

# Instituto Tecnológico Autónomo de México

## Trabajo Final

### Simulación

---

#### Alumnos:

- Patricio Ancona Roche 132111
- José Pablo Barrera Karrer 123998

Fecha de entrega: 18/Diciembre/2014

## I. Resumen Ejecutivo

El problema consiste en estimar la pérdida agregada de una cartera crediticia. Se Utilizarán dos modelos de pérdida agregada que permitirán conocer la pérdida total de un conjunto de individuos.

Dichos modelos son **Modelo individual** y **Modelo colectivo**, los cuales agrupan la información de forma distinta.

Haciendo un análisis de los datos con el modelo individual tenemos una esperanza de pérdida agregada de **1,158.6 PESOS** en **0.516262 segundos**. Realizando el mismo análisis con el modelo colectivo la pérdida agregada fue de **3,332.1 PESOS** en **24.064620 segundos**.

## II. Introducción

Una cartera crediticia representa el saldo de montos efectivamente entregados a los acreditados más los intereses devengados no cobrados correspondientes. Estos montos no siempre son pagados, por lo que existe una probabilidad de riesgo de incumplimiento de pago.

En este problema, se espera conocer la esperanza de incumplimiento de una cartera crediticia específica.

Para esto, se utilizaron los métodos ya mencionados, los cuales serán explicados más a detalle a continuación.

## III. Metodología

Supuestos:

- La información de la muestra fue tomada del documento de Excel proporcionado.
- Sus respectivas desviaciones estándar y esperanza teórica se calcularon directamente en Excel.

$$\mu = p \cdot \sum f_k$$

$f_k$  = valor del  $k$ -ésimo préstamo

- El cálculo de los tamaños de simulación se hicieron con la siguiente fórmula:

$$N = \sum n_j, n_j = \left( \frac{\sigma \cdot Z_{\frac{1-\alpha}{2}}}{c} \right)^2, c = 10$$

- Los componentes de riesgo de cada grupo utilizados son los siguientes:

Grupo	Industrial	Construcción	Comercio	Servicios
$p_j$	0.70%	0.90%	0.65%	0.60%
$\rho_j$	0.09%	0.04%	0.05%	0.07%

- La correlación extragrupo  $(\rho_{i,j})$  es de .5%.
- La información será analizada cada grupo por separado. (i.e. se calculó cada  $L_i$  de forma individual).

### 1) **Modelo Individual** (Ver código 1)

Tomando los supuestos anteriormente mencionados se siguieron los siguientes pasos:

- Calibración de los parámetros  $u$ ,  $\rho_j$  y  $\tilde{\rho}$ .

$$u = \Phi^{-1}(p)$$

$$\rho_j = \left\{ r : \Phi_{(2)}(u, u; r) = p_j^2 + \rho_j \cdot p_j (1 - p_j) \right\}$$

$$\tilde{\rho} = \left\{ r : \min \left\{ \sum_{i < j} \left[ \Phi(u_i, u_j; r) - (p_i p_j + \rho_{i,j} \cdot \sqrt{p_i (1 - p_i) p_j (1 - p_j)}) \right]^2 \right\} \right\}$$

2. Simulación de las variables latentes  $X_i$  para así hacer la suma de los montos con la restricción  $X_i < u$ .
3. Cálculo de los parámetros a comparar (media, varianza, sesgo, kurtosis y cuartiles).

## 2) **Modelo Individual con reducción de varianza** (Ver código 2)

Los pasos realizados fueron los siguientes:

1. La calibración de los parámetros  $u$ ,  $\rho_j$  y  $\tilde{\rho}$  se hizo de igual manera que en el Modelo Individual.
2. La primera mitad del vector  $L$  se crea de la misma manera que el método sin reducción de varianza.
3. La segunda mitad se calculó utilizando la variable antitética de  $L$  con la siguiente fórmula:

$$L\left(\frac{N}{2}+i\right)=\mu-\sigma\cdot Z, Z \text{ Normal}(0,1)$$

$L_i$  =  $i$  –ésima entrada del vector  $L$

$L$  = Vector con la deuda simulada

$N$  = Número de simulaciones realizadas

Tomando en cuenta que  $L$  se distribuye  $Normal(\mu, \sigma^2)$ , parámetros calculados directamente en Excel.

4. Contabilización de entradas de  $L_i$  que son mayores a  $2.5 \cdot \mu$ .
5. Cálculo de los parámetros a comparar (media, varianza, sesgo, kurtosis y cuartiles).

