Mario Alberto Rodríguez Morales 1860043 Grupo: 002

Parcial 1 de Procesos Estocásticos

1. Considerar el proceso estocástico $P(t)$ definido en la siguiente manera. Existe un flujo de eventos de Poisson con $\lambda = 3$. La condición inicial para $P(t)$ es igual a 0. Luego en los momentos t_i de llegada de eventos del flujo de Poisson, el valor $P(t)$ se asigna con un valor realizado de una variable aleatoria exponencial negativa U_i con la esperanza $k = 1/4$ para todos $i = 1, 2, \ldots$, mientras se mantiene constante entre los momentos de llegada de eventos del flujo Poisson. Todas las variables U_i: $1, 2, \ldots$, son independientes.

Determinar:

a) Valores de la esperanza del proceso; $E[P(t)]$

$E[P(t)] = E[U_i] = 1/4$

b) Valores de la varianza del proceso; $Var[P(t)]$

Como es exponencial $Var(U_i) = [E[U_i]]^2$

$Var[p(t)] = Var[U_i] = (1/4)^2 = 1/16$

c) Valores de la covarianza del proceso, $k_p(t_1, t_2)$

Como es un proceso de Poisson: $k_p(t_1, t_2) = De^{-\lambda|t_1 - t_2|}$

$k_p(t_1, t_2) = De^{-\lambda|t_1 - t_2|} = \frac{1}{16}e^{-3|t_1 - t_2|}$

d) Valores del segundo momento inicial del proceso, $\Gamma_p(t_1, t_2)$

$\Gamma_p(t_1, t_2) = De^{-\lambda|t_1 - t_2|} + m(t_1)m(t_2) = \frac{1}{16}e^{-3|t_1 - t_2|} + \frac{1}{16}$

e) Fórmula de la función unidimensional del proceso, $f_p(x, t)$

Como es exponencial:

$$f_p(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Determinar

a) Si el proceso $P(t)$ es continuo en promedio cuadrático

① $\Gamma_p(t_1, t_2) = \frac{1}{16}e^{-3|t_1 - t_2|} + \frac{1}{16}$ es contínua en todo $t' = t'' = t$

② $E[p(t)] = 1/4$ es continua en todo t

③ $k_x(t_1, t_2) = \frac{1}{16}e^{-3|t_1 - t_2|}$ es contínua en $t' = t'' = t$

$\therefore P(t)$ es continuo en P.C

b) Si el proceso $P(t)$ es diferenciable en promedio cuadrático

① $\dfrac{\partial^2 r_p(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$, no es continua para $t_1=t_2=t$

$\therefore P(t)$ no es diferenciable en P.C.

c) Si el proceso $P(t)$ es integrable en promedio cuadrático

Como el proceso $P(t)$ es continuo en P.C., es también es integrable

$\therefore P(t)$ es integrable en P.C.

2. Considerar el proceso estocástico $X(t)=at^5+bt+c$, donde a, b y c son variables aleatorias independientes con las esperanzas m_a, m_b y m_c y las varianzas D_a, D_b, D_c, respectivamente, Determinar si el proceso $X(t)$ es diferenciable en promedio cuadrático. Calcular los valores de la esperanza, la covarianza y la varianza de su derivado en promedio cuadrático. Mostrar que los valores obtenidos coinciden con la esperanza, la covarianza y la varianza del proceso $5at^4+b$

① $E[X(t)] = E[at^5+bt+c] = t^5E[a] + tE[b] + E[c] = m_at^5 + m_bt + m_c$

$Var[X(t)] = Var(at^5+bt+c) = t^{10}Var(a) + t^2Var(b) + Var(c) = t^{10}D_a + t^2D_b + D_c$

$$\begin{aligned}
k_x(t_1,t_2) &= E[(X(t_1) - (m_at_1^5+m_bt_1+m_c))(X(t_2) - (m_at_2^5+m_bt_2+m_c))] \\
&= E[(at_1^5+bt_1+c - m_at_1^5 - m_bt_1 - m_c)(at_2^5+bt_2+c - m_at_2^5 - m_bt_2 - m_c)] \\
&= E[(t_1^5(a-m_a) + t_1(b-m_b) + (c-m_c))(t_2^5(a-m_a) + t_2(b-m_b) + (c-m_c)] \\
&= E[t_1^5t_2^5(a-m_a)^2 + t_1^5t_2(a-m_a)(b-m_b) + t_1^5(a-m_a)(c-m_c) + t_1t_2^5(b-m_b)(a-m_a) \\
&\quad + t_1t_2(b-m_b)^2 + t_1(c-m_c) + t_2^5(a-m_a)(c-m_c) + t_2(b-m_b)(c-m_c) + (c-m_c)^2] \\
&= t_1^5t_2^5E[(a-m_a)^2] + t_1^5t_2\cancel{E[a-m_a]}E[b-m_b] + t_1^5E[a-m_a]\cancel{E[c-m_c]} + t_1t_2^5\cancel{E(b-m_b)(a-m_a)} \\
&\quad + t_1t_2E[(b-m_b)^2] + t_1E[c-m_c] + t_2^5E(a-\cancel{m_a})(c-m_c) + t_2E(b-\cancel{m_b})E(c-m_c) + \\
&\quad E[(c-m_c)^2] \\
&= t_1^5t_2^5Var(a) + t_1t_2Var(b) + Var(c)
\end{aligned}$$

$K_x(t_1,t_2) = D_at_1^5t_2^5 + D_bt_1t_2 + D_c$

$$\frac{dE[x(t)]}{dt} = 5mat^4 + m_b$$

$$\frac{\partial k_x(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial(5Dat_1^4t_2^5 + Dbt_2)}{\partial t_2} = 25Dat_1^4t_2^4 + Db$$

$\therefore$ Es diferenciable en P. C.

