Tarea 2

Nombres: Mario Becerra, Miguel Vilchis
Date: Agosto 2016

1.- Demostrar que las siguientes funciones son $\Theta(n^2)$ Mostrar n_0, c_1 y c_2.

Nota: Se dice que una función $f \in \Theta(g(n))$ si existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, con $c_1, c_2 > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumple que

$$c_2 g(n) \leq f(n) \leq c_1 g(n)$$

.

1. $60n^2 + 5n + 1$

   (1)

   La desigualdad: $c_2 n^2 \leq 60n^2 + 5n + 1$
   se cumple si y solo si:
   $c_2 \leq 60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}$

   (2)

   La desigualdad: $c_1 n^2 \geq 60n^2 + 5n + 1$
   se cumple si y solo si:
   $c_1 \geq 60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}$

   De (1) es fácil ver que $\forall n \geq 1$ se tiene que $60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 50 + 5 + 1 = 66$. Y de (2) tenemos que $\forall n \geq 1$ se cumple con $60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 60$. De aquí tomando a $n_0 = 1$, $c_2 = 66$ y $c_1 = 60$ se cumple :

   $$\forall n \geq n_0 \rightarrow 60n^2 \leq 60n^2 + 5n + 1 \leq 66n^2$$

   $\therefore 60n^2 + 5n + 1 \in \Theta(n^2)$

2. $2n^2 - 16n + 35$

   (3)

   La desigualdad: $c_2 n^2 \leq 2n^2 - 16n + 35$
   se cumple si y solo si:
   $c_2 \leq 2 - \frac{16}{n} + \frac{35}{n^2}$

   (4)

   La desigualdad: $c_1 n^2 \leq 2n^2 - 16n + 35$
   se cumple si y solo si:
   $c_1 \geq 2 - \frac{16}{n} + \frac{35}{n^2}$

   Por (3) tenemos que $\forall n \geq 4$ se tiene que $\frac{16}{n} \geq \frac{35}{n^2}$ por lo que $2 \geq 2 - (\frac{16}{n} - \frac{35}{n^2})$. Por otro lado por la desigualdad (4) para valores de $n \geq 16$ se tiene que $2 - \frac{16}{n} + \frac{35}{n^2} \geq 2 - 1 + \frac{35}{n^2} \geq 1$. De esto, tomamos $n_0 = 16$, $c_1 = 2$ y $c_2 = 1$ se cumple :

   $$\forall n \geq 16 \rightarrow n^2 \leq 2n^2 - 16n + 35 \leq 2n^2$$

   $\therefore 2n^2 - 16n + 35 \in \Theta(n^2)$

3. $3n^2 + 2nlog(n)$

   Nota: La función $f(n) = n - log(n)$ es creciente para $n \geq 1$, con lo que $\forall n \geq 1; n \geq log(n)$.

   (5)

   Evidentemente se cumple:
   $3n^2 + 2nlog(n) \geq 3n^2$

   (6)

   Por la nota tenemos que:
   $3n^2 + 2nlog(n) \leq 3n^2 + 2nn$
   $3n^2 + 2nn = 5n^2$

   Como las desigualdades se cumplen $\forall n \geq 1$ y por lo ya mencionado, si tomamos $n_0 = 1$, $c_1 = 5$ y $c_2 = 3$ se cumple:

   $$\forall n \geq 1 \rightarrow 3n^2 \leq 3n^2 + 2nlog(n) \leq 5n^2$$

   $\therefore 3n^2 + 2nlog(n) \in \Theta(n^2)$

4. $2+4+6+...+2n$
Nota: La expresión $2+4+6+...+2n$ es equivalente a:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = 2\sum_{i=1}^{n} i$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i = n*(n-1)$$

(7)

La desigualdad: $c_2 n^2 \leq n^2 - n$
se cumple si y solo si:
$c_2 \leq 1 - \frac{1}{n}$

(8)

La desigualdad: $c_2 n^2 \geq n^2 - n$
se cumple si y solo si:
$c_2 \geq 1 - \frac{1}{n}$

Si tomamos $n_0 = 2$, $c_1 = 1$, y $c_2 = \frac{1}{2}$, con lo que se cumple que :

$$\forall n \geq 2 \rightarrow \frac{1}{2}n^2 \leq n^2 - n \leq n^2$$

$\therefore n^2 + n \in \Theta(n^2)$

5.
```
for i = 1:n
    for j = 1:i
        for k = 1:j
            x = x + 1
```

El costo del código de arriba es

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} c \tag{1}$$

donde c es un costo fijo por operación. Simplificando las sumas en la ecuación 1 se llega a que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} c &= c\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j & (2)\\
&= c\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} & (3)\\
&= \frac{c}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right] & (4)\\
&= \frac{c}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right] & (5)\\
&= an^3 + bn^2 + dn & (6)
\end{aligned}$$

con $a = \frac{c}{6}, b = \frac{c}{2}, d = \frac{c}{3}$.