## 3) **Modelo Colectivo** (Ver código 3)

Los pasos realizados fueron los siguientes:

1. La calibración de los parámetros  $u$ ,  $\rho_j$  y  $\tilde{\rho}$  se hizo de igual manera que en el Modelo Individual.
2. Cálculo de  $p$

$$p=\Phi\left(\frac{u_j-\sqrt{\tilde{\rho}}\cdot Z_0-\sqrt{\rho_j-\rho}\cdot Z}{\sqrt{1-\tilde{\rho}}}\right), Z \text{ Normal}(0,1)$$

3. Cálculo de  $k$

$$K_j \text{ Binomial}(n_j, p)$$

con la  $p$  calculada en el paso 2

#### 4. Cálculo de $L$

$$L = \sum_{j=1}^m L_j, L_j = \sum_{k=1}^{K_j} f_{D_k}^{(j)}$$

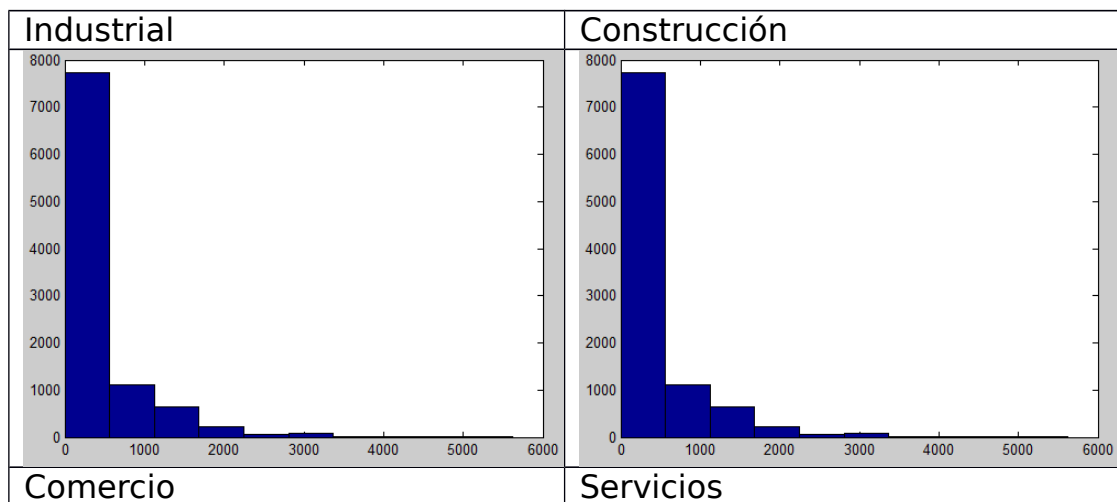
$f_{D_k}^{(j)}$  = monto prestado al  $k$ -ésimo acreditado

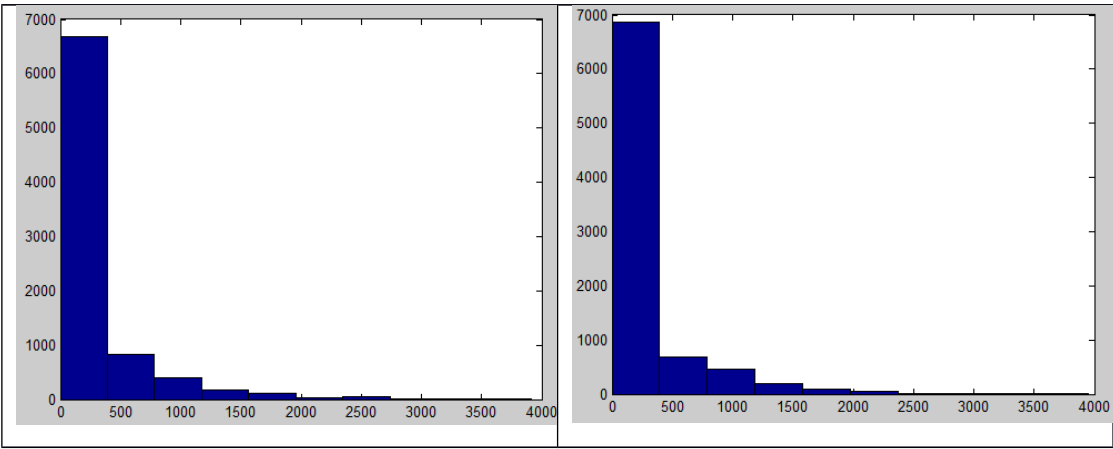
$D_k^{\square}$  = Variable aleatoria que denota al número de acreditado que incumplió

