Mario Alberto Rodríguez Morales 1860043 Grupo: 002

Parcial 2 de Procesos Estocásticos

Sea $P_{00}(t) = P_0(t) - E[P_0(t)]$ un proceso simple de Poisson centralizado ("Contador de Poisson centralizado") con la esperanza $E[P_{00}(t)] = 0$ y la intensidad del flujo $\lambda = 3$.

1. Considerar el proceso $X(t) = \int_0^t P_{00}(s)\,ds$. Calcular la esperanzo, la varianza y la covarianza del proceso $X(t)$, ¿Si $X(t)$ es un proceso con incrementos no correlacionados?

$$\exists \frac{dX(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t P_{00}(s)\,ds)\right] = P_{00}(t)$$

Anotación

$E[P_{00}(t)] = 0$

$Var[P_{00}(t)] = Var[P_0(t)]$

$K_{P_{00}(t)}(t_1,t_2) = K_{P_0(t)}(t_1,t_2)$

$$E[X(t)] = E\left[\int_0^t P_{00}(s)\,ds\right] = \int_0^t E[P_{00}(s)]\,ds = \int_0^t 0\,ds = 0$$

$$K_x(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_{P_{00}}(t_1,t_2)\,d\tau_2\,d\tau_1 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} 3\min(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2\,d\tau_1$$

$$\min\{\tau_1,\tau_2\} = \begin{cases} \tau_2 \,;\ \tau_2 \in [0,\tau_1] \\ \tau_1 \,,\ \tau_2 \in [\tau_1,\tau_2] \end{cases}$$

$$K_x(t_1,t_2) = 3\int_0^{t_1}\left[\int_0^{\tau_1} \tau_2\,d\tau_2 + \int_{\tau_1}^{t_2} \tau_1\,d\tau_2\right]d\tau_1 = 3\int_0^{t_1}\left[\frac{\tau_2^2}{2}\Big|_0^{\tau_1} + \tau_1\tau_2\Big|_{\tau_1}^{t_2}\right]d\tau_1$$

$$= 3\int_0^{t_1}\left[\frac{\tau_1^2}{2} + t_2\tau_1 - \tau_1^2\right]d\tau_2 = 3\left[\frac{\tau_1^3}{6} + \frac{t_2\tau_1^2}{2} - \frac{\tau_1^3}{3}\Big|_0^{t_1}\right]$$

$$= 3\left[\frac{t_1^3}{6} + \frac{t_2t_1^2}{2} - \frac{t_1^3}{3}\right] = 3\left[\frac{t_2t_1^2}{2} - \frac{t_1^3}{6}\right] = \frac{3t_2t_1^2}{2} - \frac{t_1^3}{2}$$

$$K_x(t_1,t_2) = \begin{cases} \dfrac{3t_1^2t_2}{2} - \dfrac{t_1^3}{2} \,;\ t_1 \le t_2 \\[2ex] \dfrac{3t_1t_2^2}{2} - \dfrac{t_2^3}{2} \,;\ t_2 \le t_1 \end{cases}$$

$Var[X(t)] = K_X(t,t) = \frac{3t^3}{2} - \frac{t^3}{2} = \frac{2t^3}{2} = t^3$

$Var[X(\min\{t_1, t_2\})] = \min^3\{t_1, t_2\}$

$\Rightarrow$ Entonces $K_X(t_1, t_2) \neq Var[X(\min\{t_1, t_2\})]$

$\therefore$ $X(t)$ no es un proceso con incrementos no correlacionados.

2. Considerar el proceso $\int_0^t s^3 dP_{oo}(s)$ Calcular la esperanza, la varianza y la covarianza de este proceso, ¿Si es un proceso con incrementos no correlacionados?

