Parcial 3 Inv. de Operaciones

Mario Alberto Rodríguez Morales 1860043 Grupo: 002

1. Problema dual de P_1

P_1: $\max\ x_1 + 2x_2 - 2x_3$

SA $2x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 1$

$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}$

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} \therefore P_1^d: \ & \min z = y_1 + 5y_2 \\ \text{S.A. } & 2y_1 + 4y_2 \geq 1 \\ & y_1 + y_2 \leq 2 \\ & 5y_1 + 2y_2 = -2 \\ & y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0 \end{aligned}}$$

2. Sin resolver P_2: información acerca de la región factible, solución y valor óptima

P_2: $\min\ 9x_1 + 6x_2 + 16x_3$

SA: $x_1 + 2x_3 \geq 5$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} \geq \\ \geq \end{pmatrix}$

P_2^d: $\max z = 5y_1 + 3y_2$

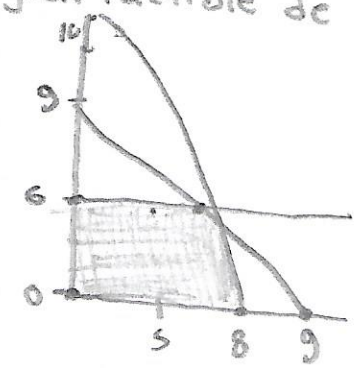
$y_1 + y_2 \leq 9$

$y_2 \leq 6$

$2y_1 + y_2 \leq 16$

$y_1, y_2 \geq 0$

Región factible de P_2^d.



$V_1 = (0,0)$

$V_2 = (8,0)$

$V_3 = (7,2)$

$V_4 = (3,6)$

$V_5 (0,6)$

$\Rightarrow$ Como P_2^d tiene región factible acotada, quiere decir que P_2 es no acotado, pero posee solución óptima

P_2^d: tiene sol. óptima en (7, 2) con valor óptimo 41, entonces se debe cumplir el teorema de dualidad fuerte:

$$c^T x^* = b^T y^*$$

$$(9\ 6\ 16)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (5\ \ 3)\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$9x_1 + 6x_2 + 16x_3 = 35 + 6$$

$$9x_1 + 6x_2 + 16x_3 = 41 \quad ①$$

Con álgebra en base a las restricciones

② $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

③ $x_1 + 2x_3 = 5$

① − 6② →

$$\begin{array}{r} 9x_1 + 6x_2 + 16x_3 = 41 \\ -6x_1 - 6x_2 - 6x_3 = -18 \\ \hline 3x_1 + 10x_3 = 23 \end{array} \quad ④$$

de ③: $x_1 = 5 - 2x_3$ ⑤

Sustituyendo ⑤ en ④

$$3(5 - 2x_3) + 10x_3 = 23$$
$$15 - 6x_3 + 10x_3 = 23$$
$$4x_3 = 8$$
$$x_3^* = 2$$

Sustituyendo $x_3 = 2$ en ③

$$x_1 + 2(2) = 5$$
$$x_1 = 5 - 4$$
$$x_1^* = 1$$

Sustituyendo en ②

$$1 + x_2 + 2 = 3$$
$$x_2 = 3 - 3 = 0$$

Comprobando en ①

$$9(1) + 6(0) + 16(2) \stackrel{?}{=} 41$$
$$9 + 0 + 32 \stackrel{?}{=} 41$$
$$41 = 41$$

$$z(x_1, x_2, x_3) = 9(1) + 6(0) + 16(2) = 41$$

∴ De P_2^d se obtuvo que la región factible de P_2 era no acotado pero la solución existe. En base al teorema de dualidad fuerte se obtuvo que la solución óptima es:

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con valor óptimo de 41.

