Mario Alberto Rodríguez Morales 1860043 Grupo: 002

Parcial 2 de Investigación de Operaciones

1. Utilice el método húngaro para determinar la asignación tarea-máquina con menor costo de la siguiente instancia. Además, mencione si dicha asignación es única o si existen múltiples soluciones óptimas y escriba el valor de la función objetivo.

	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5
Máquina 1	17	5	18	10	9
Máquina 2	13	15	16	21	16
Máquina 3	19	11	8	16	20
Máquina 4	8	15	13	19	12
Máquina 5	5	7	8	21	10

$$\min\ 17X_{11}+5X_{12}+18X_{13}+10X_{14}+9X_{15}+13X_{21}+15X_{22}+16X_{23}+21X_{24}+16X_{25}+19X_{31}$$
$$+11X_{32}+8X_{33}+16X_{34}+20X_{35}+8X_{41}+15X_{42}+13X_{43}+19X_{44}+12X_{45}+5X_{51}+$$
$$7X_{52}+8X_{53}+21X_{54}+10X_{55}$$

S.A.
$$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}=1$$
$$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25}=1$$
$$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35}=1$$
$$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}+X_{45}=1$$
$$X_{51}+X_{52}+X_{53}+X_{54}+X_{55}=1$$
$$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}+X_{51}=1$$
$$X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}+X_{52}=1$$
$$X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}+X_{53}=1$$
$$X_{14}+X_{24}+X_{34}+X_{44}+X_{54}=1$$
$$X_{15}+X_{25}+X_{35}+X_{45}+X_{55}=1$$
$$X_{ij}=\begin{cases}1, \text{si realiza la tarea}\\ 0, \text{sino}\end{cases} \quad / \forall i,j \in \overline{1,5}$$

Buscando el mínimo por filas

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Min
M1	17	5	18	10	9	5
M2	13	15	16	21	16	13
M3	19	11	8	16	20	8
M4	8	15	13	19	12	8
M5	5	7	8	21	10	5

=>

Se resta el mínimo a los elementos y se busca el mínimo de las columnas

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
M_1	12	0	13	5	4
M_2	0	2	3	8	3
M_3	11	3	0	8	12
M_4	0	7	5	11	4
M_5	0	2	3	16	5
Min	0	0	0	5	3

Restando el mínimo a los elementos

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
M_1	12	0	13	0	1
M_2	0	2	3	3	0
M_3	11	3	0	3	9
M_4	0	7	5	6	1
M_5	0	2	3	11	2

=>

Trazando líneas para cubrir ceros

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
M_1	12	0	13	0	1
M_2	0	2	3	3	0
M_3	11	3	0	3	9
M_4	0	7	5	6	1
M_5	0	2	3	11	2

=> El mínimo de los elementos no subrayados es 1

Restándolo a los elementos no subrayados

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
M_1	12	0	13	0	1
M_2	0	2	3	3	0
M_3	11	3	0	3	9
M_4	0	6	4	5	0
M_5	0	1	2	10	1

$\Rightarrow$ Cubriendo nuevamente los ceros

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
M_1	12	0	13	0	1
M_2	0	2	3	3	0
M_3	11	3	0	3	9
M_4	0	6	4	5	0
M_5	0	1	2	10	1

$\Rightarrow$ Como se tienen 5 líneas y la matriz tiene 5 filas se ha llegado al final

Tabulado final

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
M_1	12	0	13	0	1
M_2	0	2	3	3	0
M_3	11	3	0	3	9
M_4	0	6	4	5	0
M_5	0	1	2	10	1

$\Rightarrow$ Asignación óptima

$M_1 = T_4$
$M_2 = T_5$
$M_3 = T_3$
$M_4 = T_1$
$M_5 = T_2$

$\Rightarrow$ Costo

$10 + 16 + 8 + 8 + 7 = 49$

$\therefore$ La asignación óptima es aquella donde:

- Máquina 1 realiza la tarea 4
- Máquina 2 realiza la tarea 5
- Máquina 3 realiza la tarea 3
- Máquina 4 realiza la tarea 1
- Máquina 5 realiza la tarea 2

y tiene un costo mínimo de \$49. Esta es la única solución óptima ya que es un problema balanceado (matriz de 5x5).