Con lo que concluimos que la complejidad del código está dada por:

$$p(n) = an^3 + bn^2 + dn.$$

Lo que implica que el polinomio $p(n) \in \Theta(n^3)$. Se sabe que si una función $g \in \Theta(n^3)$ entonces $g \notin \Theta(n^2)$, por lo que $p(n) \notin \Theta(n^2)$.

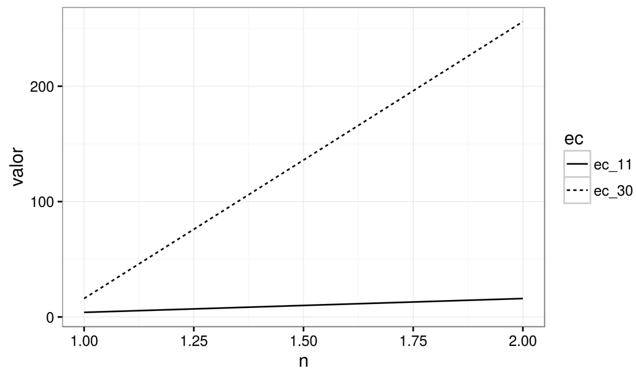
2.- Ordenar las siguientes funciones de acuerdo a su tasa de crecimiento.

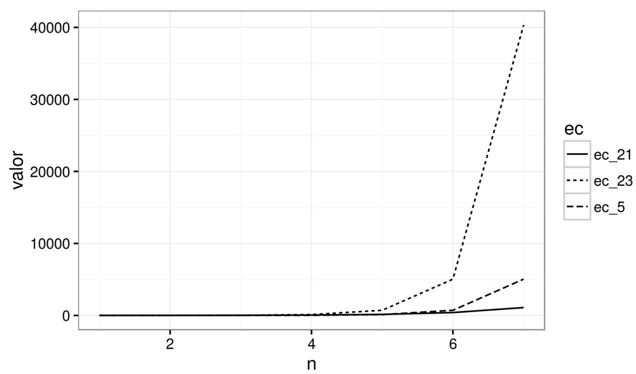
$\lg(\lg^* n)$	$2^{\lg^* n}$	$(\sqrt{2})^{\lg n}$	n^2	$n!$	$(\lg n)!$
$(\frac{3}{2})^n$	n^3	$\lg^2 n$	$\lg(n!)$	2^{2^n}	$n^{1/\lg n}$
$\ln \ln n$	$\lg^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\lg \lg n}$	$\ln n$	1
$2^{\lg n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	e^n	$4^{\lg n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\lg n}$
$\lg^*(\lg n)$	$2^{\sqrt{2 \lg n}}$	n	2^n	$n \lg n$	$2^{2^{n+1}}$

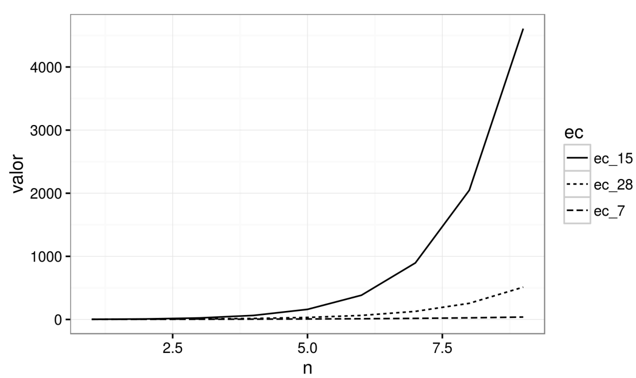
Esto se puede resolver de forma gráfica. El ordenamiento final es

