TAREA 2

Trinidad Hernández Norma Verónica
Vilchis Domínguez Miguel Alonso

Ejercicio 1

Ejercicio 1

1. **Demostrar si las siguientes funciones son $\theta(n^2)$**

Nota 1. Sea $f(n)$ una función por definición si $f(n) \in \theta(g(n))$ implica que $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $0 \leq c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)$.

a) $60n^2 + 5n + 1$

Por demostrar que $60n^2 + 5n + 1 \in \theta(n^2)$. Por la **Nota 1** implica mostrar las constantes tales que la función queda acotada por n^2 al multiplicarla por dichas constantes. Es decir:

$$c_1 * n^2 \leq 60n^2 + 5n + 1 \leq c_2 * n^2 \tag{1}$$

Sii

$$c_1 \leq 60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \leq c_2$$

Se propone $n_0 = 10$, $c_1 = 59$, $c_2 = 70$ Por lo que

$$59 \leq 60 + \frac{5}{10} + \frac{1}{100} = \frac{6051}{100} \leq 70$$

Ejercicio 1

Con lo que se sigue cumpliendo la desigualdad. Para finalizar la demostración basta con mostrar que la desigualdad se sigue cumpliendo para $n > n_0$ con $n \in \mathbb{N}$.
En efecto, para hacer una buena aproximación de lo que ocurre con n grandes, tomamos el $lim_{n\to\infty}$. Es decir:

$$lim_{n\to\infty}\left(60+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= lim_{n\to\infty}60 + lim_{n\to\infty}\frac{5}{n} + lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$= 60 + 0 + 0$$

Con lo que, se sigue cumpliendo la desigualdad (1)

Ejercicio 1

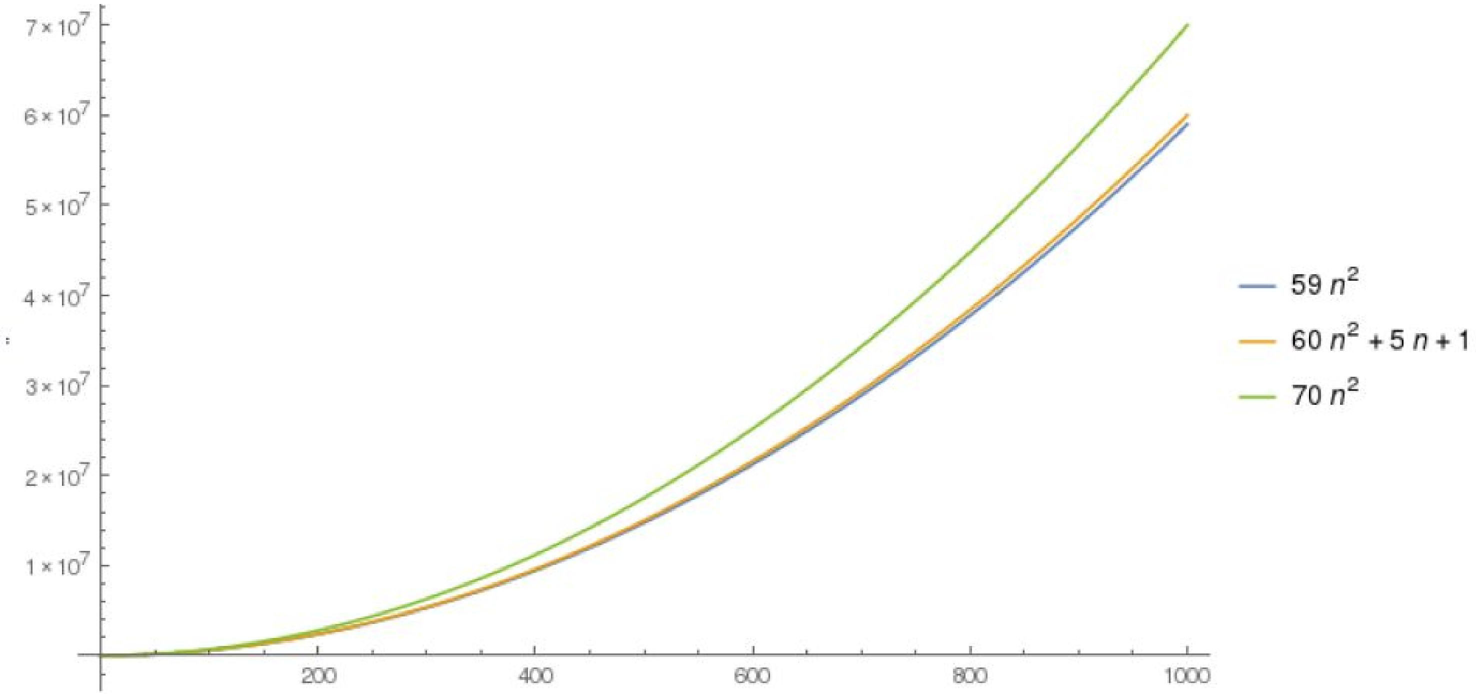


Figura 1: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

Ejercicio 1

b) $2n^2 - 16n + 35$

Siguendo un procedimiento parecido al inciso a, lo que haremos para mostrar que $2n^2 - 16n + 35 \in \theta(n^2)$ será utilizar la definición que se dio en la **Nota 1**, por lo que:

$$c_1 * n^2 \leq 2n^2 - 16n + 35 \leq c_2 * n^2 \tag{2}$$

Sii

$$c_1 \leq 2 - \frac{16}{n} + \frac{35}{n^2} \leq c_2$$

Se propone $n_0 = 16$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 3$ obteniendo:

$$1 \leq 2 - \frac{16}{10} + \frac{35}{256} = \frac{281}{256} \leq 3$$

Ejercicio 1

Tomando el límite cuando n tiende a infinito, para mostrar que la desigualdad se cumple para $n_0 < n \in \mathbb{N}$

$$lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{16}{n}+\frac{35}{n^2}\right)$$
$$=lim_{n\to\infty}2-lim_{n\to\infty}\frac{16}{n}+lim_{n\to\infty}\frac{35}{n^2}$$
$$=2-0+0$$

Con lo que se conserva la desigualdad (2)

Ejercicio 1

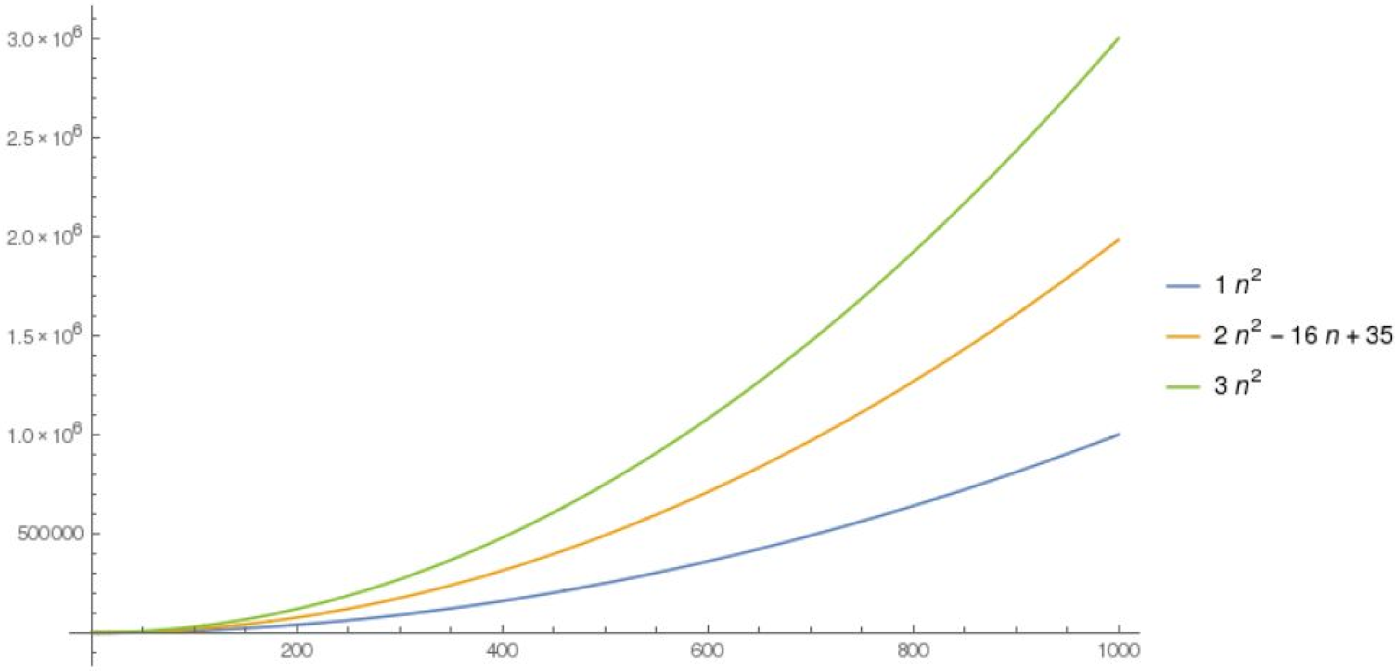


Figura 2: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

Ejercicio 1

$c)$ $3n^2 + 2 * n \ ln \ n$ Por demostrar que $3n^2 + 2 * n \ ln \ n \in \theta(n^2)$, en efecto:

$$c_1 * n^2 \leq 3n^2 + 2 * n \ ln \ n \leq c_2 * n^2 \tag{3}$$

Sii

$$c_1 \leq 3 + \frac{2 * \ ln \ n}{n} \leq c_2$$

Si proponemos $n_0 = 128$, $c_1 = 2$ y $c_2 = 4$ obtenemos:

$$2 \leq 3 + \frac{2 * \ ln \ 128}{128} = 3 + \frac{7}{64} = \frac{199}{64} \leq 4$$

Ejercicio 1

Para demostrar que la desigualdad (3) se cumple para $n_0 < n \in \mathbb{N}$ tomamos $lim_{n\to\infty}$:

$$lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2*\ ln\ n}{n}\right)$$

$$= 3 + lim_{n\to\infty}\frac{2*\ ln\ n}{n}$$

$$= 3 + 0$$

Con lo que la desigualdad (3) se conserva.