## IV. Resultados

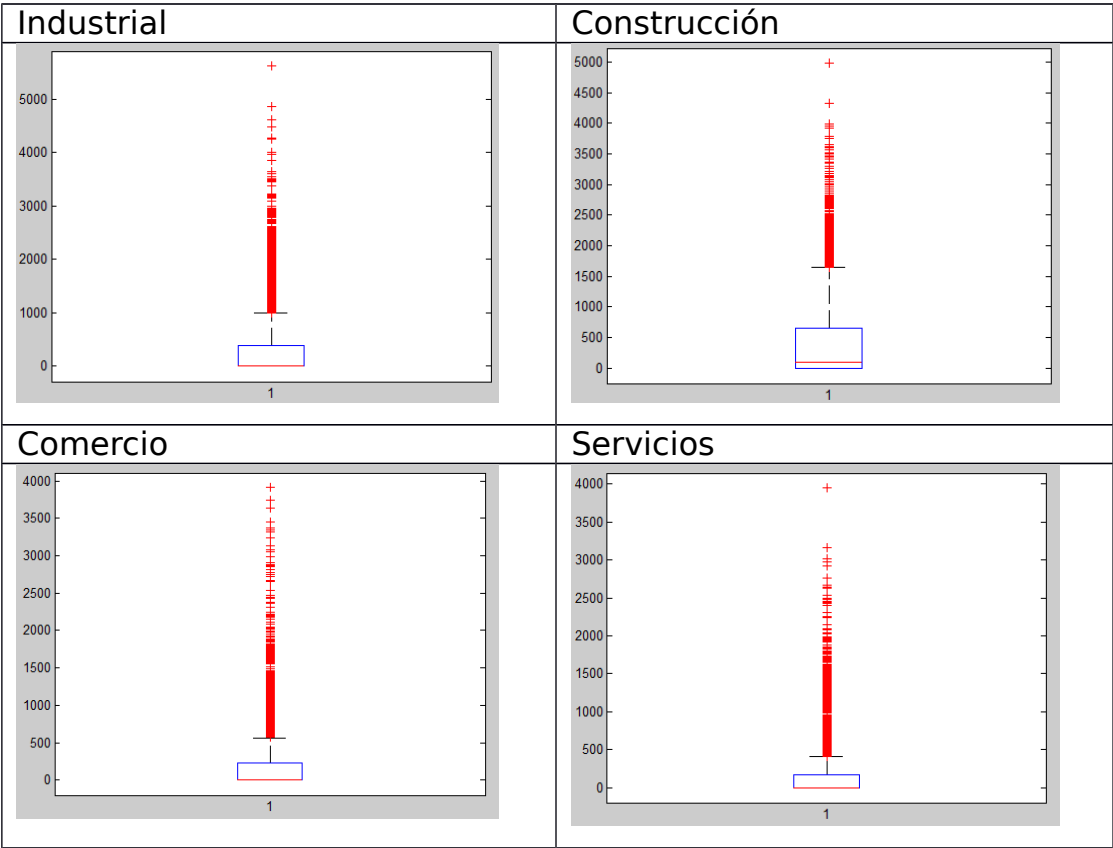
### MODELO INDIVIDUAL (ver código 1)

- Histograma





- Diagrama de caja y brazos



- Tabla de información general

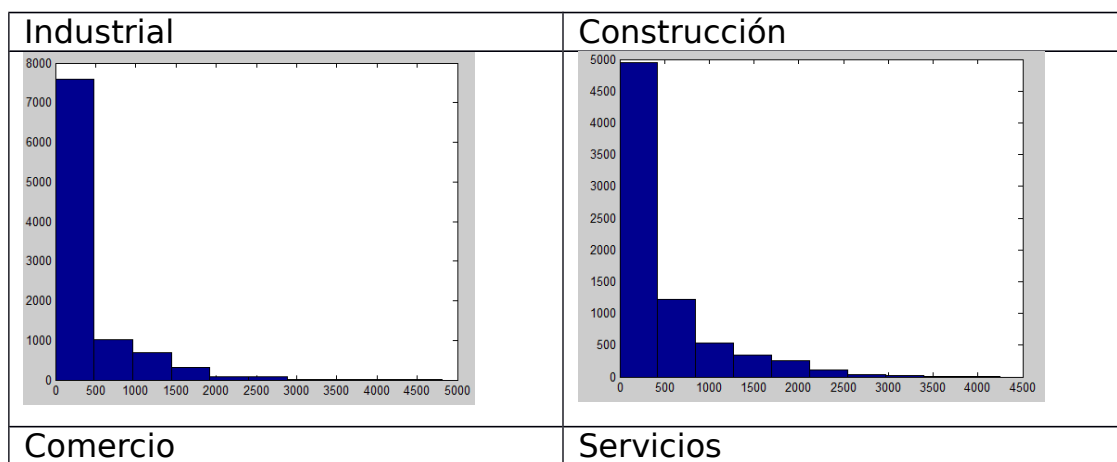
	INDUSTRIA L	CONSTRUCC IÓN	COMERCI O	SERVICIO S	TOTAL ES

MEDIA	315.5785	405.4743	226.5132	210.9963	<b>1158.5623</b>
VARIANZA	325850	350340	213140	188330	<b>269415</b>
SESGO	2.4803	1.9287	3.1369	2.5655	<b>2.52785</b>
KURTOSIS	10.3982	7.2409	16.0836	9.9462	<b>10.917225</b>
QUARTIL 1	0	0	0	0	<b>0</b>
QUARTIL 2	0	92	0	0	<b>92</b>
QUARTIL 3	389	610	251	188.5	<b>1438.5</b>
QUARTIL 4	4867	4679	5219	3547	<b>18312</b>
QUANTIL 95	1453	1706	1236.8	1153	<b>5548.8</b>

