Geometria Analítica e Álgebra Linear

Márcio Belo-Filho

30 de Agosto de 2022.

INSTITUTO FEDERAL
Goiano
Campus Rio Verde

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Olá!

Esta apostila foi desenvolvida para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, no Instituto Federal Goiano, Campus Rio Verde. Nela, consta o conteúdo ministrado no curso, com exemplos e exercícios.

A Geometria Analítica permite utilizar técnicas relacionadas à Geometria Plana e Espacial a partir do conceito de vetores. Aliado a álgebra vetorial é uma poderosa ferramenta para problemas matemáticos.

A Álgebra Linear permite utilizar técnicas de resolução de sistemas lineares, por meio de estruturas matemáticas como vetores e matrizes. As técnicas e algoritmos de resolução ganham escalabilidade a partir de técnicas computacionais.

Assim, por meio da perspectiva de Geometria Analítica e de Álgebra Linear, é possível associar estruturas geométricas a equações algébricas visando a resolução de aplicações.

Aproveitem!

Capítulo 2

Vetores e Matrizes

Neste capítulo, começamos o nosso estudo em vetores e matrizes: conceitos básicos, tipos e operações entre estas estruturas matemáticas. No próximo capítulo atuaremos na solução de sistemas lineares, utilizando a notação matricial. Inicialmente, não veremos os vetores sob a ótica de grandezas vetoriais e geometria, mas sob uma visão mais algébrica e computacional.

Definição 2.1: Vetor

Vetor é uma estrutura matemática em que elementos (termos, entradas, coordenadas) estão dispostos como uma lista, em que os elementos possuem uma posição definida. Um vetor $\mathbf{v}$ com n elementos pode ser representado por:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

Nas representações acima, temos o vetor por meio de coordenadas entre parênteses, o vetor coluna, com seus elementos dispostos na vertical e por fim o vetor linha, com seus elementos dispostos em linha. O elemento a_i é o i-ésimo elemento do vetor $\mathbf{v}$. O **tamanho** de um vetor é o número de elementos que ele possui.

Definição 2.2: Matriz

Matriz é uma estrutura matemática em que elementos (termos, entradas) estão dispostos em linhas (horizontais) e colunas (verticais) como uma tabela. Uma matriz A de m linhas e n colunas é representada por:

$$A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij}) = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O elemento a_{ij} está na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz A, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. O **tamanho, dimensão, ou ordem** de uma matriz é o número de linhas pelo de colunas da matriz. Assim o tamanho de A é $m \times n$.

Os elementos de um vetor ou uma matriz são, em geral, números (escalares), mas podem ser qualquer outra estrutura matemática, como funções, variáveis, ou mesmo outros vetores e matrizes. Por exemplo, uma matriz pode ser vista como um vetor de vetores. Se os n

elementos de um vetor são escalares ($v_i \in \mathbb{R}$) então dizemos que o vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Se os elementos de uma matriz são escalares ($a_{ij} \in \mathbb{R}$) então dizemos que a matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Em geral, nomeia-se os vetores com letras minúsculas e em negrito, já as matrizes, com letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas.

Exemplo 2.1: Considere o vetor $\mathbf{v}$ a matriz A abaixo. Determine o tamanho do vetor e da matriz e todos os seus elementos.

$$\mathbf{v} = (0, -1, 2) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: O vetor $\mathbf{v}$ possui 3 elementos: $v_1 = 0$, $v_2 = -1$ e $v_3 = 2$. A matriz A tem duas linhas e três colunas, ou seja, 2×3. Os elementos são: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = -2$, $a_{21} = -3$, $a_{22} = 2$ e $a_{23} = 1$. □

2.1 Tipos de Vetores e Matrizes

Há diversos tipos e classificações de vetores e matrizes, que são importantes para diversas aplicações. Estas classificações estão ligadas principalmente aos tamanhos e a disposição de elementos nulos em vetores e matrizes. Vejamos alguns deles.

Definição 2.3: Vetor, Matriz Coluna e Matriz linha

Um vetor, pode ser visto como uma matriz coluna ou matriz linha. Uma **matriz coluna ou vetor coluna** possui uma única coluna ($n = 1$). Ou seja, a matriz é dada por $A_{m\times 1}$. Uma **matriz linha ou vetor linha** possui uma única linha ($m = 1$). Ou seja, a matriz é dada por $A_{1\times n}$.

Definição 2.4: Matriz Quadrada

Uma **matriz quadrada** é aquela em que o número de linhas é igual o número de colunas ($m = n$). Ou seja, a matriz é dada por $A_{n\times n}$. Uma matriz $A_{n\times n}$ possui tamanho, dimensão ou ordem n.

Uma matriz não quadrada é chamada de retangular. Em uma matriz quadrada $A_{n\times n}$, contamos com os elementos da diagonal principal (a_{ii}) e os elementos da diagonal secundária ($a_{i,n+1-i}$), que visualmente são as diagonais. Em uma matriz qualquer, podemos chamar cada coluna de um vetor coluna e cada linha de um vetor linha. Nas diagonais, pode-se obter o vetor da diagonal principal e o vetor da diagonal secundária.

Exemplo 2.2: Determine o tamanho da matriz quadrada A abaixo, determine os seus vetores coluna, seus vetores linha e seu vetor diagonal (principal).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz A possui três linhas e três colunas, portanto possui tamanho 3×3 e assim é uma matriz quadrada de ordem 3. Os vetores coluna da matriz A são:

$$A_{\text{coluna }1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad A_{\text{coluna }2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_{\text{coluna }3} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Já os vetores linha da matriz A são:

$$A_{\text{linha }1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{\text{linha }2} = A_{\text{linha }3} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

O vetor dos elementos da diagonal principal é dado abaixo:

$$A_{\text{diag}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Quanto aos valores e disposição dos elementos em um vetor $\mathbf{v}$ e em uma matriz A, há as seguintes definições:

Definição 2.5: Vetor ou Matriz Nula

Um **vetor nulo** $\mathbf{0}$ possui todos elementos nulos, ou seja, $v_i = 0$, $1 \leq i \leq n$. Uma **matriz nula** $0_{m\times n}$ ou (0_{ij}) possui todos elementos nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Definição 2.6: Matriz Triangular Superior

Uma **matriz triangular superior** é uma matriz quadrada em que os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja, todo $a_{ij} = 0$, $i > j$.

Definição 2.7: Matriz Triangular Inferior

Uma **matriz triangular inferior** é uma matriz quadrada em que os elementos acima da diagonal principal são nulos, ou seja, todo $a_{ij} = 0$, $i < j$.

Definição 2.8: Matriz Diagonal

Uma **matriz diagonal** é uma matriz quadrada em que os elementos fora da diagonal principal são nulos, ou seja, todo $a_{ij} = 0$, $i \neq j$. Uma matriz diagonal é triangular superior e inferior ao mesmo tempo.

Definição 2.9: Matriz Identidade

Uma **matriz identidade** é uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal são iguais a 1, $a_{ii} = 1$. A matriz identidade é indicada por $I_{n\times n}$ ou I_n ou mesmo I.

Definição 2.10: Matriz Simétrica

Uma **matriz simétrica** é uma matriz quadrada em que os elementos simétricos com relação à diagonal principal são iguais, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$. Os elementos da diagonal principal são sempre simétricos a eles mesmos.

Definição 2.11: Matriz Antissimétrica

Uma **matriz antissimétrica** é uma matriz quadrada em que os elementos simétricos com relação à diagonal principal são opostos, ou seja, $a_{ij} = -a_{ji}$.

Exemplo 2.3: Dadas as matrizes abaixo, classifique-as.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} x^2 & \operatorname{sen} x \\ 2x & \cos x \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}^2 x & 1 \\ 0 & \cos^2 x \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: Classificando as matrizes:

A matriz A possui três linhas e duas colunas, portanto é uma matriz quadrada de ordem 3×2.

A matriz B tem uma única linha e coluna, portanto é uma matriz quadrada de ordem 1. Também é um vetor coluna ou vetor linha. Além disso, é a matriz identidade de ordem 1, ou seja I_1.

A matriz C é uma vetor linha de tamanho 3.

A matriz D tem duas linhas e uma coluna, portanto é uma matriz coluna de comprimento 2. Note que a matriz é formada pelas variáveis x e y.

A matriz E tem duas linhas e duas colunas, portanto é uma matriz quadrada de ordem 2. Note que a matriz é formada por funções.

A matriz F é retangular de ordem 2×3 e nula.

A matriz G é quadrada de ordem 4, tem todos elementos abaixo da diagonal nulos e portanto é triangular superior.

A matriz H é quadrada de ordem 2 e diagonal.

A matriz I é quadrada de ordem 3 e simétrica. Note que $a_{12} = 0 = a_{21}$, $a_{13} = -1 = a_{31}$ e $a_{23} = -2 = a_{32}$.

A matriz J é quadrada de ordem 3, tem todos elementos acima da diagonal nulos e portanto é triangular inferior.

A matriz K é quadrada de ordem 2, tem todos elementos abaixo da diagonal nulos e portanto é triangular superior.

A matriz L é a matriz identidade de ordem 3 (quadrada e diagonal), ou seja, I_3. □

2.2 Operações de Vetores

Os vetores, como estrutura algébrica que lista dados, possuem algumas operações principais: (1) Igualdade de Vetores; (2) Soma/Diferença de Vetores; (3) Produto de Vetor por Escalar;

(4) Combinação Linear de Vetores; e (5) Produto Escalar entre Vetores. Definindo cada uma delas:

Definição 2.12: Igualdade de Vetores

A **igualdade** de dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ocorre se os vetores possuem o mesmo tamanho e os seus elementos correspondentes são iguais. Ou seja:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \iff u_i = b_i, \; \forall i$$

Exemplo 2.4: Determine os valores de x, y, z para que os vetores abaixo sejam iguais.

$$\begin{bmatrix} x+3 & 2 & z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x & y-2 & x \end{bmatrix}$$

Solução: Os vetores possuem o mesmo tamanho e todos os elementos correspondentes devem ser iguais. Analisando cada termo e obtendo o vetor final:

$$\begin{array}{llll} 1: & x+3 = 4x & \implies & x = 1 \\ 2: & 2 = y-2 & \implies & y = 4 \\ 3: & z^2 = x = 1 & \implies & z = \pm 1 \end{array} \implies \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(Vetor Final)}.$$

$\square$

Definição 2.13: Soma/Diferença de Vetores

A **soma/diferença** de dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ resulta em um vetor $\mathbf{w}$, cujos elementos são a soma/diferença dos elementos correspondentes dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Assim:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \iff w_i = u_i + v_i, \; \forall i$$
$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \iff w_i = u_i - v_i \; \forall i$$

Para esta operação, os vetores devem possuir o mesmo tamanho.

Dadas os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ as seguintes propriedades são válidas:

(i) Comutativa: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(ii) Associativa: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(iii) Vetor nulo: $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

(iv) Vetor oposto: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

O vetor oposto $-\mathbf{u}$ é denominado **vetor oposto ao vetor** $\mathbf{u}$ e todos os seus elementos são opostos ao vetor $\mathbf{u}$, ou seja, $-u_i = (-1) \cdot u_i$.

Exemplo 2.5: A partir dos vetores abaixo, calcule:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$; (c) $-\mathbf{u}$

Solução: Como os vetores possuem o mesmo tamanho, todas as operações podem ser feitas:

(a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+3 & -1+1 & 0+0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $\mathbf{u}-\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1-0 & 2-3 & -1-1 & 0-0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) O vetor oposto $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} + -\mathbf{u} = \mathbf{0} \rightarrow -\mathbf{u} = \mathbf{0} - \mathbf{u}$$
$$-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

□

Definição 2.14: Produto de Vetor por Escalar

O **produto de um escalar** $\alpha \in \mathbb{R}$ **por um vetor** $\mathbf{u}$ resulta em um vetor $\mathbf{w}$, cujos elementos são o produto de α pelos respectivos elementos de $\mathbf{u}$. Assim:

$$\mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{u} \iff w_i = \alpha \cdot u_i, \ \forall i$$

Os vetores desta operação devem possuir o mesmo tamanho.

Dados os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades são válidas:

(i) Distributiva $\alpha \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$

(ii) Distributiva $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}$

(iii) Associativa $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{u}$

(iv) Vetor nulo $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(v) Vetor oposto $-1 \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$

Exemplo 2.6: A partir do vetor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule:

(a) $2\mathbf{u}$ (b) $-\mathbf{u}$;

Solução:

(a) $2\mathbf{u}$:

$$2\mathbf{u} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2\cdot(-1) & 2 \cdot 0 \end{bmatrix}$$
$$2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) O vetor oposto $-\mathbf{u}$ pode ser obtido multiplicando $\mathbf{u}$ por -1:

$$-\mathbf{u} = (-1)\cdot\mathbf{u} = (-1)\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição 2.15: Combinação Linear de Vetores

A **combinação linear de vetores** ocorre quando utilizamos as operações de soma de vetores e produto de vetor por escalar. Uma combinação linear de vetores $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\ldots$, $\mathbf{u_n}$, usando os escalares α_1, α_2, $\ldots$, α_n, resulta no vetor $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{u_n}.$$

Exemplo 2.7: Dados os vetores abaixo, calcule a combinação linear $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: Algebricamente:

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$$
$$\mathbf{w} = 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

□

Exemplo 2.8: Dados os vetores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule a combinação linear que gera os vetores:

(a) $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Solução:

(a) Algebricamente, temos que encontrar os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Olhando as equações geradas por elementos correspondentes:

$$\begin{cases} 1\alpha + 0\beta = 3 \\ 2\alpha + 2\beta = 5 \\ 1\alpha + 0\beta = 3 \end{cases}$$

Por fim, chegamos em um sistema de equações com as variáveis α e β. Resolvendo o sistema, chegamos a conclusão que $\alpha = 3$ e $\beta = -0,5$. Vamos conferir?

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$$
$$\mathbf{w} = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 0,5\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Portanto, o resultado está correto!

(b) Analogamente, temos que encontrar os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{s} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Olhando as equações geradas por elementos correspondentes:

$$\begin{cases} 1\alpha + 0\beta = 1 \\ 2\alpha + 2\beta = 2 \\ 1\alpha + 0\beta = 3 \end{cases}$$

Obtemos novamente um sistema de equações com as variáveis α e β. Entretanto, na primeira equação $\alpha = 1$ e na terceira equação $\alpha = 3$. Assim, não temos solução para este sistema, visto que α não pode assumir dois valores ao mesmo tempo. Portanto, não existe combinação linear dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ que gerem o vetor $\mathbf{s}$. □

Definição 2.16: Produto Escalar

O **produto escalar (também conhecido como produto interno)** de dois vetores é dado pela soma dos produtos elemento por elemento. Assim, dados dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, ambos de tamanho n, o produto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (ou $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$) entre eles é dado por:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n.$$

Observe que o resultado do produto escalar é um escalar/número e não um vetor.

Exemplo 2.9: Calcule o produto escalar dos vetores a seguir:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução: Aplicando a definição de produto escalar:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 5$$

□

Exemplo 2.10: Para a construção de uma casinha de um puxadinho, precisamos de uma certa quantidade de material a um determinado preço unitário. A tabela abaixo resume isso:

	Ferro	Madeira	Tinta	Tijolo	Telha
Qtd	3	5	1	1	2
Custo unitário	15	7	4	9	11

Calcule o custo total do puxadinho.

Solução: Neste problema, para cada item, podemos gerar o seu custo multiplicando a quantidade daquele item pelo seu custo unitário. Para obter o custo total, basta somar todos os custos. Se observarmos bem de perto, isso é a definição de produto escalar, pois é a soma dos produtos correspondentes. Logo:

$$\mathbf{qtd} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{cst} = \begin{bmatrix} 15 & 7 & 4 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$
$$\text{Custo total} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 & 7 & 4 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$
$$\text{Custo total} = 3 \cdot 15 + 5 \cdot 7 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 11$$
$$\text{Custo total} = 115 \text{ unidades monetárias}$$

□

2.3 Operações de Matrizes

Para matrizes há várias operações usuais: (1) Igualdade de Matrizes; (2) Soma/Diferença de Matrizes; (3) Produto de Matriz por Escalar; (4) Transposta de Matriz; (5) Multiplicação de Matrizes; e (6) Potência de Matrizes Quadradas. As operações (1), (2) e (3) são análogas às operações de vetores. A operação de combinação linear de matrizes não é usual, por isso não será apresentada aqui, mas também é análoga à combinação linear de vetores, visto que é uma operação derivada das operações (2) e (3). Definindo cada uma das operações de matrizes:

Definição 2.17: Igualdade de Matrizes

A **igualdade** de duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ ocorre se as matrizes possuem o mesmo tamanho e os elementos correspondentes são iguais. Ou seja,

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij},\ \forall i, j$$

Exemplo 2.11: Determine os valores de x, y, z e w para que as matrizes abaixo sejam iguais.

$$\begin{bmatrix} x+3 & 2 \\ z^2 & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x & y+2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Solução: As matrizes possuem a mesma dimensão: 2×2 e todos os elementos correspondentes devem ser iguais. Analisando cada termo a_{ij} e obtendo a matriz final.

$$\begin{array}{lrcr} a_{11}: & x+3 = 4x & \Longrightarrow & x = 1 \\ a_{12}: & 2 = y+2 & \Longrightarrow & y = 0 \\ a_{21}: & z^2 = 1 & \Longrightarrow & z = \pm 1 \\ a_{22}: & 3w = -3 & \Longrightarrow & w = -1 \end{array} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{(Matriz final).}$$

□

Definição 2.18: Soma/Diferença de Matrizes

Analogamente aos vetores, a **soma/diferença** de duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ resulta em uma matriz $C_{m\times n}$, cujos elementos são a soma/diferença dos elementos correspondentes das matrizes A e B. Assim:

$$C = A + B \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \forall i, j$$
$$C = A - B \iff c_{ij} = a_{ij} - b_{ij},\ \forall i, j$$

Para esta operação, as matrizes devem possuir o mesmo tamanho.

Dadas as matrizes $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ e $C_{m\times n}$, as seguintes propriedades são válidas:

(i) Comutativa: $A + B = B + A$

(ii) Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

(iii) Matriz nula: $A_{m\times n} + 0_{m\times n} = A_{m\times n}$

(iv) Matriz oposta: $A_{m\times n} + (-A)_{m\times n} = 0_{m\times n}$

A matriz $-A$ é denominada **matriz oposta à matriz** A e deve ter todos os seus elementos opostos à matriz A, ou seja, $(-a)_{ij} = (-1)\cdot a_{ij}$.

Exemplo 2.12: A partir das matrizes abaixo, calcule:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) $A + B$; (b) $A - B$; (c) $-A$

Solução: As matrizes A e B são matrizes quadradas de ordem 2.

(a) A soma de $A + B$ pode ser feita, pois ambas matrizes são 2×2. Assim:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+3 \\ -1+1 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) A diferença $A - B$ pode ser feita, pois ambas matrizes são 2×2. A matriz $-B$ é a matriz oposta a B. Assim:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-0 & 2-3 \\ -1-1 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) A matriz oposta $-A$ é tal que:

$$A + (-A) = 0 \rightarrow -A = 0 - A$$

$$-A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

□

Definição 2.19: Produto de Matriz por Escalar

O **produto de um escalar** $\alpha \in \mathbb{R}$ **por uma matriz** $A_{m\times n}$ resulta em uma matriz $C_{m\times n}$, cujos elementos são o produto de α pelos respectivos elementos de A. Assim:

$$C = \alpha\cdot A \Longleftrightarrow c_{ij} = \alpha\cdot a_{ij},\ \forall i, j$$

Dadas as matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades são válidas:

(i) Distributiva $\alpha\cdot(A + B) = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B$

(ii) Distributiva $(\alpha + \beta)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot A$

(iii) Associativa $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$

(iv) Matriz nula $0 \cdot A_{m\times n} = 0_{m\times n}$

(v) Matriz oposta $-1 \cdot A = -A$

Exemplo 2.13: A partir das matrizes abaixo, calcule:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) $-A$; (b) $3B - A$; (c) $2A - 2B$

Solução: As matrizes A e B são matrizes quadradas de ordem 2.

(a) A matriz oposta $-A$ pode ser obtida multiplicando A por -1:

$$-A = (-1) \cdot A = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) A combinação linear $3B - A$ pode ser feita, pois ambas matrizes são 2×2. Assim:

$$3B - A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3B - A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 - 1 & 3 \cdot 3 - 2 \\ 3 \cdot 1 - (-1) & 3 \cdot 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) A diferença $2A - 2B$ pode ser feita, pois ambas matrizes são 2×2. A matriz $-B$ é a matriz oposta a B. Assim:

$$2A - 2B = 2(A - B) = 2\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$2A - 2B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 - 0 & 2 - 3 \\ -1 - 1 & 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

□

Definição 2.20: Matriz Transposta

A **transposição de uma matriz** $A_{m\times n}$ resulta em uma matriz $A^T_{n\times m}$, em que as linhas e colunas são invertidas, ou seja, os elementos que estavam dispostos em uma linha passam a ser dispostos em coluna e vice-versa. Assim, a matriz transposta A^Tterá seus elementos $a^T_{ij} = a_{ji}$. Note que as matrizes A e A^T possuem seus tamanhos invertidos.

Dadas as matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ quaisquer e $\alpha\mathbb{R}$, as seguintes propriedades são válidas:

(i) Transposta da transposta $\left(A^T\right)^T = A$

(ii) Transposta da soma $(A + B)^T = A^T + B^T$

(iii) Transposta do produto por escalar $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$

(iv) Matriz simétrica Uma matriz é simétrica se $A = A^T$

(v) Matrizes triangulares A transposta de uma matriz triangular superior é triangular inferior e vice-versa.

Exemplo 2.14: Calcule as transpostas das matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & \pi \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \pi \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) A^T; (b) B^T; (c) C^T;

Solução:

(a) A matriz A possui tamanho 3×2, então a matriz transposta A^T possui tamanho 2×3. Trocando as linhas e colunas:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

(b) A matriz B é quadrada de ordem 3, assim como a sua matriz transposta B^T. Trocando as linhas e colunas:

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \pi \end{bmatrix}$$

Perceba que a matriz transposta $B^T = B$, portanto a matriz B é simétrica.

(c) A matriz C é quadrada de ordem 2 e triangular inferior. A matriz transposta C^T também possui ordem 2. Trocando as linhas e colunas:

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Perceba que a matriz transposta C^T é triangular superior.

(d) A matriz D é um vetor linha de tamanho 2. A matriz transposta D^T será portanto um vetor coluna também de tamanho 2:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

Definição 2.21: Multiplicação de Matrizes

A **multiplicação de duas matrizes** $A_{m\times n}$ **e** $B_{n\times p}$ resulta em uma matriz $C_{m\times p}$, em que os elementos c_{ij} são dados pela soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna de B. Assim, no produto $C = A \cdot B$:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$c_{ij} = A_{\text{linha } i} \cdot B_{\text{coluna } j} \quad \text{(Produto escalar)}$$

Para formar cada elemento c_{ij}, basta fazer o produto escalar do vetor da linha i da matriz A com o vetor da coluna j da matriz B. Por conta disso, o número de colunas da matriz A e o número de linhas da matriz B devem possuir a mesmo tamanho n.

Dadas as matrizes A, B e C e $\alpha \in \mathbb{R}$, e em mente que na ordem do produto de duas matrizes, o produto só está definido se a matriz da esquerda tem o número de colunas igual ao número de linhas da matriz da direita. Nesse caso, as seguintes propriedades são válidas:

(i) Não-comutativa: Em geral, $A \cdot B \neq B \cdot A$ (inclusive, um deles pode ser indefinido).

(ii) Matriz nula: $A_{m\times n} \cdot 0_{n\times p} = 0_{m\times n} \cdot A_{n\times p} = 0_{m\times p}$

(iii) Matriz Identidade: $A_{m\times n} \cdot I_n = I_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$

(iv) Distributiva pela esquerda $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

(v) Distributiva pela direita $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

(vi) Associativa $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

(vii) Transposta do produto $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Exemplo 2.15: Sejam as matrizes A e B, calcule $C = A \cdot B$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: $A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 2}$ é definido, pois $ncol(A) = 3 = nlin(B)$ e resulta em $C_{2\times 2}$:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Visualmente, o produto pode ser feito conforme o esquema abaixo. Perceba que o elemento c_{11} depende da linha 1 da matriz A e da coluna 1 da matriz B. O elemento c_{12} depende da linha 1 da matriz A e da coluna 2 da matriz B. E assim sucessivamente.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -5$$
$$c_{12} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 6$$
$$c_{21} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = -3$$
$$c_{22} = -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 2$$
$$C = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

□

Exemplo 2.16: Seja a matriz A e o vetor $\mathbf{v}$, calcule $C = A \cdot \mathbf{v}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Solução: Para este produto, o vetor $\mathbf{v}$ pode ser visto como uma matriz coluna 3×1. Assim, $A_{2\times 3} \cdot \mathbf{v}$ é definido, pois $ncol(A) = 3 = nlin(\mathbf{v})$. O resultado é uma matriz coluna/vetor $C_{2\times 1}$:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Visualmente, o produto pode ser feito conforme o esquema abaixo.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$c_{11} = 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = -5$$
$$c_{21} = -1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = -3$$
$$C = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ -x + z \end{bmatrix}$$

□

Definição 2.22: Potência de Matrizes Quadradas

A **matriz quadrada** $A_{n\times n}$ **elevada a** p**-ésima potência** é dada pelo produto da matriz A por si mesma p vezes, ou seja: $A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{p \text{ vezes}}$.

Exemplo 2.17: Seja a matriz quadrada A, calcule A^2 e A^3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução: Como $A^2 = A \cdot A$, então:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -1$$
$$c_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 2$$
$$c_{21} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -1$$
$$c_{22} = -1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = -2$$
$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Já $A^3 = A \cdot A^2$, ou seja, fazendo de forma direta:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot(-1) & 1\cdot 2+2\cdot(-2) \\ -1\cdot(-1)+0\cdot(-1) & -1\cdot 2+0\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \square$$

Um último exemplo, combinando as operações:

Exemplo 2.18: A partir das matrizes abaixo, calcule:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) $2A - 3B^T$; (b) $A \cdot B - B \cdot A$; (c) A^4

Solução: As matrizes possuem as seguintes dimensões: $A_{3\times3}$, $B_{3\times3}$.

(a) A combinação $2A - 3B^T$ é dada por:

$$2A - 3B^T = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$2A - 3B^T = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3B^T = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3\cdot(-1) & -3\cdot 0 & -3\cdot(-1) \\ -3\cdot 1 & -3\cdot 0 & -3\cdot 2 \\ -3\cdot 0 & -3\cdot 2 & -3\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3B^T = \begin{bmatrix} 2+3 & 0+0 & 6+3 \\ -2+(-3) & 0+0 & 2+(-6) \\ 2+0 & 4+(-6) & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 9 \\ -5 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) A expressão $A \cdot B - B \cdot A$ será feita por partes: $A \cdot B$ e $B \cdot A$. Assim, $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot 0+3\cdot(-1) & 1\cdot 1+0\cdot 0+3\cdot 2 & 1\cdot 0+0\cdot 2+3\cdot 0 \\ -1\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot(-1) & -1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 2 & -1\cdot 0+0\cdot 2+1\cdot 0 \\ 1\cdot(-1)+2\cdot 0+0\cdot(-1) & 1\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot 2 & 1\cdot 0+2\cdot 2+0\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Em seguida, $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & -1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & -1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por fim, a diferença entre $A \cdot B$ e $B \cdot A$:

$$A \cdot B - B \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B - B \cdot A = \begin{bmatrix} -4 - (-2) & 7 - 0 & 0 - (-2) \\ 0 - 2 & 1 - 4 & 0 - 0 \\ -1 - (-3) & 1 - 0 & 4 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Observe que $A \cdot B \neq B \cdot A$, o que mostra que o produto entre matrizes não é comutativo.

(c) A expressão $A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$ também pode ser escrita como: $A^4 = A^2 \cdot A^2$, sendo que $A^2 = A \cdot A$. Portanto, calculando A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & -1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Em seguida $A^4 = A^2 \cdot A^2$:

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 4 \cdot 4 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 4 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \\ 0 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) & 0 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot 5 \\ -1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) & -1 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 0 & -1 \cdot 3 + 0 \cdot (-3) + 5 \cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 13 & 36 & 9 \\ 3 & 4 & -21 \\ -9 & -6 & 22 \end{bmatrix}$$

Observe que poderíamos ter multiplicado da maneira mais convencional, com $A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$, fazendo primeiro $A^2 = A \cdot A$, em seguida $A^3 = A^2 \cdot A$ e, por último, $A^4 = A^3 \cdot A$. Da maneira convencional, faríamos três multiplicações de matrizes. Entretanto, da maneira que o exercício foi feito, otimizamos o processo com apenas duas multiplicações de matrizes. $\square$

2.4 Exercícios

Vários dos exercícios podem ser resolvidos utilizando programação. Tente usar o Google Colab + Python para ajudar na resolução destes problemas!

1. Dados os vetores $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (2, -1)$ e $\mathbf{w} = (3, 1)$, calcule:

   (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$;
   (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$;
   (c) $\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}$;
   (d) $2 \cdot \mathbf{u} - 3 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}$;
   (e) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$;
   (f) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

2. Dados os vetores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, -1)$ e $\mathbf{w} = (2, -1, 0)$, calcule:

   (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$;
   (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$;
   (c) $-3 \cdot \mathbf{u} + 4 \cdot \mathbf{v} - \mathbf{w}$;
   (d) $2 \cdot \mathbf{u} - 3 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}$;
   (e) $2 \cdot \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$;
   (f) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

3. Determine os tamanhos e tipos das matrizes abaixo e os resultados das operações:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$$

   (a) $A + B$
   (b) $2A - B$
   (c) A^T
   (d) $A \cdot C$
   (e) $C \cdot D$
   (f) $D \cdot B$
   (g) $B^T \cdot B$
   (h) $A \cdot C \cdot D \cdot B$
   (i) $A \cdot B^T + D^T \cdot D$

4. Determine os tipos das matrizes abaixo e os resultados das operações:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) $A + B - C + D - I_3$
   (b) $B^T \cdot A$
   (c) $D \cdot C$
   (d) $C^T \cdot D^T$
   (e) $C \cdot 2I_3$
   (f) $A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot I_3$
   (g) $B \cdot (A + D)$
   (h) $C + C^2 + C^3 + C^4$
   (i) $A^2 + B^2$

5. Considere as matrizes A e B, de tamanho 2×2, tal que: $a_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{se } i = j \\ -i, & \text{se } i \neq j \end{cases}$ e $b_{ij} = 2i - 3j$. Determine:

   (a) A
   (b) B
   (c) $A + B$;
   (d) $4B - 3A$
   (e) $A \cdot B$;
   (f) $B \cdot 2A$;
   (g) $(A \cdot B)^2$
   (h) $A^2 \cdot B^2$

6. Determine a matriz A, de ordem 3×3 cujos elementos são dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i - j, & \text{se } i < j \\ i^2 + j, & \text{se } i = j \\ -2i + j, & \text{se } i > j \end{cases}$$

7. O traço de uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ é a soma dos elementos da diagonal principal desta matriz, determinado por $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Calcule o traço das seguintes matrizes:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

   (b) $B = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}^2\theta & \theta \\ -\theta & \cos^2\theta - 1 \end{bmatrix}$

   (c) I_n

   (d) 0_n

   (e) $a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j, & \text{se } i = j \\ i + j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

8. Considere a matriz A abaixo. Qual o resultado de A^2, A^3, A^6 e A^8? O que seria A^1 e A^0?
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Determine o valor de x para que as matrizes abaixo sejam simétricas.

   (a) $A = \begin{bmatrix} x & 3x-2 \\ 2x+1 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x+3 & 0 \end{bmatrix}$

10. Determine os valores de x, y e z para que as matrizes sejam iguais.
$$\begin{bmatrix} x^2+3 & 2y \\ 2^z & x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x & y+2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Determine os valores de x, y, z e w para que as matrizes sejam iguais.
$$\begin{bmatrix} 2x & 8 \\ 36 & w - \dfrac{4}{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & y-2 \\ z^2 & 3 \end{bmatrix}$$

12. Encontre x, y, z, w para que:
$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Dada a matriz $A_{4\times 4}$, com elementos a_{ij}, determine a matriz A resultante que satisfaz as condições:

   (a) $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$;

   (b) $a_{ij} = 0$, se $i = j$;

   (c) $a_{ij} = 0$, se $i + j = 5$;

   (d) $a_{ij} = i + j$

   (e) $a_{ij} = \dfrac{i+1}{j}$

   (f) $a_{ij} = 0$, se $i < j$;

   (g) $a_{ij} = 0$, se $i + 1 > j$;

   (h) $a_{ij} = 0$, se $|i - j| \geq 2$;

14. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix}$. Mostre que A é idempotente, isto é, $A = A^2$.

15. Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Mostre que A é ortogonal, isto é, $A \cdot A^T = I$.

16. Considere $A = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$. Mostre que A é ortogonal.

17. Considere $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Mostre que A é ortogonal.

18. Considere $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$. Mostre que A é nilpotente, isto é, para alguma potência inteira positiva p de A, $A^p = 0_{2\times 2}$ (matriz nula). O valor de p é denominado índice de nilpotência.

19. Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Mostre que A é nilpotente e calcule o índice de nilpotência.

20. Suponha as matrizes desconhecidas A, B e C, mas que se são dados os produtos AB e AC. Como poderiam ser calculados os itens abaixo?

    (a) $A \cdot (C + B)$;

    (b) $A \cdot (2B - C)$;

    (c) $C^T \cdot A^T$;

    (d) $A \cdot B \cdot B^T \cdot A^T$;

21. Por que para matrizes A e B, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, em geral?

22. O produto de matrizes simétricas é sempre simétrico? Prove ou mostre uma contra-prova.

23. O produto de matrizes triangulares superiores é sempre triangular superior? Prove ou mostre uma contra-prova.

24. Uma pequena loja de roupas organizou seu estoque de camisetas em duas prateleiras de acordo com os modelos A e B. O estoque foi distribuído do seguinte modo: Prateleira A, com 13 camisetas P, 15 camisetas M e 27 camisetas G; e Prateleira B, com 18 camisetas P, 19 camisetas M e 24 camisetas G. O preço das camisetas era o mesmo para os dois modelos e está representado na tabela abaixo.

Tamanho	Preço ($R\$$)
P	13,50
M	15,50
G	16,50

    Qual o valor total que a loja possuía em camisetas?

25. Um projeto de pesquisa sobre dietas atua com adultos e crianças de ambos os sexos. A composição dos participantes no projeto é dada pela tabela abaixo. Ao lado, a tabela da quantidade diária (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos consumidos por cada criança e adulto é apresentada:

	Adultos	Crianças
Masculino	80	120
Feminino	100	200

	Proteínas	Gorduras	Carboidratos
Adultos	20	20	20
Crianças	10	20	30

(a) Quantos gramas de proteínas são consumidos diariamente pelos homens no projeto?

(b) Quantos gramas de gordura são consumidos diariamente pelas mulheres no projeto?

26. Uma fábrica produz quatro produtos, P_1, P_2, P_3 e P_4. Para produzí-los, usa três matérias primas distintas m_1, m_2 e m_3. Para cada unidade de P_1, são utilizadas 1 unidade de m_1, 2 unidades de m_2 e 2 unidades de m_3. Para cada unidade de P_2, são usadas 2 unidades de m_1 e 1 unidade de m_3. Para cada unidade de P_3, são utilizadas 1 unidade de cada matéria-prima m_1, m_2 e m_3. Por fim, para cada unidade de P_4, são necessárias 3 unidades de m_1, 1 unidade de m_2 e 3 unidades de m_3. Determine:

   (a) Uma matriz que relaciona a quantidade de matéria-prima (linha) por produto final (coluna).

   (b) A quantidade de cada matéria-prima a ser utilizada se forem feitas 10, 20, 15 e 10 unidades de P_1, P_2, P_3 e P_4, respectivamente.

   (c) A quantidade de cada matéria-prima a ser utilizada se forem feitas x_1, x_2, x_3 e x_4 unidades de P_1, P_2, P_3 e P_4, respectivamente.

27. Existem três marcas de automóveis disponíveis no mercado: Jacaré, Piranha e Urubu. O termo p_{ij} da matriz P é a probabilidade de que um dono de carro da coluna j mude para um carro da linha i, quando comprar um carro novo. As linhas e colunas estão ordenadas com as marcas: (1) Jacaré, (2) Piranha e (3) Urubu.

(1) Jacaré	(2) Piranha	(3) Urubu	
0,7	0,3	0,4	(1) Jacaré
0,2	0,5	0,4	(2) Piranha
0,1	0,2	0,2	(3) Urubu

Assim, o termo $p_{12} = 0,3$ indica que a probabilidade de um dono da marca (2) Piranha comprar um carro da marca (1) Jacaré é de 0,3 ou 30%. Já a matriz P^2 representa a probabilidade de se mudar de marca após duas compras. Responda:

   (a) Qual o significado dos termos da diagonal da matriz P? E dos termos fora da diagonal?

   (b) Eu tenho um carro Piranha. Na minha próxima compra, qual a probabilidade de comprar um carro da mesma marca?

   (c) Eu tenho um carro Urubu. Na minha próxima compra, qual a probabilidade de comprar um carro da marca Piranha?

   (d) Eu tenho um carro Jacaré. Qual a probabilidade de se trocar de marca de carro na próxima compra?

   (e) Tomando por base a matriz P, qual seria a pior marca? Justifique.

   (f) Tomando por base a matriz P^2, qual seria a pior marca? Justifique.

(g) Quais as probabilidades de após duas compras o cliente voltar à mesma marca? (Considere todas as três marcas).

(h) Eu tenho um carro Urubu. Qual a probabilidade de se trocar de carro daqui duas compras?

(i) Qual matriz representa a probabilidade de se mudar de marca após três compras?

(j) Qual matriz representa a probabilidade de se mudar de marca após dez compras? Tomando por base esta matriz, qual marca você acha que está vendendo menos?

28. Um banco possui três possíveis perfis econômicos (estados) de clientes: rico, classe média e pobre. A equipe de pesquisa do banco, fez uma previsão com as probabilidades de mudança de perfil para os próximos 5 anos. Tal previsão é de acordo com a tabela abaixo. Ou seja, nesta matriz de transição P, consideramos a probabilidade (p_{ij}) de um cliente do perfil da coluna j mude para um perfil da linha i, após 5 anos.

	(1) Rico	(2) Classe Média	(3) Pobre
(1) Rico	50%	20%	5%
(2) Classe Média	40%	50%	25%
(3) Pobre	10%	30%	70%

Responda:

(a) Qual o significado dos termos da diagonal da matriz P?

(b) Qual a probabilidade de um cliente com perfil rico ir para o perfil pobre daqui a 5 anos?

(c) Qual a probabilidade de um cliente ter o perfil rico daqui a 5 anos? (Considere todos os casos)

(d) Eu sou de classe média. Qual a probabilidade de eu estar em outro perfil daqui a 5 anos?

(e) Se atualmente o banco possui um terço dos clientes em cada perfil, como será a distribuição do perfil dos clientes daqui a 5 anos?

(f) Se após os 5 anos, as probabilidades forem mantidas por novos 5 anos, qual seria a matriz de transição dos 10 anos?

(g) Eu sou de classe média. Qual a probabilidade de eu estar em outro perfil daqui a 10 anos?

(h) Se atualmente o banco possui um terço dos clientes em cada perfil, como será a distribuição do perfil dos clientes daqui a 10 anos?

(i) Se a cada 5 anos, as probabilidades forem mantidas por novos 5 anos, qual seria a matriz de transição para 50 anos?

(j) Se atualmente o banco possui um terço dos clientes em cada perfil, como será a distribuição do perfil dos clientes daqui a 50 anos?

2.5 Exercícios Computacionais

Nesta Seção, todos os vetores, matrizes, métodos e funções devem ser criados/manipulados com base no módulo `numpy`.

```python
# Usa np como um alias para numpy
import numpy as np
```

Código 2.1: Importando a biblioteca numpy em Python

1. Resolva exercícios da seção anterior.
2. Para cada item abaixo, crie um vetor com números aleatórios nas seguintes condições:
   (a) Números inteiros no intervalo $[-10, 10)$ (-10 incluso, 10 não-incluso).
   (b) Números inteiros no intervalo $[-10, 10]$ (-10 incluso, 10 incluso).
   (c) Números inteiros no intervalo $(-10, 10)$ (-10 não-incluso, 10 não-incluso).
   (d) Números inteiros ímpares no intervalo $[-10, 10]$.
   (e) Números inteiros pares no intervalo $[-10, 10]$.
3. Para cada item abaixo, crie um vetor com números aleatórios nas seguintes condições:
   (a) Números reais no intervalo $[-10, 10)$ (-10 incluso, 10 não-incluso).
   (b) Números reais no intervalo $[-10, 10]$ (-10 incluso, 10 incluso).
   (c) Números reais no intervalo $(-10, 10)$ (-10 não-incluso, 10 não-incluso).
   (d) Números reais arredondados para duas casas decimais no intervalo $[-10, 10]$.
   (e) Números reais arredondados para uma única casa decimal no intervalo $[-10, 10]$.
4. Escreva uma função que identifica se um vetor é nulo.
5. Escreva uma função que identifica se uma matriz é nula.
6. Escreva uma função que identifica se uma matriz é quadrada.
7. Escreva uma função que identifica se a matriz é diagonal.
8. Escreva uma função que identifica se a matriz é simétrica.
9. Escreva uma função que identifica se a matriz é um vetor linha ou coluna.
10. Escreva uma função que retorna uma tupla com a média aritmética, a média geométrica, a média harmônica e a média quadrática de um vetor.
11. Crie um vetor com 10 notas aleatórias reais entre 0.0 e 10.0 (ambos inclusos) e uma casa decimal. Crie também um vetor de pesos inteiros aleatórios entre 10 e 20 (ambos inclusos) para cada uma delas. Faça a média ponderada do aluno e veja se as notas foram suficientes para aprovação com nota 6.0.
12. Da mesmo forma que o exercício anterior, crie 100 vetores com 10 notas aleatórias. Veja quantos "alunos"passam com base na média ponderada de um vetor de pesos análogo ao exercício anterior. Quantos destes alunos passariam se a média fosse aritmética? E se a média fosse geométrica? E se a média fosse harmônica? E se a média fosse quadrática?

13. Seja a matriz A abaixo. Qual o resultado de A^2? E de A^{100}? E de A^{1000}? Calcule os tempos computacionais de cada teste. Tem muita diferença de resultado entre os dois últimos testes?

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 3

Sistemas Lineares

Nesse capítulo, atuaremos na solução de sistemas lineares, utilizando principalmente a notação matricial. Sistemas lineares têm muitas aplicações principalmente na resolução de problemas de engenharia e computação, com a presença de milhares e até milhões de variáveis. Para isso, precisamos entender o que é uma equação linear, um sistema linear, quando tais sistemas possuem solução, e como obter uma solução. Começamos com algumas definições, que serão colocadas nos números reais, mas podem ser facilmente estendida para os números complexos, por exemplo.

Definição 3.1: Equação Linear

Uma **equação linear com** n **incógnitas** x_j, $1 \leq j \leq n$, tem o seguinte formato:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Onde os coeficientes $a_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, e o termo independente $b \in \mathbb{R}$.
A solução X é uma matriz coluna (vetor) $X^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$ que satisfaz a equação.

Definição 3.2: Sistema de Equações Lineares

Um **sistema de equações lineares (sistema linear) com** m **equações e** n **incógnitas** x_j, $1 \leq j \leq n$, tem o seguinte formato:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde os coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e os termos independentes $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
A solução X é uma matriz coluna (vetor) $X^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$ que satisfaz as m equações.

O sistema da definição 3.2 pode ser escrito no **formato matricial**, em que A é a matriz dos coeficientes que multiplica a matriz coluna das variáveis/incógnitas X e é igual à matriz coluna dos termos independentes B. Assim, $A \cdot X = B$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Cada linha i da matriz de coeficientes A apresenta os coeficientes presentes na i-ésima equação do sistema linear. Cada coluna j da matriz de coeficientes A apresenta os coeficientes que multiplicam a i-ésima variável do vetor X, ou seja, x_i. Portanto, as colunas de A são organizadas de acordo com a ordem do vetor solução X.

Uma outra maneira de visualizar o sistema é por meio da **matriz ampliada (matriz aumentada)** do sistema linear, combinando a matriz de coeficientes e o vetor de termos independentes. Observe que, neste formato, as variáveis do vetor solução X ficam implícitas.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Outra forma de descrever o sistema, é por meio da decomposição do sistema de acordo com as variáveis do vetor solução X seus respectivos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \cdot x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \cdot x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.1: Considere o sistema abaixo. Coloque-o no formato matricial, defina o número de equações m e variáveis n. Determine a matriz ampliada e a forma decomposta.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Solução: O sistema tem duas equações ($m = 2$) e três variáveis x_1, x_2 e x_3 ($n = 3$). O sistema no formato matricial fica $A \cdot X = B$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Já a matriz ampliada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Por fim, decompondo com relação às variáveis:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ □

3.1 Operações em Sistemas Lineares

Num sistema linear, podemos manipular as equações por meio de algumas operações, sem que a solução do sistema seja modificada. Essas operações são:

(i) **Permutação de duas equações:** $eq_i \leftrightarrow eq_j$;

(ii) **Produto de uma equação por um escalar não-nulo:** $eq_i \rightarrow \alpha \cdot eq_i$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$;

(iii) **Combinação de duas equações:** $eq_i \rightarrow \alpha \cdot eq_i + \beta \cdot eq_j$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$;

Na matriz ampliada, cada linha possui os coeficientes e o termo independente de uma equação do sistema linear. Então, todas as operações de equações apresentadas podem ser vistas como operações de linha na matriz ampliada. Portanto, na matriz ampliada, as operações abaixo são possíveis:

(i) **Permutação de duas linhas:** $l_i \leftrightarrow l_j$;

(ii) **Produto de uma linha por um escalar não-nulo:** $l_i \to \alpha \cdot l_i$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$;

(iii) **Combinação de duas linhas:** $l_i \to \alpha \cdot l_i + \beta \cdot l_j$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$;

Os sistemas antes e depois das operações podem ser definidos como **sistemas equivalentes.** E o uso inteligente destas operações pode ajudar a resolver sistemas lineares.

Exemplo 3.2: Considere o sistema linear abaixo. Encontre um sistema equivalente em que é possível resolver o sistema de forma direta.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução: O sistema tem três equações ($m = 3$) e três variáveis x_1, x_2 e x_3 ($n = 3$). O sistema no formato matricial $A \cdot X = B$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Já a matriz ampliada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Agora vejamos a resolução, pela perspectiva do sistema de equações e da matriz ampliada:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

O objetivo é mudar a matriz ampliada até que a matriz de coeficientes dentro da matriz ampliada se transforme na matriz identidade, nesse caso, I_3. Na perspectiva das equações, fazemos operações até transformar o sistema em igualdades diretas. Começamos fazendo a troca da equação 1 e a equação 3, ou seja, $\boldsymbol{l_1 \leftrightarrow l_3}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Agora temos um número diferente de zero na diagonal principal da matriz de coeficientes. Como estratégia, vamos zerar o restante da primeira coluna. Assim, vamos combinar as linhas 1 e 2, com o objetivo de zerar o primeiro coeficiente da linha 2, por meio da operação $\boldsymbol{l_2 \to l_2 - 2 \cdot l_1}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

A primeira coluna da forma ampliada (e consequentemente da matriz de coeficientes) é a primeira coluna da matriz identidade I_3. Podemos tentar fazer o mesmo processo na segunda coluna. Para isso, multiplicamos a segunda linha por 1/3, ou seja, $\boldsymbol{l_2 \rightarrow l_2 \div 3}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Com o número 1 na diagonal ($a_{22} = 1$), vamos zerar o resto da segunda coluna da matriz de coeficientes. Como $a_{12} = 0$, resta apenas o $a_{32} = 1$. Para isso, combinaremos a linha 3 e a linha 2, $\boldsymbol{l_3 \rightarrow l_3 - l_2}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_3 = -2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

Observe que o sistema agora forma uma matriz triangular superior, se olharmos apenas a matriz dos coeficientes dentro da matriz ampliada. A partir desse sistema, já é possível resolver o problema original, já que facilmente podemos obter x_3, já que $2x_3 = -2$. Com o valor de x_3 podemos obter os valores de x_2 na equação 2 e de x_1 na equação 1. Entretanto, vamos continuar o que estamos fazendo: diagonalizar a matriz dos coeficientes dentro da matriz ampliada e torná-la a matriz identidade. Primeiramente, dividimos a terceira linha por 2, ou seja, $\boldsymbol{l_3 \rightarrow l_3 \div 2}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Acabamos por descobrir que $x_3 = -1$, por meio da equação 3, ou da linha 3 da matriz ampliada. Para eliminar o resto da coluna 3, temos que: $\boldsymbol{l_1 \rightarrow l_1 - l_3}$ e $\boldsymbol{l_1 \rightarrow l_1 + l_2}$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

E assim, obtemos a solução final do sistema: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = -1$. Observe que a matriz ampliada resulta no seguinte sistema equivalente no formato matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases} \qquad \square$$

Antes de discutirmos com mais cuidado o método apresentado na resolução do sistema do Exemplo 3.2, vamos observar algumas características dos sistemas lineares, por meio de sistemas equivalentes. Assim, será possível obter algumas informações das matrizes e sistema, como o posto, a nulidade e a existência e unicidade de solução. Para isso, precisamos definir a forma escalonada para matrizes.

Definição 3.3: Matriz Escalonada Reduzida

Uma **matriz está no formato escalonada reduzida (forma escada)** se atende as seguintes condições:

(i) O pivô de cada linha não-nula é 1;

(ii) O pivô de cada linha está numa coluna à direita do pivô da linha acima;

(iii) Todos os elementos de uma coluna com pivô são zero, exceto o pivô;

(iv) Todas as linhas nulas estão abaixo de qualquer linha não-nula.

O pivô é o primeiro elemento não-nulo de cada linha (da esquerda para a direita).

As linhas com pivô são chamadas de linhas independentes e as linhas nulas são chamadas de linhas dependentes. As linhas nulas/dependentes são obtidas como combinação linear das linhas independentes e não agregam informação ao sistema, pois, ao ser combinação das linhas independentes, somente repetem informações já definidas nas linhas independentes.

Exemplo 3.3: Dadas as matrizes abaixo, confirmem se estão no formato escalonado reduzido. Caso contrário, mostre as condições que a matriz não atende e faça operações no sentido de transformá-la em matriz escalonada reduzida.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz A não está na formato escalonada reduzida, pois, embora atenda as condições (i), (ii) e (iv), a condição (iii) não é atendida. Para que a matriz fique no formato escada, basta combinar a segunda e a terceira linhas: $l_2 \to l_2 + l_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{l_2 \to l_2 + l_3}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz B já está escalonada reduzida, pois atende às quatro condições.

