# Parcial 3 Inv. de Operaciones

Mario Alberto Rodríguez Morales 1860043 Grupo: 002

100

1. Problema dual de $P_1$

$P_1$: max $x_1 + 2x_2 - 2x_3$

SA $2x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 1$

$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}$

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} \therefore P_1^d: &\min z = y_1 + 5y_2 \\ \text{S.A. } &2y_1 + 4y_2 \geq 1 \\ &y_1 + y_2 \leq 2 \\ &5y_1 + 2y_2 = -2 \\ &y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0 \end{aligned}}$$

2. Sin resolver $P_2$: información acerca de la región factible, solución y valor óptima

$P_2$: min $9x_1 + 6x_2 + 16x_3$

SA: $x_1 + 2x_3 \geq 5$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} \geq \\ \geq \end{pmatrix}$

$P_2^d$: max $z = 5y_1 + 3y_2$

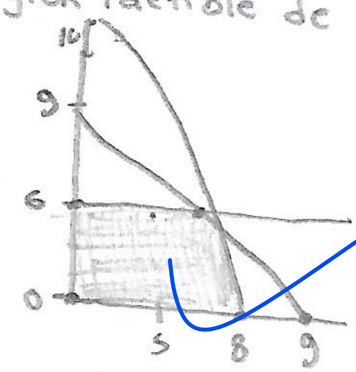
$y_1 + y_2 \leq 9$

$y_2 \leq 6$

$2y_1 + y_2 \leq 16$

$y_1, y_2 \geq 0$

Región factible de $P_2^d$:




$V_1 = (0,0)$
$V_2 = (8,0)$
$V_3 = (7,2)$
$V_4 = (3,6)$
$V_5\ (0,6)$

=> Como $P_2^d$ tiene región factible acotada, quiere decir que $P_2$ es no acotado, pero posee solución óptima

$P_2^d$: tiene sol. óptima en (7, 2) con valor óptimo 41, entonces se debe cumplir el teorema de dualidad fuerte:

$$c^T x^* = b^T y^*$$

$$(9\ 6\ 16)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (5\ \ 3)\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$9x_1 + 6x_2 + 16x_3 = 35 + 6$$

$$9x_1 + 6x_2 + 16x_3 = 41 \quad ①$$

Con álgebra en base a las restricciones

② $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
③ $x_1 + 2x_3 = 5$

① − 6② →

$$\begin{array}{r} 9x_1 + 6x_2 + 16x_3 = 41 \\ -6x_1 - 6x_2 - 6x_3 = -18 \\ \hline 3x_1 + 10x_3 = 23 \end{array} \quad ④$$

de ③: $x_1 = 5 - 2x_3$ ⑤

Sustituyendo ⑤ en ④

$$3(5 - 2x_3) + 10x_3 = 23$$
$$15 - 6x_3 + 10x_3 = 23$$
$$4x_3 = 8$$
$$x_3^* = 2$$

Sustituyendo $x_3 = 2$ en ③

$$x_1 + 2(2) = 5$$
$$x_1 = 5 - 4$$
$$x_1^* = 1$$

Sustituyendo en ②

$$1 + x_2 + 2 = 3$$
$$x_2 = 3 - 3 = 0$$

Comprobando en ①

$$9(1) + 6(0) + 16(2) \stackrel{?}{=} 41$$
$$9 + 0 + 32 \stackrel{?}{=} 41$$
$$41 = 41$$

$$Z(x_1, x_2, x_3) = 9(1) + 6(0) + 16(2) = 41$$

∴ De $P_2^d$ se obtuvo que la región factible de $P_2$ era no acotado pero la solución existe. En base al teorema de dualidad fuerte se obtuvo que la solución óptima es:

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con valor óptimo de 41.

