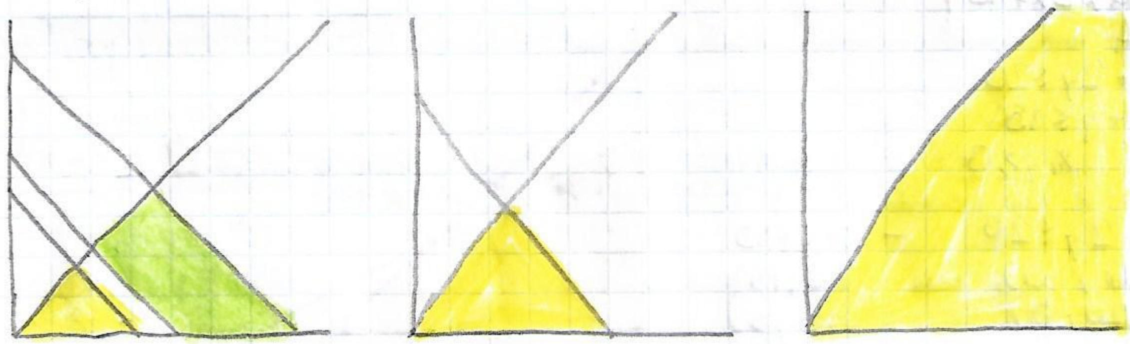
Método Gráfico para Programación Lineal

Método gráfico

El método gráfico es una herramienta matemática para obtener la solución óptima a un problema de programación lineal en el cual se tiene dos variables de decisión. Cada restricción representa una región en el plano cartesiano, al graficar todas las restricciones se determina la región en la que todos los puntos satisfacen las restricciones. A esta región se le conoce como **región factible (Ω)**.

La región factible de un programa lineal puede ser:



Infactible — Acotado — No acotado

La **solución óptima** de un problema de programación matemática (maximización) es aquella solución x^* tal que al evaluarla en la función objetivo se obtiene el mayor valor de la función entre todos los posibles, es decir $f(x^*) \geq f(x)$ para to $x \in \Omega$. A $f(x^*)$ se le conoce como **valor óptimo** del problema. En la programación lineal basta con buscar los puntos extremos de la region factible para determinar la solución óptima. De esta manera, se desea encontrar el punto extremo de la región factible que proporcione mayor función objetivo. Una **restricción redundante** es aquella restricción tal que al omitirse no se ve afectada la región factible

Ejemplos

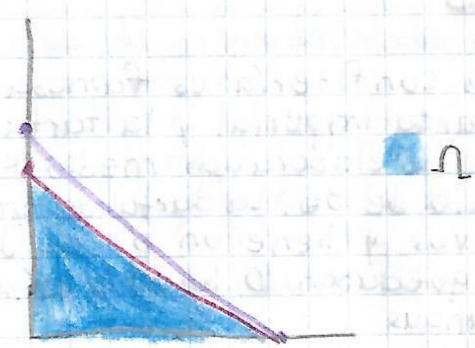
1. $\max\ 4.5x + 5y$

   S.A.

   $6x + 7y \leq 75$

   $4x + 5y \leq 50$

   $x, y \geq 0$



- $6x + 7y \leq 75$

  $(0, 75/7)$

  $(12.5, 0)$

- $4x + 5y \leq 50$

  $(0, 10)$

  $(12.5, 0)$

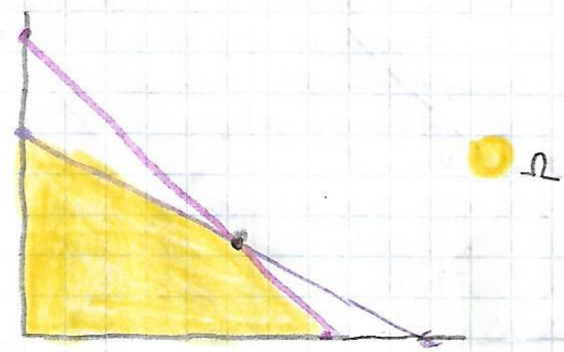
Método Gráfico para Programación Lineal 16|Febrero|2021