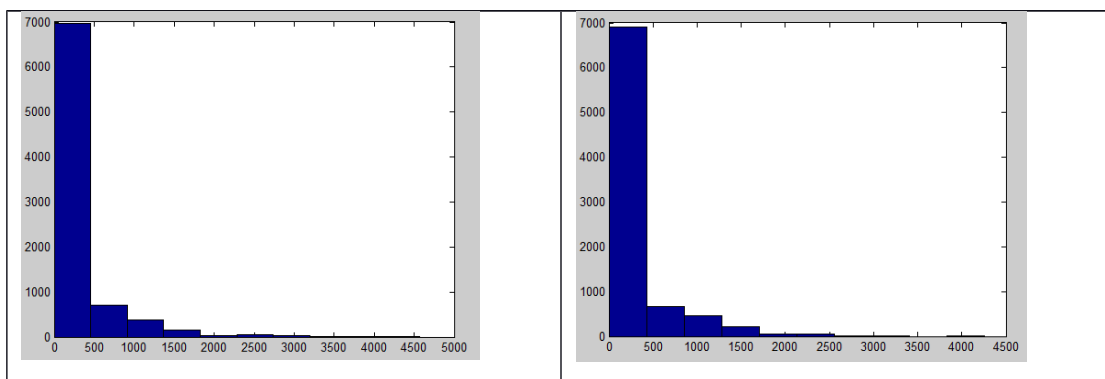
- Tiempo de ejecución: 0.516262 segundos.

## MODELO INDIVIDUAL CON REDUCCIÓN DE VARIANZA (ver código 2)

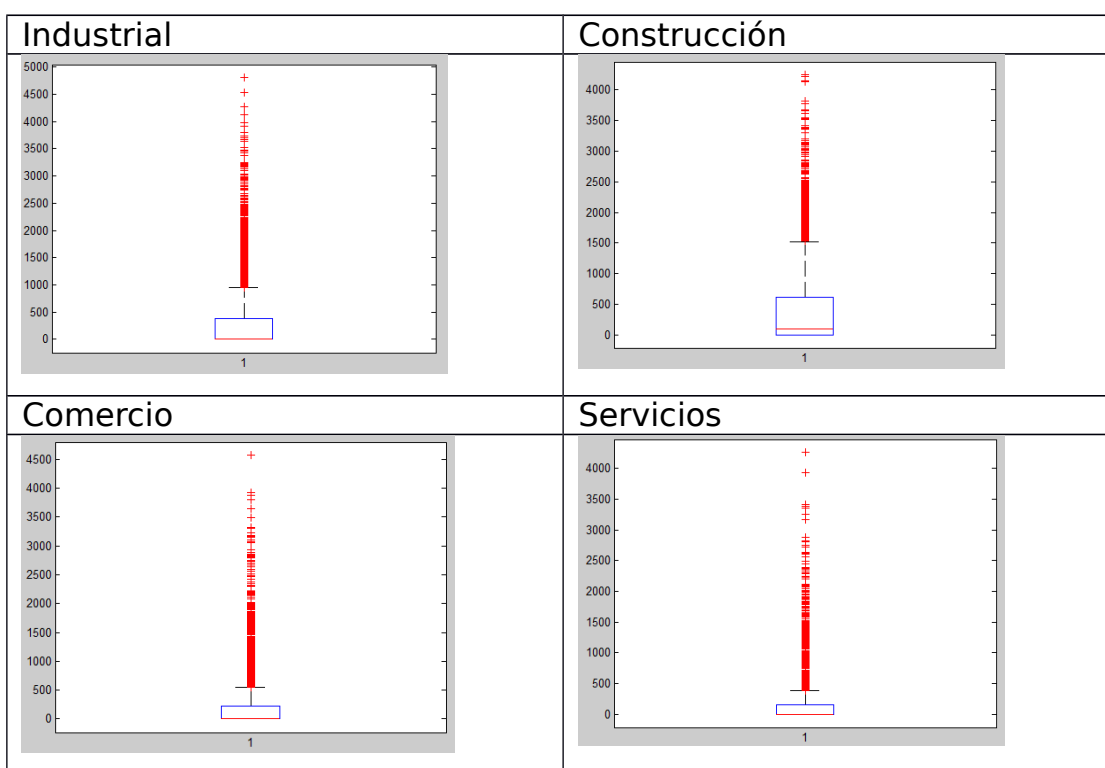
- Histograma







- Diagrama de caja y brazos



- Tabla de información general

	INDUSTRIA L	CONSTRUCC IÓN	COMERCI O	SERVICIO S	<b>TOTAL ES</b>
MEDIA	305.8461	422.7015	228.3159	197.8730	<b>1154.7 365</b>
VARIANZA	271910	284850	204760	201280	<b>240700</b>
SESGO	1.4396	1.4150	1.3834	1.2674	<b>1.3763 5</b>
KURTOSIS	7.9919	6.6666	7.9947	7.3779	<b>7.5077</b>