Ejercicio 1

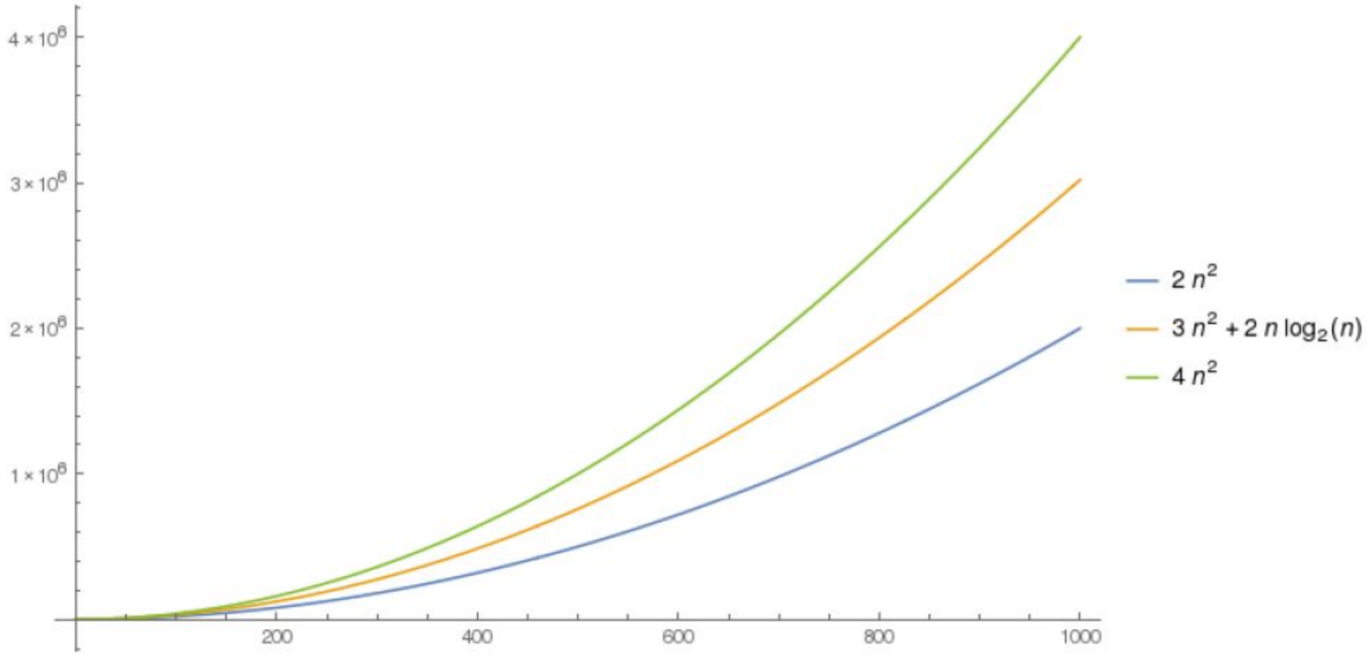


Figura 3: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

Ejercicio 1

d) $2+4+6+...+2m$ Si hacemos $n=\frac{m}{2}$ entonces podemos expresar la suma de la siguiente manera $2*(1+2+...+n)$, lo cual es la suma de los primeros n naturales, con lo que queda representado por

$$2*\left(\frac{(n)*(n+1)}{2}\right)=n^2+n$$

Por lo que el problema se reduce a demostrar que $n^2+n\in\theta(n^2)$, es decir:

$$c_1*n^2\leq n^2+n\leq c_2*n^2 \tag{4}$$

Sii

$$c_1\leq 1+\frac{1}{n}\leq c_2$$

Si tomamos $n_0=10$, $c_1=1$ y $c_2=2$ con lo que:

$$1\leq 1+\frac{1}{10}=\frac{11}{10}\leq 2$$

Ejercicio 1

Tomando el límite cuando n tiende a infinito, para demostrar que la desigualdad se sigue cumpliendo para $n_0 < n \in \mathbb{N}$

$$lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n}$$
$$= lim_{n\to\infty} 1 + lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$
$$= 1 + 0$$

Con lo que la desigualdad (4) se sigue conservando.

Ejercicio 1

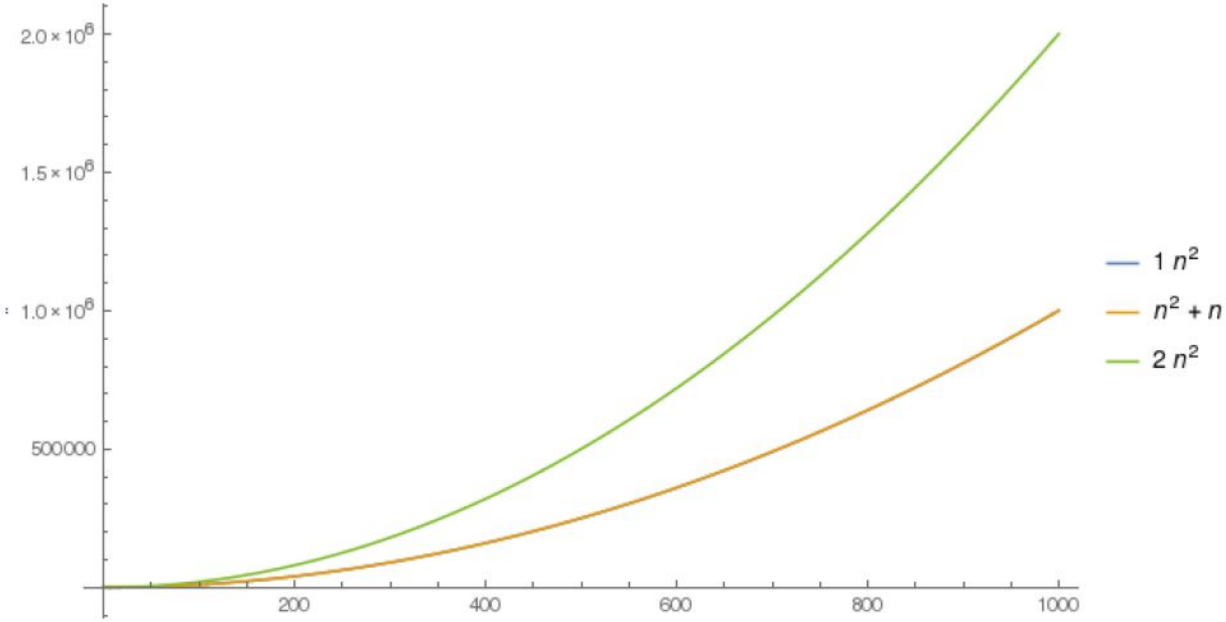


Figura 4: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

Ejercicio 1

e) 1. $for\ i = 1\ to\ n$

2. $\quad for\ j = 1\ to\ i$

3. $\quad\quad for\ k = 1\ to\ i$

4. $\quad\quad\quad x = x + 1$

El análisis de complejidad del código de arriba puede realizarse de la siguiente manera: La línea 1 toma $c_1 * n$ operaciones, que son los incrementos de i y la comparación booleana, para alguna constante c_1, más las asignación inicial la cual es despreciable debido a que se trata de una constante.

Ejercicio 1

En la línea 2, la cantidad de operaciones que se van a realizar son $\sum_{j=1}^{i} c_2 * j$ para alguna constante c_2, note que $c_2 * \sum_{j=1}^{i} j = c_2 * \left(\frac{n*(n+1)}{2}\right)$

Para la línea 3, lo que tenemos es $\sum_{k=1}^{i} c_3 * k^2$, para alguna constante c_3,debido al for de la línea 2 y al propio for de la línea 3, es decir, $c_3 \sum_{k=1}^{i} k^2 = c_3 * \left(\frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}\right)$

Básicamente para la línea 4, lo que tenemos es la misma complejidad que la línea 3, diferido por una constante. i.e. $c_4 * \left(\frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}\right)$

Ejercicio 1

Por lo que la complejidad del código és:

$$c_1 * n + c_2 * \left(\frac{n*(n+1)}{2}\right) + c_3 * \left(\frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}\right) + c_4 * \left(\frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}\right)$$

Multiplicando por 12 y desarrollando obtenemos:

$$c_1' * n + c_2' * (n^2 + n)) + c_3' * (n + 3n^2 + 2n^3) = c_3' * 2n^3 + c_2' * n^2 + c_1' * n + c_0 * n$$

Basta notar que no se cumple $\theta(n^3) \notin \theta(n^2)$, supongamos que se cumple implica que $n < c_n$ para alguna constante c_n, sin embargo siempre se puede dar una n mayor a la constante establecida, y si consideramos la **Nota 1**, implicaría que no podemos encontrar el n_0 tal que $n_0 < n \in \mathbb{N}$ que cumpla con la proposición.

Por lo tanto, el código no se encuentra en el orden de $\theta(n^2)$

Ejercicio 2

Ejercicio 2

El orden que encontramos fue el siguiente:

$$2^{2^{n+1}} > 2^{2^n} > (n+1)! > n! > e^n > n2^n > 2^n > \left(\frac{3}{2}\right) > n^3$$