$Y(t) = \int_0^t s^3 dP_{oo}(s)$

$E[Y(t)] = \int_0^t s^3 \cdot 0\, ds = \int_0^t 0\, ds = 0$

$Var[Y(t)] = \int_0^t (s^3)^2 \frac{d(3t)}{dt} ds = 3\int_0^t s^6 ds = \frac{3}{7} t^7$

$k_Y(t_1, t_2) = \int_0^{\min(t_1, t_2)} (s^3)^2 \frac{d(3t)}{dt} ds = \frac{3s^7}{7} \Big|_0^{\min(t_1, t_2)} = \frac{3\min^7\{t_1, t_2\}}{7}$

$Var[Y(\min\{t_1, t_2\})] = \frac{3\min^7\{t_1, t_2\}}{7}$

$\Rightarrow$ Entonces $k_Y(t_1, t_2) = Var[Y(\min\{t_1, t_2\})]$

$\therefore$ $Y(t) = \int_0^t s^3 d P_{oo}(s)$ es un proceso con incrementos no correlacionados

3. Considerar el proceso $\int_0^t t^3 dP_{oo}(s)$. Calcular la esperanza, la varianza y la covarianza de este proceso, ¿Si es un proceso con incrementos no correlacionados?

$Y(t) = \int_0^t t^3 dP_{oo}(s) = t^3 \int_0^t dP_{oo}(s) = t^3 X(t)$

Donde $X(t) =$

$E[X(t)] = \int_0^t 1 \cdot 0\, ds = 0$

$Var[X(t)] = \int_0^t 1^2 \left(\frac{d(3t)}{dt}\right) ds = \int_0^t 3 ds = 3t$

$$K_x(t_1,t_2) = \int_0^{\min\{t_1,t_2\}} (1)\,\frac{d(3t)}{dt}\,ds = \int_0^{\min\{t_1,t_2\}} 3\,ds = 3\min\{t_1,t_2\}$$

Así que

$\Rightarrow E[Y(t)] = E[t^3 X(t)] = t^3 E[X(t)] = 0t^3 = 0$

$Var[Y(t)] = Var[t^3 X(t)] = t^6 E[X(t)] = t^6\, 3t = 3t^7$

$K_Y(t_1,t_2) = K_{t^3X(t)}(t_1,t_2) = t_1^3 K_x(t_1,t_2)\, t_2^3$

$= t_1^3\,(3\min\{t_1,t_2\})\, t_2^3$

$K_Y(t_1,t_2) = 3\min^4\{t_1,t_2\}\cdot \max^3\{t_1,t_2\}$

$Var[Y(\min\{t_1,t_2\})] = 3\min^7\{t_1,t_2\}$

$\Rightarrow$ Entonces $K_Y(t_1,t_2) \neq Var[Y(\min\{t_1,t_2\})]$

$\therefore Y(t) = \int_0^t t^3\, dP_{oo}(s)$ no es un proceso con incrementos no correlacionados

4. Considerar el proceso $Y(t) = t^5 P_{oo}(t)$. Calcular la esperanza, la varianza y la covarianza de este proceso, ¿Si es un proceso con incrementos no correlacionados?

$E[Y(t)] = E[t^5 P_{oo}(t)] = t^5 E[P_{oo}(t)] = t^5 0 = 0$

$Var[Y(t)] = Var[t^5 P_{oo}(t)] = t^{10} Var[P_{oo}(t)] = 3t \cdot t^{10} = 3t^{11}$

$E[P_{oo}(t)] = 0$
$Var[P_{oo}(t)] = 3t$
$K_{P_{oo}(t)}(t_1,t_2) = 3\min\{t_1,t_2\}$

$K_Y(t_1,t_2) = K_{t^5 P_{oo}(t)}(t_1,t_2) = t_1^5 K_{P_{oo}}(t_1,t_2)\, t_2^5$

$= t_1^5 t_2^5\,(3\min\{t_1,t_2\})$

$K_Y(t_1,t_2) = 3\min^6\{t_1,t_2\}\cdot \max^5\{t_1,t_2\}$

$Var[Y(\min\{t_1,t_2\})] = 3\min^{11}\{t_1,t_2\}$

$\Rightarrow$ Entonces $K_Y(t_1,t_2) \neq Var[Y(\min\{t_1,t_2\})]$

$\therefore Y(t) = t^5 P_{oo}(t)$ no es un proceso con incrementos no correlacionados