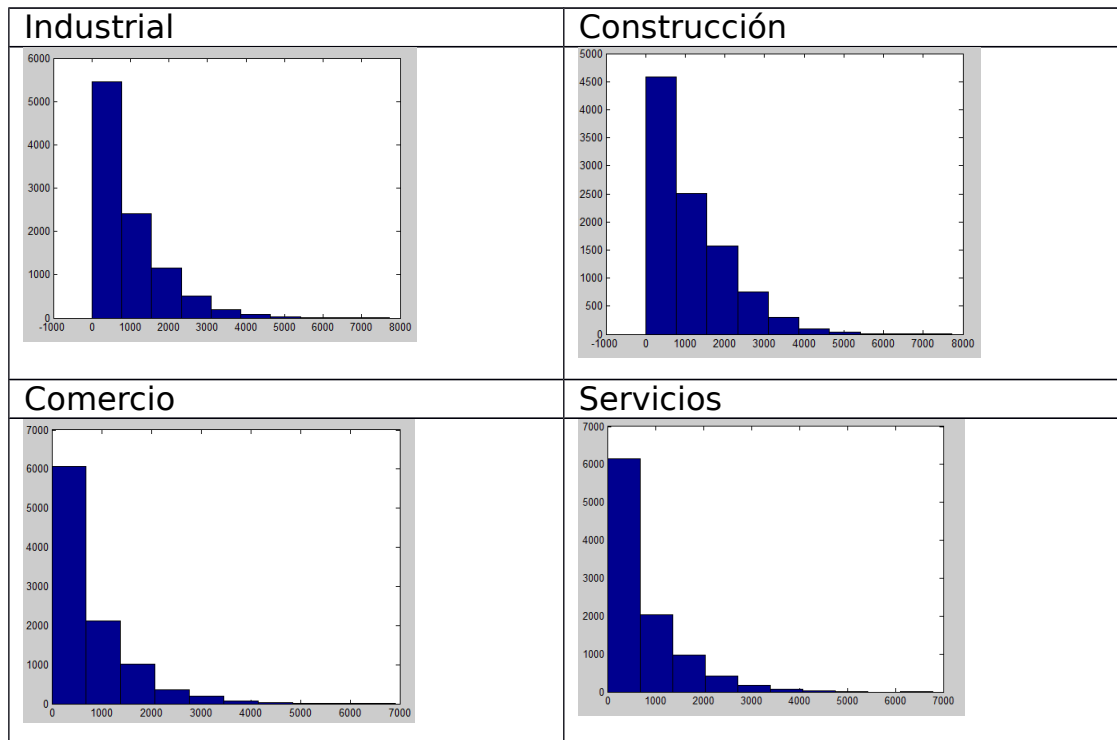
					<b>75</b>
QUARTIL 1	0	0	0	0	<b>0</b>
QUARTIL 2	133.1220	318.7176	55.0000	0	<b>506.8396</b>
QUARTIL 3	575.8823	701.0000	436.4854	409.1101	<b>2122.4778</b>
QUARTIL 4	4537	4743	4249	4104	<b>17633</b>
QUANTIL 95	1226.2	1395.2	1068	1054.6	<b>4744</b>

- Tiempo de ejecución: 0.897302 segundos.
- Probabilidad de que la pérdida agregada exceda 2.5 veces a la media teórica:

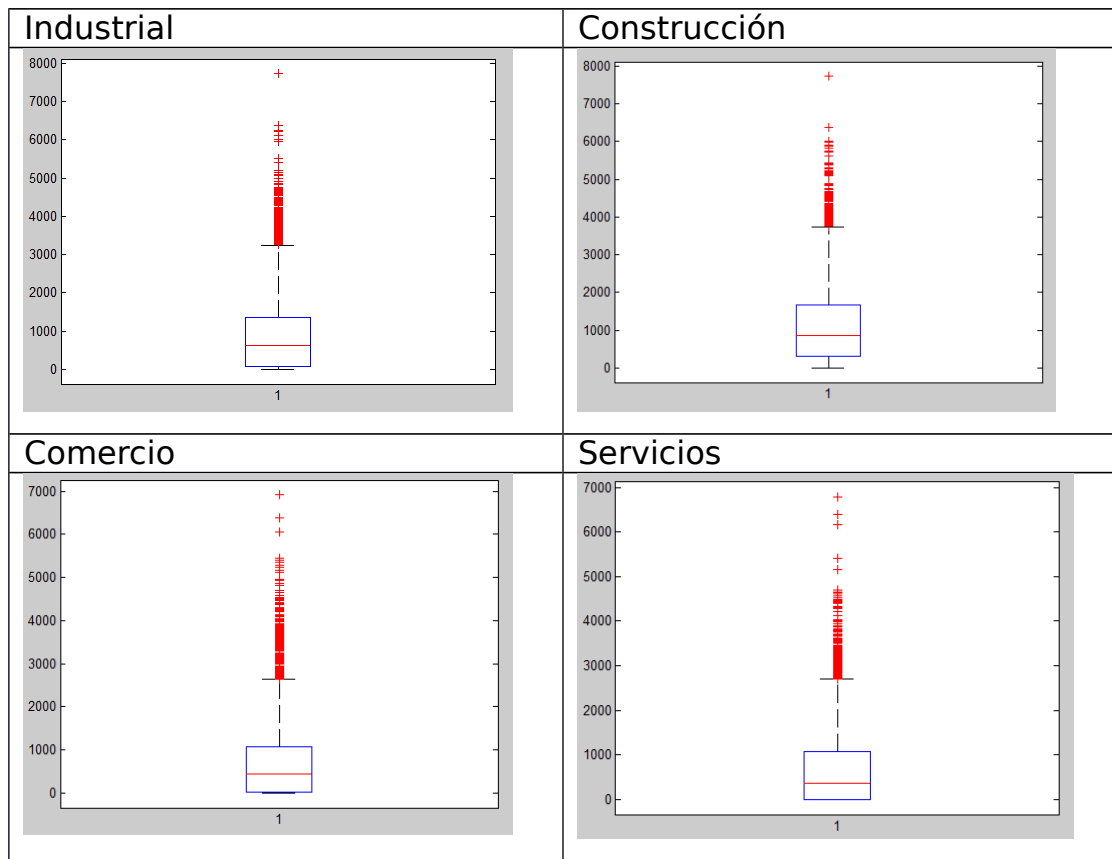
	INDUSTRIAL	CONSTRUCC IÓN	COMERCIO	SERVICIOS
PROBABILIDAD	0.3995	0.4307	0.3842	0.3713