A matriz C não está escalonada reduzida, pois não atende às condições (i) e (ii). Para que a matriz fique no formato escada, temos que primeiro permutar as linhas 1 e 2. Em seguida, como a linha dois terá o número 2 na posição do pivô, é necessário que a nova linha 2 seja multiplicada por 1/2. Ou seja, faremos a operação $l_1 \leftrightarrow l_2$ e em seguida $l_2 \to l_2 \div 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{l_2 \to l_2 \div 2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz D não está escalonada reduzida, pois não atende às condições (i), (iii) e (iv). Para colocar no formato escada, vamos trocar as linhas 2 e 3, pois a linha 2 é uma linha nula e a linha abaixo não é. Depois, basta dividir a nova linha 2 por 3, para que o pivô se torne 1.

Assim, $l_3 \leftrightarrow l_2$ e em seguida $l_2 \rightarrow l_2 \div 3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \underset{l_2 \leftrightarrow l_3}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{l_2 \rightarrow l_2 \div 3}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entretanto ainda não chegamos ao formato escada, pois a pivô da terceira coluna não está sozinho (condição (iii)). Logo, temos que fazer a combinação: $l_1 \rightarrow l_1 + l_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{l_1 \rightarrow l_1 + l_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

No fim, sempre podemos transformar uma matriz em uma matriz escalonada reduzida? Além disso, essa matriz resultante é única? O teorema a seguir garante a existência e unicidade desta matriz. Em seguida, definimos dois conceitos importantes relacionados à matriz escalonada reduzida.

Teorema 3.1: Existência e Unicidade

Toda matriz $A_{m\times n}$ é equivalente a uma única matriz escalonada reduzida, por meio de operações de linha.

Definição 3.4: Posto de uma Matriz

O **posto de uma matriz** $A_{m\times n}$ é o número de linhas não-nulas da matriz escalonada reduzida equivalente a A. O posto de A é denotado por $\operatorname{posto} A$.

Definição 3.5: Nulidade de uma Matriz

A **nulidade de uma matriz** $A_{m\times n}$ é a diferença do número de colunas n da matriz A pelo posto de A. A nulidade de A é denotada por $\operatorname{nul} A = n - \operatorname{posto} A$.

Exemplo 3.4: Qual o posto e a nulidade das matrizes do Exemplo 3.3?

Solução: As matrizes possuem as seguintes equivalentes escalonadas reduzidas:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz A tem posto $\operatorname{posto} A = 3$ e a nulidade de A é $\operatorname{nul} A = n - \operatorname{posto} A = 4 - 3 = 1$.
A matriz B tem posto $\operatorname{posto} B = 2$ e a nulidade de B é $\operatorname{nul} B = n - \operatorname{posto} B = 5 - 2 = 3$.
A matriz C tem posto $\operatorname{posto} C = 2$ e a nulidade de C é $\operatorname{nul} C = n - \operatorname{posto} C = 3 - 2 = 1$.
A matriz D tem posto $\operatorname{posto} D = 2$ e a nulidade de D é $\operatorname{nul} D = n - \operatorname{posto} D = 3 - 2 = 1$.

□

Exemplo 3.5: Considere o sistema linear abaixo. Encontre a matriz escalonada reduzida equivalente. Se for possível, resolva o sistema. Seria possível resolver o sistema se a última equação resultasse em 2 ao invés de 3?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Solução: O sistema tem três equações ($m = 3$) e duas variáveis x_1 e x_2 ($n = 2$). O sistema no formato matricial fica $A \cdot X = B$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Já a matriz ampliada é dada por:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Escalonando a matriz ampliada, pela primeira coluna, deixamos o valor 1 no pivô e zeramos o restante da coluna:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{l_2 \to l_2 - 2l_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{l_3 \to l_3 - l_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Na segunda coluna, repetimos o processo, ou seja, deixamos 1 no pivô e zeramos o restante da coluna:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \underset{l_2 \to l_2 \div (-5)}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \overset{l_1 \to l_1 - 2 \cdot l_2}{\underset{l_3 \to l_3 + l_2}{\Longrightarrow}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Observe que o posto da matriz ampliada é 2 e o posto da matriz de coeficientes também é 2. Voltando ao sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

E assim, o sistema possui uma única solução. Note que a última equação se refere a uma linha nula e não deu nenhuma informação a mais. □

Se a última equação fosse $x_1 + x_2 = 2$, teríamos um problema, pois a matriz escalonada reduzida equivalente e o sistema final seriam (após repetir os mesmos passos):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 = -1 \end{cases}$$

No sistema de equações, embora as duas primeiras equações forneçam valores para as variáveis, a última equação é um absurdo, um paradoxo, uma indefinição! Nesse caso, há algum conflito de informações, e o sistema não pode ser resolvido, pois não existe solução para o sistema que satisfaça a última equação.

3.2 Soluções de Sistemas Lineares

Quando então será possível resolver um sistema de equações lineares? Quais os tipos de sistema, de acordo com a quantidade de soluções? E existe alguma maneira de detectar esses tipos de sistema?

Relembrando, um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas x_j, com $1 \leq j \leq n$, pode ser dado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde os coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e os termos independentes $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Há três possibilidades para este sistema de equações lineares, conforme o Teorema 3.2:

Teorema 3.2: Existência e Unicidade de Solução de Sistemas Lineares

Um sistema de m equações e n variáveis admite solução (sistema possível) se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.
Caso as matrizes tenham o mesmo posto:

(i) **Uma única solução**: se o número de variáveis for igual ao posto (nulidade da matriz de coeficientes zero), então a solução será única, ou seja, o sistema é determinado;

(ii) **Infinitas soluções**: se n for maior que o posto (nulidade da matriz de coeficientes maior que zero) então há infinitas soluções, havendo variáveis livres. Nesse caso, o sistema é indeterminado.

Caso o posto da matriz ampliada for diferente do posto da matriz dos coeficientes:

(iii) **Nenhuma solução**: Sistema impossível.

Exemplo 3.6: Considere o sistema linear abaixo. Encontre a matriz escalonada reduzida equivalente. Se for possível, resolva o sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ -x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$$

Solução: O sistema possui 3 equações e 3 incógnitas. Fazendo a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Transformando a matriz ampliada em matriz escalonada reduzida, começando pela primeira coluna (pivô 1 e o resto zero):

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 + l_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Com a primeira coluna já finalizada, partimos para a segunda coluna. Note que a linha 3 é exatamente o oposto da linha 2. Por isso, vamos fazer primeiro $l_3 \to l_3 + l_2$ e depois colocar o pivô da linha/coluna 2 igual a 1, e por último zerar o restante da coluna 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{array}\right] \underset{l_3 \to l_3 + l_2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{l_2 \to l_2 \div (-5)}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{l_1 \to l_1 - 2 \cdot l_2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/5 & -1 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Agora, com a matriz escalonada reduzida, observe que o posto da matriz ampliada e o posto da matriz de coeficientes são iguais a 2. Como os postos são iguais, há solução e o sistema é possível. A nulidade da matriz de coeficientes é 1. Portanto, há infinitas soluções. Podemos manipular as equações:

$$\begin{cases} x_1 + 3/5 x_3 = -1 \\ x_2 + 1/5 x_3 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3/5 x_3 - 1 \\ x_2 = -1/5 x_3 + 1 \end{cases}$$

Ou seja, x_3 é uma variável livre e as variáveis x_1 e x_2 são dependentes de x_3. Assim, a nulidade da matriz de coeficientes resultou no número de variáveis livres. □

Exemplo 3.7: Resolva o sistema linear visto no exemplo 3.2.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução: O sistema tem três equações $(m = 3)$ e três variáveis x_1, x_2 e x_3 $(n = 3)$. A sua matriz ampliada e a sua matriz escalonada reduzida são dadas por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Observe que o posto da matriz ampliada é 3; o posto da matriz de coeficientes é 3. Como os postos são iguais, há solução. A nulidade da matriz de coeficientes é 0. Portanto, há uma única solução, sem variáveis livres. O sistema é possível e determinado, cuja solução é dada por: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = -1$. □

Exemplo 3.8: Considere o sistema linear abaixo. Encontre a matriz escalonada reduzida equivalente. Se for possível, resolva o sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -3 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Solução: O sistema possui 3 equações $(m = 3)$ e 2 incógnitas x_1 e x_2 $(n = 2)$. A sua matriz ampliada e a sua matriz escalonada reduzida são dadas por:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Observe que o posto da matriz ampliada é 3, o posto da matriz de coeficientes é 2. Como os postos são diferentes, não há solução e o sistema é impossível. □

3.3 Métodos para Solução de Sistemas

3.3.1 Eliminação de Gauss-Jordan

O processo de eliminação de Gauss-Jordan é exatamente o processo que vimos para transformar uma matriz ampliada em uma matriz escalonada reduzida. O algoritmo é dado por 3.1.

Algoritmo 3.1: Algoritmo da Eliminação de Gauss-Jordan

Entrada: Matriz ampliada $A_{m\times(n+1)}$, com coeficientes a_{ij}, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n+1$ (coluna dos termos independentes);

```
i=1, j=1 ;                                    // Primeira linha e primeira coluna.
enquanto i ≤ m e j ≤ n faça
    enquanto a_ij == 0 e j ≤ n faça
        k = EncontraPivô(i, j) ;               // Encontra a_kj ≠ 0, k > i.
        /* Se encontrado, troca linhas i e k. Senão, próxima coluna. */
        se k então l_i ↔ l_k;
        senão j++ ;
    fim
    l_i → l_i ÷ a_ij ;                          // Torna o pivô igual a 1.
    /* Zera a coluna j, exceto o pivô. */
    para Cada linha 1 ≤ k ≤ m, k ≠ i faça
        l_k → l_k − a_kj · l_i
    fim
    i++, j++ ;                                  // Próxima linha e próxima coluna.
fim
```

O algoritmo executa o que estamos a fazer nos exemplos anteriores. Começando na primeira coluna, deve-se encontrar um pivô, torná-lo igual a 1 e zerar o resto da coluna. Em seguida, na próxima linha e coluna, repete-se o processo de busca de um pivô e anulação do resto da coluna. Caso um pivô não for encontrado para uma coluna, parte-se para a próxima coluna, mantendo-se a linha. Esse processo segue até a última coluna/linha da matriz de coeficientes. Vejamos um exemplo:

Exemplo 3.9: Se possível, resolva o sistema linear abaixo, usando o algoritmo da Eliminação de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Solução: O sistema possui 4 equações e 4 variáveis. A matriz ampliada é dada por:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Para $i = 1$ e $j = 1$, o pivô $a_{11} = 1 \neq 0$. Assim, podemos diretamente zerar o resto da coluna

$j = 1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1 \\ l_4 \to l_4 + l_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Em seguida, $i = 2$ e $j = 2$. Entretanto, na segunda coluna, ao procurar um pivô nas linhas 2, 3 e 4, verifica-se que não há pivô diferente de zero. Na mesma linha $i = 2$ e na próxima coluna, $j = 3$, temos $a_{23} = 1 \neq 0$. Em seguida, zeramos o resto da terceira coluna.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{c} l_1 \to l_1 - l_2 \\ \Longrightarrow \\ l_3 \to l_3 + 2l_2 \\ l_4 \to l_4 + 3l_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \end{array}\right]$$

Por fim, com $i = 3$ e $j = 4$, temos o pivô $a_{34} = 1$, e nos resta zerar o restante da coluna 4.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \end{array}\right] \begin{array}{c} l_1 \to l_1 - l_3 \\ \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \\ l_4 \to l_4 - l_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Com chegamos na última coluna da matriz de coeficientes, chegamos ao fim do algoritmo. Na matriz final, o posto da matriz de coeficientes e da matriz ampliada é 3. Entretanto, o número de variáveis é 4 e portanto a nulidade da matriz de coeficientes é $4 - 3 = 1$. Perceba nas equações abaixo que as variáveis x_3 e x_4 já estão definidas e a única variável dependente é x_1, com relação à variável livre x_2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 32 \\ x_3 = -9 \\ x_4 = -17 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 32 \\ x_3 = -9 \\ x_4 = -17 \end{cases} \qquad \square$$

3.3.2 Eliminação de Gauss

O processo de eliminação de Gauss é parte do processo que vimos anteriormente, entretanto, temos como objetivo chegar em uma matriz triangular superior. Além disso, não é necessário que o pivô seja igual a 1. O algoritmo é dado por 3.2.

O algoritmo executa uma parte do algoritmo de Eliminação de Gauss-Jordan. Começando na primeira coluna, deve-se procurar um pivô e zerar a coluna abaixo do pivô. Não há a necessidade do pivô ser igual a 1. Em seguida, na próxima coluna, repete-se o processo de busca de um pivô e anula-se os elementos da coluna abaixo do pivô. Esse processo segue até a última coluna/linha da matriz de coeficientes, visando formar uma matriz triangular superior. Vejamos o mesmo exemplo anterior:

Exemplo 3.10: Se possível, resolva o sistema linear abaixo usando o algoritmo de Eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Algoritmo 3.2: Algoritmo da Eliminação de Gauss

Entrada: Matriz ampliada $A_{m\times(n+1)}$, com coeficientes a_{ij}, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n+1$ (coluna dos termos independentes);

i=1, j=1 ; `// Primeira linha e primeira coluna.`

enquanto $i \leq m$ *e* $j \leq n$ **faça**

  enquanto $a_{ij} == 0$ *e* $j \leq n$ **faça**

    k = EncontraPivô(i, j) ; `// Encontra` $a_{kj} \neq 0$, $k > i$.

    `/* Se encontrado, troca linhas` i `e` k. `Senão, próxima coluna. */`

    se *k* **então** $l_i \leftrightarrow l_k$;

    senão j++ ;

  fim

  `/* Zera a coluna` j`, abaixo do pivô. */`

  para *Cada linha* $i+1 \leq k \leq m$ **faça**

    $l_k \to l_k - \dfrac{a_{kj}}{a_{ij}} \cdot l_i$

  fim

  i++, j++ ; `// Próxima linha e próxima coluna.`

fim

Solução: O sistema possui 4 equações e 4 variáveis. A matriz ampliada é dada por:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Para $i = 1$ e $j = 1$, o pivô $a_{11} = 1 \neq 0$. Assim, podemos diretamente zerar o resto da coluna $j = 1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1 \\ l_4 \to l_4 + l_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Em seguida, $i = 2$ e $j = 2$. Entretanto, na segunda coluna, para as linhas 2, 3 e 4, não há pivô diferente de zero. Na terceira coluna, $j = 3$, temos $a_{23} = 1 \neq 0$. Em seguida, zeramos o resto da terceira coluna, abaixo da linha 2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \\ l_3 \to l_3 + 2l_2 \\ l_4 \to l_4 + 3l_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \end{array}\right]$$

Por fim, com $i = 3$ e $j = 4$, temos o pivô $a_{34} = 1$, e nos resta zerar o restante da coluna 4, abaixo da linha 3.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \\ l_4 \to l_4 - l_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para $i = 4$ e $j = 5$, só temos linhas nulas. Fim do algoritmo. A matriz final é do tipo triangular superior. O número de variáveis é 4, mas as equações disponíveis são 3, e portanto a nulidade da matriz de coeficientes é $4-3=1$. Assim:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=6 \\ x_3=-9 \\ x_4=-17 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=-x_2+32 \\ x_3=-9 \\ x_4=-17 \end{cases}$$

Novamente, as variáveis x_3 e x_4 já estão definidas e a única variável dependente é x_1, com relação à variável livre x_2. □

Exemplo 3.11: Se possível, resolva o sistema linear abaixo, usando o algoritmo de Eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=15 \\ -x_1+x_2-x_3=-2 \end{cases}$$

Solução: O sistema possui 3 equações e 3 variáveis. A matriz ampliada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Para $i=1$ e $j=1$, o pivô $a_{11}=1\neq 0$. Em seguida zeramos o resto da coluna $j=1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 + l_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Em seguida, $i=2$ e $j=2$. Na segunda coluna, a linha 2 tem valor zero, mas a linha 3 tem valor 2. Assim, trocamos a ordem de 2 e 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ l_2 \leftrightarrow l_3 \\ \Longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Abaixo do novo pivô da segunda coluna já temos tudo zero, portanto vamos para a terceira coluna e terceira linha). Como a matriz já está no formato triangular superior, chegamos ao fim do algoritmo. Temos que o número de variáveis é 3 e as equações disponíveis são 3, e portanto o sistema possui uma única solução. Assim:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_2=4 \\ x_3=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=6-2-3=1 \\ x_2=\dfrac{4}{2}=2 \\ x_3=3 \end{cases}$$

□

3.3.3 Decomposição *LU*

Há outros processos para encontrar a solução de um sistema. Um deles, quando o número de equações e variáveis é o mesmo, i.e., quando a matriz de coeficientes é quadrada, é a decomposição LU. Em alguns casos, uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ pode ser decomposta em duas matrizes: (1) uma triângular inferior L (*Lower*); e (2) uma matriz triangular superior U (*Upper*), ou seja, $A_n = L\cdot U$. A matriz L tem a diagonal toda formada por 1, abaixo da diagonal os elementos são l_{ij}, $i>j$ e o restante dos elementos são nulos. A matriz U tem abaixo da diagonal os elementos nulos e da diagonal para cima elementos u_{ij}, $i\leq j$.

Mas, de que maneira isso nos ajuda? Bem, estamos interessados em resolver o sistema $Ax=b$. Onde A é a matriz de coeficientes (ordem n), x é o vetor coluna de variáveis e b é o vetor de termos independentes da equação. Se o sistema é possível e determinado (uma única solução) e pode ser decomposto em LU, então:

$$A \cdot x = b$$
$$L \cdot U \cdot x = b$$
$$\begin{cases} L \cdot y = b \\ U \cdot x = y \end{cases}$$

Onde y é um vetor de variáveis auxiliares. Podemos encontrar y no sistema $L \cdot y = b$, pois, na medida que L é triangular inferior, vamos de cima para baixo nas equações, encontrando y_1, em seguida y_2 usando y_1, e assim sucessivamente, até encontrar y_n. Depois determinamos x no sistema $U \cdot x = y$, pois, na medida que U é triangular superior, vamos de baixo para cima nas equações, encontrando x_n, em seguida x_{n-1} usando x_n, e assim sucessivamente, até encontrar x_1.

Para possuir uma decomposição LU a matriz de coeficientes do sistema de equações lineares deve ser possível e determinado. Entretanto, pode ser que a decomposição LU precise de reordenações (permutas, trocas) das linhas para que possa ocorrer. Para isso, temos o teorema abaixo:

Teorema 3.3: Decomposição LU

Seja uma sistema $Ax = b$, com a matriz de coeficientes quadrada A. Se o processo de Eliminação de Gauss pode ser executado sem troca de linhas, então a matriz A pode ser decomposta em $A = LU$, sem precisar de permutas.

Neste material vamos considerar apenas exemplos sem permutas.

Na verdade, o processo de decomposição LU é equivalente ao processo de Eliminação de Gauss. Ao final, a matriz U é a mesma matriz triangular superior resultante do processo de Eliminação de Gauss. Já a matriz L representa os valores multiplicados pela linha do pivô para anular as linhas inferiores.

Exemplo 3.12: Se possível, resolva o sistema linear abaixo usando a decomposição LU:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \end{cases}$$

Solução: O sistema possui $n = 3$ equações e 3 variáveis. A matriz de coeficientes A_3 é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, vamos tentar decompor $A = L \cdot U$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Observe que há $3 \times 3 = 9$ variáveis que precisam ser definidas, o mesmo número de elementos de A. Aqui a estratégia é analisar a primeira linha de A por meio do produto das matrizes L e U. Depois a segunda linha de A e assim sucessivamente até chegarmos à n-ésima linha de A.

Vamos à estratégia, **1ª linha de** A:

$$a_{11} = [1\ 0\ 0] \cdot [u_{11}\ 0\ 0]^T \Longrightarrow u_{11} = 1$$
$$a_{12} = [1\ 0\ 0] \cdot [u_{12}\ u_{22}\ 0]^T \Longrightarrow u_{12} = 1$$
$$a_{13} = [1\ 0\ 0] \cdot [u_{13}\ u_{23}\ u_{33}]^T \Longrightarrow u_{13} = 1$$

Partindo para a **2ª linha de** A, desconsiderando as posições já utilizadas:

$$a_{21} = [l_{21}\ 1\ 0] \cdot [u_{11}\ 0\ 0]^T \Longrightarrow l_{21}u_{11} = 2 \Longrightarrow l_{21} = -1$$
$$a_{22} = [l_{21}\ 1\ 0] \cdot [u_{12}\ u_{22}\ 0]^T \Longrightarrow l_{21}u_{12} + u_{22} = 1 \Longrightarrow u_{22} = 2$$
$$a_{23} = [l_{21}\ 1\ 0] \cdot [u_{13}\ u_{23}\ u_{33}]^T \Longrightarrow l_{21}u_{13} + u_{23} = -1 \Longrightarrow u_{23} = 0$$

Por último, a **3ª linha de** A, desconsiderando as posições já utilizadas:

$$a_{31} = [l_{31}\ l_{32}\ 1] \cdot [u_{11}\ 0\ 0]^T \Longrightarrow l_{31}u_{11} = -1 \Longrightarrow l_{31} = 2$$
$$a_{32} = [l_{31}\ l_{32}\ 1] \cdot [u_{12}\ u_{22}\ 0]^T \Longrightarrow l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 2 \Longrightarrow l_{32} = 0$$
$$a_{33} = [l_{31}\ l_{32}\ 1] \cdot [u_{13}\ u_{23}\ u_{33}]^T \Longrightarrow l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 3 \Longrightarrow u_{33} = 1$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E logo temos $L \cdot y = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 15 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = 6 \\ -y_1 + y_2 = -2 \\ 2y_1 + y_3 = 15 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 4 \\ y_3 = 3 \end{cases}$$

Por último, $U \cdot x = y$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_2 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Observe que o último sistema é igual ao último sistema do mesmo problema, usando Eliminação de Gauss. Note também que houve uma troca das linhas 2 e 3, do Exemplo 3.11 para o Exemplo 3.12. Isso foi necessário para que a decomposição LU funcionasse. □

Computacionalmente, os três métodos apresentados tem performance parecida sobre os problemas. O método LU possui alguns ajustes que o tornam um pouco mais rápido, principalmente para matrizes específicas, por exemplo matrizes simétricas.

3.4 Exercícios

Nos exercícios relacionados a equações de curvas e superfícies geométricas, faça também o desenho da respectiva curva e superfície. Para isso, a dica é usar algum aplicativo matemático como o Geogebra.

1. Determine quais equações abaixo são lineares para as variáveis x_1, x_2 e x_3.

   (a) $x_1 + 3x_2 + \sqrt{3}x_3 = 0$;

   (b) $x_1 + x_2 + x_1x_3 = 1/2$;

   (c) $2x_1 = 3x_2 - x_3$;

   (d) $\operatorname{sen} x_1 + x_2^2 + x_3 = -1$;

   (e) $\operatorname{sen}\pi \cdot x_1 + e^2x_2 = x_3 - \log 2$;

   (f) $\dfrac{x_3}{x_1 - x_2} = 2$

2. Sejam as matrizes ampliadas abaixo. Reduza as matrizes à forma escada reduzida por linhas. Calcule o posto e a nulidade de cada uma delas. Para cada uma delas, escreva um sistema linear correspondente e determine o tipo de sistema quanto às possibilidades de solução.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Descreva todas as possíveis matrizes 2×2 na forma escalonada reduzida.

4. Considere as equações $x + y + z = 2$ e $x - z = 1$. Faça um sistema de três equações e três incógnitas com as equações anteriores de modo que o sistema tenha:

   (a) Nenhuma solução;

   (b) Infinitas soluções;

   (c) Exatamente uma solução;

   (d) Exatamente a solução $x = 2$, $y = -1$ e $z = 1$;

5. Determine k, para que o sistema tenha uma única solução.

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

6. Se possível, resolva os sistemas lineares abaixo, utilizando os métodos de Gauss, Gauss-Jordan e LU.

   (a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

7. A reta é dada pela equação $y = ax + b$. A partir de dois pontos é possível escrever a equação da reta. Sejam os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Encontre um sistema linear em que é possível determinar a e b. Em seguida, use esse sistema para encontrar as retas que passam pelos pontos:

   (a) $(0, 0)$ e $(1, 1)$;
   (b) $(0, 0)$ e $(1, -1)$;
   (c) $(1, 2)$, $(2, 5)$;
   (d) $(1, -2)$ e $(2, -2)$;

8. A parábola é dada pela equação $y = ax^2 + bx + c$. Considere três pontos da parábola conhecidos: (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3). Encontre um sistema linear em que é possível determinar a, b e c. Em seguida, use esse sistema para encontrar as parábolas que passam pelos pontos:

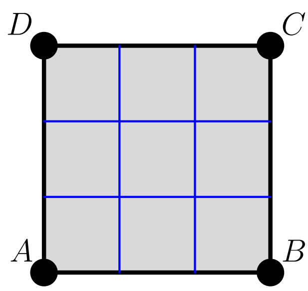
   (a) $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 4)$;
   (b) $(0, 0)$, $(1, -1)$ e $(-1, -1)$;
   (c) $(1, 2)$, $(2, 9)$ e $(-1, 6)$;
   (d) $(1, -2)$, $(2, -3)$ e $(3, -6)$;
   (e) $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$;

9. A circunferência é dada pela equação $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Considere três pontos da circunferência conhecidos: (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3). Encontre um sistema linear em que é possível determinar a, b e c. Em seguida, use esse sistema para encontrar as circunferências que passam pelos pontos:

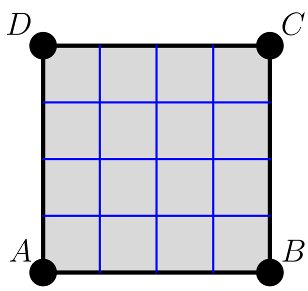
   (a) $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$;
   (b) $(1, -1)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$;
   (c) $(1, 2)$, $(2, 9)$ e $(-1, 6)$;
   (d) $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$;

10. Considere uma placa quadrada de material homogêneo, como na figura abaixo. Cada uma das bordas da placa está a uma temperatura fixa: as bordas AB, CD e DA estão a $0°C$; e a borda BC está a $100°C$. Considere a situação de equilíbrio térmico. Após gerar malhas quadradas e isométricas (em azul) para uma análise discreta das temperaturas, determine a temperatura dos pontos de interseção da malha na placa.

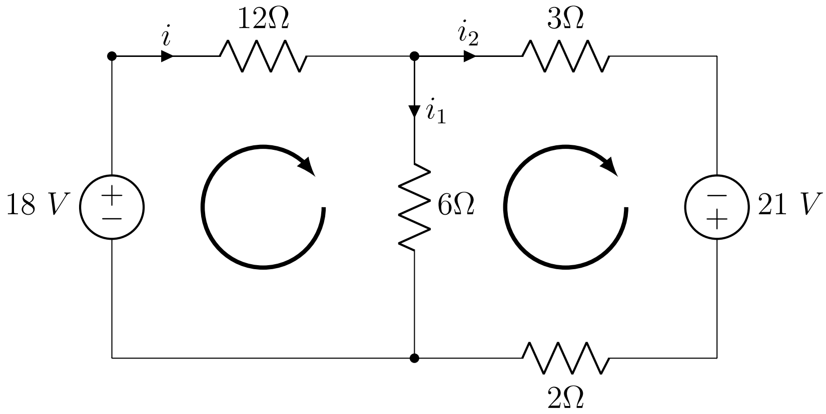
a)



b)



11. Seja o circuito elétrico a seguir, com algumas resistências. Utilizando as Leis de Kirchhoff, chegamos ao sistema de equações lineares abaixo. Encontre o valor das correntes i, i_1 e i_2.



$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ 18 - 12i - 6i_1 = 0 \\ 21 - 3i_2 - 2i_2 + 6i_1 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} i - i_1 - i_2 = 0 \\ 12i + 6i_1 = 18 \\ -6i_1 + 5i_2 = 21 \end{cases}$$

12. Faça o balanceamento das reações químicas a seguir, usando sistemas lineares. Escreva o problema no formato matricial. Tente obter a mínima proporção com as variáveis inteiras.

   (a) $xH_2 + yO_2 \;\longrightarrow\; zH_2O$;

   (b) $xNH_3 + yO_2 \;\longrightarrow\; zN_2 + wH_2O$;

   (c) $xN_2O_5 \;\longrightarrow\; yNO_2 + zO_2$;

   (d) $x_1KMnO_4 + x_2HCl \;\longrightarrow\; x_3KCl + x_4MnCl_2 + x_5Cl_2 + x_6H_2O$;

13. Seja o sistema com duas equações e duas incógnitas abaixo. Mostre que se $ad - bc \neq 0$, então o sistema linear possui uma única solução.

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

3.5 Exercícios Computacionais

1. Gere uma matriz de coeficientes $A_{5\times5}$ com números inteiros aleatórios no intervalo $[-10, 10]$ e um vetor independente com números inteiros no intervalo $[-100, 100]$. Apresente o sistema linear correspondente. Resolva o sistema por pelo menos 3 métodos diferentes.

2. Gere uma matriz de coeficientes $A_{5\times5}$ com números inteiros aleatórios no intervalo $[-10, 10]$ e um vetor independente com números inteiros no intervalo $[-100, 100]$. Apresente o sistema linear correspondente. Resolva o sistema por pelo menos 3 métodos diferentes.

3. Gere uma matriz de coeficientes $A_{4\times5}$ com números inteiros aleatórios no intervalo $[-10, 10]$ e um vetor independente com números inteiros no intervalo $[-100, 100]$. Apresente o sistema linear correspondente. Tente resolver o sistema e chegue em alguma conclusão.

4. Gere uma matriz de coeficientes $A_{6\times 5}$ com números inteiros aleatórios no intervalo $[-10, 10]$ e um vetor independente com números inteiros no intervalo $[-100, 100]$. Apresente o sistema linear correspondente. Tente resolver o sistema e chegue em alguma conclusão.

5. Escreva uma função que lê uma matriz de coeficientes e um vetor de valores independentes e tem como saída a matriz ampliada utilizando o módulo Numpy.

6. Escreva uma função que recebe a matriz ampliada e a transforma na matriz escalonada reduzida (Eliminação de Gauss-Jordan) utilizando o módulo Numpy.

7. Escreva uma função que recebe uma matriz e retorna o posto e a nulidade utilizando o módulo Numpy.

8. Escreva uma função que recebe a matriz ampliada e retorna se o problema possui:

   - Uma única solução e apresenta a solução do problema.
   - Infinitas soluções e apresenta as variáveis que possuem solução fixa e o número de variáveis livres.
   - Nenhuma solução.

9. Implemente a resolução de um sistema escalonado, cuja matriz de coeficientes é triangular superior utilizando o módulo Numpy.

10. Implemente a resolução de um sistema escalonado, cuja matriz de coeficientes é triangular inferior utilizando o módulo Numpy.

11. Implemente o método de Eliminação de Gauss-Jordan para problemas cuja matriz de coeficientes é quadrada utilizando o módulo Numpy.

12. Implemente o método de Eliminação de Gauss para problemas cuja matriz de coeficientes é quadrada utilizando o módulo Numpy.

13. Implemente o método de Decomposição LU para problemas cuja matriz de coeficientes é quadrada utilizando o módulo Numpy.

14. Implemente o método de Decomposição Cholesky para problemas cuja matriz de coeficientes é quadrada e simétrica utilizando o módulo Numpy.

15. Encontre a solução de uma matriz de coeficientes tridiagonal $T_{5\times 5}$ em que a diagonal principal tem elementos iguais a 2 e as diagonais acima e abaixo da diagonal principal são formadas por elementos 1 (matriz abaixo).

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

    A diagonal principal está marcada em vermelho e as diagonais acima e abaixo em azul. Se há 5 variáveis x_i e o vetor coluna for $b = [2\ 3\ 4\ 5\ 6]^T$, qual a solução para as variáveis?

16. E se a matriz tridiagonal for 100×100 e o vetor coluna for $b = [2\ 3\ 3\ \ldots\ 3\ 3\ 2]^T$, qual a solução para as variáveis?

17. E se a matriz tridiagonal for 1000×1000 e o vetor coluna for $b = [b_i = i + 1]^T$, qual a solução para as variáveis? Faça por Eliminação de Gauss-Jordan, Eliminação de Gauss, Decomposição LU e Decomposição por Cholesky. Qual é mais rápido?
18. Faça um método específico para resolver sistemas de matrizes de coeficientes tridiagonais. Considere que os elementos da tridiagonal principal podem ter qualquer valor.
19. Faça um método específico para resolver sistemas de matrizes de coeficientes pentadiagonais. Considere que os elementos da pentadiagonal principal podem ter qualquer valor.
20. (Desafio) Considere o exercício 10 da seção anterior (aquele da placa quadrada de material homogêneo). Considere que a placa possui lados medindo 1 metro cada. Gere uma malha quadrada de tamanho 10 cm. Calcule a temperatura de cada interseção. Se possível, faça uma representação da placa com um mapa de temperatura nos pontos.
21. (Desafio) Considerando o exercício anterior, refaça tudo para uma malha quadrada de tamanho genérico e em seguida use a medida de 1cm.

Capítulo 4
Determinantes

Uma das características relacionadas a matrizes quadradas é o cálculo do determinante, um número único que indica algumas propriedades de matrizes, principalmente relacionados à resolução de sistemas lineares.

Definição 4.1: Determinante

O **determinante de uma matriz quadrada** $A_{n\times n}$ é uma função $\det A$ que associa uma matriz quadrada A a um número real. O determinante da matriz A é denotado por:

$$\det A \quad \text{ou} \quad |A| \quad \text{ou} \quad \det a_{ij}.$$

O determinante de uma matriz A pode ser calculado como a soma de todas as permutações possíveis π, utilizando um único termo por linha e coluna. Nessa soma, o sinal das parcelas é definida de acordo com o número de inversões da permutação $I(\pi)$.

$$\det A_n = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n}$$

O determinante de matrizes A_1, A_2 e A_3 são definidos por:

$$\det A_1 = \det\,[a_{11}] = a_{11}$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\det A_3 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} +a_{11}a_{22}a_{33} & -a_{11}a_{23}a_{32} \\ -a_{12}a_{21}a_{33} & +a_{12}a_{23}a_{31} \\ +a_{13}a_{21}a_{32} & -a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

Os determinantes acima correspondem a um somatório em que cada parcela é o produto com um único elemento por linha e por coluna. Para construir cada uma destas parcelas, podemos tomar um elemento por linha. A coluna deste elemento será dado por uma permutação $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\}$ da sequência $\{1, 2, \ldots, n\}$. Assim garantimos apenas um elemento por linha e um por coluna, para cada parcela. O determinante é a soma de todas as possibilidades de permutação, algumas com sinal positivo e outras com sinal negativo. Por exemplo, em $\det A_3$, há 6 possibilidades de permutação π, conforme a Tabela 4.1. Para cada permutação π pode-se obter as parcelas $a_{1\pi_1}a_{2\pi_2}a_{3\pi_3}$, cujo sinal é obtido pelo número de inversões da permutação π. O número de inversões $I(\pi)$ corresponde ao número de vezes que um número maior precede um número menor na permutação π.

Portanto, o determinante de A_3 é encontrado por:

$$\det A_3 = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} a_{3\pi_3}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Tabela 4.1: Inversões e parcelas com relação a cada permutação de dimensão 3.

Permutações π	Inversões	Total $I(\pi)$	Parcela
$\{1,2,3\}$	-	0	$+a_{11}a_{22}a_{33}$
$\{1,3,2\}$	$(3,2)$	1	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$\{2,1,3\}$	$(2,1)$	1	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$\{2,3,1\}$	$(2,1),(3,1)$	2	$+a_{12}a_{23}a_{31}$
$\{3,1,2\}$	$(3,1),(3,2)$	2	$+a_{13}a_{21}a_{32}$
$\{3,2,1\}$	$(3,2),(3,1),(2,1)$	3	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Este conceito pode ser estendido para uma matriz de dimensão n:

$$\det A_n = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n}$$

E então temos uma fórmula fechada para o determinante de uma matriz $n \times n$. Observe que se o número de inversões for par, então a parcela será positiva. Do contrário, se o número de inversões for ímpar, a parcela será negativa. Por construção, em cada parcela há um único elemento por linha e por coluna. Da mesma forma que construímos a permutação por linha, podemos fazê-la por coluna, obtendo a seguinte formulação:

$$\det A_n = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} a_{\pi_1 1} a_{\pi_2 2} \cdots a_{\pi_n n}$$

Para uma matriz de dimensão n, haverá $n!$ permutações, o que indica $n!$ parcelas com $n-1$ operações de multiplicação em cada parcela. Além disso, para somar todas as parcelas, serão feitas $n-1$ operações de adição. Ou seja, teremos um total de $n! \cdot (n-1) + (n-1) = (n!+1)(n-1)$ operações aritméticas. Para o cálculo do determinante de uma matriz A_4, teremos $4! = 24$ permutações/parcelas e $(4!+1)(4-1) = 75$ operações aritméticas. Para uma matriz A_5, teremos $5! = 120$ permutações/parcelas e $(5!+1)(5-1) = 484$ operações aritméticas. De todo modo, ao que parece, o cálculo do determinante por meio de permutações é um procedimento computacionalmente caro.

Exemplo 4.1: Encontre o determinante da matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz quadrada possui dimensão 3. Para encontrar o determinante de A:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$\det A = 0 \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 1$$

Portanto, $\det A = -6$. □

Alguns esquemas geométricos permitem memorizar mais facilmente o cálculo do determinante para matrizes de ordem 2 e 3. Para matrizes de ordem 2, basta fazer o produto dos elementos da diagonal principal e subtrair do produto dos elementos da diagonal secundária. Ou seja:

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Já para matrizes de ordem 3, basta escrever a matriz e acrescentar a direita as duas primeiras colunas. Em seguida, somar o produto dos elementos da diagonal principal e das duas diagonais à direita da diagonal principal. Por fim, subtrair o produto dos elementos da diagonal secundária e das duas diagonais à direita da diagonal secundária.

$$\det A_3 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} +a_{11}a_{22}a_{33} \\ +a_{12}a_{23}a_{31} \\ +a_{13}a_{21}a_{32} \end{matrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} -a_{11}a_{23}a_{32} \\ -a_{12}a_{21}a_{33} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

4.1 Propriedades do Determinante

Nesta seção, veremos algumas propriedades do determinante, que possibilitarão entendermos outros métodos para o seu cálculo. Tais propriedades tem como base as fórmulas definidas para o determinante de uma matriz quadrada $A_{n\times n}$:

$$\det A_n = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n} \text{ ou}$$
$$\det A_n = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} a_{\pi_1 1} a_{\pi_2 2} \cdots a_{\pi_n n}$$

Seja uma matriz $A_{n\times n}$. Considere a matriz A' o resultado de alguma operação na matriz A. Os determinantes de A e A' possuem as seguintes propriedades:

(i) **Matriz Transposta:** $\det A = \det A^T$;

(ii) **Permutação de duas linhas:** Se $l_i \leftrightarrow l_j$, $i \neq j$, então $\det A' = -\det A$;

(iii) **Multiplicação de uma linha/coluna por um escalar:** Se $l_i \to \alpha \cdot l_i$, $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\det A' = \alpha \cdot \det A$. Equivalentemente, $\det A = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \det A'$;

(iv) **Multiplicação da matriz por um escalar:** Se $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A$;

(v) **Teorema de Jacobi - Combinação de duas linhas:** Se $l_i \to \cdot l_i + \alpha \cdot l_j$, $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\det A' = \det A$;

(vi) **Linha nula:** Se A possui uma linha de zeros, então $\det A = 0$;

(vii) **Linhas proporcionais:** Se A possui duas linhas iguais ou proporcionais, então $\det A = 0$;

(viii) **Decomposição de determinantes:** Se as matrizes A, B e C, com elementos diferentes apenas na linha/coluna k e que nesta linha/coluna $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, então $\det C = \det A + \det B$;

(ix) **Teorema de Binet:** Se $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$;

(x) **Matriz triangular:** O determinante de uma matriz triangular superior ou inferior é o produto dos elementos da diagonal principal.

Note que a propriedade **(iii)**, também pode ser vista sob a perspectiva da divisão: **Divisão de uma linha/coluna por um escalar:** Se $l_i \to l_i \div \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, então $\det A' = \det A \div \alpha$. Ou equivalentemente, $\det A = \alpha \cdot \det A'$.

A propriedade **(i)** permite que todas as propriedades acima relacionadas a linhas da matriz A possam ser aplicadas a colunas da matriz A. Por exemplo, na propriedade **(ii)**, substituindo linha por coluna: se $c_i \leftrightarrow c_j$, $i \neq j$, então $\det A' = -\det A$. Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 4.2: Encontre o determinante da matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz quadrada possui dimensão 4. Observe que as colunas 1 e 2 são iguais na matriz A. Logo, usando as propriedades **(vii)** e **(i)**, $\det A = 0$. De fato, quando resolvemos o exercício 3.9, com a matriz A como matriz de coeficientes, vimos que o sistema tinha infinitas soluções, ou seja, não encontramos uma única solução. $\square$

A partir destas propriedades, podemos elaborar duas maneiras de calcular o determinante, que serão vistos nas seções seguintes.

4.2 Determinante por Triangularização

Pela última propriedade, o determinante de uma matriz triangular superior é o produto dos elementos da diagonal principal. Outras propriedades garantem as operações de permutação de linhas, multiplicação de linha por escalar e combinação de uma linha a outra, com alguns ajustes no determinante da matriz. Assim, poderíamos usar o algoritmo de Eliminação de Gauss para encontrar o determinante de uma matriz.

Exemplo 4.3: Encontre o determinante da matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz quadrada possui dimensão 3. Para encontrar o determinante de A, por meio da triangularização da matriz A (note a diferença nos limitantes, de $[A]$ para $|A|$):

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

O elemento $a_{11} = 0$, por isso temos que fazer uma troca de linha (ou coluna) para que um elemento não nulo fique em a_{11}. Na troca, o determinante muda de sinal. Assim:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{l_1 \leftrightarrow l_3}{\Longrightarrow} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Agora, vamos zerar a coluna 1, abaixo de a_{11}. Podemos combinar a linha 2 com a linha 1. Lembre-se que isso não afeta o valor do determinante. Não há necessidade de fazer combinações com a linha 3, pois ela já tem um elemento zero na coluna 1.

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{l_2 \to l_2 - 2l_1}{\Longrightarrow} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aqui, há várias possibilidades. Por exemplo, ao olhar para a segunda linha, podemos dividí-la por 3. Se dividirmos uma linha de A por 3, a nova matriz A' tem o determinante $\det A' = \det A \div 3$, ou, equivalentemente, $\det A = 3 \cdot \det A'$. Pense nessa operação como se estivéssemos colocando o 3 em "evidência", fatorando a matriz.

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{l_2 \to l_2 \div 3}{\Longrightarrow} -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Por último, podemos combinar as linha 3 e a linha 2 para terminar de triangularizar a matriz (sem alterações no determinante):

$$-3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{l_3 \to l_3 - l_2}{\Longrightarrow} -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Como a matriz já está triangularizada, basta multiplicarmos a diagonal da matriz, com os ajustes de fora da matriz:

$$\det A = -3 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 2) = -6$$

Observe que poderíamos ter triangularizado a matriz de outras maneiras. □

4.3 Determinante pelo Teorema de Laplace

Podemos recursivamente reduzir o determinante de uma matriz para uma soma de determinantes de ordem menor, por meio de um resultado obtido por Laplace. Para tanto, precisamos antes definir cofator:

Definição 4.2: Cofator

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, o cofator Δ_{ij} do elemento a_{ij} é dado por:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

onde A_{ij} é a submatriz de A excluindo a linha i e a coluna j.

Observe que o cofator é um número que depende do determinante da matriz A_{ij}, que possui ordem $n-1$.

Teorema 4.1: Teorema de Laplace

O **determinante de uma matriz** A de ordem n é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha/coluna pelos respectivos *cofatores*. Se escolhermos uma linha i:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

Se escolhermos uma coluna j:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

Pelo teorema, o determinante da matriz A, de ordem n é reduzido para uma soma de determinantes de ordem $n-1$. Como determinantes de ordem 2 são fáceis de calcular, podemos reduzir recursivamente o determinante de ordem n até chegarmos a determinantes de ordem 2. E com isso, obtemos o determinante de A. Observe que uma matriz com alguma linha/coluna com muitos valores nulos (zero) são boas opções para ser escolhidas, pois se um elemento $a_{ij}=0$, então $a_{ij}\Delta_{ij}=0$, não havendo a necessidade de calcular o cofator Δ_{ij}.

Por exemplo, para $n=3$ e escolhendo a linha 1, temos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

$$= a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Caso a coluna 2 tivesse sido escolhida:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$$

$$= a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Exemplo 4.4: Encontre o determinante da matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz quadrada possui dimensão 3. Para encontrar o determinante de A, por meio do desenvolvimento de Laplace:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Escolhendo a linha 1:

$$\det A = 0\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 0\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot(-1)\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot(-3) = -6$$

Observe que não era necessário calcular Δ_{11}, pois $a_{11}=0$.

Poderíamos ter feito o exercício de maneira diferente, usando algumas manipulações da matriz por meio das propriedades do determinante. Assim, ao fazer uma combinação das colunas 2 e 3 (não altera o determinante), teríamos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_2 \to c_2 - c_3}{\Longrightarrow} \det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Agora ficou ainda mais vantajoso escolher a linha 1 para fazer o desenvolvimento de Laplace:

$$\det A = 0 \cdot \Delta_{11} + 0 \cdot \Delta_{12} + 1 \cdot \Delta_{13}$$

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot (2 \cdot (-1) - 1 \cdot 4)$$

Portanto, $\det A = -6$. □

Exemplo 4.5: Encontre o determinante da matriz abaixo, pelo método da triangularização e pelo método de Laplace:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz quadrada possui dimensão 4 e o seu determinante é dado por:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Pelo método da triangularização, para facilitar podemos trocar as colunas 1 e 4 (troca o sinal do determinante). Em seguida zerar o novo elemento a_{41}, fazendo uma combinação da nova linha 1 com a nova linha 4 (não altera o determinante).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_4}{\Longrightarrow} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{l_4 \to l_4 - 2l_1}{\Longrightarrow} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

Combina-se então as linhas 2 e 4 com o intuito de zerar o elemento a_{42} (não altera o determinante). Não é necessário alterar a linha 3, pois o elemento $a_{32} = 0$.

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} \overset{l_4 \to l_4 + (1/3)l_2}{\Longrightarrow} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2/3 & -10/3 \end{vmatrix}$$

Em seguida combina-se a linha 3 e a nova linha 4 com o intuito de zerar o elemento a_{43} (não altera o determinante).

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2/3 & -10/3 \end{vmatrix} \overset{l_4 \to l_4 + (2/3)l_3}{\Longrightarrow} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8/3 \end{vmatrix}$$

Com a matriz triangular superior:

$$\det A = -1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = 8$$

Pelo método de Laplace, temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Podemos escolher a coluna 4, que possui 2 elementos nulos:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nos determinantes das submatrizes $|A_{14}|$ e $|A_{44}|$, podemos combinar as colunas 1 e 3 em ambas fazendo $c_1 \to c_1 - c_3$. Assim:

$$\det A = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Escolhendo a segunda linha do primeiro determinante e a terceira linha do segundo:

$$\det A = -1 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot 10 + 2 \cdot (-1) = 8$$

Ambos os métodos resultaram em $\det A = 8$. Ainda bem! □

4.4 Regra de Cramer para Sistemas Lineares

Seja um sistema linear com n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e n equações.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

No formato matricial, teremos a seguinte composição, com $A \cdot X = B$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Do Capítulo 3, temos a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Por meio do Método de Eliminação por Gauss-Jordan, que utiliza operações de linha para tornar a matriz ampliada numa matriz equivalente escalonada reduzida, é possível definir o tipo de sistema: Impossível; Possível e Determinado e Possível e Indeterminado.

Na matriz de coeficientes $A_{n\times n}$, o sistema é possível e determinado, se, e somente se, não há uma linha nula na sua matriz equivalente escalonada reduzida. Do contrário, caso uma linha nula aparecer, verifica-se a coluna dos termos independentes e: (1) se for um termo nulo, então o sistema é Possível e Indeterminado; e (2) se for um termo não-nulo então o sistema é Impossível.

Para a matriz de coeficientes $A_{n\times n}$ de um sistema possível e determinado se chegar à sua matriz equivalente escalonada reduzida, foram feitas algumas operações de linha na matriz, que conforme vimos na propriedade do determinante, modificam o determinante, mas não o zeram. E portanto, o determinante de A será diferente de zero, enquanto que para sistemas impossíveis e possíveis e indeterminados, o determinante é zero.

Teorema 4.2: Determinante de Sistemas Lineares

Seja um sistema de equações lineares com n equações e n incógnitas, cuja matriz de coeficientes é $A_{n\times n}$. Se $\det A \neq 0$, então o sistema é possível e determinado. Do contrário, se $\det A = 0$, então o sistema é impossível ou possível e indeterminado.

Com o teorema anterior estabelecido, podemos definir a Regra de Cramer para o sistema e seu formato matricial $A \cdot X = B$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Teorema 4.3: Regra de Cramer

Seja o sistema $A \cdot X = B$, com $A_{n\times n}$, $X_{n\times 1}$ e $B_{n\times 1}$. Se $\det A \neq 0$ então o sistema é possível e determinado. A solução X tem os seus elementos dados por:

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

A matriz A_k é a matriz resultante da troca da k-ésima coluna de A pela matriz-coluna dos termos independentes B.

Exemplo 4.6: Se possível, resolva o sistema linear abaixo: (Ver Exemplo 3.11)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Solução: O sistema possui 3 equações e 3 variáveis. No formato matricial $A \cdot X = B$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Para usar a Regra de Cramer, primeiro calcula-se o determinante da matriz de coeficientes A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Como $\det A = -2 \neq 0$, calculamos A_1, A_2 e A_3:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 15 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 15 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 15 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

Assim, calculando x_1, x_2 e x_3:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-2}{-2} = 1,$$
$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-4}{-2} = 2,$$
$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Portanto, a solução do sistema linear proposto é $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$, conforme o método da Regra de Cramer. □

4.5 Sistemas Lineares Homogêneos e Determinantes

Uma aplicação de determinantes ocorre em sistemas lineares homogêneos, que são sistemas em que os termos independentes são todos nulos. Uma definição mais formal:

Definição 4.3: Sistema de Equações Lineares Homogêneo

Um **sistema de equações lineares homogêneo** com m equações e n incógnitas x_j, $1 \leq j \leq n$, tem o seguinte formato:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Onde os coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e os termos independentes são todos nulos, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Para sistemas lineares homogêneos, com n incógnitas, sempre há uma **solução trivial**, dada por $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Se o sistema for possível e determinado, esta solução é única. Caso o sistema seja possível e indeterminado, há soluções diferentes da solução trivial, i.e., **soluções não-triviais**.

Para um sistema com o mesmo número de equações e incógnitas, a matriz de coeficientes é quadrada e pode ter o determinante calculado. No caso de sistemas homogêneos, temos então o seguinte teorema:

Teorema 4.4: Soluções Não-Triviais

Seja um sistema linear homogêneo $A_{n\times n}\cdot X_{n\times 1}=0_{n\times 1}$. O sistema possui soluções não-triviais se, e somente se, o determinante de A é zero ($\det A=0$).

A partir do Teorema 4.4, podemos, por exemplo, determinar as equações de curvas geométricas, dados alguns pontos especificados.