2. Escriba la forma estándar del problema de programación lineal P_1:

$$P_1: \max\ x_1 + 2X_2 - 2X_3$$
$$SA: 2X_1 + X_2 + 5X_3 \geq 1$$
$$X_2 - 2X_3 \leq -2$$
$$X_1 \geq 0,\ X_2 \leq 0,\ X_3 \in \mathbb{R}$$

$$\min\ -z = -X_1 - 2X_2 + 2X_3 + 0X_4 + 0X_5$$
$$SA: 2X_1 + X_2 + 5X_3 - X_4 = 1$$
$$X_2 - 2X_3 + X_5 = -2$$
$$X_1 \geq 0,\ X_4 \geq 0,\ X_5 \geq 0,\ X_6 \geq 0,\ X_7 \geq 0,\ X_8 \geq 0$$
$$X_6 = -X_2 \qquad X_3 = X^+ + X^- = X_7 - X_8$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow \min\ -z &= -X_1 + 2X_6 + 2X_7 - 2X_8 + 0X_4 + 0X_5 \\ SA: 2X_1 - X_6 + 5X_7 - 5X_8 - X_4 &= 1 \\ -X_6 - 2X_7 + 2X_8 + X_5 &= -2 \\ X_1, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 &\geq 0 \end{aligned}}$$

3. Determine la solución óptima del problema de programación lineal P_2, utilizando el método simplex. Mencione si el problema es acotado o no, en caso de que lo sea, responda si tiene solución única o múltiples soluciones.

$$P_2: \max\ 2X_1 + X_2 + 2X_3$$
$$SA: x_1 + X_2 + 2X_3 \leq 2$$
$$x_1 + 2X_2 + x_3 \leq 2$$
$$2X_1 + x_2 + X_3 \leq 2$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\min\ -z + 2X_1 + X_2 + 2X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 0$$
$$SA: X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 2$$
$$X_1 + 2X_2 + X_3 + X_5 = 2$$
$$2X_1 + X_2 + X_3 + X_6 = 2$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Es un problema acotado

EC	VB	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b	θ
0	z	-1	2	1	2	0	0	0	0	
1	X_4	0	1	1	2	1	0	0	2	2
2	X_5	0	1	2	1	0	1	0	2	2
3	X_6	0	2	1	1	0	0	1	2	1

, sale X_6, entra X_1

EC	VB	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
0	Z	-1	2	1	2	0	0	0	0
1	x_4	0	1	1	2	1	0	0	2
2	x_5	0	1	2	1	0	1	0	2
3	x_1	0	2	1	1	0	0	1	2

$1/2$ $-1/2$ -1

EC	VB	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	θ
0	Z	-1	0	0	1	0	0	-1	-2	
1	x_4	0	0	$1/2$	$3/2$	1	0	$-1/2$	1	$2/3$
2	x_5	0	0	$3/2$	$1/2$	0	1	$-1/2$	1	2
3	x_1	0	1	$1/2$	$1/2$	0	0	$1/2$	1	2

, sale x_4 entra x_3

EC	VB	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
0	Z	-1	0	0	1	0	0	-1	-2
1	x_3	0	0	$1/2$	$3/2$	1	0	$-1/2$	1
2	x_5	0	0	$3/2$	$1/2$	0	1	$-1/2$	1
3	x_1	0	1	$1/2$	$1/2$	0	0	$1/2$	1

$-2/3$ $2/3$ $-1/3$

EC	VB	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
0	Z	-1	0	$-1/3$	0	$-2/3$	0	$-2/3$	$-8/3$
1	x_3	0	0	$1/3$	1	$2/3$	0	$-1/3$	$2/3$
2	x_5	0	0	$4/3$	0	$-1/3$	1	$-1/3$	$2/3$
3	x_1	0	1	$1/3$	0	$-1/3$	0	$2/3$	$2/3$

, como todos los coeficientes de la ec. 0 son menores a 0 se termina

$\hookrightarrow Z = 8/3,\ x_1 = 2/3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2/3,\ x_4 = 0,\ x_5 = 2/3,\ x_6 = 0$

- Como los coeficientes de las variables no básicas son todos menores que cero, la solución optima es única
- El problema es acotado, ya que en ningún caso ocurrio que una variable pudiera salir pero ninguna pudiera entrar.

$\therefore$ La solución óptima es $(2/3, 0, 2/3)$ con un valor óptimo de $8/3$.

4. Resuelva el problema de programación lineal P_3 usando el método de las dos fases. Agregue tantas variables artificiales como sea necesario. Mencione cual es la naturaleza del problema (factible, no factible, acotado, no acotado, solución óptima única, soluciones óptimas múltiples), en caso de que tenga solución óptima escriba el reporte de solución

$$P_3: \max\ x_1+x_2-x_3 \qquad\qquad \min\ -2+X_1+X_2-X_3+0X_4+0X_5=0$$

$$\begin{aligned} SA:\ & X_1+3X_2+5X_3 \geq 5 & & X_1+3X_2+5X_3-X_4=5 \\ & 4X_1+X_2+2X_3 \geq 5 & \Rightarrow\ & 4X_1+X_2+2X_3-X_5=5 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 & & X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{2\times5} \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{no existe la submatriz identidad}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times7} \end{array} \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (X_6, X_7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es la } I_2$$

$$\begin{aligned} & \min\ T - X_6 - X_7 = 0 \\ & X_1+3X_2+5X_3-X_4+X_6=5 \\ & 4X_1+X_2+2X_3-X_5+X_7=5 \\ & X_i \geq 0,\ \forall i \in \overline{1,7} \end{aligned}$$