(2)

$E[x'(t)] = 5mat^4 + m_b$

$k_{x'}(t_1,t_2) = 25Dat_1^4t_2^4 + Db$

$Var(x'(t)) = k_{x'}(t,t) = 25Dat^8 + Db$

(3)

$Y(t) = 5at^4 + b$

$E[y(t)] = 5t^4E[a] + E[b] = \underline{5mat^4 + m_b}$

$Var[y(t)] = 25t^8Var[a] + Var[b] = \underline{25Dat^8 + Db}$

$k_y[t_1,t_2] = E[(5at_1^4 + b - 5mat_1 - mb)(5at_2^4 + b - 5mat_1 - mb)]$

$= E[(5t_1^4(a-ma) + (b-mb))(5t_2^4(a-ma) + (b-mb))]$

$= 25t_1^4t_2^4 E[(a-ma)^2] + 5t_1^4 \overset{0}{\cancel{E(a-ma)}}E(b-mb) + 5t_2^4 \overset{0}{\cancel{E(a-ma)}}E(b-mb) + E[(b-mb)^2]$

$= 25t_1^4t_2^4 Var(a) + Var(b)$

$= \underline{25Dat_1^4t_2^4 + Db}$

$\Rightarrow E[x'(t)] = E[y(t)]$

$Var[x'(t)] = Var[y(t)]$

$k_{x'}(t_1,t_2) = k_y(t_1,t_2)$

$\therefore$ La esperanza, covarianza y varianza de $X'(t)$ y $Y(t)$ coinciden

3. Considerar el proceso estocástico $Z(t) = k$ donde k es una variable aleatoria con la esperanza m_k y la varianza D_k. Determinar si el proceso $Z(t)$ es integrable en promedio cuadrático. Calcular los valores de la esperanza, la covarianza y la varianza de la integral en promedio cuadrático $\int_0^t t^5 Z(s)ds$. Mostrar que los valores obtenidos coinciden con la esperanza, la covarianza y la varianza del proceso kt^6.

① $z(t) = k$

$E[z(t)] = E[k] = m_k$

$Var[z(t)] = Var(k) = D_k$

$k_z(t_1, t_2) = E[(k-m_k)(k-m_k)] = E[(k-m_k)^2] = Var(k) = D_k$

$\int_0^t E[k]d\tau = \int_0^t m_k \, d\tau = m_k \tau \Big|_0^t = m_k t$

$\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} k_z(t_1,t_2) d\tau_2 d\tau_1 = \int_0^{t_1} D_k \tau_2 \Big|_0^{t_2} d\tau_1 = D_k t_2 \tau_1 \Big|_0^{t_1} = D_k t_1 t_2$

$\therefore$ $z(t)$ es integrable en P.C.

② $Y(t) = \int_0^t t^5 z(s) ds = t^5 \int_0^t z(s) ds = t^5 s(t)$

$E[s(t)] = E[\int_0^t z(s) ds] = \int_0^t m_k ds = m_k t$

$k_s(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} D_k d\tau_2 d\tau_1 = \int_0^{t_1} D_k \tau_2 \Big|_0^{t_2} dt_1 = D_k t_2 \tau_1 \Big|_0^{t_1} = D_k t_1 t_2$

$Var[s(t)] = k_s(t,t) = D_k t^2$

$\Rightarrow$ $E[y(t)] = t^5 E(s(t)) = t^5 m_k t = m_k t^6$

$Var[y(t)] = t^{10} Var(s(t)) = D_k t^{12}$

$k_y(t_1, t_2) = K_{t^5 s(t)}(t_1, t_2) = D_k t_1^6 t_2^6$

③ $x(t) = kt^6$

$E[x(t)] = t^6 E[k] = \underline{t^6 m_k}$

$Var[y(t)] = t^{12} Var(k) = \underline{D_k t^{12}}$

$k_x(t_1, t_2) = E[(t_1^6 k - t_1^6 m_k)(t_2^6 k - t_2^6 m_k)]$

$= E[(t_1^6(k-m_k))(t_2^6(k-m_k))]$

$= t_1^6 t_2^6 E[(k-m_k)^2]$

$= t_1^6 t_2^6 Var(k) = \underline{D_k t_1^6 t_2^6}$

$\Rightarrow$ $E[y(t)] = E[x(t)]$

$Var[y(t)] = Var[x(t)]$

$k_y(t_1, t_2) = k_x(t_1, t_2)$

$\therefore$ La esperanza, la covarianza y la varianza de $Y(t)$ y $X(t)$ coinciden