Exemplo 4.7: Calcule a equação da reta que passa por dois pontos $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$. Em seguida, calcule a reta que passa pelos pontos $A(1,2)$ e $B(2,-1)$.

Solução: A equação de uma reta pode ser escrita de várias maneiras, sempre com uma parcela em y, uma parcela em x e um termo independente. Uma das maneiras é:

$$c_1x+c_2y+c_3=0$$

Como os pontos A e B pertencem à reta, eles satisfazem a equação acima:

$$c_1x_1+c_2y_1+c_3=0 \quad \text{e} \quad c_1x_2+c_2y_2+c_3=0$$

Ou seja, podemos considerar o sistema, cujas incógnitas são c_1, c_2 e c_3:

$$\begin{cases} c_1x+c_2y+c_3=0\\ c_1x_1+c_2y_1+c_3=0\\ c_1x_2+c_2y_2+c_3=0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

Por ser um sistema homogêneo, ele possui solução trivial $c_1=c_2=c_3=0$. Para soluções não-triviais, o determinante da matriz dos coeficientes é zero:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Para os pontos $A(1,2)$ e $B(2,-1)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Com isso, obtemos a equação da reta $3x+y-5=0$ ou $3x+y=5$ ou $y=-3x+5$. □

Exemplo 4.8: Calcule a equação da circunferência que passa por três pontos $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ e $C(x_3,y_3)$. Em seguida, considere $A(0,4)$, $B(0,-4)$ e $C=(-2,0)$.

Solução: De maneira análoga ao exercício anterior, a equação de uma circunferência pode ser escrita como:

$$c_1(x^2+y^2)+c_2x+c_3y+c_4=0$$

Como são dados três pontos, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c_1(x^2+y^2)+c_2x+c_3y+c_4=0\\ c_1(x_1^2+y_1^2)+c_2x_1+c_3y_1+c_4=0\\ c_1(x_2^2+y_2^2)+c_2x_2+c_3y_2+c_4=0\\ c_1(x_3^2+y_3^2)+c_2x_3+c_3y_3+c_4=0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1\\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

Para soluções não-triviais, o determinante da matriz dos coeficientes é zero:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Para os pontos dados $A(0,4)$, $B(0,-4)$ e $C = (-2,0)$:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 16 & 0 & 4 & 1 \\ 16 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, temos o resultado:

$$\begin{aligned} -16x^2 - 16y^2 + 96x + 256 = 0 \qquad \div(-16) \\ x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x = 16 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 = 16 + 9 \\ (x-3)^2 + y^2 = 25 = 5^2 \end{aligned}$$

Ou seja, uma circunferência de centro $(3,0)$ e raio 5. $\square$

4.6 Exercícios

Nos exercícios relacionados a equações de curvas e superfícies geométricas, faça também o desenho da respectiva curva e superfície. Para isso, a dica é usar algum aplicativo matemático como o Geogebra.

1. Calcule todos os cofatores da matriz abaixo:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Calcule o determinante da matriz abaixo pela definição, pelo método da triangulação e pelo desenvolvimento de Laplace.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $\det A + \det B$ e $\det(A+B)$.

4. Calcule o determinante da matriz abaixo pelo método da triangulação e pelo desenvolvimento de Laplace.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Calcule o determinante da matriz abaixo pelo método da triangulação e pelo desenvolvimento de Laplace.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Determine os valores de λ para que o determinante das matrizes abaixo sejam nulos.
$$A = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 3 & -\lambda \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

7. Seja $A_{3\times 3}$, com $\det A = -2$. Calcule o valor dos determinantes a seguir:

   (a) $\det A^T$; (b) $\det -2A$; (c) $\det A^4$; (d) $\det(-2A^T)^3$;

8. Mostre que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$.

9. Resolva os sistemas lineares abaixo, utilizando a Regra de Cramer.

(a) $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = 5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

10. Os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são colineares quando:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Verifique quais dos pontos abaixo são colineares:

(a) $A(0, 0)$, $B(1, 1)$ e $C(2, 2)$;

(b) $A(0, -1)$, $B(1, 1)$ e $C(-1, -3)$;

(c) $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ e $C(2, -1)$;

11. A área de um triângulo formado pelos pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ pode ser dado pelo valor absoluto do determinante:

$$\text{Área } \triangle ABC = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Calcule a área dos seguintes triângulos:

(a) $A(0, 0)$, $B(0, 3)$ e $C(1, 2)$;

(b) $A(0, -1)$, $B(1, 1)$ e $C(1, -3)$;

(c) $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ e $C(3, 0)$;

12. Encontre a equação da reta que passa pelos pontos abaixo:

(a) $A(0, 0)$, $B(1, 2)$;

(b) $A(-1, -1)$, $B(1, 1)$;

(c) $A(1, 3)$, $B(2, 1)$;

(d) $A(1, 2)$, $B(2, 2)$;

(e) $A(1, 2)$, $B(1, 4)$;

13. Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos abaixo:

(a) $A(0, 2)$, $B(0, -2)$ e $C(2, 0)$;

(b) $A(1, 2)$, $B(1, 0)$ e $C(2, 1)$;

(c) $A(1, 7)$, $B(6, 2)$ e $C(4, 6)$;

14. Uma cônica é uma curva que pode ser descrita pela seguinte equação:
$$c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0.$$
Curvas cônicas incluem as parábolas, as elipses, as hipérboles e outras formas degeneradas. Dados cinco pontos, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ e $E(x_5, y_5)$, determine uma maneira de encontrar a cônica, usando determinantes. Em seguida, encontre a equação das cônicas que passa pelos pontos abaixo:

    (a) $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(0, -1)$, $D(3, 2)$ e $E(3, -2)$;
    (b) $A(3, 0)$, $B(-3, 0)$, $C(5, 4)$, $D(5, -4)$ e $E(-5, 4)$;
    (c) $A(5, 0)$, $B(-5, 0)$, $C(3, 2)$, $D(3, -2)$ e $E(-3, 2)$;
    (d) $A(1, 1)$, $B(3, 0)$, $C(0, 3)$, $D(1/3, 2)$ e $E(2, 1/3)$;
    (e) $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(2, 2)$, $D(-2, -2)$ e $E(-1, -1)$;

15. Um plano é uma superfície que pode ser descrita pela seguinte equação:
$$c_1x + c_2y + c_3z + c_4 = 0.$$
Dados três pontos, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, determine uma maneira de encontrar o plano, usando determinantes. Em seguida, encontre a equação do plano que passa pelos pontos abaixo:

    (a) $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(0, 0, 1)$;
    (b) $A(1, 1, 0)$, $B(2, 0, -1)$ e $C(2, 9, 2)$;
    (c) $A(3, 0, 1)$, $B(0, 2, 1)$ e $C(3, 2, 0)$;

16. Uma esfera é uma superfície que pode ser descrita pela seguinte equação:
$$c_1\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + c_2x + c_3y + c_4z + c_5 = 0.$$
Dados quatro pontos, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ e $D(x_4, y_4)$, determine uma maneira de encontrar o plano, usando determinantes. Em seguida, encontre a equação do plano que passa pelos pontos abaixo:

    (a) $(0, 0, 5)$, $(3, 0, 4)$, $(4, -3, 0)$ e $(-5, 0, 0)$;
    (b) $(0, 3, 2)$, $(1, -1, 1)$, $(2, 1, 0)$ e $(5, 1, 3)$;

4.7 Exercícios Computacionais

1. Gere uma matriz de coeficientes $A_{5\times5}$ com números inteiros aleatórios no intervalo $[-10, 10]$. Encontre o determinante desta matriz.

2. Gere uma matriz de coeficientes $A_{5\times5}$ com números reais aleatórios no intervalo $[-10, 10]$. Encontre o determinante desta matriz.

3. Gere uma matriz de coeficientes $A_{5\times5}$ com números inteiros aleatórios no intervalo $[-10, 10]$. Faça a decomposição LU da matriz e calcule o determinante das matrizes A, L e U. Repita o processo 5 vezes. O que você pode conjecturar?

4. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna o determinante desta matriz, pelo método da triangulação utilizando o módulo Numpy.

5. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna o determinante desta matriz, pelo método de Laplace utilizando o módulo Numpy.

6. Encontre o determinante de uma matriz tridiagonal $T_{5\times5}$ em que a diagonal principal é formada por elementos 2 e as diagonais acima e abaixo da diagonal principal são formadas por elementos 1 (matriz abaixo).

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   A diagonal principal está marcada em vermelho e as diagonais acima e abaixo em azul.

7. Calcule o determinante da matriz tridiagonal 100×100, pelos métodos: (1) triangulação; (2) Laplace. Qual é mais rápido? Se possível, aumente n para 1.000 e reverifique os resultados.

8. Faça um método específico para calcular determinantes de matrizes tridiagonais. Considere que os elementos da tridiagonal principal podem ter qualquer valor.

9. Faça um método específico para calcular determinantes de matrizes pentadiagonais. Considere que os elementos da pentadiagonal principal podem ter qualquer valor.

Capítulo 5

Matrizes Inversas

Dentro da álgebra de matrizes, um componente importante é a matriz inversa. Por meio da matriz inversa, é possível neutralizar alguma matriz em determinado cálculo, resolver um sistema linear e até decompor a matriz em um formato ideal para potência de matrizes.

Definição 5.1: Matriz Inversa

A **matriz inversa de uma matriz quadrada** A_n é denominada por A^{-1} e possui a seguinte propriedade:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Dada uma matriz A sempre existe uma matriz inversa? E como determinar a matriz inversa A^{-1} de A? Para responder à primeira pergunta, utilizamos as propriedades do determinante, pois, a partir da definição de matriz:

$$\begin{aligned}
A \cdot A^{-1} &= I_n \\
\det\left(A \cdot A^{-1}\right) &= \det I_n \\
\det A \cdot \det A^{-1} &= 1 \\
\det A^{-1} &= \frac{1}{\det A}.
\end{aligned}$$

E o determinante da matriz A^{-1} só é determinado, se $\det A \neq 0$. Assim, para que exista a matriz inversa A^{-1} de uma matriz A é necessário que $\det A \neq 0$. Chamamos a matriz A de inversível (invertível ou não-singular), caso A possua inversa. Do contrário, quando $\det A = 0$, a matriz é denominada não-inversível (não-invertível, ou singular).

Para a segunda pergunta, vamos apresentar dois métodos para o cálculo da matriz inversa A^{-1}: (1) Matriz Adjunta; e (2) Eliminação de Gauss-Jordan (isso mesmo, novamente!).

5.1 Matriz Adjunta

A matriz adjunta é calculada por meio da matriz de cofatores. As definições de ambas matrizes podem ser vistas a seguir.

Definição 5.2: Matriz de Cofatores

A **matriz de cofatores de uma matriz quadrada** A_n é dada por

$$\Delta_A = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

Onde os cofatores $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ e $|A_{ij}|$ é o determinante da submatriz de A sem a linha i e a coluna j.

Definição 5.3: Matriz Adjunta

A matriz adjunta de uma matriz quadrada A_n é a transposta da matriz de cofatores.

$$\text{adj}\, A = \Delta_A^T$$

Exemplo 5.1: Encontre a matriz de cofatores e matriz adjunta da matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em seguida, faça a multiplicação de A por $\text{adj}\, A$.

Solução: A matriz quadrada possui dimensão 3. Logo, a matriz de cofatores será dada por:

$$\Delta_A = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

Calculando cada um destes termos:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad \Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

Assim, a matriz de cofatores e a matriz adjunta são dadas por:

$$\Delta_A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \text{adj}\, A = \Delta_A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Por fim, multiplicando A por $\operatorname{adj} A$:

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = -6 \cdot I_3$$

Perceba que o produto desta matriz acabou resultando na matriz identidade I_3 multiplicada por -6, que é justamente o valor do determinante de A (Exemplo 4.1). Assim, para este caso, $A \cdot \operatorname{adj} A = (\det A) \cdot I_3$. □

Teorema 5.1: Matriz Inversa pela Matriz Adjunta

Seja uma matriz quadrada A_n. Então:

$$A \cdot \operatorname{adj} A = (\det A) \cdot I_n$$

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A \right) = I_n$$

Portanto, usando a Definição 5.1:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A.$$

De fato, quando multiplicamos A por $\operatorname{adj} A$, nos elementos da diagonal da matriz resultante, aparece o cálculo do $\det A$, por meio do desenvolvimento de Laplace. Para os elementos fora da diagonal da matriz resultante, sempre aparecerá o determinante de uma matriz com alguma linha repetida, o que torna estes elementos nulos. E assim obtivemos uma forma de calcular a matriz inversa, usando a matriz adjunta.

Exemplo 5.2: Encontre a matriz inversa A^{-1} da matriz A do Exemplo 5.1 e o determinante de A^{-1}.

Solução: Como visto anteriormente,

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Além disso, $\det A = -6$. Para encontrar a matriz inversa, basta tomar $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A = \frac{1}{-6} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/6 & 1/6 & 4/6 \\ 3/6 & 1/6 & -2/6 \\ 3/6 & -1/6 & 2/6 \end{bmatrix}$$

Pela definição de matriz inversa, podemos calcular o determinante de A^{-1} por:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$ □

Exemplo 5.3: Encontre a matriz inversa A^{-1} de matriz quadrada de ordem 2 qualquer

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Solução: Calculando a matriz de cofatores:

$$\Delta_A = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}d & (-1)^{1+2}c \\ (-1)^{2+1}b & (-1)^{2+2}a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Com isso, pode ser calculada a matriz adjunta, e como $\det A = ad - bc$, a matriz inversa também pode ser calculada:

$$\operatorname{adj} A = \Delta_A^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \square$$

5.2 Eliminação de Gauss-Jordan

O processo de cálculo da matriz inversa pode ser visto como um processo de resolução de n sistemas de equações com n incógnitas cada. E com isso, podemos usar o método de eliminação de Gauss-Jordan para resolver estes sistemas. Pela definição de matriz inversa:

$$A \cdot A^{-1} = I_n \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & \dots & a_{1n}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & \dots & a_{2n}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{-1} & a_{n2}^{-1} & \dots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Pela definição de produto de matrizes, se multiplicarmos A pela primeira coluna de A^{-1}, obteremos a primeira coluna de I. Se multiplicarmos A pela segunda coluna de A^{-1}, obteremos a segunda coluna de I. Ou seja, se multiplicarmos A pela j-ésima coluna de A^{-1}, obteremos a j-ésima coluna de I. Assim, temos um sistema para cada coluna de A^{-1}, ou seja, um total de n sistemas.

Na resolução do sistema por meio da Eliminação de Gauss-Jordan, amplia-se a matriz de coeficientes A com a coluna independente. Atua-se então na matriz ampliada fazendo operações que não mudam o sistema linear: (1) permutação de linhas; (2) multiplicação de uma linha por escalar; e (3) combinação de linhas. O objetivo destas operações é tornar a matriz escalonada reduzida, o que especificamente no caso de uma matriz quadrada A, é transformar as primeiras n colunas da matriz ampliada na matriz identidade. Após este processo, a última coluna se torna a solução. Como há n sistemas para ser resolvidos, o processo de Eliminação de Gauss-Jordan teria que ser feito n vezes para mesma matriz A, mudando apenas a última coluna da matriz ampliada. Entretanto, mudar a matriz de coeficientes A, dentro da matriz ampliada, é sempre o mesmo processo. Por isso, ao invés de fazer n processos de Eliminação de Gauss, fazemos apenas 1, ampliando a matriz de coeficientes com todas as colunas da matriz identidade. Assim, ao final do processo de Eliminação de Gauss-Jordan desta super matriz ampliada, teremos do lado esquerdo a matriz identidade e do lado direito a matriz inversa. Visualmente, a super matriz ampliada, de tamanho $n \times 2n$, se $\det A \neq 0$:

$$\left[\, A \mid I \,\right] \xrightarrow[\text{Gauss-Jordan}]{\text{Eliminação}} \left[\, I \mid A^{-1} \,\right]$$

Exemplo 5.4: Determine a matriz inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz A tem dimensão 3 e a matriz ampliada possui tamanho 3×6:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por meio da Eliminação de Gauss-Jordan, como $a_{11} = 0$, podemos fazer a permuta das linhas 1 e 3:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} l_1 \leftrightarrow l_3 \\ \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Agora $a_{11} = 1$ e temos que zerar o restante da coluna 1:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ \Longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Divide-se a linha 2 por 3, assim $a_{22} = 1$. Em seguida, zera-se o resto da coluna 2:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ l_2 \to l_2 \div 3 \\ l_3 \to l_3 - l_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

Agora divide-se a linha 3 por 2 e zera-se o resto da coluna 3:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right] \begin{array}{c} l_1 \to l_1 - l_3' \\ l_2 \to l_2 + l_3' \\ l_3 \to l_3 \div 2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/6 & 4/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/6 & -2/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/6 & 2/6 \end{array}\right]$$

E assim, colocando todos os denominadores como 6:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/6 & 1/6 & 4/6 \\ 3/6 & 1/6 & -2/6 \\ 3/6 & -1/6 & 2/6 \end{bmatrix} \qquad \square$$

Computacionalmente e manualmente falando, calcular a matriz inversa pelo método de eliminação de Gauss-Jordan é mais rápido que fazê-lo pela matriz adjunta. O cálculo de determinantes é um procedimento computacionalmente caro e deve ser evitado. Assim, prefira calcular a matriz inversa pelo método de eliminação de Gauss-Jordan.

5.3 Propriedades da Matriz Inversa

Sejam duas matrizes quadradas de ordem n: A e B. Eis algumas propriedades das matrizes inversas:

(i) **Unicidade:** A matriz inversa A^{-1} é única;

(ii) **Inversa da Inversa:** $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

(iii) **Inversa da Transposta:** $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$;

(iv) **Inversa do Produto:** $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (observe a troca da ordem de A e B);

Para sistemas lineares, o produto da matriz inversa da matriz de coeficientes pelo vetor de termos independentes é a solução do sistema.

Teorema 5.2: Resolução de Sistemas Lineares

Se A é inversível, a única solução do sistema $A \cdot x = b$ é dada por $x = A^{-1} \cdot b$.

Observe que o sistema possui uma única solução. Se a matriz de coeficientes A é singular ($\det A = 0$), então o sistema pode ter infinitas soluções ou nenhuma solução. Entretanto, encontrar a matriz inversa para resolução de sistemas é computacionalmente mais caro que encontrar a solução do sistema pelos métodos vistos no Capítulo 3.

Exemplo 5.5: Resolva o seguinte sistema linear, usando a matriz inversa:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Solução: Escrevendo o sistema no formato matricial $A \cdot x = b$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Usando a inversa A^{-1}, calculada nos exercícios anteriores:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/6 & 1/6 & 4/6 \\ 3/6 & 1/6 & -2/6 \\ 3/6 & -1/6 & 2/6 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/6 & 1/6 & 4/6 \\ 3/6 & 1/6 & -2/6 \\ 3/6 & -1/6 & 2/6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, a solução do sistema é $x_1 = 4$, $x_2 = -1$ e $x_3 = -1$. $\square$

5.4 Exercícios

1. Calcule a matriz inversa de A, pelos métodos da matriz adjunta e da eliminação de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Calcule a matriz inversa de A, pelos métodos da matriz adjunta e da eliminação de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $(A \cdot B)^{-1}$, $B^{-1} \cdot A^{-1}$, $(B \cdot A)^{-1}$ e $A^{-1} \cdot B^{-1}$.

4. Calcule a matriz inversa de A pela eliminação de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Resolva os sistemas lineares abaixo por meio da matriz inversa:

(a) $\begin{cases} 2x - y = 11 \\ -x + 3y = -2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 15 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y + 3z = 10 \\ x - y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + x_4 = -3 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 = 100 \\ -x_1 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 - x_3 + 4x_4 = 100 \end{cases}$

6. Resolva o sistema linear abaixo, dados diferentes valores para os termos independentes:

$$\begin{cases} x + y = b_1 \\ -x + 2y = b_2 \end{cases}$$

(a) $b_1 = 1, b_2 = 2$;

(b) $b_1 = 1, b_2 = 1$;

(c) $b_1 = \pi, b_2 = \sqrt{2}$;

(d) $b_1 = a, b_2 = b$;

7. Resolva o sistema linear abaixo, dados diferentes valores para os termos independentes:

$$\begin{cases} x+y+z=b_1 \\ x+2y+3z=b_2 \\ -x+y+2z=b_3 \end{cases}$$

(a) $b_1=1, b_2=2, b_3=3$;

(b) $b_1=1, b_2=1, b_3=1$;

(c) $b_1=\pi, b_2=\sqrt{2}, b_3=\sqrt{3}$;

(d) $b_1=a, b_2=b, b_3=c$;

8. Encontre a fórmula geral de matrizes inversas para matrizes 2×2 usando eliminação de Gauss-Jordan.

9. Encontre a fórmula geral de matrizes inversas para matrizes diagonais $n\times n$.

10. Uma maneira de codificar uma mensagem é por meio de multiplicação de matrizes. Associando as letras do alfabeto a números, ou seja: Uma mensagem de 9 caracteres pode ser

Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Letra	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Número	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Tabela 5.1: Correspondência Letra-Número

colocada como uma matriz $A_{3\times 3}$ e codificada usando uma matriz $C_{3\times 3}$, inversível, por meio do produto $A\cdot C$. Envia-se a mensagem. O destinatário, ao receber a mensagem codificada $A\cdot C$, multiplica-a por C^{-1}, ou seja, decodifica-a: $A\cdot C\cdot C^{-1}=A$. Por exemplo, seja a mensagem: "GAALEFODA". A matriz A será dada por:

$$A=\begin{bmatrix} G & A & A \\ L & E & F \\ O & D & A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 12 & 5 & 6 \\ 15 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando a chave C e sua inversa C^{-1}

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad C^{-1}=\begin{bmatrix} -3/6 & 1/6 & 4/6 \\ 3/6 & 1/6 & -2/6 \\ 3/6 & -1/6 & 2/6 \end{bmatrix}$$

Obtemos a seguinte mensagem codificada:

$$A\cdot C=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 12 & 5 & 6 \\ 15 & 4 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 10 & 7 \\ 16 & 27 & 13 \\ 9 & 27 & 12 \end{bmatrix}$$

Para descodificar:

$$(A\cdot C)\cdot C^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 10 & 7 \\ 16 & 27 & 13 \\ 9 & 27 & 12 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -3/6 & 1/6 & 4/6 \\ 3/6 & 1/6 & -2/6 \\ 3/6 & -1/6 & 2/6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 12 & 5 & 6 \\ 15 & 4 & 1 \end{bmatrix}=A$$

Qual o significado da mensagem abaixo, considerando a mesma matriz de codificação C acima?

$$A\cdot C=\begin{bmatrix} 17 & 17 & 28 \\ 21 & 9 & 12 \\ 23 & 43 & 12 \end{bmatrix}$$

Escolha outra chave C e codifique uma mensagem sua A, de 9 caracteres para um colega. Entregue ao colega a mensagem codificada AC e a chave C para que ele descubra a mensagem. Ele terá que fazer a matriz inversa de C e depois decodificar AC.

5.5 Exercícios Computacionais

1. Gere uma matriz $A_{5\times5}$ com números inteiros aleatórios no intervalo $[-10, 10]$. Encontre a matriz inversa A^{-1}.

2. Gere uma matriz $A_{5\times5}$ com números reais aleatórios no intervalo $[-10, 10]$. Encontre a matriz inversa A^{-1}.

3. Gere uma matriz diagonal $A_{5\times5}$ com números inteiros aleatórios no intervalo $[-10, 10]$. Encontre a matriz inversa A^{-1}. Que conjectura você pode fazer?

4. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna a matriz de cofatores desta matriz utilizando a biblioteca Numpy.

5. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna a matriz adjunta desta matriz utilizando a biblioteca Numpy.

6. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna se a matriz é inversível utilizando a biblioteca Numpy.

7. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna a matriz inversa desta matriz, por meio da matriz adjunta utilizando a biblioteca Numpy. Compare com o resultado da biblioteca Sympy.

8. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna a matriz inversa desta matriz, por meio da Eliminação de Gauss-Jordan utilizando a biblioteca Numpy.

9. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada A de ordem n e um vetor b de tamanho n e retorna a solução deste problema por meio da inversa $A^{-1} \cdot b$ utilizando a biblioteca Numpy.

10. Encontre a solução de uma matriz tridiagonal $T_{5\times5}$ em que a diagonal principal tem elementos iguais a 2 e as diagonais acima e abaixo da diagonal principal são formadas por elementos 1 (matriz abaixo).

$$\begin{bmatrix} \color{red}{2} & \color{blue}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \color{blue}{1} & \color{red}{2} & \color{blue}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \color{blue}{1} & \color{red}{2} & \color{blue}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \color{blue}{1} & \color{red}{2} & \color{blue}{1} \\ 0 & 0 & 0 & \color{blue}{1} & \color{red}{2} \end{bmatrix}$$

A diagonal principal está marcada em vermelho e as diagonais acima e abaixo em azul. Se há 5 variáveis x_i e o vetor coluna for $b = [2\ 3\ 4\ 5\ 6]^T$, qual a solução para as variáveis? Use a matriz inversa.

11. E se a matriz tridiagonal for 100×100 e o vetor coluna for $b = [2\ 3\ 3\ \ldots\ 3\ 3\ 2]^T$, qual a solução para as variáveis? Use a matriz inversa.

12. E se a matriz tridiagonal for 1000×1000 e o vetor coluna for $b = [b_i = i + 1]^T$, qual a solução para as variáveis? Use a matriz inversa e compare com os métodos anteriores.

Capítulo 6

Vetores

Os vetores já foram abordados do ponto de vista computacional e algébrico, na parte de matrizes. Mas há uma perspectiva geométrica que torna o conceito de vetor muito importante para algumas aplicações. Para chegar aos vetores, é interessante relembrar algumas noções primitivas geométricas: ponto, reta, plano, espaço.

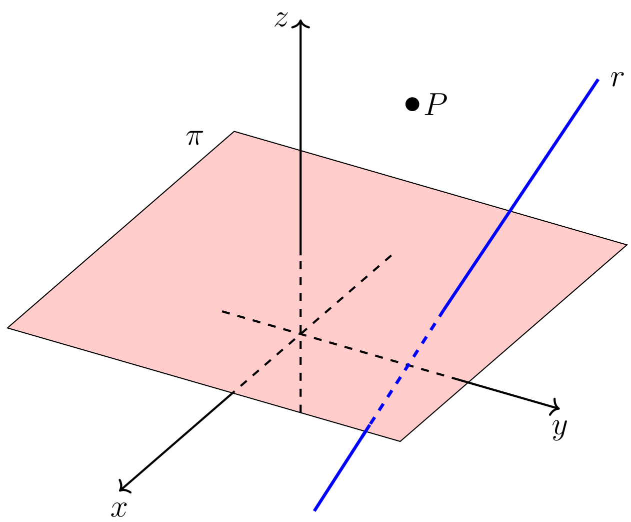
Ponto: Um ponto determina uma posição no espaço. Os pontos não possuem forma nem dimensão, seja comprimento, largura ou profundidade;

Reta: Uma reta é um elemento unidimensional formado por um número infinito de pontos distribuídos em uma determinada direção. Considera-se que tem comprimento, mas não possui largura ou profundidade;

Plano: Um plano é um elemento bidimensional e pode ser considerado como um conjunto infinito de retas não coincidentes, paralelas e dispostas lado a lado. Considera-se que tem comprimento e largura, mas não possui profundidade;

Espaço: Um espaço é um elemento tridimensional e pode ser considerado como um conjunto infinito de planos não coincidentes, paralelos e sobrepostos. Considera-se que tem comprimento, largura e profundidade;

A Figura abaixo apresenta um ponto P, uma reta r e um plano π contidos num espaço cartesiano.



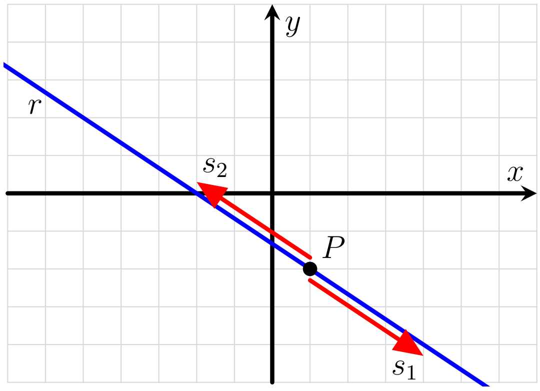
Um ponto no plano cartesiano ou $\mathbb{R}^2$ possui duas coordenadas (x, y). No espaço cartesiano ou $\mathbb{R}^3$ possui três coordenadas (x, y, z). Vale ressaltar que a ordem das coordenadas é fixa.

Pode-se considerar espaços com mais de três dimensões, que são denominados *hiperespaços*. Se o hiperespaço possui n dimensões ($\mathbb{R}^n$), então um ponto contido nele possui n coordenadas, i.e.:

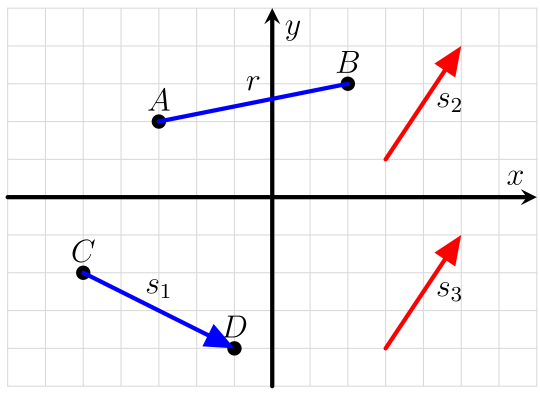
$$P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Computacionalmente, um ponto P de um espaço com n dimensões pode ser considerado como um vetor de tamanho n (*array*), em que cada unidade do vetor é uma coordenada do ponto.

Para qualquer reta r no plano cartesiano, no espaço cartesiano ou hiperespaço, a inclinação desta reta define uma direção, que por sua vez, possui dois sentidos. Na Figura abaixo, considere um ponto P qualquer na reta r e os dois sentidos s_1 e s_2. Com isso, dois conceitos foram relembrados: **direção** e **sentido**.



A reta é um elemento unidimensional que define uma direção e se estende infinitamente nos dois sentidos. Entretanto, pode-se escolher um segmento dessa reta, ou seja, uma parte com um comprimento limitado dessa reta. Por último, pode-se ainda estabelecer um sentido único para esse segmento, assim definindo um **segmento orientado**. A Figura abaixo mostra: um segmento de reta r, limitado entre os pontos A e B; um segmento orientado s_1, limitado pelos pontos C e D; e os segmentos orientados s_2 e s_3. Observe que os segmentos orientados s_2 e s_3 possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. Quando segmentos orientados possuem estas três características iguais, são denominados **equipolentes**.



A partir destes elementos geométricos, segue a definição de vetores.

Definição 6.1: Vetor

Um vetor é um conjunto de segmentos orientados equipolentes. São como flechas com três características principais: (1) comprimento; (2) direção; e (3) sentido.

Em geral, para denotar vetores, pode-se usar uma letra acompanhada de uma seta sobrescrita (por exemplo $\vec{u}$), ou então usar os pontos dos limites do vetor (origem e destino), também com uma seta sobrescrita (por exemplo $\overrightarrow{AB}$, com origem no ponto A e destino no ponto B). Alguns livros indicam vetores em negrito, como $\boldsymbol{u}$ ou $\boldsymbol{AB}$.

Um vetor é definido por coordenadas, assim como um ponto. Os vetores mais usuais estão no plano $\mathbb{R}^2$ e espaço $\mathbb{R}^3$, mas vetores no $\mathbb{R}^n$ também são utilizados. As representações mais comuns de um vetor $\vec{u}$ são dadas abaixo, nos três espaços citados, por:

$$\vec{u} = (x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = (x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ou seja, mais comumente, o vetor é descrito como uma sucessão de coordenadas ou como uma matriz coluna. Pode-se representar um vetor como uma matriz linha também, porém essa forma é menos utilizada.

Podemos determinar um vetor pela diferença entre os pontos de origem e de destino deste vetor. Isso implica em uma diferença coordenada por coordenada. No plano $\mathbb{R}^2$, dado um ponto de origem $A = (x_A, y_A)$ e o ponto de destino $B = (x_B, y_B)$ então o vetor $\overrightarrow{AB}$ será dado por:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A \\ \overrightarrow{AB} &= (x_B, y_B) - (x_A, y_A) \\ \overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A, y_B - y_A) \end{aligned}$$

No espaço $\mathbb{R}^3$, dado um ponto de origem $A = (x_A, y_A, z_A)$ e o ponto de destino $B = (x_B, y_B, z_B)$ então o vetor $\overrightarrow{AB}$ será dado por:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A \\ \overrightarrow{AB} &= (x_B, y_B, z_B) - (x_A, y_A, z_A) \\ \overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \end{aligned}$$

Em $\mathbb{R}^n$, dado um ponto de origem $A = (x_1^A, x_2^A, \ldots, x_n^A)$ e o ponto de destino $B = (x_1^B, x_2^B, \ldots, x_n^B)$ então o vetor $\overrightarrow{AB}$ será dado por:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A \\ \overrightarrow{AB} &= (x_1^B, x_2^B, \ldots, x_n^B) - (x_1^A, x_2^A, \ldots, x_n^A) \\ \overrightarrow{AB} &= (x_1^B - x_1^A, x_2^B - x_2^A, \ldots, x_n^B - x_n^A) \end{aligned}$$

Definição 6.2: Comprimento de um Vetor

O comprimento (norma, magnitude) de um vetor $\vec{u} = (x, y)$ no plano $\mathbb{R}^2$, definido como $|\vec{u}|$, pode ser obtido por meio da relação de Pitágoras:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

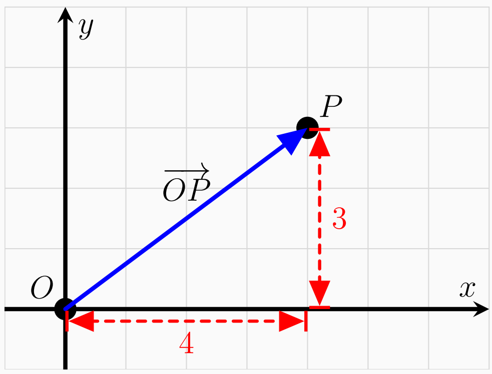
A relação pitagórica é estendida para o comprimento do vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ no espaço $\mathbb{R}^3$:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Por fim, estendida para calcular o comprimento do vetor $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Exemplo 6.1: Na Figura abaixo, considere o ponto $P = (4, 3)$ no plano cartesiano. Calcule o vetor $\overrightarrow{OP}$, com a origem $O = (0, 0)$. Determine o seu comprimento.



Solução: Observe que o vetor $\overrightarrow{OP}$ se deslocou quatro unidades na horizontal, no sentido positivo do eixo x e três unidades na vertical, no sentido positivo do eixo y. Assim, é natural que o vetor $\overrightarrow{OP}$ possa ser definido como:

$$\overrightarrow{OP} = (4, 3) \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Podemos também obter o vetor $\overrightarrow{OP}$, por meio da diferença entre os pontos:

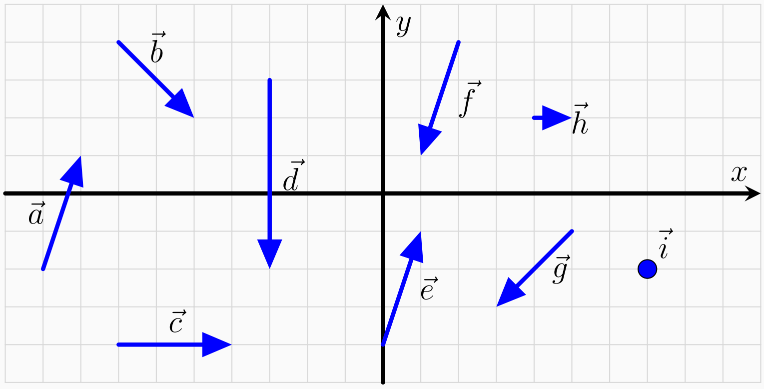
$$\overrightarrow{OP} = P - O = (4, 3) - (0, 0) = (4 - 0, 3 - 0)$$
$$\overrightarrow{AB} = (4, 3)$$

O comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$, denotado $\left|\overrightarrow{OP}\right|$, pode ser calculado facilmente por meio do Teorema de Pitágoras.

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$
$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{25} = 5\ u.c.$$

Portanto, o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$ é de 5 unidades de comprimento. Note que o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$ é a distância entre os pontos O e P. □

Exemplo 6.2: Determine os vetores indicados abaixo e o comprimento de cada um deles:



Solução: Para cada vetor, teremos um par (x, y) que o representa, sendo que os sentidos horizontal a direita e vertical para cima são positivos. Além disso, o comprimento de um vetor $\vec{u}$ no $\mathbb{R}^2$ é dado por $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\vec{a} = (1, 3), \qquad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}\ u.c.$$
$$\vec{b} = (2, -2), \qquad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}\ u.c.$$
$$\vec{c} = (3, 0), \qquad |\vec{c}| = 3\ u.c.$$
$$\vec{d} = (0, -5), \qquad \left|\vec{d}\right| = 5\ u.c.$$
$$\vec{e} = (1, 3), \qquad |\vec{e}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}\ u.c.$$
$$\vec{f} = (-1, -3), \qquad \left|\vec{f}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}\ u.c.$$
$$\vec{g} = (-2, -2), \qquad |\vec{g}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}\ u.c.$$
$$\vec{h} = (1, 0), \qquad \left|\vec{h}\right| = 1\ u.c.$$
$$\vec{i} = (0, 0), \qquad \left|\vec{i}\right| = 0\ u.c.$$

Observe que:

- Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{e}$ são **iguais**, pois possuem o mesmo comprimento, direção e sentido.

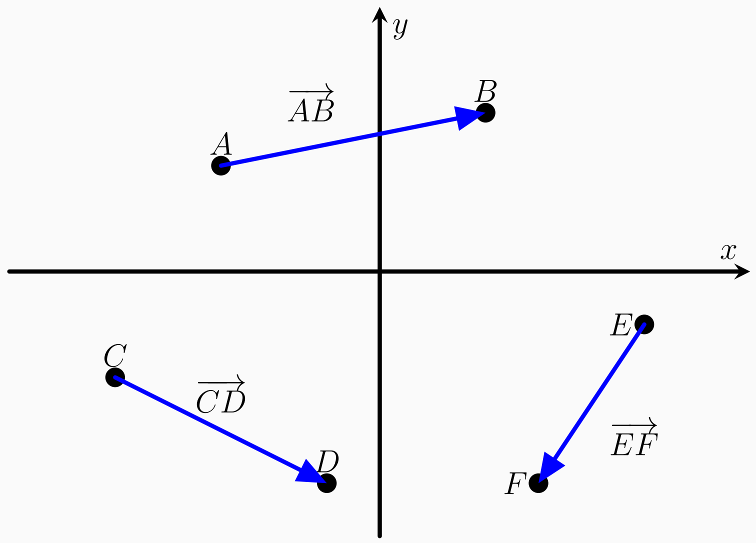
- Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{f}$ são **opostos**, pois possuem o mesmo comprimento e direção, mas têm sentidos opostos.

- O vetor $\vec{h}$ tem comprimento unitário. Vetores cujo comprimento é igual a 1 são denominados vetores **unitários**.

- O vetor $\vec{i}$ tem comprimento zero, o que o caracteriza como vetor **nulo**.

- Os vetores $\vec{c}$ e $\vec{h}$ são **colineares**, pois possuem a mesma direção. Os vetores $\vec{a}$, $\vec{e}$ e $\vec{f}$ também são colineares entre si. □

Exemplo 6.3: Determine os vetores indicados abaixo e o comprimento de cada um deles, sabendo que: $A(-3,2)$, $B(2,3)$, $C(-5,-2)$, $D(-1,-4)$, $E(5,-1)$ e $F(3,-4)$.



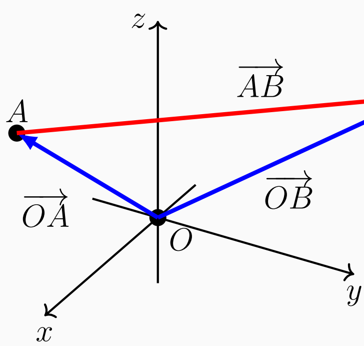
Solução: Determinando os vetores como uma diferença entre os pontos e em seguida calculando o seu comprimento:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,3) - (-3,2) = (2-(-3), 3-2) = (5,1)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}\ u.c.$$
$$\overrightarrow{CD} = D - C = (-1,-4) - (-5,-2) = (-1-(-5), -4-(-2)) = (4,-2)$$
$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(4^2+(-2)^2} = \sqrt{20}\ u.c.$$
$$\overrightarrow{EF} = F - E = (3,-4) - (5,-1) = (3-5, -4-(-1)) = (-2,-3)$$
$$\left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{13}\ u.c.$$

Note que o comprimento dos vetores são as distâncias entre os pontos de origem e destino. □

Para vetores no espaço, adotamos um procedimento análogo, analisando coordenada a coordenada.

Exemplo 6.4: Determine os vetores indicados abaixo e o comprimento de cada um deles, sabendo que: $O(0,0,0)$, $A(2,-1,2)$, $B(0,4,3)$.



Solução: Determinando os vetores como uma diferença entre os pontos e em seguida calculando o seu comprimento:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (2,-1,2) - (0,0,0) = (2-0,-1-0,2-0) = (2,-1,2)$$
$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3\ u.c.$$
$$\overrightarrow{OB} = B - O = (0,4,3) - (0,0,0) = (0-0,4-0,3-0) = (0,4,3)$$
$$\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{(0^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5\ u.c.$$
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,4,3) - (2,-1,2) = (0-2,4-(-1),3-2) = (-2,5,1)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{((-2)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{30}\ u.c. \qquad \square$$

Analogamente ao $\mathbb{R}^2$, o comprimento dos vetores são as distâncias entre os pontos de origem e destino. Estendendo o procedimento para vetores de qualquer hiperespaço, basta manter a análise coordenada a coordenada.

Exemplo 6.5: Dados os pontos no $\mathbb{R}^5$: $O(0,0,0,0,0)$, $A(2,-1,2,0,-4)$ e $B(0,4,3,-1,-2)$, determine os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AB}$. Determine também o comprimento deles.

Solução: Determinando os vetores como uma diferença entre os pontos e em seguida calculando o seu comprimento:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (2,-1,2,0,-4) - (0,0,0,0,0) = (2,-1,2,0,-4)$$
$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(2^2 + (-1)^2 + 2^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5\ u.c.$$
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,4,3,-1,-2) - (2,-1,2,0,-4)$$
$$\overrightarrow{AB} = (0-2,4-(-1),3-2,-1-0,-2-(-4)) = (-2,5,1,-1,2)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{((-2)^2 + 5^2 + 1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{35}\ u.c.$$

Como nos espaços dos exemplos anteriores, o comprimento dos vetores são as distâncias entre os pontos de origem e destino. $\square$

6.1 Operações de vetores

Podemos redefinir algumas operações de vetores, mas agora sob o ponto de visto geométrico. Focaremos em: (1) verificar a igualdade de vetores; (2) soma de vetores; (3) diferença de vetores; (4) produto de vetor por escalar; (5) combinação de vetores. No próximo capítulo veremos algumas operações de produtos entre vetores.

Definição 6.3: Igualdade de Vetores

Geometricamente, dois ou mais vetores são iguais se possuem a mesma direção, sentido e comprimento. Algebricamente, os vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ são iguais se os elementos correspondentes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são iguais. Ou seja, $\vec{u} = \vec{v}$ se, e somente se $x_i^u = x_i^v,\ \forall i$.

Definição 6.4: Soma de Vetores

A **soma de vetores** de um mesmo espaço pode ser feita dispondo-os de maneira a formar um caminho de vetores. O vetor a partir da origem inicial até o destino final é o vetor soma. Algebricamente, a soma de dois vetores se dá pela soma coordenada por coordenada. No espaço $\mathbb{R}^n$, dados os vetores $\vec{u} = (x_1^u, x_2^u, \ldots, x_n^u)$ e $\vec{v} = (x_1^v, x_2^v, \ldots, x_n^v)$:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1^u, x_2^u, \ldots, x_n^u) + (x_1^v, x_2^v, \ldots, x_n^v)$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1^u + x_1^v, x_2^u + x_2^v, \ldots, x_n^u + x_n^v).$$

Nos espaços mais utilizados, o plano $\mathbb{R}^2$, dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ e o espaço $\mathbb{R}^3$, dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_u, y_u) + (x_v, y_v) = (x_u + x_v, y_u + y_v),$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_u, y_u, z_u) + (x_v, y_v, z_u) = (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v).$$

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer:

(i) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

(ii) Associativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$;

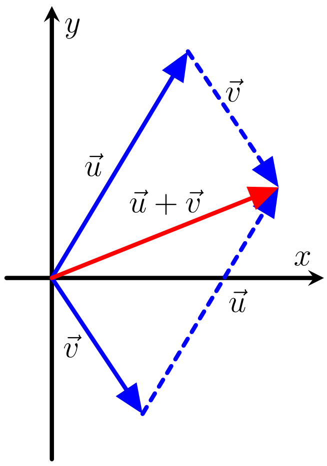
(iii) Vetor Nulo: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;

(iv) Vetor Oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

(v) Desigualdade triangular: $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

(vi) Desigualdade triangular generalizada: $|\vec{u_1} + \vec{u_2} + \ldots + \vec{u_n}| \leq |\vec{u_1}| + |\vec{u_2}| + \ldots + |\vec{u_n}|$.

Geometricamente, a soma de dois vetores pode ser definida pela "regra do paralelogramo". Na figura abaixo, podemos perceber este resultado. Os vetores somados são os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Perceba que os vetores podem ser translados para os vetores em tracejado. Assim, os vetores em azul formam um quadrilátero cujos lados são iguais e paralelos entre si, portanto um paralelogramo. O vetor resultante é a diagonal em vermelho e pode ser vista como a soma dos vetores acima $\vec{u} + \vec{v}$, ou dos vetores abaixo $\vec{v} + \vec{u}$, verificando assim a propriedade comutativa.

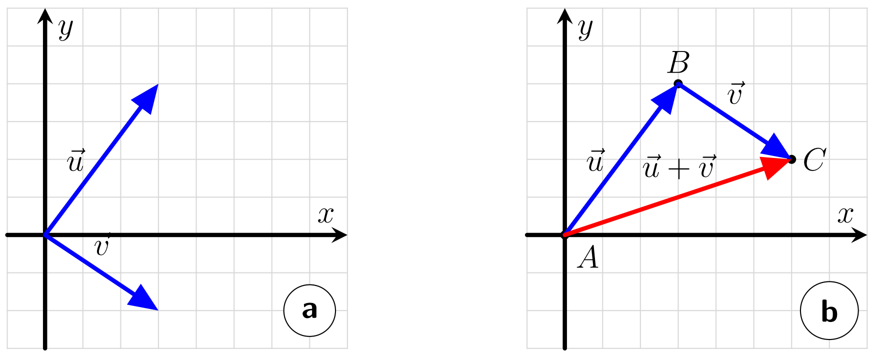


Dois vetores especiais foram definidos pelas propriedades. **O vetor nulo** é o vetor cujos elementos são todos zero. Assim, como a soma é coordenada a coordenada, um vetor nulo é neutro com relação à soma de vetores. O vetor nulo é representado por $\vec{0}$. Já **o vetor oposto ao vetor** $\vec{u}$ é representado por $-\vec{u}$. Quando somados, os vetores $\vec{u}$ e $-\vec{u}$ resultam no vetor $\vec{0}$. Para que isso ocorra, a soma de cada coordenada deve ser zero. Portanto, se $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ então, $-\vec{u} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

A desigualdade triangular relaciona o comprimento da soma de dois vetores e o comprimento de cada um dos dois vetores. Geometricamente, o vetor soma faz um triângulo junto aos vetores somados. Num triângulo, qualquer lado é menor ou igual que o comprimento dos outros dois lados. A igualdade ocorre se os vetores possuem a mesma direção e sentido. Para a soma de mais vetores, podemos generalizar a desigualdade triangular, conforme a propriedade **(vi)**.

> **Exemplo 6.6:** Dados os vetores $\vec{u} = (3, 4)$ e $\vec{v} = (3, -2)$, calcule o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$. Determine o comprimento destes vetores e verifique a desigualdade triangular.

Solução: Os vetores $\vec{u} = (3, 4)$ e $\vec{v} = (3, -2)$ são os vetores da figura (a). Na figura (b), os vetores estão dispostos em um caminho, ou seja, fixada uma origem (ponto A) e percorrendo os vetores $\vec{u}$ (até o ponto B) e em seguida percorrendo o vetor $\vec{v}$ (partindo do ponto B), chegamos ao destino (ponto C). Assim, o vetor soma é dado pelo vetor $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.



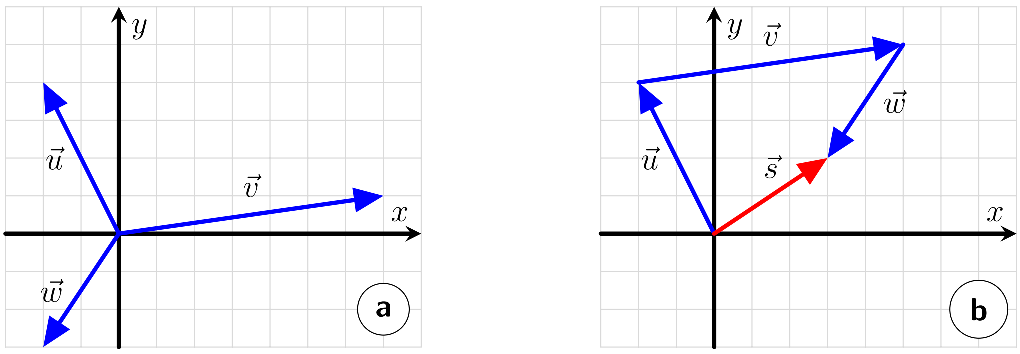
Algebricamente:

$$\vec{u} + \vec{v} = (3, 4) + (3, -2) = (3 + 3, 4 + (-2)) = (6, 2)$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \ u.c.$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \ u.c.$$
$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(6^2 + 2^2} = \sqrt{40} \ u.c.$$

Observe que, pela desigualdade triangular $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$. A desigualdade é verificada pois $\sqrt{40} \leq 5 + \sqrt{13}$. □

> **Exemplo 6.7:** Dados os vetores $\vec{u} = (-2, 4)$, $\vec{v} = (7, 1)$ e $\vec{w} = (-2, -3)$, calcule o vetor soma $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. Determine o comprimento destes vetores e verifique a desigualdade triangular.

Solução: Os vetores $\vec{u} = (-2, 4)$, $\vec{v} = (7, 1)$ e $\vec{w} = (-2, -3)$ são os vetores da figura (a). Na figura (b), os vetores estão dispostos em um caminho, começando por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, tendo a soma $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ como o vetor em vermelho.



Algebricamente:

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (-2, 4) + (7, 1) + (-2, -3)$$
$$\vec{s} = (-2 + 7 + (-2), 4 + 1 + (-3)) = (3, 2)$$

Quanto aos comprimentos:

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ u.c.$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\ u.c.$$
$$|\vec{w}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}\ u.c.$$
$$|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\ u.c.$$

Observe que, pela desigualdade triangular generalizada $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|$. A desigualdade é verificada pois $\sqrt{13} \leq 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + \sqrt{13}$. □

Exemplo 6.8: Dados os vetores $\vec{u} = (-1, 2, 2)$ e $\vec{v} = (4, -2, 2)$, calcule o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$. Determine o comprimento destes vetores e verifique a desigualdade triangular.

