INSTITUTO FEDERAL
Goiano
Campus Rio Verde

Apostila

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Márcio Belo-Filho

2 de dezembro de 2019

Sumário

1 Introdução **1**
2 Vetores **3**
2.1 Operações entre vetores 9
2.2 Exercícios 20
2.3 Exercícios Computacionais 22
3 Produto Escalar **23**
3.1 Exercícios 28
3.2 Exercícios Computacionais 30
4 Produto Vetorial **31**
4.1 Exercícios 37
4.2 Exercícios Computacionais 37
5 Produto Misto **39**
5.1 Exercícios 44
5.2 Exercícios Computacionais 44
6 Reta **45**
6.1 Relações entre retas 50
6.2 Exercícios 55
6.3 Exercícios Computacionais 56
7 Plano **57**
7.1 Relações entre planos 58
7.2 Equações Paramétricas do Plano 61
7.3 Exercícios 62
7.4 Exercícios Computacionais 63
8 Matrizes **65**
8.1 Tipos de Matrizes 65
8.2 Operações de Matrizes 67
8.3 Exercícios 72
8.4 Exercícios Computacionais 72
9 Sistemas Lineares **75**
9.1 Operações em Sistemas Lineares 76
9.2 Soluções de Sistemas Lineares 81
9.3 Métodos para Solução de Sistemas 83
9.3.1 Eliminação de Gauss-Jordan 83
9.3.2 Eliminação de Gauss 84
9.3.3 Decomposição LU 86
9.4 Exercícios 89
9.5 Exercícios Computacionais 90

10 Determinantes **93**
10.1 Propriedades do Determinante 95
10.2 Determinante por Triangularização 95
10.3 Determinante pelo Teorema de Laplace 97
10.4 Exercícios 101
10.5 Exercícios Computacionais 102
11 Matrizes Inversas **103**
11.1 Matriz Adjunta 103
11.2 Eliminação de Gauss-Jordan 106
11.3 Propriedades da Matriz Inversa 107
11.4 Exercícios 108
11.5 Exercícios Computacionais 109
12 Espaços Vetoriais **111**
12.1 Combinação Linear 114
12.2 Dependência Linear 117
12.3 Base de um Espaço Vetorial 119
12.3.1 Mudança de Base 125
12.4 Exercícios 129
12.5 Exercícios Computacionais 130
13 Transformações Lineares **133**
13.1 Transformações no $\mathbb{R}^2$ 135
13.2 Propriedades das Transformações Lineares 140
13.3 Exercícios 145
13.4 Exercícios Computacionais 146

1 Introdução

Esta apostila foi desenvolvida para o curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear, no Instituto Federal Goiano, Campus Rio Verde. Nela, consta o conteúdo ministrado no curso, com exemplos e exercícios.

A Geometria Analítica é a junção de técnicas de Geometria e Álgebra para problemas matemáticos. Assim, por meio dessas duas perspectivas, é possível associar estruturas geométricas a equações algébricas visando a resolução de aplicações. Já a Álgebra Linear advém de técnicas de resolução de sistemas lineares, por meio de estruturas matemáticas como vetores e matrizes.

Aproveitem!

2 Vetores

Com o foco em Ciência da Computação, o estudo de vetores será abordado a partir de três perspectivas: (1) geométrico; (2) algébrico; e (3) computacional.

Para chegar aos vetores, é interessante relembrar algumas noções primitivas: ponto, reta, plano, espaço.

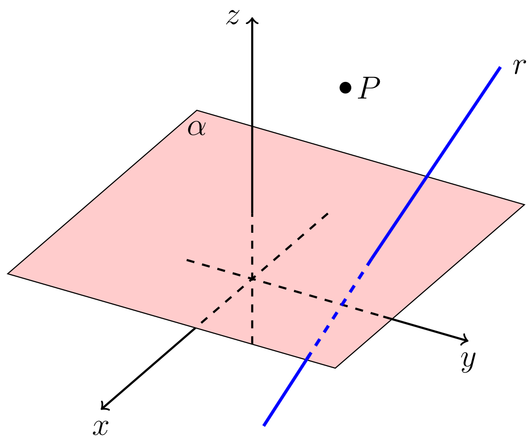
Ponto: Um ponto determina uma posição no espaço. Os pontos não possuem forma nem dimensão, seja comprimento, largura ou profundidade;

Reta: Uma reta é um elemento unidimensional formado por um número infinito de pontos distribuídos em uma determinada direção. Considera-se que tem comprimento, mas não possui largura ou profundidade;

Plano: Um plano é um elemento bidimensional e pode ser considerado como um conjunto infinito de retas não coincidentes, paralelas e dispostas lado a lado. Considera-se que tem comprimento e largura, mas não possui profundidade;

Espaço: Um espaço é um elemento tridimensional e pode ser considerado como um conjunto infinito de planos não coincidentes, paralelos e sobrepostos. Considera-se que tem comprimento, largura e profundidade;

A Figura abaixo apresenta um ponto P, uma reta r e um plano α contidos num espaço cartesiano.



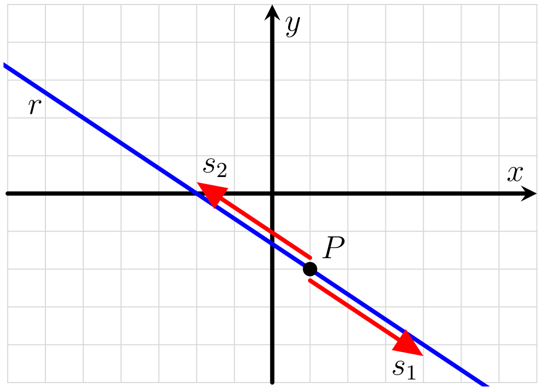
Um ponto no plano cartesiano ou $\mathbb{R}^2$ possui duas coordenadas (x, y). No espaço cartesiano ou $\mathbb{R}^3$ possui três coordenadas (x, y, z). Vale ressaltar, que a ordem das coordenadas deve ser mantida fixa.

Geometricamente, só consideramos espaços de no máximo três dimensões. Já algebricamente, podemos considerar espaços com mais de três dimensões, que são denominados *hiperespaços*. Se o hiperespaço possui n dimensões ($\mathbb{R}^n$), então um ponto contido nele possui n coordenadas, i.e.:

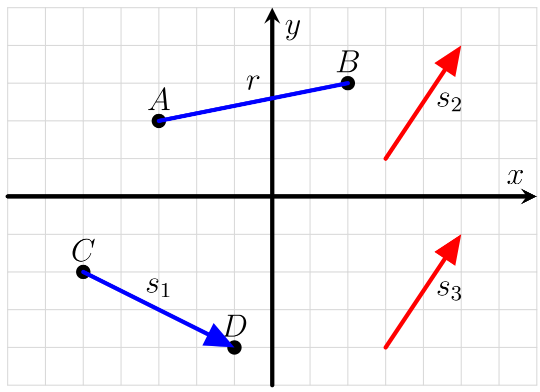
$$P = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n.$$

Computacionalmente, um ponto P de um espaço com n dimensões pode ser considerado como um vetor de tamanho n, em que cada unidade do vetor é uma coordenada do ponto.

Para qualquer reta r no plano cartesiano (ou qualquer espaço com mais de 2 dimensões), temos que a sua inclinação define uma direção, que por sua vez, possui dois sentidos. Na Figura abaixo, podemos fixar um ponto P na reta r e apresentar os dois sentidos s_1 e s_2. Assim, relembramos mais dois conceitos: **direção** e **sentido**.



Sabemos que a reta é um elemento unidimensional que define uma direção e se estende infinitamente nos dois sentidos. Entretanto, podemos escolher um segmento dessa reta, ou seja, uma parte com um comprimento limitado dessa reta. Por último, podemos ainda estabelecer um sentido único para esse segmento, assim definindo um **segmento orientado**. A Figura abaixo mostra: um segmento de reta r, limitado entre os pontos A e B; um segmento orientado s_1, limitado pelos pontos C e D; e os segmentos orientados s_2 e s_3. Observe que os segmentos orientados s_2 e s_3 possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. Quando segmentos orientados têm estas três características iguais, podemos denominá-los **equipolentes**.



A partir destes elementos geométricos, podemos definir vetores.

Definição 2.1 *Um vetor é um conjunto de segmentos orientados equipolentes. Ou seja, são como flechas com três características principais: (1) comprimento; (2) direção; e (3) sentido.*

Em geral, para denotar vetores, podemos usar uma letra acompanhada de uma seta sobrescrita (por exemplo $\vec{u}$), ou então podemos usar os pontos dos limites do vetor (origem e destino), também com uma seta sobrescrita (por exemplo $\overrightarrow{AB}$, com origem no ponto A e destino no ponto B). **Um vetor é definido por coordenadas**, assim como um ponto. Os vetores mais usuais estão no plano $\mathbb{R}^2$ e espaço $\mathbb{R}^3$, mas vetores no $\mathbb{R}^n$ também são utilizados. A representação de um vetor $\vec{u}$ é dada, nos três espaços citados, por:

$$\vec{u} = (x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = (x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Podemos determinar um vetor pela diferença entre os pontos de origem e de destino deste vetor. No plano $\mathbb{R}^2$, dado um ponto de origem $A = (x_A, y_A)$ e o ponto de destino $B = (x_B, y_B)$ então o vetor $\overrightarrow{AB}$ será dado por:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_B, y_B) - (x_A, y_A)$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

No espaço $\mathbb{R}^3$, dado um ponto de origem $A = (x_A, y_A, z_A)$ e o ponto de destino $B = (x_B, y_B, z_B)$ então o vetor $\overrightarrow{AB}$ será dado por:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_B, y_B, z_B) - (x_A, y_A, z_A)$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

No hiperespaço $\mathbb{R}^n$, dado um ponto de origem $A = (x_0^A, x_1^A, \ldots, x_{n-1}^A)$ e o ponto de destino $B = (x_0^B, x_1^B, \ldots, x_{n-1}^B)$ então o vetor $\overrightarrow{AB}$ será dado por:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_0^B, x_1^B, \ldots, x_{n-1}^B) - (x_0^A, x_1^A, \ldots, x_{n-1}^A)$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_0^B - x_0^A, x_1^B - x_1^A, \ldots, x_{n-1}^B - x_{n-1}^A)$$

O comprimento de um vetor $\vec{u} = (x, y)$ no plano $\mathbb{R}^2$, definido como $|\vec{u}|$, pode ser obtido por meio da relação de Pitágoras:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

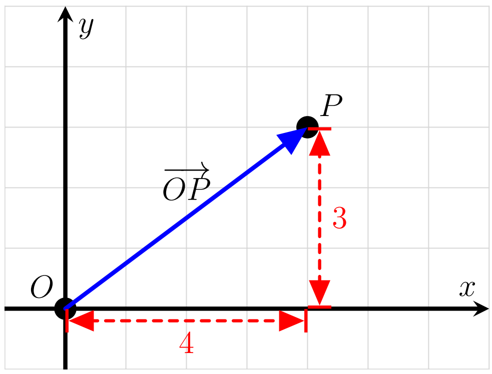
A relação pitagórica pode ser estendida para o comprimento do vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ no espaço $\mathbb{R}^3$:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

E por fim, estendida para calcular o comprimento de qualquer vetor $\vec{u} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ no espaço $\mathbb{R}^n$:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}.$$

Exemplo 2.1 *Na Figura abaixo, considere o ponto $P = (4, 3)$ no plano cartesiano. Calcule o vetor $\overrightarrow{OP}$, $O = (0, 0)$. Determine o seu comprimento.*



Solução: Observe que o vetor $\overrightarrow{OP}$ se deslocou quatro unidades na horizontal, no sentido positivo do eixo x e três unidades na vertical, no sentido positivo do eixo y. Assim, é natural que o vetor $\overrightarrow{OP}$ possa ser definido como:

$$\overrightarrow{OP} = (4,3) \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Podemos também obter o vetor $\overrightarrow{OP}$, por meio da diferença entre os pontos:

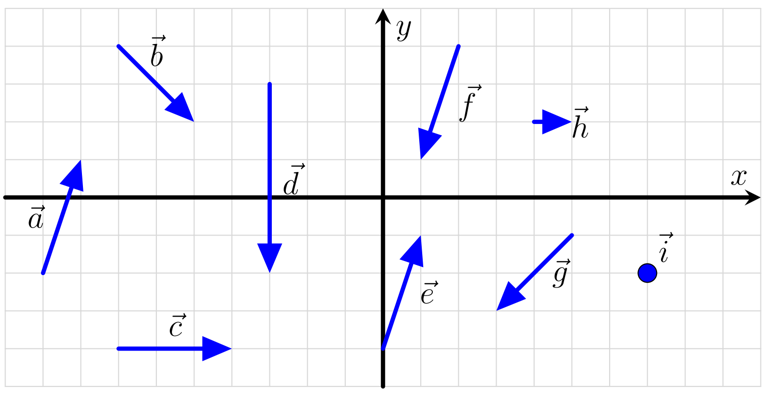
$$\overrightarrow{OP} = P - O = (4,3) - (0,0) = (4-0, 3-0)$$
$$\overrightarrow{AB} = (4,3)$$

O comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$, denotado $\left|\overrightarrow{OP}\right|$, pode ser calculado facilmente por meio do Teorema de Pitágoras.

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$
$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{25} = 5 \text{ u.c.}$$

Portanto, o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$ é de 5 unidades de comprimento. Note que o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$ é a distância entre os pontos O e P.

Exemplo 2.2 *Determine os vetores indicados abaixo e o comprimento de cada um deles:*



Solução: Para cada vetor, teremos um par (x,y) que o representa, sendo que os sentidos horizontal a direita e vertical para cima são positivos. Além disso, o comprimento de um vetor $\vec{u}$ no $\mathbb{R}^2$ é dado por $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\vec{a} = (1, 3)$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$
$$\vec{b} = (2, -2)$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$
$$\vec{c} = (3, 0)$$
$$|\vec{c}| = 3$$
$$\vec{d} = (0, -5)$$
$$\left|\vec{d}\right| = 5$$
$$\vec{e} = (1, 3)$$
$$|\vec{e}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$
$$\vec{f} = (-1, -3)$$
$$\left|\vec{f}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$
$$\vec{g} = (-2, -2)$$
$$|\vec{g}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$
$$\vec{h} = (1, 0)$$
$$\left|\vec{h}\right| = 1$$
$$\vec{i} = (0, 0)$$
$$\left|\vec{i}\right| = 0$$

Observe que:

- Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{e}$ são **iguais**, pois possuem o mesmo comprimento, direção e sentido.

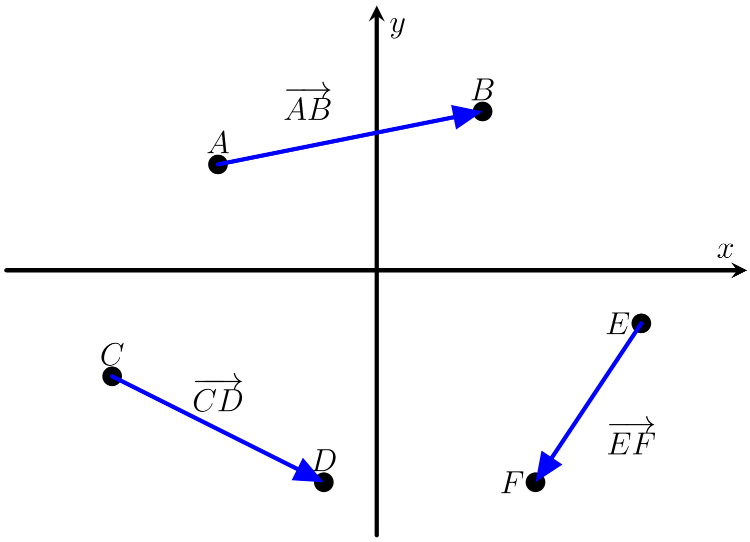
- Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{f}$ são **opostos**, pois possuem o mesmo comprimento e direção, mas têm sentidos opostos.

- O vetor $\vec{h}$ tem comprimento unitário. Vetores cujo comprimento é igual a 1 são denominados vetores **unitários**.

- O vetor $\vec{i}$ tem comprimento zero, o que o caracteriza como vetor **nulo**.

- Os vetores $\vec{c}$ e $\vec{h}$ são **colineare**s, pois possuem a mesma direção. Os vetores $\vec{a}$, $\vec{e}$ e $\vec{f}$ também são colineares entre si.

Exemplo 2.3 *Determine os vetores indicados abaixo e o comprimento de cada um deles, sabendo que:* $A(-3, 2)$, $B(2, 3)$, $C(-5, -2)$, $D(-1, -4)$, $E(5, -1)$ *e* $F(3, -4)$.



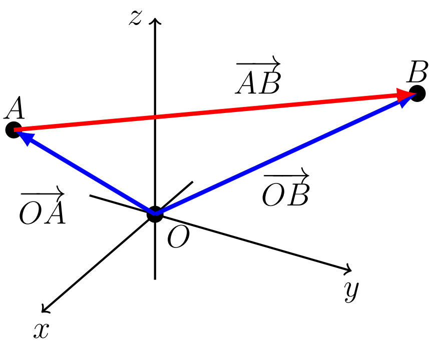
Solução: Determinando os vetores como uma diferença entre os pontos e em seguida calculando o seu comprimento:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,3) - (-3,2) = (2-(-3), 3-2) = (5,1)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}$$
$$\overrightarrow{CD} = D - C = (-1,-4) - (-5,-2) = (-1-(-5), -4-(-2)) = (4,-2)$$
$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(4^2+(-2)^2} = \sqrt{20}$$
$$\overrightarrow{EF} = F - E = (3,-4) - (5,-1) = (3-5, -4-(-1)) = (-2,-3)$$
$$\left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$$

Note que o comprimento dos vetores são as distâncias entre os pontos de origem e destino.

Para vetores no espaço, adotamos um procedimento análogo, analizando coordenada a coordenada.

Exemplo 2.4 *Determine os vetores indicados abaixo e o comprimento de cada um deles, sabendo que:* $O(0,0,0)$, $A(2,-1,2)$, $B(0,4,3)$.



