} P\left(X \leqslant \lfloor t \rfloor\right) = \\
=&P\left(X \leqslant t\right)
\end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (c)
$\Upsilon_{X^{(n)}}(s) = \mathbb{E}s^{x^{(n)}}$

$$g_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \leqslant 0 \\ s^t & \text{dla } t > 0 \end{cases} \qquad \text{dla } 1 \geqslant s > 0$$

$$g_0(t) = 1 - 2t$$

$\forall_{s\in[0,1]} g_s$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną

$$X \overset{\mathcal{D}}{\Rightarrow} X \Leftrightarrow \forall_{g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \mathbb{E}g\left(X^{(n)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}g(X)$$

Dla każdego $s \in [0,1]$ g jest funkcją ciągłą i ograniczoną.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}g_s\left(X^{(n)}\right) = \mathbb{E}s^{X^{(n)}} = \Upsilon_{X^{(n)}}(s) \\
&\mathbb{E}g_s\left(X\right) = \Upsilon_X(s) \\
&\mathbb{E}g_0\left(X^{(n)}\right) = 1 \cdot P\left(X^{(n)} = 0\right) + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot P\left(X^{(n)} = k\right) = \\
=&\Upsilon_{X^{(n)}}(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}g_0(X) = \cdots = \Upsilon_X(0)
\end{aligned}$$

(c) $\Rightarrow$ (a)
Mamy $\Upsilon_{X^{(n)}}(s) \to \Upsilon_X(s)$ dla $s \in [0,1]$
Podstawmy $s = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot P\left(X^{(n)} = k\right)\Bigg|_{s=0} = P\left(X^{(n)} = n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{c)} \Upsilon_X(0)$$

$$P_0^{(n)} \to P_0$$

Szkic

$$\begin{aligned}
&p_1^{(n)} = P\left(X^{(n)} = 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(X = 0\right)? \\
&\Upsilon_{X^{(n)}}(s) = P\left(X^{(n)} = 0\right) + P\left(X^{(n)} = 1\right)s + P\left(X^{(n)} = 2\right)s^2 + \dots \\
&\Upsilon_X(s) = P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right)s + P\left(X = 2\right)s^2 + \dots \\
&\forall_{s\in[0,1]} \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X^{(n)} = k\right)s^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X = k\right)s^k \\
&\forall_{s\in[0,1]} s\sum_{k=1}^{\infty} P\left(X^{(n)} = k\right)s^{k-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} s\sum_{k=1}^{\infty} P\left(X = k\right)s^{k-1}
\end{aligned}$$

o, ile $0 \leqslant s \leqslant 1$, to uprośćmy

$$\begin{aligned}
&\forall_{s\in[0,1]} \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X^{(n)} = k\right)s^{k-1} = \\
=&P\left(X^{(n)} = 1\right) + P\left(X^{(n)} = 2\right)s + \dots + P\left(X^{(n)} = k\right)s^{k-1} + \dots \xrightarrow[n\to\infty]{} \\
\xrightarrow[n\to\infty]{}&P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right)s + \dots + P\left(X = k\right)s^{k-1} + \dots
\end{aligned}$$

mogą być dowolnie małe biorąc małe $s \in (0,1]$. W takim razie, gdy $n \to \infty$ mamy

$$\begin{aligned}
P\left(X^{(n)} = 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(X = 0\right) \\
P\left(X^{(n)} = 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(X = 1\right)
\end{aligned}$$

dalej indukcyjnie

$$\forall_{k\in\mathbb{N}_0} P\left(X^{(n)}=k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(X=k\right)$$

$\square$

FUNKCJA GENERUJACA MOMENTY
(Moment generating function)

Definicja 8
Niech X będzie zmienną losową określoną na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Funkcją generującą momenty nazywamy funkcję

$$M_X(s) = \mathbb{E}e^{sX} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}\, dF_X(x)$$

Wtrącenie

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X(x)\, dx$, gdy X ma gęstość f_X

$\sum_{k=1}^{\infty} e^{sx_k} P\left(X = x_k\right)$, gdy X jest typu dyskretnego

Wadą jest fakt, że $\mathrm{Dom}(M_x)$ może być mała lub trudna do określenia. Np. może się zdarzyć, że $\mathrm{Dom}(M_X) = \{0\}$, ale zawsze $0 \in \mathrm{Dom}\left(M_X\right)$

Fakt

$$M_X(0) = \mathbb{E}e^{0\cdot X} = \mathbb{E}e^0 = \mathbb{E}1 = 1$$

Chcielibyśmy, aby $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathrm{Dom}\left(M_X\right)$

Twierdzenie 4
Niech zmienna losowa $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$ *ma własność Dom*$(M_X) \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$ *dla* $\varepsilon > 0$. *Wówczas*

$$M_X'(0) = \mathbb{E}X$$
$$M_X''(0) = \mathbb{E}X^2 itd.$$

Dowód.