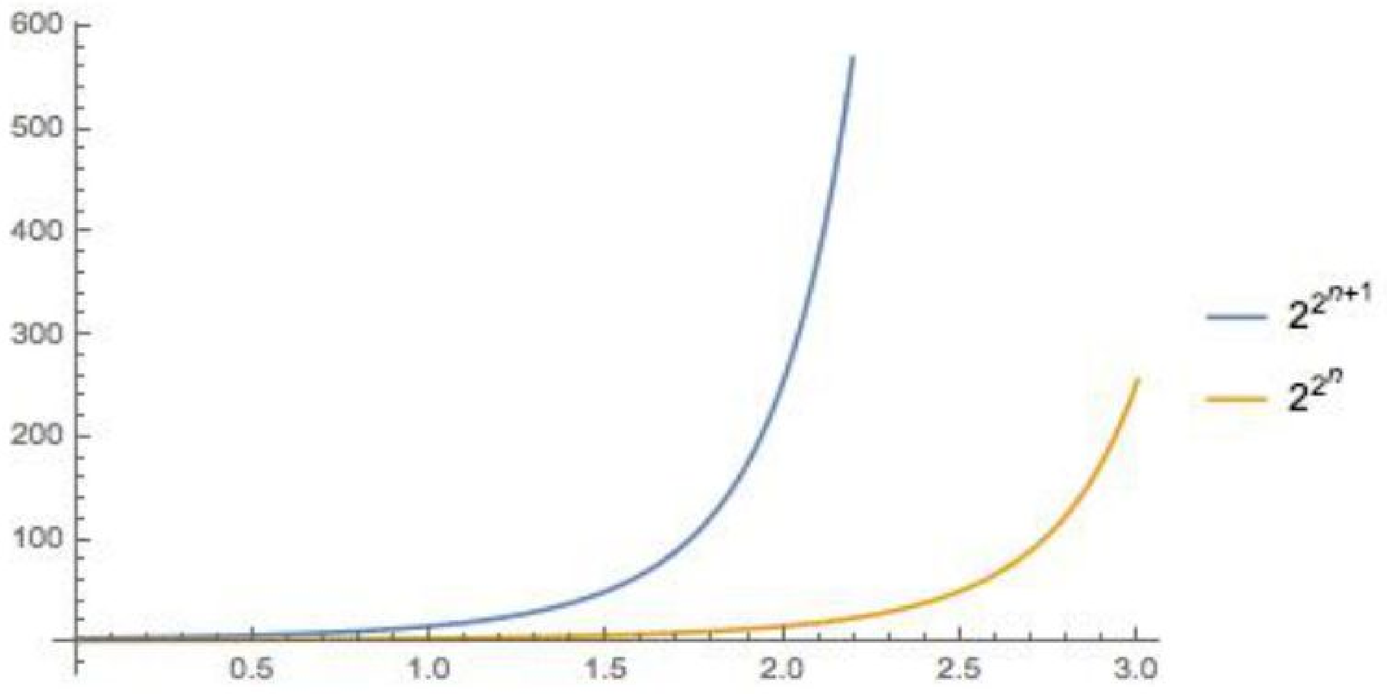
$$> log(n^{log(n)}) = n^{log(log(n))} > 4^{log(n)} = n^2 > (log(n))! > nlog(n)$$

$$> log(n!) > 2^{log(n)} = n > log^2(n) > \sqrt{2}^{log_2(n)} > 2^{\sqrt{2log(n)}}$$

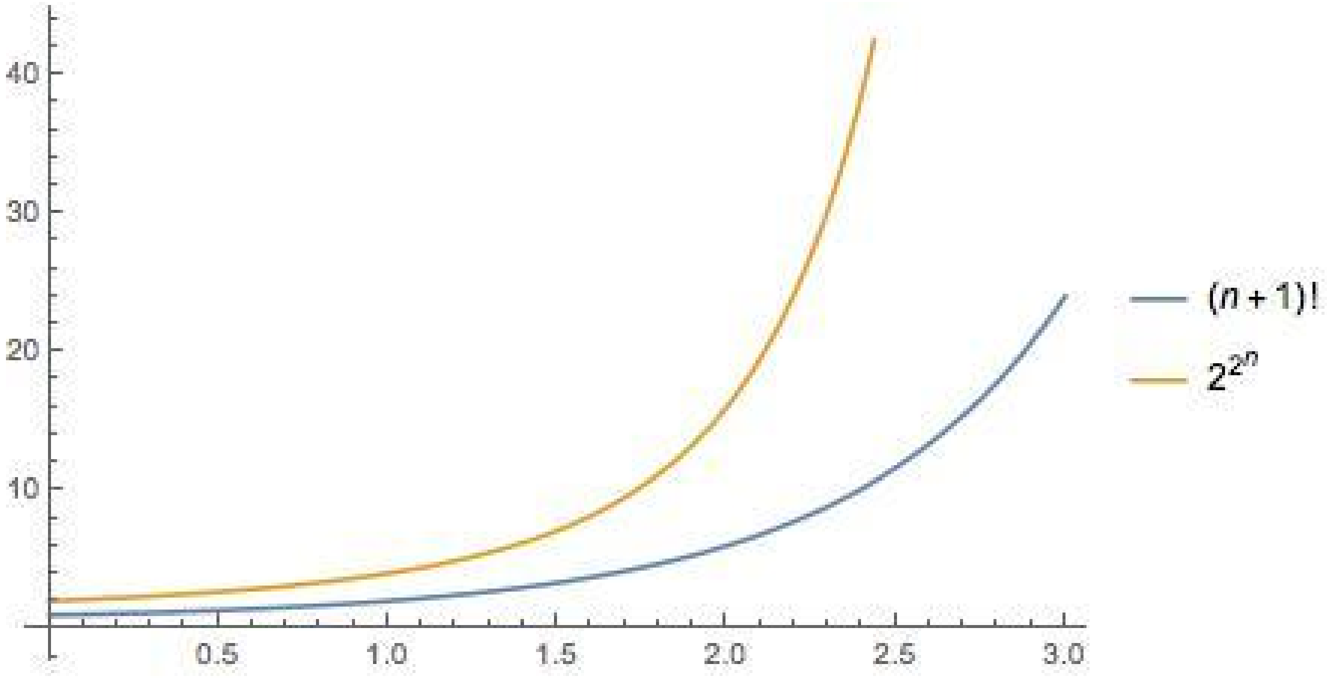
$$> log(n) > 2^{log^*(n)} > \sqrt{log_2(n)} > log^*(n) > ln(ln(n)) > log(log^*(n)) > n^{\frac{1}{log(n)}} = 1$$

Ejercicio 2

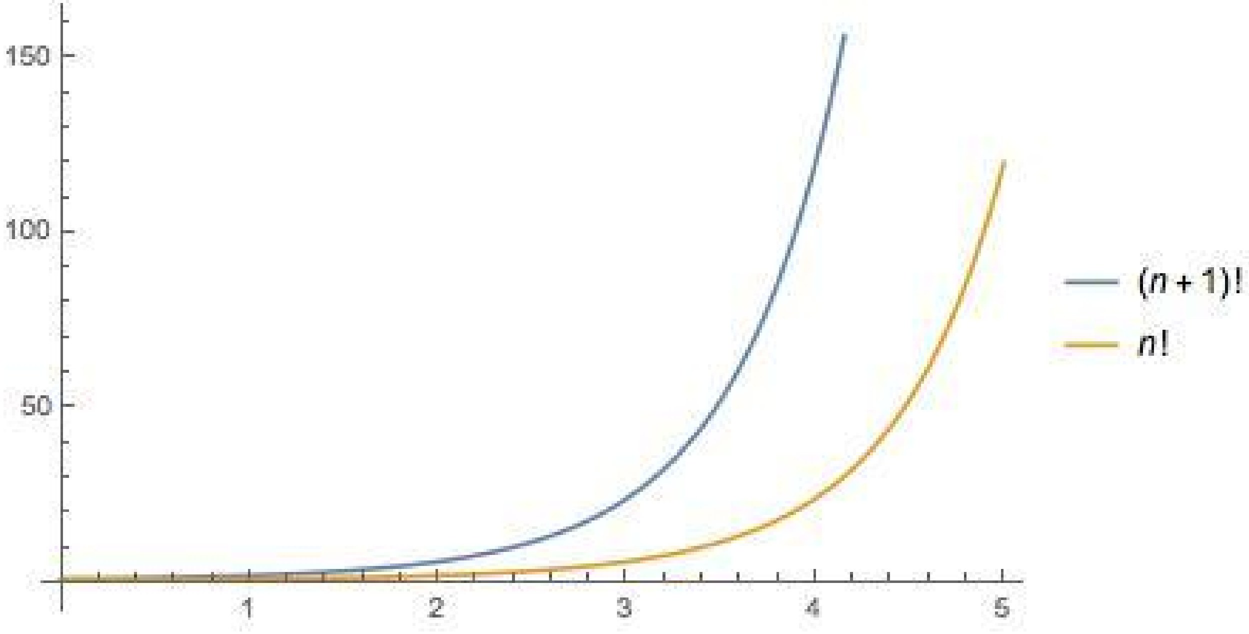
El orden lo obtuvimos por medio de graficación, las gráficas son las siguientes:



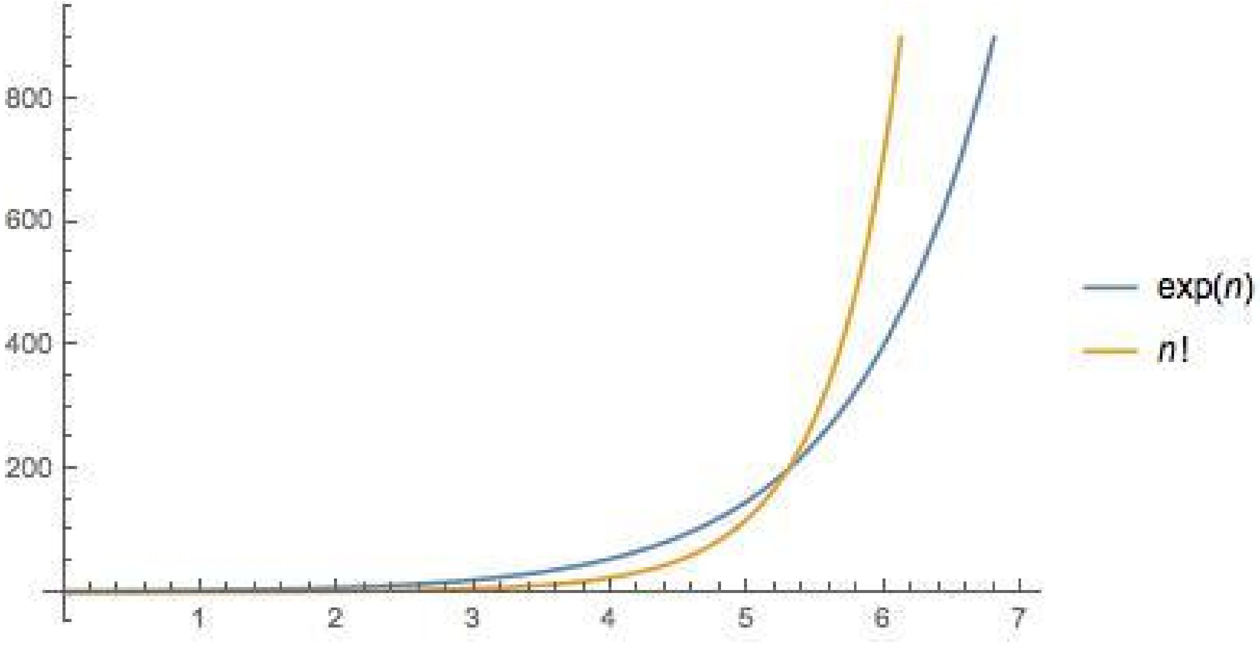
Ejercicio 2



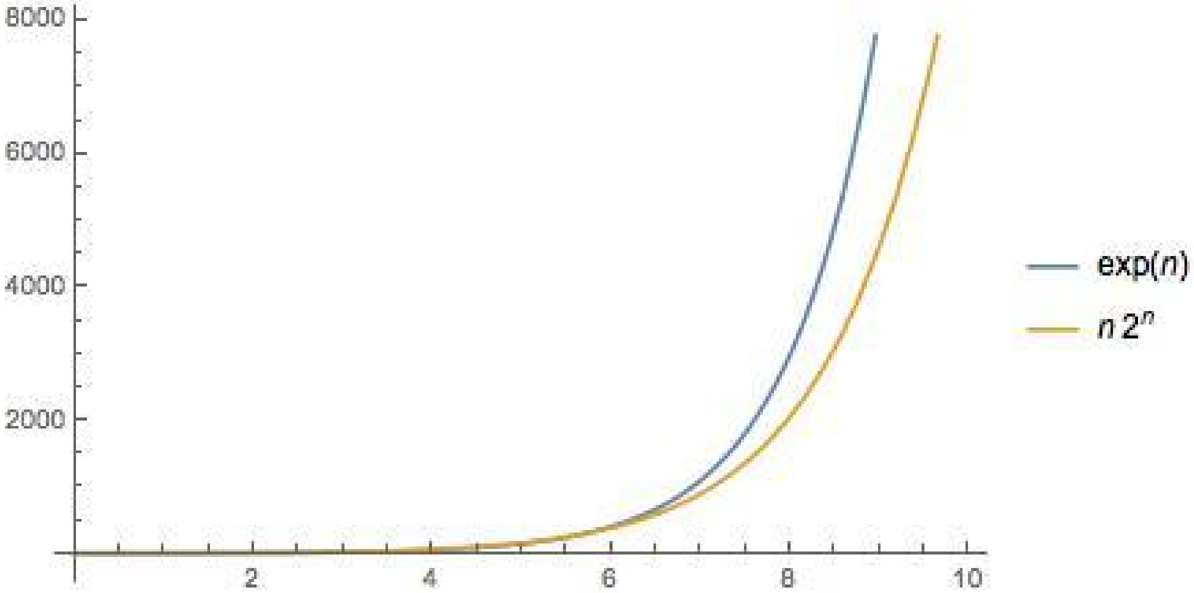
Ejercicio 2



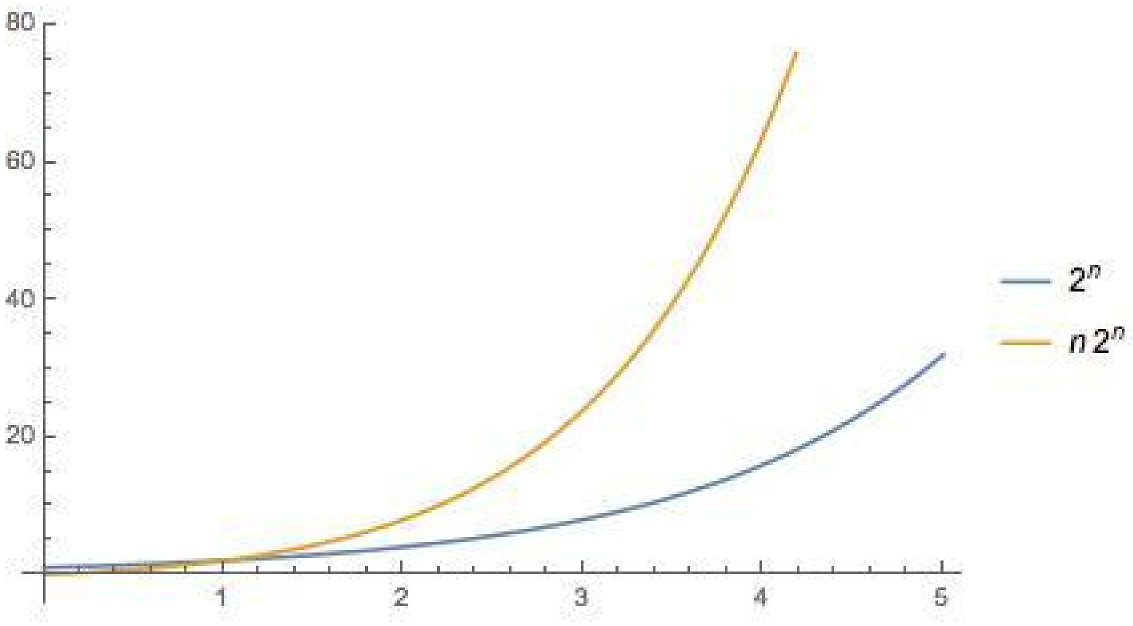
Ejercicio 2



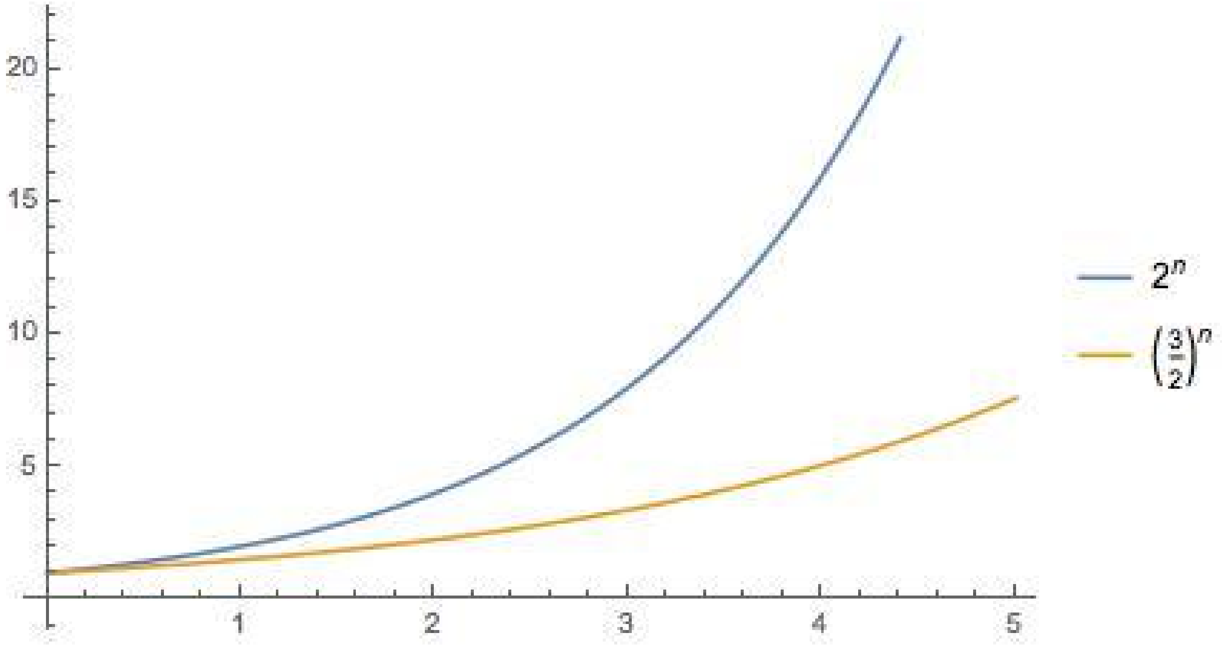
Ejercicio 2



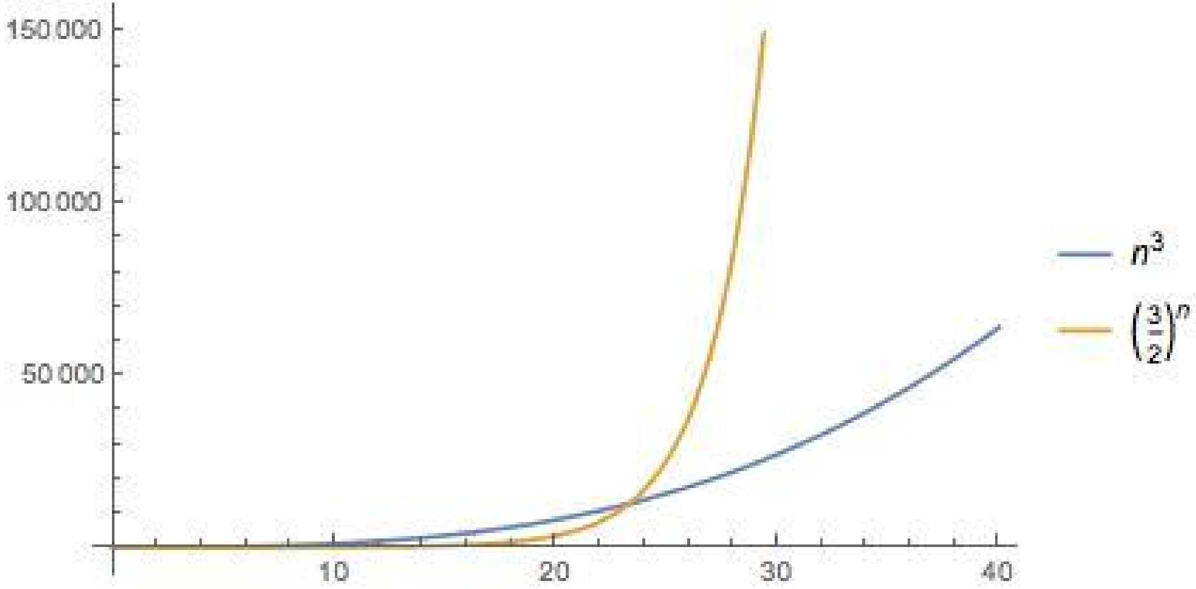
Ejercicio 2



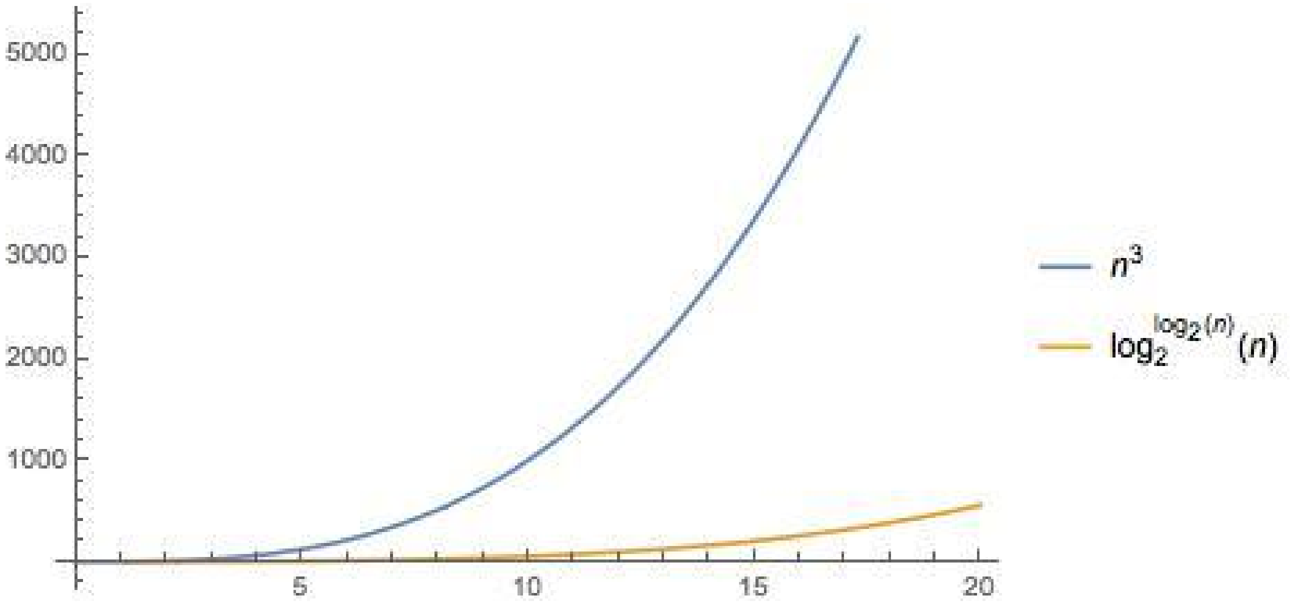