Solução: Determinando os vetores como uma diferença entre os pontos e em seguida calculando o seu comprimento:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (2,-1,2) - (0,0,0) = (2-0, -1-0, 2-0) = (2,-1,2)$$
$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(2^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (0,4,3) - (0,0,0) = (0-0, 4-0, 3-0) = (0,4,3)$$
$$\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{(0^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,4,3) - (2,-1,2) = (0-2, 4-(-1), 3-2) = (-2,5,1)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{((-2)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$

Analogamente ao $\mathbb{R}^2$, o comprimento dos vetores são as distâncias entre os pontos de origem e destino.

Analogamente, estendendo o procedimento para vetores de qualquer hiperespaço, basta manter a análise coordenada a coordenada.

Exemplo 2.5 *Dados os pontos no* $\mathbb{R}^5$*:* $O(0,0,0,0,0)$*,* $A(2,-1,2,0,-4)$ *e* $B(0,4,3,-1,-2)$*, determine os vetores* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{AB}$*. Determine também o comprimento deles.*

Solução: Determinando os vetores como uma diferença entre os pontos e em seguida calculando o seu comprimento:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (2,-1,2,0,-4) - (0,0,0,0,0) = (2,-1,2,0,-4)$$
$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(2^2 + (-1)^2 + 2^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,4,3,-1,-2) - (2,-1,2,0,-4)$$
$$\overrightarrow{AB} = (0-2, 4-(-1), 3-2, -1-0, -2-(-4)) = (-2,5,1,-1,2)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{((-2)^2 + 5^2 + 1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{35}$$

Como nos espaços dos exemplos anteriores, o comprimento dos vetores são as distâncias entre os pontos de origem e destino.

2.1 Operações entre vetores

Soma de Vetores

Dados dois vetores podemos fazer a **soma de vetores** dispondo-os de maneira a formar um caminho de vetores. O vetor a partir da origem inicial até o destino final é o vetor soma. Algebricamente, a soma de dois vetores se dá pela soma coordenada por coordenada. Assim, no $\mathbb{R}^2$, dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_u, y_u) + (x_v, y_v) = (x_u + x_v, y_u + y_v).$$

No $\mathbb{R}^3$, dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_u, y_u, z_u) + (x_v, y_v, z_u) = (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v).$$

No $\mathbb{R}^n$, dados os vetores $\vec{u} = (x_0^u, x_1^u, \ldots, x_{n-1}^u)$ e $\vec{v} = (x_0^v, x_1^v, \ldots, x_{n-1}^v)$:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_0^u, x_1^u, \ldots, x_{n-1}^u) + (x_0^v, x_1^v, \ldots, x_{n-1}^v)$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_0^u + x_0^v, x_1^u + x_1^v, \ldots, x_{n-1}^u + x_{n-1}^v).$$

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer:

(i) **Comutativa:** $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;

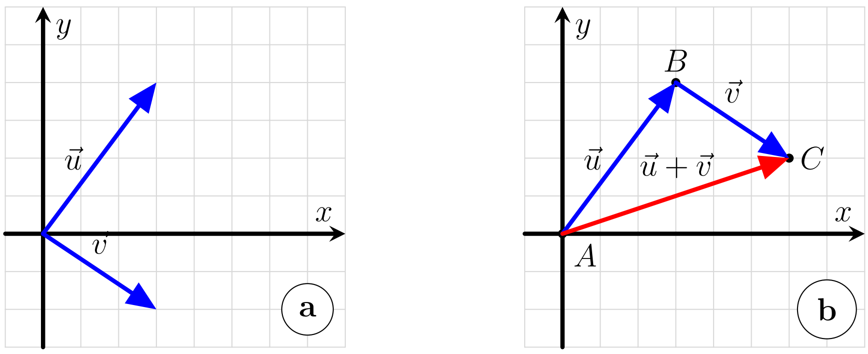
(ii) **Associativa:** $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$;

(iii) **Vetor Nulo:** $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$;

(iv) **Vetor Oposto:** $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

Exemplo 2.6 *Dados os vetores $\vec{u}=(3,4)$ e $\vec{v}=(3,-2)$, calcule o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$. Determine o comprimento destes vetores.*

Solução: Os vetores $\vec{u}=(3,4)$ e $\vec{v}=(3,-2)$ são os vetores da figura (a). Na figura (b), os vetores estão dispostos em um caminho, ou seja, fixada uma origem (ponto A) e percorrendo os vetores $\vec{u}$ (até o ponto B) e em seguida percorrendo o vetor $\vec{v}$ (partindo do ponto B), chegamos ao destino (ponto C). Assim, o vetor soma é dado pelo vetor $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$.



Algebricamente:

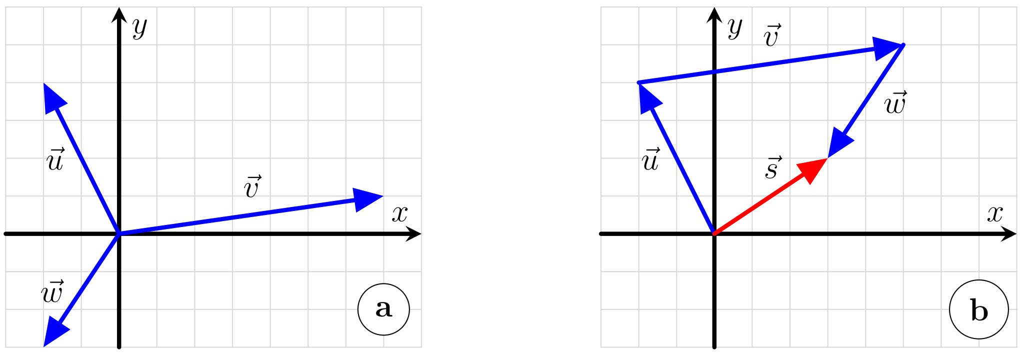
$$\vec{u}+\vec{v}=(3,4)+(3,-2)=(3+3,4+(-2))=(6,2)$$
$$|\vec{u}|=\sqrt{(3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$
$$|\vec{v}|=\sqrt{(3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$$
$$|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{(6^2+2^2}=\sqrt{40}$$

Observe que, pela desigualdade triangular:

$$|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|\,.$$

Exemplo 2.7 *Dados os vetores $\vec{u}=(-2,4)$, $\vec{v}=(7,1)$ e $\vec{w}=(-2,-3)$, calcule o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.*

Solução: Os vetores $\vec{u}=(-2,4)$, $\vec{v}=(7,1)$ e $\vec{w}=(-2,-3)$ são os vetores da figura (a). Na figura (b), os vetores estão dispostos em um caminho, começando por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, tendo a soma $\vec{s}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ como o vetor em vermelho.



Algebricamente:

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (-2, 4) + (7, 1) + (-2, -3)$$
$$\vec{s} = (-2 + 7 + (-2), 4 + 1 + (-3)) = (3, 2)$$

Observe que, pela desigualdade triangular:

$$|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|\,.$$

Exemplo 2.8 *Dados os vetores* $\vec{u} = (-1, 2, 2)$ *e* $\vec{v} = (4, -2, 2)$*, calcule o vetor soma* $\vec{u} + \vec{v}$*. Determine o comprimento destes vetores.*

Solução: Calculando a soma dos vetores algebricamente:

$$\vec{u} + \vec{v} = (-1, 2, 2) + (4, -2, 2) = (-1 + 4, 2 + (-2), 2 + 2) = (3, 0, 4)$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{((-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{24}$$
$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Observe que, pela desigualdade triangular:

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|\,.$$

Diferença de Vetores

Dados dois vetores, a **diferença de vetores** é a soma de um vetor com o oposto do outro vetor. Algebricamente, a diferença de dois vetores se dá pela subtração coordenada por coordenada. Assim, no $\mathbb{R}^2$, dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$:

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_u, y_u) - (x_v, y_v) = (x_u - x_v, y_u - y_v).$$

No $\mathbb{R}^3$, dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$:

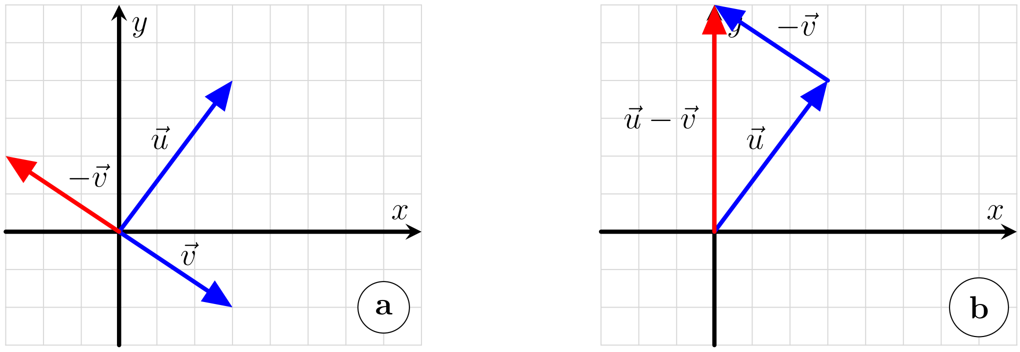
$$\vec{u} - \vec{v} = (x_u, y_u, z_u) - (x_v, y_v, z_u) = (x_u - x_v, y_u - y_v, z_u - z_v).$$

No $\mathbb{R}^n$, dados os vetores $\vec{u} = (x_0^u, x_1^u, \ldots, x_{n-1}^u)$ e $\vec{v} = (x_0^v, x_1^v, \ldots, x_{n-1}^v)$:

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_0^u, x_1^u, \ldots, x_{n-1}^u) - (x_0^v, x_1^v, \ldots, x_{n-1}^v)$$
$$\vec{u} - \vec{v} = (x_0^u - x_0^v, x_1^u - x_1^v, \ldots, x_{n-1}^u - x_{n-1}^v).$$

Exemplo 2.9 *Dados os vetores* $\vec{u} = (3, 4)$ *e* $\vec{v} = (3, -2)$*, calcule o vetor diferença* $\vec{u} - \vec{v}$*. Determine o comprimento destes vetores.*

Solução: Os vetores $\vec{u} = (3,4)$, $\vec{v} = (3,-2)$ e o seu oposto $-\vec{v} = (-3,2)$ são os vetores da figura (a). Na figura (b) é feita a soma do vetor $\vec{u}$ e o vetor $-\vec{v}$. Assim:



Algebricamente:

$$\vec{u}+\vec{v} = (3,4)-(3,-2) = (3-3, 4-(-2)) = (0,6)$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{(3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$|-\vec{v}| = |\vec{v}| = \sqrt{(3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$$
$$|\vec{u}-\vec{v}| = 6$$

Observe que, pela desigualdade triangular:

$$|\vec{u}-\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|\,.$$

Exemplo 2.10 *Dados os vetores* $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (2,-2,0)$ *e* $\vec{w} = (3,0,3)$, *no* $\mathbb{R}^3$, *calcule:*

(a) $\vec{w}-\vec{v}$*;*

(b) $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$*;*

Solução: Algebricamente:

$$\text{(a) } \vec{w}-\vec{v} = (3,0,3)-(2,-2,0) = (3-2, 0-(-2), 3-0) = (1,2,3)$$
$$\text{(b) } \vec{u}+\vec{v}-\vec{w} = (1,2,3)+(2,-2,0)-(3,0,3)$$
$$\vec{u}+\vec{v}-\vec{w} = (1+2-3, 2+(-2)-0, 3+0-3) = (0,0,0)$$

Produto de Vetor por Escalar

A **multiplicação de um vetor por escalar** dá escala a um vetor, aumentando-o, diminuindo-o, e até mesmo invertendo o seu sentido. Algebricamente, a multiplicação de um vetor por escalar se dá pelo produto de cada coordenada do vetor pelo escalar. Assim, no $\mathbb{R}^2$, dado um vetor $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot (x_u, y_u) = (\alpha \cdot x_u, \alpha \cdot y_u).$$

No $\mathbb{R}^3$, dado um vetor $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot (x_u, y_u, z_u) = (\alpha \cdot x_u, \alpha \cdot y_u, \alpha \cdot z_u).$$

No $\mathbb{R}^n$, dado um vetor $\vec{u} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$
$$\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha \cdot x_0, \alpha \cdot x_1, \ldots, \alpha \cdot x_{n-1})$$

O valor de α determina a proporção do vetor original $\vec{u}$ que será utilizada. Dessa forma:

(a) O vetor muda de sentido quando $\alpha < 0$;

(b) Há um aumento do comprimento do vetor $\vec{u}$ quando multiplicado por $|\alpha| > 1$;

(c) Há uma redução do comprimento do vetor $\vec{u}$ quando multiplicado por $0 < |\alpha| < 1$.

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(i) **Associativa:** $\alpha \cdot (\beta\vec{u}) = (\alpha \cdot \beta)\vec{u}$;

(ii) **Distributiva:** $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;

(iii) **Distributiva:** $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;

(iv) **Identidade:** $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$;

(v) **Vetor Oposto:** $-1 \cdot \vec{u} = -\vec{u}$;

(vi) **Vetor Nulo:** $0 \cdot \vec{u} = -\vec{u}$;

Por fim, a noção do produto de um escalar por um vetor pode ser utilizada para determinar se dois vetores são paralelos. **Dois vetores paralelos possuem a mesma direção.** Assim, se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos (ou $\vec{u} \mid\mid \vec{v}$), existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

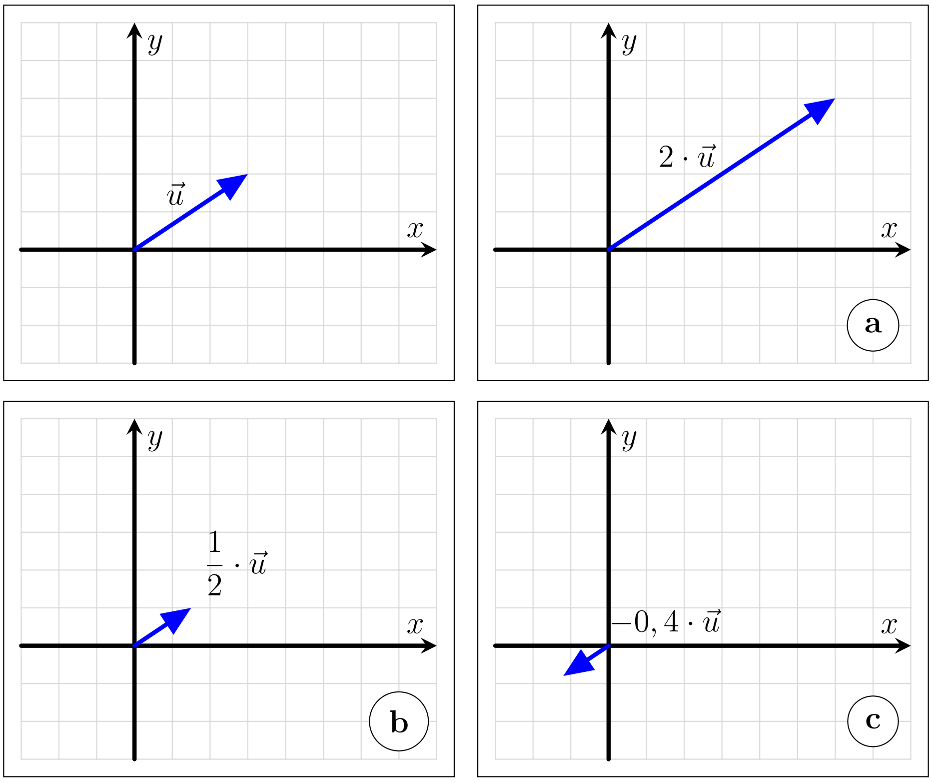
$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$$
$$(x_0^u, x_1^u, \ldots, x_{n-1}^u) = \alpha \cdot (x_0^v, x_1^v, \ldots, x_{n-1}^v) = (\alpha \cdot x_0^v, \alpha \cdot x_1^v, \ldots, \alpha \cdot x_{n-1}^v)$$
$$\begin{cases} x_0^u = \alpha \cdot x_0^v \\ x_1^u = \alpha \cdot x_1^v \\ \vdots \\ x_{n-1}^u = \alpha \cdot x_{n-1}^v \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \frac{x_0^u}{x_0^v} = \frac{x_1^u}{x_1^v} = \cdots = \frac{x_{n-1}^u}{x_{n-1}^v}$$

Portanto, se a razão coordenada a coordenada for igual, ou seja, se as coordenadas forem proporcionais, então os vetores são paralelos.

Exemplo 2.11 *Dado o vetor $\vec{u} = (3, 2)$, calcule os vetores abaixo. Determine o comprimento destes vetores.*

(a) $2 \cdot \vec{u}$; *(b)* $\frac{1}{2} \cdot \vec{u}$; *(c)* $-0,4 \cdot \vec{u}$;

Solução: O vetor $\vec{u} = (3, 2)$ e as soluções dos itens (a), (b) e (c) estão representados nas figuras abaixo.



Algebricamente:

$$\text{(a) } 2 \cdot \vec{u} = 2 \cdot (3, 2) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 2) = (6, 4)$$
$$\text{(b) } \frac{1}{2} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2} \cdot (3, 2) = (\frac{1}{2} \cdot 3, \frac{1}{2} \cdot 2) = (\frac{3}{2}, 1)$$
$$\text{(c) } -0,4 \cdot \vec{u} = -0,4 \cdot (3, 2) = (-0,4 \cdot 3; -0,4 \cdot 2) = (-1,2; -0,8)$$

Quanto às distâncias:

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$
$$|2 \cdot \vec{u}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2 \cdot \sqrt{13}$$
$$\left|\frac{1}{2} \cdot \vec{u}\right| = \sqrt{1,5^2 + 1^2} = \sqrt{3,25} = 0,5 \cdot \sqrt{13}$$
$$|-0,4 \cdot \vec{u}| = \sqrt{(-1,2)^2 + (-0,8)^2} = \sqrt{2,08} = 0,4 \cdot \sqrt{13}$$

Observe que o vetor $\vec{u}$ ao ser multiplicado por α tem seu comprimento $|\vec{u}|$ também multiplicado por α.