Solução: Calculando a soma dos vetores algebricamente:

$$\vec{u} + \vec{v} = (-1, 2, 2) + (4, -2, 2) = (-1 + 4, 2 + (-2), 2 + 2) = (3, 0, 4)$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{((-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3\ u.c.$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\ u.c.$$
$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\ u.c.$$

Observe que, pela desigualdade triangular $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$. A desigualdade é verificada pois $5 \leq 3 + 2\sqrt{6}$. □

Definição 6.5: Diferença de Vetores

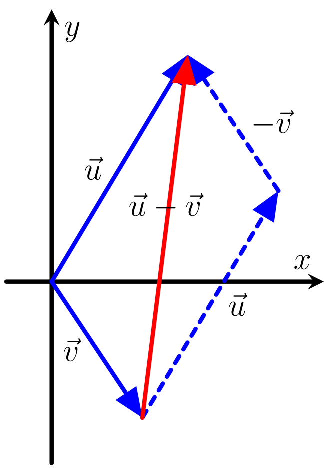
A **diferença de vetores** de um mesmo espaço é a soma de um vetor com o oposto do outro vetor. Algebricamente, a diferença de dois vetores se dá pela subtração coordenada por coordenada. No espaço $\mathbb{R}^n$, dados os vetores $\vec{u} = (x_1^u, x_2^u, \ldots, x_n^u)$ e $\vec{v} = (x_1^v, x_2^v, \ldots, x_n^v)$:

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1^u, x_2^u, \ldots, x_n^u) - (x_1^v, x_2^v, \ldots, x_n^v)$$
$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1^u, x_2^u, \ldots, x_n^u) + (-x_1^v, -x_2^v, \ldots, -x_n^v)$$
$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1^u - x_1^v, x_2^u - x_2^v, \ldots, x_n^u - x_n^v).$$

No $\mathbb{R}^2$, dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ e no $\mathbb{R}^3$, dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$:

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_u, y_u) - (x_v, y_v) = (x_u - x_v, y_u - y_v),$$
$$\vec{u} - \vec{v} = (x_u, y_u, z_u) - (x_v, y_v, z_u) = (x_u - x_v, y_u - y_v, z_u - z_v).$$

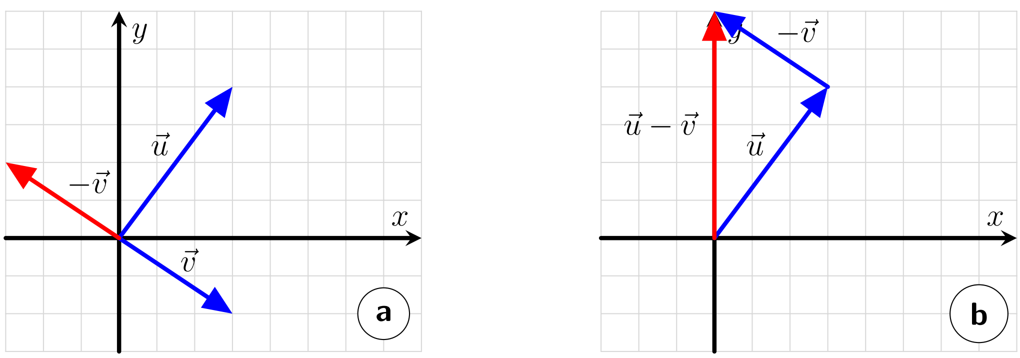
Geometricamente, a diferença de dois vetores também pode ser definida pela "regra do paralelogramo". Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, conforme a figura abaixo. Para fazer a diferença $\vec{u} - \vec{v}$, faz-se a translação dos vetores para os vetores em tracejado, sendo que o vetor $\vec{v}$, já foi translado como o seu vetor oposto $-\vec{v}$. Novamente formamos um paralelogramo, cujo vetor resultante é a diagonal em vermelho $\vec{u} - \vec{v}$, conforme o caminho da direita, tracejado.



Como a diferença entre vetores pode ser vista como uma soma com o vetor oposto, então as propriedades vistas na soma entre vetores também são válidas. Por exemplo, a desigualdade triangular também é válida $|\vec{u} - \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |-\vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Exemplo 6.9: Dados os vetores $\vec{u} = (3, 4)$ e $\vec{v} = (3, -2)$, calcule o vetor diferença $\vec{u} - \vec{v}$. Determine o comprimento destes vetores.

Solução: Os vetores $\vec{u} = (3, 4)$, $\vec{v} = (3, -2)$ e o seu oposto $-\vec{v} = (-3, 2)$ são os vetores da figura (a). Na figura (b) é feita a soma do vetor $\vec{u}$ e o vetor $-\vec{v}$. Assim:



Algebricamente:

$$\vec{u}+\vec{v}=(3,4)-(3,-2)=(3-3,4-(-2))=(0,6)$$
$$|\vec{u}|=\sqrt{(3^2+4^2}=\sqrt{25}=5\ u.c$$
$$|-\vec{v}|=|\vec{v}|=\sqrt{(3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}\ u.c$$
$$|\vec{u}-\vec{v}|=6\ u.c$$

Observe que, pela desigualdade triangular $|\vec{u}-\vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}|$. A desigualdade é verificada, pois $6 \leq 5+\sqrt{13}$. □

Exemplo 6.10: Dados os vetores $\vec{u}=(1,2,3)$, $\vec{v}=(2,-2,0)$ e $\vec{w}=(3,0,3)$, no $\mathbb{R}^3$, calcule:

(a) $\vec{w}-\vec{v}$;

(b) $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$;

Solução: Algebricamente:

(a) $\vec{w}-\vec{v}=(3,0,3)-(2,-2,0)=(3-2,0-(-2),3-0)=(1,2,3)$

(b) $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}=(1,2,3)+(2,-2,0)-(3,0,3)$

$$\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}=(1+2-3,2+(-2)-0,3+0-3)=(0,0,0)$$ □

Definição 6.6: Produto de Vetor por Escalar

A **multiplicação (produto) de um vetor por escalar** dá escala a um vetor, aumentando-o, diminuindo-o, e até mesmo invertendo o seu sentido. Algebricamente, a multiplicação de um vetor por escalar se dá pelo produto de cada coordenada do vetor pelo escalar. No espaço $\mathbb{R}^n$, dado o vetor $\vec{u}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot \vec{u}=\alpha \cdot (x_1,x_2,\ldots,x_n)$$
$$\alpha \cdot \vec{u}=(\alpha \cdot x_1,\alpha \cdot x_2,\ldots,\alpha \cdot x_n).$$

Assim, seja um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. No $\mathbb{R}^2$, dado um vetor $\vec{u}=(x_u,y_u)$ e no $\mathbb{R}^3$, dado um vetor $\vec{u}=(x_u,y_u,z_u)$:

$$\alpha \cdot (x_u,y_u)=(\alpha \cdot x_u,\alpha \cdot y_u),$$
$$\alpha \cdot (x_u,y_u,z_u)=(\alpha \cdot x_u,\alpha \cdot y_u,\alpha \cdot z_u).$$

O valor de α determina a proporção do vetor original $\vec{u}$ que será utilizada. Dessa forma, o vetor resultante $\alpha \cdot \vec{u}$ aumenta seu comprimento quando multiplicado por $|\alpha|>1$ e reduz seu comprimento quando multiplicado por $0<|\alpha|<1$. Além disso, o vetor resultante muda de sentido quando $\alpha<0$.

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e os escalares $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$:

(i) **Associativa:** $\alpha \cdot (\beta\vec{u})=(\alpha \cdot \beta)\vec{u}$;

(ii) **Distributiva:** $\alpha \cdot (\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$;

(iii) **Distributiva:** $(\alpha+\beta)\cdot\vec{u} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$;

(iv) **Identidade:** $1\cdot\vec{u} = \vec{u}$;

(v) **Vetor Oposto:** $-1\cdot\vec{u} = -\vec{u}$;

(vi) **Vetor Nulo:** $0\cdot\vec{u} = \vec{0}$ e $\alpha\cdot\vec{0} = \vec{0}$;

(vii) **Comprimento do Vetor:** $|\alpha\cdot\vec{u}| = |\alpha|\cdot|\vec{u}|$.

Alguns vetores específicos foram definidos utilizando o produto por escalar, como o vetor identidade, vetor oposto e vetor nulo. Quanto ao comprimento do vetor, mesmo se $\alpha < 0$, o comprimento do vetor resultante $|\alpha\cdot\vec{u}|$ é positivo, com o produto do módulo do escalar $|\alpha|$ multiplicando o comprimento do vetor $|\vec{u}|$.

A noção do produto de um escalar por um vetor pode ser utilizada para determinar se dois vetores são paralelos.

Definição 6.7: Vetores Paralelos

Dois vetores são paralelos se possuem a mesma direção. Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos (ou $\vec{u} \,||\, \vec{v}$), existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{u} = \alpha\cdot\vec{v}$$
$$(x_1^u, x_2^u, \ldots, x_n^u) = \alpha\cdot(x_1^v, x_2^v, \ldots, x_n^v)$$
$$(x_1^u, x_2^u, \ldots, x_n^u) = (\alpha\cdot x_1^v, \alpha\cdot x_2^v, \ldots, \alpha\cdot x_n^v)$$
$$\begin{cases} x_1^u = \alpha\cdot x_1^v \\ x_2^u = \alpha\cdot x_2^v \\ \vdots \\ x_n^u = \alpha\cdot x_n^v \end{cases} \implies \alpha = \frac{x_1^u}{x_1^v} = \frac{x_2^u}{x_2^v} = \cdots = \frac{x_n^u}{x_n^v}$$

Portanto, se a razão coordenada a coordenada for igual, ou seja, se as coordenadas forem proporcionais, então os vetores são paralelos.

Por fim, a partir do conceito produto por escalar e de vetores paralelos, podemos definir os vetores unitários, ou versores.

Definição 6.8: Versores

O versor de um vetor $\vec{u}$ é um vetor com a mesma direção, mesmo sentido, mas de comprimento unitário $|\vec{u}| = 1$. O versor do vetor $\vec{u}$ é denotado por $\hat{u}$. Assim, o versor $\hat{u}$ de um vetor $\vec{u}$ é tal que:

$$\begin{cases} \hat{u} = \alpha\vec{u} \\ |\hat{u}| = 1 \end{cases} \implies \alpha = \frac{1}{|\vec{u}|} \implies \hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}.$$

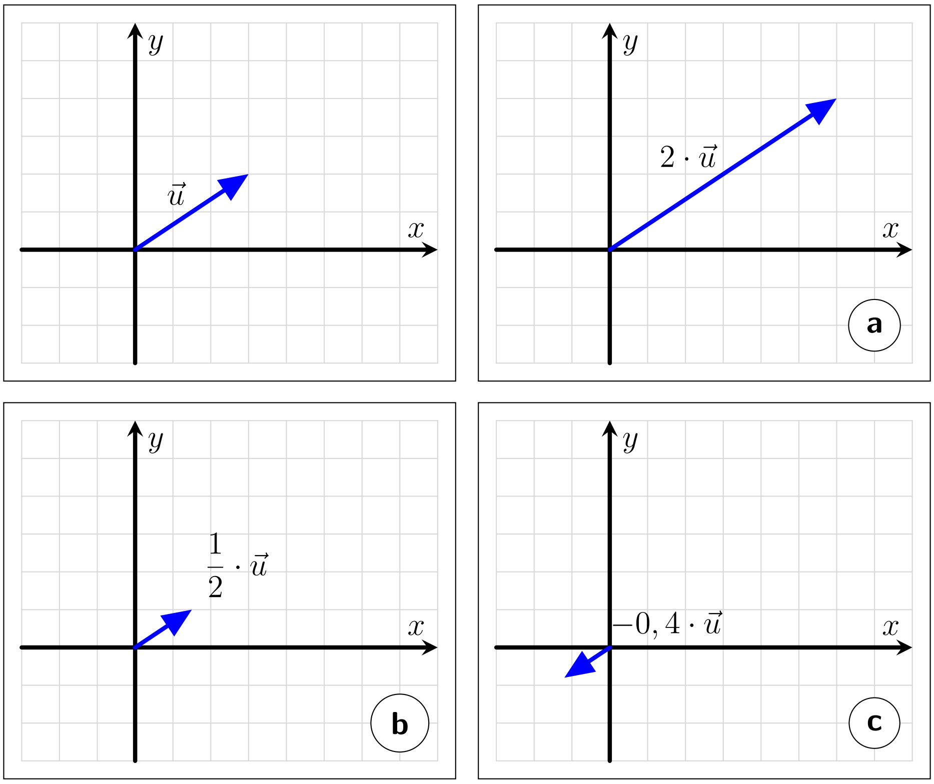
Exemplo 6.11: Dado o vetor $\vec{u} = (3,2)$, calcule os vetores abaixo. Determine o comprimento destes vetores e calcule o versor de $\vec{u}$.

(a) $2\cdot\vec{u}$;

(b) $\frac{1}{2}\cdot\vec{u}$;

(c) $-0,4\cdot\vec{u}$;

Solução: O vetor $\vec{u} = (3, 2)$ e as soluções dos itens (a), (b) e (c) estão representados nas figuras abaixo.



Algebricamente:

$$\text{(a) } 2 \cdot \vec{u} = 2 \cdot (3, 2) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 2) = (6, 4)$$
$$\text{(b) } \frac{1}{2} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2} \cdot (3, 2) = (\frac{1}{2} \cdot 3, \frac{1}{2} \cdot 2) = (\frac{3}{2}, 1)$$
$$\text{(c) } -0,4 \cdot \vec{u} = -0,4 \cdot (3, 2) = (-0,4 \cdot 3; -0,4 \cdot 2) = (-1,2; -0,8)$$

Quanto às distâncias:

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \; u.c.$$
$$|2 \cdot \vec{u}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2 \cdot \sqrt{13} \; u.c.$$
$$\left| \frac{1}{2} \cdot \vec{u} \right| = \sqrt{1,5^2 + 1^2} = \sqrt{3,25} = 0,5 \cdot \sqrt{13} \; u.c.$$
$$|-0,4 \cdot \vec{u}| = \sqrt{(-1,2)^2 + (-0,8)^2} = \sqrt{2,08} = 0,4 \cdot \sqrt{13} \; u.c.$$

Para encontrar o versor de $\vec{u}$:

$$\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$$
$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (3, 2) = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$$

□

Exemplo 6.12: Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -2)$, $\vec{v} = (3, 6, -6)$, $\vec{w} = (-0,5; -1; 1)$ e $\vec{x} = (-1, -2, 0)$, determine se os vetores são paralelos.

Solução: Para que dois vetores sejam paralelos, é necessário que as suas coordenadas sejam proporcionais. Para os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}$$
$$(3,6,-6) = \alpha(1,2,-2) = (\alpha, 2\alpha, -2\alpha)$$
$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ 2\alpha = 6 \\ -2\alpha = -6 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3$$

Portanto, como para toda coordenada o escalar α teve o mesmo valor, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos. Para os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$:

$$\vec{w} = \alpha\vec{u}$$
$$(-0,5; -1,1) = \alpha(1,2,-2) = (\alpha, 2\alpha, -2\alpha)$$
$$\begin{cases} \alpha = -0,5 \\ 2\alpha = -1 \\ -2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Novamente, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são paralelos, mesmo possuindo a mesma direção, mas sentidos diferentes ($\alpha < 0$). Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos e $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são paralelos então $\vec{v}$ e $\vec{w}$ também são paralelos. Para os vetores $\vec{u}$ e $\vec{x}$:

$$\vec{x} = \alpha\vec{u}$$
$$(-1; -2,0) = \alpha(1,2,-2) = (\alpha, 2\alpha, -2\alpha)$$
$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ 2\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -1 \\ -2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

Perceba aqui que as coordenadas não são proporcionais. Portanto, $\vec{u}$ e $\vec{x}$ não são paralelos. Como $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos, então o vetor $\vec{x}$ não é paralelo a esses vetores. □

Exemplo 6.13: Calcule o versor dos vetores a seguir:

(a) $\vec{u} = (1,2)$; (b) $\vec{u} = (1,2,-2)$; (c) $\vec{u} = (1,1,1,1)$.

Solução: Aplicando a definição:

$$\text{(a) } \hat{u} = \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$
$$\text{(b) } \hat{u} = \frac{(1,2,-2)}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{(1,2,-2)}{3} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$
$$\text{(c) } \hat{u} = \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} = \frac{(1,1,1,1)}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$ □

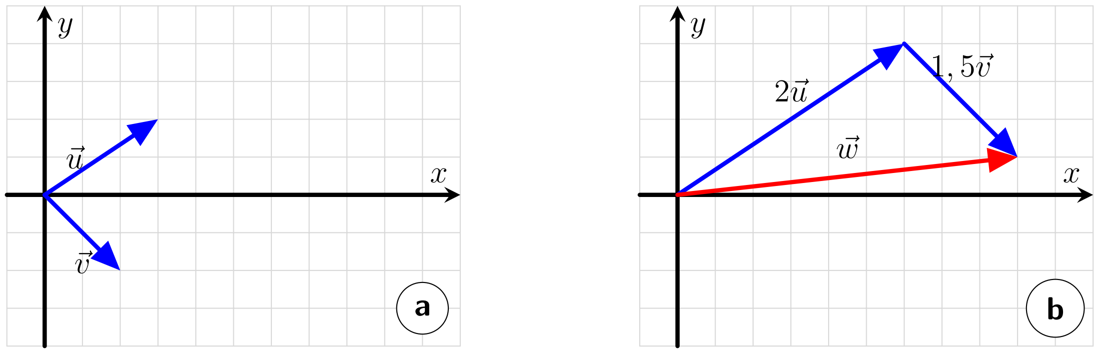
Definição 6.9: Combinação Linear de Vetores

A **combinação linear de vetores** ocorre quando utilizamos as operações de soma de vetores e multiplicação de vetores por escalar. Uma combinação linear de vetores $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$, usando os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, resulta no vetor $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{u_1} + \alpha_2\vec{u_2} + \ldots + \alpha_n\vec{u_n}.$$

Exemplo 6.14: Dados os vetores $\vec{u} = (3, 2)$ e $\vec{v} = (2, -2)$, calcule a combinação linear $\vec{w} = 2\vec{u} + 1,5\vec{v}$.

Solução: Os vetores $\vec{u} = (3, 2)$ e $\vec{v} = (2, -2)$ são os vetores da figura (a). Na figura (b), os vetores estão em escala e dispostos em um caminho. Assim, a combinação linear é dada pelo vetor $\vec{w} = 2\vec{u} + 1,5\vec{v}$.



Algebricamente:

$$
\begin{aligned}
\vec{w} &= 2\vec{u} + 1,5\vec{v} \\
\vec{w} &= 2(3, 2) + 1,5(2, -2) \\
\vec{w} &= (6, 4) + (3, -3) \\
\vec{w} &= (9, 1)
\end{aligned}
$$

□

Exemplo 6.15: Dados os vetores $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (-1, 2)$ e $\vec{w} = (5, 0)$, calcule $\vec{w}$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução: Como queremos calcular $\vec{w}$ em função dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos, algebricamente:

$$
\begin{aligned}
\vec{w} &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\
(5, 0) &= \alpha(2, 1) + \beta(-1, 2) \\
(5, 0) &= (2\alpha, \alpha) + (-\beta, 2\beta) \\
(5, 0) &= (2\alpha - \beta, \alpha + 2\beta)
\end{aligned}
$$

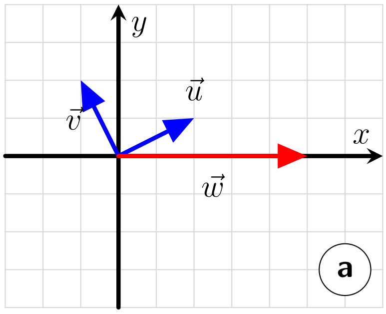
$$
\begin{cases} 2\alpha - \beta = 5 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

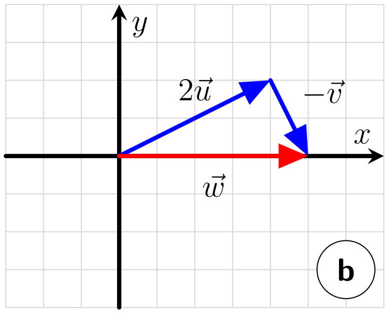
Por fim, chegamos em um sistema de equações com as variáveis α e β. Perceba que as colunas da matriz de coeficientes são os respectivos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Resolvendo o sistema linear, chegamos a conclusão que $\alpha = 2$ e $\beta = -1$. Vamos conferir?

$$
\begin{aligned}
\vec{w} &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 2(2, 1) - 1(-1, 2) \\
\vec{w} &= (4, 2) + (1, -2) = (5, 0).
\end{aligned}
$$

Portanto, o resultado está correto!

Geometricamente, mostramos os vetores $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (-1, 2)$ e $\vec{w} = (5, 0)$ na figura (a). Na figura (b), dispomos a combinação linear dos vetores.





□

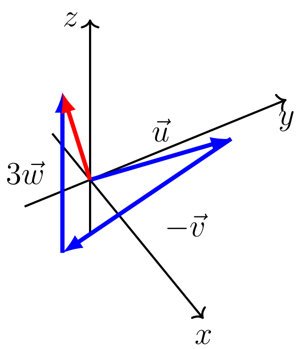
Exemplo 6.16: Dados os vetores $\vec{u} = (2, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (0, 0, 1)$, é possível obter o vetor $(1, -1, 3)$ como combinação linear dos três vetores?

Solução: Para calcular essa combinação linear:

$$(1, -1, 3) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}, \;\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$
$$(1, -1, 3) = \alpha(2, 1, 2) + \beta(1, 2, 2) + \gamma(0, 0, 1)$$
$$(1, -1, 3) = (2\alpha, \alpha, 2\alpha) + (\beta, 2\beta, 2\beta) + (0, 0, \gamma)$$
$$(1, -1, 3) = (2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, 2\alpha + 2\beta + \gamma)$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = -1 \\ 2\alpha + 2\beta + \gamma = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

Novamente, as colunas da matriz de coeficientes do sistema linear são os vetores da combinação linear. Geometricamente, o resultado pode ser verificado na figura abaixo:



□

Dados alguns vetores do $\mathbb{R}^m$, é sempre possível obter um vetor $\vec{u}$ como uma combinação linear dos vetores dados? A resposta é não. Algebricamente, seja um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$. Vamos tentar escrevê-lo como combinação linear de n vetores $\vec{u}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

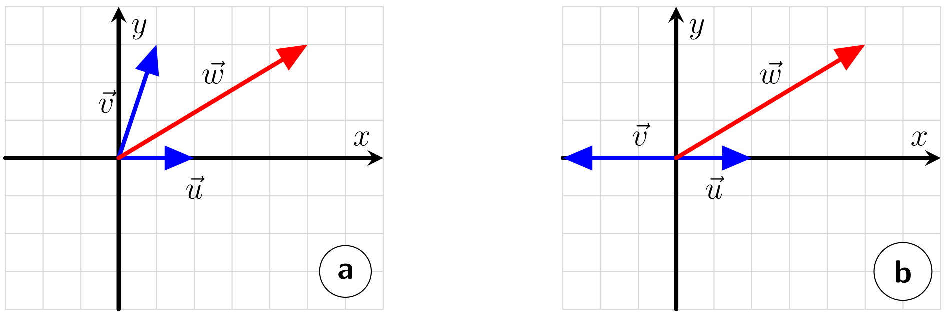
$$\vec{v} = \alpha_1\vec{u_1} + \alpha_2\vec{u_2} + \ldots + \alpha_n\vec{u_n}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{m1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{bmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \ldots & u_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Assim, podemos escrever um sistema linear $U \cdot \vec{\alpha} = \vec{v}$, onde U é a matriz de coeficientes cujas colunas são os vetores $\vec{u}_i$, o vetor $\vec{\alpha}$ é o vetor dos escalares $\vec{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Portanto, a combinação linear é possível se o sistema linear obtido para calcular os escalares $\vec{\alpha_i}$ possui solução. Se o sistema linear for possível e determinado, haverá uma única combinação linear dos vetores $\vec{u_i}$ e se for indeterminado, haverão infinitas combinações lineares dos vetores $\vec{u_i}$.

Geometricamente, no plano $\mathbb{R}^2$, bastam dois vetores não-colineares $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que qualquer outro vetor pode ser escrito como a combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Caso os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares então os vetores com direções diferentes não poderiam ser combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Nas figuras abaixo, é possível obter o vetor $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na figura (a), basta ter $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$. Entretanto, na figura (b), não é possível estabelecer uma combinação. Quaisquer dois vetores do $\mathbb{R}^2$ não-colineares formam o que chamamos de **base** de $\mathbb{R}^2$, ou seja, um conjunto mínimo de vetores do plano que consegue obter todos os outros vetores. No plano $\mathbb{R}^2$, a base mais utilizada é a **base canônica**, formada pelos vetores $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$.



No espaço $\mathbb{R}^3$, são necessários três vetores não-coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ que qualquer outro vetor pode ser escrito como a combinação de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Se os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ fossem coplanares, ou seja, dentro de um mesmo plano, então os vetores com direções que atravessam o plano não poderiam ser escritos como combinação de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Analogamente ao plano, quaisquer três vetores não-coplanares do espaço formam uma **base** do $\mathbb{R}^3$, ou seja, um conjunto mínimo de vetores do espaço que consegue obter todos os outros vetores como combinação linear. No espaço $\mathbb{R}^3$, a base mais utilizada é a **base canônica**, formada pelos vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Analogamente, no espaço $\mathbb{R}^n$, a base mais utilizada é a **base canônica**, formada pelos vetores:

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ldots, \quad \vec{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6.17: Dada a base canônica do espaço $\mathbb{R}^4$, obtenha o vetor $(1, -1, 0, 3)$ como combinação dos vetores dessa base.

Solução: A base canônica no $\mathbb{R}^4$ é dada por:

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para calcular essa combinação:

$$(1,-1,0,3) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

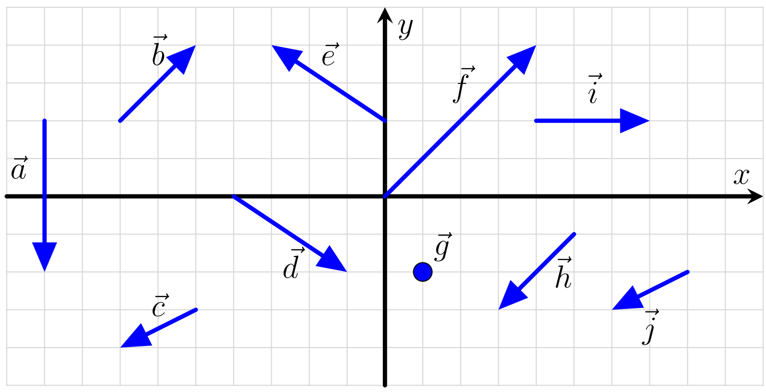
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 3 \end{cases}$$

□

6.2 Exercícios

Para alguns exercícios, use algum aplicativo matemático para visualizar melhor os problemas no plano $\mathbb{R}^2$ e no espaço $\mathbb{R}^3$. Recomendo o Geogebra. Para exercícios algébricos, use o Python para fazer os cálculos.

1. Determine os vetores indicados abaixo e o comprimento de cada um deles. Indique algumas relações entre os vetores (colineares, iguais, opostos, unitários, nulos).



2. Dados os pontos $A(0,-2)$, $B(2,3)$, $C(-1,2)$, $D(-1,-2)$, determine os vetores abaixo e seus respectivos comprimentos. Faça um esboço dos vetores no plano cartesiano.

   (a) $\overrightarrow{AB}$; (b) $\overrightarrow{BC}$; (c) $\overrightarrow{CD}$; (d) $\overrightarrow{DA}$;

3. Dados os pontos $O=(0,0,0)$, $A(1,-2,2)$, $B(4,0,3)$ e $C(-2,0,-3)$, determine os vetores abaixo e seus respectivos comprimentos. Faça um esboço dos vetores no espaço.

   (a) $\overrightarrow{OA}$; (b) $\overrightarrow{AB}$; (c) $\overrightarrow{AC}$; (d) $\overrightarrow{CB}$;

4. Dados os pontos no $\mathbb{R}^4$: $O=(0,0,0,0)$, $A(2,-1,2,0)$ e $B(0,4,3,-1)$ e $C(-1,1,-1,1)$, determine os vetores abaixo e seus respectivos comprimentos. Nesse é melhor não fazer esboço.

   (a) $\overrightarrow{OC}$; (b) $\overrightarrow{AB}$; (c) $\overrightarrow{AC}$; (d) $\overrightarrow{CB}$;

5. Determine o ponto B do vetor $\overrightarrow{AB}$, dado o ponto de origem A, para os casos a seguir:

   (a) $A=(0,0)$, $\overrightarrow{AB}=(2,-1)$;
   (b) $A=(2,-1)$, $\overrightarrow{AB}=(-2,1)$;
   (c) $A=(1,2,-1)$, $\overrightarrow{AB}=(2,1,-1)$;
   (d) $A=(1,1,-1,-1)$, $\overrightarrow{AB}=(-1,1,2,-1)$;

6. Faça o esboço no plano cartesiano dos seguintes vetores:

(a) $\vec{u} = (0, 3)$;
(b) $\vec{v} = (1, 3)$;
(c) $\vec{w} = (2, 3)$;
(d) $\vec{r} = (2, -3)$;
(e) $\vec{s} = (-2, 3)$;
(f) $\vec{t} = (-1, -3)$;

7. Faça o esboço no espaço dos seguintes vetores:

(a) $\vec{u} = (0, 3, 0)$;
(b) $\vec{v} = (2, 3, 0)$;
(c) $\vec{w} = (0, 3, 2)$;
(d) $\vec{r} = (0, 0, -2)$;
(e) $\vec{s} = (2, 0, 2)$;
(f) $\vec{t} = (-2, 2, 1)$;

8. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (2, -1)$ e $\vec{w} = (3, 1)$, calcule:

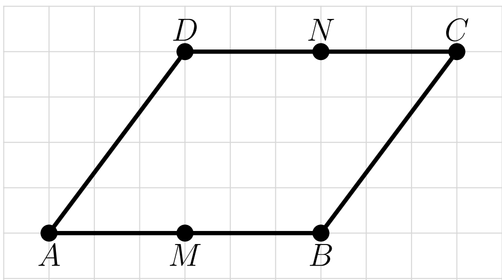
(a) $\vec{u} + \vec{v}$;
(b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$;
(c) $\vec{u} - \vec{v}$;
(d) $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$;
(e) $2\vec{u} - 3\vec{v}$;
(f) $\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$;

9. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 2, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 0)$, calcule:

(a) $\vec{u} + \vec{v}$;
(b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$;
(c) $\vec{u} - \vec{v}$;
(d) $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$;
(e) $2\vec{u} - 3\vec{v}$;
(f) $\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$;

10. Seja o paralelogramo $ABCD$, com os pontos médios M e N, como na figura abaixo. Determine, geometricamente e algebricamente:

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$;
(b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$;
(c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;
(d) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{NC}$;
(e) $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{BC}$;
(f) $\overrightarrow{ND} - \overrightarrow{MB}$;
(g) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$;
(h) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CN}$;



11. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (2, -1)$, calcule o vetor $\vec{w}$ que satisfaz a equação

$$3\vec{w} + (0, 1) = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$$

12. Dados os vetores $\vec{u} = (-1, 1, 2)$ e $\vec{v} = (0, 2, -1)$, calcule o vetor $\vec{w}$ que satisfaz a equação

$$3\vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{w}$$

13. Dados os vetores $\vec{u} = (-1, 1, -2, 2, -3, 3)$ e $\vec{v} = (0, 2, -1, -3, 0, 0)$, calcule o vetor $\vec{w}$ que satisfaz a equação

$$\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v} - \vec{w}$$

14. Dados os vetores $\vec{a} = (1, 3)$ e $\vec{b} = (-2, -1)$, determine os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que satisfazem o sistema de equações abaixo:
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ -\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \end{cases}$$

15. Dados os vetores $\vec{a} = (1, 3, -1)$ e $\vec{b} = (-2, -1, 2)$, determine os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que satisfazem o sistema de equações abaixo:
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ -\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \end{cases}$$

16. Dados os vetores $\vec{a} = (1, 3, -1, 3)$ e $\vec{b} = (-2, -1, 2, -1)$, determine os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que satisfazem o sistema de equações abaixo:
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ -\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \end{cases}$$

17. Calcule o vetor $\vec{w} = (2, 2)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (-1, 1)$ e $\vec{v} = (0, 2)$.

18. Calcule o vetor $\vec{w} = (-2, 4)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2)$.

19. Calcule o vetor $\vec{w} = (1, 2, 3)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 2)$ e $\vec{r} = (0, 1, -1)$.

20. Calcule o vetor $\vec{w} = (0, -1, 2)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (0, -1, 4)$, $\vec{v} = (0, 0, -1)$ e $\vec{r} = (1, 0, -1)$.

21. Calcule o vetor $\vec{w} = (2, 1, 1, 1)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{v} = (-1, 0, 0, 0)$, $\vec{r} = (0, 0, -1, 1)$ e $\vec{s} = (0, 0, 0, 2)$.

6.3 Exercícios Computacionais

1. Escreva uma função que retorne o comprimento de um vetor de tamanho n, em Numpy.
2. Escreva uma função que retorne o versor de um vetor de tamanho n, em Numpy.
3. Dados dois vetores de tamanho n, diferentes do vetor nulo. Escreva uma função que retorne a razão entre os vetores (divisão do comprimento do primeiro vetor pelo comprimento do segundo vetor).
4. Gere 5 vetores de tamanho 5 de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Calcule o comprimento de cada um deles. Calcule o versor correspondente de cada vetor.
5. Escreva uma função que retorne se dois vetores de tamanho n são paralelos em Numpy.
6. Seja um vetor de tamanho n e comprimento c diferente de zero. Escreva uma função que retorne um vetor paralelo de comprimento C, em Numpy.
7. Gere 10 vetores de tamanho 2 de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Encontre todos os pares de vetores paralelos existentes dentre os 10 vetores.

8. Escreva uma função que, dados os vetores $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, ..., $\vec{u_n}$ de tamanho m, determina uma combinação para o vetor $\vec{v}$, de tamanho m. Lembre-se que pode não existir combinações possíveis.

9. Escreva uma função que, dados os vetores $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, ..., $\vec{u_n}$ de tamanho m, determina uma combinação para o vetor $\vec{0}$, de tamanho m, diferente da combinação trivial.

10. Escreva uma função que, dados os vetores $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, ..., $\vec{u_n}$ de tamanho m verifica quais vetores podem ser escritos como combinação dos outros vetores.

11. Gere 5 vetores de tamanho 5 de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Calcule (se possível) uma combinação para outro vetor de tamanho 5 de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$

12. Gere 5 vetores de tamanho 5 de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Verifique quais vetores são combinação dos outros 4 vetores.

Capítulo 7

Produto de Vetores

No capítulo anterior, foram vistos vários conceitos e operações entre vetores. Nesse capítulo, ainda sob a perspectiva geométrica, algébrica e computacional, vamos ver alguns produtos entre vetores e suas aplicações. São eles: (7.1) produto escalar; (7.2) produto vetorial; e (7.3) produto misto.

7.1 Produto Escalar

Definição 7.1: Produto Escalar

O produto escalar (também conhecido como produto interno) de dois vetores é dado pela soma dos produtos coordenada a coordenada. Assim, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no $\mathbb{R}^n$, o produto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ (ou $<\vec{u},\vec{v}>$) entre eles é dado por:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x_1^u, x_2^u, \ldots, x_n^u)\cdot(x_1^v, x_2^v, \ldots, x_n^v)$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1^u\cdot x_1^v + x_2^u\cdot x_2^v + \ldots + x_n^u\cdot x_n^v.$$

Observe que o resultado do produto escalar é um escalar, i.e., $\vec{u}\cdot\vec{v}\in\mathbb{R}$.

O que acontece se fizermos o produto escalar de um vetor por ele mesmo?

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\vec{u}\cdot\vec{u} = x_1\cdot x_1 + x_2\cdot x_2 + \ldots + x_n\cdot x_n$$
$$\vec{u}\cdot\vec{u} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \qquad \text{ou}$$
$$\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

O lado direito da equação acima é o cálculo do comprimento de um vetor no $\mathbb{R}^n$. Ou seja, podemos estabelecer:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \qquad \text{ou}$$
$$|\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Com isso, podemos estabelecer algumas propriedades do produto escalar.

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer e $\alpha\in\mathbb{R}$:

(i) Reflexiva: $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$ e $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$;

(ii) Comutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$;

(iii) Distributiva: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$;

(iv) Associativa com escalar: $(\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha \cdot \vec{v})$;

(v) Vetor nulo: $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$;

(vi) Comprimento Vetor soma: $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$;

(vii) Comprimento Vetor diferença: $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$;

(viii) Desigualdade de Cauchy-Schwarz $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

Exemplo 7.1: Calcule o produto escalar dos vetores a seguir:

(a) $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (-1, 3)$;

(b) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (0, 1, -3)$;

(c) $\vec{u} = (1, 2, 3, 4, 5)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 1, 0, 0)$.

Solução: Aplicando a definição de produto escalar:

$$\text{(a) } \vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2) \cdot (-1, 3) = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 + 6 = 5$$
$$\text{(b) } \vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2, 3) \cdot (0, 1, -3) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 + 2 - 9 = -7$$
$$\text{(c) } \vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2, 3, 4, 5) \cdot (-1, 0, 1, 0, 0) = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 + 0 + 3 + 0 + 0 = 2$$

□

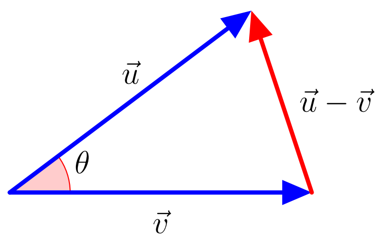
A partir do produto escalar, é possível obter uma relação para encontrar o ângulo entre dois vetores.

Definição 7.2: Ângulo entre Vetores

O ângulo entre dois vetores é a medida da inclinação relativa de dois vetores com o mesmo ponto de origem. Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e o ângulo θ entre eles. O ângulo entre dois vetores pode ser dada pela relação:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \hat{u} \cdot \hat{v}.$$

Geometricamente, podemos considerar a figura abaixo, com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com um ângulo θ entre eles.



Pela lei dos cossenos e pela propriedade **(vii)** do produto escalar, respectivamente:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta$$
$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

Usando as duas relações acima, chegamos na equação da Definição 7.2. Algumas considerações para o ângulo θ entre os vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

- $\theta = 0^\circ$ se, e somente se, $\vec{u} \parallel \vec{v}$, eles têm o mesmo sentido e $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$;
- $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$;
- $\theta = 90^\circ$ se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$;
- $\theta = 180^\circ$ se, e somente se, $\vec{u} \parallel \vec{v}$, eles têm sentidos opostos e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

O ângulo entre dois vetores não é maior que 180°. Para verificar que dois vetores são paralelos, basta verificar que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$. Entretanto, computacionalmente, o teste de paralelismo utilizando a proporção das coordenadas é melhor, pois realiza menos operações. A partir da concepção do ângulo entre vetores, podemos definir vetores ortogonais.

Definição 7.3: Vetores Ortogonais

Dois vetores são ortogonais se o ângulo entre eles é de 90°. Um vetor $\vec{u}$ ortogonal ao vetor $\vec{v}$ é denotado por $\vec{u} \perp \vec{v}$. Para que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais, o produto escalar entre eles deve resultar em zero, i.e., $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemplo 7.2: Calcule o ângulo entre os vetores a seguir:

(a) $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1)$;

(b) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (2, 0, 1)$;

(c) $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 1, 1)$.

Solução: Como visto, o ângulo entre dois vetores pode ser calculado utilizando a relação:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\text{(a) } \vec{u} \cdot \vec{v} &= (1, 2) \cdot (2, 1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4 \\
|\vec{u}| &= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \\
|\vec{v}| &= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\
\cos\theta &= \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 36,87^\circ \\
\text{(b) } \vec{u} \cdot \vec{v} &= (1, 2, -2) \cdot (2, 0, 1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta = 90^\circ \\
\text{(c) } \vec{u} \cdot \vec{v} &= (1, 1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 1, 1) = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\
|\vec{u}| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2 \\
|\vec{v}| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2 \\
\cos\theta &= \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 60^\circ
\end{aligned}$$

□

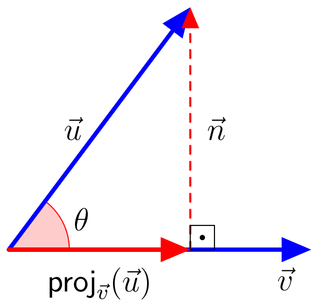
A partir do produto escalar e da relação para determinar o ângulo entre dois vetores, podemos calcular a projeção ortogonal de um vetor sobre outro.

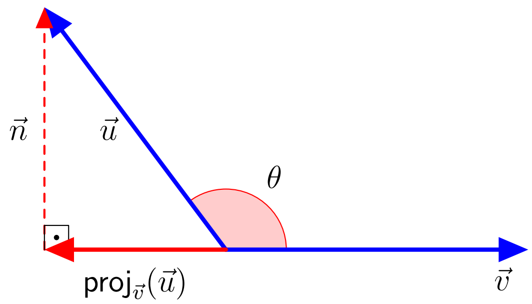
Definição 7.4: Projeção de um vetor

A projeção ortogonal de um vetor $\vec{u}$ sobre a direção do vetor $\vec{v}$ é a componente vetorial de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$. Sejam o vetor $\vec{u}$ e o vetor não nulo $\vec{v}$. A projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$ em relação ao vetor $\vec{v}$, denotada por $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$, é calculada por:

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \cdot \vec{v} = (\vec{u} \cdot \hat{v}) \cdot \hat{v}.$$

Nas figuras abaixo, apresentamos a projeção de $\vec{u}$ em $\vec{v}$, $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$:





Para calcular $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$, usamos a definição trigonométrica do cosseno de θ, para calcular o comprimento do vetor projeção. Em seguida, o vetor $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ pode ser obtido a partir do produto escalar do comprimento $|\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}|$ e do vetor unitário $\hat{v}$:

$$|\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| = |\vec{u}| \cdot \cos\theta = |\vec{u}| \cdot \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{u} \cdot \hat{v}$$
$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = |\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| \cdot \hat{v} = (\vec{u} \cdot \hat{v}) \cdot \hat{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \cdot \vec{v}$$

O vetor $\vec{n}$, normal ao vetor v e componente vetorial do vetor $\vec{u}$ ortogonal ao vetor $\vec{v}$ e pode ser obtido por meio da diferença $\vec{n} = \vec{u} - \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$.

Exemplo 7.3: Calcule a projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ a seguir:

(a) $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1)$;

(b) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (2, 0, 1)$;

(c) $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 1, 1)$.

Solução: A projeção de um vetor $\vec{u}$ sobre um vetor $\vec{v}$ é dada por:

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \cdot \vec{v}$$

Assim, para cada caso:

$$\text{(a) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2)\cdot(2,1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 4$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$
$$\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{4}{(\sqrt{5})^2}\right)\cdot(2,1) = \left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$$
$$\text{(b) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2,-2)\cdot(2,0,1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + (-2)\cdot 1 = 0$$
$$\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{0}$$
$$\text{(c) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,1,1,1)\cdot(-1,1,1,1) = 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2+1^2} = 2$$
$$\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{2}{2^2}\right)\cdot(-1,1,1,1) = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Observe que no caso (b), não houve projeção, pois vetores ortogonais não possuem projeção entre si. □

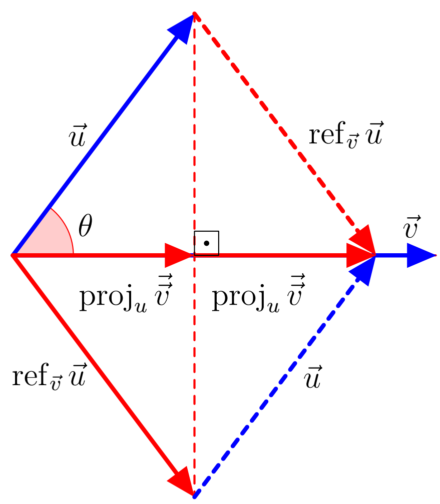
A partir do produto escalar e da relação para determinar o ângulo entre dois vetores, podemos calcular a reflexão ortogonal de um vetor sobre outro.

Definição 7.5: Reflexão de um Vetor

A reflexão ortogonal de um vetor $\vec{u}$ sobre a direção do vetor $\vec{v}$ é a imagem do vetor $\vec{u}$ tendo o vetor $\vec{v}$ como um espelho. Sejam o vetor $\vec{u}$ e o vetor não nulo $\vec{v}$. A reflexão do vetor $\vec{u}$ ortogonalmente com relação à direção do vetor $\vec{v}$, denotada por $\operatorname{ref}_{\vec{v}}\vec{u}$ é calculada por:

$$\operatorname{ref}_{\vec{v}}\vec{u} = 2\cdot\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} - \vec{u}$$

Nas figuras abaixo, apresentamos a projeção de $\vec{u}$ em $\vec{v}$, denotada por $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ e a reflexão de $\vec{u}$ em $\vec{v}$, denotada por $\operatorname{ref}_{\vec{v}}\vec{u}$.



A reflexão do vetor $\vec{u}$ no vetor $\vec{v}$, $\operatorname{ref}_{\vec{v}}\vec{u}$, possui o mesmo comprimento de $\vec{u}$. Assim, a soma dos vetores $\vec{u}$ e $\operatorname{ref}_{\vec{v}}\vec{u}$ é equivalente a duas vezes a projeção $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$. Ou seja:

$$\vec{u} + \operatorname{ref}_{\vec{v}}\vec{u} = 2\cdot\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$$
$$\operatorname{ref}_{\vec{v}}\vec{u} = 2\cdot\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} - \vec{u}$$

Exemplo 7.4: Calcule a reflexão do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ a seguir:

(a) $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1)$;

(b) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (2, 0, 1)$;

(c) $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 1, 1)$.

Solução: No Exemplo 7.3, calculamos a projeção dos vetores $\vec{u}$ sobre um vetor $\vec{v}$. Usando-os temos as seguintes reflexões:

$$\text{(a) Dado que: } \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$$
$$\operatorname{ref}_{\vec{v}} \vec{u} = 2 \cdot \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) - (1, 2) = \left(\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$
$$\text{(b) Dado que: } \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{0}$$
$$\operatorname{ref}_{\vec{v}} \vec{u} = 2 \cdot (0, 0, 0) - (1, 2, -2) = (-1, -2, 2) = -\vec{u}$$
$$\text{(c) Dado que: } \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$\operatorname{ref}_{\vec{v}} \vec{u} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1, 1, 1, 1) = (-2, 0, 0, 0)$$

Observe que no caso (b), não houve projeção, pois vetores ortogonais não possuem projeção entre si. Por conta disso, a reflexão foi o vetor oposto de $\vec{u}$.

7.2 Produto Vetorial

No capítulo anterior, foi visto o produto escalar entre vetores, suas propriedades e consequências geométricas. Nesse capítulo, ainda sob a perspectiva geométrica, algébrica e computacional, vamos ver o produto vetorial entre vetores. Aqui, ficaremos reservados ao espaço $\mathbb{R}^3$, onde o produto vetorial está bem definido.

Definição 7.6: Produto Vetorial

O produto vetorial de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no $\mathbb{R}^3$, denominado $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (x_u, y_u, z_u) \times (x_v, y_v, z_v)$$
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$
$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$$
$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u)$$

Onde $|A|$ corresponde ao determinante da matriz A e $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Observe que o resultado do produto é um vetor, i.e., $\vec{u} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. O vetor resultante do produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é sempre ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente, pois:

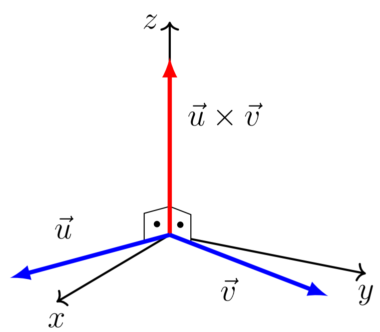
$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

O determinante de uma matriz com linhas iguais é zero. Analogamente, pode ser mostrado que $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.

Exemplo 7.5: Calcule o produto vetorial dos vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 2, 0)$ e apresente um esboço da solução.

Solução: Aplicando a definição de produto vetorial e construindo a figura abaixo, com um esboço dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 5)$$



□

Com isso, podemos estabelecer algumas propriedades do produto vetorial, lembrando fortemente das propriedades dos determinantes das matrizes.

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) Reflexiva: $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$;

(ii) Não Comutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$;

(iii) Distributiva: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$;

(iv) Vetor com escalar: $(\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$;

(v) Vetor nulo: $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$;

(vi) Vetores paralelos: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, para $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$;

(vii) Identidade de Lagrange: $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \, |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$;

(viii) Ângulo θ entre vetores: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \, |\vec{v}| \, \operatorname{sen} \theta$;

(ix) Não Comutativa: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$;

(x) Ortogonalidade: $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ e $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$.

Exemplo 7.6: Calcule o produto vetorial dos vetores a seguir:

(a) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (0, 1, -3)$;

(b) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (-3, -6, 6)$.

Solução: Aplicando a definição de produto vetorial:

$$\text{(a) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-9, 3, 1)$$

$$\text{(b) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & 6 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

Observe que no item (b), o resultado foi zero, o que indica que os vetores $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (-3, -6, 6)$ são paralelos. □

Exemplo 7.7: Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (2, 0, 1)$, utilizando o produto vetorial.

Solução: O ângulo entre dois vetores pode ser calculado utilizando a relação:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen}\theta$$

ou

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

Assim:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, -5, 4)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3\sqrt{5}}{3 \cdot \sqrt{5}} = 1 \Longrightarrow \theta = 90^\circ$$ □

Observe que o cálculo de ângulos é computacionalmente e manualmente mais rápido utilizando o produto escalar, ou seja, utilizando a seguinte relação:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

Exemplo 7.8: Encontre um vetor unitário ortogonal aos vetores $\vec{u} = (1, 4, 3)$ e $\vec{v} = (-3, -2, 6)$.

Solução: Um vetor ortogonal a dois vetores ao mesmo tempo pode ser encontrado por meio do produto vetorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (30, -15, 10)$$

O vetor $\vec{u} \times \vec{v} = (30, -15, 10)$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, porém não é unitário. Para que ele seja unitário, basta multiplicar pelo inverso do seu comprimento. Assim:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{30^2 + (-15)^2 + 10^2} = 35$$

$$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{1}{35} \cdot (30, -15, 10)$$

$$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = (\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{2}{7})$$

Outra solução seria o vetor oposto ao vetor encontrado $(-\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7})$. □

O módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $|\vec{u} \times \vec{v}|$ pode ser interpretado geometricamente como a área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Podemos definir então:

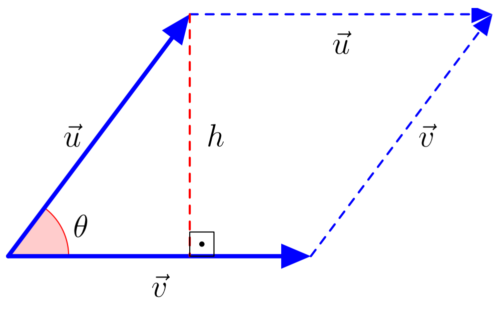
Definição 7.7: Cálculo de Áreas

A área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada por e do triângulo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ são:

$$Area_{Paralelogramo} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

$$Area_{Triangulo} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \times \vec{v}|$$

A figura abaixo mostra a relação da definição.