$$
\begin{aligned}
&M'_X(x) = \\
&= \lim_{n\to 0} \frac{M_X(x+h) - M_X(x)}{h} = \\
&= \lim_{n\to 0} \frac{\mathbb{E}e^{(x+h)X} - \mathbb{E}e^{xX}}{h} = \\
&= \lim_{n\to 0} \mathbb{E}\frac{e^{(x+h)X} - e^{xX}}{h} = \\
&= \mathbb{E}\lim_{n\to 0} \frac{e^{(x+h)X} - e^{xX}}{h} = \\
&= \mathbb{E}Xe^{xX}
\end{aligned}
$$

$$
M'_X(0) = \Big(M'_X(x)\Big)_{x=0} = \mathbb{E}Xe^{0X} = \mathbb{E}X
$$

Indukcyjnie dla wyższych momentów. □

Twierdzenie 5
Jeżeli zmienne losowe X, Y są niezależne to

$$
M_{X+Y}(x) = M_X(x) \cdot M_Y(x)
$$

Dowód.

$$
\begin{aligned}
&M_{X+Y}(x) = \\
&= \mathbb{E}e^{x(X+Y)} = \\
&= \mathbb{E}e^{xX+xY} = \\
&= \mathbb{E}\underbrace{e^{xX}e^{xY}}_{\text{niezależne}} = \\
&= \mathbb{E}e^{xX} \cdot \mathbb{E}e^{xY} = \\
&= M_X(x)M_Y(x)
\end{aligned}
$$

□

Wniosek
Jeżeli $X_1, \ldots, X_k$ to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, to

$$
M_{\sum_{j=1}^k X_j}(x) = [M_{X_1}(x)]^k
$$

Uwaga!
Jeżeli X i Y mają ten sam rozkład, to oczywiście

$$
M_X = M_Y
$$

Przykład 2
Wyznacz M_X, gdy $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$

$$\begin{aligned}
&M_X(x) = \\
=&\mathbb{E}e^{xX} = \\
=&\sum_{k=0}^{\infty} e^{xk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \\
=&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda} = \\
=&e^{e^x\lambda}\cdot e^{-\lambda} = \\
=&e^{\lambda(e^x-1)}
\end{aligned}$$

$\text{Dom}(M_{\text{Poiss}}) = \mathbb{R}$
$\mathbb{E} = M_X'(0)$

$$\begin{aligned}
&M_X'(x) = \left(e^{\lambda(e^x-1)}\right)' = e^{\lambda(e^x-1)}\cdot(\lambda\cdot e^x) \\
&M_X''(x) = \left(e^{\lambda(e^x-1)}\cdot(\lambda\cdot e^x)\right)' = \lambda\left(e^{\lambda(e^x-1)}\cdot\lambda e^x\cdot e^x + e^{\lambda(e^x-1)}\cdot e^x\right) \\
&M_X''(0) = \lambda(\lambda+1) = \lambda^2+\lambda = \mathbb{E}X^2 \\
&\text{Var}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

Przykład 3
$X \sim \text{Exp}(\alpha)$

$$\begin{aligned}
M_X(x) = \mathbb{E}e^{xX} &= \int_0^{+\infty} e^{xt}\alpha e^{-\alpha t}\,dt = \alpha\int_0^{\infty} e^{(x-\alpha)t}\,dt = \\
&= \frac{\alpha}{x-\alpha}e^{(x-\alpha)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{-\alpha}{x-\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-x}
\end{aligned}$$

$\text{Dom}M_{\text{Exp}(\alpha)} = (-\infty,\alpha)$

$$\begin{aligned}
&M_X'(x) = \frac{\alpha}{(x-\alpha)^2} &&M_X'(0) = \mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \\
&M_X''(x) = \frac{2\alpha}{(\alpha-x)^3} &&M_X''(0) = \mathbb{E}X^2 = \frac{2\alpha}{\alpha^3} = \frac{2}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

itd.

Uwagi o teorii niezawodności.

Niech czas pracy bezawaryjnej urządzenia opisany będzie zmienną losową $X : (\Omega,\mathcal{F},P) \to [0,\infty)$

Definicja 9 (Funkcja niezawodności)
Funkcją niezawodności urządzenia nazywamy

$$R_X(t) = \overline{F}(t) = P\left(X > t\right) \text{ dla } t \in [0, \infty]$$

Uwaga!
$P\left(X = 0\right) = 0$ to nasze upraszczające założenie.

Definicja 10
Niech X będzie nieujemną zmienną losową. Mówimy, że X ma własność braku pamięci, jeżeli

$$\forall_{s,t \geqslant 0}\ P\left(X > s + t | X > t\right) = P\left(X > s\right)$$

Twierdzenie 6
Nieujemna zmienna losowa X ma własność braku pamięci wtedy i tylko wtedy, gdy ma rozkład wykładniczy.