Exemplo 2.12 *Dados os vetores* $\vec{u}(1, 2, -2)$, $\vec{v}(3, 6, -6)$ *e* $\vec{w}(-0,5; -1, 1)$, *paralelos entre si. Determine o escalar que satisfaz:*

(a) $\vec{v} = \alpha\vec{u}$; *(b)* $\vec{u} = \beta\vec{v}$; *(c)* $\vec{w} = \gamma\vec{u}$;

Solução: Como os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos, então eles possuem a mesma direção. Assim, calculando o valor do escalar em cada questão:

$$\text{(a) } \vec{v} = \alpha\vec{u}$$

$$(3, 6, -6) = \alpha(1, 2, -2) = (\alpha, 2\alpha, -2\alpha)$$

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ 2\alpha = 6 \qquad \Rightarrow \alpha = 3 \\ -2\alpha = -6 \end{cases}$$

Note que para toda coordenada o escalar α deve ter o mesmo valor. E se isso não tivesse acontecido? Nesse caso, então, os vetores não seriam paralelos, ou seja, não teriam a mesma direção.

$$\text{(b) } \vec{u} = \beta\vec{v}$$

$$(1, 2, -2) = \beta(3, 6, -6) = (3\beta, 6\beta, -6\beta)$$

$$\begin{cases} 3\beta = 1 \\ 6\beta = 2 \qquad \Rightarrow \beta = \dfrac{1}{3} \\ -6\beta = -2 \end{cases}$$

$$\text{(c) } \vec{w} = \gamma\vec{u}$$

$$(-0,5; -1, 1) = \gamma(1, 2, -2) = (\gamma, 2\gamma, -2\gamma)$$

$$\begin{cases} \gamma = -0,5 \\ 2\gamma = -1 \qquad \Rightarrow \gamma = -\dfrac{1}{2} = -0,5 \\ -2\gamma = 1 \end{cases}$$

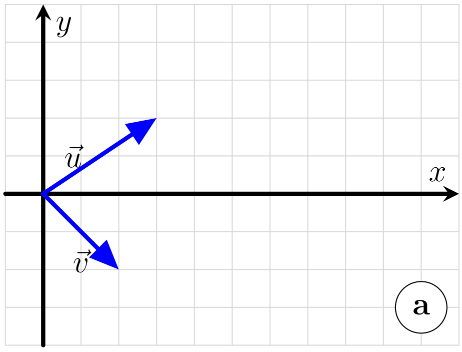
Combinação de Vetores

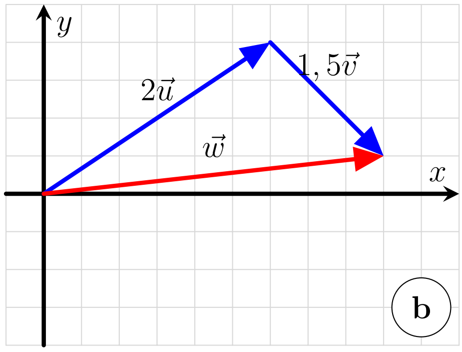
A **combinação de vetores** ocorre quando usamos as operações de soma de vetores e multiplicação de vetores por escalar. Assim, podemos ter um vetor $\vec{v}$ como uma combinação de vetores $\vec{u_0}, \vec{u_1}, \ldots, \vec{u_{n-1}}$, usando os escalares $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$:

$$\vec{v} = \alpha_0\vec{u_0} + \alpha_1\vec{u_1} + \ldots + \alpha_{n-1}\vec{u_{n-1}};$$

Exemplo 2.13 *Dados os vetores* $\vec{u} = (3, 2)$ *e* $\vec{v} = (2, -2)$*, calcule o vetor combinação* $\vec{w} = 2\vec{u} + 1,5\vec{v}$.

Solução: Os vetores $\vec{u} = (3, 2)$ e $\vec{v} = (2, -2)$ são os vetores da figura (a). Na figura (b), os vetores estão em escala e dispostos em um caminho. Assim, o vetor combinação é dado pelo vetor $\vec{w} = 2\vec{u} + 1,5\vec{v}$.





Algebricamente:

$$\vec{w} = 2\vec{u} + 1,5\vec{v}$$
$$\vec{w} = 2(3,2) + 1,5(2,-2)$$
$$\vec{w} = (6,4) + (3,-3)$$
$$\vec{w} = (9,1)$$

Observe, que qualquer vetor no $\mathbb{R}^2$ poderia ser escrito como uma combinação dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exemplo 2.14 *Dados os vetores $\vec{u} = (2,1)$, $\vec{v} = (-1,2)$ e $\vec{w} = (5,0)$, calcule $\vec{w}$ como combinação dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

Solução: Como queremos calcular $\vec{w}$ em função dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos, algebricamente:

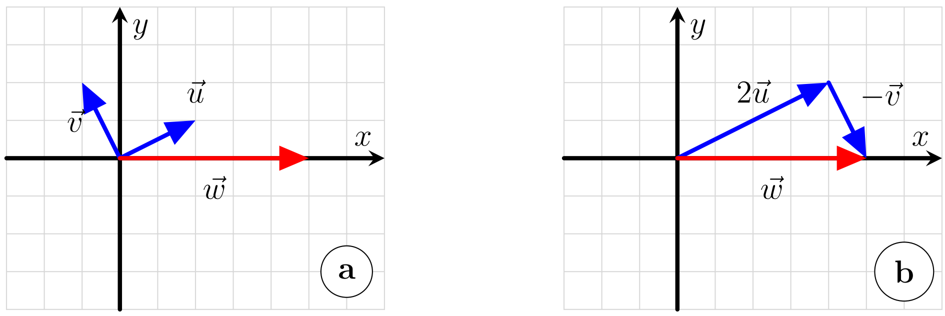
$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
$$(5,0) = \alpha(2,1) + \beta(-1,2)$$
$$(5,0) = (2\alpha, \alpha) + (-\beta, 2\beta)$$
$$(5,0) = (2\alpha - \beta, \alpha + 2\beta)$$
$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 5 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

Por fim, chegamos em um sistema de equações com as variáveis α e β. Resolvendo-o, chegamos a conclusão que $\alpha = 2$ e $\beta = -1$. Vamos conferir?

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 2(2,1) - 1(-1,2)$$
$$\vec{w} = (4,2) + (1,-2) = (5,0).$$

Portanto, o resultado está correto!

Geometricamente, mostramos os vetores $\vec{u} = (2,1)$, $\vec{v} = (-1,2)$ e $\vec{w} = (5,0)$ na figura (a). Na figura (b), dispomos a combinação feita pelos vetores.



Exemplo 2.15 *Dados os vetores* $\vec{u} = (2, 1, 2)$*,* $\vec{v} = (1, 2, 2)$ *e* $\vec{w} = (0, 0, 1)$*, é possível obter o vetor* $(1, -1, 3)$ *como combinação dos três vetores?*

Solução: Para calcular essa combinação:

$$(1, -1, 3) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w},\ \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

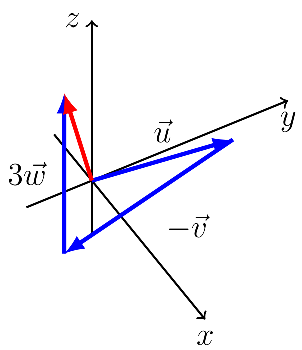
$$(1, -1, 3) = \alpha(2, 1, 2) + \beta(1, 2, 2) + \gamma(0, 0, 1)$$

$$(1, -1, 3) = (2\alpha, \alpha, 2\alpha) + (\beta, 2\beta, 2\beta) + (0, 0, \gamma)$$

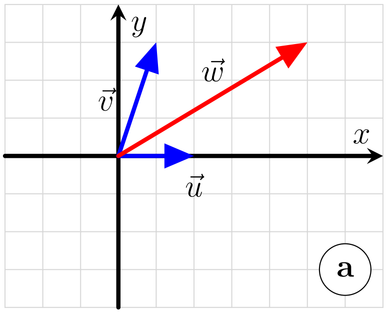
$$(1, -1, 3) = (2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, 2\alpha + 2\beta + \gamma)$$

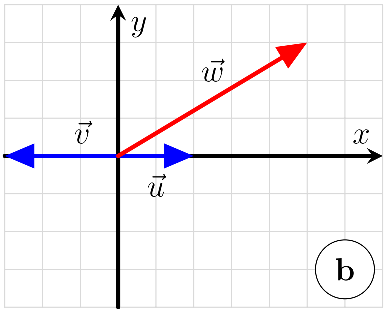
$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = -1 \\ 2\alpha + 2\beta + \gamma = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

Geometricamente, o resultado pode ser verificado abaixo:



Dados alguns vetores do $\mathbb{R}^n$, é sempre possível obter um vetor $\vec{u}$ como uma combinação dos vetores dados? A resposta é não. Algebricamente, só poderá ocorrer quando o sistema obtido para calcular os escalares é determinado. Geometricamente, no plano $\mathbb{R}^2$, bastam dois vetores não-colineares $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que qualquer outro vetor pode ser escrito como a combinação de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ fossem colineares, ou seja, com a mesma direção, então os vetores com direções diferentes não poderiam ser escritos como combinação de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Nas figuras (a) e (b), é possível obter o vetor $\vec{w}$ como combinação de $\vec{u}$ e $\vec{v}$?





Na figura (a) sim, basta ter $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$. Entretanto, na figura (b), não é possível estabelecer uma combinação. Quaisquer dois vetores do $\mathbb{R}^2$ não-colineares formam o que chamamos de **base**, ou seja, um conjunto mínimo de vetores do plano que consegue obter todos os outros vetores. No plano $\mathbb{R}^2$, a base mais utilizada é a **base canônica**, formada pelos vetores $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$.

No espaço $\mathbb{R}^3$, são necessários três vetores não-coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ que qualquer outro vetor pode ser escrito como a combinação de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Se os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ fossem coplanares, ou seja, dentro de um mesmo plano, então os vetores com direções que atravessam o plano não poderiam ser escritos como combinação de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Analogamente ao plano, quaisquer três vetores não-coplanares do espaço formam uma **base** do $\mathbb{R}^3$, ou seja, um conjunto mínimo de vetores do espaço que consegue obter todos os outros vetores. No espaço $\mathbb{R}^3$, a base mais utilizada é a **base canônica**, formada pelos vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

No hiperespaço $\mathbb{R}^n$, são necessários n vetores que não estejam num mesmo hiperplano $\vec{u_0}$, $\vec{u_1}$, …, $\vec{u_{n-1}}$, que qualquer outro vetor pode ser escrito como a combinação desse conjunto de vetores. Analogamente ao plano e o espaço, quaisquer n vetores não-cohiperplanares do hiperespaço de dimensão n formam uma **base** do $\mathbb{R}^n$, ou seja, um conjunto mínimo de vetores do espaço que consegue obter todos os outros vetores. No espaço $\mathbb{R}^n$, a base mais utilizada é a **base canônica**, formada pelos vetores:

$$\vec{e_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e_{n-1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.16 *Dada a base canônica do espaço* $\mathbb{R}^4$*, obtenha o vetor* $(1, -1, 0, 3)$ *como combinação dos vetores dessa base.*

Solução: A base canônica no $\mathbb{R}^4$ é dada por:

$$\vec{e_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para calcular essa combinação:

$$(1, -1, 0, 3) = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \;\; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

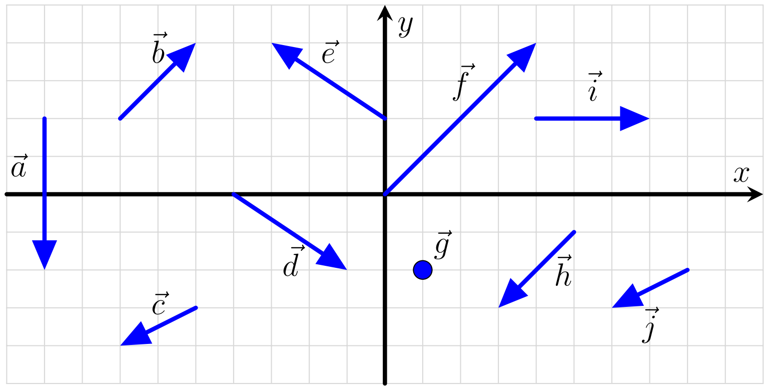
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases}$$

2.2 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Determine os vetores indicados abaixo e o comprimento de cada um deles. Indique algumas relações entre os vetores (colineares, iguais, opostos, unitários, nulos).



2. Dados os pontos $A(0,-2)$, $B(2,3)$, $C(-1,2)$, $D(-1,-2)$, determine os vetores abaixo e seus respectivos comprimentos. Faça um esboço dos vetores no plano cartesiano.

   (a) $\overrightarrow{AB}$; (b) $\overrightarrow{BC}$; (c) $\overrightarrow{CD}$; (d) $\overrightarrow{DA}$;

3. Dados os pontos $O = (0,0,0)$, $A(1,-2,2)$, $B(4,0,3)$ e $C(-2,0,-3)$, determine os vetores abaixo e seus respectivos comprimentos. Faça um esboço dos vetores no espaço.

   (a) $\overrightarrow{OA}$; (b) $\overrightarrow{AB}$; (c) $\overrightarrow{AC}$; (d) $\overrightarrow{CB}$;

4. Dados os pontos no $\mathbb{R}^4$: $O = (0,0,0,0)$, $A(2,-1,2,0)$ e $B(0,4,3,-1)$ e $C(-1,1,-1,1)$, determine os vetores abaixo e seus respectivos comprimentos. Nesse é melhor não fazer esboço.

   (a) $\overrightarrow{OC}$; (b) $\overrightarrow{AB}$; (c) $\overrightarrow{AC}$; (d) $\overrightarrow{CB}$;

5. Determine o ponto B do vetor $\overrightarrow{AB}$, dado o ponto de origem A, para os casos a seguir:

   (a) $A = (0,0)$, $\overrightarrow{AB} = (2,-1)$;
   (b) $A = (2,-1)$, $\overrightarrow{AB} = (-2,1)$;
   (c) $A = (1,2,-1)$, $\overrightarrow{AB} = (2,1,-1)$;
   (d) $A = (1,1,-1,-1)$, $\overrightarrow{AB} = (-1,1,2,-1)$;

6. Faça o esboço no plano cartesiano dos seguintes vetores:

(a) $\vec{u} = (0, 3)$;
(b) $\vec{v} = (1, 3)$;
(c) $\vec{w} = (2, 3)$;
(d) $\vec{r} = (2, -3)$;
(e) $\vec{s} = (-2, 3)$;
(f) $\vec{t} = (-1, -3)$;

7. Faça o esboço no espaço dos seguintes vetores:

(a) $\vec{u} = (0, 3, 0)$;
(b) $\vec{v} = (2, 3, 0)$;
(c) $\vec{w} = (0, 3, 2)$;
(d) $\vec{r} = (0, 0, -2)$;
(e) $\vec{s} = (2, 0, 2)$;
(f) $\vec{t} = (-2, 2, 1)$;

8. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (2, -1)$ e $\vec{w} = (3, 1)$, calcule:

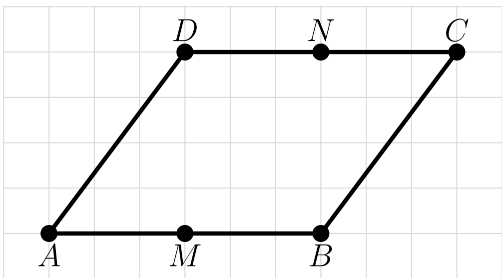
(a) $\vec{u} + \vec{v}$;
(b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$;
(c) $\vec{u} - \vec{v}$;
(d) $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$;
(e) $2\vec{u} - 3\vec{v}$;
(f) $\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$;

9. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 2, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 0)$, calcule:

(a) $\vec{u} + \vec{v}$;
(b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$;
(c) $\vec{u} - \vec{v}$;
(d) $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$;
(e) $2\vec{u} - 3\vec{v}$;
(f) $\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$;

10. Seja o paralelogramo $ABCD$, com os pontos médios M e N, como na figura abaixo. Determine, geometricamente e algebricamente:

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$;
(b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$;
(c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;
(d) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{NC}$;
(e) $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{BC}$;
(f) $\overrightarrow{ND} - \overrightarrow{MB}$;
(g) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$;
(h) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CN}$;



11. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (2, -1)$, calcule o vetor $\vec{w}$ que satisfaz a equação
$$3\vec{w} + (0, 1) = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$$

12. Dados os vetores $\vec{u} = (-1, 1, 2)$ e $\vec{v} = (0, 2, -1)$, calcule o vetor $\vec{w}$ que satisfaz a equação
$$3\vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{w}$$

13. Dados os vetores $\vec{u} = (-1, 1, -2, 2, -3, 3)$ e $\vec{v} = (0, 2, -1, -3, 0, 0)$, calcule o vetor $\vec{w}$ que satisfaz a equação
$$\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v} - \vec{w}$$

14. Dados os vetores $\vec{a} = (1, 3)$ e $\vec{b} = (-2, -1)$, determine os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que satisfazem o sistema de equações abaixo:
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ -\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \end{cases}$$

15. Dados os vetores $\vec{a} = (1, 3, -1)$ e $\vec{b} = (-2, -1, 2)$, determine os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que satisfazem o sistema de equações abaixo:
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ -\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \end{cases}$$

16. Dados os vetores $\vec{a} = (1, 3, -1, 3)$ e $\vec{b} = (-2, -1, 2, -1)$, determine os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que satisfazem o sistema de equações abaixo:
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ -\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \end{cases}$$

17. Calcule o vetor $\vec{w} = (2, 2)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (-1, 1)$ e $\vec{v} = (0, 2)$.

18. Calcule o vetor $\vec{w} = (-2, 4)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2)$.

19. Calcule o vetor $\vec{w} = (1, 2, 3)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 2)$ e $\vec{r} = (0, 1, -1)$.

20. Calcule o vetor $\vec{w} = (0, -1, 2)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (0, -1, 4)$, $\vec{v} = (0, 0, -1)$ e $\vec{r} = (1, 0, -1)$.

21. Calcule o vetor $\vec{w} = (2, 1, 1, 1)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{v} = (-1, 0, 0, 0)$, $\vec{r} = (0, 0, -1, 1)$ e $\vec{s} = (0, 0, 0, 2)$.

2.3 Exercícios Computacionais

1. Escreva um algoritmo que retorne o comprimento de um vetor de tamanho n.

2. Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de tamanho n e os escalares α, $\beta \in \mathbb{R}$. Escreva um algoritmo que retorne o vetor combinação de $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$.

3. Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de tamanho n e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Escreva um algoritmo que retorne o vetor combinação $\vec{v} = \vec{v} + \alpha \cdot \vec{u}$.