Ejercicio 2



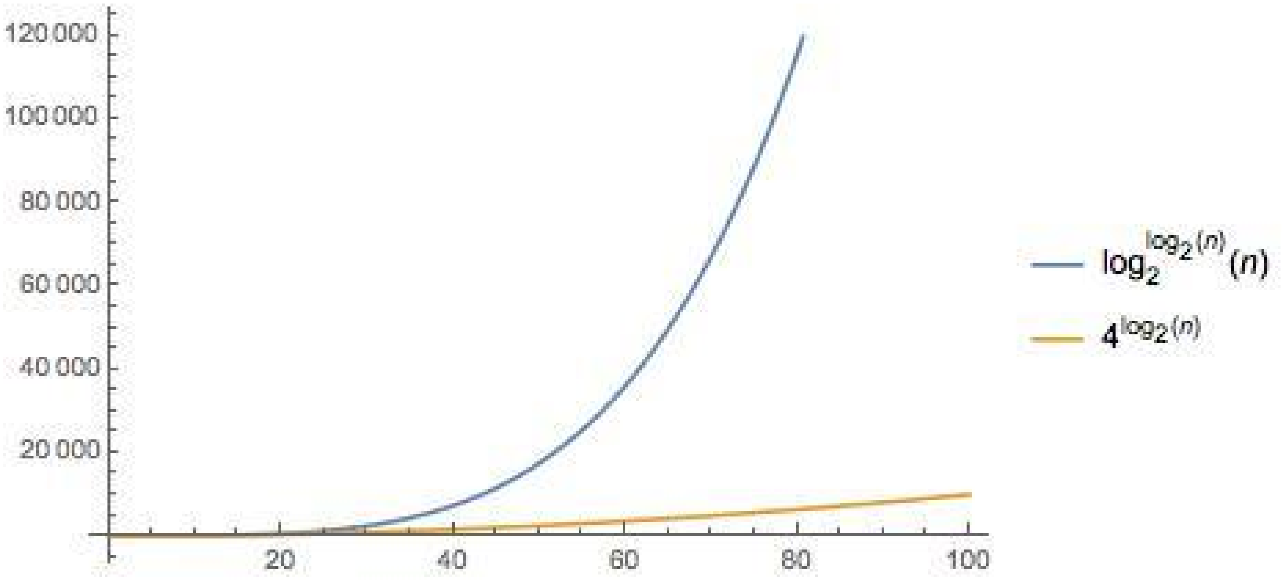
Ejercicio 2



Ejercicio 2

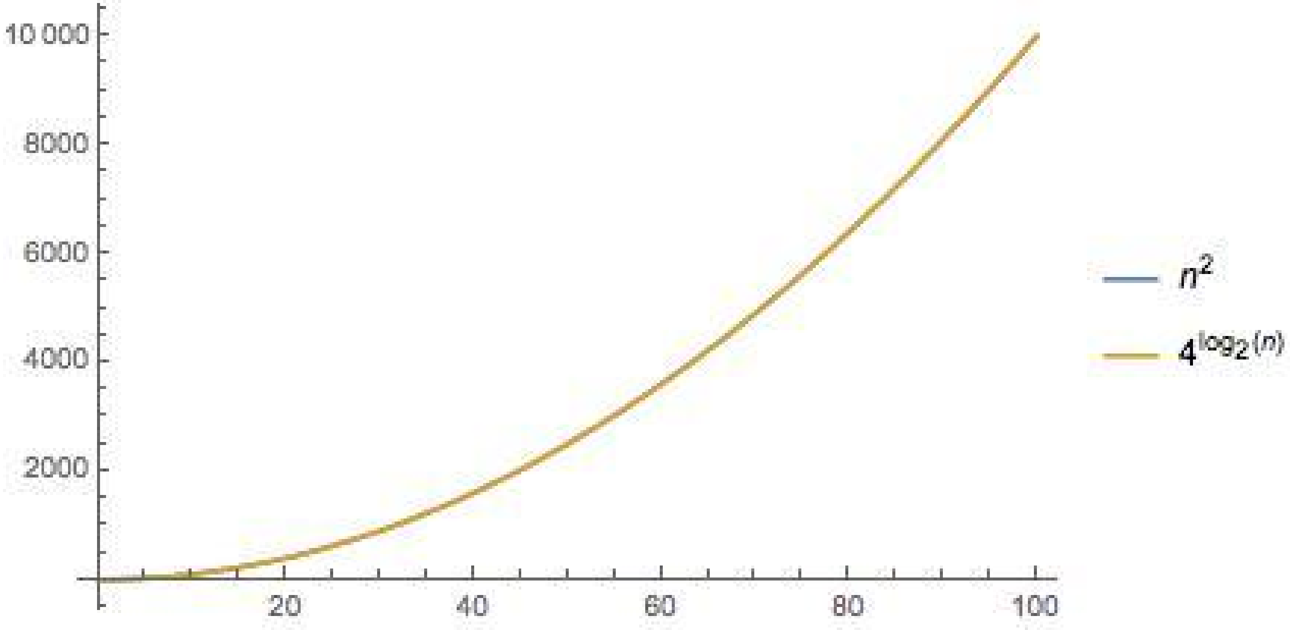


Ejercicio 2

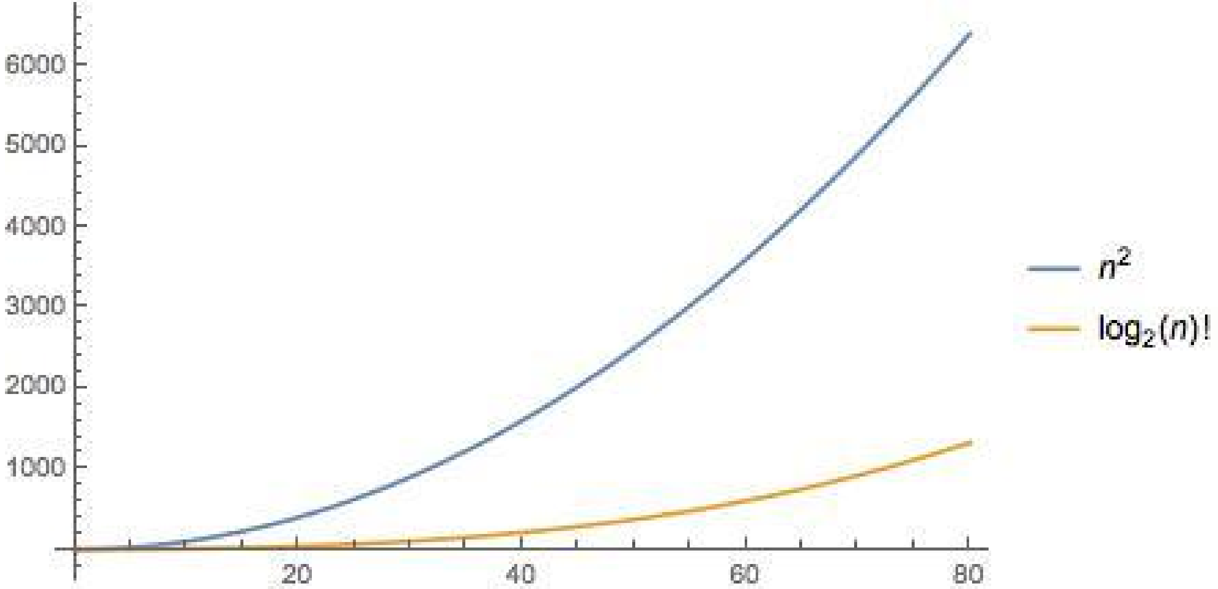


120 000
100 000
80 000
60 000
40 000
20 000
20
40
60
80
100
$\log_2^{\log_2(n)}(n)$
$4^{\log_2(n)}$