Dowód. $\Leftarrow$
Zakładamy, że $X \sim \mathrm{Exp}$, $P\left(X > t\right) = e^{-\alpha t}$

$$\begin{aligned} P\left(X > t + s | X > t\right) =& \frac{P\left(X > t + s \wedge X > t\right)}{P\left(X > t\right)} = \\ =& \frac{P\left(X > t + s\right)}{P\left(X > t\right)} = \\ =& \frac{e^{-\alpha(t+s)}}{e^{-\alpha}} = \\ =& e^{-\alpha s} = \\ =& P\left(X > s\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$
Zakładamy, że X ma własność braku pamięci

$$\begin{aligned} P\left(X > t + s | X > t\right) =& P\left(X > s\right) \\ \frac{P\left(X > t + s \wedge X > t\right)}{P\left(X > t\right)} =& P\left(X > s\right) \\ P\left(X > s + t\right) =& P\left(X > s\right) P\left(X > t\right) \\ \overline{F}_X(s + t) =& \overline{F}_X(s)\overline{F}_X(t) \text{ dla } s, t \geqslant 0 \end{aligned}$$

Mamy równanie funkcyjne dla $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$\forall_{s,t \geqslant 0}\ g(t + s) = g(t)g(s)$$

$g(t) = \overline{F}(t)$ ograniczona, prawostronnie ciągła oraz $\overline{F}(0) = 1$ i
$\lim\limits_{x\to\infty} \overline{F}(x) = 0$
Odrzucamy trywialne rozwiązania równania $g \equiv 0, \; g \equiv 1$

$$\begin{aligned}
g(2s) &= g(s+s) = g(s)\cdot g(s) = g(s)^2 \geqslant 0 \\
g(1) &= \underbrace{\left(\tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{m} + \cdots + \tfrac{1}{m}\right)}_{m \text{ razy}} = g\left(\tfrac{1}{m}\right) g\left(\tfrac{1}{m}\right) \cdots g\left(\tfrac{1}{m}\right) = \left[g\left(\tfrac{1}{m}\right)\right]^m \\
g\left(\tfrac{1}{m}\right) &= g(1)^{\frac{1}{m}} \\
g\left(\tfrac{k}{m}\right) &= \underbrace{\left(\tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{m} + \cdots + \tfrac{1}{m}\right)}_{k \text{ składników}} = g\left(\tfrac{1}{m}\right) g\left(\tfrac{1}{m}\right) \cdots g\left(\tfrac{1}{m}\right) = \\
&= g\left(\tfrac{1}{m}\right)^k = [g\,(1)]^k = g\,(1)^{\frac{k}{m}}
\end{aligned}$$

Gdyby $g(1) = 0 \Rightarrow g\left(\frac{1}{m}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} g\left(\frac{1}{m}\right) = 0$, ale $g(0) = 1$
Zatem $g(1) > 0$.
Gdyby $g(1) > 1 \Rightarrow g(k) = g(1)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, ale $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$
Zatem $0 < g(1) < 1$. Przyjmijmy, że $g(1) = e^{-\alpha}$ dla pewnego $\alpha > 0$. Wtedy $g\left(\frac{k}{m}\right) = (e^{-\alpha})^{\frac{k}{m}} = e^{-\alpha\frac{k}{m}}$
Dla dowolnego $x \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k^{(n)}}{m^{(n)}}$ $\left(\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\right)$

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{k^{(n)}}{m^{(n)}}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{-\alpha\frac{k^{(n)}}{m^{(n)}}}$$

$\forall_{x\geqslant 0}\; 1 - F(x) = \overline{F}(x) = e^{-\alpha x}; X \sim \mathrm{Exp}$ $\square$

Uwaga!
W dziedzinie $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ jedynym rozkładem o własności braku pamięci jest rozkład geometryczny.

Definicja 11
Niech X będzie zmienną losową opisującą czas pracy bezawaryjnej. Intensywnością awarii nazywamy funkcję $\lambda_X : [0, \infty) \to [0, \infty)$

$$\lambda_X(t) = \frac{f_X(t)}{\overline{F}_X(t)} = \frac{f_X(t)}{R_X(t)} = -\frac{R'_X(t)}{R_X(t)}$$

$R'_X = (1 - F_X)' =$
$= -F'_X = -f_X$

Uwaga!
λ_X jest określona tylko dla zmiennych losowych absolutnie ciągłych.

W medycynie mówimy o intensywności śmierci albo ogólniej o funkcji hazardu. Rozkład (gęstość) wyznacza jednoznacznie funkcję intensywności awarii.

$$\lambda_X(t) = \frac{f_X(t)}{P\left(x > t\right)} = \frac{f_X(t)}{\int\limits_t^\infty f_X(u)\,du}$$

Interpretacja funkcji intensywności awarii.

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta\to 0^+} \frac{P\left(t < X \leqslant t + \Delta T | X > t\right)}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{\frac{P(X_t\in(t, t+\Delta t]\wedge X_t > t)}{R_X(t)}}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{\frac{P(X_t\in(t, t+\Delta t])}{\Delta t}}{R_X(t)} = \\
&= \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} f_X(u)\,du}{R_X(t)} = \\
&= \frac{f_X(t)}{R_X(t)}
\end{aligned}$$