5. Considerar la ecuación diferencial lineal estocástica

$$dz(t) = 3z(t)dt + 2e^{3t} dP_{oo}(t), \quad z(0) = z_0$$

donde z_0 es una variable aleatoria independiente de $P_{oo}(t)$, con la esperanza m_0 y la varianza D_0. Encontrar las fórmulas para la esperanza, la varianza y la covarianza del proceso estocástico $z(t)$.

$$dz(t) = 3z(t)dt + 2e^{3t} dP_{oo}(t)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = 3z(t) + 2e^{3t}\frac{dP_{oo}(t)}{dt}$$

Entonces al resolver se obtiene la solución:

$$\phi(t,\tau) = e^{3(t-\tau)}$$

Así que:

$$z(t) = \phi(t,t_0)\, z(0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)\, 2e^{3t} dP_{oo}(\tau)$$

$$z(t) = e^{3(t-t_0)} z(0) + \int_{t_0}^{t} e^{3(t-\tau)} 2e^{3t} dP_{oo}(\tau)$$

Tomando $t_0 = 0$

$$z(t) = e^{3t} z_0 + \int_0^t 2e^{3t} e^{3t} e^{-3\tau} dP_{oo}(\tau)$$

$$z(t) = e^{3t} z_0 + 2e^{6t} \int_0^t e^{-3\tau} dP_{oo}(\tau)$$

Entonces:

$$E[z(t)] = E[e^{3t} z_0] + E\left[\int_0^t 2e^{6t} e^{-3\tau} dP_{oo}(\tau)\right]$$

$$= e^{3t} E[z_0] + 2e^{6t} \int_0^t e^{-3\tau} \cancel{dP_{oo}(\tau)}^{\,0}$$

$$E[z(t)] = e^{3t} m_0$$

$$Var[z(t)] = Var[e^{3t} z_0] + Var\left[2e^{6t}\int_0^t e^{-3\tau} dP_{oo}(\tau)\right]$$

$$= e^{6t} Var[z_0] + 4e^{12t} \int_0^t (e^{-3\tau})^2 \frac{d(3\tau)}{d\tau} d\tau$$

$$= e^{6t} D_0 + 4e^{12t} \int_0^t e^{-6\tau}(3) d\tau$$

$$= e^{6t} D_0 + \frac{12e^{12t}}{6} \int_0^t 6e^{-6\tau} d\tau$$

$$= e^{6t} D_0 + 2e^{12t}(1 - e^{-6t})$$

$$\mathrm{Var}[z(t)] = e^{6t}\left[D_0 + 2e^{6t}(1 - e^{-6t})\right]$$

$$k_z(t_1,t_2) = \mathrm{cov}(e^{3t} z_0) + \mathrm{cov}\left(2e^{6t} \int_0^t e^{-3\tau} dP_{00}(\tau)\right)$$

$$= e^{3t_1} e^{3t_2} \mathrm{Var}[z_0] + 2e^{6t_2} 2e^{6t_1} K_{\int_0^t e^{-3\tau} dP_{00}(\tau)}(t_1,t_2)$$

$$= e^{3t_1} e^{3t_2} D_0 + 2e^{6t_1} 2e^{6t_2} \int_0^{\min\{t_1,t_2\}} (e^{-3\tau})^2 \frac{d(3\tau)}{d\tau} d\tau$$

$$= D_0 e^{3(t_1+t_2)} + 4e^{6(t_1+t_2)} \int_0^{\min\{t_1,t_2\}} 3e^{-6\tau} d\tau$$

$$= D_0 e^{3(t_1+t_2)} + \frac{12 e^{6(t_1+t_2)}}{6} \int_0^{\min\{t_1,t_2\}} 6e^{-6\tau} d\tau$$

$$= D_0 e^{3(t_1+t_2)} + 2e^{6(t_1+t_2)} \left[1 - e^{-6\min\{t_1,t_2\}}\right]$$

$$k_z(t_1,t_2) = e^{3(t_1+t_2)}\left[D_0 + 2e^{3(t_1+t_2)}(1 - e^{-6\min\{t_1,t_2\}})\right]$$