## MODELO COLECTIVO *(ver código 3)*

- Histograma



- Diagrama de caja y brazos



- Tabla de información general

	INDUSTRIA L	CONSTRUCC IÓN	COMERCI O	SERVICIO S	<b>TOTAL ES</b>
MEDIA	880.6	1096.6	698.1	656.8	<b>3332.1</b>
VARIANZA	879350	991400	655210	638170	<b>791032.5</b>
SESGO	1.4287	1.1717	1.7413	1.6574	<b>1.499775</b>
KURTOSIS	5.4185	4.5017	7.0378	6.4416	<b>5.8499</b>
QUARTIL 1	83	301.5	26	0	<b>410.5</b>
QUARTIL 2	614	855	453	352	<b>2274</b>
QUARTIL 3	1348	1679	1070	1081.5	<b>5178.5</b>

QUARTIL 4	7729	7729	6913	6776	<b>29147</b>
QUANTIL 95	2.8270	3022.6	2327.6	2255.3	<b>7608.3 27</b>

- Tiempo de ejecución: 24.064620 segundos.

## COMPARACIÓN DE MÉTODOS

	TEÓRICO	INDIVIDUAL	INDIVIDUAL CON REDUCCIÓN DE VARIANZA	COLECTIVO
<b>MEDIA</b>	1,152.794	1,158.5623	1,154.7365	3,332.1
<b>VARIANZA</b>	220,968.852	269,415	240,700	791,032.5
<b>TIEMPO DE EJECUCIÓN</b>	-	0.516262	0.897302	24.064620

Con la tabla anterior se puede observar que el método COLECTIVO no es nada eficiente en términos de media, varianza y tiempo de ejecución. A diferencia de esto, el método INDIVIDUAL resulto muy eficiente (la media y varianza son muy cercanas a las teóricas y el tiempo de ejecución es poco).

Específicamente, el método INDIVIDUAL CON REDUCCIÓN DE VARIANZA es el mejor, ya que la media simulada sigue siendo eficiente y la disminución de varianza es preferible a pesar del muy pequeño aumento en el tiempo de ejecución (.3 segundos).

## V. Anexos

Comandos generales:

```
>> A1=xlsread('datos1.xlsx');  
      %instrucción que lee el primer conjunto de datos (Industrial).  
>> A2=xlsread('datos2.xlsx');  
      %instrucción que lee el segundo conjunto de datos  
(Construcción).  
>> A3=xlsread('datos3.xlsx');  
      %instrucción que lee el tercer conjunto de datos (Comercio).  
>> A4=xlsread('datos4.xlsx');  
      %instrucción que lee el cuarto conjunto de datos (Servicios).  
>> P=[.007,.009,.0065,.006];  
      %Instrucción que crea el vector con las probabilidades de  
incumplimiento.  
>> RHO=[.0009,.0004,.0005,.0007];  
      %Instrucción que crea el vector con los coeficientes de  
correlación intragrupo  
>> N=[9844,7499,8323,8373];  
      %Instrucción que crea el vector con los números de  
simulación calculados anteriormente.  
  
>> mod1(N,RHO,P,A1,A2,A3,A4) %Modelo individual  
>> mod2(N,RHO,P,A1,A2,A3,A4) %Modelo colectivo  
>> varmod1(N,RHO,P,A1,A2,A3,A4) %Modelo individual con  
reducción de varianza  
  
>> hist (  $W_i$  ) %Generador de histogramas.  
  
• >> boxplot(  $W_i$  ) %Generador de Diagrama de caja y brazos
```