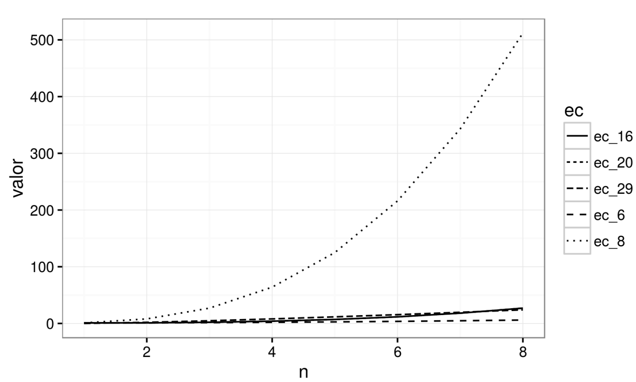
1. $2^{2^{n+1}}$
2. 2^{2^n}
3. $(n+1)!$
4. $n!$
5. e^n
6. $n2^n$
7. 2^n
8. $(\frac{3}{2})^n$
9. $\lg(n)^{\lg(n)} = n^{\lg(\lg(n))}$
10. $(\lg(n))!$
11. n^3
12. $n^2 = 4^{\lg(n)}$
13. $\lg(n!)$
14. $n = 4^{\lg(n)}$
15. $\sqrt{2}^{\lg(n)}$
16. $2^{\sqrt{2\lg(n)}}$
17. $\lg^2(n)$
18. $\ln(n)$
19. $\sqrt{\lg(n)}$
20. $\ln(\ln(n))$
21. $2^{\lg^*(n)}$
22. $\lg^*(n)$
23. $\lg^*(\lg(n))$
24. $\lg(\lg^*(n))$
25. $n^{\frac{1}{\lg(n)}}$
26. 1

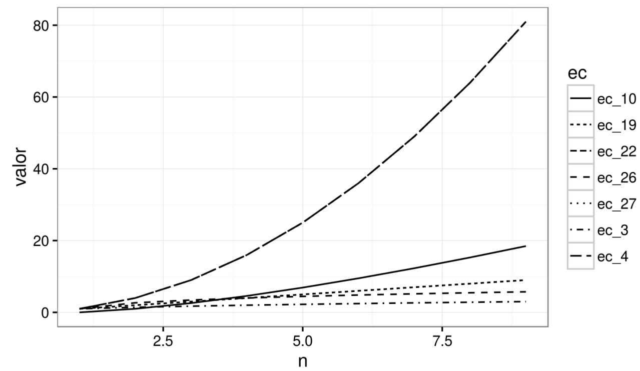
Las gráficas de las funciones se pueden ver a continuación, donde 'ec_n' se refiere a la ecuación n-ésima ecuación yendo de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

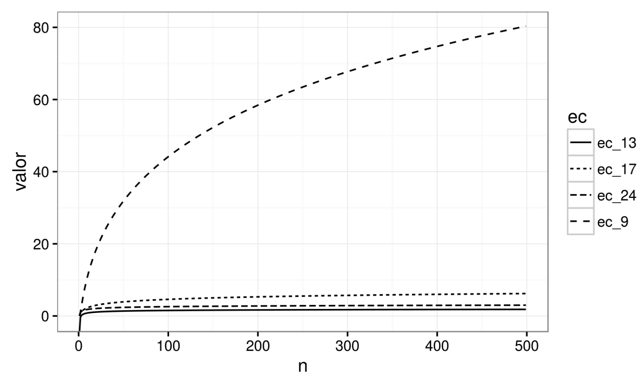

valor
200
100
0
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
n
ec
ec_11
ec_30

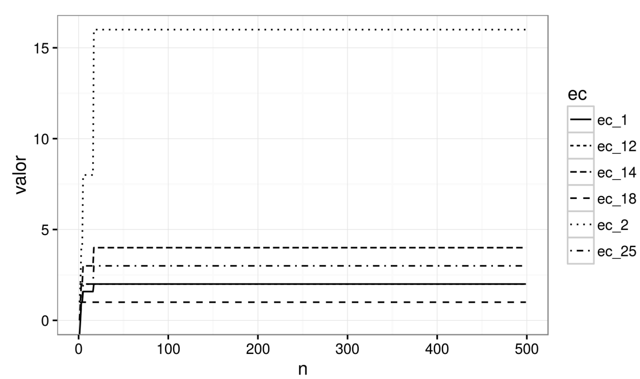

valor
40000
30000
20000
10000
0
2
4
6
n
ec
ec_21
ec_23
ec_5


valor
4000
3000
2000
1000
0
2.5
5.0
7.5
n
ec
ec_15
ec_28
ec_7


valor
500
400
300
200
100
0
2
4
6
8
n
ec
ec_16
ec_20
ec_29
ec_6
ec_8


valor
n
ec
ec_10
ec_19
ec_22
ec_26
ec_27
ec_3
ec_4


valor
n
ec
ec_13
ec_17
ec_24
ec_9


valor
n
ec
ec_1
ec_12
ec_14
ec_18
ec_2
ec_25