3. Verificar si $(X_1, X_2, X_3) = (0, 2, 0)$ es óptima usando holgura complementaria

P_3: min $9X_1 + 12X_3 + 3X_3$

SA: $X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 1$

$2X_1 + X_2 \geq 2$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

$c = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} \geq \\ \geq \\ \geq \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

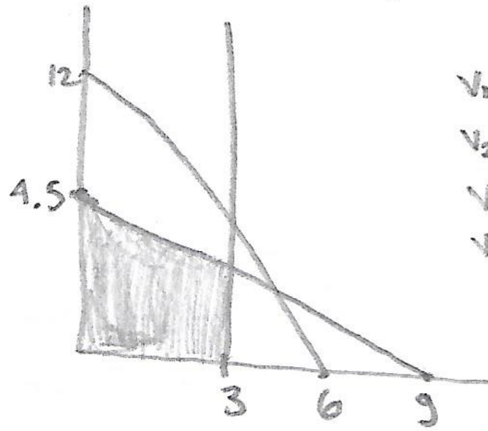
P_3^d: $\max z = y_1 + 2y_2$

SA: $y_1 + 2y_2 \leq 9$

$2y_1 + y_2 \leq 12$

$y_1 \leq 3$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$



$V_1 = (0, 0)$

$V_2 = (3, 0)$

$V_3 = (3, 3)$

$V_4 = (0, 4.5)$

$z_1 = 0$

$z_2 = 3$

$z_3 = 9$

$z_4 = 9$

Hay dos soluciones óptimas.

Probando holgura complementaria para la solución óptima $y^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$x^{*T}(A^T y^* - c) + y^{*T}(b - Ax^*) = 0$

$a + b = 0$

$a = (0\ 2\ 0)\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = (0\ 2\ 0)\left[\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = (0\ 2\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -6$

$b = (3\ 3)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = (3\ 3)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = (3\ 3)\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -9$

$a + b = -6 - 9 = -12 \neq 0$

$\therefore$ Para la solución óptima $y^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ no se cumple el teorema de holgura complementaria

Probando holgura complementaria con $y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.5 \end{pmatrix}$

$$a = (0\ 2\ 0)\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = (0\ 2\ 0)\left[\begin{pmatrix} 9 \\ 4.5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = (0\ 2\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ -7.5 \\ -3 \end{pmatrix} = -15$$

$$b = (0\ 4.5)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = (0\ 4.5)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = (0\ 4.5)\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$a + b = -15 \neq 0$

$\therefore$ No se cumple el teorema de holgura complementaria para $y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.5 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ no es solución óptima para P_3

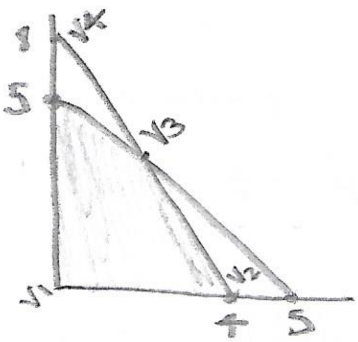
4. Analizar variaciones en C_1 y b.

P_4: max $x_1 + 2x_2$

SA $x_1 + x_2 \leq 5$

$2x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$



C_1

Valor	$C_1 \in (-\infty, 2)$	$C_1 = 2$	$C_1 \in (2, 4)$	$C_1 = 4$	$C_1 \in (4, \infty)$
Sol. Optima	$V_4 = (0,5)$	$\overline{V_3, V_4}$	$V_3 = (3,2)$	$\overline{V_2, V_3}$	$V_2 = (4,0)$
Val. Optimo	$Z_4 = 10$	$Z = 10$	$Z_3^* = 3C_1 + 4$	$Z^* = 16$	$Z = 4C_1$

Cuando $V_3 = V_4$?

$10 = 3C_1 + 4$

$6 = 3C_1$

$C_1 = 2$

Cuando $V_2 = V_3$

$16 = 4C_1$

$C_1 = 4$

B_1

Valor	$B_1 \in (-\infty, 0)$	$B_1 = 0$	$B_1 \in (0, 8)$	$B_1 \in (8, \infty)$
Sol. Optima	No tiene	$V_1 = (0,0)$	$V_4 = (0, B_1)$	$V_5 = (0, 8)$
Valor Optimo	No tiene	$z = 0$	$z^* = 2B_1$	$z = 16$

* Adjunté los archivos de Geogebra con los que me apoyé en la tarea de Teams.