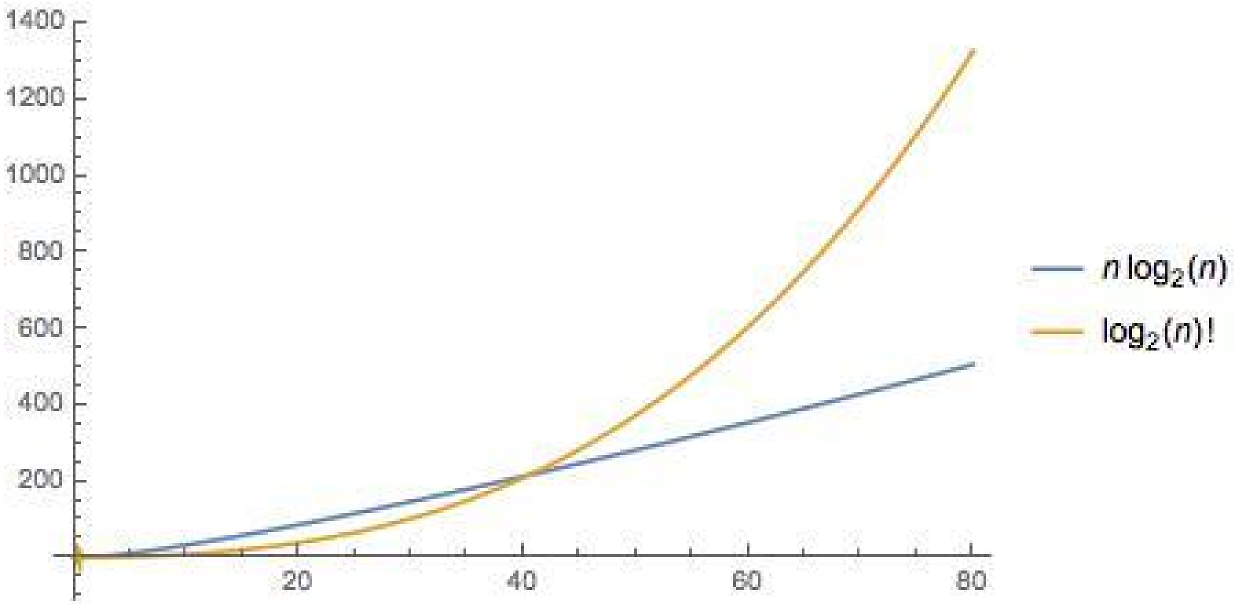
Ejercicio 2



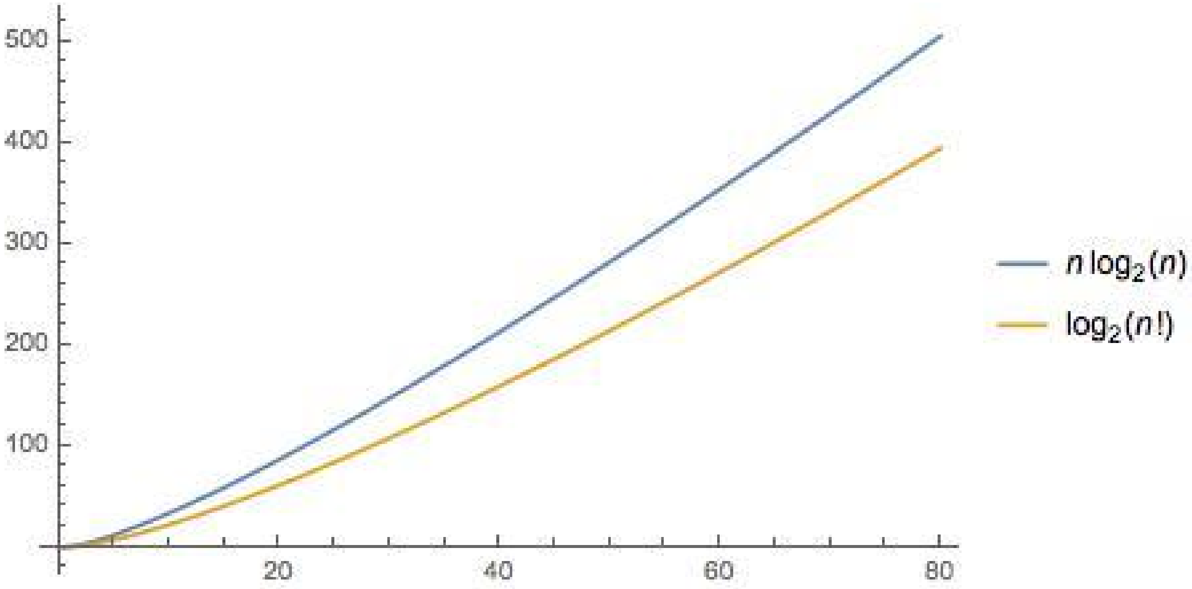
Ejercicio 2



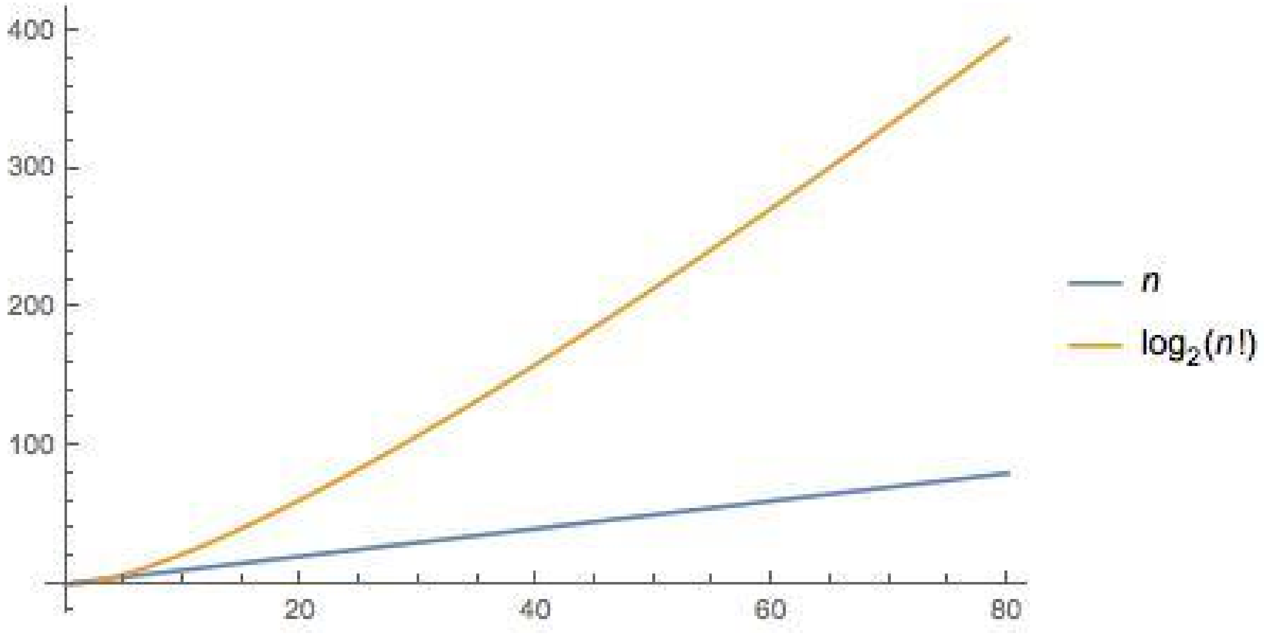
Ejercicio 2



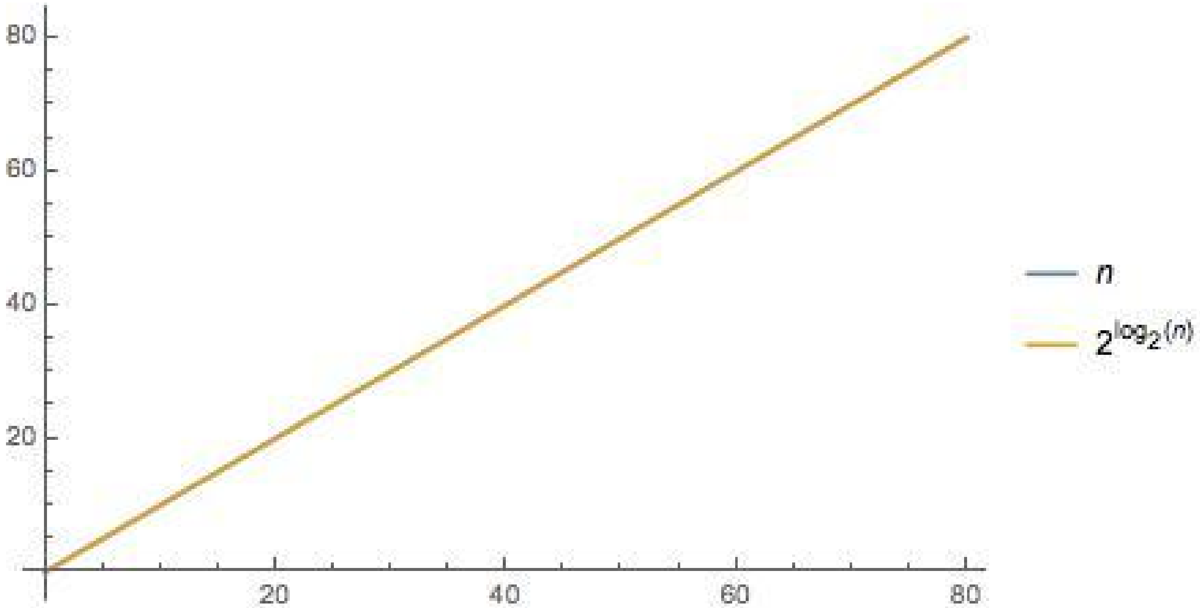
Ejercicio 2



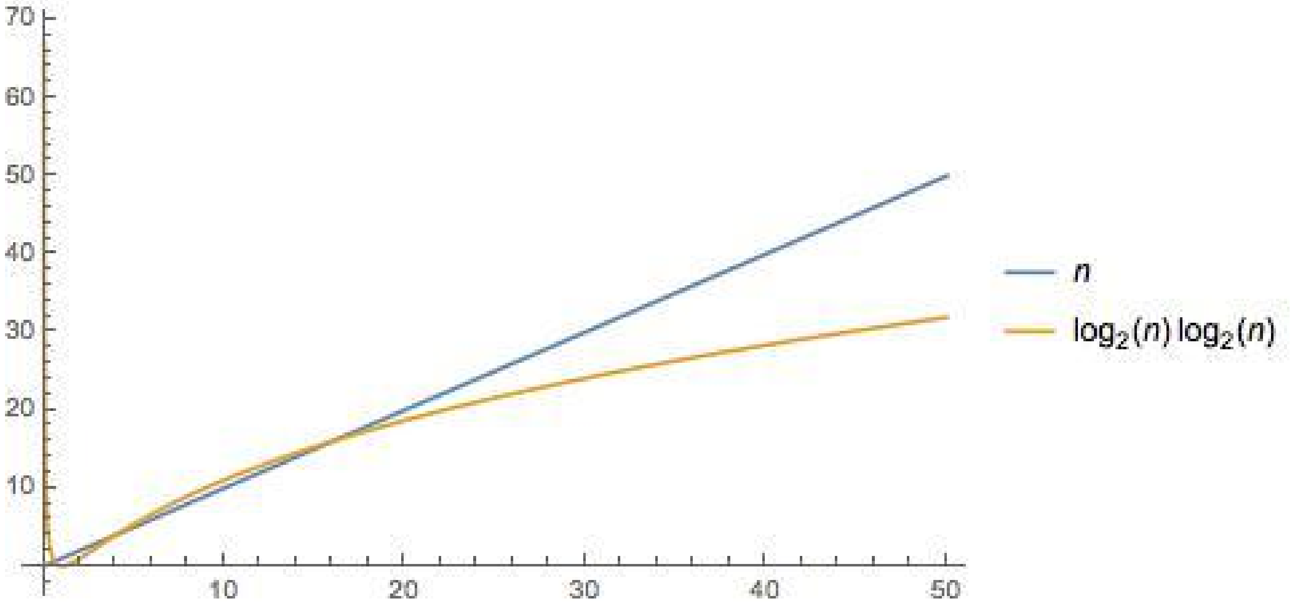
Ejercicio 2



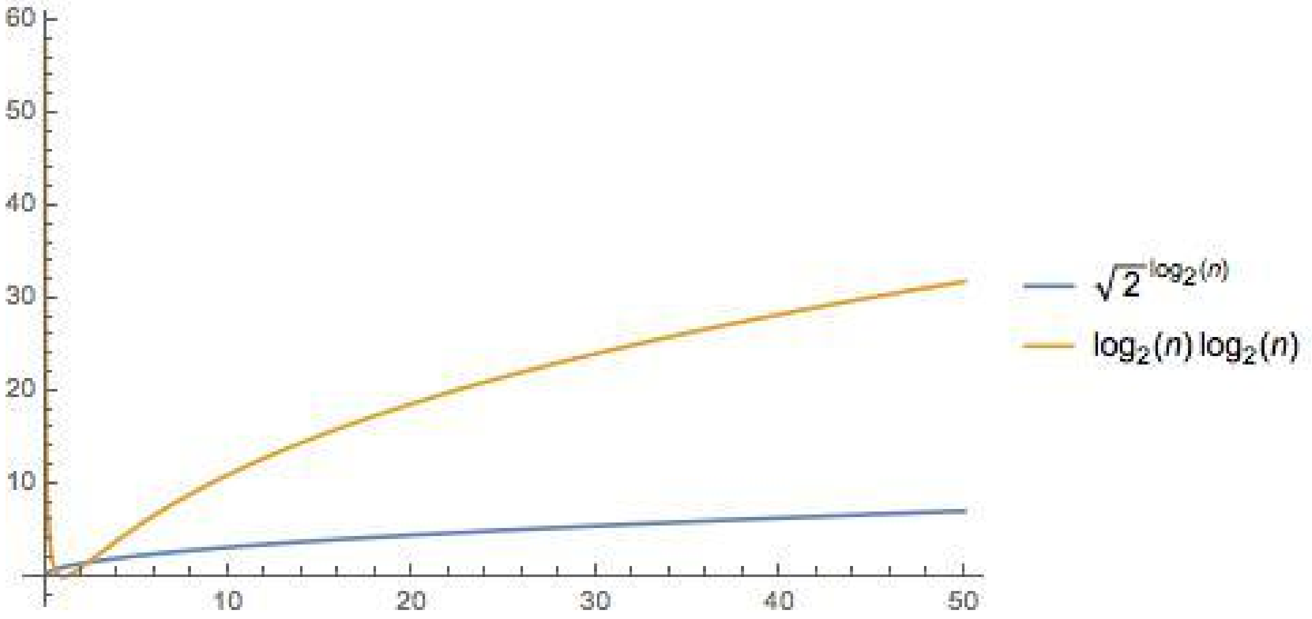
Ejercicio 2



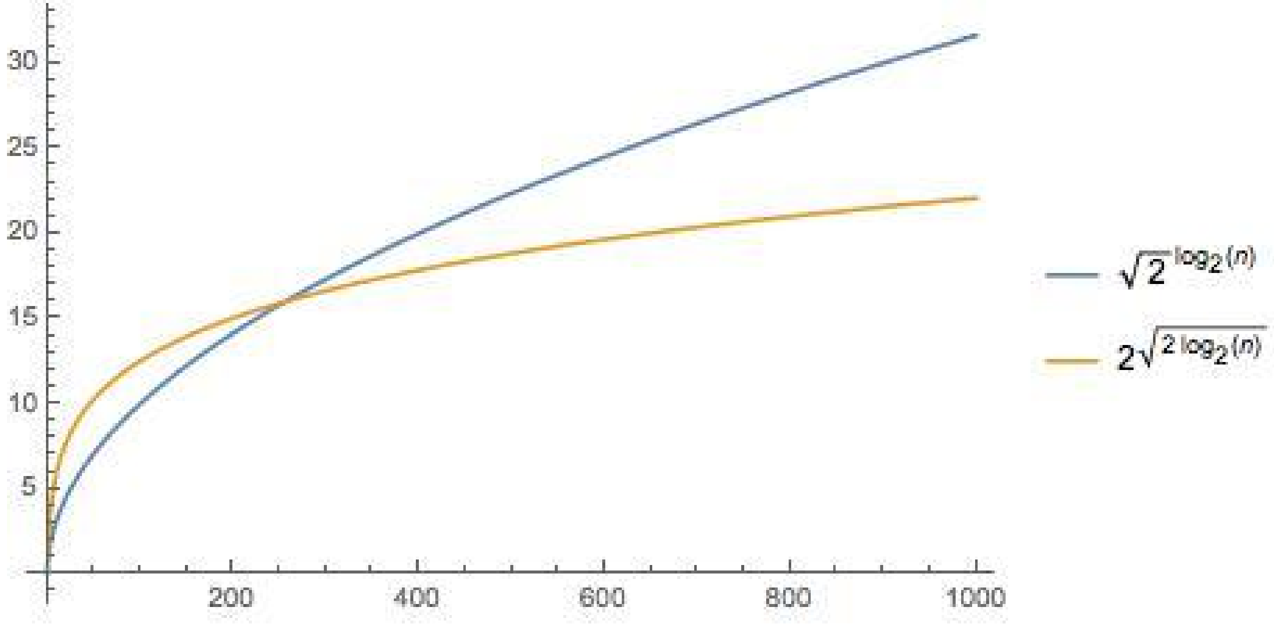
