

Tarea 2

Nombres: Mario Becerra, Miguel Vilchis

Fecha: Agosto 2016

1.- Demostrar que las siguientes funciones son $\Theta(n^2)$ Mostrar n_0 , c_1 y c_2 .

Nota: Se dice que una función $f \in \Theta(g(n))$ si existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, con $c_1, c_2 > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumple que

$$c_2 g(n) \leq f(n) \leq c_1 g(n)$$

1. $60n^2 + 5n + 1$

(1)

La desigualdad: $c_2 n^2 \leq 60n^2 + 5n + 1$
se cumple si y solo si:
 $c_2 \leq 60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}$

(2)

La desigualdad: $c_1 n^2 \geq 60n^2 + 5n + 1$
se cumple si y solo si:
 $c_1 \geq 60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}$

De (1) es fácil ver que $\forall n \geq 1$ se tiene que $60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 50 + 5 + 1 = 66$. Y de (2) tenemos que $\forall n \geq 1$ se cumple con $60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 60$. De aquí tomando a $n_0 = 1$, $c_2 = 60$ y $c_1 = 66$ se cumple :

$$\forall n \geq n_0 \rightarrow 60n^2 \leq 60n^2 + 5n + 1 \leq 66n^2$$

$\therefore 60n^2 + 5n + 1 \in \Theta(n^2)$

2. $2n^2 - 16n + 35$

(3)

La desigualdad: $c_2 n^2 \leq 2n^2 - 16n + 35$
se cumple si y solo si:
 $c_2 \leq 2 - \frac{16}{n} + \frac{35}{n^2}$

(4)

La desigualdad: $c_1 n^2 \geq 2n^2 - 16n + 35$
se cumple si y solo si:
 $c_1 \geq 2 - \frac{16}{n} + \frac{35}{n^2}$

Por (3) tenemos que $\forall n \geq 4$ se tiene que $\frac{16}{n} \geq \frac{35}{n^2}$ por lo que $2 \geq 2 - (\frac{16}{n} - \frac{35}{n^2})$. Por otro lado por la desigualdad (4) para valores de $n \geq 16$ se tiene que $2 - \frac{16}{n} + \frac{35}{n^2} \geq 2 - 1 + \frac{35}{n^2} \geq 1$. De esto, tomamos $n_0 = 16$, $c_1 = 2$ y $c_2 = 1$ se cumple :

$$\forall n \geq 16 \rightarrow n^2 \leq 2n^2 - 16n + 35 \leq 2n^2$$

$\therefore 2n^2 - 16n + 35 \in \Theta(n^2)$

3. $3n^2 + 2n \log(n)$

Nota: La función $f(n) = n - \log(n)$ es creciente para $n \geq 1$, y además $\forall n \geq 1$ se cumple que $n \geq \log(n)$.

(5)

Evidentemente se cumple:
 $3n^2 + 2n \log(n) \geq 3n^2$

(6)

Por la nota tenemos que:
 $3n^2 + 2n \log(n) \leq 3n^2 + 2nn$
 $3n^2 + 2nn = 5n^2$

Como las desigualdades se cumplen $\forall n \geq 1$ y por lo ya mencionado, si tomamos $n_0 = 1$, $c_1 = 5$ y $c_2 = 3$ se cumple:

$$\forall n \geq 1 \quad 3n^2 \leq 3n^2 + 2n \log(n) \leq 5n^2$$

$\therefore 3n^2 + 2n \log(n) \in \Theta(n^2)$

4. $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$

Nota: La expresión $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ es equivalente a:

$$\sum_{i=1}^n 2i = 2 \sum_{i=1}^n i$$

$$2 \sum_{i=1}^n i = n * (n + 1)$$

(7)

La desigualdad: $c_2 n^2 \leq n^2 - n$
se cumple si y solo si:
 $c_2 \leq 1 - \frac{1}{n}$

(8)

La desigualdad: $c_2 n^2 \geq n^2 - n$
se cumple si y solo si:
 $c_2 \geq 1 - \frac{1}{n}$

Si tomamos $n_0 = 2$, $c_1 = 1$, y $c_2 = \frac{1}{2}$, con lo que se cumple que :

$$\forall n \geq 2 \rightarrow \frac{1}{2}n^2 \leq n^2 - n \leq n^2$$

$$\therefore n^2 + n \in \Theta(n^2)$$

```
5. for i = 1:n
    for j = 1:i
        for k = 1:j
            x = x + 1
```

El costo del código de arriba es

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i c \tag{1}$$

donde c es un costo fijo por operación. Simplificando las sumas en la ecuación 1 se llega a que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i c = c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j \tag{2}$$

$$= c \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} \tag{3}$$

$$= \frac{c}{2} \left[\sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i \right] \tag{4}$$

$$= \frac{c}{2} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right] \tag{5}$$

$$= an^3 + bn^2 + dn \tag{6}$$

con $a = \frac{c}{6}$, $b = \frac{c}{2}$, $d = \frac{c}{3}$.

Con lo que concluimos que la complejidad del código está dada por:

$$p(n) = an^3 + bn^2 + dn.$$

Lo que implica que el polinomio $p(n) \in \Theta(n^3)$. Se sabe que si una función $g \in \Theta(n^3)$ entonces $g \notin \Theta(n^2)$, por lo que $p(n) \notin \Theta(n^2)$.

2.- Ordenar las siguientes funciones de acuerdo a su tasa de crecimiento.

$\lg(\lg^* n)$	$2^{\lg^* n}$	$(\sqrt{2})^{\lg n}$	n^2	$n!$	$(\lg n)!$
$(\frac{3}{2})^n$	n^3	$\lg^2 n$	$\lg(n!)$	2^{2^n}	$n^{1/\lg n}$
$\ln \ln n$	$\lg^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\lg \lg n}$	$\ln n$	1
$2^{\lg n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	e^n	$4^{\lg n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\lg n}$
$\lg^*(\lg n)$	$2^{\sqrt{2 \lg n}}$	n	2^n	$n \lg n$	$2^{2^{n+1}}$

Esto se puede resolver de forma gráfica. El ordenamiento final es

1. $2^{2^{n+1}}$
2. 2^{2^n}
3. $(n+1)!$
4. $n!$
5. e^n
6. $n2^n$
7. 2^n
8. $(\frac{3}{2})^n$
9. $\lg(n)^{\lg(n)} = n^{\lg(\lg(n))}$
10. $(\lg(n))!$
11. n^3
12. $n^2 = 4^{\lg(n)}$
13. $\lg(n!)$
14. $n = 4^{\frac{1}{2} \lg(n)}$
15. $\sqrt{2^{\lg(n)}}$
16. $2^{\sqrt{2 \lg(n)}}$
17. $\lg^2(n)$
18. $\ln(n)$
19. $\sqrt{\lg(n)}$
20. $\ln(\ln(n))$
21. $2^{\lg^*(n)}$
22. $\lg^*(n)$
23. $\lg^*(\lg(n))$
24. $\lg(\lg^*(n))$
25. $n^{\frac{1}{\lg(n)}}$
26. 1

Las gráficas de las funciones se pueden ver a continuación, donde 'ec_n' se refiere a la ecuación n-ésima ecuación yendo de izquierda a derecha y de arriba a abajo.