Fase 1:

EC	VB	T	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b
0	T	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
1	X_6	0	1	3	5	-1	0	1	0	5
2	X_7	0	4	1	2	0	-1	0	1	5

EC	VB	T	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b
0	T	1	1	3	5	-1	0	0	-1	5
1	X_6	0	1	3	5	-1	0	1	0	5
2	X_7	0	4	1	2	0	-1	0	1	5

EC	VB	T	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b	θ
0	T	1	5	4	7	-1	-1	0	0	10	
1	X_6	0	1	3	5	-1	0	1	0	5	1
2	X_7	0	4	1	2	0	-1	0	1	5	5/2

, sale X_6, entra X_3

EC	VB	T	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b
0	T	1	5	4	7	-1	-1	0	0	10
1	X_3	0	1	3	5	-1	0	1	0	5
2	X_7	0	4	1	2	0	-1	0	1	5

1/5 -7/5 -2/5

EC	VB	T	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b	θ
0	T	1	18/5	-1/5	0	2/5	-1	-7/5	0	3	
1	X_3	0	1/5	3/5	1	-1/5	0	1/5	0	1	5
2	X_7	0	18/5	-1/5	0	2/5	-1	-2/5	1	3	5/6

, entra X_1, sale X_7

EC	VB	T	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b
0	T	1	18/5	-1/5	0	2/5	-1	-7/5	0	3
1	X_3	0	1/5	3/5	1	-1/5	0	1/5	0	1
2	X_1	0	18/5	-1/5	0	2/5	-1	-2/5	1	3

5/18

EC	VB	T	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b
0	T	1	18/5	-1/5	0	2/5	-1	-7/5	0	3
1	X_3	0	1/5	3/5	1	-1/5	0	1/5	0	1
2	X_1	0	1	-1/18	0	2/18	-5/18	-1/9	5/18	5/6

-1/5 -18/5

EC	VB	T	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b
0	T	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
1	X_3	0	0	11/18	1	-2/9	1/18	2/9	-1/18	5/6
2	X_1	0	1	-1/18	0	2/18	-5/18	-1/9	5/18	5/6

Como las variables no básicas X_2, X_4 y X_5 son iguales a 0, hay múltiples soluciones óptimas, se procede a fase 2

Fase 2:

EC	VB	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
0	Z	-1	1	1	-1	0	0	0
1	X_3	0	0	11/18	1	-2/9	1/18	5/6
2	X_1	0	1	-1/18	0	2/18	-5/18	5/6

+

EC	VB	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	
0	Z	-1	1	29/18	0	-2/9	1/18	5/6	
1	X_3	0	0	11/18	1	-2/9	1/18	5/6	
2	X_1	0	1	-1/18	0	2/18	-5/18	5/6	-1

EC	VB	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	θ
0	Z	-1	0	5/3	0	-1/3	1/3	0	
1	X_3	0	0	11/18	1	-2/9	1/18	5/6	15/11, sale X_3 entra X_2
2	X_1	0	1	-1/18	0	1/9	-5/18	5/6	

EC	VB	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	
0	Z	-1	0	5/3	0	-1/3	1/3	0	
1	X_2	0	0	11/18	1	-2/9	1/18	5/6	18/11
2	X_1	0	1	-1/18	0	1/9	-5/18	5/6	

EC	VB	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	
0	Z	-1	0	5/3	0	-1/3	1/3	0	
1	X_2	0	0	1	18/11	-4/11	1/11	15/11	-5/3 1/18
2	X_1	0	1	-1/18	0	1/9	-5/18	5/6	

EC	VB	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	θ
0	Z	-1	0	0	-30/11	3/11	2/11	-25/11	
1	X_2	0	0	1	18/11	-4/11	1/11	15/11	—
2	X_1	0	1	0	1/11	1/11	-3/11	10/11	3

, sale X_1 entra X_4

EC	VB	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	
0	Z	-1	0	0	-30/11	3/11	2/11	-25/11	
1	X_2	0	0	1	18/11	-4/11	1/11	15/11	
2	X_4	0	1	0	1/11	1/11	-3/11	10/11	11

EC	VB	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	
0	Z	-1	0	0	-30/11	3/11	2/11	-25/11	
1	X_2	0	0	1	18/11	-4/11	1/11	15/11	
2	X_4	0	11	0	1	1	-3	10	4/11 -3/11

EC	VB	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
0	Z	-1	-3	0	-3	0	1	-5
1	X_2	0	4	1	2	0	-1	5
2	X_4	0	11	0	1	1	-3	10

$\Rightarrow$ X_5 puede entrar pero ninguna VB puede salir

- El problema es no acotado

$\boxed{\therefore \text{ Como el problema es no acotado no hay solución óptima.}}$