4. Sejam os vetores $\vec{u_i}$ de tamanho n e os escalares $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Escreva um algoritmo que retorne o vetor combinação $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \cdot \vec{u_i}$.

5. Sejam os vetores $\overrightarrow{Fib_i}$ de tamanho 20, com as i primeiras posições com os números de Fibonacci, para $i = 0, 1, \ldots, 19$. Por exemplo, $\overrightarrow{Fib_6} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 0, 0, \ldots, 0)$. Sejam os escalares $\alpha_i = (-1)^i$. Calcule o vetor combinação $\displaystyle\sum_{i=0}^{19} \alpha_i \cdot \overrightarrow{Fib_i}$.

3 Produto Escalar

No capítulo anterior, foram vistos vários conceitos e operações entre vetores. Nesse capítulo, ainda sob a perspectiva geométrica, algébrica e computacional, vamos ver o produto escalar entre vetores.

Definição 3.1 *O produto escalar (também conhecido como produto interno) de dois vetores é dado pela soma dos produtos coordenada a coordenada. Assim, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no $\mathbb{R}^n$, o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (ou $< \vec{u}, \vec{v} >$) entre eles é dado por:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_0^u, x_1^u, \ldots, x_{n-1}^u) \cdot (x_0^v, x_1^v, \ldots, x_{n-1}^v)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_0^u \cdot x_0^v + x_1^u \cdot x_1^v + \ldots + x_{n-1}^u \cdot x_{n-1}^v.$$

Observe que o resultado do produto é um escalar, i.e., $\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$.

O que acontece se fizermos o produto escalar de um vetor por ele mesmo?

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \cdot (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x_0 \cdot x_0 + x_1 \cdot x_1 + \ldots + x_{n-1} \cdot x_{n-1}$$
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \qquad \text{ou}$$
$$\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}.$$

O lado direito da equação acima é o cálculo do comprimento de um vetor no $\mathbb{R}^n$! Ou seja, podemos estabelecer:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2} \qquad \text{ou}$$
$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2.$$

Com isso, podemos estabelecer algumas propriedades do produto escalar.

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) **Reflexiva:** $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$ e $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$;

(ii) **Comutativa:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;

(iii) **Distributiva:** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{u} \cdot \vec{w}$;

(iv) **Vetor com escalar:** $(\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$;

(v) **Vetor nulo:** $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$;

(vi) **Vetor soma:** $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$;

(vii) **Vetor diferença:** $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$.

Exemplo 3.1 *Calcule o produto escalar dos vetores a seguir:*

(a) $\vec{u} = (1,2)$ *e* $\vec{v} = (-1,3)$*;*

(b) $\vec{u} = (1,2,3)$ *e* $\vec{v} = (0,1,-3)$*;*

(c) $\vec{u} = (1,2,3,4,5)$ *e* $\vec{v} = (-1,0,1,0,0)$*.*

Solução: Aplicando a definição de produto escalar:

$$\text{(a) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2)\cdot(-1,3) = 1\cdot(-1) + 2\cdot 3$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -1 + 6 = 5$$
$$\text{(b) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2,3)\cdot(0,1,-3) = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-3)$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 + 2 - 9 = -7$$
$$\text{(c) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2,3,4,5)\cdot(-1,0,1,0,0) = 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 + 4\cdot 0 + 5\cdot 0$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -1 + 0 + 3 + 0 + 0 = 2$$

Exemplo 3.2 *Calcule o versor dos vetores a seguir:*

(a) $\vec{u} = (1,2)$*;* *(b)* $\vec{u} = (1,2,-2)$*;* *(c)* $\vec{u} = (1,1,1,1)$*.*

Solução: O versor de um vetor $\vec{u}$ é o vetor com a mesma direção e sentido de $\vec{u}$ (paralelo), porém com comprimento unitário, ou seja, igual a 1. Assim, o versor $\vec{v}$ de um vetor $\vec{u}$ é tal que:

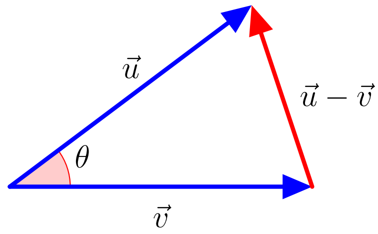
$$\begin{cases} \vec{v} = \alpha\vec{u} \\ |\vec{v}| = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{|\vec{u}|} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}.$$

Assim, aplicando essa conclusão para os vetores acima:

$$\text{(a) } \vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$
$$\text{(b) } \vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(1,2,-2)}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{(1,2,-2)}{3} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$
$$\text{(c) } \vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} = \frac{(1,1,1,1)}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Ângulo entre dois vetores

A partir do produto escalar, é possível obter uma relação para encontrar o ângulo entre dois vetores. Seja a figura abaixo, com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com um ângulo θ entre eles.



Pela lei dos cossenos:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\,\cos\theta$$

Pela propriedade do produto escalar:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

Por fim, podemos usar as duas relações para obter de maneira simples **o ângulo entre dois vetores**:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}.$$

Algumas considerações para o ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (diferentes de $\vec{0}$):

- $\theta = 0°$ se, e somente se, $\vec{u} \,||\, \vec{v}$, eles têm o mesmo sentido e $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$;
- $0° \leq \theta < 90°$ se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$;
- $\theta = 90°$ se, e somente se, $\vec{u}\perp\vec{v}$ (ortogonais) e $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$;
- $90° < \theta \leq 180°$ se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$;
- $\theta = 180°$ se, e somente se, $\vec{u} \,||\, \vec{v}$, eles têm sentidos opostos e $\vec{u}\cdot\vec{v} = -|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$.

O ângulo entre dois vetores não é maior que 180°. Para verificar que dois vetores são ortogonais (ângulo de 90° entre eles), basta que o produto escalar entre eles resulte em zero, i.e., $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Para verificar que dois vetores são paralelos, basta verificar que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \pm|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$. Entretanto, computacionalmente, o teste de paralelismo utilizando a proporção das coordenadas é melhor, pois realiza menos operações.

Exemplo 3.3 *Calcule o ângulo entre os vetores a seguir:*

(a) $\vec{u} = (1,2)$ *e* $\vec{v} = (2,1)$*;*

(b) $\vec{u} = (1,2,-2)$ *e* $\vec{v} = (2,0,1)$*;*

(c) $\vec{u} = (1,1,1,1)$ *e* $\vec{v} = (-1,1,1,1)$.

Solução: Como visto, o ângulo entre dois vetores pode ser calculado utilizando a relação:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}.$$

Assim:

$$\text{(a) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2)\cdot(2,1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 4$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \quad\Longrightarrow\quad \theta = 36,87^\circ$$

$$\text{(b) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2,-2)\cdot(2,0,1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + (-2)\cdot 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \theta = 90^\circ$$

$$\text{(c) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,1,1,1)\cdot(-1,1,1,1) = 1\cdot -1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$$

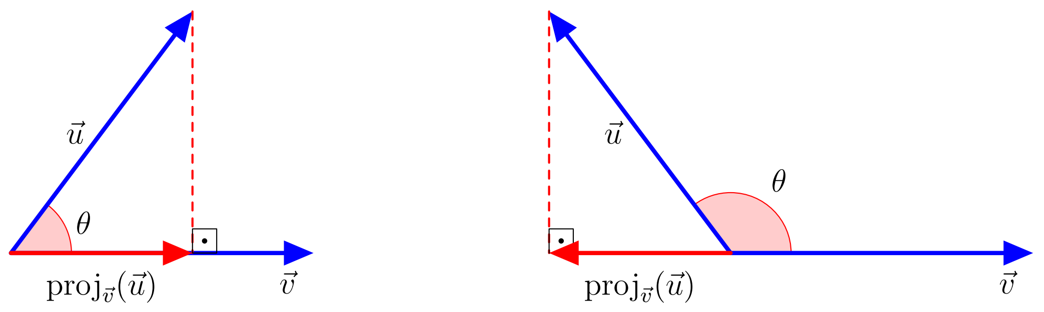
$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2+1^2} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \theta = 60^\circ$$

Projeção de um vetor sobre outro

A partir do produto escalar e da relação para determinar o ângulo entre dois vetores, podemos calcular a projeção ortogonal de um vetor sobre outro. Assim, dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulo, com um ângulo θ entre eles podemos projetar o vetor $\vec{u}$ ortogonalmente com relação à direção do vetor $\vec{v}$, ou seja, podemos obter a componente do vetor $\vec{u}$ na direção do vetor $\vec{v}$. Nas figuras abaixo, apresentamos a projeção de $\vec{u}$ em $\vec{v}$, denominada $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$.



Para calcular $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$, usamos a definição trigonométrica do cosseno de θ, para calcular o comprimento do vetor projeção:

$$\cos\theta = \frac{|\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})|}{|\vec{u}|}$$

$$|\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})| = |\vec{u}| \cdot \cos\theta = |\vec{u}| \cdot \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

A partir da proporcionalidade do comprimento $|\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})|$ e do comprimento do vetor $\vec{v}$, $|\vec{v}|$, podemos calcular o vetor $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$:

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{|\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})|}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right) \cdot \vec{v}$$

Exemplo 3.4 *Calcule a projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ a seguir:*

(a) $\vec{u} = (1,2)$ *e* $\vec{v} = (2,1)$*;*

(b) $\vec{u} = (1,2,-2)$ *e* $\vec{v} = (2,0,1)$*;*

(c) $\vec{u} = (1,1,1,1)$ *e* $\vec{v} = (-1,1,1,1)$*.*

Solução: A projeção de um vetor $\vec{u}$ sobre um vetor $\vec{v}$ é dada por:

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right) \cdot \vec{v}$$

Assim, para cada caso:

$$\text{(a) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2)\cdot(2,1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 4$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{4}{(\sqrt{5})^2}\right)\cdot(2,1) = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\text{(b) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2,-2)\cdot(2,0,1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + (-2)\cdot 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{0}$$

$$\text{(c) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,1,1,1)\cdot(-1,1,1,1) = 1\cdot -1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2+1^2} = 2$$

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{2}{2^2}\right)\cdot(-1,1,1,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Observe que no caso (b), não houve projeção, pois vetores ortogonais não possuem projeção entre si.

3.1 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Calcule, com relação aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a seguir, (1) o produto escalar entre eles; (2) o ângulo entre eles; e (3) as projeções $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$ e $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})$:

   (a) $\vec{u} = (-1, 0)$ e $\vec{v} = (2, 1)$;

   (b) $\vec{u} = (-1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1)$;

   (c) $\vec{u} = (-1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1)$;

   (d) $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (4, 2)$;

   (e) $\vec{u} = (1, 2, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$;

   (f) $\vec{u} = (1, 0, 4)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$;

   (g) $\vec{u} = (-1, -2, 2)$ e $\vec{v} = (2, 4, -4)$;

   (h) $\vec{u} = (1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 2)$;

   (i) $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$ e $\vec{v} = (0, -2, 0, 1)$.

   (j) $\vec{u} = (3, 2, 0, 4)$ e $\vec{v} = (1, -2, 0, 1)$.

   (k) $\vec{u} = (-1, 0, 2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, 0, -2, -1, 1)$.

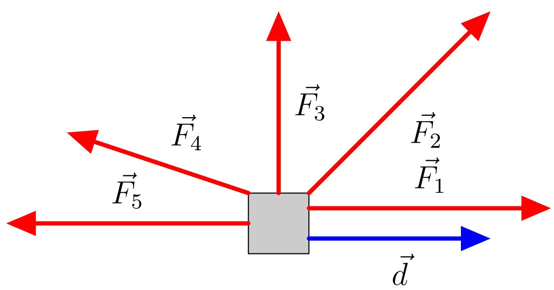
2. Uma das aplicações do produto escalar ocorre na Física, no cálculo de **Trabalho**. O trabalho W realizado por uma força constante $\vec{F}$ no decorrer de um deslocamento $\vec{d}$ é determinado pelo produto escalar

   $$W = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

   Se soubermos o ângulo θ entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{d}$, também é possível encontrar o trabalho por meio da relação:

   $$W = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{d}\right| \cdot \cos\theta.$$

   Pela norma do *S.I.*, a unidade de força é Newton (N), a unidade de deslocamento é metro (m) e a unidade de trabalho é Joule J. Calcule o trabalho das forças $\vec{F_1} = (4, 0)$, $\vec{F_2} = (3, 3)$, $\vec{F_3} = (0, 3)$, $\vec{F_4} = (-3, -1)$ e $\vec{F_5} = (-4, 0)$ no bloco, dado um deslocamento $\vec{d} = (3, 0)$ na figura abaixo.



3. Seja $\vec{u} = (-1, 2)$. Determine um vetor $\vec{v}$, paralelo a $\vec{u}$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = 9$. Os vetores têm o mesmo sentido?

4. Seja $\vec{u} = (1, 2, 2)$. Determine um vetor $\vec{v}$, paralelo a $\vec{u}$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -18$. Os vetores têm o mesmo sentido?

5. Seja $\vec{u} = (-1, 2)$. Determine um vetor $\vec{v}$, ortogonal a $\vec{u}$ cujo comprimento seja $|\vec{v}| = \sqrt{5}$.

6. Seja $\vec{u} = (1, 2, 0)$. Determine um vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo x, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = 8$.

7. Seja o triângulo com os vértices $A = (-1, -2, 4)$, $B = (-4, -2, 0)$ e $C = (3, -2, 1)$. Determine o perímetro do triângulo. Determine os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

8. Seja o triângulo equilátero com os vértices A, B e C e lado de 10 cm. Determine o produto escalar de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. E $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$?

9. Seja um triângulo retângulo com os vértices A, B e C e lados de 5, 12 e 13 cm. Considere o ângulo reto em A. Calcule:

   (a) os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$;

   (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;

   (c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$;

   (d) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$;

   (e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

10. Seja o triângulo de vértices $A(2, 1, 3)$, $B(1, 0, -1)$ e $C(-1, 2, 1)$. Determine:

    (a) os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$;

    (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;

    (c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$;

    (d) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$;

    (e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

11. Obtenha o ponto P do eixo das abscissas (eixo x) equidistante dos pontos $A(2, -3, 1)$ e $B(-2, 1, -1)$.

12. Determine α para que o ângulo entre $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, \alpha)$ seja de $60°$.

13. Calcule α para que seja de $30°$ o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, \alpha, 2)$ e $\vec{j}$.

3.2 Exercícios Computacionais

1. Escreva um algoritmo que retorne o resultado do produto escalar de dois vetores de tamanho n.

2. Escreva um algoritmo que retorne o comprimento de um vetor de tamanho n.

3. Escreva um algoritmo que retorne o ângulo entre dois vetores de tamanho n.

4. Escreva um algoritmo que retorne o vetor projeção de um vetor sobre outro (ambos de tamanho n).

5. Gere um vetor de tamanho $n = 50$, com os primeiros 50 números primos. Gere um segundo vetor de tamanho $n = 50$ em que a k-ésima posição é dada por $(-1)^k$. Qual o produto escalar entre os dois vetores? Qual o comprimento dos dois vetores? Qual o ângulo entre os vetores? E qual a projeção do primeiro no segundo vetor?

4 Produto Vetorial

No capítulo anterior, foi visto o produto escalar entre vetores, suas propriedades e consequências geométricas. Nesse capítulo, ainda sob a perspectiva geométrica, algébrica e computacional, vamos ver o produto vetorial entre vetores. Aqui, ficaremos reservados ao espaço $\mathbb{R}^3$, onde o produto vetorial está bem definido.

Definição 4.1 *O produto vetorial de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no $\mathbb{R}^3$, denominado $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado por:*

$$\vec{u} \times \vec{v} = (x_u, y_u, z_u) \times (x_v, y_v, z_v)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u)$$

Onde $|A|$ corresponde ao determinante da matriz A. Observe que o resultado do produto é um vetor, i.e., $\vec{u} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. O vetor resultante do produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é sempre ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente, pois:

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0.$$

O determinante de uma matriz com linhas iguais é zero. Analogamente, pode ser mostrado que $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.

Exemplo 4.1 *Calcule o produto vetorial dos vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 2, 0)$ e apresente um esboço da solução.*

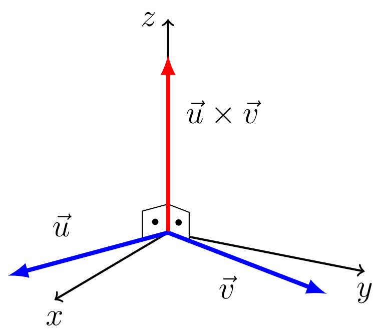
Solução: Aplicando a definição de produto vetorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, 5)$$

O esboço do espaço $\mathbb{R}^3$ seria a figura abaixo, com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:



Com isso, podemos estabelecer algumas propriedades do produto vetorial.

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) **Reflexiva:** $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$;

(ii) **Não Comutativa:** $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$;

(iii) **Distributiva:** $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v}) + \vec{u} \times \vec{w}$;

(iv) **Vetor com escalar:** $(\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$;

(v) **Vetor nulo:** $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$;

(vi) **Vetores paralelos:** $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, para $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$;

(vii) **Identidade de Lagrange:** $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \, |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$;

(viii) **Ângulo θ entre vetores:** $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \, |\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$;

(ix) **Não Comutativa:** $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

Exemplo 4.2 *Calcule o produto vetorial dos vetores a seguir:*

(a) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ *e* $\vec{v} = (0, 1, -3)$*;*

(b) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ *e* $\vec{v} = (-3, -6, 6)$*.*

Solução: Aplicando a definição de produto vetorial:

$$\text{(a) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-9, 3, 1)$$

$$\text{(b) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, 0)$$

Observe que no item (b), o resultado foi zero, o que indica que os vetores $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (-3, -6, 6)$ são paralelos.

Exemplo 4.3 *Calcule o ângulo entre os vetores* $\vec{u} = (1, 2, -2)$ *e* $\vec{v} = (2, 0, 1)$.

Solução: O ângulo entre dois vetores pode ser calculado utilizando a relação:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen}\theta$$

ou

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

Assim:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2, -5, 4)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3\sqrt{5}}{3 \cdot \sqrt{5}} = 1 \Longrightarrow \theta = 90^\circ$$

Observe que o cálculo de ângulos é computacionalmente e manualmente mais rápido utilizando o produto escalar, ou seja, utilizando a seguinte relação:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

Exemplo 4.4 *Encontre um vetor unitário ortogonal aos vetores* $\vec{u} = (1, 4, 3)$ *e* $\vec{v} = (-3, -2, 6)$.