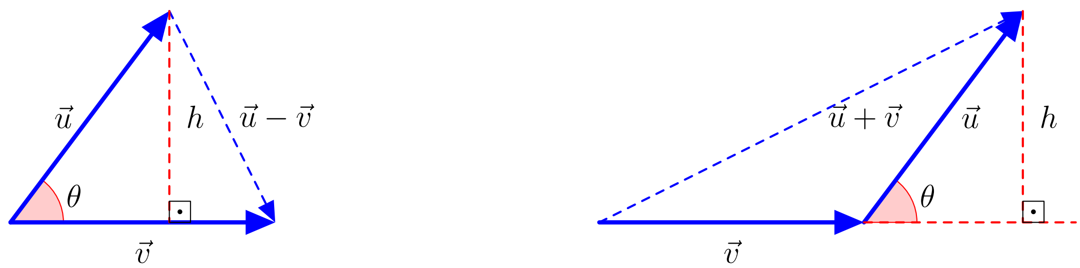


A área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada pelo comprimento do vetor $\vec{v}$ vezes a altura h. A altura h, pode ser escrita em função do ângulo θ e que por fim está relacionado ao produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$. Assim:

$$Area_{Paralelogramo} = |\vec{v}| \cdot h = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$Area_{Paralelogramo} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

É possível também determinar a área do triângulo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e algum dos casos $\pm\vec{u} \pm \vec{v}$ como na figura abaixo:



Em qualquer dos casos, basta calcular a metade da área do paralelogramo equivalente:

$$Area_{Triangulo} = \frac{1}{2} \cdot Area_{Paralelogramo} = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$$

Exemplo 7.9: Calcule a área do paralelogramo correspondente aos vetores:

(a) $\vec{u} = (1, 4, 3)$ e $\vec{v} = (-3, -2, 6)$;

(b) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (2, 0, 1)$;

(c) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (-3, -6, 6)$.

Solução: Em cada um dos casos, teremos que calcular o produto vetorial entre os vetores, e em seguida o comprimento do vetor resultante:

$$\text{(a) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (30, -15, 10)$$

$$Area_{(a)} = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{30^2 + (-15)^2 + 10^2} = 35\ u.a.$$

$$\text{(b) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2, -5, 4)$$

$$Area_{(b)} = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = 3\sqrt{5}\ u.a.$$

$$\text{(c) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, 0)$$

$$Area_{(c)} = |\vec{u} \times \vec{v}| = 0$$

Observe que nos casos (a) e (b) obtivemos uma área e no caso (c) não obtivemos, pois os vetores $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (-3, -6, 6)$ são paralelos e não formam um paralelogramo. □

Exemplo 7.10: Calcule a área do triângulo cujos vértices são: $A = (2, 1, 2)$, $B = (-1, 2, 2)$ e $C = (3, 0, -2)$.

Solução: Para esse problema, podemos estabelecer dois vetores que formam o triângulo: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Em seguida, podemos calcular o produto vetorial destes vetores, na qual a metade do módulo é igual a área do triângulo ABC.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-3, 1, 0)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, -1, -4)$$
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (-4, -12, 2)$$
$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-12)^2 + 2^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$$
$$Area_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{41} \approx 6,4$$

□

7.3 Produto Misto

Nas seções anteriores, foram definidos os produtos escalar e vetorial entre vetores, com suas propriedades e consequências geométricas. Nesse capítulo, ainda sob a perspectiva geométrica, algébrica e computacional, vamos ver o produto misto entre vetores. Novamente ficaremos reservados ao espaço $\mathbb{R}^3$, pois o produto misto depende do produto vetorial.

Definição 7.8: Produto Misto

O produto misto de três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ no $\mathbb{R}^3$, representado $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é dado por:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$
$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (x_u, y_u, z_u) \cdot ((x_v, y_v, z_v) \times (x_w, y_w, z_w))$$
$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (x_u, y_u, z_u) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$$

Onde $|A|$ corresponde ao determinante da matriz A. Observe que o resultado do produto misto é um escalar, i.e., $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}$.

Exemplo 7.11: Calcule o produto misto dos vetores $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (-1, 3, 3)$ e $\vec{w} = (4, -3, 2)$.

Solução: Aplicando a definição de produto misto:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 27$$

□

Podemos estabelecer algumas propriedades do produto misto.

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{a}$ quaisquer e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) Não Comutativa: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ troca de sinal ao trocarmos a posição de dois vetores;

(ii) Distributiva: $(\vec{u}+\vec{a},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + (\vec{a},\vec{v},\vec{w})$;

(iii) Distributiva: $(\vec{u},\vec{v}+\vec{a},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + (\vec{u},\vec{a},\vec{w})$;

(iv) Distributiva: $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}+\vec{a}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + (\vec{u},\vec{v},\vec{a})$;

(v) Vetor com escalar: $(\alpha\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\alpha\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}) = \alpha(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$;

(vi) Vetor nulo: Se um dos vetores é $\vec{0}$ então $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$;

(vii) Vetores paralelos: se pelo menos dois vetores são paralelos, então $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$;

(viii) Coplanaridade: $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$ se, e somente se, os três vetores são coplanares.

Exemplo 7.12: Verifique se os vetores abaixo são coplanares:

(a) $\vec{u} = (2,3,5)$, $\vec{v} = (-1,3,3)$ e $\vec{w} = (4,-3,2)$;

(b) $\vec{u} = (1,2,-2)$, $\vec{v} = (-3,-6,6)$ e $\vec{w} = (4,-3,2)$;

(c) $\vec{u} = (2,-10,0)$, $\vec{v} = (1,-1,2)$ e $\vec{w} = (1,-3,1)$;

Solução: Aplicando a definição de produto misto:

$$\text{(a) } (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

Portanto, no item (a), os três vetores não são coplanares.

$$\text{(b) } (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, no item (b) os três vetores são coplanares. Note que os dois primeiros vetores são paralelos: $\vec{v} = -3\vec{u}$.

$$\text{(c) } (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -10 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, no item (c) os três vetores são coplanares. Nesse caso, não há vetores paralelos entre si, mas um vetor é resultado da combinação dos outros: $\vec{u} = -2\vec{v} + 4\vec{w}$. □

O módulo do produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, $|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|$ pode ser interpretado geometricamente como o volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

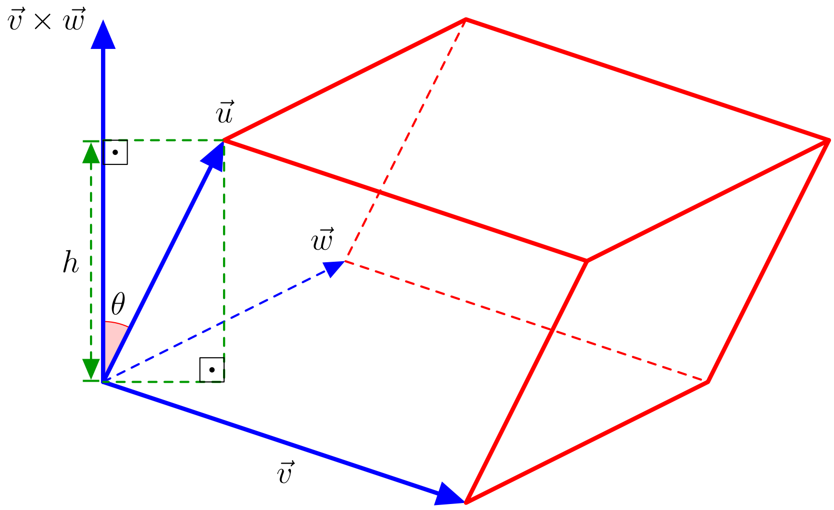
Definição 7.9: Cálculo de Volumes

O volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é o módulo do produto misto destes três vetores. Já o tetraedro formado por esses vetores representa $\frac{1}{6}$ do volume do paralelepípedo. Assim:

$$Volume_{Paralelepipedo} = |(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|$$

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6}\,|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|$$

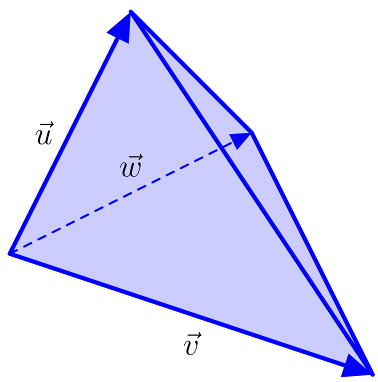
A figura abaixo mostra um esboço dos vetores e do volume pretendido.



O volume do paralelepído formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado pela área da base (paralelogramo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$) multiplicada pela altura h. A área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ pode ser determinada por $|\vec{v} \times \vec{w}|$. Do ângulo θ temos que $h = |\vec{u}| \cos\theta$. Portanto, o volume pode ser dado por:

$$Volume_{Paralelepipedo} = Area_{Paralelogramo} \cdot h = |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot |\vec{u}| \cos\theta$$
$$Volume_{Paralelepipedo} = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

Também pode ser calculado o volume do tetraedro formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, conforme a figura abaixo:



O volume do tetraedro é um sexto do volume do paralelepípedo:

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6} Volume_{Paralelepipedo} = \frac{1}{6} |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

Exemplo 7.13: Calcule o volume do paralelepípedo e do tetraedro formado pelos seguintes vetores:

(a) $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (-1, 3, 3)$ e $\vec{w} = (4, -3, 2)$;

(b) $\vec{u} = (2, -10, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$ e $\vec{w} = (1, -3, 1)$;

Solução: Aplicando o resultado do volume do paralelepípedo como produto misto de três vetores:

$$\text{(a) } (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

$$Volume_{Paralelepipedo} = |(\vec{u},\vec{v},\vec{w})| = 27\ u.v.$$

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6} Volume_{Paralelepipedo} = \frac{27}{6} = 4,5\ u.v.$$

Portanto, no item (a), os três vetores formam um paralelepípedo com volume de 27 unidades de volume e o tetraedro correspondente possui 4,5 unidades de volume.

$$\text{(b) } (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -10 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, no item (b) os três vetores são coplanares e nesse caso, não há paralelepípedo nem tetraedro correspondente. □

Exemplo 7.14: Determine o volume do tetraedro formado pelos vértices $A = (1, 2, -1)$, $B = (5, 0, 1)$, $C = (2, -1, 1)$ e $D = (6, 1, -3)$ e a altura do tetraedro relativo ao vértice D.

Solução: O volume do tetraedro é dado por:

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, -3, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (5, -1, -2)$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 36$$

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6}|36| = 6\ u.v.$$

Já a altura do tetraedro pode ser obtida usando-se o fato de que o volume do tetraedro pode ser obtido como $\frac{1}{6}$ do volume do paralelepípedo, que por sua vez é a área do paralelogramo formado por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ multiplicada pela altura no ponto D. Assim:

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \cdot h_D$$

$$6 = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \cdot h_D$$

$$36 = |(2, -6, -10)| \cdot h_D$$

$$36 = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-10)^2} \cdot h_D$$

$$h_D = \frac{36}{\sqrt{140}} \approx 3,043 \text{ u.c.}$$

□

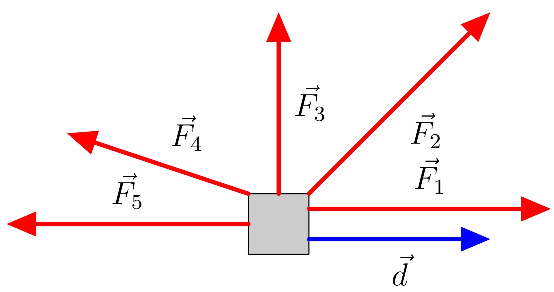
7.4 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Calcule, com relação aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a seguir, (1) o produto escalar entre eles; (2) o ângulo entre eles; e (3) as projeções $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$ e $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})$:

   (a) $\vec{u} = (-1, 0)$ e $\vec{v} = (2, 1)$;
   (b) $\vec{u} = (-1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1)$;
   (c) $\vec{u} = (-1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1)$;
   (d) $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (4, 2)$;
   (e) $\vec{u} = (1, 2, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$;
   (f) $\vec{u} = (1, 0, 4)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$;
   (g) $\vec{u} = (-1, -2, 2)$ e $\vec{v} = (2, 4, -4)$;
   (h) $\vec{u} = (1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 2)$;
   (i) $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$ e $\vec{v} = (0, -2, 0, 1)$.
   (j) $\vec{u} = (3, 2, 0, 4)$ e $\vec{v} = (1, -2, 0, 1)$.
   (k) $\vec{u} = (-1, 0, 2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, 0, -2, -1, 1)$.

2. Uma das aplicações do produto escalar ocorre na Física, no cálculo de **Trabalho**. O trabalho W realizado por uma força constante $\vec{F}$ no decorrer de um deslocamento $\vec{d}$ é determinado pelo produto escalar
$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$
Se soubermos o ângulo θ entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{d}$, também é possível encontrar o trabalho por meio da relação:
$$W = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{d}\right| \cdot \cos\theta.$$
Pela norma do *S.I.*, a unidade de força é Newton (N), a unidade de deslocamento é metro (m) e a unidade de trabalho é Joule J. Calcule o trabalho das forças $\vec{F_1} = (4, 0)$, $\vec{F_2} = (3, 3)$, $\vec{F_3} = (0, 3)$, $\vec{F_4} = (-3, -1)$ e $\vec{F_5} = (-4, 0)$ no bloco, dado um deslocamento $\vec{d} = (3, 0)$ na figura abaixo.



3. Seja $\vec{u} = (-1, 2)$. Determine um vetor $\vec{v}$, paralelo a $\vec{u}$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = 9$. Os vetores têm o mesmo sentido?

4. Seja $\vec{u} = (1, 2, 2)$. Determine um vetor $\vec{v}$, paralelo a $\vec{u}$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -18$. Os vetores têm o mesmo sentido?

5. Seja $\vec{u} = (-1, 2)$. Determine um vetor $\vec{v}$, ortogonal a $\vec{u}$ cujo comprimento seja $|\vec{v}| = \sqrt{5}$.

6. Seja $\vec{u} = (1, 2, 0)$. Determine um vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo x, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = 8$.

7. Seja o triângulo com os vértices $A = (-1, -2, 4)$, $B = (-4, -2, 0)$ e $C = (3, -2, 1)$. Determine o perímetro do triângulo. Determine os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

8. Seja o triângulo equilátero com os vértices A, B e C e lado de 10 cm. Determine o produto escalar de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. E $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$?

9. Seja um triângulo retângulo com os vértices A, B e C e lados de 5, 12 e 13 cm. Considere o ângulo reto em A. Calcule:
   (a) os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$;
   (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;
   (c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$;
   (d) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$;
   (e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

10. Seja o triângulo de vértices $A(2, 1, 3)$, $B(1, 0, -1)$ e $C(-1, 2, 1)$. Determine:
    (a) os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$;
    (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;
    (c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$;
    (d) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$;
    (e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

11. Obtenha o ponto P do eixo das abscissas (eixo x) equidistante dos pontos $A(2, -3, 1)$ e $B(-2, 1, -1)$.

12. Determine α para que o ângulo entre $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, \alpha)$ seja de $60°$.

13. Calcule α para que seja de $30°$ o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, \alpha, 2)$ e $\vec{j}$.

14. Calcule o produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a seguir e a área relativa ao paralelogramo correspondente.
    (a) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-2, -3, 6)$;
    (b) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (0, 0, 1)$;
    (c) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (0, -1, 3)$;
    (d) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (0, 0, 0)$;
    (e) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (1, 2, 3)$;
    (f) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-2, -4, -6)$.

15. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$, determine:

(a) $\vec{u} \times \vec{v}$;

(b) $\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$;

(c) $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$;

(d) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$;

(e) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{v})$.

16. Calcule a área do triângulo cujos vértices são: $A = (2, -1, 2)$, $B = (1, 2, -1)$ e $C = (3, 2, 1)$.

17. Sejam $\vec{u} = (1, 2, 2)$ e $\vec{v} = (3, -1, 0)$. Determine um vetor $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, de comprimento igual a 3.

18. Seja $\vec{u} = (1, 2, 3)$. Determine um vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo x e ao vetor $\vec{u}$.

19. Determine a área do triângulo com os vértices $A = (-1, -2, 4)$, $B = (-4, -2, 0)$ e $C = (3, -2, 1)$

20. Determine a área do quadrilátero convexo com os vértices $A = (-1, -2, 4)$, $B = (-4, -2, 0)$, $C = (3, -2, 1)$ e $D = (2, -2, -1)$.

21. Calcule o produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, verifique se os vetores são coplanares e, caso o contrário, calcule o volume relativo ao tetraedro correspondente.

    (a) $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$;

    (b) $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 0, -4)$;

    (c) $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (7, -1, 4)$;

22. Calcule o valor de α para que os vetores abaixo sejam coplanares:

    (a) $\vec{u} = (2, -1, \alpha)$, $\vec{v} = (1, 0, 2)$ e $\vec{w} = (\alpha, 3, \alpha)$;

    (b) $\vec{u} = (2, \alpha, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, \alpha)$ e $\vec{w} = (3, 0, -3)$;

23. Qual o valor do paralelepípedo e do tetraedro definido pelos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$?

24. Calcule o volume do tetraedro formado pelos vértices abaixo, e calcule a altura do tetraedro relativo ao vértice D.

    (a) $A(1, 2, -3)$, $B(2, -1, -4)$, $C(0, 2, 0)$ e $D(-1, 2, 1)$;

    (b) $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(3, 2, -2)$ e $D(0, 0, -10)$;

7.5 Exercícios Computacionais

1. Escreva uma função que retorne o ângulo entre dois vetores de tamanho n em Numpy.

2. Escreva uma função que verifica se dois vetores de tamanho n são ortogonais em Numpy.

3. Escreva uma função que verifica se dois vetores de tamanho n são paralelos em Numpy, usando o conceito de produto escalar.

4. Escreva uma função que retorne o vetor projeção de um vetor sobre outro (ambos de tamanho n).
5. Escreva uma função que retorne o vetor reflexão de um vetor sobre outro (ambos de tamanho n).
6. Gere 10 vetores de tamanho 3 de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Verifique a desigualdade de Cauchy-Schwarz entre cada par deles. Se possível, desenhe os vetores.
7. Gere 10 vetores de tamanho 3 de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Calcule o ângulo entre cada par deles. Verifique quais pares são de vetores ortogonais entre si. Verifique também quais os pares de vetores paralelos entre si. Se possível, desenhe os vetores.
8. Gere 10 vetores de tamanho 5 de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Calcule o ângulo entre cada par deles. Verifique quais pares são de vetores ortogonais entre si. Verifique também quais os pares de vetores paralelos entre si.
9. Gere 2 vetores de tamanho 3 de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Calcule a projeção e a reflexão do primeiro vetor sobre o segundo. Faça este processo 5 vezes. Se possível, desenhe os vetores.
10. Gere 2 vetores de tamanho 5 de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Calcule a projeção e a reflexão do primeiro vetor sobre o segundo. Faça este processo 5 vezes.
11. Escreva uma função que retorne o resultado do produto vetorial de dois vetores do espaço $\mathbb{R}^3$.
12. Escreva uma função que verifica se dois vetores do espaço $\mathbb{R}^3$ são paralelos por meio do produto vetorial.
13. Escreva uma função que calcula o ângulo entre dois vetores do espaço $\mathbb{R}^3$ por meio do produto vetorial.
14. Gere 2 vetores do espaço $\mathbb{R}^3$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Verifique a Identidade de Lagrange destes vetores. Faça este processo 5 vezes.
15. Escreva uma função que retorne um vetor de comprimento C e ortogonal a outros dois vetores do espaço $\mathbb{R}^3$.
16. Gere 2 vetores do espaço $\mathbb{R}^3$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Encontre um versor ortogonal a estes dois vetores. Faça este processo 5 vezes.
17. Escreva uma função que retorne a área do triângulo formado por dois vetores e o vetor diferença entre eles.
18. Escreva uma função que retorne a área do triângulo dados 3 pontos.
19. Escreva uma função que teste se 3 pontos são colineares, usando o produto vetorial.
20. Escreva uma função que retorne a área de um polígono convexo de n vértices.
21. Escreva uma função que retorne a área de superfície de um tetraedro, dados 4 pontos.
22. Gere 2 vetores do espaço $\mathbb{R}^3$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Calcule a área do triângulo formado por estes vetores e o seu vetor diferença. Faça este processo 5 vezes.

23. Gere 3 pontos do espaço $\mathbb{R}^3$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Calcule a área do triângulo formado por estes pontos. Se os pontos forem colineares, identifique-os. Faça este processo 5 vezes.

24. Gere 4 pontos do espaço $\mathbb{R}^3$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Calcule a área de superfície do tetraedro formado por estes pontos. Faça este processo 5 vezes.

25. Escreva uma função que retorne o resultado do produto misto de três vetores do espaço.

26. Escreva uma função que verifica se três vetores são coplanares, usando o produto misto.

27. Escreva uma função que retorne o volume de um tetraedro, dado quatro pontos no espaço.

28. Gere 3 vetores do espaço $\mathbb{R}^3$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Calcule o produto misto entre eles. Faça este processo 5 vezes.

29. Gere 3 pontos A, B e C do espaço $\mathbb{R}^3$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Calcule os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$. Verifique que os vetores são coplanares. Faça este processo 5 vezes. Pode-se chegar a conclusão que três pontos formam um plano?

30. Gere 4 pontos do espaço $\mathbb{R}^3$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Calcule o volume do tetraedro formado por estes pontos. Faça este processo 5 vezes.

Capítulo 8

Reta

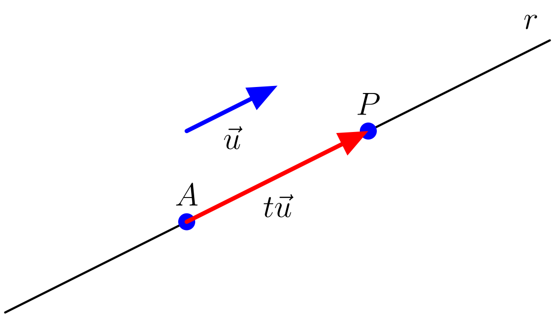
Uma reta, no plano, espaço ou hiperespaço pode ser determinada a partir de duas estruturas: (1) um ponto contido na reta, que servirá de referência; e (2) uma direção, dada por um vetor não-nulo. Assim, seja uma reta r, com um ponto de referência A e um vetor diretor $\vec{u}$:

Plano $\mathbb{R}^2$: $A = (x_A, y_A)$ e $\vec{u} = (x_u, y_u)$.

Espaço $\mathbb{R}^3$: $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$.

Espaço $\mathbb{R}^n$: $A(x_1^A, x_2^A, \ldots, x_n^A)$ e $\vec{u} = (x_1^u, x_2^u, \ldots, x_n^u)$.

O objetivo é definir um ponto qualquer P da reta r, conforme a figura abaixo:



Definição 8.1: Equação Vetorial da Reta

Na equação vetorial da reta, faz-se a relação de paralelismo entre os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{u}$. Assim:

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$P - A = t \cdot \vec{u}$$
$$P = A + t \cdot \vec{u}$$

O ponto A é o ponto de referência e $\vec{u}$ é o vetor diretor da reta. O parâmetro t é um fator de proporcionalidade entre os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{u}$. Este parâmetro pode ser qualquer número real e por isso, qualquer ponto P da reta é o ponto A somado do vetor $\vec{u}$ com a escala t. Perceba que a equação vetorial da reta é definida para qualquer espaço $\mathbb{R}^n$. Para os outros formatos de equação, vamos considerar o espaço $\mathbb{R}^3$. Para o plano e espaços com mais dimensões, o raciocínio é análogo.

Assim, no $\mathbb{R}^3$, podemos visualizar a equação da reta, pensando em cada coordenada separadamente, o que dá origem a outro formato de equação da reta.

Definição 8.2: Equações Paramétricas da Reta

Nas equações paramétricas da reta, faz-se a relação de paralelismo entre os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{u}$, disposta para cada coordenada de P. Assim:

$$P = A + t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t(x_u, y_u, z_u)$$
$$\begin{cases} x = x_A + tx_u \\ y = y_A + ty_u \\ z = z_A + tz_u \end{cases}$$

Equações paramétricas são muito importantes para análises de outras curvas no espaço, como circunferências, helicoidais, parábolas etc. Há ainda mais duas versões de equações da reta mais utilizadas.

Definição 8.3: Equações Simétricas da Reta

Nas equações simétricas da reta, a partir das equações paramétricas da reta faz-se uma relação entre as coordenadas por meio do isolamento do parâmetro t. Assim:

$$t = \frac{x - x_A}{x_u} = \frac{y - y_A}{y_u} = \frac{z - z_A}{z_u}$$

Definição 8.4: Equações Reduzidas da Reta

Nas equações reduzidas da reta, a partir das equações simétricas da reta, pode-se reorganizar as coordenadas do ponto P, (x, y, z) para que fiquem em função de apenas uma outra coordenada. Por exemplo, para tornar as coordenadas y e z em função de x:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$$

Perceba como as contas foram feitas, ao tornar y em função de x:

$$\frac{x - x_A}{x_u} = \frac{y - y_A}{y_u}$$
$$y - y_A = \frac{y_u}{x_u}x - \frac{y_u}{x_u}x_A$$
$$y = \frac{y_u}{x_u}x + \left(y_A - \frac{y_u}{x_u}x_A\right)$$
$$y = mx + n$$

Analogamente, para tornar z em função de x:

$$\frac{x - x_A}{x_u} = \frac{z - z_A}{z_u}$$
$$z = \frac{z_u}{x_u}x + \left(z_A - \frac{z_u}{x_u}x_A\right)$$
$$z = px + q$$

Exemplo 8.1: Determine todas as equações da reta que passa pelos pontos $A(1, 2, 0)$ e $B(0, 3, 2)$.

Solução: Dois pontos distintos são suficientes para se construir uma reta. A direção dessa reta pode ser obtida usando-se o vetor que une os dois pontos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 3, 2) - (1, 2, 0) = (-1, 1, 2)$$

Assim, a equação vetorial da reta, considerando o parâmetro $t \in \mathbb{R}$, é dada por:

$$P = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(-1, 1, 2)$$

Observe que o ponto B também poderia ter sido escolhido para ser o ponto de referência. Da mesma forma, o vetor $\overrightarrow{BA}$ também poderia ter sido escolhido como vetor diretor. Na verdade, qualquer múltiplo de $\overrightarrow{AB}$ poderia ter sido escolhido como vetor diretor. Continuando, para a equação paramétrica basta separar as coordenadas:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 0 + 2t \end{cases}$$

Considerando as equações simétricas:

$$t = \frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 0}{2}$$

E por fim, obtemos as equações reduzidas a partir das equações simétricas, colocando todas as coordenadas em função de x:

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 2}{1} \quad \Longrightarrow \quad y - 2 = -x + 1 \quad \Longrightarrow \quad y = -x + 3$$
$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{z - 0}{2} \quad \Longrightarrow \quad z = -2x + 2$$
$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ z = -2x + 2 \end{cases}$$

Para as equações reduzidas, também poderia ter sido determinado as coordenadas em função da coordenada y ou da coordenada z, entretanto é mais usual deixá-la em função de x. □

Exemplo 8.2: Determine todas as equações da reta que passa pelos pontos $A(-1, 1, 0)$ e $B(-1, 2, 2)$.

Solução: Novamente, a partir de dois pontos distintos obtemos a direção da reta por meio do vetor $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 2, 2) - (-1, 1, 0) = (0, 1, 2)$$

Observe que a coordenada x do vetor diretor é zero. Isso terá algumas consequências na forma como descrevemos as equações. A equação vetorial da reta, usando dessa vez B como referência e o parâmetro $t \in \mathbb{R}$, é dada por:

$$P = B + t \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$(x, y, z) = (-1, 1, 0) + t(0, 1, 2)$$

Para a equação paramétrica basta separar as coordenadas:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + t \\ z = 0 + 2t \end{cases}$$

Note que para a coordenada x, não há dependência do parâmetro t, pois $x = -1$, constante. Considerando as equações simétricas:

$$\begin{cases} x = -1 \\ t = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-0}{2} \end{cases}$$

Como x independe de t, a representação das equações simétricas fica um pouco diferente. E por fim, obtemos as equações reduzidas a partir das equações simétricas, mas dessa vez vamos colocar z em função de y, visto que a coordenada x é constante.

$$\frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{2} \quad \Longrightarrow \quad z = 2y - 2$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ z = 2y - 2 \end{cases}$$

□

Exemplo 8.3: Determine um ponto de referência e o vetor diretor das retas abaixo e em seguida escreva a equação vetorial da reta.

(a) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$

(b) $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = z$

(c) $\begin{cases} y = x - 1 \\ z = -3x + 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y = 2 \\ x - 2 = \dfrac{z}{3} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 2 \end{cases}$

Solução:

(a) O item trata de equações paramétricas da reta. Para se obter um ponto da reta, basta considerar um valor para o parâmetro t. O mais fácil, em geral, é considerar $t = 0$. Assim:

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \cdot 0 = 3 \\ y = 1 + 0 = 1 \\ z = -0 = 0 \end{cases}$$

Portanto, o ponto $(3, 1, 0)$ pertence a reta. Para calcular o vetor diretor, basta notar o número que acompanha o parâmetro t. E assim, o vetor diretor é dado por $(2, 1, -1)$. A equação vetorial então é dada por:

$$P = (3, 1, 0) + t(2, 1, -1)$$

(b) O item trata de equações simétricas da reta. Para encontrar o ponto de referência, consideramos os valores de x, y e z em que $t = 0$, ou seja, em que os numeradores das frações são zero. Assim $x + 1 = 0$, $y - 1 = 0$ e $z = 0$, e o ponto de referência é $(-1, 1, 0)$. Para o vetor diretor, basta tomar os números que estão no denominador das frações. E assim, o vetor diretor é dado por $(-1, 2, 1)$. A equação vetorial então é dada por:

$$P = (-1, 1, 0) + t(-1, 2, 1)$$

(c) O item trata de equações reduzidas da reta. Para facilitar, escolhemos uma das coordenadas para ser igual a t. Como as coordenadas y e z estão em função de x, vamos colocar $x = t$. Assim:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = -3t + 1 \end{cases}$$

As equações acima são as equações paramétricas da reta e podemos analisar como no item (a). O ponto de referência, em $t = 0$ é $(0, -1, 1)$. O vetor diretor é dado por $(1, 1, -3)$. E a equação vetorial então é dada por:

$$P = (0, -1, 1) + t(1, 1, -3)$$

(d) O item trata de equações simétricas da reta. Entretanto, aqui a coordenada y é constante. Para encontrar o ponto de referência, consideramos os valores de x, y e z em que $t = 0$, ou seja, em que os numeradores das frações são zero. Assim $x - 2 = 0$, $y = 2$ e $z = 0$, e o ponto de referência é $(2, 2, 0)$. Para o vetor diretor, basta tomar os números que estão no denominador das frações. No caso da coordenada y, como $y = 2$ e não há variação do seu valor, então a direção é $0\vec{j}$. E assim, o vetor diretor é dado por $(1, 0, 3)$. A equação vetorial então é dada por:

$$P = (2, 2, 0) + t(1, 0, 3)$$

(e) O item trata de equações reduzidas da reta. Para facilitar, escolhemos uma das coordenadas para ser igual a t. Como a coordenada y está em função de x e z é constante, vamos colocar $x = t$. Assim:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = 2 + 0t \end{cases}$$

As equações acima são as equações paramétricas da reta e podemos analisar como no item (a). O ponto de referência, em $t = 0$ é $(0, -1, 2)$. O vetor diretor é dado por $(1, 2, 0)$. E a equação vetorial então é dada por:

$$P = (0, -1, 2) + t(1, 2, 0) \qquad \square$$

8.1 Relações entre retas

Dadas duas retas r e s no espaço $\mathbb{R}^3$, quais relações podemos obter entre elas? Há várias relações que podemos obter entre duas retas, por exemplo ângulo, posição relativa, distância, coplanaridade etc. Para os problemas a seguir, vamos sempre considerar as retas r e s abaixo:

$$r:\ P_r = A + t\vec{u}$$
$$s:\ P_s = B + t\vec{v}$$

A reta r tem ponto de referência A e vetor diretor $\vec{u}$. A reta s tem ponto de referência B e vetor diretor $\vec{v}$. As relações entre as retas surgem a partir da relação de seus vetores diretores.

Definição 8.5: Ângulo entre duas retas

O ângulo formado por duas retas pode ser calculado com os vetores diretores de ambas, tomando o menor ângulo entre as duas direções. Assim, considerando que as retas r e s possuem um ângulo θ entre elas, podemos usar a relação de ângulos entre vetores:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

O produto escalar no numerador está em módulo, porque o ângulo entre retas é sempre o menor, e em módulo $0 \leq \theta \leq 90°$.

Definição 8.6: Retas Paralelas

As retas r e s são paralelas ($r \mid\mid s$) se possuem a mesma direção. Assim, basta verificar se os vetores diretores das retas são paralelos. Ou seja:

$$r \mid\mid s \Longleftrightarrow \vec{u} \mid\mid \vec{v} \Longleftrightarrow\Longrightarrow \vec{u} = \alpha\vec{v}$$

Uma outra maneira de verificar se duas retas são paralelas é usar o ângulo entre elas. Se o ângulo entre as retas for zero, então a direção dos vetores diretores é a mesma. Entretanto, fazer isso é manual e computacionalmente mais demorado para ser calculado.

Definição 8.7: Retas Ortogonais

As retas r e s são ortogonais ($r \perp s$) se o ângulo formado entre elas é de $90°$. Assim, se o produto escalar dos vetores diretores é nulo, então as retas são ortogonais. Ou seja:

$$r \perp s \Longleftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Definição 8.8: Retas Coplanares

As retas r e s são coplanares se estão no mesmo plano. Para tanto, os vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e os pontos A e B devem estar contidos no mesmo plano. Se A e B estão no mesmo plano, o vetor $\overrightarrow{AB}$ também está no mesmo plano. Assim, podemos usar o produto misto dos três vetores para testar a sua coplanaridade. Assim, r e s são coplanares se:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0$$

Se o produto misto dos três vetores for diferente de zero, então as retas não são coplanares e são chamadas de reversas. Observe que o teste de coplanaridade não está definido para espaços $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, pois não definimos produto vetorial e misto nos outros espaços.

Definição 8.9: Posições Relativas entre Retas

Duas retas r e s no espaço podem ter as seguintes posições relativas:

- **Coplanares:** As retas estão no mesmo plano.
  - **Coincidentes:** As retas são a mesma.
  - **Paralelas:** $r \mid\mid s$ e não possuem ponto de interseção entre si.
  - **Concorrentes:** Se as retas não são paralelas, então elas são concorrentes e possuem um ponto de interseção.
- **Reversas:** As retas não são coplanares e não possuem interseção entre si.

Para determinar a posição relativa entre duas retas, pode-se então adotar o seguinte algoritmo 8.1.

Algoritmo 8.1: Posição Relativa entre duas retas

Entrada: Reta r: ponto A e vetor $\vec{u}$;
Entrada: Reta s: ponto B e vetor $\vec{v}$;
se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ **então**
  se $A \in s$ **então**
    As retas são coincidentes e coplanares;
  senão
    As retas são paralelas e coplanares;
  fim
senão
  se $(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ **então**
    As retas são concorrentes e coplanares;
  senão
    As retas são reversas;
  fim
fim

Exemplo 8.4: Determine a posição relativa entre as retas abaixo e o ângulo entre elas:

(a) $r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

(b) $r_2 : \begin{cases} y = 1 \\ \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{z+2}{4} \end{cases}$

(c) $r_3 : P = (-2, -1, 1) + t(-1, 0, 2)$

(d) $r_4 : \begin{cases} x = 2z - 9 \\ y = -2z + 5 \end{cases}$

Solução: O primeira passo a ser dado é calcular o vetor diretor e um ponto de cada reta:

$$\textbf{(a)}\ (t = 0) \implies A = (0, 1, 2)$$
$$\vec{u}_1 = (1, 0, -2)$$
$$\textbf{(b)}\ (t = 0) \implies B = (2, 1, -2)$$
$$\vec{u}_2 = (-2, 0, 4)$$
$$\textbf{(c)}\ (t = 0) \implies C = (-2, -1, 1)$$
$$\vec{u}_3 = (-1, 0, 2)$$
$$\textbf{(d)}\ (z = 0) \implies D = (-9, 5, 0)$$
$$(z = t) \implies \vec{u}_4 = (2, -2, 1)$$

A partir disso, usamos o algoritmo 8.1. Para as retas r_1 e r_2:

$$r_1 \parallel r_2\ ?$$
$$(1, 0, -2) = k(-2, 0, 4) \implies k = -\frac{1}{2} \implies \text{Vetores diretores paralelos;}$$
$$A \in r_2\ ?$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ \dfrac{0-2}{-2} = \dfrac{2+2}{4} \end{cases} \implies \begin{cases} y = 1 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Portanto r_1 e r_2 são coincidentes, ou seja, são a mesma reta! Para as retas r_1 e r_3:

$$r_1 \parallel r_3 \ ?$$
$$(1,0,-2) = k(-1,0,2) \Longrightarrow k = -1 \text{ Vetores diretores paralelos;}$$
$$A \in r_3 \ ?$$
$$(0,1,2) = (-2,-1,1) + t(-1,0,2)$$
$$(0,1,2) - (-2,-1,1) = t(-1,0,2)$$
$$(2,2,1) = t(-1,0,2)$$

Aqui, não existe t tal satisfaz a equação, pois se olharmos para a coordenada y, veremos que $2 = t \cdot 0$, que é um absurdo! Portanto, como A não pertence a r_3 então as retas são paralelas e coplanares, não-coincidentes. Como as retas r_1 e r_2 são iguais e r_1 é paralela a r_3, então r_2 e r_3 são paralelas. Para as retas r_1 e r_4:

$$r_1 \parallel r_4 \ ?$$
$$(1,0,-2) = k(2,-2,1) \Longrightarrow \nexists k \text{ então: Vetores diretores não são paralelos;}$$
$$(\overrightarrow{AD}, \vec{u}_1, \vec{u}_4) = 0 \ ?$$
$$\overrightarrow{AD} = D - A = (-9,5,0) - (0,1,2) = (-9,4,-2)$$
$$(\overrightarrow{AD}, \vec{u}_1, \vec{u}_4) = \begin{vmatrix} -9 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$$

Portanto, as retas r_1 e r_4 não pertencem ao mesmo plano e são reversas. Como as retas r_1 e r_2 são iguais então r_2 e r_4 são reversas. Entretanto, não é possível ainda afirmar a relação entre r_3 e r_4. Já sabemos que r_3 e r_4 não possuem a mesma direção, mas e quanto à coplanaridade?

$$(\overrightarrow{CD}, \vec{u}_3, \vec{u}_4) = 0 \ ?$$
$$\overrightarrow{CD} = D - C = (-9,5,0) - (-2,-1,1) = (-7,6,-1)$$
$$(\overrightarrow{CD}, \vec{u}_3, \vec{u}_4) = \begin{vmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

E portanto r_3 e r_4 são retas concorrentes e coplanares. Nesse caso, elas possuem um ponto de interseção, que pode ser calculado colocando as equações em um mesmo sistema:

$$\begin{cases} P = (-2,-1,1) + t(-1,0,2) \\ x = 2z - 9 \\ y = -2z + 5 \end{cases}$$
$$(2z-9, -2z+5, z) = (-2,-1,1) + t(-1,0,2)$$
$$(2z-9, -2z+5, z) - (-2,-1,1) = t(-1,0,2)$$
$$(2z-7, -2z+6, z-1) = (-t, 0, 2t)$$
$$\begin{cases} 2z - 7 = -t \\ -2z + 6 = 0 \\ z - 1 = 2t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$
$$P = (-2,-1,1) + t(-1,0,2) = (-2,-1,1) + 1 \cdot (-1,0,2) = (-3,-1,3)$$

Logo, o ponto de interseção entre as retas r_3 e r_4 é o ponto $(-3,-1,3)$. □

8.2 Distâncias

Medir a distância entre duas retas é uma aplicação importante no estudo das retas. Iniciaremos aqui com a distância entre dois pontos, seguida da distância entre um ponto e uma reta e por último a distância entre retas.

Definição 8.10: Distância entre dois pontos

Dados os pontos A e B, a distância entre eles podem ser calculada por meio do comprimento do vetor $|\overrightarrow{AB}|$. Assim:

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$$

Definição 8.11: Distância entre um ponto e uma reta

Dados o ponto P e a reta r, com um ponto de referência A e o vetor diretor $\vec{u}$, então a distância entre P e r pode ser calculada usando a ideia de produto vetorial e área do paralelogramo:

$$d(P,r) = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}$$

Definição 8.12: Distância entre duas retas

Dadas as retas r e s, com pontos de referência A e B e os vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a distância entre r e s vai depender da relação entre as retas:

- r e s são concorrentes ou coincidentes, então $d(r,s) = 0$;
- r e s são paralelas, então $d(r,s) = d(A,s) = d(r,B)$;
- r e s são reversas, então $d(r,s) = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right)\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$.

Para retas concorrentes ou coincidentes, há um ponto de intersecção, por isso a distância destas retas é zero. Para retas paralelas, basta pegar um ponto de referência e analisar a distância com relação à outra reta. No último caso, para retas reversas, a distância entre r e s pode ser calculada usando a ideia de produto misto e o volume do paralelepípedo. Ou seja, dividindo o volume do paralelepípedo $\left|\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right)\right|$ pela área da base $|\vec{u} \times \vec{v}|$, a altura/distância é obtida.

Exemplo 8.5: Determine a distância entre as retas do Exercício 8.4

Solução: As retas do Exercício 8.4 possuem os seguintes vetores diretores e pontos de referência:

$$\begin{aligned}
&\textbf{(a)}\ (t=0) \Longrightarrow A = (0,1,2), \qquad \vec{u}_1 = (1,0,-2)\\
&\textbf{(b)}\ (t=0) \Longrightarrow B = (2,1,-2), \qquad \vec{u}_2 = (-2,0,4)\\
&\textbf{(c)}\ (t=0) \Longrightarrow C = (-2,-1,1), \qquad \vec{u}_3 = (-1,0,2)
\end{aligned}$$

$$\textbf{(d)}\ (z=0) \Longrightarrow D=(-9,5,0), \qquad (z=t) \Longrightarrow \vec{u}_4=(2,-2,1)$$

De acordo com o exercício, as retas r_1 e r_2 são coincidentes e por isso possuem distância zero entre si. Para os próximos casos, tudo que for feito para r_1 é válido para r_2, pois são retas coincidentes.

As retas r_1 e r_3 são paralelas. Neste caso, podemos tomar o ponto de referência $C \in r_3$ e verificar a sua distância a r_1:

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(-2,-1,1)-(0,1,2)=(-2,-2,-1)$$

$$|\vec{u_1}|=\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

$$\vec{u_1}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix}=(-4,5,-2)$$

$$\left|\vec{u_1}\times\overrightarrow{AC}\right|=|(-4,5,-2)|=\sqrt{(-4)^2+5^2+(-2)^2}=3\sqrt{5}$$

$$d(r_1,r_3)=\frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=3\ u.c.$$

As retas r_1 e r_4 são reversas. Neste caso:

$$\vec{u_1}\times\vec{u_4}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(-4,-5,-2)$$

$$|\vec{u_1}\times\vec{u_4}|=|(-4,-5,-2)|=\sqrt{(-4)^2+(-5)^2+(-2)^2}=3\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AD}=D-A=(-9,5,0)-(0,1,2)=(-9,4,-2)$$

$$(\overrightarrow{AD},\vec{u}_1,\vec{u}_4)=\begin{vmatrix} -9 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=20$$

$$d(r_1,r_4)=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AD},\vec{u_1},\vec{u_4}\right)\right|}{|\vec{u_1}\times\vec{u_4}|}=\frac{20}{3\sqrt{5}}=\frac{4}{3}\sqrt{5}\ u.c.$$

As retas r_3 e r_4 são concorrentes, portanto, possuem distância nula entre si. □

8.3 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Verifique se os pontos $P_1(1,2)$ e $P_2(0,-1)$ pertencem às retas abaixo:

   (a) $(0,-2)+t(0,1)$;

   (b) $\begin{cases} x = 3-3t \\ y = 2-t \end{cases}$;

   (c) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{-3}$;

   (d) $y = -x+3$.

2. Verifique se os pontos $P_1(1,2,3)$ e $P_2(0,-1,2)$ pertencem às retas abaixo:

   (a) $(0,-2,0)+t(0,1,2)$;

   (b) $\begin{cases} x = 3-3t \\ y = 2-t \\ z = 3t \end{cases}$;

   (c) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{-1}$;

   (d) $\begin{cases} y = -x+3 \\ z = 3x \end{cases}$.

3. Qual ponto $P(x,-1)$ pertence à reta determinada pelos pontos $A(1,-1)$ e $B(2,1)$?

4. Qual ponto $P(2,y,z)$ pertence à reta determinada pelos pontos $A(3,-1,4)$ e $B(4,-3,-1)$?

5. Determine as equações vetoriais, paramétricas, simétricas e reduzidas das retas que passam pelos pontos:

   (a) $A(-1,1)$ e $B(0,2)$;

   (b) $A(-2,1)$ e $B(-2,3)$;

   (c) $A(-2,1,1)$ e $B(0,3,2)$;

   (d) $A(-2,2,1)$ e $B(1,2,2)$;

   (e) $A(0,3,2)$ e $B(1,3,2)$;

   (f) $A(1,2,2,1)$ e $B(-2,2,1,3)$;

6. Mostre que os pontos $A(0,2)$, $B(2,-1)$ e $C(4,-4)$ são colineares. Escreva a equação vetorial da reta que passa por eles.

7. Mostre que os pontos $A(-1,4,-3)$, $B(2,1,3)$ e $C(4,-1,7)$ são colineares. Escreva a equação vetorial da reta que passa por eles.

8. Mostre que os pontos $A(1,2,2,1)$, $B(2,1,3,1)$ e $C(0,3,1,1)$ são colineares. Escreva a equação vetorial da reta que passa por eles.

9. Determine um ponto de referência e o vetor diretor das retas abaixo. Em seguida, escreva a equação vetorial da reta e nos outros formatos.

   (a) $\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t-1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \end{cases}$

   (c) $\dfrac{x+1}{3} = y+1$

   (d) $\left\{ y = 2x-3 \right.$

10. Determine um ponto de referência e o vetor diretor das retas abaixo. Em seguida, escreva a equação vetorial da reta e nos outros formatos.

(a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - t \end{cases}$

(b) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = z$

(c) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} z = 1 \\ x + 1 = \dfrac{y-2}{-1} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -1 \end{cases}$

(f) $x = y = z$

11. Calcule a posição relativa, o ângulo e a distância entre as retas a seguir:

    (a) $r: \begin{cases} x = -2t - 2 \\ y = 2t \\ z = -4t + 3 \end{cases}$ e $s: \ \dfrac{x}{4} = \dfrac{y+6}{2} = \dfrac{z-1}{2}$;

    (b) $r: \begin{cases} y = -2x - 1 \\ z = x + 2 \end{cases}$ e $s: \ \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{-3}; \ x = 2$;

    (c) $r: \begin{cases} y = -x + 2 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $s: \ P = (1, 2, 3) + t(3, 2, 1)$;

    (d) $r: \begin{cases} y = x + 2 \\ z = -2x + 1 \end{cases}$ e $s: \ P = (2, 1, -2) + t(-2, -2, 4)$;

12. Dados um ponto e uma reta, calcule a distância entre eles:

    (a) $P = (0, 0, 0)$ e $r: \begin{cases} x = -2t - 2 \\ y = 2t \\ z = -4t + 3 \end{cases}$;

    (b) $P = (1, -1, 2)$ e $r: \begin{cases} y = x + 2 \\ z = -2x + 1 \end{cases}$;

    (c) $P = (1, -1, 2)$ e $r: \begin{cases} y = x - 2 \\ z = x + 1 \end{cases}$;

    (d) $P = (1, -1)$ e $r: \ y = 2x + 3$.

13. Qual a equação da reta que passa pelo ponto $A(3, 2, 1)$ e é ortogonal simultaneamente às retas $r: \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3 \end{cases}$;

8.4 Exercícios Computacionais

1. Escreva uma função que a partir de dois pontos retorne a equação vetorial da reta que passa por eles.

2. Escreva uma função que a partir de dois pontos retorne as equações paramétricas da reta que passa por eles.

3. Escreva uma função que a partir de dois pontos retorne as equações simétricas da reta que passa por eles.

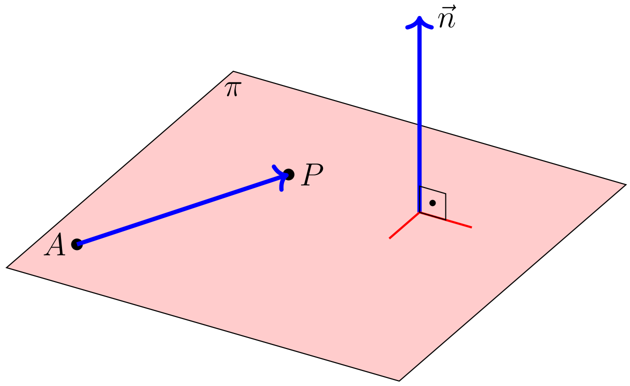
4. Escreva uma função que a partir de dois pontos retorne as equações reduzidas da reta que passa por eles, em função de uma das variáveis.

5. Escreva uma função que a partir de um ponto e um vetor retorne a equação vetorial da reta respectiva.
6. Escreva uma função que a partir de um ponto e um vetor retorne as equações paramétricas da reta respectiva.
7. Escreva uma função que a partir de um ponto e um vetor retorne as equações simétricas da reta respectiva.
8. Escreva uma função que a partir de um ponto e um vetor retorne as equações reduzidas da reta respectiva, em função de uma das variáveis.
9. Gere dois pontos no espaço $\mathbb{R}^3$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Retorne as equações paramétricas da reta que passa pelos dois pontos. Faça este processo 5 vezes.
10. Gere um ponto e um vetor no espaço $\mathbb{R}^3$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Retorne as equações paramétricas da reta respectiva. Faça este processo 5 vezes.
11. Escreva uma função que verifica se um ponto pertence a uma reta.
12. Escreva uma função que, dados dois pontos, gera um ponto aleatório entre os pontos anteriores.
13. Escreva uma função que determina pontos aleatórios de uma reta, num intervalo de distância de um ponto de referência.
14. Escreva uma função que retorna se três pontos são colineares.
15. Gere dois pontos no espaço $\mathbb{R}^3$. Gere um terceiro ponto aleatoriamente entre os dois pontos anteriores. Verifique que os três pontos são colineares.
16. Escreva uma função que retorna o ângulo entre duas retas. v
17. Gere duas retas no espaço $\mathbb{R}^3$. Calcule o ângulo entre as retas. Faça este processo 5 vezes.
18. Escreva uma função que verifica se duas retas são paralelas.
19. Escreva uma função que verifica se duas retas são ortogonais.
20. Escreva uma função que verifica se duas retas são coplanares.
21. Escreva uma função que retorna a posição relativa entre duas retas: coplanares coincidentes; coplanares paralelas; coplanares concorrentes; e reversas.
22. Gere duas retas no espaço $\mathbb{R}^3$. Determine a posição relativa entre as retas. Faça este processo 5 vezes.
23. Gere três pontos no espaço $\mathbb{R}^3$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Determine o menor ângulo entre as retas formadas por estes pontos. Faça este processo 5 vezes.
24. Escreva uma função que calcula a distância entre dois pontos.
25. Gere dois pontos no espaço $\mathbb{R}^3$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Retorne a distância entre eles. Faça este processo 5 vezes.
26. Escreva uma função que calcula a distância entre um ponto e uma reta.
27. Gere um ponto e uma reta aleatoriamente no espaço $\mathbb{R}^3$. Retorne a distância entre eles. Faça este processo 5 vezes.