$z(x,y) = 4.5x + 5y$
$V_1 = (0,0)$
$V_2 = (12.5, 0)$
$V_3 = (0, 10)$

$z_1 = 0$
$z_2 = 56.25$
$z_3 = 50$

∴ La solución óptima es $V_2 = (12.5, 0)$ con un valor óptimo de 56.25

2. max $8x + 10y$
SA
$x + 2y \leq 20$
$x + y \leq 15$
$x, y \geq 0$



– $x + 2y \leq 20$
(0, 10)
(20, 0)

– $x + y \leq 15$
(0, 15)
(15, 0)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 20 \\ -\underline{x - y = 15} \\ y &= 5 \end{aligned} \rightarrow x + 5 = 15 \rightarrow x = 10$$

$V_1 = (0,0)$
$V_2 = (0,10)$
$V_3 = (10,5)$
$V_4 = (15,0)$

∴ La solución óptima es $V_3 = (10, 5)$ con valor óptimo de 130

$Z(x,y) = 8x + 10y$
$Z_1 = 0$
$Z_2 = 100$
$Z_3 = 130$
$Z_4 = 120$

3. Una confitería es famosa por sus dos especialidades de tartas: la tarta imperial y la tarta de lima. La tarta imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos y tiene un precio de 8€. La tarta de lima necesita 1 kilo de azúcar y 8 huevos y tiene un precio de venta de 10€. En el almacén les quedaban 10 kilos de azúcar y 120 huevos, se busca maximizar ganancias.

Variables: x = tartas imperiales, y = tartas de lima

Método Gráfico para Programación Lineal 23/Febrero/2021

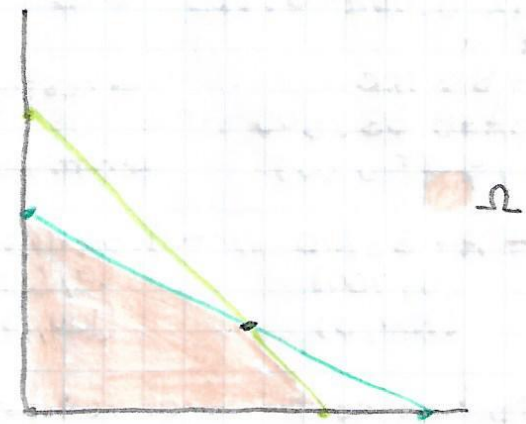
max $8x+10y$ ← F.O

S.A.

$0.5x+y\leq 10$ ← restricciones

$8x+8y\leq 120$

$x,y\in \mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ ← nat. variables



$0.5x+y\leq 10$ $(0,10)$ $(20,0)$

$8x+8y\leq 120$ $(0,15)$ $(15,0)$

> No hay restricciones redundantes

$$\begin{array}{r} 0.5x+y=10 \\ 8x+8y=120 \\ \hline \end{array}$$

$\rightarrow x=10 \rightarrow 5+y=10 \rightarrow y=5$

$$\begin{array}{r} -4x-8y=-80 \\ 8x+8y=120 \\ \hline 4x=40 \end{array}$$

Solución óptima y valor óptimo

$V_1=(0,0)$
$V_2=(0,10)$
$V_3=(10,5)$
$V_4=(15,0)$

$z(x,y)=8x+10y$
$Z_1=0$
$Z_2=100$
$Z_3=130$
$Z_4=120$

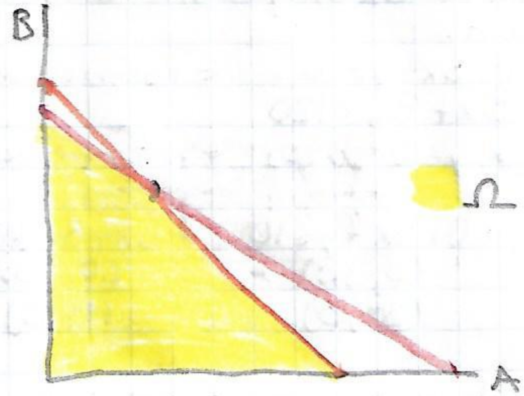
∴ Deben producir 10 tartas imperiales y 5 tartas de lima para obtener máxima de 130€ de acuerdo al inventario disponible.