Solução: Um vetor ortogonal a dois vetores ao mesmo tempo pode ser encontrado por meio do produto vetorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (30, -15, 10)$$

O vetor $\vec{u} \times \vec{v} = (30, -15, 10)$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, porém não é unitário. Para que ele seja unitário, basta multiplicar pelo inverso do seu comprimento. Assim:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{30^2 + (-15)^2 + 10^2} = 35$$

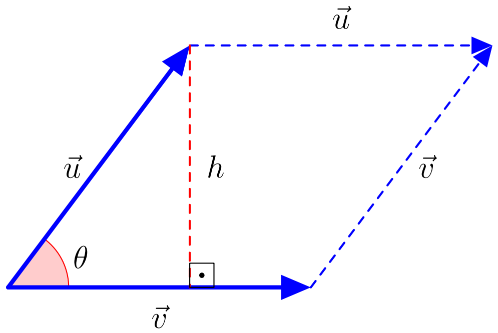
$$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{1}{35} \cdot (30, -15, 10)$$

$$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = (\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{2}{7})$$

Outra solução seria o vetor oposto ao vetor encontrado $(-\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7})$.

Cálculo de áreas

O módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $|\vec{u} \times \vec{v}|$ pode ser interpretado geometricamente como a área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A figura abaixo mostra a relação.



A área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada pelo comprimento do vetor $\vec{v}$ vezes a altura h. A altura h, pode ser escrita em função do ângulo θ e que por fim está relacionado ao produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$. Assim:

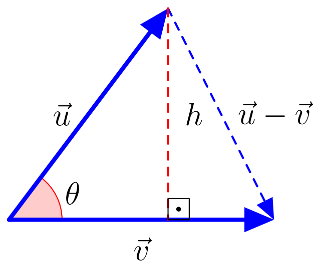
$$Área_{Paralelogramo} = |\vec{v}| \cdot h$$

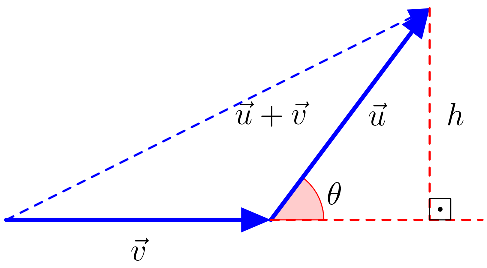
$$Área_{Paralelogramo} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \operatorname{sen} \theta$$

$$Área_{Paralelogramo} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

$$Área_{Paralelogramo} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

É possível também determinar a área do triângulo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e algum dos casos $\pm\vec{u} \pm \vec{v}$ como na figura abaixo:





Em qualquer dos casos, basta calcular a metade da área do paralelogramo equivalente. Ou seja:

$$Area_{Triangulo} = \frac{1}{2} \cdot Area_{Paralelogramo}$$
$$Area_{Triangulo} = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$$

Exemplo 4.5 *Calcule a área do paralelogramo correspondente aos vetores:*

(a) $\vec{u} = (1, 4, 3)$ *e* $\vec{v} = (-3, -2, 6)$*;*

(b) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ *e* $\vec{v} = (2, 0, 1)$*;*

(c) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ *e* $\vec{v} = (-3, -6, 6)$.

Solução: Em cada um dos casos, teremos que calcular o produto vetorial entre os vetores, e em seguida o comprimento do vetor resultante:

$$\text{(a) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (30, -15, 10)$$

$$\text{Á}rea_{(a)} = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{30^2 + (-15)^2 + 10^2} = 35$$

$$\text{(b) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2, -5, 4)$$

$$\text{Á}rea_{(b)} = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{(c) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, 0)$$

$$\text{Á}rea_{(c)} = |\vec{u} \times \vec{v}| = 0$$

Observe que nos casos (a) e (b) obtivemos uma área e no caso (c) não obtivemos, pois os vetores $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (-3, -6, 6)$ são paralelos e não formam um paralelogramo.

Exemplo 4.6 *Calcule a área do triângulo cujos vértices são:* $A = (2, 1, 2)$, $B = (-1, 2, 2)$ *e* $C = (3, 0, -2)$.

Solução: Para esse problema, podemos estabelecer dois vetores que formam o triângulo: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Em seguida, podemos calcular o produto vetorial destes vetores, na qual a metade do módulo é igual a área do triângulo ABC.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-3, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, -1, -4)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4, -12, 2)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-12)^2 + 2^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$$

$$\text{Á}rea_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{41} \approx 6,4$$

4.1 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Calcule o produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a seguir e a área relativa ao paralelogramo correspondente.

   (a) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-2, -3, 6)$;

   (b) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (0, 0, 1)$;

   (c) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (0, -1, 3)$;

   (d) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (0, 0, 0)$;

   (e) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (1, 2, 3)$;

   (f) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-2, -4, -6)$.

2. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$, determine:

   (a) $\vec{u} \times \vec{v}$;

   (b) $\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$;

   (c) $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$;

   (d) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$;

   (e) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{v})$.

3. Calcule a área do triângulo cujos vértices são: $A = (2, -1, 2)$, $B = (1, 2, -1)$ e $C = (3, 2, 1)$.

4. Sejam $\vec{u} = (1, 2, 2)$ e $\vec{v} = (3, -1, 0)$. Determine um vetor $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, de comprimento igual a 3.

5. Seja $\vec{u} = (1, 2, 3)$. Determine um vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo x e ao vetor $\vec{u}$.

6. Determine a área do triângulo com os vértices $A = (-1, -2, 4)$, $B = (-4, -2, 0)$ e $C = (3, -2, 1)$

7. Determine a área do quadrilátero convexo com os vértices $A = (-1, -2, 4)$, $B = (-4, -2, 0)$, $C = (3, -2, 1)$ e $D = (2, -2, -1)$.

4.2 Exercícios Computacionais

1. Escreva um algoritmo que retorne o resultado do produto vetorial de dois vetores do espaço.

2. Escreva um algoritmo que retorne a área do triângulo dados 3 pontos.
3. Escreva um algoritmo que teste se 3 pontos são colineares, usando o produto vetorial.
4. Escreva um algoritmo que retorne a área de um polígono convexo de n vértices.
5. Escreve um algoritmo que retorne a área de superfície de um tetraedro, dados 4 pontos.

5 Produto Misto

Nos capítulos anteriores, foram definidos os produtos escalar e vetorial entre vetores, com suas propriedades e consequências geométricas. Nesse capítulo, ainda sob a perspectiva geométrica, algébrica e computacional, vamos ver o produto misto entre vetores. Novamente ficaremos reservados ao espaço $\mathbb{R}^3$, pois o produto misto depende do produto vetorial.

Definição 5.1 *O produto misto de três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ no $\mathbb{R}^3$, representado $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é dado por:*

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (x_u, y_u, z_u) \cdot ((x_v, y_v, z_v) \times (x_w, y_w, z_w))$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (x_u, y_u, z_u) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$$

Onde $|A|$ corresponde ao determinante da matriz A. Observe que o resultado do produto misto é um escalar, i.e., $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.1 *Calcule o produto misto dos vetores $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (-1, 3, 3)$ e $\vec{w} = (4, -3, 2)$.*

Solução: Aplicando a definição de produto misto:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 27$$

Podemos estabelecer algumas propriedades do produto misto.

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{a}$ quaisquer e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) **Não Comutativa:** $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ troca de sinal ao trocarmos a posição de dois vetores;

(ii) **Distributiva:** $(\vec{u}+\vec{a},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + (\vec{a},\vec{v},\vec{w})$;

(iii) **Distributiva:** $(\vec{u},\vec{v}+\vec{a},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + (\vec{u},\vec{a},\vec{w})$;

(iv) **Distributiva:** $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}+\vec{a}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + (\vec{u},\vec{v},\vec{a})$;

(v) **Vetor com escalar:** $(\alpha\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\alpha\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}) = \alpha(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$;

(vi) **Vetor nulo:** Se um dos vetores é $\vec{0}$ então $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$;

(vii) **Vetores paralelos:** $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$, se pelo menos dois vetores são paralelos;

(viii) **Coplanaridade:** $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$ se, e somente se, os três vetores são coplanares.

Exemplo 5.2 *Verifique se os vetores abaixo são coplanares:*

(a) $\vec{u} = (2,3,5)$, $\vec{v} = (-1,3,3)$ *e* $\vec{w} = (4,-3,2)$;

(b) $\vec{u} = (1,2,-2)$, $\vec{v} = (-3,-6,6)$ *e* $\vec{w} = (4,-3,2)$;

(c) $\vec{u} = (2,-10,0)$, $\vec{v} = (1,-1,2)$ *e* $\vec{w} = (1,-3,1)$;

Solução: Aplicando a definição de produto misto:

$$\text{(a) } (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

Portanto, no item (a), os três vetores não são coplanares.

$$\text{(b) } (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

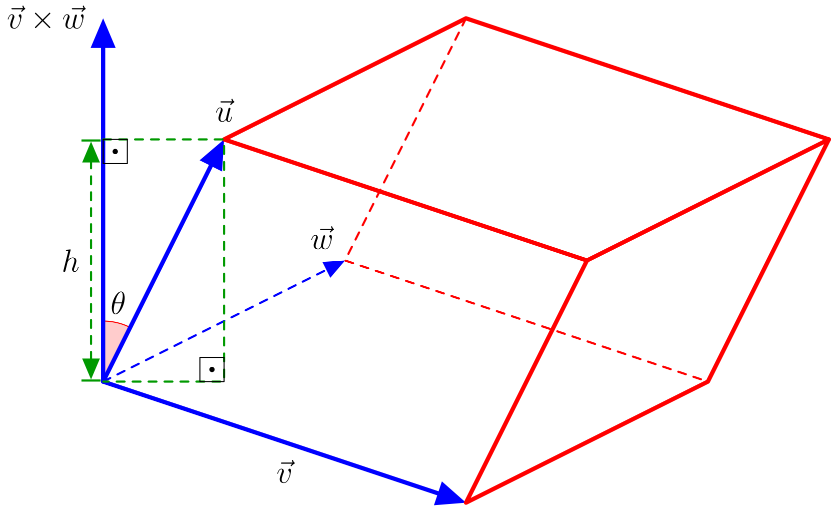
Portanto, no item (b) os três vetores são coplanares. Note que os dois primeiros vetores são paralelos: $\vec{v} = -3\vec{u}$.

$$\text{(c) } (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -10 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, no item (c) os três vetores são coplanares. Observe, que nesse caso, não há vetores paralelos entre si.

Cálculo de volumes

O módulo do produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, $|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|$ pode ser interpretado geometricamente como o volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. A figura abaixo mostra um esboço dos vetores e do volume pretendido.



O volume do paralelepído formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado pela área da base (paralelogramo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$) multiplicada pela altura h. A área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ pode ser determinada por

$$|\vec{v}\times\vec{w}|\,.$$

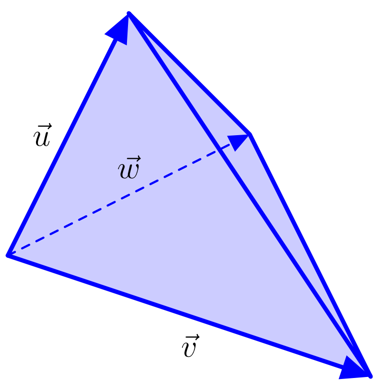
Do ângulo θ temos a relação:

$$\cos\theta = \frac{h}{|\vec{u}|} \qquad \Longrightarrow \qquad h = |\vec{u}|\,\cos\theta.$$

Portanto, o volume pode ser dado por:

$$Volume_{Paralelepipedo} = Area_{Paralelogramo}\cdot h$$
$$Volume_{Paralelepipedo} = |\vec{v}\times\vec{w}|\cdot|\vec{u}|\,\cos\theta$$
$$Volume_{Paralelepipedo} = |\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$$
$$Volume_{Paralelepipedo} = |(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|$$

Também pode ser calculado o volume do tetraedro formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, conforme a figura abaixo:



O volume do tetraedro é $\dfrac{1}{6}$ do volume do paralelepípedo:

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6} Volume_{Paralelepipedo} = \frac{1}{6}\left|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\right|$$

Exemplo 5.3 *Calcule o volume do paralelepípedo e do tetraedro formado pelos seguintes vetores:*

(a) $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (-1, 3, 3)$ *e* $\vec{w} = (4, -3, 2)$*;*

(b) $\vec{u} = (2, -10, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$ *e* $\vec{w} = (1, -3, 1)$*;*

Solução: Aplicando o resultado do volume do paralelepípedo como produto misto de três vetores:

$$\text{(a) } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

$$Volume_{Paralelepipedo} = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = 27 \text{ u.v.}$$

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6} Volume_{Paralelepipedo} = \frac{27}{6} = 4,5 \text{ u.v.}$$

Portanto, no item (a), os três vetores formam um paralelepípedo com volume de 27 unidades de volume e o tetraedro correspondente possui 4,5 unidades de volume.

$$\text{(b) } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -10 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, no item (b) os três vetores são coplanares e nesse caso, não há paralelepípedo nem tetraedro correspondente.

Exemplo 5.4 *Determine o volume do tetraedro formado pelos vértices* $A = (1, 2, -1)$, $B = (5, 0, 1)$, $C = (2, -1, 1)$ *e* $D = (6, 1, -3)$ *e a altura do tetraedro relativo ao vértice* D*.*

Solução: O volume do tetraedro é dado por:

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, -3, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (5, -1, -2)$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 36$$

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6}|36| = 6 \text{ u.v.}$$

Já a altura do tetraedro pode ser obtida usando-se o fato de que o volume do tetraedro pode ser obtido como $\frac{1}{6}$ do volume do paralelepípedo, que por sua vez é a área do paralelogramo formado por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ multiplicada pela altura no ponto D. Assim:

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \cdot h_D$$

$$6 = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \cdot h_D$$

$$36 = |(2, -6, -10)| \cdot h_D$$

$$36 = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-10)^2} \cdot h_D$$

$$h_D = \frac{36}{\sqrt{140}} \approx 3,043 \text{ u.c.}$$

5.1 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Calcule o produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, verifique se os vetores são coplanares e, caso o contrário, calcule o volume relativo ao tetraedro correspondente.

   (a) $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$;

   (b) $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 0, -4)$;

   (c) $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (7, -1, 4)$;

2. Calcule o valor de α para que os vetores abaixo sejam coplanares:

   (a) $\vec{u} = (2, -1, \alpha)$, $\vec{v} = (1, 0, 2)$ e $\vec{w} = (\alpha, 3, \alpha)$;

   (b) $\vec{u} = (2, \alpha, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, \alpha)$ e $\vec{w} = (3, 0, -3)$;

3. Qual o valor do paralelepípedo e do tetraedro definido pelos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$?

4. Calcule o volume do tetraedro formado pelos vértices abaixo, e calcule a altura do tetraedro relativo ao vértice D.

   (a) $A(1, 2, -3)$, $B(2, -1, -4)$, $C(0, 2, 0)$ e $D(-1, 2, 1)$;

   (b) $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(3, 2, -2)$ e $D(0, 0, -10)$;

5.2 Exercícios Computacionais

1. Escreva um algoritmo que retorne o resultado do produto misto de três vetores do espaço.

2. Escreva um algoritmo que teste se três vetores são coplanares, usando o produto misto.

3. Escreva um algoritmo que retorne o volume de um tetraedro, dado quatro pontos no espaço.

4. Escreva um algoritmo que retorne a altura de um ponto em relação a outros três pontos no espaço. (Como os três últimos pontos formam um plano, seria o equivalente à distância de um ponto ao plano).

5. Escreva um algoritmo que retorne o volume de um poliedro convexo, dados os conjuntos dos vértices e das arestas.

6 Reta

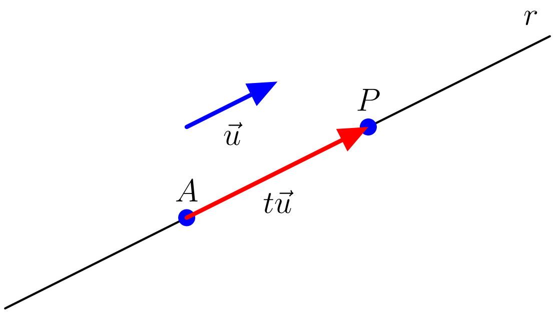
Uma reta, no plano, espaço ou hiperespaço pode ser determinada a partir de duas estruturas: (1) um ponto contido na reta, que servirá de referência; e (2) uma direção, dada por um vetor não-nulo. Assim, seja uma reta r, com um ponto de referência A e um vetor diretor $\vec{u}$:

Plano $\mathbb{R}^2$: $A = (x_A, y_A)$ e $\vec{u} = (x_u, y_u)$.

Espaço $\mathbb{R}^3$: $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$.

Espaço $\mathbb{R}^n$: $A(x_0^A, x_1^A, \ldots, x_{n-1}^A)$ e $\vec{u} = (x_0^u, x_1^u, \ldots, x_{n-1}^u)$.

Um ponto qualquer P da reta r, pode ser então determinado por meio da relação, conforme a figura abaixo:



$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$P - A = t \cdot \vec{u}$$
$$P = A + t \cdot \vec{u}$$

O ponto A é o ponto de referência e $\vec{u}$ é o vetor diretor da reta. O valor do parâmetro t pode ser qualquer número real e por isso, qualquer ponto P da reta é o ponto A somado do vetor $\vec{u}$ com a escala t. As equações acima são denominadas **Equação Vetorial da Reta**. Tais equações podem ser modificadas, conforme vamos ver a seguir. Entretanto, faremos todas as operações no espaço $\mathbb{R}^3$. Para o plano e espaços com mais dimensões, o raciocínio é análogo.

Assim, no $\mathbb{R}^3$, podemos visualizar a equação da reta, pensando em cada coordenada separadamente:

$$P = A + t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t(x_u, y_u, z_u)$$
$$\begin{cases} x = x_A + t x_u \\ y = y_A + t y_u \\ z = z_A + t z_u \end{cases}$$

As equações acima são denominadas **Equações Paramétricas da Reta**. Novamente, o parâmetro t pode ser qualquer número real. Equações paramétricas são muito importantes para análises de outras curvas no espaço, como circunferências, helicoidais, parábolas etc.

