



Guía Matemática

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

profesor: Nicolás Melgarejo

1. Relación de igualdad

En Matemática cuando dos expresiones tienen el mismo valor o representan lo mismo, diremos que existe una relación de **igualdad** entre ellas. Algunos ejemplos:

$$x = y + z$$

$$a^2 + 3 = a + 5$$

El área de un triángulo equilátero puede escribirse de dos formas por lo menos. La primera es una expresión que depende de la base y la altura.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

La otra es en base a la medida de su lado a

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Como ambas expresiones representan exactamente lo mismo, existe una relación de igualdad entre ellas, entonces

$$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

2. Ecuaciones

Se denomina ecuación a una igualdad en donde una o más variables tienen un valor **desconocido**. A estas variables desconocidas se les llama **incógnitas** y es costumbre representarlas con las últimas letras del alfabeto, pero ningún caso representa una obligación¹. Por ejemplo:



$$-3x + 18 = 0$$

Es una ecuación porque hay una igualdad en donde se desconoce el valor de una de las variables. Por simple inspección podríamos reconocer que el valor de x para que la igualdad sea cierta es $x = 6$, ya que

$$-3(6) + 18 = -18 + 18 = 0$$

2.1. Elementos de una ecuación

En las ecuaciones podemos identificar algunos elementos generales que las componen: miembro, término y grado.

2.1.1. Miembro

Se denomina **primer miembro** de una ecuación a la expresión que está a la izquierda de la igualdad, y se llama **segundo miembro** a la expresión que está a la derecha de la igualdad.

¹¿Por qué la x es la incógnita? La x nace de la palabra árabe para representar una cantidad numérica no conocida, esta palabra era *shei*. Los escritores griegos que traducían textos matemáticos árabes, por una cuestión de simplicidad, la tradujeron como *xei*, mucho más fácil de leer en el alfabeto helénico. Con el tiempo los cálculos fueron ganando complejidad y *xei* se fue acortando hasta convertirse en una x . Es así que hoy en día, en matemáticas y muchos otros lados, utilizamos la x para representar una incógnita.

2.1.2. Término

Cada miembro está formado por **términos** que se conectan mediante los signos de adición (+) y sustracción (-)

2.1.3. Grado

En una ecuación con una sola incógnita le llamamos grado al mayor exponente al que está elevada la incógnita. La ecuación

$$\frac{3}{5}x - 3 = 12$$

es una ecuación de **primer grado** porque la incógnita está elevada a 1. En cambio la ecuación

$$5x^2 - 12x - 3 = 0$$

es una ecuación de **segundo grado** ya que la incógnita está elevada a 2.

2.1.4. Raíces

Los valores que satisfacen la igualdad se les llama raíces. Para el caso de una ecuación de primer grado la raíz es única, en cambio para una ecuación de segundo grado pueden haber hasta 2 raíces.

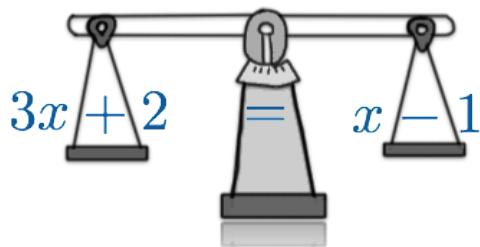
2.2. Principios fundamentales para resolver una ecuación de 1^{er} grado

, Diremos que resolvemos una ecuación cuando hallamos los valores de las incógnitas que satisfacen la igualdad, es decir, sus raíces. Para lograr esto debemos considerar una serie de principios de procedimiento:

 ¡Mira!

- Si a ambos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo término (numérico o algebraico), la igualdad se mantiene.
- Si a ambos miembros de una ecuación se les multiplica o divide por un mismo término (numérico o algebraico) positiva o negativa, la igualdad se mantiene.
- Si ambos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia real, la igualdad se mantiene.
- Si a ambos miembros de una ecuación se les extrae una misma raíz, la igualdad se mantiene.

