Proyecto de Análisis Aplicado
Gradiente Conjugado Precondicionado
Dr. Zeferino Parada

1 Introducción

Sean $A \in \mathbb{R}^{nx}$, $\quad b \in \mathbb{R}^n$ tales que A es simétrica y positiva definida. Se resolverá el sistema lineal

$$Ax = b. \tag{1}$$

Supongamos que A es mal condicionada, es decir

$$cond(A) = ||A||||A^{-1}||,$$

es muy grande, donde $||..||$ es una norma matricial consistente.

Sea $C \in \mathbb{R}^{nxn}$ no singular, el sistema lineal (1) es equivalente a

$$C^{-T}Ax = C^{-T}b, \tag{2}$$

para recobrar un sistema lineal con la matriz simétrica positiva definida se realiza el cambio de variable

$$x = C^{-1}\hat{x}.$$

El sistema lineal (2) se convierte en

$$(C^{-T}AC^{-1})\hat{x} = C^{-T}b. \tag{3}$$

Resolver el sistema lineal (3) es equivalente a resolver el problema de minimización cuadrático

$$\text{Min } \frac{1}{2}\hat{x}^T\hat{A}\hat{x} - \hat{b}^T\hat{x}(\equiv \hat{\phi}(\hat{x})). \tag{4}$$

con

$$\hat{A} = C^{-T}AC^{-1}, \;\; \hat{b} = C^{-T}b.$$

La matriz C se escoge de tal manera que $cond(\hat{A})$ no sea tan grande. Este esquema se denomina **precondicionamiento de la matriz** A. Por lo tanto la matriz C depende de A.

2 Precondicionadores

1. Precondicionador de Jacobi.
   Sea $C = \sqrt{diag(A)}$

2. Cholesky incompleto.
   Sean

   $$A^* = A(1:m, 1:m), \quad \text{y} \quad D^* = diag(\sqrt{A(m+1,\ m+1)},\ \ldots,\ \sqrt{A(n,\ n)})$$

   para alguna valor $2 < m < n$.
   Definimos

   $$C = \begin{bmatrix} L^* & 0 \\ 0 & D^* \end{bmatrix}.$$

   donde L^* es el factor de Cholesky de A^*. **Cholesky incompleto**.

3 Gradiente Conjugado Precondicionado

No es necesario usar gradiente conjugado para el problema (4) se puede probar que el método resultante es el siguiente:

Sea $M = C^T C$. La matriz M se le llama el precondicionador.

1. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0 = Ax_0 - b$.
2. Resolver el sistema $My_0 = r_0$ para y_0.
3. $p_0 \leftarrow -y_0,\ k \leftarrow 0$.
4. Mientras $r_k \neq 0$ hacer

   (a)
   $$\alpha_k \leftarrow \frac{r_k^T y_k}{p_k^T A p_k}.$$

   (b)
   $$x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k p_k.$$

   (c)
   $$r_{k+1} \leftarrow r_k + \alpha_k A p_k.$$

   (d) Resolver el sistema lineal para y_{k+1}
   $$My_{k+1} \leftarrow r_{k+1}.$$

   (e)
   $$\beta_k \leftarrow \frac{r_{k+1}^T y_{k+1}}{r_k^T y_k}.$$

   (f)
   $$p_{k+1} \leftarrow -y_{k+1} + \beta_k p_k.$$

   (g)
   $$k \leftarrow k + 1.$$

El caso $C = I_n$ recobra el algoritmo de gradiente conjugado clásico.

Problema #1. Demuestre, algebráicamente, que las relaciones (a)-(g) son los pasos de gradiente conjugado aplicado al sistema lineal (3).

4 Proyecto

Crear una función en Matlab del algoritmo de gradiente conjugado precondicionado de la sección anterior.

function $[x] =$ GCPre (A, C, b)
% Se resuelve el sistema lineal, $A * x = b$ por medio de gradiente conjugado.
% usando el precondicionador $M = C^T C$.

Use su función GCPre.m con los siguientes script files:

1. Script **preubapoisson.m**
   con $q = 10,\ 20,\ 30$, recuerde que en este caso $n = q^2$.
2. Script **pruebapascal.m**
   con matrices de Pascal de orden $n = 10, 15, 20$ usando dos precondicionadores, Jacobi y Cholesky incompleto(considere $m = floor(n/3)$.
3. Script **pruebaminij.m**
   con matrices **minij** de orden $n = 100, 150, 200$.

En ambos casos use los precondicionadores, Jacobi y Cholesky incompleto(considere $m = floor(n/3)$). El lado derecho siempre es el vector $b = ones(n, 1)$.

Las salidas deben dar los siguientes valores

Matriz	n	iter	$\|x_{GCPre} - x_{GC}\|_2$

El valor **iter** es el número de iteraciones en que el método se detiene. El vector x_{GCPre} es el vector solución por gradiente conjugado precondicionado. A su vez x_{GC} es la solución con gradiente conjugado.

Qué entregar.

1. En papel la solución completa del problema # 1.

2. Función **GCPre.m** y los script files **pruebapoisson.m**, **pruebapascal.m** y **pruebaminij.m**.

3. Los programas computacionales se empaquetan y se envían al correo electrónico: **zeferino@itam.mx**.
   Se acepta el primer correo con sus funciones empaquetadas, **no habrá correciones ni a los programas ni al envío de los mismos**.

4. **Fecha y hora final de entrega:** Miércoles 28 de octubre a las 16 horas.