28. Gere três pontos no espaço $\mathbb{R}^3$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Determine a menor altura do triângulo formado pelos três pontos. Faça este processo 5 vezes.
29. Escreva uma função que calcula a distância entre duas retas.
30. Gere duas retas aleatórias no espaço $\mathbb{R}^3$. Retorne a distância entre as retas. Faça este processo 5 vezes.

Capítulo 9
Plano

Para encontrar a equação do plano, assim como na reta, precisaremos de um ponto de referência e um vetor. O ponto de referência é um ponto que pertence ao plano e o vetor é um vetor normal ao plano, ou seja, um vetor ortogonal ao plano. A Figura abaixo mostra o plano π, com um ponto de referência A e um vetor normal $\vec{n}$ e queremos definir qualquer ponto P do plano.



Como o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é ortogonal a qualquer vetor do plano π, podemos definir, considerando o ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e $P = (x, y, z)$.

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \\
(P - A) \cdot \vec{n} = 0 \\
((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) \cdot \vec{n} = 0 \\
(x - x_A, y - y_A, z - z_A) \cdot (a, b, c) = 0 \\
a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\
ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0 \\
ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0 \\
ax + by + cz + d = 0, \quad d = -ax_A - by_A - cz_A
\end{gathered}$$

A última linha representa a equação geral do plano π.

Definição 9.1: Equação Geral do Plano

A equação geral de um plano π, com uma normal $\vec{n} = (a, b, c)$ e um ponto de referência $A = (x_A, y_A, z_A)$ é dada por:

$$\begin{gathered}
ax + by + cz + d = 0 \\
d = -ax_A - by_A - cz_A
\end{gathered}$$

Se o plano passa na origem $O = (0, 0, 0)$, então $d = 0$ e a equação do plano é dada por $ax + by + cz = 0$.

Qualquer ponto P de um plano π pode ser descrito como um ponto de referência e a combinação de dois vetores não-paralelos de π. Assim, seja um ponto de referência A e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de direções diferentes. Além disso, considere dois parâmetros $h, t \in \mathbb{R}$. Descrevendo o vetor $\overrightarrow{AP}$ como combinação de $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

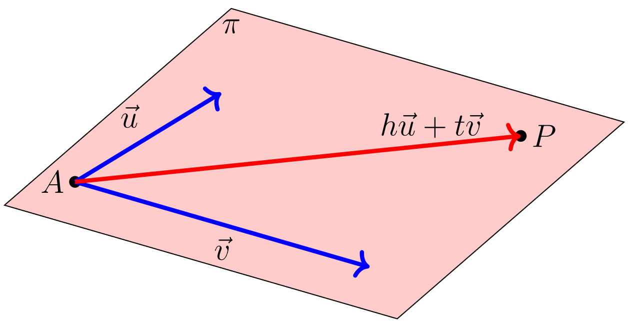
$$\begin{gathered}
\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v} \\
P - A = h\vec{u} + t\vec{v} \\
P = A + h\vec{u} + t\vec{v} \\
(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + h(x_u, y_u, z_u) + t(x_v, y_v, z_v) \\
\begin{cases} x = x_A + hx_u + tx_u \\ y = y_A + hy_u + ty_u \\ z = z_A + hz_u + tz_u \end{cases}
\end{gathered}$$

Definição 9.2: Equações Paramétricas do Plano

As equações paramétricas do plano se referem à combinação linear de dois vetores de direções diferentes, com relação a um ponto de referência. Assim, para definir a equação de um plano π, dados um ponto de referência $A \in \pi$, dois vetores $\vec{u}$, $\vec{v} \in \pi$ de direções diferentes e dois parâmetros $h, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{gathered}
P = A + h\vec{u} + t\vec{v} \\
\begin{cases} x = x_A + hx_u + tx_u \\ y = y_A + hy_u + ty_u \\ z = z_A + hz_u + tz_u \end{cases}
\end{gathered}$$

A Figura abaixo mostra os vetores no plano π:



As equações paramétricas dependem de dois parâmetros h e t para estabelecer um plano. Esse tipo de equação é muito utilizado para descrição de superfícies, por exemplo planos, parabolóides, elipsóides etc.

Exemplo 9.1: Determine um ponto de referência, o vetor normal do plano $\pi: \; 3x + 2y - 4z + 6 = 0$ e uma equação paramétrica do plano π.

Solução: O vetor normal pode ser obtido facilmente por meio dos coeficientes que multiplicam x, y e z. Assim $\vec{n} = (3, 2, -4)$. Para obter um ponto qualquer, basta colocar valores para duas coordenadas. Assim, uma estratégia é zerar duas variáveis para obter uma terceira. Podemos então obter três pontos nos eixos do espaço cartesiano:

$$\begin{array}{rcl} y = z = 0 & \Longrightarrow & A = (-2, 0, 0) \\ x = z = 0 & \Longrightarrow & B = (0, -3, 0) \\ x = y = 0 & \Longrightarrow & C = \left(0, 0, \dfrac{3}{2}\right) \end{array}$$

Com isso, obtemos dois vetores não paralelos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -3, 0) - (-2, 0, 0) = (2, -3, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \left(0, 0, \frac{3}{2}\right) - (-2, 0, 0) = \left(2, 0, \frac{3}{2}\right)$$

Por fim, uma equação paramétrica de π seria:

$$P = A + h\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

$$P = (-2, 0, 0) + h(2, -3, 0) + t\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x = -2 + 2h + 2t \\ y = -3h \\ z = \dfrac{3}{2}t \end{cases}$$

□

Exemplo 9.2: Determine a equação geral do plano e uma equação paramétrica que passa pelos pontos $A(2, -1, 3)$, $B(3, 2, 1)$ e $C(0, -1, -1)$.

Solução: Com três pontos, podemos obter o plano por meio de dois vetores formados entre os pontos. Por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 2, 1) - (2, -1, 3) = (1, 3, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, -1, -1) - (2, -1, 3) = (-2, 0, -4)$$

Assim, para a equação paramétrica do plano, usando os parâmetros $h, t \in \mathbb{R}$:

$$P = A + h\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

$$P = (2, -1, 3) + h(1, 3, -2) + t(-2, 0, -4)$$

$$\begin{cases} x = 2 + h - 2t \\ y = -1 + 3h \\ z = 3 - 2h - 4t \end{cases}$$

Para obter a equação geral do plano, dados dois vetores do plano, podemos obter um vetor ortogonal a esses dois vetores usando o produto vetorial. Assim:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-12, 8, 6)$$

Podemos usar vetor normal $\vec{n}$ e um dos pontos para encontrar o plano π:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$-12x + 8y + 6z + d = 0$$

Para encontrar o coeficiente d, podemos usar o ponto $A(2, -1, 3)$:

$$-12 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 3 + d = 0 \Longrightarrow d = -14$$

$$-12x + 8y + 6z - 14 = 0 \quad \div(-2)$$

$$6x - 4y - 3z + 7 = 0$$

□

9.1 Relações entre planos

Dados dois planos π_1 e π_2 no espaço $\mathbb{R}^3$, podemos obter algumas relações entre eles, por exemplo ângulo, paralelismo, ortogonalidade etc. Para os problemas a seguir, vamos considerar os planos π_1 e π_2 abaixo. O plano π_1 tem como vetor normal $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$. O plano π_2 tem como vetor normal $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

$$\pi_1 : \; a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$\pi_2 : \; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Definição 9.3: Ângulo entre planos

O ângulo entre dois planos é dado pelas direções dos vetores normais dos planos, sendo escolhido o menor ângulo entre as duas direções. Assim, considerando os planos π_1 e π_2 e um ângulo θ entre eles, podemos usar a relação de ângulos entre vetores:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Definição 9.4: Planos Paralelos

Os planos π_1 e π_2 são paralelos ($\pi_1 \,||\, \pi_2$) se seus vetores normais possuem a mesma direção. Assim, basta verificar se os vetores normais aos planos são paralelos. Ou seja:

$$\pi_1 \,||\, \pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \,||\, \vec{n}_2 \Longrightarrow \vec{n}_1 = \alpha\vec{n}_2.$$

Uma outra maneira de verificar o paralelismo entre dois planos é usar o ângulo entre os vetores. Se o ângulo entre os vetores normais for zero, então a direção dos vetores é a mesma. Entretanto, fazer isso é manual e computacionalmente mais demorado para ser calculado.

Definição 9.5: Planos Ortogonais

Os planos π_1 e π_2 são ortogonais ($\pi_1 \perp \pi_2$) se o ângulo formado entre eles é de $90°$. Assim, se o produto escalar dos vetores normais é nulo, então os planos são ortogonais. Ou seja:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

Definição 9.6: Posições Relativas entre Planos

Dois planos π_1 e π_2 no espaço podem ter as seguintes posições relativas:

- **Coincidentes:** Os planos são o mesmo;
- **Paralelos:** $\pi_1 \,||\, \pi_2$ e não possuem ponto de interseção entre si;
- **Concorrentes:** Possuem uma reta de interseção.

O teste mais fácil para descobrir a posição relativa entre planos é verificar a proporção entre os vetores normais (teste de paralelismo).

Exemplo 9.3: Calcule a posição relativa entre os planos abaixo, o ângulo entre eles e, se for o caso, a interseção entre eles:

(a) $\begin{array}{l} \pi_1 : \ 2x + y - z + 6 = 0 \\ \pi_2 : \ -4x - 2y + 2z = 0 \end{array}$

(b) $\begin{array}{l} \pi_1 : \ 2x + 3y - z + 6 = 0 \\ \pi_2 : \ 3x + 6z - 2 = 0 \end{array}$

Solução: (a) Primeiro, é importante pegar o vetor normal a cada plano:

$$\vec{n}_1 = (2, 1, -1)$$
$$\vec{n}_2 = (-4, -2, 2)$$

Testando o paralelismo:

$$\alpha = \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} \Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

Portanto, os planos π_1 e π_2 são paralelos e o ângulo entre eles é zero. Os planos não são coincidentes, pois π_2 passa na origem e π_1 não.

(b) Tomando o vetor normal a cada plano:

$$\vec{n}_1 = (2, 3, -1)$$
$$\vec{n}_2 = (3, 0, 6)$$

Testando o paralelismo:

$$\alpha = \frac{2}{3} = \frac{3}{0} = \frac{-1}{6} \Longrightarrow \nexists \alpha$$

E assim, os planos π_1 e π_2 não são paralelos e sim concorrentes. Para testar os ângulos, precisamos da relação:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$
$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2, 3, -1) \cdot (3, 0, 6) = 0$$

Como o produto escalar é zero, então os vetores normais são ortogonais e o ângulo entre os planos π_1 e π_2 é de $90°$.

Como os planos são concorrentes, há uma interseção entre eles. Para encontrar essa interseção, basta colocar os planos no mesmo sistema e colocar as coordenadas em função de uma única, por exemplo a coordenada x:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 6 = 0 \\ 3x + 6z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$3x + 6z - 2 = 0 \Longrightarrow 6z = -3x + 2 \Longrightarrow z = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$
$$2x + 3y - z + 6 = 0 \Longrightarrow 3y = -2x + z - 6 = -2x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} - 6$$
$$y = -\frac{5}{6}x - \frac{17}{9}$$
$$\begin{cases} y = -\dfrac{5}{6}x - \dfrac{17}{9} \\ \\ z = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

O último sistema são as equações reduzidas da reta que é a interseção entre os dois planos. □

9.2 Relações entre planos e retas

Uma reta r e um plano π podem ser concorrentes ou paralelos (podendo até ser coincidentes). O plano π tem como vetor normal $\vec{n} = (a_1, b_1, c_1)$ e a reta r possui vetor diretor $\vec{u} = (a_2, b_2, c_2)$.

$$\pi : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$r : (x, y, z) = (x_2, y_2, z_2) + t(a_2, b_2, c_2)$$

Definição 9.7: Ângulo entre plano e reta

O ângulo entre um plano π e uma reta r pode ser obtido pela direção do vetor normal do plano $\vec{n}$ e o vetor diretor da reta $\vec{u}$. O ângulo ϕ entre $\vec{n}$ e $\vec{u}$ é complementar ao ângulo θ entre $\vec{u}$ e π, ou seja, $\theta + \phi = 90°$. Assim:

$$\cos\phi = \cos 90 - \theta = \operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}.$$

Definição 9.8: Plano e Reta Paralela

Com base no ângulo entre o plano π e a reta r, estes elementos são paralelos ($\pi \,||\, r$) se o vetor normal do plano $\vec{n}$ e o vetor diretor da reta $\vec{u}$ são ortogonais. Assim:

$$\pi \,||\, r \Longleftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \Longrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

Definição 9.9: Plano e Reta Ortogonais

Com base no ângulo entre o plano π e a reta r, estes elementos são ortogonais ($\pi \perp r$) se o vetor normal do plano $\vec{n}$ e o vetor diretor da reta $\vec{u}$ são paralelos. Assim:

$$\pi \perp r \Longleftrightarrow \vec{n} \,||\, \vec{u} \Longrightarrow \vec{n} = \alpha\vec{u}.$$

Definição 9.10: Posições Relativas entre Planos e Retas

Um plano π e uma reta r no espaço podem ter as seguintes posições relativas:

- **Paralelos:** $\pi \,||\, r$. Caso $P \in r$ e $P \in \pi$, então $r \subset \pi$;
- **Concorrentes:** Possuem um ponto de interseção.

Exemplo 9.4: Determine a posição relativa entre o plano $\pi:\ x+2y-4=0$ e as retas abaixo. Calcule também o ângulo entre os objetos e, se for o caso, a interseção entre eles.

(a) $r_1 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2t \\ z = -1+3t \end{cases}$;

(b) $r_2 : \begin{cases} x = -1-2z \\ y = -2+z \end{cases}$.

Solução: O plano π possui vetor normal $\vec{n} = (1,2,0)$. A reta r_1 possui vetor diretor $\vec{u}_1 = (1,2,3)$ e um ponto de referência $A_1 = (2,0,-1)$. Primeiro, pode-se verificar se o plano π é paralelo à reta r_1.

$$\vec{n}\cdot\vec{u}_1 = (1,2,0)\cdot(1,2,3) = 5$$

Portanto, o plano π e a reta r_1 são concorrentes. Calculando o ângulo entre π e r_1:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{|(1,2,0)\cdot(1,2,3)|}{|(1,2,0)|\cdot|(1,2,3)|} = \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}}$$
$$\theta = 36.70^\circ$$

Para calcular o ponto de interseção, basta colocar o plano e a reta no mesmo sistema e resolvê-lo.

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x = 2+t \\ y = 2t \\ z = -1+3t \end{cases} \implies \begin{cases} t = 0,4 \\ x = 2,4 \\ y = 0,8 \\ z = 0,2 \end{cases}$$

Logo, o ponto de interseção é $(2,4;0,8;0,2)$.

A reta r_2 possui vetor diretor $\vec{u}_2 = (-2,1,1)$ e um ponto de referência $A_2 = (-1,-2,0)$. Vamos verificar se o plano π é paralelo à reta r_2.

$$\vec{n}\cdot\vec{u}_2 = (1,2,0)\cdot(-2,1,1) = 0$$

Portanto, o plano π e a reta r_2 são paralelos e possuem um ângulo nulo entre si. Para descobrir se a reta está contida no plano, basta verificar se $A_2 \in \pi$. Assim, $-1+2\cdot(-2)-4 = -9 \neq 0$. Portanto, não há interseção entre os objetos. □

9.3 Distâncias

Medir a distância entre planos, retas e pontos é uma aplicação importante da geometria analítica. Iniciaremos aqui com a distância entre um ponto e um plano, seguida da distância entre uma reta e um plano e por último a distância entre planos.

Definição 9.11: Distância entre um ponto e um plano

Sejam o ponto P e o plano π, com um ponto de referência A e o vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$. A distância entre P e π pode ser calculada por meio do comprimento da projeção do vetor AP com relação ao vetor normal $\vec{n}$.

$$d(P, \pi) = \left|\operatorname{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{AP} \cdot \hat{n}\right| = \left|\overrightarrow{AP} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$$

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Definição 9.12: Distância entre uma reta e um plano

Dados uma reta r com ponto de referência A e um plano π, a distância entre r e π vai depender da relação entre eles:

- r e π são concorrentes, então $d(r, \pi) = 0$;
- r e π são paralelos, então $d(r, \pi) = d(A, \pi)$.

Definição 9.13: Distância entre dois planos

Sejam os planos π_1 e π_2, com pontos de referência A e B, respectivamente. A distância entre π_1 e π_2 vai depender da relação entre os planos:

- Se π_1 e π_2 são concorrentes, então $d(\pi_1, \pi_2) = 0$;
- Se π_1 e π_2 são paralelos, então $d(\pi_1, \pi_2) = d(A, \pi_2) = d(\pi_1, B)$.

Exemplo 9.5: Determine a distância entre os elementos abaixo e o plano $\pi : \ 3x + 2y - 4z + 6 = 0$.

(a) Ponto $P = (0, 1, 2)$;

(b) Reta $r : P = (0, 0, 0) + t \cdot (2, 1, 2)$;

(c) Plano $\pi_1 : \ 3x + 6z - 2 = 0$.

Solução: O vetor normal do plano π é $\vec{n} = (3, 2, -4)$.

(a) A distância de $P = (0, 1, 2)$ ao plano π:

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{29}} = \frac{6}{\sqrt{29}} \ u.c.$$

(b) A reta r possui ponto de referência na origem $(0, 0, 0)$ e vetor diretor $\vec{u} = (2, 1, 2)$. Para verificar se $r \parallel \pi$:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = (3, 2, -4) \cdot (2, 1, 2) = 0.$$

Portanto, a reta r é paralela ao plano π. Neste caso, a distância $d(r,\pi)$ é dada por

$$d(r,\pi) = d(O,\pi) = \frac{|3\cdot 0 + 2\cdot 0 - 4\cdot 0 + 6|}{\sqrt{3^2+2^2+(-4)^2}} = \frac{6}{\sqrt{29}}\ u.c.$$

(c) O plano π_1 possui vetor normal $\vec{n_1} = (3,0,6)$. Para verificar se $\pi \mid\mid \pi_1$:

$$\vec{n} = \alpha\vec{n}_1 \quad \Longrightarrow \quad (3,2,-4) = \alpha(3,0,6).$$

Não existe α que satisfaz a equação a direita, pois na segunda coordenada $2 = \alpha \cdot 0$, uma indeterminação. Portanto, os planos são concorrentes e possuem distância zero.

Para complementar, a interseção entre π e π_1 é dada por:

$$\begin{cases} 3x+2y-4z+6=0 \\ 3x+6z-2=0 \end{cases}$$

Cujo resultado é as seguintes equações reduzidas, em função de x:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{5}{2}x - \dfrac{7}{3} \\ z = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

□

9.4 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Seja o plano $\pi: \ 2x - y + 3z + 1 = 0$. Determine:
   (a) O ponto do plano π que tem abcissa 4 e ordenada 3;
   (b) O ponto do plano π que tem abcissa 1 e cota 2;
   (c) O valor de k para que o ponto $P(2, k+1, k) \in \pi$;
   (d) O ponto de abcissa zero e ordenada o dobro da cota;
   (e) O vetor normal ao plano;
   (f) Dois vetores não-paralelos que pertencem ao plano;

2. Determine a equação geral do plano que:
   (a) Contém o ponto $A(1, 2, 3)$ e cujo vetor normal $\vec{n} = (2, 3, 1)$;
   (b) Contém o ponto $A(4, -1, 2)$ e é paralelo ao plano $\pi: \ 2x - 3y - z + 5 = 0$;
   (c) Contém o ponto $A(1, 2, 3)$ e é ortogonal à reta $r: \begin{cases} x = 2y - 3 \\ z = -y + 1 \end{cases}$;
   (d) É mediador do segmento $\overline{AB}$, $A(1, -2, 6)$ e $B(3, 0, 0)$;
   (e) É paralelo ao eixo z e contém os pontos $A(0, 3, 1)$ e $B(2, 0, -1)$;
   (f) Contém os pontos $A(-1, 2, 0)$, $B(2, -1, 1)$ e $C(1, 1, -1)$;
   (g) Contém os pontos $A(0, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ e $C(0, 2, 5)$;
   (h) Contém os pontos $A(1, -2, 2)$ e $B(-3, 1, -2)$ e é ortogonal ao plano $\pi: \ 2x + y - z + 8 = 0$;
   (i) Contém o ponto $A(4, 1, 0)$ e é ortogonal aos planos $\pi_1: \ 2x - y - 4z - 6 = 0$ e $\pi_2: \ x + y + 2z - 3 = 0$;
   (j) Contém as retas $r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} y = -1 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$;
   (k) Contém o ponto $A(3, -1, 2)$ e a reta $r: \begin{cases} y = 2 - x \\ z = 3 + 2x \end{cases}$
   (l) Contém o ponto $A(1, -1, 2)$ e o eixo z;

3. Calcule a posição relativa entre os planos abaixo. Em seguida, determine o ângulo, a interseção e a distância entre eles:
   (a) $\pi_1: \ 2x - 2y + 1 = 0$, $\pi_2: \ 2x - y - z = 0$
   (b) $\pi_1: \ x - 2y + z + 1 = 0$, $\pi_2: \ -2x + 4y - 2z = 0$
   (c) $\pi_1: \ x - z + 1 = 0$, $\pi_2: \ x + y + z = 0$
   (d) $\pi_1: \ x + 2y + z - 10 = 0$, $\pi_2: \ 2x + y - z + 1 = 0$

4. Calcule a posição relativa entre os planos e as retas abaixo. Em seguida, determine o ângulo, a interseção e a distância entre eles:

(a) $\pi: \ x - y + 1 = 0$
$r: \ P = (1,2,3) + t(-2,-2,3)$

(b) $\pi: \ x - 2y + z + 1 = 0$
$r: \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = -x + 1 \end{cases}$

(c) $\pi: \ x + 2y + z - 10 = 0$
$r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases}$

9.5 Exercícios Computacionais

1. Escreva uma função que a partir de três pontos determina a equação geral do plano no espaço $\mathbb{R}^3$;
2. Escreva uma função que a partir de três pontos determina as equações paramétricas do plano no espaço $\mathbb{R}^3$;
3. Escreva uma função que a partir de um ponto e dois vetores determina a equação do plano no espaço $\mathbb{R}^3$;
4. Escreva uma função que determina a posição relativa de dois planos no espaço $\mathbb{R}^3$;
5. Escreva uma função que determina o ângulo entre dois planos no espaço $\mathbb{R}^3$;
6. Escreva uma função que verifica se os planos são paralelos no espaço $\mathbb{R}^3$;
7. Escreva uma função que verifica se os planos são ortogonais no espaço $\mathbb{R}^3$;
8. Escreva uma função que determina a projeção de um ponto no plano no espaço $\mathbb{R}^3$;
9. Escreva uma função que determina a projeção de uma reta em um plano no espaço $\mathbb{R}^3$;
10. Escreva uma função que determina a posição relativa entre dois planos no espaço $\mathbb{R}^3$: Coincidentes; Paralelos; Concorrentes.
11. Escreva uma função que determina o ângulo entre um plano e uma reta no espaço $\mathbb{R}^3$;
12. Escreva uma função que verifica se um plano e uma reta são paralelos no espaço $\mathbb{R}^3$;
13. Escreva uma função que verifica se um plano e uma reta são ortogonais no espaço $\mathbb{R}^3$;
14. Escreva uma função que determina a posição relativa entre um plano e uma reta no espaço $\mathbb{R}^3$: Paralelos; Concorrentes.
15. Escreva uma função que determina a interseção de dois planos no espaço $\mathbb{R}^3$.
16. Escreva uma função que determina a interseção de três planos no espaço $\mathbb{R}^3$.
17. Escreva uma função que determina a distância entre um ponto e um plano no espaço $\mathbb{R}^3$.
18. Escreva uma função que determina a distância entre uma reta e um plano no espaço $\mathbb{R}^3$.
19. Escreva uma função que determina a distância entre dois planos no espaço $\mathbb{R}^3$.
20. Gere três pontos no espaço $\mathbb{R}^3$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Determine o plano que passa por estes pontos. Faça este processo 5 vezes.
21. Gere 2 planos no espaço $\mathbb{R}^3$. Determine o ângulo entre os dois planos. Faça este processo 5 vezes.

22. Gere 2 planos no espaço $\mathbb{R}^3$. Determine a posição relativa entre os dois planos. Faça este processo 5 vezes.

23. Gere 2 planos no espaço $\mathbb{R}^3$. Determine a interseção entre os dois planos. Faça este processo 5 vezes.

24. Gere 3 planos no espaço $\mathbb{R}^3$ que passam necessariamente pela origem $(0, 0, 0)$. Dados os três planos e o plano $x + y + z = 1$, calcule o volume do tetraedro gerado pelas interseções dos três planos.

25. Gere um plano no espaço $\mathbb{R}^3$. Determine a distância do plano à origem $(0, 0, 0)$. Faça este processo 5 vezes.

Capítulo 10

Espaços Vetoriais

Nos capítulos anteriores, tivemos uma noção de vetor, principalmente nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Neste capítulo, vamos ampliar a perspectiva de vetores em outros espaços, embora mantendo o foco nos espaços $\mathbb{R}^n$. Para isso, precisamos definir um espaço vetorial.

Definição 10.1: Espaço Vetorial

Um **espaço vetorial** é um conjunto V, não vazio, com duas operações: (1) soma de vetores; e (2) produto de vetor por escalar, tais que as propriedades **(i)** a **(x)** sejam satisfeitas. Um elemento $\vec{v} \in V$ é chamado de **vetor**. Denotaremos o espaço vetorial pelo próprio conjunto V ou pela tripla $(V, \oplus, \otimes)$, onde $\oplus$ é a operação de soma e $\otimes$ é a operação do produto por escalar. Assim, dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ e α, $\beta \in \mathbb{R}$:

- **(i) Fechamento da Soma:** Se $\vec{u}, \vec{v} \in V$, então $\vec{u} + \vec{v} \in V$;
- **(ii) Fechamento do Produto por Escalar:** Se $\vec{u} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha \cdot \vec{u} \in V$;
- **(iii) Comutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
- **(iv) Associativa:** $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$;
- **(v) Vetor Nulo:** $\exists\ \vec{0} \in V$, tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;
- **(vi) Vetor Oposto:** $\exists\ (-\vec{u}) \in V$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;
- **(vii) Associativa:** $\alpha \cdot (\beta\vec{u}) = (\alpha \cdot \beta)\vec{u}$;
- **(viii) Distributiva:** $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;
- **(ix) Distributiva:** $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;
- **(x) Identidade:** $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Para mostrar que um conjunto V munido da operação de soma $\oplus$ e do produto por escalar $\otimes$ é um espaço vetorial, basta mostrar as propriedades de **(i)** a **(x)**. Se uma única destas propriedades não é satisfeita, então $(V, \oplus, \otimes)$ não é espaço vetorial.

Exemplo 10.1: O espaço $\mathbb{R}^n$, para qualquer $n \geq 1$, dadas as operações tradicionais de soma de vetores e produto de vetor por escalar (operações coordenada por coordenada) é espaço vetorial:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$
$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n) = (\alpha \cdot u_1, \alpha \cdot u_2, \ldots, \alpha \cdot u_n)$$

Solução: As operações de soma e produto por escalar são fechadas em $\mathbb{R}^n$, visto que as operações resultam em vetores (propriedades **(i)** e **(ii)**). Além disso, **(iii)** a **(x)** já são propriedades dos vetores de ordem n, conforme visto nos capítulos anteriores. $\square$

Exemplo 10.2: O conjunto das matrizes de dimensão $m \times n$, $\mathcal{M}(m, n)$, para $m, n \geq 1$, dadas as operações convencionais de soma de matrizes e produto de matriz por escalar, é espaço vetorial.

$$\vec{u} + \vec{v} = \alpha_{m\times n} + B_{m\times n}$$
$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \alpha_{m\times n}$$

Solução: As operações convencionais de soma e produto por escalar de matrizes são fechadas em $\mathcal{M}(m, n)$, visto que as operações resultam em matrizes de mesma dimensão (propriedades **(i)** e **(ii)**). Além disso, **(iii)** a **(x)** já são propriedades de matrizes $\alpha_{m\times n}$, conforme visto nos capítulos anteriores. $\square$

Exemplo 10.3: O conjunto dos polinômios finitos de grau menor ou igual a n, $\mathcal{P}_n$, dadas as operações de soma de polinômios e produto de polinômio por escalar é espaço vetorial.

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_0 + u_1 x + \ldots + u_n x^n) + (v_0 + v_1 x + \ldots + v_n x^n)$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_0 + v_0 + (u_1 + v_1)x + \ldots + (u_n + v_n)x^n)$$
$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (u_0 + u_1 x + \ldots + u_n x^n)$$
$$\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha \cdot u_0 + \alpha \cdot u_1 x + \ldots + \alpha \cdot u_n x^n)$$

Solução: Os polinômios de ordem n podem ser vistos como vetores de ordem $n + 1$, com os coeficientes polinomiais sendo as coordenadas de um vetor, conforme a relação biunívoca abaixo:

$$(u_0 + u_1 x + \ldots + u_n x^n) = (u_0, u_1, \ldots, u_n) \cdot (1, x, \ldots, x^n)$$
$$(u_0 + u_1 x + \ldots + u_n x^n) \equiv (u_0, u_1, \ldots, u_n)$$

Assim, de maneira análoga ao $\mathbb{R}^{n+1}$, também satisfaz as propriedades **(i)** a **(x)**. $\square$

Exemplo 10.4: O conjunto das funções reais de uma única variável, $\mathcal{F}$, dadas as operações convencionais de soma de funções e produto de função por escalar é espaço vetorial:

$$\vec{u} + \vec{v} = f(x) + g(x)$$
$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot f(x)$$

Solução: As operações convencionais de soma de duas funções e de produto de uma função por escalar sempre resultam em uma função, portanto as propriedades **(i)** e **(ii)** estão satisfeitas. A soma definida é comutativa e associativa, o vetor nulo é dado pela função constante $f(x) = 0$ e o vetor oposto de $f(x)$ é $-f(x)$. O produto por escalar definido atende às propriedades associativa, distributivas e identidade $(1 \cdot f(x) = f(x)$. $\square$

Até então, vimos espaços vetoriais cujos objetos são elementos matemáticos sob operações convencionais de soma e produto por escalar. Vejamos outros espaços vetorais.

Exemplo 10.5: O conjunto $V = \left\{\vec{0}\right\}$, dadas as operações convencionais de soma e produto por escalar é espaço vetorial:

$$\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$
$$\alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}$$

Chamamos $\left(\left\{\vec{0}\right\}, +, \cdot\right)$ de espaço vetorial nulo.

Solução: O espaço vetorial nulo é o menor espaço vetorial possível, possuindo um único elemento. As operações de soma e produto por escalar definidos para $\vec{0}$, sempre resultam em $\vec{0}$. Para provar todas as propriedades, basta substituir todos os vetores por $\vec{0}$. □

Exemplo 10.6: O conjunto $V = \mathbb{R}^2$, dadas as operações de soma e produto por escalar definidas abaixo **não** é espaço vetorial:

$$\vec{u}+\vec{v}=(x_u,y_u)+(x_v,y_v)=(x_u+x_v,0)$$
$$\alpha\cdot\vec{v}=\alpha\cdot(x_u,y_u)=(\alpha\cdot x_u,0)$$

Solução: A operação de soma e produto por escalar definidas são convencionais para a primeira coordenada, mas anulam a segunda coordenada. Vamos conferir as propriedades, uma a uma:

- **(i) Fechamento da Soma:** Sejam $\vec{u}=(x_u,y_u)$ e $\vec{v}=(x_v,y_v)$ vetores do $\mathbb{R}^2$. Pela definição, $\vec{u}+\vec{v}=(x_u+x_v,0)$. Assim, o vetor resultante pertence ao conjunto $\mathbb{R}^2$; ✓
- **(ii) Fechamento do Produto por Escalar:** Sejam $\vec{u}=(x_u,y_u)\in\mathbb{R}^2$ e $\alpha\in\mathbb{R}$. Pela definição $\alpha\cdot\vec{u}=(\alpha\cdot x_u,0)$. Assim, o vetor resultante pertence ao conjunto $\mathbb{R}^2$; ✓
- **(iii) Comutativa:** $\vec{u}+\vec{v}=(x_u+x_v,0)$ e $\vec{v}+\vec{u}=(x_v+x_u,0)$. Portanto, a ordem da soma não interfere no resultado; ✓
- **(iv) Associativa:** $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(x_u+x_v+x_w,0)$ e $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=(x_u+x_v+x_w,0)$. Portanto, ao somar mais de dois termos, não importa a ordem de associação feita; ✓
- **(v) Vetor Nulo:** Precisamos encontrar um vetor nulo $\vec{0}$ em $\mathbb{R}^2$, tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$. Mas, $\vec{u}+\vec{0}=(x_u,y_u)+(x_0,y_0)=(x_u+x_0,0)\neq\vec{u}$. Portanto não é possível encontrar um vetor nulo; ×
- **(vi) Vetor Oposto:** Como não há vetor nulo, não faz sentido que exista vetor oposto; ×
- **(vii) Associativa:** $\alpha\cdot(\beta\vec{u})=(\alpha\cdot\beta)\vec{u}=(\alpha\beta x_u,0)$; ✓
- **(viii) Distributiva:** $\alpha\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}=(\alpha x_u+\alpha x_v,0)$; ✓
- **(ix) Distributiva:** $(\alpha+\beta)\cdot\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}=(\alpha x_u+\beta x_u,0)$; ✓
- **(x) Identidade:** $1\cdot\vec{u}=(x_u,0)\neq\vec{u}$. ×

As propriedades **(v)**, **(vi)** e **(x)** não foram satisfeitas, portanto o conjunto $\mathbb{R}^2$, com as operações definidas não é espaço vetorial. □

Como consequência das propriedades **(i)** a **(x)**:

Teorema 10.1

Dado um espaço vetorial $(V, +, \cdot)$, os vetores $\vec{0}$, $\vec{u} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

(i) O vetor oposto pode ser obtido por $-1 \cdot \vec{u} = -\vec{u}$;

(ii) O produto por escalar $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{0}$ se, e somente se, $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Assim, para todo espaço vetorial, é possível obter o vetor oposto de um vetor qualquer fazendo o produto por -1. Além disso, operações de produto por escalar que resultam no vetor nulo, deve ter pelo menos uma das parcelas nula.

Perceba que o espaço vetorial $\mathcal{P}_n$ (Exemplo 10.3) está contido no espaço vetorial $\mathcal{F}$ (Exemplo 10.4), já que os polinômios finitos também são funções. Dentro de um espaço vetorial V é possível identificar espaços $U \subseteq V$ que também são espaços vetoriais. A esses subespaços, temos a definição a seguir.

Definição 10.2: Subespaço Vetorial

Dado um espaço vetorial V, um subconjunto não-vazio $U \subseteq V$ é **subespaço vetorial** de V se a soma de vetores de U e o produto de vetor de U por escalar resultam em vetores de U. Ou seja, as operações mantêm os resultados dentro do subespaço U:

(i) Se $\vec{u}$, $\vec{v} \in U$ então $\vec{u} + \vec{v} \in U$;

(ii) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in U$ então $\alpha \cdot \vec{u} \in U$;

Perceba que as propriedades acima são exatamente as propriedades **(i)** e **(ii)** da Definição 10.1. Como os vetores de U são também vetores de V, eles já atendem às propriedades **(iii)** a **(x)** dos espaços vetoriais e portanto, os **subespaços vetoriais devem sempre conter o vetor nulo e o vetor oposto dos seus vetores**, por exemplo. Alternativamente, podemos combinar as propriedades **(i)** e **(ii)**, mostrando uma propriedade de Fechamento da Combinação Linear: Se $\vec{u}$, $\vec{v} \in U$ e α, $\beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in U$. Vale ressaltar alguns resultados:

Exemplo 10.7: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, com as operações de soma e produto por escalar tradicionais. Determine quais subconjuntos abaixo são subespaços vetoriais.

(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$;

(b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ ax + by + cz = 0\}$;

(c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ ax + by + cz + d = 0,\ d \neq 0\}$;

(d) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (0, 0, 0) + t \cdot (a, b, c),\ t \in \mathbb{R}\}$;

(e) U : Reta que não passa pela origem $(0, 0, 0)$;

(f) $U = \{(0, 0, 0)\}$;

(g) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x, y, z \geq 0\}$;

Solução: Seja $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v) \in U$ e α, $\beta \in \mathbb{R}$. O vetor combinação linear é dado por $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

O item (a) corresponde ao plano $z = 0$ em que todos os pontos são $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Mostrando as propriedades de fechamento em U, **(i)** e **(ii)**:

$$\vec{u}+\vec{v}=(x_u,y_u,0)+(x_v,y_v,0)=(x_u+x_v,y_u+y_v,0)\in U;\checkmark$$
$$\alpha\cdot\vec{u}=\alpha\cdot(x_u,y_u,0)=(\alpha x_u,\alpha y_u,0)\in U.\checkmark$$

Portanto o plano $z=0$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

O item (b) a um plano que passam pela origem, $ax+by+cz=0$, que pode ser reescrito como um produto escalar $(x,y,z)\cdot(a,b,c)=0$. Ou seja, os vetores (x,y,z) devem ser ortogonais ao vetor normal (a,b,c). Vamos verificar se o vetor combinação linear pertence a U:

$$(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\cdot(a,b,c)=\alpha\vec{u}\cdot(a,b,c)+\beta\vec{v}\cdot(a,b,c)=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0.$$

E assim, a combinação linear $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ também é ortogonal ao vetor normal (a,b,c) e pertence ao plano U. Portanto, o plano $ax+by+cz=0$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ e o próprio item (a) é um dos exemplos.

O item (c) representa um plano do $\mathbb{R}^3$ que não passam pela origem. Mas a origem $(0,0,0)$ representa o vetor nulo do $\mathbb{R}^3$ para as operações convencionais e precisa estar em qualquer subespaço vetorial. Portanto, $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ ax+by+cz+d=0,\ d\neq 0\}$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

O item (d) é uma reta no $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem. Os vetores $\vec{u}$ desta reta são múltiplos do vetor diretor (a,b,c). Ou seja, $(x,y,z)=t\cdot(a,b,c)$. Pela combinação linear:

$$(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha\cdot t_u\cdot(a,b,c)+\beta\cdot t_v\cdot(a,b,c)=(\alpha\cdot t_u+\beta\cdot t_v)\cdot(a,b,c).$$

E assim, a combinação linear $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ também é múltipla do vetor direção (a,b,c) e pertence à reta formada pelo conjunto U. Portanto uma reta que passa pela origem é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

No item (e), assim com o item (c), o vetor nulo não está no conjunto U, determinado por uma reta que não passa pela origem $(0,0,0)$. E portanto não é subespaço vetorial.

O item (f) é o espaço vetorial nulo do $\mathbb{R}^3$, sendo um subconjunto do $\mathbb{R}^3$. Portanto é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

O item (g) não é espaço vetorial, pois, dado um vetor de $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x,y,z\geq 0\}$, o seu vetor oposto não está em U. □

Independentemente do espaço vetorial V, há dois subespaços vetoriais: (1) o próprio V; e (2) o espaço vetorial nulo. O teorema a seguir, ajuda na concepção de subespaços vetoriais.

Teorema 10.2: Subespaços Vetoriais

Dados U e W subespaços vetoriais de V, então também são subespaços vetoriais de V:

$$U\cap W=\{\vec{v}\in V;\ \vec{v}\in U \text{ e } \vec{v}\in W\};$$
$$U+W=\{\vec{v}\in V;\ \vec{v}=\vec{u}+\vec{w},\ \vec{u}\in U,\ \vec{w}\in W\}.$$

Exemplo 10.8: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, com as operações de soma e produto por escalar tradicionais. Dados os subespaços vetoriais abaixo, vamos combiná-los de acordo com os teoremas de interseção e soma de subespaços.

(a) $U_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+2y-3z=0\}$;

(b) $U_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ y=0,\ z=0\}$;

(c) $U_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ (0,0,0)+t\cdot(3,0,1),\ t\in\mathbb{R}\}$;

Solução: Os subespaços são: U_1 um plano que passa pela origem e tem vetor normal $(1, 2, -3)$; U_2 a reta que forma o eixo x do $\mathbb{R}^3$; e U_3 uma reta que passa pela origem com vetor diretor $(3, 0, 1)$. A reta U_3 é subconjunto do plano U_1, pois $(1, 2, -3) \cdot (3, 0, 1) = 0$. Fazendo as possíveis interseções:

$U_1 \cap U_2$ possui como interseção apenas o ponto $(0, 0, 0)$. Sabemos que o subconjunto $U = \{(0, 0, 0)\}$ é subespaço vetorial nulo do $\mathbb{R}^3$. $U_1 \cap U_3 = U_3$, visto que $U_3 \subset U_1$. E U_3 é subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$. $U_2 \cap U_3 = \{(0, 0, 0)\}$ é a interseção de duas retas que possuem apenas o ponto $(0, 0, 0)$ em comum. Portanto, é também é o subespaço vetorial nulo. Com relação à soma de subespaços:

$U_1 + U_2$ representa todos os vetores resultantes da soma de um vetor de U_1 e um vetor de U_2. Geometricamente, a reta U_2 corta o plano U_1 no ponto $(0, 0, 0)$. Assim, $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$, pois a soma de vetores em U_1 e U_2 formam qualquer ponto (x, y, z) do $\mathbb{R}^3$. $U_1 + U_3 = U_1$, pois $U_3 \subset U_1$. E U_1 é subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$. $U_2 + U_3$ é o subespaço vetorial gerado por duas retas não colineares. Escrevendo a equação no formato paramétrico, a partir dos vetores diretores:

$$P = (0, 0, 0) + t \cdot (1, 0, 0) + h \cdot (3, 0, 1), \quad t, h \in \mathbb{R}$$

Para escrever a equação geral do plano, podemos fazer o produto vetorial entre os vetores diretores e calcular o vetor normal do plano resultante:

$$\vec{n} = \vec{u_2} \times \vec{u_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 0)$$

Logo, o plano formado por estas retas é dado por: $U_2 + U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0\}$. $\square$

10.1 Combinação Linear

Uma das características mais importantes de um espaço vetorial V é a possibilidade de combinar as operações de soma de vetores e de produto de vetor por escalar:

Definição 10.3: Combinação Linear

Seja um espaço vetorial $(V, +, \cdot)$, o conjunto de vetores $U = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ de V e os coeficientes reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Logo, o vetor $\vec{v}$ pertence a V:

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \ldots + \alpha_n \vec{v_n}$$

O vetor $\vec{v}$ é denominado de **combinação linear** de $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, ..., $\vec{v_n}$ ou combinação linear de U.

Definição 10.4: Subespaço Gerado

Seja um espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ e o conjunto $U = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$. O conjunto de todas as possibilidades de vetores como combinação linear de U é denominado **subespaço gerado por** U:

$$[U] = [\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}]$$
$$[U] = \{\vec{v} \in V; \quad \vec{v} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \ldots + \alpha_n \vec{v_n}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

Já havíamos vislumbrado algumas propriedades e benefícios da combinação linear quando vimos vetores do espaço no curso. Por conta da combinação linear, é que é possível, por exemplo, decompor um vetor em outros vetores (por exemplo, decompor uma força nas direções $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$). Outro exemplo é a soma de subespaços vetoriais, que compõem vetores, dados vetores de um espaço e de outro.

Seja um conjunto $U = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^m$. Pela definição, o subespaço gerado $[U]$ corresponde a todas as possibilidades de combinações lineares, representadas por um vetor $\vec{v}$ qualquer:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\vec{v_n}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Considere v_{ij} como o i-ésimo elemento do vetor $\vec{v_j}$. Como o espaço é $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{m1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{bmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \ldots & v_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Assim, voltamos ao problema de sistema de equações lineares com m equações e n variáveis. Neste sistema linear, a matriz de coeficientes $A = [v_{ij}]$ possui em suas colunas os vetores $\vec{v_j}$. Assim, os vetores $\vec{v}$ na qual o sistema possui solução, fazem parte do subespaço gerado por U. Ou seja, quais valores de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ tais que exista solução $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Exemplo 10.9: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e um conjunto $U = \{(1,0,3), (-1,1,2)\}$. Verifique se os vetores abaixo são combinação linear de U. Em seguida defina o subespaço gerado por U.

(a) $(2,-1,1)$ (b) $(2,0,1)$

Solução: Pela definição de combinação linear, neste exercício temos:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Assim, a primeira parte é analisar se o sistema tem solução para $\vec{v} = (2,-1,1)$, depois para $\vec{v} = (2,0,1)$ e na segunda parte verificar se para todo (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$. Resolveremos os três sistemas concomitantemente por Eliminação de Gauss-Jordan, no formato ampliado:

$$\left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & -1 & 2 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & 0 & y \\ 3 & 2 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \underset{l_3 \Rightarrow l_3 - 3l_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & -1 & 2 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & 0 & y \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -3x+z \end{array}\right]$$

$$\underset{l_3 \Rightarrow l_3 - 5l_2}{\overset{l_1 \Rightarrow l_1 + l_2}{\Longrightarrow}} \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & -1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -3x-5y+z \end{array}\right]$$

Perceba que o primeiro sistema é possível e a solução é dada por $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = -1$ e portanto:

$$(2,-1,1) = 1 \cdot (1,0,3) - 1 \cdot (-1,1,2)$$

O segundo sistema é impossível, pois na terceira linha temos $0 = -5$ e portanto $(2,0,1)$ não pode ser escrito como combinação linear de U.

O terceiro sistema, que calcula o subespaço gerado, tem a seguinte conclusão:

$$\begin{cases} \alpha_1 = x + y \\ \alpha_2 = y \\ 0 = -3x - 5y + z \end{cases}$$

A terceira equação representa um plano no $\mathbb{R}^3$, cujo vetor normal é $\vec{n} = (-3, -5, 1)$ e passa pela origem. Além disso, há o resultado dos coeficientes no caso do vetor pertencer ao plano. Portanto, $[U]$ é o plano $\pi_U : -3x - 5y + z = 0$. Para vetores $(x, y, z) \in \pi_U$ temos o resultado:

$$(x, y, z) = (x, y, 3x + 5y) = (x + y)(1, 0, 3) + y(-1, 1, 2).$$ □

Exemplo 10.10: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, calcule os subespaço gerado pelos vetores:

(a) $[\vec{v_1}]$;

(b) $[\vec{v_1}, \vec{v_2}]$, $\alpha\vec{v_1} \neq \vec{v_2}$;

(c) $[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}]$, tal que o produto misto $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) \neq 0$.

Solução: (a) Os vetores $\vec{v}$ gerados por $[\vec{v_1}]$ são dados por:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v_1}$$

Ou seja, o subespaço vetorial gerado pela combinação linear do vetor $\vec{v_1}$ é a reta que passa pela origem em que $\vec{v_1}$ é o vetor diretor.

(b) Os vetores $\vec{v}$ gerados por $[\vec{v_1}, \vec{v_2}]$ são dados por:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2}$$

Como $\alpha\vec{v_1} \neq \vec{v_2}$, então os vetores não são paralelos. Assim, o subespaço vetorial gerado pela combinação linear dos vetores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ forma um plano que passa pela origem, cuja equação paramétrica, com os parâmetros α_1 e α_2, é dada por:

$$P = (0, 0, 0) + \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2}$$

Se $\vec{v_1} \;||\; \vec{v_2}$, o subespaço gerado seria uma reta, assim como o primeiro caso.

(c) Os vetores $\vec{v}$ gerados por $[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}]$ são dados por:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \alpha_3\vec{v_3} = \begin{bmatrix} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Note que o determinante da matriz de coeficientes do sistema é diferente de zero, pois o produto misto dos três vetores é diferente de zero. Ou seja, os três vetores são não-coplanares e o sistema linear é possível e determinado. Portanto, o subespaço vetorial gerado pela combinação linear dos vetores gera o $\mathbb{R}^3$. □

Exemplo 10.11: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, calcule os subespaço gerado pelos vetores a seguir:

(a) $[(1, 0); (0, 1)]$;

(b) $[(2, 1); (4, 2)]$;

(c) $[(1, 1); (2, 1); (1, 2)]$;

Solução: (a) Os vetores $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ gerados por $[(1, 0); (0, 1)]$ são:

$$(x, y) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1)$$
$$(x, y) = (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2)$$
$$(x, y) = (\alpha_1, \alpha_2)$$
$$\begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = y \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

Portanto, todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ são combinação linear de $\{(1, 0); (0, 1)\}$ e $[(1, 0); (0, 1)] = \mathbb{R}^2$.

(b) Os vetores $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ gerados por $[(2, 1); (4, 2)]$ são:

$$(x, y) = \alpha_1(2, 1) + \alpha_2(4, 2)$$
$$(x, y) = (2\alpha_1 + 4\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2)$$
$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = x \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = \dfrac{x}{2} \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = y \end{cases}$$

O sistema linear resultante só é possível na reta $y = \dfrac{x}{2}$ e não é possível gerar todo o $\mathbb{R}^2$ com estes vetores. Nesse caso, os vetores apontam para a mesma direção, com $(2, 1) \,||\, (4, 2)$. De outra maneira:

$$\vec{v} = \alpha_1(2, 1) + \alpha_2(4, 2)$$
$$\vec{v} = \alpha_1(2, 1) + \alpha_2 \cdot 2(2, 1)$$
$$\vec{v} = (\alpha_1 + 2\alpha_2) \cdot (2, 1)$$

Portanto, o subespaço gerado $\{(2, 1); (4, 2)\}$ corresponde à reta cujo vetor diretor é $(2, 1)$.

(c) Os vetores $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ gerados por $[(1, 1); (2, 1); (1, 2)]$ são:

$$(x, y) = \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(2, 1) + \alpha_3(1, 2)$$
$$(x, y) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)$$
$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = y \end{cases}$$

Que é um sistema linear com duas equações, três incógnitas e infinitas soluções. Portanto, todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ são combinação linear de $\{(1, 1); (2, 1); (1, 2)\}$ e o subespaço gerado por $[(1, 1); (2, 1); (1, 2)] = \mathbb{R}^2$.