Há ainda mais duas versões de equações da reta mais utilizadas. A primeira delas toma as equações paramétricas da reta e isola o parâmetro t para todas as coordenadas. Assim:

$$\begin{cases} x = x_A + tx_u \\ y = y_A + ty_u \\ z = z_A + tz_u \end{cases}$$

$$t = \frac{x - x_A}{x_u} = \frac{y - y_A}{y_u} = \frac{z - z_A}{z_u}$$

Com isso, podemos dispensar o parâmetro t para obter as **Equações Simétricas da Reta**:

$$\frac{x - x_A}{x_u} = \frac{y - y_A}{y_u} = \frac{z - z_A}{z_u}$$

Por fim, podemos reorganizar as coordenadas do ponto P, (x, y, z) para que elas fiquem em função de apenas uma outra coordenada, a partir das equações simétricas. Por exemplo, para tornar y em função de x:

$$\frac{x - x_A}{x_u} = \frac{y - y_A}{y_u}$$
$$y - y_A = \frac{y_u}{x_u}x - \frac{y_u}{x_u}x_A$$
$$y = \frac{y_u}{x_u}x + \left(y_A - \frac{y_u}{x_u}x_A\right)$$
$$y = mx + n$$

Analogamente, para tornar z em função de x:

$$\frac{x - x_A}{x_u} = \frac{z - z_A}{z_u}$$
$$z = \frac{z_u}{x_u}x + \left(z_A - \frac{z_u}{x_u}x_A\right)$$
$$z = px + q$$

Assim, combinando os dois resultados, podemos obter as **Equações Reduzidas da Reta**:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$$

Exemplo 6.1 *Determine todas as equações da reta que passa pelos pontos* $A(1, 2, 0)$ *e* $B(0, 3, 2)$.

Solução: Dois pontos distintos são suficientes para se construir uma reta. A direção dessa reta pode ser obtida usando-se o vetor que une os dois pontos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,3,2) - (1,2,0) = (-1,1,2)$$

Assim, a equação vetorial da reta, considerando o parâmetro $t \in \mathbb{R}$, é dada por:

$$P = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$(x,y,z) = (1,2,0) + t(-1,1,2)$$

Observe que o ponto B também poderia ter sido escolhido para ser o ponto de referência. Da mesma forma, o vetor $\overrightarrow{BA}$ também poderia ter sido escolhido como vetor diretor. Na verdade, qualquer múltiplo de $\overrightarrow{AB}$ poderia ter sido escolhido como vetor diretor. Continuando, para a equação paramétrica basta separar as coordenadas:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 0 + 2t \end{cases}$$

Considerando as equações simétricas:

$$t = \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{2}$$

E por fim, obtemos as equações reduzidas a partir das equações simétricas, colocando todas as coordenadas em função de x:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} \implies y - 2 = -x + 1 \implies y = -x + 3$$
$$\frac{x-1}{-1} = \frac{z-0}{2} \implies z = -2x + 2$$
$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ z = -2x + 2 \end{cases}$$

Para as equações reduzidas, também poderia ter sido determinado as coordenadas em função da coordenada y ou da coordenada z, entretanto é mais usual deixá-la em função de x.

Exemplo 6.2 *Determine todas as equações da reta que passa pelos pontos $A(-1,1,0)$ e $B(-1,2,2)$.*

Solução: Novamente, a partir de dois pontos distintos obtemos a direção da reta por meio do vetor $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,2,2) - (-1,1,0) = (0,1,2)$$

Observe que a coordenada x do vetor diretor é zero. Isso terá algumas consequências na forma como descrevemos as equações. A equação vetorial da reta, usando dessa vez B como referência e o parâmetro $t \in \mathbb{R}$, é dada por:

$$P = B + t \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$(x, y, z) = (-1, 1, 0) + t(0, 1, 2)$$

Para a equação paramétrica basta separar as coordenadas:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + t \\ z = 0 + 2t \end{cases}$$

Note que para a coordenada x, não há dependência do parâmetro t, pois $x = -1$, constante. Considerando as equações simétricas:

$$\begin{cases} x = -1 \\ t = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-0}{2} \end{cases}$$

Como x independe de t, a representação das equações simétricas fica um pouco diferente. E por fim, obtemos as equações reduzidas a partir das equações simétricas, mas dessa vez vamos colocar z em função de y, visto que a coordenada x é constante.

$$\frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{2} \quad \Longrightarrow \quad z = 2y - 2$$
$$\begin{cases} x = -1 \\ z = 2y - 2 \end{cases}$$

Exemplo 6.3 *Determine um ponto de referência e o vetor diretor das retas abaixo e em seguida escreva a equação vetorial da reta.*

(a) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$

(b) $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = z$

(c) $\begin{cases} y = x - 1 \\ z = -3x + 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y = 2 \\ x - 2 = \dfrac{z}{3} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 2 \end{cases}$

Solução:

(a) O item trata de equações paramétricas da reta. Para se obter um ponto da reta, basta considerar um valor para o parâmetro t. O mais fácil, em geral, é considerar $t = 0$.

Assim:

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \cdot 0 = 3 \\ y = 1 + 0 = 1 \\ z = -0 = 0 \end{cases}$$

Portanto, o ponto $(3, 1, 0)$ pertence a reta. Para calcular o vetor diretor, basta notar o número que acompanha o parâmetro t. E assim, o vetor diretor é dado por $(2, 1, -1)$. A equação vetorial então é dada por:

$$P = (3, 1, 0) + t(2, 1, -1)$$

(b) O item trata de equações simétricas da reta. Para encontrar o ponto de referência, consideramos os valores de x, y e z em que $t = 0$, ou seja, em que os numeradores das frações são zero. Assim $x + 1 = 0$, $y - 1 = 0$ e $z = 0$, e o ponto de referência é $(-1, 1, 0)$. Para o vetor diretor, basta tomar os números que estão no denominador das frações. E assim, o vetor diretor é dado por $(-1, 2, 1)$. A equação vetorial então é dada por:

$$P = (-1, 1, 0) + t(-1, 2, 1)$$

(c) O item trata de equações reduzidas da reta. Para facilitar, escolhemos uma das coordenadas para ser igual a t. Como as coordenadas y e z estão em função de x, vamos colocar $x = t$. Assim:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = -3t + 1 \end{cases}$$

As equações acima são as equações paramétricas da reta e podemos analisar como no item (a). O ponto de referência, em $t = 0$ é $(0, -1, 1)$. O vetor diretor é dado por $(1, 1, -3)$. E a equação vetorial então é dada por:

$$P = (0, -1, 1) + t(1, 1, -3)$$

(d) O item trata de equações simétricas da reta. Entretanto, aqui a coordenada y é constante. Para encontrar o ponto de referência, consideramos os valores de x, y e z em que $t = 0$, ou seja, em que os numeradores das frações são zero. Assim $x - 2 = 0$, $y = 2$ e $z = 0$, e o ponto de referência é $(2, 2, 0)$. Para o vetor diretor, basta tomar os números que estão no denominador das frações. No caso da coordenada y, como $y = 2$ e não há variação do seu valor, então a direção é $0\vec{j}$. E assim, o vetor diretor é dado por $(1, 0, 3)$. A equação vetorial então é dada por:

$$P = (2, 2, 0) + t(1, 0, 3)$$

(e) O item trata de equações reduzidas da reta. Para facilitar, escolhemos uma das coordenadas para ser igual a t. Como a coordenada y está em função de x e z é constante, vamos colocar $x = t$. Assim:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = 2 + 0t \end{cases}$$

As equações acima são as equações paramétricas da reta e podemos analisar como no item (a). O ponto de referência, em $t = 0$ é $(0, -1, 2)$. O vetor diretor é dado por $(1, 2, 0)$. E a equação vetorial então é dada por:

$$P = (0, -1, 2) + t(1, 2, 0)$$

6.1 Relações entre retas

Dadas duas retas r e s no espaço $\mathbb{R}^3$, quais relações podemos obter entre elas? Há várias relações que podemos obter entre duas retas, por exemplo ângulo, posição relativa, distância, coplanaridade etc. Para os problemas a seguir, vamos sempre considerar as retas r e s abaixo:

$$r: \; P_r = A + t\vec{u}$$
$$s: \; P_s = B + t\vec{v}$$

A reta r tem ponto de referência A e vetor diretor $\vec{u}$. A reta s tem ponto de referência B e vetor diretor $\vec{v}$.

Com a relação entre as retas e seus vetores diretores, várias das propriedades das retas são oriundas das relações entre os vetores.

Ângulo entre duas retas

Para verificar o ângulo entre duas retas basta analisar as direções das duas retas e pegar o menor ângulo entre as duas direções. Assim, considerando que as retas r e s possuem um ângulo θ entre elas, podemos usar a relação de ângulos entre vetores:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

O produto escalar no numerador está em módulo, porque o ângulo entre retas é sempre o menor, e em módulo $0 \leq \theta \leq 90°$.

Retas paralelas

As retas r e s são paralelas ($r \mid\mid s$) se possuem a mesma direção. Assim, basta verificar se os vetores diretores das retas são paralelos. Ou seja:

$$r \mid\mid s \Longleftrightarrow \vec{u} \mid\mid \vec{v} \Longleftrightarrow\!\!\Longrightarrow \vec{u} = \alpha\vec{v}$$
$$\alpha = \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v} = \frac{z_u}{z_v}$$

Uma outra maneira de verificar é usar o ângulo entre os vetores. Se o ângulo entre os vetores diretores for zero, então a direção dos vetores é a mesma. Entretanto, fazer isso é manual e computacionalmente mais demorado para ser calculado.

Retas ortogonais

As retas r e s são ortogonais ($r \perp s$) se o ângulo formado entre elas é de 90°. Assim, se o produto escalar dos vetores diretores é nulo, então as retas são ortogonais. Ou seja:

$$r \perp s \iff \vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Retas coplanares

As retas r e s são coplanares se estão no mesmo plano. Para tanto, os vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e os pontos A e B devem estar contidos no mesmo plano. Se A e B estão no mesmo plano, o vetor $\overrightarrow{AB}$ também está no mesmo plano. Assim, podemos usar o produto misto dos três vetores para testar a sua coplanaridade. Assim, r e s são coplanares se:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0$$

Se o produto misto dos três vetores for diferente de zero, então as retas não são coplanares e são chamadas de reversas. Observe que o teste de coplanaridade não está definido para espaços $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, pois não definimos produto vetorial e misto nos outros espaços.

Posições relativas entre retas

Duas retas r e s no espaço podem ter as seguintes posições relativas:

- **Coplanares:** As retas estão no mesmo plano.
  - **Coincidentes:** As retas são a mesma.
  - **Paralelas:** $r \mid\mid s$ e não possuem ponto de interseção entre si.
  - **Concorrentes:** Se as retas não são paralelas, então elas são concorrentes e possuem um ponto de interseção.
- **Reversas:** As retas não são coplanares e não possuem interseção entre si.

Para determinar a posição relativa entre duas retas, pode-se então adotar o seguinte algoritmo 6.1.

Exemplo 6.4 *Determine a posição relativa entre as retas abaixo e o ângulo entre elas:*

(a) $r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

(b) $r_2 : \begin{cases} y = 1 \\ \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{z+2}{4} \end{cases}$

(c) $r_3 : P = (-2, -1, 1) + t(-1, 0, 2)$

(d) $r_4 : \begin{cases} x = 2z - 9 \\ y = -2z + 5 \end{cases}$

Algoritmo 6.1: Posição Relativa entre duas retas

Entrada: Reta r: ponto A e vetor $\vec{u}$;
Entrada: Reta s: ponto B e vetor $\vec{v}$;
se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ **então**
  se $A \in s$ **então**
    As retas são coincidentes e coplanares;
  senão
    As retas são paralelas e coplanares;
  fim
senão
  se $(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ **então**
    As retas são concorrentes e coplanares;
  senão
    As retas são reversas;
  fim
fim

Solução: O primeira passo a ser dado é calcular o vetor diretor e um ponto de cada reta:

$$\textbf{(a)}\ (t = 0) \Longrightarrow A = (0, 1, 2)$$

$$\vec{u}_1 = (1, 0, -2)$$

$$\textbf{(b)}\ (t = 0) \Longrightarrow B = (2, 1, -2)$$

$$\vec{u}_2 = (-2, 0, 4)$$

$$\textbf{(c)}\ (t = 0) \Longrightarrow C = (-2, -1, 1)$$

$$\vec{u}_3 = (-1, 0, 2)$$

$$\textbf{(d)}\ (z = 0) \Longrightarrow D = (-9, 5, 0)$$

$$(z = t) \Longrightarrow \vec{u}_4 = (2, -2, 1)$$

A partir disso, usamos o algoritmo 6.1. Para as retas r_1 e r_2:

$$r_1 \parallel r_2\ ?$$

$$(1, 0, -2) = k(-2, 0, 4) \Longrightarrow k = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \text{Vetores diretores paralelos;}$$

$$A \in r_2\ ?$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ \dfrac{0-2}{-2} = \dfrac{2+2}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Portanto r_1 e r_2 são coincidentes, ou seja, são a mesma reta! Para as retas r_1 e r_3:

$$r_1 \parallel r_3 \ ?$$

$$(1, 0, -2) = k(-1, 0, 2) \Longrightarrow k = -1 \text{ Vetores diretores paralelos;}$$

$$A \in r_3 \ ?$$

$$(0, 1, 2) = (-2, -1, 1) + t(-1, 0, 2)$$

$$(0, 1, 2) - (-2, -1, 1) = t(-1, 0, 2)$$

$$(2, 2, 1) = t(-1, 0, 2)$$

Aqui, não existe t tal satisfaz a equação, pois se olharmos para a coordenada y, veremos que $2 = t \cdot 0$, que é um absurdo! Portanto, como A não pertence a r_3 então as retas são paralelas e coplanares, não-coincidentes. Como as retas r_1 e r_2 são iguais e r_1 é paralela a r_3, então r_2 e r_3 são paralelas. Para as retas r_1 e r_4:

$$r_1 \parallel r_4 \ ?$$

$$(1, 0, -2) = k(2, -2, 1) \Longrightarrow \nexists k \text{ então: Vetores diretores não são paralelos;}$$

$$(\overrightarrow{AD}, \vec{u}_1, \vec{u}_4) = 0 \ ?$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (-9, 5, 0) - (0, 1, 2) = (-9, 4, -2)$$

$$(\overrightarrow{AD}, \vec{u}_1, \vec{u}_4) = \begin{vmatrix} -9 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$$

Portanto, as retas r_1 e r_4 não pertencem ao mesmo plano e são reversas. Como as retas r_1 e r_2 são iguais então r_2 e r_4 são reversas. Entretanto, não é possível ainda afirmar a relação entre r_3 e r_4. Já sabemos que r_3 e r_4 não possuem a mesma direção, mas e quanto à coplanaridade?

$$(\overrightarrow{CD}, \vec{u}_3, \vec{u}_4) = 0 \ ?$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (-9, 5, 0) - (-2, -1, 1) = (-7, 6, -1)$$

$$(\overrightarrow{CD}, \vec{u}_3, \vec{u}_4) = \begin{vmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

E portanto r_3 e r_4 são retas concorrentes e coplanares. Nesse caso, elas possuem um ponto de interseção, que pode ser calculado colocando as equações em um mesmo sistema:

$$\begin{cases} P = (-2,-1,1) + t(-1,0,2) \\ x = 2z - 9 \\ y = -2z + 5 \end{cases}$$

$$(2z-9, -2z+5, z) = (-2,-1,1) + t(-1,0,2)$$

$$(2z-9, -2z+5, z) - (-2,-1,1) = t(-1,0,2)$$

$$(2z-7, -2z+6, z-1) = (-t, 0, 2t)$$

$$\begin{cases} 2z - 7 = -t \\ -2z + 6 = 0 \\ z - 1 = 2t \end{cases} \implies \begin{cases} z = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$P = (-2,-1,1) + t(-1,0,2) = (-2,-1,1) + 1 \cdot (-1,0,2) = (-3,-1,3)$$

Logo, o ponto de interseção entre as retas r_3 e r_4 é o ponto $(-3,-1,3)$.

6.2 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Verifique se os pontos $P_1(1,2,3)$ e $P_2(0,-1,2)$ pertencem às retas abaixo:

   (a) $(0,-2,0)+t(0,1,2)$;

   (b) $\begin{cases} x = 3-3t \\ y = 2-t \\ z = 3t \end{cases}$;

   (c) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{-1}$;

   (d) $\begin{cases} y = -x+3 \\ z = 3x \end{cases}$;

2. Qual o ponto $P(2,y,z)$ pertencente à reta determinada pelos pontos $A(3,-1,4)$ e $B(4,-3,-1)$?

3. Determine as equações das retas que passam pelos pontos:

   (a) $A(-2,1,1)$ e $B(0,3,2)$;

   (b) $A(-2,2,1)$ e $B(1,2,2)$;

   (c) $A(0,3,2)$ e $B(1,3,2)$;

   (d) $A(1,2,2)$ e $B(-2,2,1)$;

4. Mostre que os pontos $A(-1,4,-3)$, $B(2,1,3)$ e $C(4,-1,7)$ são colineares.

5. Determine um ponto de referência e o vetor diretor das retas abaixo e em seguida escreva a equação vetorial da reta.

   (a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 2-t \end{cases}$

   (b) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = z$

   (c) $\begin{cases} y = 2x-3 \\ z = -x+2 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} z = 1 \\ x+1 = \dfrac{y-2}{-1} \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} x = 2z-1 \\ y = -1 \end{cases}$

   (f) $x = y = z$

6. Calcule a posição relativa e o ângulo entre as retas a seguir:

   (a) $r: \begin{cases} x = -2t-2 \\ y = 2t \\ z = -4t+3 \end{cases}$ e $s: \dfrac{x}{4} = \dfrac{y+6}{2} = \dfrac{z-1}{2}$;

(b) $r: \begin{cases} y = -2x - 1 \\ z = x + 2 \end{cases}$ e $s: \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{-3};\ x = 2;$

(c) $r: \begin{cases} y = -x + 2 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $s: P = (1, 2, 3) + t(3, 2, 1);$

(d) $r: \begin{cases} y = x + 2 \\ z = -2x + 1 \end{cases}$ e $s: P = (2, 1, -2) + t(-2, -2, 4);$

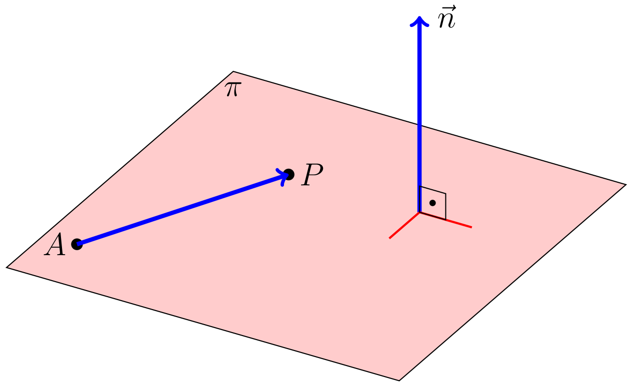
7. Qual a equação da reta que passa pelo ponto $A(3, 2, 1)$ e é ortogonal simultaneamente às retas $r: \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3 \end{cases}$;

6.3 Exercícios Computacionais

1. Escreva um algoritmo que a partir de dois pontos escreve as equações da reta.
2. Escreva um algoritmo que define se três pontos são colineares.
3. Escreva um algoritmo que descreve a posição relativa entre duas retas.
4. Escreva um algoritmo que a partir de três pontos encontre o menor ângulo entre as retas formadas por eles.
5. Escreva um algoritmo que a partir de n pontos encontre o menor ângulo entre as retas formadas por eles.