## Código 1

```
function [ W1,W2,W3,W4 ] = mod1( N, RHO, p, A1,A2,A3,A4 )
%Calibración u y rho j
for i=1:4
    u(i)=norminv(p(i));
    fun = @(r) (mvncdf([u(i); u(i)], [0; 0], [1 r; r 1]) - (p(i)^2 +
RHO(i)*p(i)*(1-p(i)))));
    r0 = 0.5;
    rho(i) = fzero(fun,r0);
end
%Calibración de Rho gorro
aux=0;
fun2=@(r) ((mvncdf([u(1);u(2)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(1)*p(2)+.005*sqrt(p(1)*(1-p(2))*p(2)*(1-p(2))))^2)+
(mvncdf([u(1);u(3)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(1)*p(3)+.005*sqrt(p(1)*(1-p(1))*p(3)*(1-p(3))))^2)+
(mvncdf([u(1);u(4)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(1)*p(4)+.005*sqrt(p(1)*(1-p(1))*p(4)*(1-p(4))))^2)+
(mvncdf([u(2);u(3)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(2)*p(3)+.005*sqrt(p(2)*(1-p(2))*p(3)*(1-p(3))))^2)+
(mvncdf([u(2);u(4)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(2)*p(4)+.005*sqrt(p(2)*(1-p(2))*p(4)*(1-p(4))))^2)+
(mvncdf([u(3);u(4)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(3)*p(4)+.005*sqrt(p(3)*(1-p(3))*p(4)*(1-p(4))))^2));
rhog=fminbnd(fun2,0,1);
%Indicador de tipo de grupo
a=1;
while a<5

    if a==1
        V=A1;
    else
        if a==2
            V=A2;
        else
            if a==3
                V=A3;
            else
                V=A4;
            end
        end
    end
end
n=length(V);
%Calculo de montos de incumplimiento
L=zeros(1,n);
Z0=randn;
for h=1:N(a)
    L(h)=0;
    for i=1:n
        Z(i)=randn;
        E(i)=randn;
        X(i)=sqrt(rhog)*Z0+sqrt(rho(a)-rhog)*Z(i)+sqrt(1-
rho(a))*E(i);
        if X(i)< u(a)
            L(h)=L(h)+V(i);
        end
    end
end
```



```

        end
    end
    %Cálculo de factores a comparar
    Media(a)=mean(L);
    Varianza(a)=var(L);
    Sesgo(a)=skewness(L);
    Kurtosis(a)=kurtosis(L);
    Quartil1(a)=quantile(L,.25);
    Quartil2(a)=quantile(L,.5);
    Quartil3(a)=quantile(L,.75);
    Quartil4(a)=quantile(L,1);
    Quartil95(a)=quantile(L,.95);
    if a==1
        W1=L;
    else
        if a==2
            W2=L;
        else
            if a==3
                W3=L;
            else
                W4=L;
            end
        end
    end
    end
    a=a+1;
end
%Impresión de resultados
Media
Varianza
Sesgo
Kurtosis
Quartil1
Quartil2
Quartil3
Quartil4
Quartil95
end

```

## Código 2

```

function [ ] = varmod1( N, RHO, p, A1,A2,A3,A4 )
MT=[307.013,422.811,220.428,202.542];
DT=[506.20,441.79,465.44,466.84];
%Calibración u y rho j
for i=1:4
    u(i)=norminv(p(i));
    fun = @(r) (mvncdf([u(i); u(i)],[0; 0],[1 r; r 1]) - (p(i)^2 +
    RHO(i)*p(i)*(1-p(i))));
    r0 = 0.5;
    rho(i) = fzero(fun,r0);
end
%Calibración de Rho gorro
aux=0;
fun2=@(r) ((mvncdf([u(1);u(2)],[0;0],[1 r;r 1]) -
(p(1)*p(2)+.005*sqrt(p(1)*(1-p(2))*p(2)*(1-p(2))))^2)+