Aqui é importante perceber que dos três vetores, é possível obter um como combinação linear dos outros dois. Facilmente percebemos a seguinte relação, e as relações seguintes, por meio de manipulação algébrica:

$$3 \cdot (1, 1) = (2, 1) + (1, 2) \Longrightarrow \begin{cases} (1, 1) = \dfrac{1}{3}(2, 1) + \dfrac{1}{3}(1, 2) \\ (2, 1) = 3 \cdot (1, 1) - (1, 2) \\ (1, 2) = 3 \cdot (1, 1) - (2, 1) \end{cases}$$

O que isso significa? Que podemos retirar um dos vetores, que o subespaço gerado a partir dos outros dois será o mesmo! Neste caso:

$$[(1, 1); (2, 1)] = [(1, 1); (1, 2)] = [(2, 1); (1, 2)] = \mathbb{R}^2. \qquad \square$$

Exemplo 10.12: Seja o espaço vetorial $\mathcal{M}(2, 2)$, calcule os subespaço gerado pelos vetores: $\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$;

Solução: Um vetor qualquer de $\mathcal{M}(2,2)$ é uma matriz $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Analisando os vetores gerados por $\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Portanto, a combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ resultam em vetores do tipo $\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$, ou seja, quaisquer matrizes diagonais 2×2. $\square$

10.2 Independência Linear

Nos exercícios anteriores, acerca de combinação linear, subespaços gerados, soma/interseção de subespaços sempre era importante identificar vetores que estavam em direções iguais, vetores contidos dentro de subespaços maiores, ou mesmo vetores que eram combinações de outros vetores. Em alguns problemas era possível inclusive retirar/descartar vetores. Mas as perguntas que ficam são, quando posso descartar um vetor, qual vetor pode ser descartado, quando discutimos sobre subespaços gerados? Para isso, precisamos da definição seguinte:

Definição 10.5: Independência Linear

Seja um espaço vetorial V e um conjunto de vetores de V, $U = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$. Considere a combinação linear que resulta no vetor nulo:

$$\vec{0} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\vec{v_n}.$$

O conjunto de vetores U é **linearmente independente (LI)** se a única solução da combinação acima é a solução trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Do contrário, se existir uma solução com algum $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, então o conjunto de vetores é **linearmente dependente (LD)**.

Teorema 10.3: Independência Linear

Seja um espaço vetorial V e um conjunto de vetores de V, $U = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$. O conjunto de vetores é **linearmente independente (LI)** se nenhum dos vetores é combinação linear dos outros. Do contrário, se houver pelo menos um vetor que pode ser obtido como combinação dos outros, então o conjunto de vetores é **linearmente dependente (LD)**.

Exemplo 10.13: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, classifique os conjuntos a seguir, quanto a dependência linear.

(a) $\{(1,0);(0,1)\}$;

(b) $\{(2,1);(4,2)\}$;

(c) $\{(1,1);(2,1);(1,2)\}$;

(d) $\{(-1,1);(1,0)\}$;

Solução: (a) O conjunto de vetores $\{(1,0);(0,1)\}$, como visto no Exemplo 10.11, gera todo o espaço $\mathbb{R}^2$. E:

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \Longrightarrow (0,0) = 0(1,0) + 0(0,1).$$

Ou seja, a solução trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ é a única solução possível, e por isso o conjunto é LI.

(b) Os vetores $(2,1)$ e $(4,2)$, como visto no Exemplo 10.11, são paralelos, i.e., um é múltiplo do outro e assim um é combinação linear do outro: $(4,2) = 2\cdot(2,1)$. Portanto, o conjunto é LD. Note que pelo fato de um ser combinação linear do outro, podemos obter soluções não triviais para o vetor nulo como combinação linear dos vetores $(2,1)$ e $(4,2)$. Por exemplo:

$$2(2,1) - (4,2) = (0,0).$$

(c) Os vetores $(1,1)$, $(2,1)$ e $(1,2)$, como visto no Exemplo 10.11, geram o espaço $\mathbb{R}^2$, entretanto, qualquer um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros dois. Por isso, o conjunto de vetores $\{(1,1);(2,1);(1,2)\}$ é LD. Assim como no item anterior, podemos obter soluções não triviais para o vetor nulo:

$$3(1,1) - (2,1) - (1,2) = (0,0).$$

(d) No último caso, há dois vetores com direções diferentes $(-1,1)$ e $(1,0)$. Para verificar sua dependência linear:

$$\alpha_1(-1,1) + \alpha_2(1,0) = (0,0)$$
$$(-\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1) = (0,0)$$
$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Portanto, como a solução trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ é a única solução possível, o conjunto de vetores é LI. □

Exemplo 10.14: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, classifique os conjuntos a seguir, quanto a dependência linear.

(a) $\{(1,0,0);(0,0,1)\}$;

(b) $\{(2,1,0);(4,2,0);(0,0,1)\}$;

(c) $\{(1,1,1);(2,1,0);(1,2,-1)\}$;

(d) $\{(-1,1,0);(1,1,0);(1,0,0);(0,1,1)\}$;

Solução: (a) O conjunto de vetores $\{(1,0,0);(0,0,1)\}$, se combinados para gerar o vetor nulo:

$$\alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,0,1)=(0,0,0)$$
$$(\alpha_1,0,\alpha_2)=(0,0,0)$$
$$\begin{cases}\alpha_1=0\\ 0=0\\ \alpha_2=0\end{cases}\implies \alpha_1=\alpha_2=0.$$

Ou seja, a solução trivial $\alpha_1=\alpha_2=0$ é a única solução possível, e por isso o conjunto é LI.

(b) Os vetores são: $(2,1,0)$, $(4,2,0)$ e $(0,0,1)$. Perceba que $(2,1,0)$ e $(4,2,0)$ são paralelos, pois $(4,2,0)=2\cdot(2,1,0)$. Portanto, o conjunto é LD. De outra maneira, combinando os vetores em busca do vetor nulo:

$$\alpha_1(2,1,0)+\alpha_2(4,2,0)+\alpha_3(0,0,1)=(0,0,0)$$
$$(2\alpha_1+4\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$$
$$\begin{cases}2\alpha_1+4\alpha_2=0\\ \alpha_1+2\alpha_2=0\\ \alpha_3=0\end{cases}\implies\begin{cases}\alpha_1=-2\alpha_2\\ \alpha_3=0\end{cases}$$

Ou seja, qualquer solução não trivial em que $\alpha_1=-2\alpha_2$, $\alpha_2\neq 0$, gera o vetor nulo. Portanto, o conjunto é LD.

(c) O conjunto $\{(1,1,1);(2,1,0);(1,2,-1)\}$, se combinados para gerar o vetor nulo:

$$\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(2,1,0)+\alpha_3(1,2,-1)=(0,0,0)$$
$$(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3)=(0,0,0)$$
$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0\\ \alpha_1-\alpha_3=0\end{cases}\implies \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0.$$

Portanto, a solução trivial $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ é a única solução possível, e por isso o conjunto é LI.

(d) No último caso, temos o conjunto de vetores $\{(-1,1,0);(1,1,0);(1,0,0);(0,1,1)\}$. Perceba, rapidamente, que $(1,1,0)-2(1,0,0)=(-1,1,0)$ e portanto o conjunto é LD. Se analisarmos o vetor nulo como combinação do conjunto:

$$\alpha_1(-1,1,0)+\alpha_2(1,1,0)+\alpha_3(1,0,0)+\alpha_4(0,1,1)=(0,0,0)$$
$$(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4,\alpha_4)=(0,0,0)$$
$$\begin{cases}-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=0\\ \alpha_4=0\end{cases}\implies\begin{cases}\alpha_1=-\alpha_2\\ \alpha_3=-2\alpha_2\\ \alpha_4=0\end{cases}$$

Portanto, como são possíveis solução não-triviais, o conjunto de vetores é LD. □

Sempre que um conjunto de vetores U é LD, pode-se retirar/cortar os vetores que são combinações dos outros, até que o conjunto de vetores seja LI, mantendo o subespaço gerado $[U]$. A partir do momento que o conjunto é LI, retirar qualquer um dos vetores reduzirá o subespaço gerado. Para o conjunto $\mathbb{R}^n$, temos os seguintes resultados.

Teorema 10.4

Seja o conjunto U com n vetores no espaço $\mathbb{R}^m$. Se o vetor nulo $\vec{0}\in U$, então o conjunto U é linearmente dependente.

Teorema 10.5

Seja o conjunto U com n vetores no espaço $\mathbb{R}^m$, com $n > m$. Então o conjunto U é linearmente dependente.

Por exemplo, no Exercício 10.14, o conjunto $\{(-1,1,0);(1,1,0);(1,0,0);(0,1,1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ é LD, pois possui 4 vetores. Não podemos tirar o vetor $(0,1,1)$, pois ele independe dos outros vetores (ele é o único que possui coordenada z e $\alpha_4 = 0$). Podemos cortar o vetor $(1,1,0)$, pois há dependência de outros vetores nele. Assim, o conjunto restante é $\{(-1,1,0);(1,0,0);(0,1,1)\}$. Se verificá-lo, o conjunto é LI e gera o espaço $\mathbb{R}^3$. Um conjunto linearmente independente e que gera o próprio espaço vetorial será o tema da próxima seção.

10.3 Base de um Espaço Vetorial

Como visto nas seções anteriores, conjuntos de vetores de um espaço geram subespaços vetoriais. Mas quantos e que tipos de vetores seriam necessários para se gerar o próprio espaço vetorial? A isso, definimos o conceito de base de um espaço vetorial:

Definição 10.6: Base de um Espaço Vetorial

Seja um espaço vetorial V e um conjunto $\beta = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ de vetores de V. O conjunto de vetores β é **base do espaço vetorial** V se for linearmente independente (LI) e o subespaço gerado pelo conjunto for o próprio espaço vetorial V, $[\beta] = V$.

As bases mais conhecidas do $\mathbb{R}^n$ são as denominadas **bases canônicas**. Para o $\mathbb{R}^2$ a base canônica é:

$$\beta = \left\{\vec{i}, \vec{j}\right\} = \{(1,0),(0,1)\}.$$

Para o $\mathbb{R}^3$ a base canônica é:

$$\beta = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Analogamente, no espaço $\mathbb{R}^n$, a base canônica utilizada é $\beta = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$:

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \dots, \quad \vec{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Perceba que o vetor combinação linear $\vec{v}$, na base canônica é dado por:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \dots + \alpha_n\vec{e_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema resultante é possível e determinado, pois a matriz de coeficientes do sistema é a matriz identidade. E portanto, qualquer vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ pode ser escrito como a combinação:

$$\vec{v} = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + \dots + v_n\vec{e_n}.$$

Exemplo 10.15: Determine se os conjuntos abaixo são bases de $\mathbb{R}^2$.

(a) $\beta_a = \{(1,0);(0,1)\}$;

(b) $\beta_b = \{(2,1);(4,2)\}$;

(c) $\beta_c = \{(1,1);(2,1);(1,2)\}$;

(d) $\beta_d = \{(-1,1);(1,0)\}$;

Solução: Como vimos nos Exemplos 10.11 e 10.13, o conjunto de vetores $\{(1,0);(0,1)\}$ gera todo o espaço $\mathbb{R}^2$ e é LI, portanto β_a é base do $\mathbb{R}^2$. Esta é a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

Já no item (b), conforme os mesmos Exemplos 10.11 e 10.13, o conjunto β_b gera apenas a reta com vetor diretor $(2,1)$ e é LD. Portanto β_b não é base do $\mathbb{R}^2$.

Os vetores $(1,1)$, $(2,1)$ e $(1,2)$, como visto nos Exemplos 10.11 e 10.13, geram o espaço $\mathbb{R}^2$, entretanto, qualquer um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros dois. Por isso, o conjunto de vetores $\{(1,1);(2,1);(1,2)\}$ é LD e β_c não é base do $\mathbb{R}^2$.

No último caso, temos dois vetores, com direções diferentes $(-1,1)$ e $(1,0)$, que conforme o Exemplo 10.13 são LI. Para verificar que eles geram todo o espaço $\mathbb{R}^2$:

$$\alpha_1(-1,1) + \alpha_2(1,0) = (x,y)$$
$$(-\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1) = (x,y)$$
$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = x \\ \alpha_1 = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = y \\ \alpha_2 = x + y \end{cases}$$

Portanto, $(x,y) = y(-1,1) + (x+y)(1,0)$ e o conjunto de vetores $\beta_d = \{(-1,1);(1,0)\}$ gera todo o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Como atende aos requisitos, β_d é base de $\mathbb{R}^2$. $\square$

Exemplo 10.16: Quais conjuntos a seguir, são base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$?

(a) $\beta_a = \{(1,0,0);(0,0,1)\}$;

(b) $\beta_b = \{(2,1,0);(4,2,0);(0,0,1)\}$;

(c) $\beta_c = \{(1,1,1);(2,1,0);(1,2,-1)\}$;

(d) $\beta_d = \{(-1,1,0);(1,1,0);(1,0,0);(0,1,1)\}$;

Solução: De acordo com o Exemplo 10.14, os conjuntos β_b e β_d são LD e β_a e β_c são LI. Vamos verificar se eles são capazes de gerar o espaço $\mathbb{R}^3$:

O conjunto de vetores $\{(1,0,0);(0,0,1)\}$, se combinados para gerar o vetor (x,y,z) qualquer do $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,0,1) = (x,y,z)$$
$$(\alpha_1, 0, \alpha_2) = (x,y,z)$$
$$\begin{cases} \alpha_1 = x \\ 0 = y \\ \alpha_2 = z \end{cases}.$$

Perceba que uma das equações foi a equação do plano $y = 0$. Neste caso, é impossível gerar todos os vetores (x,y,z), pois não há solução se $y \neq 0$. Assim, apenas os dois vetores não são suficientes para gerar o espaço $\mathbb{R}^3$.

No item (b), os vetores $(2,1,0)$, $(4,2,0)$ e $(0,0,1)$ são LD. Podemos retirar o vetor $(4,2,0)$, que é paralelo a $(2,1,0)$. Da mesma forma que o exemplo anterior, a partir de dois vetores não é possível gerar o espaço $\mathbb{R}^3$.

O conjunto $\{(1,1,1);(2,1,0);(1,2,-1)\}$ é LI. Se combinados para gerar um vetor qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(2,1,0)+\alpha_3(1,2,-1) = (x,y,z)$$
$$(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1-\alpha_3) = (x,y,z)$$
$$\begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3 = x \\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 = y \\ \alpha_1-\alpha_3 = z \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{-x+2y+3z}{4} \\ \alpha_2 = \dfrac{3x-2y-z}{4} \\ \alpha_3 = \dfrac{-x+2y-z}{4} \end{cases}$$

Portanto, qualquer vetor (x,y,z), pode ser escrito como combinação linear de β_c. Ou seja, β_c gera o espaço $\mathbb{R}^3$, é LI e portanto β_c é base do $\mathbb{R}^3$.

No último caso, o conjunto de vetores $\beta_d = \{(-1,1,0);(1,1,0);(1,0,0);(0,1,1)\}$ é LD. Mas β_d gera o espaço $\mathbb{R}^3$, pois o sistema resultante possui soluções.

$$\alpha_1(-1,1,0)+\alpha_2(1,1,0)+\alpha_3(1,0,0)+\alpha_4(0,1,1) = (x,y,z)$$
$$(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_4, \alpha_4) = (x,y,z)$$
$$\begin{cases} -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = x \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_4 = y \\ \alpha_4 = z \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2+y-z \\ \alpha_3 = -2\alpha_2+x+y-z \\ \alpha_4 = z \end{cases}$$

Assim, β_d não é base de $\mathbb{R}^3$, pois é LD.

Se cortássemos o vetor $(1,1,0)$ do conjunto β_d, os vetores restantes são LI e continuam gerando $\mathbb{R}^3$. Portanto $\beta_d - \{(1,1,0)\}$ é base do $\mathbb{R}^3$. □

Perceba que nos exemplos anteriores, as bases geradas em um mesmo espaço vetorial sempre tinham a mesma quantidade de vetores. Isto terá um significado mais adiante. Alguns teoremas a seguir se destacam quando estamos discutindo acerca de bases de espaços vetoriais. Além disso, o conceito de dimensão é proposto em seguida.

Teorema 10.6

Dado um espaço vetorial V e o conjunto de vetores $U = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ de V, tal que $[U] = V$. Então:

- É possível extrair uma base de V dos vetores de U;
- Qualquer conjunto com mais de n vetores é linearmente dependente;
- Qualquer base de V possui o mesmo número de elementos.

Definição 10.7: Dimensão de um Espaço Vetorial

O número de elementos de uma base do espaço vetorial V é denominado de **dimensão** de V ou $\dim V$. Quando V possui base com um número finito de vetores, então V é um espaço vetorial de dimensão finita. Do contrário, V é um espaço vetorial de dimensão infinita.

Por exemplo, o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ possui dimensão finita n. O espaço das matrizes $m \times n$, $\mathcal{M}(m, n)$ possui dimensão finita $m \cdot n$. O espaço dos polinômios de ordem n ou menor, $\mathcal{P}_n$ possui dimensão finita $n + 1$. O espaço das funções $\mathcal{F}$, apresentado no Exemplo 10.4 possui dimensão infinita. O espaço nulo possui dimensão zero.

Teorema 10.7

Dado um espaço vetorial V de dimensão finita e um conjunto de vetores $U = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ de V, linearmente independentes (LI). Então:

- Se $\dim V < n$, é possível acrescentar $n - \dim V$ vetores ao conjunto U para obter uma base de V;
- Se $\dim V = n$, então U forma uma base de V.

Como consequência dos teoremas e definições acima, podemos chegar nas seguintes maneiras de se formar uma base de V, a partir de um conjunto de vetores U, sob alguma das possibilidades abaixo:

	LI	LD
$\|U\| < dim(V)$	Acrescentar vetores	Retirar vetores supérfluos e acrescentar outros
$\|U\| = dim(V)$	Já é base!	
$\|U\| > dim(V)$	Impossível!	

Tabela 10.1: Relações entre $dim(V)$, quantidade de vetores do conjunto U, $|U|$ e a independência linear com o objetivo de formar uma base de V.

Exemplo 10.17: Quais conjuntos a seguir, são base do espaço vetorial V?

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1, 0); (0, 1)\}$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{(1, 0, 0); (0, 0, 1)\}$;

(c) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1, 1); (2, 1); (1, 2)\}$;

(d) $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{(1, 0, 0); (0, 0, 1); (-1, 0, 1)\}$;

(e) $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{(1, 0, 0); (0, 0, 1); (-1, 0, 1); (1, 0, 2)\}$;

(f) $V = \mathcal{M}_{2,2}$, $\beta = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$;

(g) $V = \mathcal{P}_3(x)$, $\beta = \left\{1; x; x^2; x^3\right\}$;

(h) $V = \mathcal{P}_2(x)$, $\beta = \left\{1 + x; 3x^2; 1 + x + x^2\right\}$;

Solução: (a) Para $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1, 0); (0, 1)\}$, vimos anteriormente que β é LI. Como $dim(V) = 2 = |\beta|$, então β é base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Para $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1, 0, 0); (0, 0, 1)\}$, perceba que β é LI. Mas $dim(V) = 3 > 2 = |\beta|$, então β não é base de $\mathbb{R}^3$. Para que β seja uma base, precisamos acrescentar vetores a β, mantendo a independência linear do conjunto. Podemos acrescentar por exemplo o vetor $(0, 1, 0)$, já que faltam vetores na direção y.

(c) Para $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1, 1); (2, 1); (1, 2)\}$, temos β LD e $dim(V) = 2 < 3 = |\beta|$

e assim β não é base de $\mathbb{R}^2$. Se tirarmos o vetor $(1,1)$, por exemplo, os vetores restantes formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

(d) Para $V=\mathbb{R}^3$ e $\beta=\{(1,0,0);(0,0,1);(-1,0,1)\}$, perceba que $-(1,0,0)+(0,0,1)=(-1,0,1)$ e β é LD e $dim(V)=3=|\beta|$. Porém β não é base de $\mathbb{R}^3$. Se tirássemos o vetor $(-1,0,1)$, chegaríamos num conjunto com 2 elementos e precisaríamos acrescentar mais um, por exemplo $(0,1,0)$, para que o novo conjunto seja base do $\mathbb{R}^3$.

(e) Para $V=\mathbb{R}^3$ e $\beta=\{(1,0,0);(0,0,1);(-1,0,1);(1,0,2)\}$, perceba que $-(1,0,0)+(0,0,1)=(-1,0,1)$ e $(1,0,0)+2(0,0,1)=(1,0,2)$. Assim β é LD e $dim(V)=3<4=|\beta|$. β não é base de $\mathbb{R}^3$. Se tirássemos os vetores $(-1,0,1)$ e $(1,0,2)$, chegaríamos num conjunto com 2 elementos e precisaríamos acrescentar mais um, por exemplo $(0,1,0)$, para que o novo conjunto seja base do $\mathbb{R}^3$.

(f) Para $V=\mathcal{M}_{2,2}$ e

$$\beta=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\},$$

perceba que β é LI e $dim(V)=4=|\beta|$, portanto β é base de $\mathcal{M}_{2,2}$.

(g) Para $V=\mathcal{P}_3(x)$ e $\beta=\left\{1;x;x^2;x^3\right\}$, perceba que β é LI e $dim(V)=4=|\beta|$, portanto β é base de $\mathcal{P}_3(x)$.

(h) Para $V=\mathcal{P}_2(x)$ e $\beta=\left\{1+x;3x^2;1+x+x^2\right\}$, note que $(1+x)+\dfrac{1}{3}(3x^2)=(1+x+x^2)$ e assim β é LD. $dim(V)=3=|\beta|$, mas β não é base de $\mathcal{P}_3(x)$. Para que seja base, pode-se retirar o vetor $3x^2$ e substituí-lo por 1, por exemplo. □

Mais alguns teoremas relacionados aos subespaços de V e à unicidade da combinação linear. E por fim a definição de coordenadas.

Teorema 10.8

Sejam U e W são subespaços de V cuja dimensão é finita. Então:

- $dim(U)\leq dim(V)$, $dim(W)\leq dim(V)$;
- $dim(U+W)=dim(U)+dim(W)-dim(U\cap W)$ (Princípio da inclusão-exclusão de conjuntos).

Teorema 10.9

Seja o espaço vetorial V e a base $\beta=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots,\vec{v_n}\}$ de V. Todo vetor $\vec{v}$ é escrito de maneira única como combinação linear de $\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots,\vec{v_n}$.

Definição 10.8: Coordenadas

Seja o espaço vetorial V e a base $\beta=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots,\vec{v_n}\}$ de V. Como:

$$\vec{v}=\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+\ldots+\alpha_n\vec{v_n},$$

podemos chamar $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ de coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base ordenada β. Ou seja: $[\vec{v}]_\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)_\beta$ Observe, que nesse caso, a ordem dos vetores é muito importante para as coordenadas.

Os vetores do $\mathbb{R}^n$ são tradicionalmente descritos em coordenadas da base canônica. Por exemplo, o vetor $(1, 0, -1)$ do $\mathbb{R}^3$, possui coordenadas 1, 0 e -1, nesta ordem, referentes aos vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Ou seja:

$$(1, 0, -1) = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} - 1 \cdot \vec{k}.$$

Pela definição, dada uma base $\beta = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ de V, quando buscamos as coordenadas $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de um vetor $\vec{v} \in V$, estamos a resolver o seguinte sistema:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\vec{v_n}$$

Lembre-se que os elementos/coordenadas do vetor $\vec{v}$ estão na base canônica, assim como os vetores da base β. Considerando v_{ij} como o i-ésimo elemento do vetor $\vec{v_j}$.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{bmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Portanto o problema de encontrar as coordenadas dada uma base específica é equivalente ao problema de encontrar soluções em um sistema linear.

Exemplo 10.18: Quais as coordenadas dos vetores a seguir, dadas as bases do espaço vetorial V?

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1, 0); (0, 1)\}$ e $\vec{v} = (1, 2)$;

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(0, 1); (1, 0)\}$ e $\vec{v} = (1, 2)$;

(c) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1, 1); (1, -1)\}$ e $\vec{v} = (1, 2)$;

(d) $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ e $\vec{v} = (1, 2, 3)$;

(e) $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{(1, 0, 0); (1, 0, 1); (0, 1, 1)\}$ e $\vec{v} = (1, 2, 3)$;

Solução: (a) Temos que achar as coordenadas do vetor $(1, 2)$, para a base $\beta = \{(1, 0); (0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^2$. Assim:

$$(1, 2) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1)$$
$$(1, 2) = (\alpha_1, \alpha_2)$$
$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases} \implies (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1)$$

E portanto, as coordenadas de $(1, 2)$ na base β é dada por: $(1, 2)_\beta$. Perceba que as coordenadas são as mesmas do vetor $(1, 2)$. Isso se deve pelo fato da base ser a base canônica, que é a mais natural e mais utilizada.

(b) Temos que achar as coordenadas do vetor $(1, 2)$, para a base $\beta = \{(0, 1); (1, 0)\}$ do $\mathbb{R}^2$. Assim:

$$(1, 2) = \alpha_1(0, 1) + \alpha_2(1, 0)$$
$$(1, 2) = (\alpha_2, \alpha_1)$$
$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \implies (1, 2) = 2(0, 1) + 1(1, 0)$$

E portanto, as coordenadas de $(1,2)$ na base β é dada por: $(2,1)_\beta$. Observe que a troca de posição dos vetores na base, fez com que as coordenadas fossem diferentes.

(c) Temos que achar as coordenadas do vetor $(1,2)$, para a base $\beta = \{(1,1);(1,-1)\}$ do $\mathbb{R}^2$. Assim:

$$(1,2) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1)$$
$$(1,2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)$$
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow (1,2) = \frac{3}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1)$$

E portanto, as coordenadas de $(1,2)$ na base β é dada por: $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})_\beta$.

(d) Temos que achar as coordenadas do vetor $(1,2,3)$, para a base canônica $\beta = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$. Assim:

$$(1,2,3) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1)$$
$$(1,2,3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$
$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases} \Longrightarrow (1,2,3) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1).$$

E portanto, as coordenadas de $(1,2,3)$ na base β é dada por: $(1,2,3)_\beta$.

(e) Temos que achar as coordenadas do vetor $(1,2,3)$, para a base $\beta = \{(1,0,0);(1,0,1);(0,1,1)\}$ do $\mathbb{R}^3$. Assim:

$$(1,2,3) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(0,1,1)$$
$$(1,2,3) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3)$$
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \end{cases} \Longrightarrow (1,2,3) = 0(1,0,0) + 1(1,0,1) + 2(0,1,1).$$

E portanto, as coordenadas de $(1,2,3)$ na base β é dada por: $(0,1,2)_\beta$. $\square$

10.4 Mudança de Base

Nesta seção vamos avaliar o seguinte problema: Dadas duas bases $\beta_1 = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ e $\beta_2 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ do mesmo espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito em coordenadas $[\vec{v}]_{\beta_1} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e coordenadas $[\vec{v}]_{\beta_2} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. A partir das coordenadas $[\vec{v}]_{\beta_1}$, como obter as coordenadas $[\vec{v}]_{\beta_2}$? Ou seja, como se fazer a mudança de base, da base β_1 para a base β_2?

Primeiro, vamos abusar um pouco da nomenclatura das bases ordenadas $\beta_1 = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ e $\beta_2 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ e também utilizá-la para denotar as matrizes cujas colunas são os vetores da base. Assim, temos que as coordenadas de $\vec{v}$, a partir das definições:

$$[\vec{v}]_{\beta_1} \iff \vec{v} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_n\vec{u}_n = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_n \end{bmatrix} \cdot [\vec{v}]_{\beta_1} = \beta_1 \cdot [\vec{v}]_{\beta_1}$$
$$[\vec{v}]_{\beta_2} \iff \vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \ldots + b_n\vec{v}_n = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \cdot [\vec{v}]_{\beta_2} = \beta_2 \cdot [\vec{v}]_{\beta_2}$$

Portanto, podemos concluir que a seguinte relação é válida:

$$\beta_1 \cdot [\vec{v}]_{\beta_1} = \beta_2 \cdot [\vec{v}]_{\beta_2}$$

Vale ressaltar que por β_1 e β_2 serem bases de $\mathbb{R}^n$, então as matrizes β_1 e β_2 são inversíveis. Assim, para obter $[\vec{v}]_{\beta_2}$ em função de $[\vec{v}]_{\beta_1}$:

$$[\vec{v}]_{\beta_2} = \beta_2^{-1} \cdot \beta_1 \cdot [\vec{v}]_{\beta_1} = [I]_{\beta_1\beta_2} \cdot [\vec{v}]_{\beta_1}$$

E do contrário, para obter $[\vec{v}]_{\beta_1}$ em função de $[\vec{v}]_{\beta_2}$:

$$[\vec{v}]_{\beta_1} = \beta_1^{-1} \cdot \beta_2 \cdot [\vec{v}]_{\beta_2} = [I]_{\beta_2\beta_1} \cdot [\vec{v}]_{\beta_2}$$

A matriz $[I]_{\beta_1\beta_2} = \beta_2^{-1} \cdot \beta_1$ é **a matriz mudança da base** β_1 **para a base** β_2. Já a matriz $[I]_{\beta_2\beta_1} = \beta_1^{-1} \cdot \beta_2$ é **a matriz mudança da base** β_2 **para a base** β_1. Assim:

Definição 10.9: Mudança de Base

Dadas duas bases β_1 e β_2 do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, então a relação entre as coordenadas $[\vec{v}]_{\beta_1}$ e $[\vec{v}]_{\beta_2}$ é dada por:

$$\beta_1 \cdot [\vec{v}]_{\beta_1} = \beta_2 \cdot [\vec{v}]_{\beta_2}$$

Teorema 10.10

Dadas duas bases β_1 e β_2 do mesmo espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Então as matrizes mudança de base $[I]_{\beta_1\beta_2}$ e $[I]_{\beta_2\beta_1}$ são matrizes inversas, i.e.,

$$[I]_{\beta_1\beta_2}^{-1} = [I]_{\beta_2\beta_1}$$

Teorema 10.11

Dada uma base $\beta_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ e a base canônica β_* de $\mathbb{R}^n$. A matriz de mudança da base β_1 para a base canônica $[I]_{\beta_1\beta_*} = \beta_1$.

Exemplo 10.19: Considere a base $\beta_1 = \{(1,0);(0,1)\}$ (base canônica do $\mathbb{R}^2$) e a base $\beta_2 = \{(1,1);(-1,1)\}$ do $\mathbb{R}^2$. Determine as matrizes mudança de base $[I]_{\beta_1\beta_2}$ e $[I]_{\beta_2\beta_1}$. Use a mudança de base para descrever $(1,2)_{\beta_1}$ na base β_2. Use a mudança de base para descrever $(1,2)_{\beta_2}$ na base β_1.

Solução: Pela relação de mudança de base:

$$\beta_1 \cdot [\vec{v}]_{\beta_1} = \beta_2 \cdot [\vec{v}]_{\beta_2}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [\vec{v}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot [\vec{v}]_{\beta_2}$$

Portanto, podemos obter $[I]_{\beta_2\beta_1}$:

$$[\vec{v}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot [\vec{v}]_{\beta_2} \quad \Longrightarrow \quad [I]_{\beta_2\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Do contrário, $[I]_{\beta_1\beta_2}$:

$$[\vec{v}]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot [\vec{v}]_{\beta_1} \quad \Longrightarrow \quad [I]_{\beta_1\beta_2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Por fim, dado $(1,2)_{\beta_1}$, na base β_2:

$$[\vec{v}]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}_{\beta_2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\beta_2}$$

Para $(1,2)_{\beta_2}$, na base β_1:

$$[\vec{v}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\beta_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{\beta_1} = (-1,3)_{\beta_1}$$

□

Exemplo 10.20: Considere as bases do $\mathbb{R}^2$: $\beta_1 = \{(2,3);(-1,-1)\}$ e a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Determine as matrizes mudança de base $[I]_{\beta_1\beta_*}$ e $[I]_{\beta_*\beta_1}$. Determine a coordenada dos vetores $(2,1)$, $(-1,2)$ e $(0,0)$ na base β_1.

Solução: Usando os teoremas anteriores, a matriz mudança da base β_1 para a base canônica é:

$$[I]_{\beta_1\beta_*} = \beta_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

A mudança de base inversa é:

$$[I]_{\beta_*\beta_1} = [I]^{-1}_{\beta_1\beta_*} = \frac{1}{det([I]_{\beta_1\beta_*})} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Quanto aos vetores $(2,1)$, $(-1,2)$ e $(0,0)$ (na base canônica), para a base β_1:

$$[\vec{v}]_{\beta_1} = [I]_{\beta_*\beta_1} \cdot \vec{v}$$

$$[\vec{v}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}_{\beta_1} = (-1,-4)_{\beta_1}$$

$$[\vec{v}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}_{\beta_1} = (3,7)_{\beta_1}$$

$$[\vec{v}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta_1} = (0,0)_{\beta_1}$$

□

10.5 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. O vetor $\vec{u} = (1, 2)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (1, 0)$ e $\vec{v_2} = (1, -2)$?

2. O vetor $\vec{u} = (0, 2)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (-2, 4)$ e $\vec{v_2} = (1, -2)$?

3. O vetor $\vec{u} = (1, 2)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (3, 6)$?

4. O vetor $\vec{u} = (1, -1, 2)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (1, -2, 4)$ e $\vec{v_2} = (2, 1, -2)$?

5. O vetor $\vec{u} = (5, 0, 0)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (1, -2, 4)$ e $\vec{v_2} = (2, 1, -2)$?

6. O vetor $\vec{u} = (-2, -1, 2)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (1, -2, 4)$ e $\vec{v_2} = (2, 1, -2)$?

7. O vetor $\vec{u} = (-2, -1, 2)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (2, 1, 4)$, $\vec{v_2} = (1, -1, 3)$ e $\vec{v_3} = (3, 2, 2)$?

8. Verifique se os vetores a seguir geram o $\mathbb{R}^3$:

   (a) $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 2, 0)$, $w = (3, 0, 0)$;
   (b) $u = (1, 1, 2)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (2, 1, 3)$;
   (c) $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 3, 0)$, $w = (-2, 0, 0)$;

9. Verifique quais dos seguintes conjuntos são LI ou LD.

   (a) $\vec{v_1} = (1, 2)$ e $\vec{v_2} = (-3, 6)$, $V = \mathbb{R}^2$;
   (b) $\vec{v_1} = (2, -1)$ e $\vec{v_2} = (1, 1)$, $V = \mathbb{R}^2$;
   (c) $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, 3, 5)$, $w = (3, 2, 5)$, $V = \mathbb{R}^3$;
   (d) $u = (7, 2, 1)$, $v = (0, 1, 4)$, $w = (3, 5, 6)$, $t = (4, 2, 3)$, $V = \mathbb{R}^3$;

10. Quais dos seguintes conjuntos são base do $\mathbb{R}^2$?

    (a) $\vec{v_1} = (2, 1)$ e $\vec{v_2} = (3, 0)$;
    (b) $\vec{v_1} = (2, 3)$ e $\vec{v_2} = (-2, -3)$;
    (c) $\vec{v_1} = (0, 0)$, $\vec{v_2} = (1, 3)$ e $\vec{v_3} = (1, -1)$;

11. Quais dos seguintes conjuntos são base do $\mathbb{R}^3$?

    (a) $\vec{v_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{v_2} = (2, 2, 0)$ e $\vec{v_3} = (3, 3, 1)$;
    (b) $\vec{v_1} = (3, 1, -4)$, $\vec{v_2} = (2, 5, 6)$ e $\vec{v_3} = (1, 4, 8)$;

(c) $\vec{v_1} = (2, 3, -1)$, $\vec{v_2} = (4, 4, 1)$ e $\vec{v_3} = (0, 7, -1)$;

(d) $\vec{v_1} = (1, 6, 4)$, $\vec{v_2} = (2, 4, -1)$ e $\vec{v_3} = (-1, 2, 5)$;

12. Na base $\beta_1 = \{(1, 2), (2, 3)\}$ do $\mathbb{R}^2$, o vetor $\vec{v}$ é dado pelas coordenadas $(2, 4)_{\beta_1}$. Sejam ainda as bases $\beta_2 = \{(1, 3), (1, 4)\}$ e a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Determine:
    (a) Qual a matriz de mudança da base β_1 para a base β_2?
    (b) Qual a matriz de mudança da base β_2 para a base β_1?
    (c) Qual a matriz de mudança da base canônica para a base β_1?
    (d) Qual a matriz de mudança da base canônica para a base β_2?
    (e) Calcule as coordenadas de $\vec{v}$ na base β_2.
    (f) Calcule as coordenadas de $\vec{v}$ na base canônica do $\mathbb{R}^2$.

13. Considere o vetor $\vec{v} = (2, 3, 4)$ na base canônica do $\mathbb{R}^3$, e a base $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Determine:
    (a) Qual a matriz de mudança da base canônica para a base β?
    (b) Qual a matriz de mudança da base β para a base canônica?
    (c) Calcule as coordenadas de $\vec{v}$ na base β.

14. Considere o vetor $\vec{v} = (2, 3, 4)_{beta\alpha_1}$ na base $\beta_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ do $\mathbb{R}^3$, a base $\beta_2 = \{(1, 2, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 2)\}$ e a base canônica do $\mathbb{R}^3$.
    (a) Qual a matriz de mudança da base β_1 para a base β_2?
    (b) Qual a matriz de mudança da base β_2 para a base β_1?
    (c) Qual a matriz de mudança da base canônica para a base β_1?
    (d) Qual a matriz de mudança da base canônica para a base β_2?
    (e) Calcule as coordenadas de $\vec{v}$ na base β_2.
    (f) Calcule as coordenadas de $\vec{v}$ na base canônica do $\mathbb{R}^3$.

10.6 Exercícios Computacionais

1. Escreva uma função que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e um conjunto de vetores S, verifica se o conjunto S é linearmente independente.
2. Escreva uma função que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e um conjunto de vetores S, retira vetores do conjunto S até que o conjunto S seja linearmente independente, mantendo o subespaço gerado $[S]$ original.
3. Escreva uma função que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e um conjunto de vetores S, determina a dimensão do espaço gerado por esses vetores.
4. Escreva uma função que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e um conjunto de vetores S, verifica se o conjunto S é base do $\mathbb{R}^n$.
5. Escreva uma função que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e um conjunto de vetores S, gera uma base do $\mathbb{R}^n$, aleatoriamente.

6. Escreva uma função que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e uma base β do $\mathbb{R}^n$, determina a matriz mudança de base da base canônica para a base β, e vice-versa.

7. Escreva uma função que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, uma base β do $\mathbb{R}^n$ e um vetor $\vec{v}$ com coordenadas canônicas, determina as coordenadas do vetor na base β.

8. Escreva uma função que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e dois conjuntos de vetores β_1 e β_2, verifica se os conjuntos são bases do $\mathbb{R}^n$ e determina a matriz mudança de base de β_1 para β_2, e vice-versa.

9. Gere um conjunto S com 1, 2 ou 3 vetores do espaço $\mathbb{R}^2$ (tamanho do conjunto aleatório). Cada vetor deve ser composto de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Verifique se o conjunto é linearmente independente. Calcule a dimensão do subespaço gerado por S. Caso S não seja L.I., retire vetores do conjunto S até que o conjunto seja linearmente independente. Tente plotar os vetores. Faça este processo 5 vezes.

10. Gere um conjunto S com 2, 3 ou 4 vetores do espaço $\mathbb{R}^3$ (tamanho do conjunto aleatório). Cada vetor deve ser composto de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Verifique se o conjunto é linearmente independente. Calcule a dimensão do subespaço gerado por S. Caso S não seja L.I., retire vetores do conjunto S até que o conjunto seja linearmente independente. Faça este processo 5 vezes.

11. Gere um conjunto S com 3, 5 ou 7 vetores do espaço $\mathbb{R}^5$ (tamanho do conjunto aleatório). Cada vetor deve ser composto de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Verifique se o conjunto é linearmente independente. Calcule a dimensão do subespaço gerado por S. Caso S não seja L.I., retire vetores do conjunto S até que o conjunto seja linearmente independente. Faça este processo 5 vezes.

12. Gere um conjunto com 2 vetores de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$, do espaço $\mathbb{R}^2$. Verifique se o conjunto é base. Faça este processo 5 vezes.

13. Gere um conjunto com 3 vetores de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$, do espaço $\mathbb{R}^3$. Verifique se o conjunto é base. Faça este processo 5 vezes.

14. Gere um conjunto com 5 vetores de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$, do espaço $\mathbb{R}^5$. Verifique se o conjunto é base. Faça este processo 5 vezes.

15. Construa uma base do espaço $\mathbb{R}^2$ a partir de vetores de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Repita este processo 5 vezes.

16. Construa uma base do espaço $\mathbb{R}^3$ a partir de vetores de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Repita este processo 5 vezes.

17. Construa uma base do espaço $\mathbb{R}^5$ a partir de vetores de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Repita este processo 5 vezes.

18. Gere um conjunto com 1 ou 2 vetores de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$, no espaço $\mathbb{R}^3$. Complete o conjunto de vetores para formar uma base do espaço $\mathbb{R}^3$, usando vetores de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Repita este processo 5 vezes.

19. Gere um conjunto com 2 ou 3 vetores de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$, no espaço $\mathbb{R}^5$. Complete o conjunto de vetores para formar uma base do espaço $\mathbb{R}^5$, usando vetores de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Repita este processo 5 vezes.

20. Construa uma base do $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz mudança de base da base canônica para a base construída, e vice-versa. Repita este processo 5 vezes.
21. Construa uma base do $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz mudança de base da base canônica para a base construída, e vice-versa. Repita este processo 5 vezes.
22. Construa uma base do $\mathbb{R}^5$. Determine a matriz mudança de base da base canônica para a base construída, e vice-versa. Repita este processo 5 vezes.
23. Construa duas bases do $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz mudança de base de uma base para a outra, e vice-versa. Repita este processo 5 vezes.
24. Construa duas bases do $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz mudança de base de uma base para a outra, e vice-versa. Repita este processo 5 vezes.
25. Construa duas bases do $\mathbb{R}^5$. Determine a matriz mudança de base de uma base para a outra, e vice-versa. Repita este processo 5 vezes.

Capítulo 11

Transformações Lineares

No capítulo anterior, trabalhamos com espaços vetoriais, principalmente os espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Dentre espaços vetoriais é possível estabelecer relações entre elementos/vetores destes espaços. Um dos principais tipos de relação entre espaços vetoriais é a Transformação Linear.

Definição 11.1: Transformação Linear

Uma **transformação linear (aplicação linear)** é uma função T do espaço vetorial V no espaço vetorial W. Esta função $T : V \to W$ deve satisfazer: para $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$;

(ii) $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$;

A propriedade (i) implica que a transformação T da soma de vetores é a soma das transformações de cada vetor. E a propriedade (ii) implica que a transformação T do produto de um vetor e um escalar é o produto do escalar e a transformação do vetor. Em conjunto, (i) e (ii) implicam que a transformação de uma combinação linear é a combinação linear das transformações:

Teorema 11.1

Uma função $T : V \to W$ é transformação linear se, e somente se, dados $\vec{u}, \vec{v} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$T(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha T(\vec{u}) + \beta T(\vec{v}).$$

Consequentemente, para n vetores $\vec{u}_i \in V$ e n escalares $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$:

$$T(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{u}_n) = \alpha_1 T(\vec{u}_1) + \alpha_2 T(\vec{u}_2) + \ldots + \alpha_n T(\vec{u}_n)$$

Exemplo 11.1 (Transformações Escalares): Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $f(\vec{v}) = k \cdot \vec{v}$, em que $k \in \mathbb{R}$. A aplicação f é transformação linear?

Solução: Sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vejamos a aplicação f com relação à combinação linear $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$:

$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = k \cdot (\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v})$$
$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = k \cdot (\alpha \cdot \vec{u}) + k \cdot (\beta \cdot \vec{v})$$
$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot (k \cdot \vec{u}) + \beta \cdot (k \cdot \vec{v})$$
$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot f(\vec{u}) + \beta \cdot f(\vec{v})$$

Como a função da combinação linear é a combinação linear das funções, então a aplicação f é transformação linear. □

Exemplo 11.2 (Transformações Matriciais): Seja a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que $f(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$, em que A é uma matriz com m linhas e n colunas. A aplicação f é transformação linear?

Solução: Sejam os vetores coluna $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vejamos a aplicação f com relação à combinação linear $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$:

$$
\begin{aligned}
f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) &= A \cdot (\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) \\
f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) &= A \cdot (\alpha \cdot \vec{u}) + A \cdot (\beta \cdot \vec{v}) \\
f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) &= \alpha \cdot (A \cdot \vec{u}) + \beta \cdot (A \cdot \vec{v}) \\
f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) &= \alpha \cdot f(\vec{u}) + \beta \cdot f(\vec{v})
\end{aligned}
$$

Como a função da combinação linear é a combinação linear das funções, então a aplicação f é transformação linear. □

Exemplo 11.3: Seja o espaço vetorial das matrizes $\mathcal{M}(2,2)$, cujos elementos são do tipo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e a função determinante $\det : \mathcal{M}(2,2) \to \mathbb{R}$, tal que $\det A = ad - bc$. A aplicação $\det$ é transformação linear?

Solução: Seja o vetor $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$. Vejamos a aplicação $\det$ com relação ao produto por escalar $\alpha \cdot A$:

$$\det(\alpha \cdot A) = \alpha^2 \cdot \det A \neq \alpha \cdot \det A$$

Portanto, como a função do produto por escalar não foi o produto da função por escalar, então a aplicação $\det$ não é transformação linear. □

Exemplo 11.4: Seja o espaço vetorial das matrizes $\mathcal{M}(m,n)$ e a função transposta $T(A) : \mathcal{M}(m,n) \to \mathcal{M}(n,m)$, tal que $T(A) = A^T$. A aplicação T é transformação linear?

Solução: Sejam os vetores $A,\ B \in \mathcal{M}(m,n)$ e os escalares $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Vejamos a aplicação T com relação à combinação linear $\alpha A + \beta B$:

$$T(\alpha A + \beta B) = (\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$$

Como a função da combinação linear é a combinação linear das funções, então a aplicação T é transformação linear. □

Exemplo 11.5: A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x,y) = (2x, 0, x+y)$. T é transformação linear?

Solução: Sejam os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vejamos a aplicação T com relação à combinação linear $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$:

$$\begin{aligned}
T\left(\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\right) &= T\left(\alpha\cdot(x_u,y_u)+\beta\cdot(x_v,y_v)\right)\\
T\left(\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\right) &= T\left((\alpha x_u,\alpha y_u)+(\beta x_v,\beta y_v)\right)\\
T\left(\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\right) &= T\left(\alpha x_u+\beta x_v,\alpha y_u+\beta y_v\right)\\
T\left(\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\right) &= \left(2(\alpha x_u+\beta x_v),0,(\alpha x_u+\beta x_v)+(\alpha y_u+\beta y_v)\right)\\
T\left(\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\right) &= \left(2\alpha x_u+2\beta x_v,0,\alpha x_u+\alpha y_u+\beta x_v+\beta y_v\right)\\
T\left(\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\right) &= \left(2\alpha x_u,0,\alpha x_u+\alpha y_u\right)+\left(2\beta x_v,0,\beta x_v+\beta y_v\right)\\
T\left(\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\right) &= \alpha\cdot T\left(x_u,y_u\right)+\beta\cdot T\left(x_v,y_v\right)
\end{aligned}$$

Como a função da combinação linear é a combinação linear das funções, então a aplicação T é transformação linear. Outra maneira de mostrar isso, é que a aplicação pode ser vista como um produto de matriz por vetor:

$$T(x,y)=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

Como visto no Exemplo 11.2, se $T(\vec{v})=A\vec{v}$ então temos uma transformação linear. □

Nesse capítulo vamos trabalhar principalmente com transformações lineares do tipo $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Antes de apresentar várias aplicações no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$, vamos determinar algumas ferramentas que vão no auxiliar.

Teorema 11.2

Toda transformação linear $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ é uma transformação matricial e portanto existe uma matriz $A_{m\times n}$ tal que $T(\vec{v})=A\cdot\vec{v}$.

Teorema 11.3

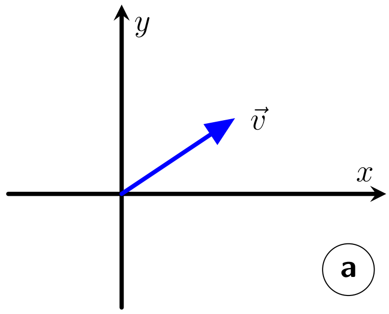
Seja uma transformação matricial $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, dada por $T(\vec{v})=A\cdot\vec{v}$. Dada a base canônica $\beta=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$, a matriz $A_{m\times n}$ possui como j-ésima coluna $T(\vec{e}_j)$.

$$A=\begin{bmatrix}T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \cdots & T(\vec{e}_n)\end{bmatrix}$$

Com isso, podemos estabelecer as aplicações da próxima seção.

11.1 Transformações no Plano Cartesiano

Uma ótima maneira de perceber as transformações lineares é no plano $\mathbb{R}^2$, quando notamos o resultado das transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, ou seja, $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Aqui consideraremos o vetor arbitrário $\vec{v}=(x,y)$, que nas figuras será representado pelo vetor $\vec{v}=(3,2)$.



As transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, são equivalentes a transformar $T : \vec{v}(x, y) \to \vec{w}$, tal que:

$$A \cdot \vec{v} = \vec{w}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{w}$$

$$\left[\begin{array}{c:c} T(1,0) & T(0,1) \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{w}$$

Veremos as seguintes transformações:

(i) Transformações de Escala e Sentido;

(ii) Rotações de θ no sentido horário;

(iii) Projeções Ortogonais;

(iv) Reflexões Ortogonais;

(v) Composição de Transformações Lineares.

Transformações de Escala e Sentido

As transformações de escala e sentido são como o Exemplo 11.1 e promovem escala ao vetor transformado, seja de expansão ou redução. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $T(\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}$. Perceba que o vetor $T(1, 0) = (\alpha, 0)$ e $T(0, 1) = (0, \alpha)$. Portanto, a matriz da transformação linear de escala é dada por:

$$T(\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \vec{v}.$$

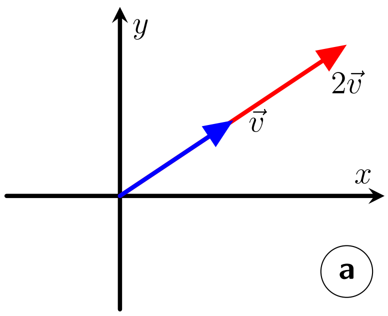
O sinal do escalar α determina o sentido do vetor resultante. Se α é positivo então o resultado da transformação é um vetor na mesma direção e sentido do vetor original. Do contrário, se α é negativo, então o resultado da transformação é um vetor na mesma direção, só que sentido inverso do vetor original. Quanto à magnitude de α, se $|\alpha| > 1$ então o resultado da transformação é um vetor α vezes maior. Se $0 < |\alpha| < 1$ então o resultado da transformação é um vetor α vezes menor. Observe que se $\alpha = 1$, temos a **aplicação identidade**, que transforma um vetor nele mesmo. Se $\alpha = 0$, temos a **aplicação nula**, que transforma todo vetor no vetor nulo. E se $\alpha = -1$, temos a **aplicação oposta**, que transforma todo vetor no seu vetor oposto.

