Modelos de Programación Lineal 09|Febrero|2021

Consideraciones en los modelos de programación lineal

- Variables de decisión: Deben cuantificar de manera precisa las decisiones que se tomarán.
- Función objetivo: Maximizar o minimizar la función que establece un objetivo
- Restricciones: Pueden ser múltiples y cada una tiene su propia relación de des (igualdad)
- Naturaleza de las variables: Dependiendo de lo que se esté modelando.

Problema de diseño de menú (dieta), asignación y mochila

Problema de optimizar una dieta

Un comedor desea diseñar un menú para sus comensales a costo mínimo pero proporcionando al menos 2000 calorías de energía, 55 gramos de proteína y 800 miligramos de calcio. Para ello se dispone de los siguientes productos con sus características:

	Información por cada unidad de producto			
	Energía (cal)	Proteína (gr)	Calcio (mg)	Precio ($)
Pan	110	4	2	10
Pollo	205	32	12	85
Huevo	160	13	54	30
Leche	160	8	285	20
Tarta	420	4	22	75
Papas	260	14	80	72

Además se precisa que el menú propuesto no se incluyan más de 4 unidades de pan, ni más de 3 pollo, ni más de 2 de huevo, ni más de 8 leche, ni más de 2 de tarta, ni más de 2 papas. Obtener el modelo matemático para este problema.

Variables

A: Pan
B: Pollo
C: Huevo
D: Leche
E: Tarta
F: Papas

$$\begin{cases} \min\ 10A + 85B + 30C + 20D + 75E + 72D & \text{F.O.} \\ \text{S.A.} & \\ 110A + 205B + 160C + 160D + 420E + 260F \geq 2000 & \text{Rest.} \\ 4A + 32B + 13C + 8D + 4E + 14F \geq 55 & \\ 2A + 12B + 54C + 285D + 22E + 80F \geq 800 & \\ A = 0,1,2,3,4;\ B = 0,1,2,3;\ C, E, F = 0,1,2 & \text{N.V.} \\ D = 0,1,2,3,4,5,6,7,8 & \end{cases}$$

Modelos de Programación Lineal

09/Febrero/2021

Problema de asignación

Se considera un conjunto $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ de máquinas y un conjunto $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots\}$ de tal manera que $|M| = |T|$. Se obtiene un beneficio b_{ij} porque la máquina $m_i \in M$, realice la tarea $t_j \in T$. El objetivo de este problema es maximizar el beneficio total obtenido considerando que cada máquina puede asignarse solamente a una tarea y viceversa.

Formulación

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la máquina } m_i \text{ realiza la tarea } t_j \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c} M \backslash T & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} =1 \\ =1 \\ =1 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \end{matrix} \end{array}$$

$\max z = \sum_i \sum_j b_{ij} x_{ij}$ ← Beneficio total obtenido

S.A.

$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall m_i \in M$ ← A cada máquina se le asigna una tarea

$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall t_j \in T$ ← Cada tarea es realizada por una máquina

$x_{ij} \in \{0, 1\}$

Ejemplos

1. Formular el modelo matemático para el problema de asignación dados los siguientes beneficios

	t_1	t_2	t_3	t_4
m_1	9	21	23	8
m_2	22	19	19	13
m_3	23	12	19	18
m_4	11	16	8	20

Variables

$$x_{ij} \begin{cases} 1, & \text{si la máquina } i \text{ hace la tarea } j \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max\ 9x_{11} + 21x_{12} + 23x_{13} + 8x_{14} + 22x_{21} + 19x_{22} + 19x_{23} + 13x_{24} + 23x_{31} + 12x_{32} \\ \quad + 19x_{33} + 18x_{34} + 11x_{41} + 16x_{42} + 8x_{43} + 20x_{44} \\ \text{S.A.} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \\ x_{ij} = 0, 1, \quad \forall i, j \in \overline{1,4} \end{cases}$$

Programación binaria

Modelos de Programación Lineal 09|Febrero|2021

2. Formular el modelo matemático para el ejercicio considerando los siguientes casos:
   a) La máquina 2 puede realizar solamente las tareas 2 y 3
   Añadir la restricción $X_{21} + X_{24} = 0$

   b) La máquina 2 puede realizar dos tareas
   Modificar $1 \leq X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 2$

Problema de la mochila

Se considera un conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ de artículos o productos y una "mochila", deseando introducir los artículos en dicha mochila, la mochila tiene una capacidad de carga W que no puede ser xcedida, a su vez, cada artículo proporciona un peso p_i y un beneficio b_i, por ir dentro de la mochila. El objetivo de este problema es maximizar el beneficio obtenido por los artículos que van dentro, de tal manera que se cumpla la restricción de la capacidad.

Formulación

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si el artículo } i \text{ va dentro de la mochila} \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

$\max\ z = \sum_i b_i x_i$ ← Beneficio total obtenido

S.A.

$\sum_i x_i p_i \leq W,\ x_i \in \{0,1\}$ ← El peso de los artículos introducidos no debe superar la capacidad de la mochila.

Ejercicios

1. Formular el modelo matemático para el problema de asignación dados los siguientes beneficios

	p_i	b_i	W
a_1	23	24	50
a_2	10	9	
a_3	18	23	
a_4	21	6	

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si el artículo } i \text{ va dentro de la mochila} \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max\ 24X_1 + 9X_2 + 23X_3 + 6X_4 \\ \text{S.A.} \\ 23X_1 + 10X_2 + 18X_3 + 21X_4 \leq 50 \\ X_i \in \{0,1\}\ \forall i \in \overline{1,4} \end{cases}$$

Programación binaria

2. Formular el modelo matemático para el ejercicio 1, considerando los siguientes casos:

a) A lo más pueden escogerse 3 artículos
Añadir la restricción $X_1+X_2+X_3+X_4 \leq 3$

b) El artículo 1 tiene que ir dentro de la mochila (necesario)
Añadir la restricción $X_1=1$

c) El artículo 1 y 2 no pueden ir simultáneamente (incompatibilidad)
Añadir la restricción $X_1+X_2 \leq 1$