Ejercicio 2



Ejercicio 2

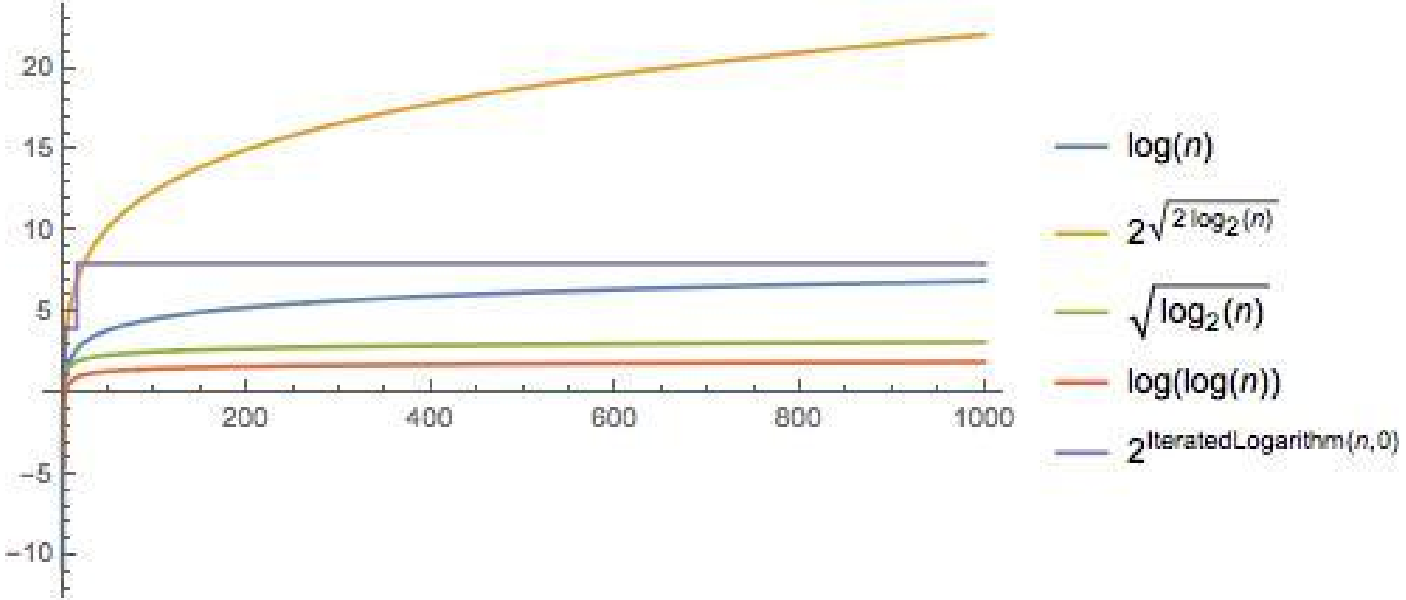


Ejercicio 2

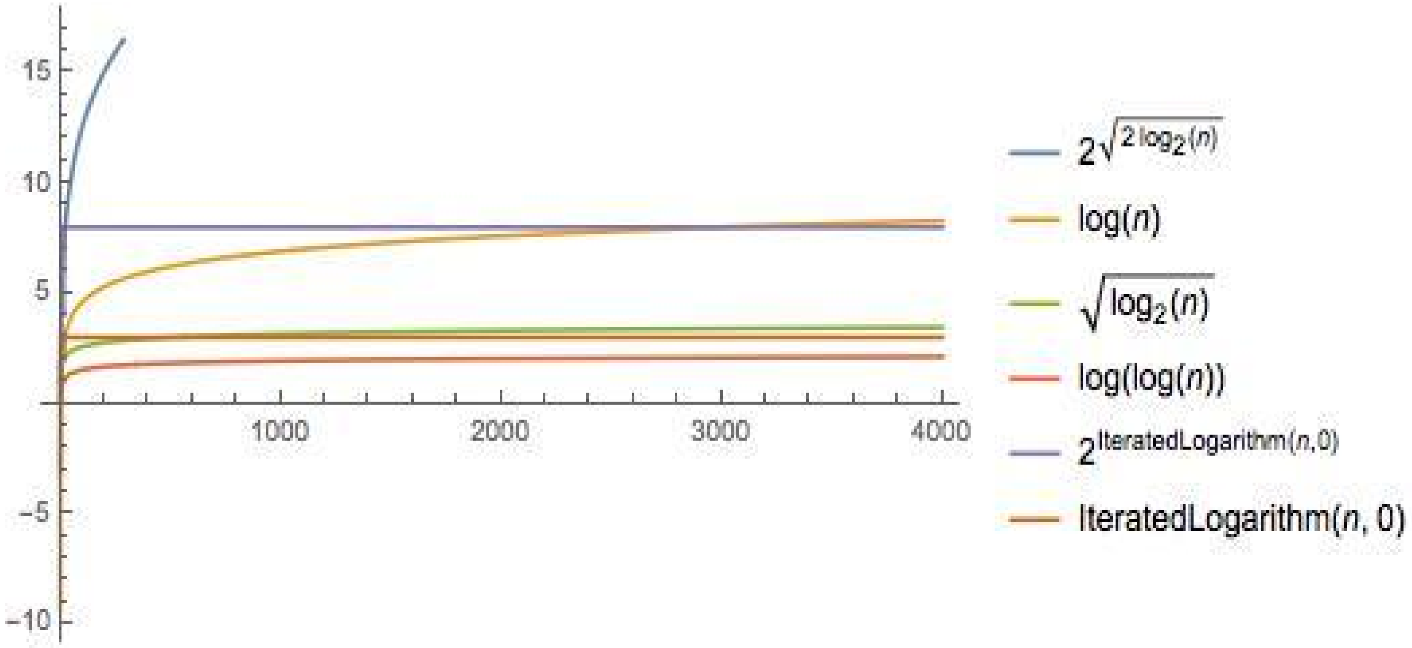


Ejercicio 2

Mostrando las gráficas en conjunto:

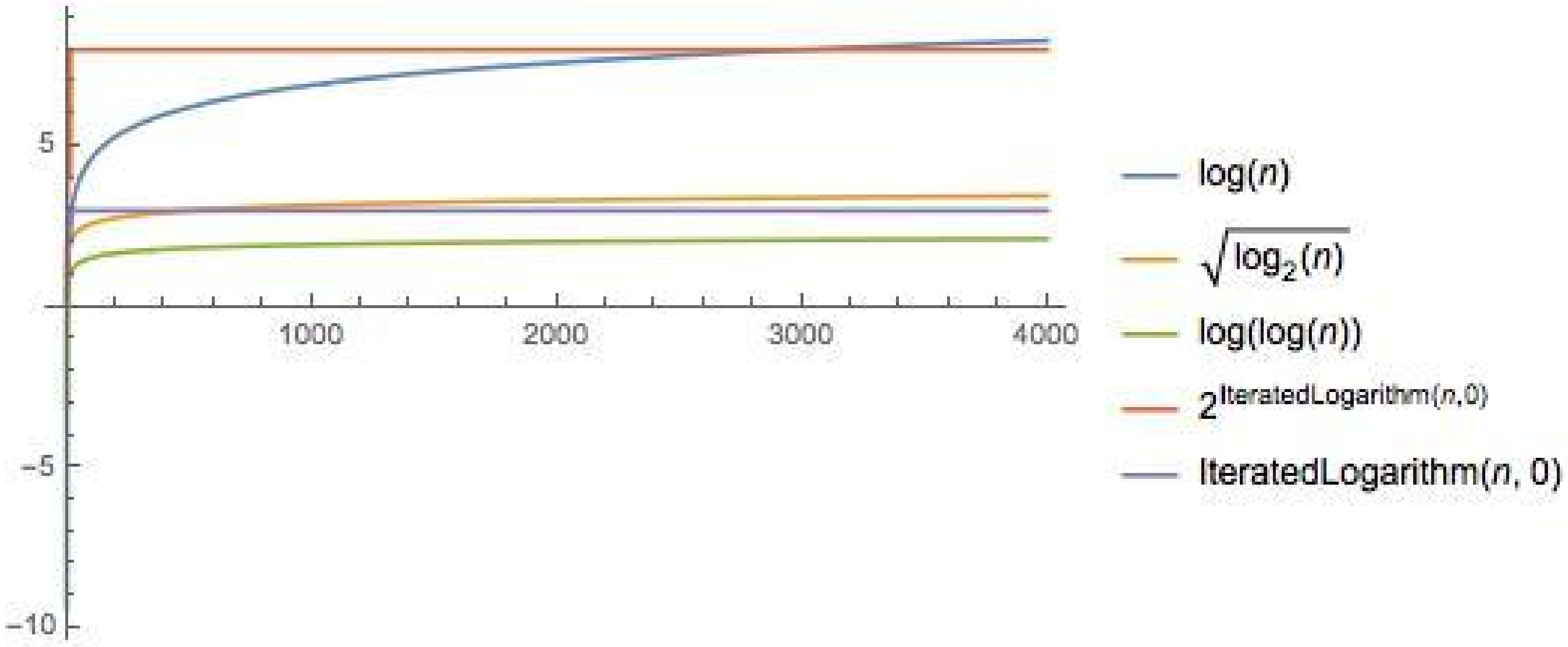


Ejercicio 2



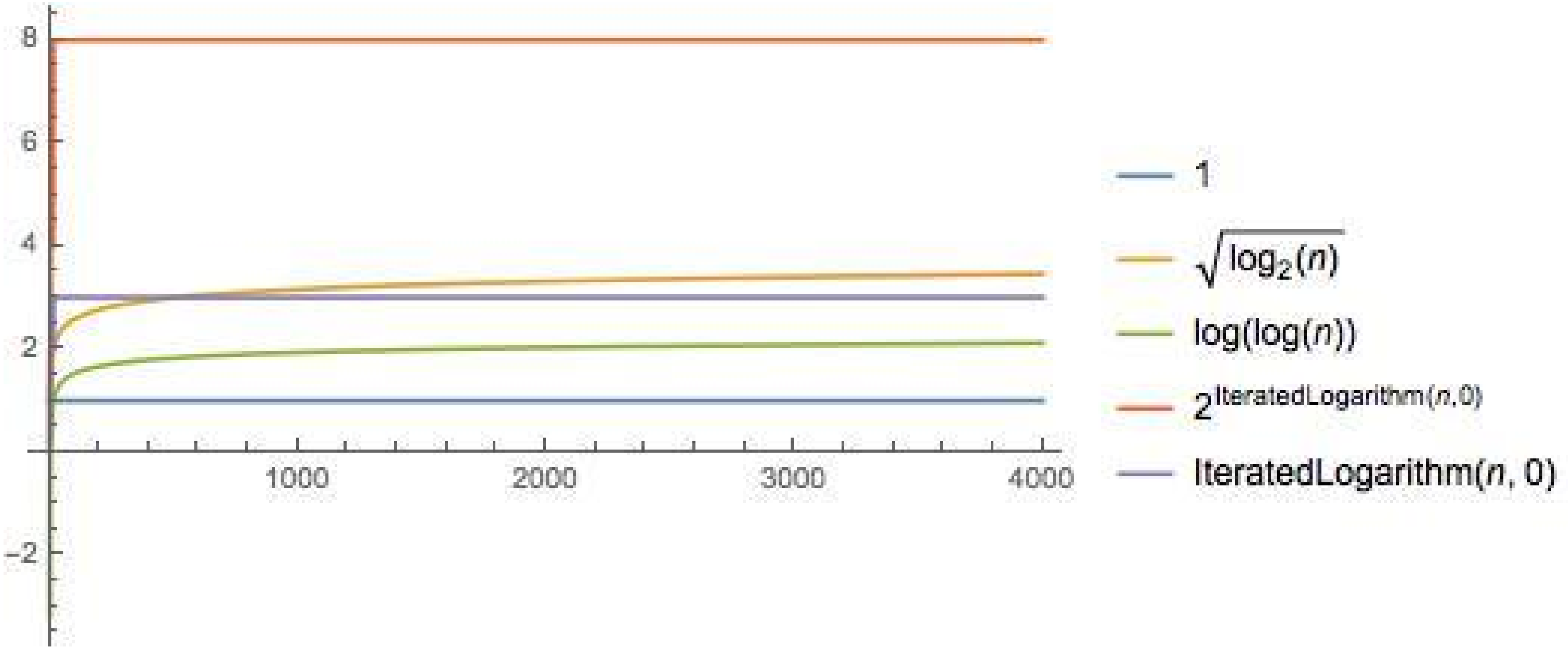
15
10
5
−5
−10
1000
2000
3000
4000
$2^{\sqrt{2\log_2(n)}}$
$\log(n)$
$\sqrt{\log_2(n)}$
$\log(\log(n))$
$2^{\mathrm{IteratedLogarithm}(n,0)}$
IteratedLogarithm(n, 0)

Ejercicio 2



5
−5
−10
1000
2000
3000
4000
log(n)
$\sqrt{\log_2(n)}$
log(log(n))
$2^{\text{IteratedLogarithm}(n,0)}$
IteratedLogarithm(n, 0)

Ejercicio 2


8
6
4
2
-2
1000
2000
3000
4000
1
$\sqrt{\log_2(n)}$
$\log(\log(n))$
$2^{\text{IteratedLogarithm}(n,0)}$
IteratedLogarithm(n, 0)