4. Un comerciante acude a cierto tipo de mercado a comprar naranjas con 500€. Le ofrecen dos tipos de naranjas, las del tipo A a 0.5€ y las de tipo B a 0.8€ el kg. Sabemos que dispone en su furgoneta de un espacio para transportar 700kg de naranjas como máximo y que piensa vender el kilo de naranjas tipo A a 0.58€ y el tipo B a 0.9€. ¿Cuántos kg de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener el beneficio máximo

Variables:
A = Tipo A, B = Tipo B

Método Gráfico para Programación Lineal 23/Febrero/2021

max $0.08A+0.1B$ ← FO
SA
$A+B\leq 700$ ← restricciones
$0.5A+0.8B\leq 500$
$x, y \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ← nat. variables



- $A+B\leq 700$
  (0, 700)
  (700, 0)
- $0.5A+0.8B\leq 500$
  (0, 625)
  (1000, 0)

> No hay restricciones redundantes

$$\begin{array}{r} A+B=700 \\ \underline{-A-1.6B=-1000} \\ -0.6B=-300 \end{array} \rightarrow B=500 \rightarrow A+500=700 \rightarrow A=200$$

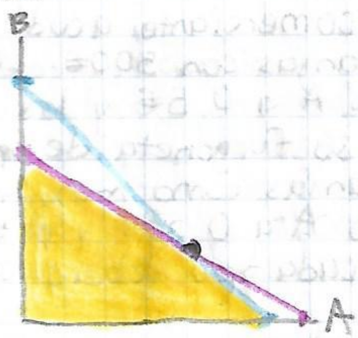
Solución óptima y valor óptima
$V_1=(0,0)$
$V_2=(0,625)$
$V_3=(200,500)$
$V_4=(700,0)$

$Z(A,B)=0.08A+0.1B$
$Z_1=0$
$Z_2=62.5$
$Z_3=66$
$Z_4=56$

∴ El comerciante debe comprar 200kg de naranja tipo A y 500kg de naranja tipo B para poder transportarla y maximizar su beneficio ganando 66€.

5. Un ortebre fabrica dos tipos de joyas, la unidad de tipo A con 1gr de oro y 1.5gr de plata y se vende a 25€. La de tipo B se vende a 30€ y lleva 1.5gr de oro y 1gr de plata. Si solo dispone de 750gr de cada metal, ¿Cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?
Variables; A=Joya Tipo A, B=Joya Tipo B

max $25A+30B$
SA
$A+1.5B\leq 750$
$1.5A+B\leq 750$
$A, B \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$



- $1.5A+B\leq 750$ (0, 750) (500, 0)
- $A+1.5B\leq 750$ (0, 500) (750, 0)

>No hay restricciones redundantes

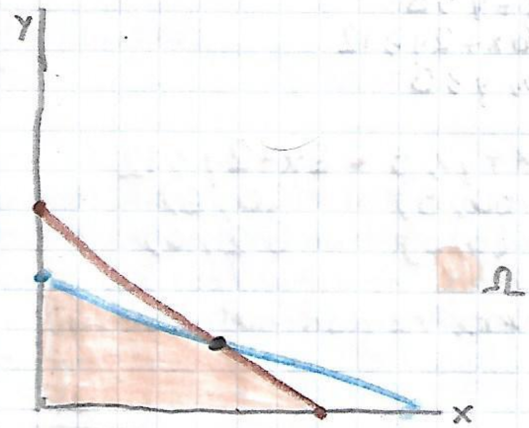
$A = 750 - 1.5B$
$1125 - 2.25B + B = 750 \rightarrow 1.5A = 750 - 300 \rightarrow 300$
$-1.25B = -375$
$B = 300$

Solución óptima y valor óptimo
$V_1 = (0,0)$
$V_2 = (500,0)$
$V_3 = (300,300)$
$V_4 = (0,500)$

$Z(A,B) = 25A + 30B$
$Z_1 = 0$
$Z_2 = 12500$
$Z_3 = 16500$
$Z_4 = 15000$

∴ El artebre debe fabricar 300 piezas de cada tipo para maximizar su beneficio y ganar en total 16500€