```

```

(mvncdf([u(1);u(3)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(1)*p(3)+.005*sqrt(p(1)*(1-p(1))*p(3)*(1-p(3))))^2)+
(mvncdf([u(1);u(4)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(1)*p(4)+.005*sqrt(p(1)*(1-p(1))*p(4)*(1-p(4))))^2)+
(mvncdf([u(2);u(3)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(2)*p(3)+.005*sqrt(p(2)*(1-p(2))*p(3)*(1-p(3))))^2)+
(mvncdf([u(2);u(4)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(2)*p(4)+.005*sqrt(p(2)*(1-p(2))*p(4)*(1-p(4))))^2)+
(mvncdf([u(3);u(4)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(3)*p(4)+.005*sqrt(p(3)*(1-p(3))*p(4)*(1-p(4))))^2));
rhog=fminbnd(fun2,0,1);
%Indicador de tipo de grupo
a=1;
while a<5
    cont=0;
    if a==1
        V=A1;
    else
        if a==2
            V=A2;
        else
            if a==3
                V=A3;
            else
                V=A4;
            end
        end
    end
    n=length(V);
    %Calculo de montos de incumplimiento
    L=zeros(1,n);
    Z0=randn;
    for j=1:ceil(N(a)/2)
        L(j)=0;
        for i=1:n
            Z(i)=randn;
            E(i)=randn;
            X(i)=sqrt(rhog)*Z0+sqrt(rho(a)-rhog)*Z(i)+sqrt(1-
rho(a))*E(i);
            if X(i)< u(a)
                L(j)=L(j)+V(i);
            end
        end
        Z=randn;
        L(ceil(N(a)/2)+j)=MT(a)-DT(a)*Z;
        if L(j)>=MT(a)
            cont=cont+1;
        end
        if L(ceil(N(a)/2)+j)>=MT(a)
            cont=cont+1;
        end
    end
    proba(a)=cont/N(a);
    %Cálculo de factores a comparar
    Media(a)=mean(L);
    Varianza(a)=var(L);
    Sesgo(a)=skewness(L);

```

```

Kurtosis(a)=kurtosis(L);
Quartil1(a)=quantile(L,.25);
Quartil2(a)=quantile(L,.5);
Quartil3(a)=quantile(L,.75);
Quartil4(a)=quantile(L,1);
Quartil95(a)=quantile(L,.95);
    if a==1
        W1=L;
    else
        if a==2
            W2=L;
        else
            if a==3
                W3=L;
            else
                W4=L;
            end
        end
    end
end
a=a+1;
end
%Impresión de resultados
Media
Varianza
Sesgo
Kurtosis
Quartil1
Quartil2
Quartil3
Quartil4
Quartil95
proba
end

```

### Código 3

```

function [ W1,W2,W3,W4 ] = mod2( N, RHO, p, A1,A2,A3,A4 )
%Calibración u y rho j
for i=1:4
    u(i)=norminv(p(i));
    fun = @(r) (mvncdf([u(i); u(i)], [0; 0], [1 r; r 1]) - (p(i)^2 +
RHO(i)*p(i)*(1-p(i)))));
    r0 = 0.5;
    rho(i) = fzero(fun,r0);
end
%Calibración de Rho gorro
aux=0;
fun2=@(r) ((mvncdf([u(1);u(2)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(1)*p(2)+.005*sqrt(p(1)*(1-p(2))*p(2)*(1-p(2))))^2)+
(mvncdf([u(1);u(3)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(1)*p(3)+.005*sqrt(p(1)*(1-p(1))*p(3)*(1-p(3))))^2)+
(mvncdf([u(1);u(4)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(1)*p(4)+.005*sqrt(p(1)*(1-p(1))*p(4)*(1-p(4))))^2)+
(mvncdf([u(2);u(3)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(2)*p(3)+.005*sqrt(p(2)*(1-p(2))*p(3)*(1-p(3))))^2)+
(mvncdf([u(2);u(4)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(2)*p(4)+.005*sqrt(p(2)*(1-p(2))*p(4)*(1-p(4))))^2)+

```

```

(mvncdf([u(3);u(4)], [0;0], [1 r;r 1]) -
(p(3)*p(4)+.005*sqrt(p(3)*(1-p(3))*p(4)*(1-p(4))))^2));
rhog=fminbnd(fun2,0,1);
%Indicador de tipo de grupo
a=1;
while a<5
    if a==1
        V=A1;
    else
        if a==2
            V=A2;
        else
            if a==3
                V=A3;
            else
                V=A4;
            end
        end
    end
end
n=length(V);
%Calculo de montos de incumplimiento
Z0=randn;
for j=1:N(a)
    K = 0;
    for i=1:n
        Z=randn;
        p=normpdf((u(a)-sqrt(rhog)*Z0-sqrt(rho(a)-rhog)*Z)/(sqrt(1-
rhog)));
        U=rand;
        if U<p
            K=K+1;
        end
    end
    resp=0;
    for h=1:K
        b=ceil(rand*(n-1))+1;
        x = V(b);
        resp= resp + x;
    end
    L(j)=resp;
end
%Cálculo de factores a comparar
Media(a)=mean(L);
Varianza(a)=var(L);
Sesgo(a)=skewness(L);
Kurtosis(a)=kurtosis(L);
Quartil1(a)=quantile(L,.25);
Quartil2(a)=quantile(L,.5);
Quartil3(a)=quantile(L,.75);
Quartil4(a)=quantile(L,1);
Quartil95(a)=quantile(L,.95);
    if a==1
        W1=L;
    else
        if a==2
            W2=L;
        else

```

```
        if a==3
            W3=L;
        else
            W4=L;
        end
    end
end
a=a+1;
end
%Impresión de resultados
Media
Varianza
Sesgo
Kurtosis
Quartil1
Quartil2
Quartil3
Quartil4
Quartil95
end
```