7 Plano

Para encontrar a equação do plano, assim como na reta, precisaremos de um ponto de referência e um vetor. O ponto de referência é um ponto que pertence ao plano e o vetor é um vetor normal ao plano, ou seja, um vetor ortogonal ao plano. A Figura abaixo mostra o plano π, com um ponto de referência A e um vetor normal $\vec{n}$ e queremos definir qualquer ponto P do plano.



Como o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é ortogonal a qualquer vetor do plano π, podemos definir, considerando o ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e $P = (x, y, z)$.

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(P - A) \cdot \vec{n} = 0$$

$$((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0$$

$$ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0, \quad d = -ax_A - by_A - cz_A$$

A última linha representa a equação geral do plano π.

Exemplo 7.1 *Determine um ponto e o vetor normal do plano* $\pi: \ 3x + 2y - 4z + 6 = 0.$

Solução: O vetor normal pode ser obtido facilmente por meio dos coeficientes que multiplicam x, y e z. Assim $\vec{n} = (3, 2, -4)$. Para obter um ponto qualquer, basta colocar valores para duas coordenadas. Por exemplo, se $y = z = 0$, $x = -2$ satisfaz a equação do plano. Assim $(-2, 0, 0)$ é um ponto do plano π.

Exemplo 7.2 *Qual a equação geral do plano que passa pelos pontos* $A(2, -1, 3)$, $B(3, 2, 1)$ *e* $C(0, -1, -1)$.

Solução: Com três pontos, podemos obter o plano por meio de dois vetores formados entre os pontos. Por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 2, 1) - (2, -1, 3) = (1, 3, -2)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, -1, -1) - (2, -1, 3) = (-2, 0, -4)$$

Dados dois vetores do plano, podemos obter um vetor ortogonal a esses dois vetores usando o produto vetorial. Assim:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$
$$\vec{n} = (-12, 8, 6) = (a, b, c)$$

Podemos usar vetor normal $\vec{n}$ e um dos pontos para encontrar o plano π:

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$-12x + 8y + 6z + d = 0$$

Para encontrar o coeficiente d, podemos usar o ponto $A(2, -1, 3)$:

$$-12 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 3 + d = 0 \Longrightarrow d = -14$$
$$-12x + 8y + 6z - 14 = 0 \quad \div(-2)$$
$$6x - 4y - 3z + 7 = 0$$

7.1 Relações entre planos

Dados dois planos π_1 e π_2 no espaço $\mathbb{R}^3$, podemos obter algumas relações entre eles, por exemplo ângulo, paralelismo, ortogonalidade etc. Para os problemas a seguir, vamos sempre considerar os planos π_1 e π_2 abaixo:

$$\pi_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$\pi_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

O plano π_1 tem como vetor normal $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$. O plano π_2 tem como vetor normal $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

Ângulo entre dois planos

Para verificar o ângulo entre dois planos, temos que analisar as direções dos vetores normais dos planos e pegar o menor ângulo entre as duas direções. Assim, considerando os planos π_1 e π_2 e um ângulo θ entre eles, podemos usar a relação de ângulos entre vetores:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

O produto escalar no numerador está em módulo, porque o ângulo entre planos é sempre o menor, e em módulo $0 \leq \theta \leq 90°$.

Planos paralelos

Os planos π_1 e π_2 são paralelos ($\pi_1 \,||\, \pi_2$) se seus vetores normais possuem a mesma direção. Assim, basta verificar se os vetores normais aos planos são paralelos. Ou seja:

$$\pi_1 \,||\, \pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \,||\, \vec{n}_2 \Longleftrightarrow\!\!\Longrightarrow \vec{n}_1 = \alpha\vec{n}_2$$

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Uma outra maneira de verificar é usar o ângulo entre os vetores. Se o ângulo entre os vetores normais for zero, então a direção dos vetores é a mesma. Entretanto, fazer isso é manual e computacionalmente mais demorado para ser calculado.

Planos ortogonais

Os planos π_1 e π_2 são ortogonais ($\pi_1 \perp \pi_2$) se o ângulo formado entre eles é de 90°. Assim, se o produto escalar dos vetores normais é nulo, então os planos são ortogonais. Ou seja:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

Posições relativas entre planos

No caso de planos, só existem duas possibilidades de posição relativa entre dois planos: (1) paralelos (que também podem ser coincidentes); ou (2) concorrentes (e nesse caso, a interseção é uma reta). O teste mais fácil é verificar então a proporção entre os vetores normais (teste de paralelismo).

Exemplo 7.3 *Calcule a posição relativa entre os planos abaixo, o ângulo entre eles e, se for o caso, a interseção entre eles:*

(a) $$\begin{aligned} \pi_1 &: \; 2x + y - z + 6 = 0 \\ \pi_2 &: \; -4x - 2y + 2z = 0 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} \pi_1 &: \; 2x + 3y - z + 6 = 0 \\ \pi_2 &: \; 3x + 6z - 2 = 0 \end{aligned}$$

Solução: **(a)** Primeiro, é importante pegar o vetor normal a cada plano:

$$\vec{n}_1 = (2, 1, -1)$$
$$\vec{n}_2 = (-4, -2, 2)$$

Testando o paralelismo:

$$\alpha = \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} \Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

Portanto, os planos π_1 e π_2 são paralelos e o ângulo entre eles é zero.

(b) Tomando o vetor normal a cada plano:

$$\vec{n}_1 = (2, 3, -1)$$
$$\vec{n}_2 = (3, 0, 6)$$

Testando o paralelismo:

$$\alpha = \frac{2}{3} = \frac{3}{0} = \frac{-1}{6} \Longrightarrow \nexists \alpha$$

E assim, os planos π_1 e π_2 não são paralelos. Para testar os ângulos, precisamos da relação:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$
$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2, 3, -1) \cdot (3, 0, 6) = 0$$

Como o produto escalar é zero, então os vetores normais são ortogonais e o ângulo entre os planos π_1 e π_2 é de $90°$. Por conta disso, os planos são concorrentes.

Como os planos são concorrentes, há uma interseção entre eles. Para encontrar essa interseção, basta colocar os planos no mesmo sistema e colocar as coordenadas em função de uma única, por exemplo a coordenada x:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 6 = 0 \\ 3x + 6z - 2 = 0 \end{cases}$$
$$3x + 6z - 2 = 0 \Longrightarrow 6z = -3x + 2 \Longrightarrow z = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$
$$2x + 3y - z + 6 = 0 \Longrightarrow 3y = -2x + z - 6 = -2x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} - 6$$
$$y = -\frac{5}{6}x - \frac{17}{9}$$
$$\begin{cases} y = -\dfrac{5}{6}x - \dfrac{17}{9} \\ z = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

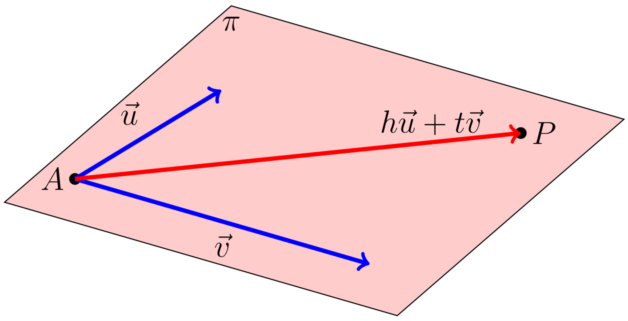
O último sistema são as equações reduzidas da reta que é a interseção entre os dois planos.

7.2 Equações Paramétricas do Plano

Qualquer ponto P do plano pode ser descrito como um ponto de referência e a combinação de dois vetores não-paralelos. Assim, seja um ponto de referência A e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de direções diferentes. Além disso, considere dois parâmetros $h, t \in \mathbb{R}$. Descrevendo o vetor $\overrightarrow{AP}$ como combinação de $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}$$
$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$$
$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$
$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + h(x_u, y_u, z_u) + t(x_v, y_v, z_v)$$
$$\begin{cases} x = x_a + hx_u + tx_u \\ y = y_a + hy_u + ty_u \\ z = z_a + hz_u + tz_u \end{cases}$$

A Figura abaixo mostra os vetores no plano π:



As equações paramétricas dependem de dois parâmetros h e t para estabelecer um plano. Esse tipo de equação é muito utilizado para descrição de superfícies, por exemplo planos, parabolóides, elipsóides etc.

7.3 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Seja o plano $\pi:\ 2x - y + 3z + 1 = 0$. Determine:

   (a) O ponto do plano π que tem abcissa 4 e ordenada 3;

   (b) O ponto do plano π que tem abcissa 1 e cota 2;

   (c) O valor de k para que o ponto $P(2, k+1, k) \in \pi$;

   (d) O ponto de abcissa zero e ordenada o dobro da cota;

   (e) O vetor normal ao plano;

   (f) Dois vetores não-paralelos que pertencem ao plano;

2. Determine a equação geral do plano que:

   (a) Contém o ponto $A(1, 2, 3)$ e cujo vetor normal $\vec{n} = (2, 3, 1)$;

   (b) Contém o ponto $A(4, -1, 2)$ e é paralelo ao plano $\pi:\ 2x - 3y - z + 5 = 0$;

   (c) Contém o ponto $A(1, 2, 3)$ e é ortogonal à reta $r: \begin{cases} x = 2y - 3 \\ z = -y + 1 \end{cases}$;

   (d) É mediador do segmento $\overline{AB}$, $A(1, -2, 6)$ e $B(3, 0, 0)$;

   (e) É paralelo ao eixo z e contém os pontos $A(0, 3, 1)$ e $B(2, 0, -1)$;

   (f) Contém os pontos $A(-1, 2, 0)$, $B(2, -1, 1)$ e $C(1, 1, -1)$;

   (g) Contém os pontos $A(0, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ e $C(0, 2, 5)$;

   (h) Contém os pontos $A(1, -2, 2)$ e $B(-3, 1, -2)$ e é ortogonal ao plano $\pi:\ 2x + y - z + 8 = 0$;

   (i) Contém o ponto $A(4, 1, 0)$ e é ortogonal aos planos $\pi_1:\ 2x - y - 4z - 6 = 0$ e $\pi_2:\ x + y + 2z - 3 = 0$;

   (j) Contém as retas $r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} y = -1 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$;

   (k) Contém o ponto $A(3, -1, 2)$ e a reta $r: \begin{cases} y = 2 - x \\ z = 3 + 2x \end{cases}$

   (l) Contém o ponto $A(1, -1, 2)$ e o eixo z;

3. Determine o ângulo entre os planos abaixo, e se for o caso, a interseção entre eles:

   (a) $\begin{array}{l} \pi_1:\ 2x - 2y + 1 = 0 \\ \pi_2:\ 2x - y - z = 0 \end{array}$

   (b) $\begin{array}{l} \pi_1:\ x - 2y + z + 1 = 0 \\ \pi_2:\ -2x + 4y - 2z = 0 \end{array}$

(c) $\begin{array}{l} \pi_1: \ x - z + 1 = 0 \\ \pi_2: \ x + y + z = 0 \end{array}$

(d) $\begin{array}{l} \pi_1: \ x + 2y + z - 10 = 0 \\ \pi_2: \ 2x + y - z + 1 = 0 \end{array}$

7.4 Exercícios Computacionais

1. Escreva um algoritmo que a partir de três pontos determina a equação do plano;
2. Escreva um algoritmo que a partir de um ponto e dois vetores determina a equação do plano;
3. Escreva um algoritmo que determina a posição relativa de dois planos;
4. Escreva um algoritmo que determina o ângulo entre dois planos;
5. Escreva um algoritmo que determina o ângulo entre um plano e uma reta;
6. Escreva um algoritmo que determina a projeção de um ponto no plano;
7. Escreva um algoritmo que determina a projeção de uma reta em um plano;

8 Matrizes

Nesse capítulo, começaremos o nosso estudo em matrizes. Aqui veremos os conceitos básicos de matrizes, alguns tipos específicos e operações entre matrizes. No próximo capítulo atuaremos na solução de sistemas lineares, utilizando a notação matricial.

Definição 8.1 ***Matriz*** *é uma estrutura matemática em que elementos estão dispostos em linhas (horizontais) e colunas (verticais), exatamente como em uma tabela. Os elementos de uma matriz são, em geral, números. Mas podem ser qualquer outra estrutura matemática, como funções, variáveis, ou mesmo matrizes. Uma matriz A de m linhas e n colunas é representada por:*

$$A_{m\times n} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Onde a_{ij} é o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz A, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Se os elementos de uma matriz são números reais $a_{ij} \in \mathbb{R}$ então dizemos que a matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Em geral, denota-se matrizes com letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas.

Exemplo 8.1 *Considere a matriz A abaixo. Determine o tamanho da matriz e todos os seus elementos.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz A tem duas linhas e três colunas. Os elementos são: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = -2$, $a_{21} = -3$, $a_{22} = 2$ e $a_{23} = 1$.

8.1 Tipos de Matrizes

Há diversos tipos e classificações de matrizes, que são importantes para diversas aplicações. Esses tipos estão relacionados a duas características principais de uma matriz $A_{m\times n}$: (1) a quantidade de linhas m e colunas n; (2) os valores e a disposição dos elementos a_{ij} dentro da matriz, principalmente de elementos nulos. Quanto à relação $m \times n$:

Definição 8.2 *Uma* ***matriz quadrada*** *é aquela em que o número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$). Ou seja, a matriz é dada por $A_{n\times n}$. Uma matriz $A_{n\times n}$ é denominada matriz de ordem n. Em uma matriz quadrada $A_{n\times n}$, contamos com os elementos da diagonal principal (a_{ii}) e os elementos da diagonal secundária ($a_{i,n+1-i}$), que visualmente são as diagonais.*

Definição 8.3 *Uma **matriz coluna** é aquela que tem uma única coluna ($n = 1$). Ou seja, a matriz é dada por $A_{m\times 1}$. Também pode ser chamada de vetor, ou vetor coluna, cujo comprimento é o número de linhas m.*

Definição 8.4 *Uma **matriz linha** é aquela que tem uma única linha ($m = 1$). Ou seja, a matriz é dada por $A_{1\times n}$. Também pode ser chamada de vetor, ou vetor linha, cujo comprimento é o número de colunas n. Entretanto, é mais convencional o uso de vetores coluna.*

Em uma matriz, podemos chamar cada coluna de um vetor coluna. Analogamente, podemos chamar cada linha de um vetor linha.

Exemplo 8.2 *Dadas as matrizes abaixo, classifique-as quanto ao seu número de elementos.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} x^2 & \operatorname{sen} x \\ 2x & \cos x \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz A tem três linhas e três colunas, portanto é uma matriz quadrada de ordem 3. A matriz B tem uma única linha e coluna, portanto é uma matriz quadrada de ordem 1. Poderia ser considerada também uma matriz coluna ou uma matriz linha. A matriz C tem 1 linha e três colunas, portanto é uma matriz linha de comprimento 3. A matriz D tem 2 linhas e 1 coluna, portanto é uma matriz coluna de comprimento 2. Note que a matriz é formada pelas variáveis x e y. A matriz E tem duas linhas e duas colunas, portanto é uma matriz quadrada de ordem 2. Note que a matriz é formada por funções.

Quanto aos valores e disposição dos elementos a_{ij} na matriz A:

Definição 8.5 *Uma **matriz nula** é aquela em que todos os seus elementos são nulos, ou seja, todo $a_{ij} = 0$.*

Definição 8.6 *Uma **matriz triangular superior** é uma matriz quadrada em que os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja, todo $a_{ij} = 0$, $i > j$.*

Definição 8.7 *Uma **matriz triangular inferior** é uma matriz quadrada em que os elementos acima da diagonal principal são nulos, ou seja, todo $a_{ij} = 0$, $i < j$.*

Definição 8.8 *Uma **matriz diagonal** é uma matriz quadrada em que os elementos fora da diagonal principal são nulos, ou seja, todo $a_{ij} = 0$, $i \neq j$. Uma matriz diagonal é triangular superior e inferior ao mesmo tempo.*

Definição 8.9 *Uma **matriz identidade** é uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal são iguais a 1, $a_{ii} = 1$. A matriz identidade é indicada por $I_{n\times n}$ ou I_n ou mesmo I.*

Definição 8.10 *Uma **matriz simétrica** é uma matriz quadrada em que os elementos são simétricos com relação à diagonal principal, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$. Os elementos da diagonal principal são sempre simétricos a eles mesmos.*

Exemplo 8.3 *Dadas as matrizes abaixo, classifique-as.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz A é quadrada e nula. A matriz B é quadrada, tem todos elementos abaixo da diagonal nulos e portanto é triangular superior. A matriz C é quadrada e diagonal. A matriz D é quadrada, diagonal e é a matriz identidade de ordem 1, ou seja I_1. A matriz E é quadrada e simétrica. Note que $a_{12} = 0 = a_{21}$, $a_{13} = -1 = a_{31}$ e $a_{23} = -2 = a_{32}$. A matriz F é quadrada, tem todos elementos acima da diagonal nulos e portanto é triangular inferior.