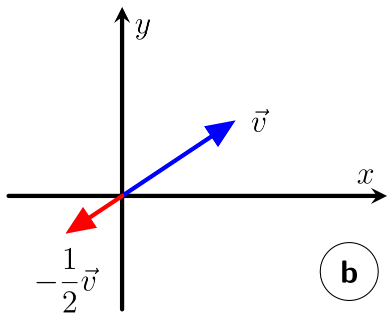
Exemplo 11.6: Dado $\vec{v} = (3, 2)$, apresente os resultados das seguintes transformações lineares:

(a) $T(\vec{v}) = 2 \cdot \vec{v}$

(b) $T(\vec{v}) = -\dfrac{1}{2} \cdot \vec{v}$

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (3, 2)$, teremos as figuras a seguir. Observe na Figura a que o vetor foi duplicado, ou seja, $T(\vec{v}) = 2\vec{v}$. Na Figura b, o vetor é substituído por seu vetor oposto e em seguida reduzido pela metade.





□

As transformações de escala e sentido podem estar relacionadas com alguma direção específica, como por exemplo em alguma aplicação de dilatação/compressão de um corpo. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que haja uma mudança de escala apenas da direção x. Assim, o vetor na direção x, $T(1, 0) = (\alpha, 0)$ e o vetor na direção y, $T(0, 1) = (0, 1)$. Portanto, a matriz da transformação linear de escala na direção x é dada por:

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}.$$

Se a mudança de escala fosse apenas na direção y, então o vetor na direção x, $T(1, 0) = (1, 0)$ e o vetor na direção y, $T(0, 1) = (0, \alpha)$. Portanto, a matriz da transformação linear de escala na direção y é dada por:

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \vec{v}.$$

O resto da análise, quanto ao sinal e magnitude de α é análogo à transformação linear de escala.

Exemplo 11.7: Dado $\vec{v} = (3, 2)$, apresente os resultados das seguintes transformações lineares:

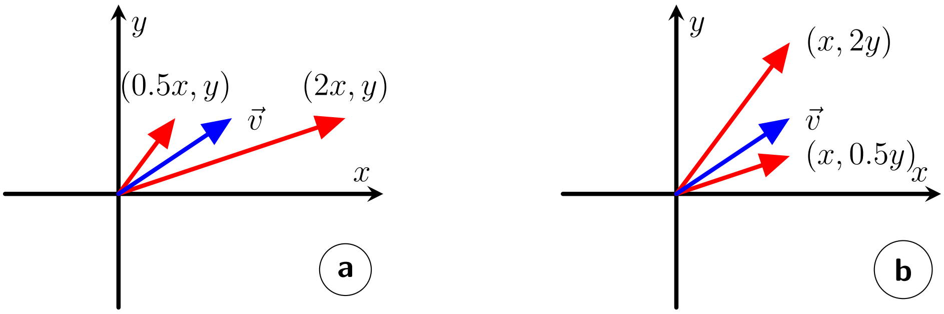
(a) $T(\vec{v})$ dobra na direção x

(b) $T(\vec{v})$ reduz pela metade na direção x

(c) $T(\vec{v})$ dobra na direção y

(d) $T(\vec{v})$ reduz pela metade na direção y

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (3, 2)$, teremos as figuras a seguir. Observe na Figura a que o vetor foi duplicado e reduzido pela metade na direção x. Na Figura b, o vetor também é duplicado e reduzido, mas dessa vez na direção y.



□

Além da direção x e y, poderíamos ter uma transformação linear de escala α em uma direção qualquer (a, b). Nessa transformação linear, na direção definida $T(a, b) = \alpha \cdot (a, b)$, mas um vetor ortogonal a essa direção seria mantido após a transformação, por exemplo, $T(b, -a) = (b, -a)$. Assim:

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha a^2 + b^2}{a^2 + b^2} & \dfrac{(\alpha - 1)ab}{a^2 + b^2} \\ \\ \dfrac{(\alpha - 1)ab}{a^2 + b^2} & \dfrac{a^2 + \alpha b^2}{a^2 + b^2} \end{bmatrix} \cdot \vec{v}.$$

Exemplo 11.8: Dado $\vec{v} = (3, 2)$, apresente os resultados das seguintes transformações lineares:

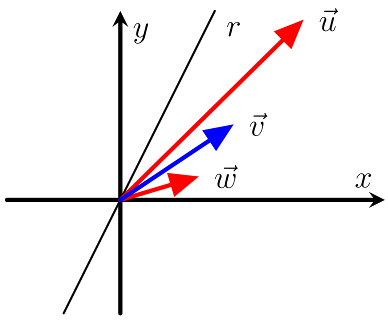
(a) $T(\vec{v})$ dobra na direção $(2, 3)$

(b) $T(\vec{v})$ reduz pela metade na direção $(2, 3)$

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (3, 2)$, teremos a figura a seguir. Observe na Figura que o vetor foi duplicado e reduzido pela metade na direção da reta r, cujo vetor diretor é $(2, 3)$. Na matriz, basta usar $a = 2$ e $b = 3$ e colocando o denominador comum em evidência:

$$T(\vec{v}) = \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} 4\alpha + 9 & 6(\alpha - 1) \\ 6(\alpha - 1) & 4 + 9\alpha \end{bmatrix} \cdot \vec{v}.$$

Na parte (a), basta usar $\alpha = 2$ e na na parte (b), basta usar $\alpha = 0,5$.



□

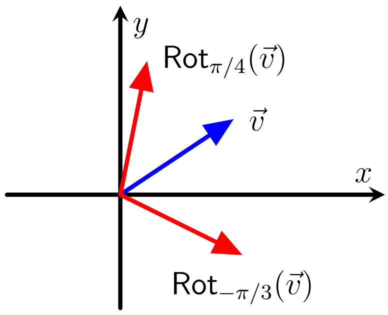
Rotação do ângulo θ na origem

Na rotação, dado um ângulo θ, no sentido anti-horário, o vetor gira sobre o ponto de origem O. Em uma rotação, o vetor não muda de tamanho. Seja $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Perceba que ao rotacionar de θ os vetores da base canônica $(1,0)$ e $(0,1)$, temos $\text{Rot}_\theta(1,0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $\text{Rot}_\theta(0,1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$. Assim, a matriz de transformação linear de θ no sentido horário:

$$\text{Rot}_\theta(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 11.9: Faça as rotações do vetor $\vec{v} = (3,2)$ nos ângulos de $\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{3}$ radianos.

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (3,2)$:



□

Projeções ortogonais

As projeções ortogonais nos eixos x e y são as componentes horizontais e verticais, respectivamente, de cada vetor. Seja $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. As transformações são:

Projeção ortogonal no eixo x:

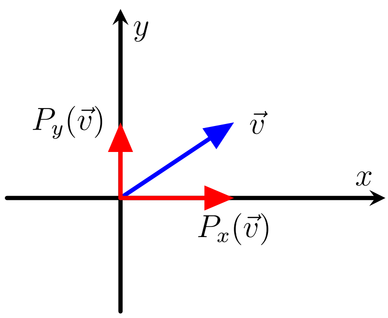
$$P_x(x,y) = (x,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Projeção ortogonal no eixo y:

$$P_y(x,y) = (0,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 11.10: Faça as projeções ortogonais do vetor $\vec{v} = (3,2)$ nos eixos x e y.

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (3,2)$:



□

Entretanto, podemos fazer a projeção em uma direção específica, além das direções canônicas. A projeção ortogonal de um vetor $\vec{v}$ na direção de $\vec{u} = (a,b)$ é dada por:

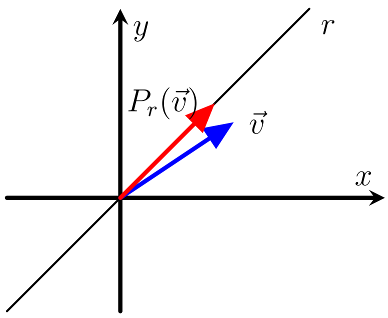
$$\text{proj}_{\vec{u}}\,\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right) \cdot \vec{u}$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. A transformação linear de projeção ortogonal na reta cuja vetor diretor é $\vec{u} = (a, b)$ é dada por:

$$P_r(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{a^2}{a^2+b^2} & \dfrac{ab}{a^2+b^2} \\ \\ \dfrac{ab}{a^2+b^2} & \dfrac{b^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 11.11: Faça a projeção ortogonal do vetor $\vec{v} = (3, 2)$ na reta $r : t(1, 1)$, ou seja, a reta $x = y$.

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (3, 2)$, com $a = 1$ e $b = 1$:



□

Reflexões Ortogonais

As reflexões são como espelhos e refletem o vetor de acordo com um ponto ou eixo. Em uma reflexão, o vetor não muda de tamanho. Seja $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. As transformações lineares de reflexão são:

Reflexão em torno do eixo x:

$$R_x(x,y) = (x, -y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Reflexão em torno do eixo y:

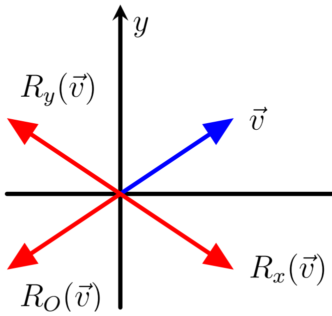
$$R_y(x,y) = (-x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A reflexão em torno da Origem O é a combinação da reflexão no eixo x e no eixo y. E é equivalente ao vetor oposto:

$$R_O(x,y) = (-x, -y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 11.12: Faça as reflexões no vetor $\vec{v} = (3, 2)$ no eixo x, no eixo y e na origem.

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (3, 2)$:



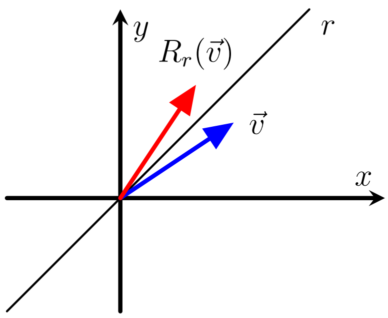
□

Para a reflexão ortogonal em uma direção específica $\vec{u} = (a, b)$, vetor diretor de uma reta r, usamos o fato de que: $R_r = 2P_r(x, y) - (x, y)$. Assim, a transformação linear reflexão ortogonal na reta r:

$$R_r(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \dfrac{2ab}{a^2+b^2} \\ \\ \dfrac{2ab}{a^2+b^2} & \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 11.13: Faça a reflexão do vetor $\vec{v} = (3, 2)$ na reta $r : t(1, 1)$, ou seja, a reta $x = y$.

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (3, 2)$, com $a = b = 1$:



□

Composição de Transformações Lineares

Dadas todas as transformações lineares discutidas anteriormente, é possível combinar todas para se buscar um determinado resultado. Note que a ordem das transformações lineares é importante, pois pode alterar o resultado. Vejamos dois exemplos.

Exemplo 11.14: Dado um vetor, gire-o $\dfrac{\pi}{2}$ radianos (90°) no sentido anti-horário e aumente-o ao dobro do tamanho. Faça isso para o vetor $\vec{v} = (3, 2)$.

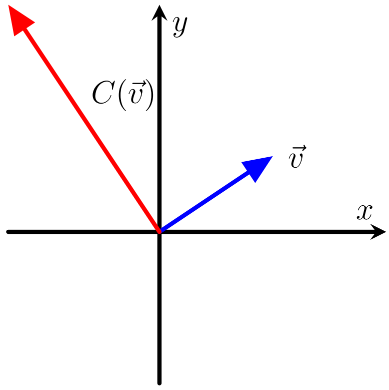
Solução: Para fazer a composição das aplicações lineares, deve-se fazer as Transformações Lineares: (1) $\mathrm{Rot}_{\pi/2}$; e (2) $T : (x, y) \to 2(x, y)$. A operação que tiver de ser realizada primeiro, deve ter a sua matriz mais próxima do vetor. Combinando-os para formar a transformação linear C:

$$C(x,y) = T \circ \mathrm{Rot}_{\pi/2}(x,y) = 2 \cdot \left(\begin{bmatrix} \cos\dfrac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} & \cos\dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

$$C(x,y) = 2 \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$C(x,y) = (-2y, 6x)$$

Tomando por exemplo $\vec{v} = (3,2)$:



Para este exemplo, a ordem das transformações poderia ser trocada. □

Exemplo 11.15: Dado um vetor qualquer (x,y), faça a projeção dele com relação a x e rotacione $\dfrac{\pi}{6}$ no sentido horário. Faça isso para o vetor $\vec{v} = (3,2)$. Em seguida, mude a ordem das transformações.

Solução: Para fazer a composição das aplicações lineares, deve-se fazer as Transformações Lineares: (1) P_x e (2) $\mathrm{Rot}_{-\pi/6}$. A operação que tiver de ser realizada primeiro, deve ter a sua matriz mais próxima do vetor. Combinando-os para formar a transformação linear C_1:

$$C_1(x,y) = \mathrm{Rot}_{\pi/6} \circ P_x(x,y) = \begin{bmatrix} \cos -\dfrac{\pi}{6} & -\operatorname{sen} -\dfrac{\pi}{6} \\ \operatorname{sen} -\dfrac{\pi}{6} & \cos -\dfrac{\pi}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$C_1(x,y) = \begin{bmatrix} 0,866 & 0 \\ -0,5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$C_1(x,y) = (0,866x; -0,5x)$$

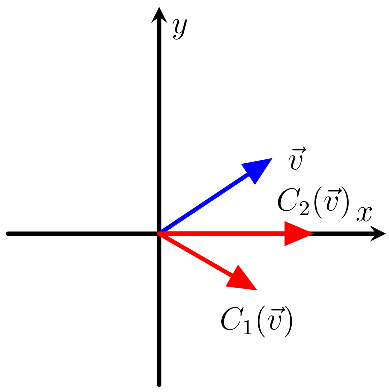
Se a ordem das operações fosse contrária, $C_2(x,y)$ seria:

$$C_2(x,y) = P_x \circ \mathrm{Rot}_{\pi/6}(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos -\dfrac{\pi}{6} & -\operatorname{sen} -\dfrac{\pi}{6} \\ \operatorname{sen} -\dfrac{\pi}{6} & \cos -\dfrac{\pi}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,866 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$C(x,y) = (0,866x + 0,5y; 0)$$

Tomando por exemplo $\vec{v} = (3,2)$, $C_1(3,2) = (2,598; -1,5)$ e $C_2(3,2) = (4,098; 0)$:



Para este exemplo, a ordem das transformações não poderia ser trocada. □

11.2 Transformações no Espaço Cartesiano

De forma análoga ao plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, as transformações lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, são equivalentes a transformar $T : \vec{v}(x, y, z) \to \vec{w}$:

$$T(\vec{v}) = A \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{v}) = \left[\begin{array}{c:c:c} T(1,0,0) & T(0,1,0) & T(0,0,1) \end{array}\right] \cdot \vec{v} = \vec{w}$$

E assim como os casos no plano, estendemos para as seguintes transformações no espaço:

(i) Transformações de Escala e Sentido;

(ii) Rotações de θ no sentido horário sobre um eixo específico;

(iii) Projeções Ortogonais em um plano;

(iv) Reflexões Ortogonais em um plano.

Transformações de Escala e Sentido

Novamente, as transformações de escala e sentido são como o Exemplo 11.1 e promovem escala ao vetor transformado, seja de expansão ou redução. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $T(\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}$. Perceba que o vetor $T(1, 0, 0) = (\alpha, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, \alpha, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, \alpha)$. Portanto, a matriz da transformação linear de escala é dada por:

$$T(\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \vec{v}.$$

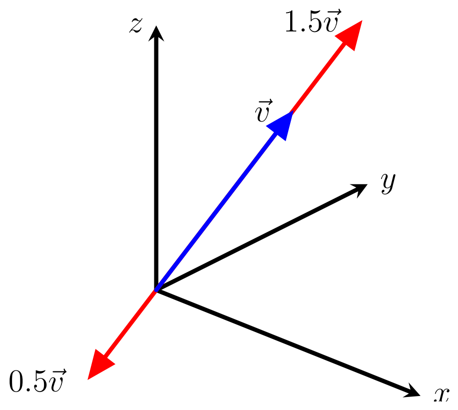
O sinal do escalar α determina o sentido do vetor resultante e a magnitude de $|\alpha|$ determina a escala do vetor resultante.

Exemplo 11.16: Dado $\vec{v} = (1, 2, 3)$, apresente os resultados das transformações lineares a seguir:

(a) $T(\vec{v}) = 1,5 \cdot \vec{v}$

(b) $T(\vec{v}) = -0,5 \cdot \vec{v}$

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (1, 2, 3)$, teremos a figura a seguir.



□

As transformações de escala e sentido podem estar relacionadas com alguma direção específica, como por exemplo em alguma aplicação de dilatação/compressão de um corpo. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que haja uma mudança de escala apenas da direção x. Assim, o vetor na direção x, $T(1, 0, 0) = (\alpha, 0, 0)$, o vetor na direção y, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ e o vetor na direção z, $T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$. Portanto, a matriz da transformação linear de escala na direção x é dada por:

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}.$$

Analogamente, a matriz da transformação linear de escala na direção y é dada por:

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}.$$

Por fim, a matriz da transformação linear de escala na direção z é dada por:

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \vec{v}.$$

O resto da análise, quanto ao sinal e magnitude de α é análogo à transformação linear de escala.

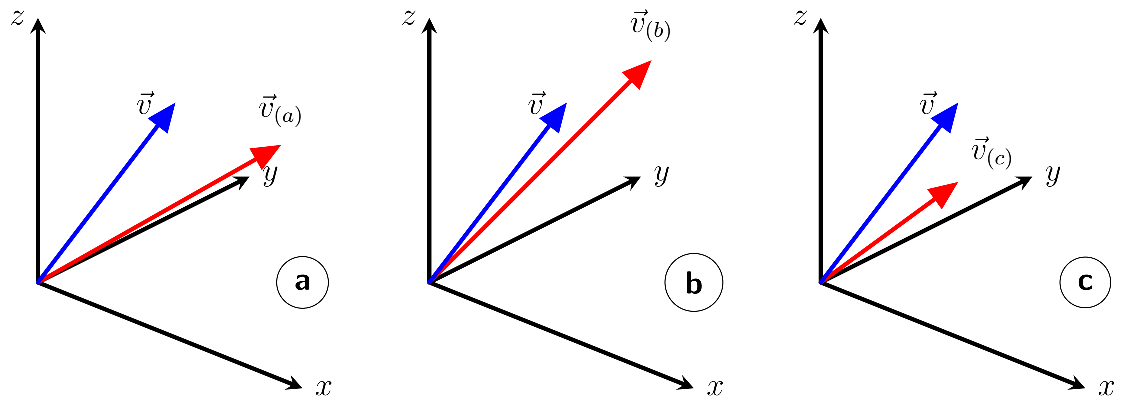
Exemplo 11.17: Dado o vetor $\vec{v} = (1, 2, 3)$, apresente os resultados das seguintes transformações lineares:

(a) $T(\vec{v})$ triplica na direção x

(b) $T(\vec{v})$ dobra na direção y

(c) $T(\vec{v})$ reduz pela metade na direção z

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (1, 2, 3)$, teremos as figuras a seguir. Na Figura a, o vetor foi triplicado na direção x. Na Figura b, o vetor foi duplicado na direção y. Na Figura c, o vetor foi reduzido pela metade na direção z.



□

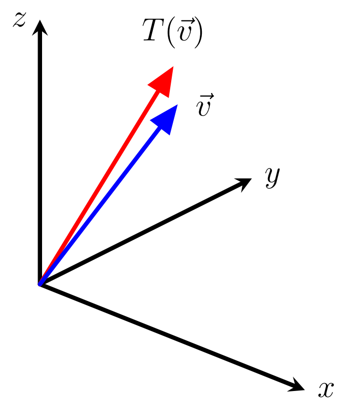
Além das direções canônicas x, y e z, poderíamos ter uma transformação linear de escala α em uma direção qualquer (a, b, c). Nessa transformação linear, na direção definida $T(a, b, c) = \alpha \cdot (a, b, c)$, mas um vetor ortogonal a essa direção seria mantido após a transformação. Assim:

$$T(\vec{v}) = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{bmatrix} \alpha a^2 + b^2 + c^2 & (\alpha - 1)ab & (\alpha - 1)ac \\ (\alpha - 1)ab & a^2 + \alpha b^2 + c^2 & (\alpha - 1)bc \\ (\alpha - 1)ac & (\alpha - 1)bc & a^2 + b^2 + \alpha c^2 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}.$$

Exemplo 11.18: Dado $\vec{v} = (1, 2, 3)$, apresente o resultado da transformação linear que dilata em 30% o vetor na direção $(-1, 1, 1)$.

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (1, 2, 3)$, teremos a figura a seguir. Na matriz, basta usar $a = -1$, $b = c = 1$ e $\alpha = 1,3$:

$$T(\vec{v}) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3,3 & -0,3 & -0,3 \\ -0,3 & 3,3 & 0,3 \\ -0,3 & 0,3 & 3,3 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}.$$



□

Rotação do ângulo θ sobre um eixo

Na rotação no espaço $\mathbb{R}^3$, dado um ângulo θ, no sentido anti-horário, o vetor gira sobre um eixo de rotação. Na rotação, o vetor não muda de tamanho. Vamos fazer as rotações nos eixos x, y e z. Seja a rotação no eixo x, denotada por $\mathrm{Rot}_{x,\theta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Perceba que ao rotacionar de θ no eixo x os vetores da base canônica $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, temos $\mathrm{Rot}_{x,\theta}(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ (vetor na direção do eixo), $\mathrm{Rot}_{x,\theta}(0,1,0) = (0, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $\mathrm{Rot}_{x,\theta}(0,0,1) = (0, -\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$. Assim, a matriz de transformação linear da rotação de θ no sentido horário do eixo x:

$$\mathrm{Rot}_{x,\theta}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \vec{v}$$

Analogamente, uma rotação de θ no sentido horário do eixo y:

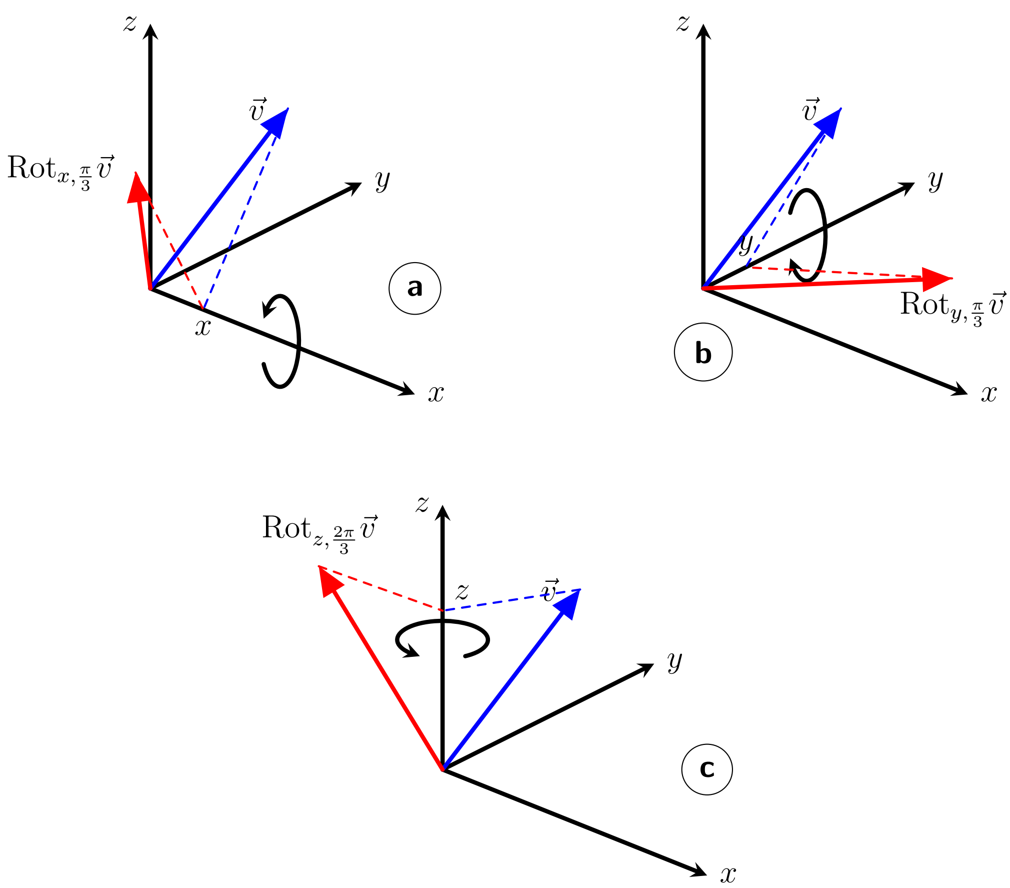
$$\mathrm{Rot}_{y,\theta}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \vec{v}$$

E uma rotação de θ no sentido horário do eixo z:

$$\mathrm{Rot}_{z,\theta}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 11.19: Faça as rotações do vetor $\vec{v} = (1,2,3)$ no ângulo de 60° no sentido anti-horário, nos eixos, x e y. Para o mesmo vetor, faça uma rotação de 120° no sentido antihorário do eixo z.

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (1,2,3)$, e substituindo o ângulo positivo de $\frac{\pi}{3}$ radianos, temos as figuras (a) e (b). Substituindo o ângulo positivo de $\frac{2\pi}{3}$ radianos, temos a figura (c).



□

Projeções ortogonais

As projeções ortogonais nos planos xy, xz e yz são as componentes no respectivo plano de um vetor.

Seja $P_{xy} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. A projeção ortogonal no plano xy é dada por:

$$P_{xy}(x, y, z) = (x, y, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja $P_{xz} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. A projeção ortogonal no plano xz é dada por:

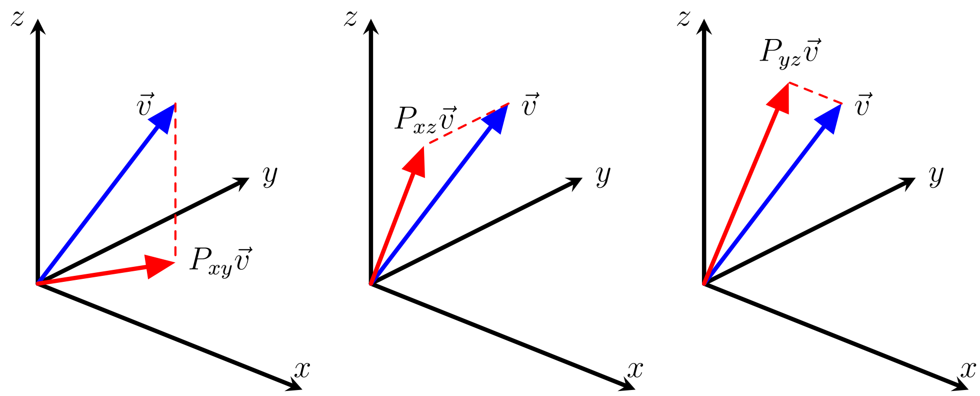
$$P_{xz}(x, y, z) = (x, 0, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja $P_{yz} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. A projeção ortogonal no plano yz é dada por:

$$P_{yz}(x, y, z) = (0, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 11.20: Faça as projeções ortogonais do vetor $\vec{v} = (1, 2, 3)$ nos planos xy, xz e yz.

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (1, 2, 3)$:



□

Reflexões Ortogonais

As reflexões no espaço $\mathbb{R}^3$ são como espelhos e refletem o vetor de acordo com um plano. Em uma reflexão, o vetor não muda de tamanho. Seja $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. As transformações lineares de reflexão são:

Reflexão no plano xy:

$$R_{xy}(x, y, z) = (x, y, -z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Reflexão no plano xz:

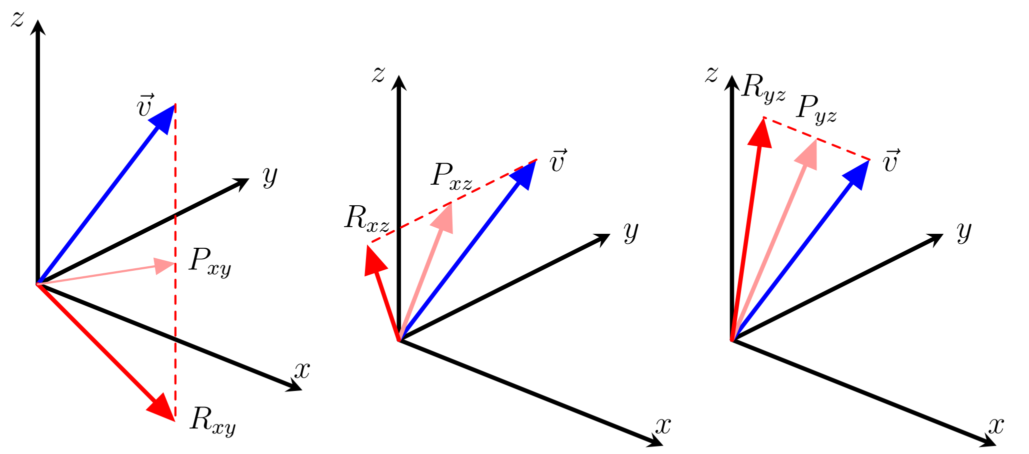
$$R_{xy}(x, y, z) = (x, -y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Reflexão no plano yz:

$$R_{xy}(x,y,z) = (-x,y,z) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Exemplo 11.21: Faça as reflexões no vetor $\vec{v} = (1,2,3)$ nos planos xy, xz e yz.

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (1,2,3)$, apresentando também a projeção no respectivo plano:



□

11.3 Propriedades das Transformações Lineares

Nesta Seção, alguns teoremas e definições serão discutidos, com o intuito entendermos melhor as transformações lineares e as aplicarmos.

Teorema 11.4

Dados os espaços vetoriais V, W e uma base $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ em V. A partir de n vetores arbitrários de W: $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n$ (não necessariamente uma base), é possível definir uma única transformação linear $T : V \to W$, tal que: $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$, $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$, $\ldots$, $T(\vec{v}_n) = \vec{w}_n$. Assim:

$$\begin{gathered} \vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n \\ T(\vec{v}) = T(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n) \\ T(\vec{v}) = a_1T(\vec{v}_1) + a_2T(\vec{v}_2) + \ldots + a_nT(\vec{v}_n) \\ T(\vec{v}) = a_1\vec{w}_1 + a_2\vec{w}_2 + \ldots + a_n\vec{w}_n \end{gathered}$$

Exemplo 11.22: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1,0) = (2,-1,0)$ e $T(0,1) = (0,0,1)$. Determine a matriz da transformação linear T.

Solução: Para fazermos a transformação linear de um vetor qualquer $\vec{v} = (x,y)$ de V, sabendo as transformações da base canônica:

$$\vec{v} = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$
$$T(\vec{v}) = T(x, y) = T(x(1, 0) + y(0, 1))$$
$$T(x, y) = xT(1, 0) + yT(0, 1) = x(2, -1, 0) + y(0, 0, 1)$$
$$T(x, y) = (2x, -x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \square$$

Exemplo 11.23: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(1, 1) = (-2, 1)$ e $T(-1, 1) = (2, -1)$. Determine a matriz da transformação linear T.

Solução: Para fazermos a transformação linear de um vetor qualquer $\vec{v} = (x, y)$ de V, precisamos definir as coordenadas com relação à base dada.

$$\vec{v} = (x, y) = \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(-1, 1)$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x + y \\ -x + y \end{bmatrix}$$

Com isso, agora podemos definir a transformação linear:

$$T(\vec{v}) = T(x, y) = T(\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(-1, 1))$$
$$T(x, y) = \frac{x + y}{2} T(1, 1) + \frac{-x + y}{2} T(-1, 1) = \frac{x + y}{2}(-2, 1) + \frac{-x + y}{2}(2, -1)$$
$$T(x, y) = (-2x, x) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \square$$

Nas transformações lineares, assim como nas funções, há o conceito de domínio, de contradomínio e de imagem. Além disso, há também o conceito de núcleo de uma transformação linear. Em seguida, aplicamos também os conceitos de injetividade e sobrejetividade.

Definição 11.2: Características de uma Transformação Linear

Seja uma transformação linear $T : V \to W$.
O **domínio de** T é o espaço vetorial das possíveis entradas da aplicação.
O **contradomínio de** T é o espaço vetorial das possíveis saídas/resultados da transformação linear.
A **imagem de** T é o conjunto de vetores $\vec{w} \in W$, tais que existe $\vec{v} \in V$, que satisfaz $T(\vec{v}) = \vec{w}$:

$$Im(T) = \{\vec{w} \in W;\ T(\vec{v}) = \vec{w},\ \vec{v} \in V\} \subseteq W$$

O **núcleo (kernel) de** T é o conjunto de todos os vetores de V tais que $T(\vec{v}) = \vec{0}$:

$$Ker(T) = \{\vec{v} \in V;\ T(\vec{v}) = \vec{0}\} \subseteq V$$

Teorema 11.5

Seja uma transformação linear $T : V \to W$. Então o conjunto $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W enquanto o conjunto $Ker(T)$ é subespaço vetorial de V.

Definição 11.3: Injetividade e Sobrejetividade

Seja uma transformação linear $T : V \to W$, cuja imagem é $Im(T)$ e cujo núcleo é $Ker(T)$.
Uma transformação linear é injetora se dados quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$, tais que $\vec{u} \neq \vec{v}$, então $T(\vec{u}) \neq T(\vec{v})$. Para transformações lineares, se $Ker(T) = \{\vec{0}\}$, então T é injetora. Assim, se a dimensão do conjunto núcleo da transformação linear é nula $\dim Ker(T) = 0$, então T é injetora.
Uma transformação linear é sobrejetora se $Im(T) = W$. Para transformações lineares, se a dimensão do conjunto imagem da transformação linear é a mesma do espaço vetorial W, ou seja, $\dim Im(T) = \dim W$, então T é sobrejetora.
Uma transformação linear é um isomorfismo se é injetora e sobrejetora. Assim, é necessário que $Ker(T) = \{\vec{0}\}$ e que $Im(T) = W$.

Em seguida, temos um teorema acerca das dimensões dos espaços vetoriais relacionados a uma transformação linear T:

Teorema 11.6

Seja uma transformação linear $T : V \to W$, cuja imagem é $Im(T)$ e cujo núcleo é $Ker(T)$. Então:

$$\dim Ker(T) + \dim Im(T) = \dim V$$

Assim, a dimensão do subespaço $Ker(T)$ somada à dimensão do subespaço $Im(T)$ é equivalente à dimensão do domínio. Isso implica que os vetores do domínio de uma transformação linear T só possuem dois destinos: o núcleo ou a imagem de T.

Algumas consequências do Teorema 11.6 são:

(i) Se $\dim V < \dim W$, então a transformação linear T pode ser injetora mas não pode ser sobrejetora ($\dim Im(T) < \dim W$).

(ii) Se $\dim V > \dim W$, então a transformação linear T pode ser sobrejetora mas não pode ser injetora ($\dim Ker(T) > 0$).

(iii) Se $\dim V = \dim W$, então a transformação linear T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora, portanto isomorfismo.

Para transformações matriciais $T(\vec{v} = A\vec{v}$ é possível associar as dimensões do núcleo e imagem com elementos da matriz como posto e nulidade.

Teorema 11.7

Seja uma transformação linear $T : V \to W$, tal que $T(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$, sendo A a matriz da transformação linear. Também que a imagem da transformação é $Im(T)$ e o núcleo é $Ker(T)$. Então, a $\dim Im(T) = \text{posto}\, A$, ou seja, o número de linhas não nulas quando a matriz é reduzida à forma escada. E a $\dim Ker(T) = \text{nul}\, A$, ou seja, o número de colunas da matriz A menos o $\text{posto}\, A$ quando A é reduzida à forma escada.

Por fim, para isomorfismos, temos duas consequências interessantes, com transformações que levam base em base e transformações lineares inversas.

Teorema 11.8

Seja uma transformação linear $T : V \to W$ injetora e sobrejetora (isomorfismo). Então T transforma os vetores de uma base de V em vetores que formam uma base de W. Além disso T existe uma transformação linear inversa denotada por $T^{-1} : W \to V$.

Exemplo 11.24: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1,0) = (2,-1,0)$ e $T(0,1) = (0,0,1)$. Defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a transformação linear é injetora e/ou sobrejetora.

Solução: Conforme visto na solução do Exemplo 11.22, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, então T possui domínio $\mathbb{R}^2$ de dimensão 2 e contradomínio $\mathbb{R}^3$ de dimensão 3. A transformação linear encontrada foi:

$$T(x,y) = (2x, -x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Comecemos pelo núcleo de T, pela definição:

$$Ker(T) = \{\vec{v} \in V;\ T(\vec{v}) = \vec{0}\}$$
$$T(x,y) = (2x, -x, y) = (0,0,0) = \vec{0}$$
$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies x = y = 0$$

Portanto, $Ker(T) = \{\vec{0}\}$, ou seja, $\dim Ker(T) = 0$ e a transformação linear T é injetora.

Pela relação entre as dimensões, podemos encontrar a dimensão da imagem de T:

$$\dim Ker(T) + \dim Im(T) = \dim V$$
$$0 + \dim Im(T) = 2 \quad \implies \quad \dim Im(T) = 2$$

Como $\dim Im(T) < \dim \mathbb{R}^3 = 3$, então a transformação linear T não é sobrejetora. A imagem da transformação linear T pode ser obtida pela definição da transformação linear T:

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E portanto $Im(T)$ é igual ao subespaço gerado pelos vetores $[(2,-1,0),(0,0,1)]$.

Com a matriz de transformação, podemos encontrar as dimensões do núcleo e imagem de T, usando a matriz de transformação linear (outra maneira):

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} l_1 \to l_1 \cdot 0,5 \\ \implies \\ l_2 \leftrightarrow l_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \implies \\ \implies \\ l_3 \to l_3 - l_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, escalonada reduzida, temos: $\dim ImT = \text{posto}\, A = 2$ e $\dim KerT = \text{nul}\, A = 2-2 = 0$. □

Exemplo 11.25: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(1,1) = (-2,1)$ e $T(-1,1) = (2,-1)$. Defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a transformação linear é injetora e/ou sobrejetora.

Solução: Conforme visto na solução do Exemplo 11.23, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, então T possui domínio $\mathbb{R}^2$ de dimensão 2 e contradomínio $\mathbb{R}^2$ de dimensão 2. A transformação linear encontrada foi:

$$T(x, y) = (-2x, x) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Comecemos pelo núcleo de T, pela definição:

$$Ker(T) = \{\vec{v} \in V;\ T(\vec{v}) = \vec{0}\}$$
$$T(x, y) = (-2x, x) = (0, 0) = \vec{0}$$
$$\begin{cases} -2x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = 0$$

Assim, um vetor do $Ker(T)$ é dado por $\vec{v} = (x, y) = (0, y) = y(0, 1)$. Dessa forma, $Ker(T)$ é igual ao subespaço gerado por $[(0, 1)]$, ou seja, a reta na origem cujo vetor diretor é $\vec{j} = (0, 1)$. Portanto $\dim Ker(T) = 1$ e a transformação linear T não é injetora.

Pela relação entre as dimensões, podemos encontrar a dimensão da imagem de T:

$$\dim Ker(T) + \dim Im(T) = \dim V$$
$$1 + \dim Im(T) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \dim Im(T) = 1$$

Como $\dim Im(T) < \dim \mathbb{R}^2 = 2$, então a transformação linear T não é sobrejetora. A imagem da transformação linear T pode ser obtida pela definição da transformação linear T:

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

E portanto $Im(T)$ é igual ao subespaço gerado pelo vetor $[(-2, 1)]$. □

Exemplo 11.26: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $T(x, y) = x + y$. Determine a matriz da transformação linear T. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.

Solução: Primeiro precisamos determinar a matriz de transformação linear T.

$$T(x, y) = x + y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Como $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, então T possui domínio $\mathbb{R}^2$ de dimensão 2 e contradomínio $\mathbb{R}$ de dimensão 1.

Comecemos pelo núcleo de T, pela definição:

$$T(x, y) = x + y = 0 = \vec{0}$$
$$x = -y \Longrightarrow (x, y) = (-y, y) = y(-1, 1)$$

Portanto, todos os múltiplos de $(-1, 1)$ fazem parte do núcleo $Ker(T) = [(-1, 1)]$, ou seja, $\dim Ker(T) = 1$ e a transformação linear T não é injetora.

Pelo teorema que relaciona as dimensões:

$$\dim Ker(T) + \dim Im(T) = \dim V$$
$$1 + \dim Im(T) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \dim Im(T) = 1$$

Como $\dim Im(T) = \dim \mathbb{R} = 1$, então a transformação linear T é sobrejetora e $Im(T) = \mathbb{R}$.

Percebam que a matriz de transformação linear já está reduzida à forma escada e assim $\dim ImT = \text{ posto } A = 1$, e $\dim KerT = \text{ nul } A = 2 - 1 = 1$. □

Exemplo 11.27: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$. Determine a matriz da transformação linear T. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se T é injetora e sobrejetora. Caso for isomorfismo, determine a transformação linear inversa.

Solução: Primeiro precisamos determinar a matriz da transformação linear T.

$$T(x, y, z) = (x, 2y, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Como $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, então T possui domínio e contradomínio $\mathbb{R}^3$ de dimensão 3.

Comecemos pelo núcleo de T, pela definição:

$$Ker(T) = \{\vec{v} \in V;\ T(\vec{v}) = \vec{0}\}$$
$$T(x, y, z) = (x, 2y, z) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies x = y = 0$$
$$Ker(T) = [(0, 0, z)] = [(0, 0, 1)]$$

Portanto, $\dim Ker(T) = 1$ e a transformação linear T não é injetora.

Para a imagem de T:

$$T(x, y, z) = (x, 2y, 0) = x \cdot (1, 0, 0) + 2y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 0)$$
$$Im(T) = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0)] = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$$

Portanto, $\dim Im(T) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$ e a transformação linear T não é sobrejetora.

Verificando o relacionamento entre as dimensões:

$$\dim Ker(T) + \dim Im(T) = \dim V$$
$$1 + 2 = 3 \quad \checkmark$$

Usando a matriz e reduzindo-a a forma escada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Longrightarrow \\ l_2 \to l_2 \cdot 0,5 \\ \Longrightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, no formato escada reduzida, temos: $\dim ImT = \text{ posto } A = 2$, e $\dim KerT = \text{ nul } A = 3 - 2 = 1$. □

Exemplo 11.28: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + y + z)$. Determine a matriz da transformação linear T. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se T é injetora e sobrejetora. Caso for isomorfismo, determine a transformação linear inversa.

Solução: Primeiro precisamos determinar a matriz da transformação linear T.

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + y + z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Como $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, então T possui domínio e contradomínio $\mathbb{R}^3$ de dimensão 3. Com a matriz de transformação, podemos encontrar as outras propriedades reduzindo-a a forma escada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_3 \to l_3 - l_1}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{l_1 \to l_1 - l_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{l_1 \to l_1 + l_3 \\ l_2 \to l_2 - l_3}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, com a matriz escalonada reduzida, $\dim ImT = \operatorname{posto} A = 3$ e $ImT = \mathbb{R}^3$. Quanto ao núcleo, $\dim KerT = \operatorname{nul} A = 3 - 3 = 0$ e $KerT = \{\vec{0}\}$. Portanto a transformação linear T é injetora e sobrejetora, ou seja, se trata de um isomorfismo!

Por ser um isomorfismo, havemos de encontrar a transformação linear inversa. Assim, basta encontrar a matriz inversa à matriz da transformação linear. Nesse caso, usando o processo de eliminação de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{l_3 \to l_3 - l_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{l_1 \to l_1 - l_2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{l_1 \to l_1 + l_3 \\ l_2 \to l_2 - l_3}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Portanto, a transformação inversa é dada por:

$$T^{-1}(\vec{v}) = T^{-1}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \square$$

11.4 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Seja o vetor $(4, -3)$. Calcule as seguintes transformações lineares no plano: (a) Triplicar; (b) Reduzir a 1/4; (c) Refletir no eixo x; (d) Refletir no eixo y; (e) Refletir na origem O; (f) Projetar no eixo x; (g) Projetar no eixo y; (h) Rotacionar $75°$ no sentido horário; (i) Rotacionar $60°$ no sentido anti-horário; (j) Projetar na reta $r: \; t(-2, 1)$; e (k) Refletir na reta $r: \; t(-2, 1)$.

2. Seja o vetor $(2, 0)$. Calcule as seguintes transformações lineares no plano: (a) Duplicar no sentido oposto; (b) Reduzir a 2/3; (c) Refletir no eixo x; (d) Refletir no eixo y; (e) Refletir na origem O; (f) Projetar no eixo x; (g) Projetar no eixo y; (h) Rotacionar $15°$ no sentido horário; (i) Rotacionar $120°$ no sentido anti-horário; (j) Projetar na reta $r: \; t(2, 3)$; e (k) Refletir na reta $r: \; t(2, 3)$.

3. Seja o vetor $(2, 2)$. Calcule as seguintes transformações lineares no plano: (a) Transformação Identidade; (b) Reduzir a metade; (c) Refletir no eixo x; (d) Refletir no eixo y; (e) Refletir na origem O; (f) Projetar no eixo x; (g) Projetar no eixo y; (h) Rotacionar $40°$ no sentido horário; (i) Rotacionar $40°$ no sentido anti-horário; (j) Projetar na reta $r: \; t(0, 1)$; e (k) Refletir na reta $r: \; t(0, 1)$.

4. Determine a matriz de transformação linear da composição das transformações no plano abaixo. Verifique se a ordem inversa das transformações também pode ser usada.
   (a) Duplicar no sentido oposto; Refletir no eixo x;
   (b) Refletir no eixo y; Projetar no eixo x;
   (c) Rotacionar $45°$ no sentido horário; Rotacionar $45°$ no sentido anti-horário;
   (d) Projetar na reta $r: \; t(1, 2)$; Rotacionar $30°$ no sentido anti-horário;
   (e) Rotacionar $30°$ no sentido anti-horário; Refletir na reta $r: \; t(-1, 3)$; Reduzir a metade;

5. No plano, uma rotação anti-horária de $45°$ é seguida por uma dilatação de $\sqrt{2}$. Ache a aplicação T que representa esta transformação no plano. Qual seria a aplicação inversa?

6. Determine a matriz da transformação linear T. Em seguida, defina o domínio, o contra-domínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.
   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, x + 2y)$.
   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (0, x + 2y)$.
   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (0, 0)$.
   (d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = x - y$.
   (e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (0, 0, x + y)$.
   (f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x, -y, 2x + y)$.
   (g) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + 2z, 2y + z, x + y + z)$.

(h) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (-x - y, x + y, z)$.

(i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (0, 0, z)$.

(j) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y + 2z, 2y + z)$.

(k) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 0)$.

7. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.

8. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.

9. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(3, 2, 1) = (1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, -2)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0)$. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.

10. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1, 0, 1) = (1, 1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 2, -2)$ e $T(0, 1, 1) = (1, 0, 0)$. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.

11. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1, 0, 1) = (1, 1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$ e $T(0, 1, 1) = (1, 0, 1)$. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.

11.5 Exercícios Computacionais

1. Escreva uma função que transforma o vetor $\vec{u}$ em um vetor paralelo com escala α no $\mathbb{R}^2$.

2. Escreva uma função que transforma o vetor $\vec{u}$ em seu vetor oposto no $\mathbb{R}^2$.

3. Seja um vetor $\vec{u}$ no $\mathbb{R}^2$. Escreva uma função que transforma $\vec{u}$ por meio de uma rotação de um ângulo θ graus na origem, considerando o sentido horário.

4. Seja um vetor $\vec{u}$ e uma reta r no $\mathbb{R}^2$. Escreva uma função que projeta $\vec{u}$ em r.

5. Seja um vetor $\vec{u}$ e uma reta r no $\mathbb{R}^2$. Escreva uma função que reflete $\vec{u}$ em r.

6. Gere um vetor de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$, do espaço $\mathbb{R}^2$. Faça uma rotação de um ângulo aleatório θ, no intervalo $[-180, 180]$. Em seguida, faça uma projeção no eixo x. Repita o processo 5 vezes.

7. Gere um vetor de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$, do espaço $\mathbb{R}^2$. Em seguida gere uma reta $r : \; y = ax + b$, onde a e b são números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Faça uma reflexão na reta r. Dobre o tamanho do vetor. Por fim, faça uma rotação de um ângulo aleatório θ, no intervalo $[-180, 180]$. Repita o processo 5 vezes.

8. Escreva uma função que transforma o vetor $\vec{u}$ em um vetor paralelo com escala α no $\mathbb{R}^3$.

9. Escreva uma função que transforma o vetor $\vec{u}$ em seu vetor oposto no $\mathbb{R}^3$.

10. Seja um vetor $\vec{u}$ no $\mathbb{R}^3$. Escreva uma função que transforma $\vec{u}$ por meio de uma rotação de um ângulo θ graus no eixo x, considerando o sentido horário.

11. Seja um vetor $\vec{u}$ no $\mathbb{R}^3$. Escreva uma função que transforma $\vec{u}$ por meio de uma rotação de um ângulo θ graus no eixo y, considerando o sentido horário.

12. Seja um vetor $\vec{u}$ no $\mathbb{R}^3$. Escreva uma função que transforma $\vec{u}$ por meio de uma rotação de um ângulo θ graus no eixo z, considerando o sentido horário.

13. Seja um vetor $\vec{u}$ e um plano π no $\mathbb{R}^3$. Escreva uma função que projeta $\vec{u}$ em π.

14. Seja um vetor $\vec{u}$ e um plano π no $\mathbb{R}^3$. Escreva uma função que reflete $\vec{u}$ em π.

15. Gere um vetor de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$, do espaço $\mathbb{R}^3$. Faça uma rotação de um ângulo aleatório θ, no intervalo $[-180, 180]$, no eixo z. Em seguida, faça uma projeção no plano xy. Repita o processo 5 vezes.

16. Gere um vetor de números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$, do espaço $\mathbb{R}^3$. Em seguida gere um plano $\pi :\ ax + by + cz = 0$, onde a, b e c são números inteiros aleatórios no intervalo $[-5, 5]$. Faça uma reflexão no plano π. Tome a metade do vetor. Por fim, faça uma rotação de um ângulo aleatório θ, no intervalo $[-180, 180]$ no eixo y. Repita o processo 5 vezes.

17. Escreva uma função que, dada a matriz da transformação linear T determina dimImT.

18. Escreva uma função que, dada a matriz da transformação linear T determina dim$KerT$.

19. Escreva uma função que, dadas duas bases de $\mathbb{R}^n$, gera a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, em que os vetores da base estão relacionados um a um em ordem.

20. Gere uma matriz de transformação linear T de ordem $m \times n$, com m e n aleatoriamente no intervalo $[2, 5]$. Calcule a dimensão do núcleo e da imagem de T. Repita este processo 5 vezes.

21. Gere duas bases de $\mathbb{R}^n$, com n aleatoriamente no intervalo $[2, 5]$. Construa a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, em que os vetores da primeira base estão relacionados com os vetores da segunda base.