3. Verificar si $(X_1, X_2, X_3) = (0, 2, 0)$ es óptima usando holgura complementaria

$P_3$: $\min\ 9X_1 + 12X_3 + 3X_3$

SA: $X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 1$

$2X_1 + X_2 \geq 2$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

$c = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} \geq \\ \geq \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

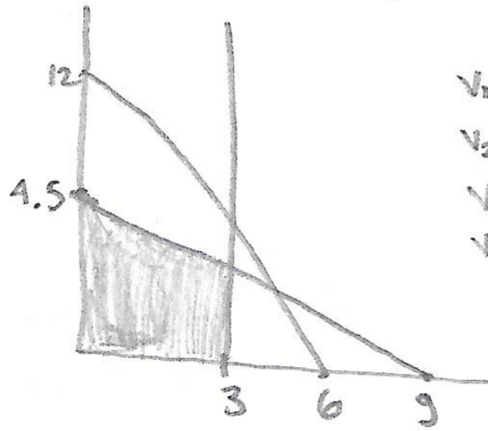
$P_3^d$: $\max z = y_1 + 2y_2$

SA: $y_1 + 2y_2 \leq 9$

$2y_1 + y_2 \leq 12$

$y_1 \leq 3$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$




$V_1 = (0,0)$

$V_2 = (3,0)$

$V_3 = (3,3)$

$V_4 = (0, 4.5)$

$Z_1 = 0$

$Z_2 = 3$

$Z_3 = 9$

$Z_4 = 9$

Hay dos soluciones óptimas.

Probando holgura complementaria para la solución óptima $y^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$x^{*T}(A^T y^* - c) + y^{*T}(b - Ax^*) = 0$

$a + b = 0$

$a = (0\ 2\ 0)\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = (0\ 2\ 0)\left[\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = (0\ 2\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -6$

$b = (3\ 3)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = (3\ 3)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = (3\ 3)\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -9$

$a + b = -6 - 9 = -12 \neq 0$

$\boxed{\therefore \text{Para la solución óptima } y^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ no se cumple el teorema de holgura complementaria}}$

Probando holgura complementaria con $y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.5 \end{pmatrix}$

$$a = (0\ 2\ 0)\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = (0\ 2\ 0)\left[\begin{pmatrix} 9 \\ 4.5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = (0\ 2\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ -7.5 \\ -3 \end{pmatrix} = -15$$

$$b = (0\ 4.5)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = (0\ 4.5)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = (0\ 4.5)\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$a + b = -15 \neq 0$

$\therefore$ No se cumple el teorema de holgura complementaria para $y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.5 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ no es solución óptima para $P_3$

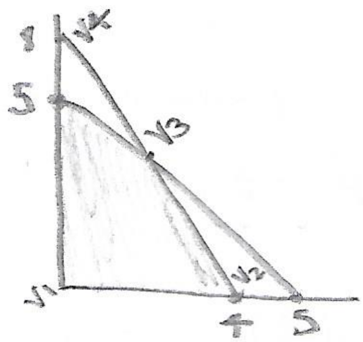
4. Analizar variaciones en $C_1$ y $b_1$

$P_4$: $\max\ x_1 + 2x_2$

SA $x_1 + x_2 \leq 5$

$2x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$




$C_1$

| Valor | $C_1 \in (-\infty, 2)$ | $C_1 = 2$ | $C_1 \in (2, 4)$ | $C_1 = 4$ | $C_1 \in (4, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Sol. Optima | $V_4 = (0,5)$ | $\overline{V_3, V_4}$ | $V_3 = (3,2)$ | $\overline{V_2, V_3}$ | $V_2 = (4,0)$ |
| Val. Optimo | $Z_4 = 10$ | $Z = 10$ | $Z_3 = 3C_1 + 4$ | $Z^* = 16$ | $Z = 4C_1$ |

Cuando $V_3 = V_4$?

$10 = 3C_1 + 4$

$6 = 3C_1$

$C_1 = 2$

Cuando $V_2 = V_3$

$16 = 4C_1$

$C_1 = 4$

$B_1$

| Valor | $B_1 \in (-\infty, 0)$ | $B_1 = 0$ | $B_1 \in (0, 8)$ | $B_1 \in (8, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Sol. Optima | No tiene | $V_1 = (0,0)$ | $V_4 = (0, B_1)$ | $V_5 = (0, 8)$ |
| Valor Optimo | No tiene | $z = 0$ | $z^* = 2B_1$ | $z = 16$ |

* Adjunté los archivos de Geogebra con los que me apoyé en la tarea de Teams.