Podemos entender las ecuaciones como una balanza en equilibrio. Cada vez que agregamos o quitamos a un lado, debemos compensarlo al otro lado en la misma forma para que la balanza siga en equilibrio.



Algunas consecuencias de los principios de procedimiento para resolver una ecuación son:

- Calquier término de una ecuación puede pasarse de un miembro a otro invirtiendo su signo.
- Los términos iguales con el mismo signo en diferentes miembros de una ecuación, se cancelan o suprimen.
- Los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin afectar la igualdad.

2.2.1. Pasos generales

Para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita se recomienda seguir los siguientes pasos, que después de ejercitarse lo suficiente se incorporarán en la forma de proceder.

1. Se realizan las operaciones indicadas en la igualdad y se simplifican los términos semejantes
2. Se trasladan los términos conocidos a un lado de la igualdad y las variables desconocidas al lado opuesto.
3. Se reducen los términos semejantes nuevamente
4. Se despeja la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

Ejemplo

Hallar el valor de x para el que la siguiente igualdad se cumple:

$$10x = 16x - 30$$

Solución: Siguiendo los pasos generales se obtiene

$$\begin{aligned}10x &= 16x - 30 \\0 &= 16x - 30 - 10x \\30 &= 16x - 10x \\30 &= 6x \\\frac{30}{6} &= \frac{6x}{6} \\5 &= x\end{aligned}$$

Entonces el valor de x para el cual la igualdad se cumple es $x = 5$. De hecho si en la igualdad reemplazamos 5 nos queda:

$$\begin{aligned}10(5) &= 16(5) - 30 \\50 &= 80 - 30 \\50 &= 50\end{aligned}$$

Con esto verificamos que 5 es la raíz de la ecuación.

3. Ecuaciones numéricas

Se denomina ecuación numérica a aquella donde los términos conocidos de una ecuación sean números reales, y por lo tanto la solución es un número real.

Ejercicios

1

Hallar la raíz de las siguientes ecuaciones:

1. $8x + 2 = 4$
 2. $12x = 20x - 18$
 3. $y - 10 = 3 + 50$
 4. $10y - 100 = -21 + y$
 5. $3x + 8x - 1 = 12x - 42$
 6. $32x - 6 + 8x = 24x + 3x + 21$
 7. $4x - 10x + 21x - 11x = -14x + 21x - 13x - 114$
 8. $-8x - 10 = -3 - x$
 9. $x - (2x + 1) = 16 - (2x + 3)$
 10. $(10 - 6x) - (16x + 12) = -(5x - 6) + (12 + x)$
 11. $3x - (4x - [12 - 16x] + 5) + (7x + 14)$
 12. $x - [5 + 3x - (12 - 9x)] = 30x + [-(6x + 4) - (x + 3)]$
 13. $2(x - 1) = 6 - 3(2x - 3)$
 14. $18(x + 4) = 11(4 - x)$
-

4. Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita

Plantear un problema escrito en lenguaje natural como una ecuación es uno de los aspectos que hace más imprescindible al álgebra como herramienta para estudiar la naturaleza y describir sus fenómenos. Para plantear una ecuación de un problema necesitamos extraer del enunciado la información relevante como variables, constantes e incógnita, luego de eso debemos identificar cómo se relacionan las variables. Para entenderlo mejor presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo

1. La suma de las edades de 3 personas es 88 años. La mayor tiene 20 años más que la menor y la del medio 18 años menos que la mayor. ¿Cuál es la edad de las tres personas?

Solución: Digamos que la edad de la mayor es x . Como la mayor tiene 20 años más que la menor, diremos que la edad de la menor es $x - 20$. La persona del medio tiene 18 años menos que la mayor, esto es $x - 18$. Sabemos que la suma de estas tres edades es 88:

$$\begin{aligned}
 x + (x - 20) + (x - 18) &= 88 \\
 x + x - 20 + x - 18 &= 88 \\
 3x - 38 &= 88 \\
 3x &= 88 + 38 \\
 3x &= 126 \\
 x &= 42
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

- La edad de la mayor es $x = 42$.
- La edad de la del medio es $x - 18 = 42 - 18 = 24$.
- La edad de la menor es $x - 20 = 42 - 20 = 22$.