6. min $-5x - 5y$
SA
$3x + 5y \leq 30$
$x + 5y \leq 20$
$x, y \geq 0$



$3x + 5y \leq 30$
(0, 6)
(10, 0)

$x + 5y \leq 20$
(0, 4)
(20, 0)

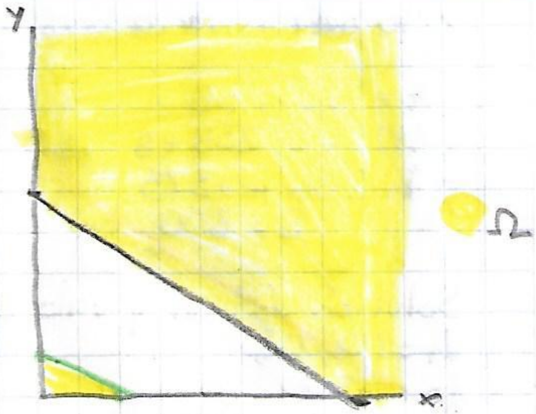
$3x + 5y = 30$
$-x - 5y = 20 \rightarrow x = 5 \rightarrow 5y = 15 \rightarrow y = 3$
$2x = 10$

Solución óptima y valor óptimo
$V_1 = (0,0)$
$V_2 = (0,4)$
$V_3 = (5,3)$
$V_4 = (10,0)$
$z(x,y) = -5x - 5y$
$Z_1 = 0$
$Z_2 = -20$
$Z_3 = -40$
$Z_4 = -50$

∴ La solución óptima es $V_4 = (10,0)$ con valor óptimo de -50

Método Gráfico para Programación Lineal 23|Febrero|2021

7. max $x+y$
SA
$5x+8y \geq 4000$
$2x+y \leq 400$
$x, y \geq 0$

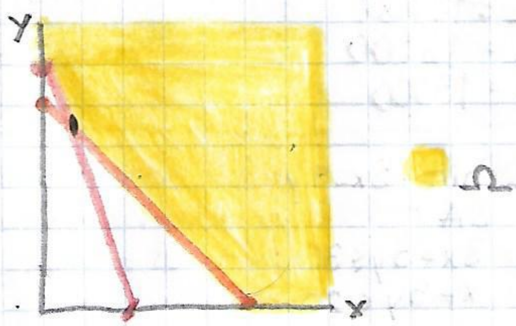


- $5x+8y \geq 4000$
  (0, 500)
  (800, 0)
- $2x+4y \leq 400$
  (0, 100)
  (200, 0)

> Es infactible

$\boxed{\therefore \text{No hay solución óptima}}$

8. max $2x+3y$
SA
$x+y \geq 5$
$6x+2y \geq 12$
$x, y \geq 0$

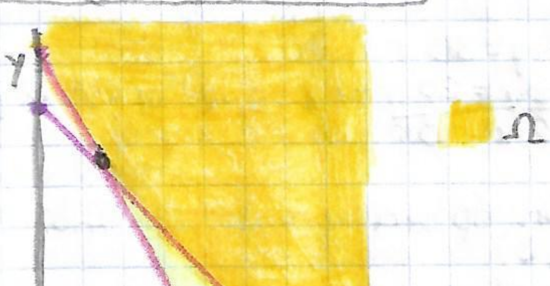


- $x+y \geq 5$
  (0, 5)
  (5, 0)
- $6x+2y \geq 12$
  (0, 6)
  (2, 0)

> Es una región no acotada

$\boxed{\therefore \text{No hay solución óptima}}$

9. min $2x+3y$
SA
$x+y \geq 6$
$2x+y \geq 10$
$x, y \geq 0$



- $x+y \geq 6$
  (0, 6)
  (6, 0)
- $2x+y \geq 10$
  (0, 10)
  (5, 0)

Vértices: $V_1=(5,0)$, $V_2=(4,2)$, $V_3=(6,0)$
$Z(x,y)=2x+3y$
$Z_1=10$, $Z_2=14$, $Z_3=12$

$\boxed{\therefore \text{La solución óptima es } V_3=(6,0) \text{ con valor óptimo } 12}$