2. La suma de 3 números enteros consecutivos es 117. ¿Cuáles son los números?

Solución: Tres números enteros consecutivos pueden ser escritos como x , $x + 1$ y $x + 2$. Nos dicen que la suma es 117, por lo tanto:

$$\begin{aligned}x + (x + 1) + (x + 2) &= 117 \\x + x + 1 + x + 2 &= 117 \\3x + 3 &= 117 \\3x &= 117 - 3 \\x &= \frac{114}{3} \\&= 38\end{aligned}$$

Los tres números serán $x = 38$, $x + 1 = 39$ y $x + 2 = 40$.

Ejercicios

2

1. Hallar el valor de tres números enteros consecutivos que suman 108.
2. El promedio de dos números enteros es 11. Si uno de ellos excede al otro en 12 unidades, ¿cuál es el valor de cada número?
3. La suma de 4 enteros consecutivos es 98. Hallar los cuatro números.
4. El resultado de multiplicar un número por 12 es igual al mismo número aumentado en 121. ¿Cuál es el número?
5. La edad de Ariel es el triple de la de Bernardo. Si dentro de 20 años la edad de Ariel será el doble de la de Bernardo. Encontrar las edades actuales.
6. Se reparten \$36.000.000 de herencia entre tres hermanos Pedro, Pablo y José. Si Pablo recibe el doble de lo que recibe Pedro, y José recibe el triple de lo que recibió Pedro, ¿cuánto dinero recibe José?

5. Ecuaciones literales

Se le denomina ecuaciones literales a las que algunos o todos los coeficientes de las incógnitas o las cantidades conocidas expresadas en los miembros de la ecuación son letras. En este caso debemos tener claro cuál será nuestra incógnita y cuáles son los coeficientes literales conocidos. Para resolver una ecuación literal se aplican los mismos principios que usamos en las ecuaciones numéricas.

Ejemplo

Resolver la ecuación $a(x - 3) - x = a(a - 1) + 1$.

Solución: Debemos asumir en este caso que la incógnita es x y a es un valor conocido. Escribiremos a un lado de la igualdad los términos desconocidos y en otro los conocidos.

$$\begin{aligned}
 a(x - 3) - x &= a(a - 1) + 1 \\
 ax - 3a - x &= a^2 - a + 1 \\
 ax - x &= a^2 - a + 1 + 3a \\
 ax - x &= a^2 + 2a + 1 \\
 x(a - 1) &= a^2 + 2a + 1 \\
 x &= \frac{a^2 + 2a + 1}{(a - 1)} \\
 &= \frac{(a + 1)^2}{(a - 1)}
 \end{aligned}$$

Con las ecuaciones literales podemos estudiar, por ejemplo, la dependencia de dos variables en una situación física.

✍ Ejercicios

3

1. Al resolver la ecuación $mx + 3 = n$, el valor de x es.
2. La pendiente m de una recta puede obtenerse mediante la expresión $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$. Escribir el valor de y en función de m , y_1 , x y x_1 .
3. El valor de x en la ecuación $5p = \frac{n}{2}(x + 3a)$
4. Si $ax + \frac{b}{2} = c$, entonces $4ax =$
5. Hallar x en la ecuación $\frac{x - b}{a} = 2 - \frac{x - a}{b}$
6. A chocolates cuestan $\$B$, entonces ¿cuánto cuestan N chocolates?
7. Hallar x en $\frac{a}{x} + \frac{b}{2} = \frac{4a}{x}$
8. Resolver la ecuación $\frac{m}{x} + \frac{n}{m} = \frac{n}{x} + 1$

Bibliografía

- [1] ÁLGEBRA, *Edición 1983*, CODICE S.A. Madrid (1983)
Dr. Aurelio Baldor.
- [2] APUNTES PARA LA PREPARACIÓN DE LA PSU MATEMÁTICA, *Segunda Edición, 2009*,
Pamela Paredes Núñez, Manuel Ramírez.