8.2 Operações de Matrizes

Na álgebra de matrizes, há a necessidade de se realizar algumas operações, como: (1) verificar a igualdade de duas matrizes; (2) soma de matrizes; (3) a diferença de duas matrizes; (4) produto de matriz por escalar; (5) transposição de matrizes; e (6) multiplicação de matrizes.

Definição 8.11 *A **igualdade de duas matrizes** $A_{m\times n}$ **e** $B_{m\times n}$ ocorre se os elementos de A são iguais aos respectivos elementos de B. Ou seja, $A = B$ se, e somente se $a_{ij} = b_{ij}$. Note que as matrizes A e B devem possuir o mesmo tamanho $m \times n$.*

Definição 8.12 *A **soma de duas matrizes** $A_{m\times n}$ **e** $B_{m\times n}$ resulta em uma matriz $C_{m\times n}$, cujos elementos são a soma dos respectivos elementos da matriz A e B. Assim, $C = A + B$ e $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Note que as matrizes A, B e C possuem o mesmo tamanho $m \times n$.*

Definição 8.13 *A **diferença de duas matrizes** $A_{m\times n}$ **e** $B_{m\times n}$ resulta em uma matriz $C_{m\times n}$, cujos elementos são a subtração dos respectivos elementos da matriz A e B. Assim, $C = A - B$ e $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$. Note que as matrizes A, B e C possuem o mesmo tamanho $m \times n$.*

Propriedades:

Dadas as matrizes $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ e $C_{m\times n}$ quaisquer e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) **Soma comutativa:** $A + B = B + A$

(ii) **Soma associativa:** $A + (B + C) = (A + B) + C$

(iii) **Soma com matriz nula:** $A_{m\times n} + 0_{m\times n} = A_{m\times n}$

(iv) **Soma com matriz oposta:** $A_{m\times n} + (-A)_{m\times n} = 0_{m\times n}$

Definição 8.14 *O* ***produto de um escalar*** $\alpha \in \mathbb{R}$ ***por uma matriz*** $A_{m\times n}$ *resulta em uma matriz* $C_{m\times n}$*, cujos elementos são o produto de* α *pelo respectivo elemento da matriz* A*. Assim,* $C = \alpha \cdot A$ *ou seja,* $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$*. Note que as matrizes* A *e* C *possuem o mesmo tamanho* $m \times n$*. O produto da matriz* A *pelo escalar* $\alpha = -1$*, resulta na matriz oposta de* A*, ou seja,* $-A$*.*

Propriedades:

Dadas as matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ quaisquer e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(i) **Produto por escalar distributivo** $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

(ii) **Produto por escalar distributivo** $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

(iii) **Produto por escalar associativo** $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$

(iv) **Matriz nula** $0 \cdot A_{m\times n} = 0_{m\times n}$

(v) **Matriz oposta** $-1 \cdot A = -A$

Definição 8.15 *A* ***transposição de uma matriz*** $A_{m\times n}$ *resulta em uma matriz* $A^T_{n\times m}$*, em que as linhas e colunas são invertidas, ou seja, os elementos que estavam dispostos em uma linha passam a ser dispostos em coluna. Assim, a matriz transposta* A^T *terá seus elementos* $a^T_{ij} = a_{ji}$*. Note que as matrizes* A *e* A^T *possuem seus tamanhos invertidos.*

Propriedades:

Dadas as matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ quaisquer e $\alpha\mathbb{R}$:

(i) **Transposta da transposta** $\left(A^T\right)^T = A$

(ii) **Transposta da soma** $(A + B)^T = A^T + B^T$

(iii) **Transposta do produto por escalar** $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$

(iv) **Matriz simétrica** Uma matriz é simétrica se $A = A^T$

(v) **Matrizes triangulares** A transposta de uma matriz triangular superior é triangular inferior e vice-versa.

Definição 8.16 *A* ***multiplicação de duas matrizes*** $A_{m\times n}$ ***e*** $B_{n\times p}$ *resulta em uma matriz* $C_{m\times p}$*, em que os elementos* c_{ij} *são dados pelo produto escalar do vetor da i-ésima de linha de* A *pela j-ésima coluna de* B*. Assim, se tomarmos o produto* $C = A \cdot B$*, teremos* $c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$*. Note que o número de colunas da matriz* A *e o número de linhas da matriz* B *possuem a mesma dimensão* n*.*

Propriedades:

Dadas as matrizes A, B e C quaisquer e $\alpha \in \mathbb{R}$, e em mente que a ordem do produto de duas matrizes é importante e que o produto só está definido se a matriz da esquerda tem o mesmo número de colunas que o número de linhas da matriz da direita:

(i) **Produto não comutativo:** Em geral, $A \cdot B \neq B \cdot A$ (um dos produtos pode nem estar definido).

(ii) **Produto pela Matriz nula** $A_{m\times n} \cdot 0_{n\times p} = 0_{m\times n} \cdot A_{n\times p} = 0_{m\times p}$

(iii) **Produto pela Matriz Identidade:** $A_{m\times n} \cdot I_n = I_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$

(iv) **Distributiva pela esquerda** $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

(v) **Distributiva pela direita** $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

(vi) **Produto associativo** $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

(vii) **Transposta do produto** $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Exemplo 8.4 *A partir das matrizes abaixo, calcule:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) $A + B$*;* *(b)* $2 \cdot C$*;* *(c)* $A - B$*;* *(d)* B^T *(e)* $A \cdot C$*;*

Solução: As matrizes tem as seguintes dimensões: $A_{2\times 3}$, $B_{2\times 3}$ e $C_{3\times 2}$.

(a) A soma de $A + B$ pode ser feita, pois ambas matrizes são 2×3. Assim:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 + (-1) & 2 + 2 & 3 + (-2) \\ -1 + 0 & 0 + 0 & 1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) O produto do escalar 2 pela matriz C é dado por:

$$2 \cdot C = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot -1 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot -2 & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) A diferença $A - B$ pode ser feita, pois ambas matrizes são 2×3. A matriz $-B$ é a matriz B multiplicada por -1. Mas podemos simplesmente fazer a subtração de cada elemento. Assim:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 - (-1) & 2 - 2 & 3 - (-2) \\ -1 - 0 & 0 - 0 & 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) A transposição de $B_{2\times3}$ é dada por $B^T_{3\times2}$:

$$B^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^T$$

(e) O produto de $A_{2\times3}$ e $C_{3\times2}$ pode ser feito, pois o números de colunas de A é igual ao número de linhas de C. A matriz resultante $(A\cdot C)_{2\times2}$ é dada por:

$$A\cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot C = \begin{bmatrix} (1,2,3)\cdot(1,0,-2) & (1,2,3)\cdot(-1,2,1) \\ (-1,0,1)\cdot(1,0,-2) & (-1,0,1)\cdot(-1,2,1) \end{bmatrix}$$

$$A\cdot C = \begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot0+3\cdot(-2) & 1\cdot(-1)+2\cdot2+3\cdot1 \\ -1\cdot1+0\cdot0+1\cdot(-2) & -1\cdot(-1)+0\cdot2+1\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 8.5 *A partir das matrizes abaixo, calcule:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) $2A - 3B^T$*;* *(b)* $A\cdot B - B\cdot A$*;*

Solução: As matrizes possuem as seguintes dimensões: $A_{3\times3}$, $B_{3\times3}$.

(a) A combinação $2A - 3B^T$ é dada por:

$$2A - 3B^T = 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} - 3\cdot\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$2A - 3B^T = 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} - 3\cdot\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3B^T = \begin{bmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot0 & 2\cdot3 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot0 & 2\cdot1 \\ 2\cdot1 & 2\cdot2 & 2\cdot0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3\cdot(-1) & -3\cdot0 & -3\cdot(-1) \\ -3\cdot1 & -3\cdot0 & -3\cdot2 \\ -3\cdot0 & -3\cdot2 & -3\cdot0 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3B^T = \begin{bmatrix} 2+3 & 0+0 & 6+3 \\ -2+(-3) & 0+0 & 2+(-6) \\ 2+0 & 4+(-6) & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 9 \\ -5 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) A expressão $A\cdot B - B\cdot A$ vai ser dividida em duas: $A\cdot B$ e $B\cdot A$. Depois faremos a diferença entre elas:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (1,0,3)\cdot(-1,0,-1) & (1,0,3)\cdot(1,0,2) & (1,0,3)\cdot(0,2,0) \\ (-1,0,1)\cdot(-1,0,-1) & (-1,0,1)\cdot(1,0,2) & (-1,0,1)\cdot(0,2,0) \\ (1,2,0)\cdot(-1,0,-1) & (1,2,0)\cdot(1,0,2) & (1,2,0)\cdot(0,2,0) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Em seguida:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} (-1,1,0)\cdot(1,-1,1) & (-1,1,0)\cdot(0,0,2) & (-1,1,0)\cdot(3,1,0) \\ (0,0,2)\cdot(1,-1,1) & (0,0,2)\cdot(0,0,2) & (0,0,2)\cdot(3,1,0) \\ (-1,2,0)\cdot(1,-1,1) & (-1,2,0)\cdot(0,0,2) & (-1,2,0)\cdot(3,1,0) \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por fim:

$$A \cdot B - B \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B - B \cdot A = \begin{bmatrix} -4-(-2) & 7-0 & 0-(-2) \\ 0-2 & 1-4 & 0-0 \\ -1-(-3) & 1-0 & 4-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Observe que $A \cdot B \neq B \cdot A$, o que implica que o produto entre matrizes não é comutativo.

8.3 Exercícios

1. Determine os tipos das matrizes abaixo e os resultados das operações:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$$

   (a) $A + B$
   (b) $A - B$
   (c) $A \cdot C$
   (d) $C \cdot D$
   (e) $A \cdot C \cdot D$
   (f) $D \cdot B$
   (g) $A \cdot C \cdot D \cdot B$
   (h) A^T
   (i) C^T
   (j) $B^T \cdot B$
   (k) $2A - B$
   (l) $A \cdot B^T + D^T \cdot D$

2. Determine o valor de x para que a matriz abaixo seja simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x+3 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Considere a matriz abaixo e $A^n = \overbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}^{n \text{ vezes}}$, $n \in \mathbb{N}$. Qual o resultado de A^2? E A^3? E A^1? O que seria A^0?

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Encontre x, y, z, w para que:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Por que para matrizes A e B, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, em geral?

8.4 Exercícios Computacionais

1. Escreva uma estrutura de dados do tipo matriz, cujos atributos são: linhas; colunas; ponteiro de ponteiros.

2. Escreva funções de leitura e escrita da matriz.

3. Escreva funções de obtenção e definição de elementas da matriz.

4. Escreva uma função que identifica se a matriz é quadrada. Vale a pena acrescentar um atributo para essa característica?

5. Escreva uma função que identifica se a matriz é diagonal. Vale a pena acrescentar um atributo para essa característica?

6. Escreva uma função que identifica se a matriz é simétrica. Vale a pena acrescentar um atributo para essa característica?

7. Escreva uma função que identifica se a matriz é um vetor linha ou coluna. Vale a pena acrescentar um atributo para essa característica?

8. Escreva uma função que soma todos os elementos de uma matriz.

9. Escreva uma função para a soma de duas matrizes.

10. Escreva uma função para o produto de uma matriz por escalar.

11. Escreva uma função para a transposição de uma matriz.

12. Escreva uma função para o produto de duas matrizes.

13. Escreva uma função para a combinação de duas matrizes.

14. Escreva uma função para a potência de uma matriz quadrada, ou seja, $A^n = \overbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}^{n \text{ vezes}}$, $n \in \mathbb{N}$. O que seria A^0?

15. Qual o resultado de:

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}^{100}$$

9 Sistemas Lineares

Nesse capítulo, atuaremos na solução de sistemas lineares, utilizando a notação matricial. Sistemas lineares têm muitas aplicações principalmente na resolução de problemas de engenharia e computação, com a presença de milhares e até milhões de variáveis. Para isso, precisamos entender o que é uma equação linear, um sistema linear, quando tais sistemas possuem solução, e como obter uma solução. Começamos com algumas definições, que serão colocadas nos números reais, mas podem ser facilmente estendida para os números complexos, por exemplo.

Definição 9.1 *Uma **equação linear com** n **incógnitas** x_j, $1 \leq j \leq n$ tem o seguinte formato:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Onde os coeficientes $a_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$ e o termo independente $b \in \mathbb{R}$.

A solução X é um vetor $X^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$ que satisfaz a equação.

Definição 9.2 *Uma sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas x_j, $1 \leq j \leq n$ tem o seguinte formato:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde os coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e os termos independentes $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

A solução X é um vetor $X^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$ que satisfaz as m equações.

O sistema anterior pode ser escrito no formato matricial, em que A é a matriz dos coeficientes que multiplica o vetor coluna das variáveis/incógnitas X e é igual ao vetor coluna dos termos independentes B. Assim, $A \cdot X = B$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Podemos também obter a matriz ampliada do sistema linear, combinando a matriz de coeficientes e o vetor de termos independentes:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Exemplo 9.1 *Considere o sistema abaixo. Coloque-o no formato matricial, defina o número de equações m e variáveis n. Determine a matriz ampliada.*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Solução: O sistema tem duas equações ($m = 2$) e três variáveis x_1, x_2 e x_3 ($n = 3$). O sistema no formato matricial fica $A \cdot X = B$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Já a matriz ampliada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

9.1 Operações em Sistemas Lineares

Num sistema linear, podemos manipular as equações por meio de algumas operações, sem que essas operações mudem a solução do sistema. Essas operações são:

(i) **Permutação de duas equações:** $eq_i \leftrightarrow eq_j$;

(ii) **Multiplicação de uma equação por um escalar:** $eq_i \to \alpha \cdot eq_i$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$;

(iii) **Combinação de uma equação com outra:** $eq_i \to \alpha \cdot eq_i + \beta \cdot eq_j$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$;

Observe que as equações são as linhas da matriz ampliada. Então todas as operações de equações apresentadas acima são operações de linha na matriz ampliada. Na matriz ampliada temos as operações:

(i) **Permutação de duas linhas:** $l_i \leftrightarrow l_j$;

(ii) **Multiplicação de uma linha por um escalar:** $l_i \to \alpha \cdot l_i$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$;

(iii) **Combinação de uma linha com outra:** $l_i \to \alpha \cdot l_i + \beta \cdot l_j$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$;

Podemos considerar os sistemas antes e depois das operações como sistemas equivalentes. Aqui vamos mostrar um exemplo de sistema em que apenas com o uso inteligente dessas operações, podemos resolvê-lo:

Exemplo 9.2 *Considere o sistema linear abaixo. Encontre um sistema equivalente em que é possível resolver o sistema de forma direta.*

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução: O sistema tem três equações ($m = 3$) e três variáveis x_1, x_2 e x_3 ($n = 3$). O sistema no formato matricial fica $A \cdot X = B$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Já a matriz ampliada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Agora vejamos a resolução, pela perspectiva do sistema de equações e da matriz ampliada:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

O objetivo é mudar a matriz ampliada até que a matriz de coeficientes dentro da matriz ampliada se transforme na matriz identidade. Na perspectiva das equações, fazemos operações até transformar o sistema em igualdades diretas. Começamos fazendo a troca da equação 1 e a equação 3, ou seja, $l_1 \leftrightarrow l_3$:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Combinando as novas linhas 1 e 2, com o objetivo de zerar o primeiro coeficiente da linha 2, ou seja, $l_2 \rightarrow l_2 - 2 \cdot l_1$:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Agora que a primeira coluna tem o número 1 na diagonal e zero no restante da coluna, podemos tentar fazer o mesmo processo na segunda coluna. Para isso, multiplicamos a segunda linha por 1/3, ou seja, $l_2 \rightarrow l_2 \div 3$:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Como já obtemos o número 1 na diagonal ($a_{22} = 1$), vamos zerar o resto da coluna 2. Como $a_{12} = 0$, resta apenas o $a_{32} = 1$. Para isso, combinaremos a linha 3 e a linha 2, $l_3 \rightarrow l_3 - l_2$:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_3 = -2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

Observe que o sistema agora forma uma matriz triangular superior, se olharmos apenas a matriz dos coeficientes dentro da matriz ampliada. A partir desse sistema, já é possível resolver o problema original, já que facilmente podemos obter x_3, já que $2x_3 = -2$. Com o valor de x_3 podemos obter os valores de x_2 na equação 2 e de x_1 na equação 1. Entretanto, vamos continuar o que estamos fazendo: diagonalizar a matriz dos coeficientes dentro da matriz ampliada. Primeiramente, dividimos a terceira linha por 2, ou seja, $l_3 \to l_3 \div 2$:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Acabamos por descobrir que $x_3 = -1$, por meio da equação 3, ou da linha 3 da matriz ampliada. Para eliminar o resto da coluna 3, temos que: $l_1 \to l_1 - l_3$ e $l_1 \to l_1 + l_2$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

E assim, obtemos a solução final do sistema: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = -1$. Observe que a matriz ampliada resulta no seguinte sistema no formato matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Antes de vermos com mais cuidado o método apresentado na resolução do sistema acima, vamos observar algumas características dos sistemas lineares, por meio de sistemas equivalentes. Assim, será possível obter algumas informações das matrizes e sistema, como o posto, a nulidade e a existência e unicidade de solução. Para isso, precisamos definir a forma escalonada para matrizes.

Definição 9.3 *Uma* ***matriz está no formato escalonada reduzida (forma escada)*** *se atende as condições:*

(i) O pivô de cada linha não-nula é 1;

(ii) O pivô de cada linha está numa coluna à direita do pivô da linha acima;

(iii) Todos os elementos de uma coluna exceto o pivô são zero;

(iv) Todas as linhas nulas estão abaixo de qualquer linha não-nula.

O pivô é o primeiro elemento não-nulo de cada linha (da esquerda para a direita).

As linhas com pivô são chamadas de linhas independentes e as linhas nulas são chamadas de linhas dependentes. As linhas nulas/dependentes possuem esse nome porque são obtidas como combinação linear de linhas independentes. E por fim, as linhas nulas não agregam informação ao sistema, pois ao ser combinação das linhas independentes, somente repetem informações já obtidas nas linhas independentes. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 9.3 *Dadas as matrizes abaixo, confirmem se estão no formato escalonado reduzido, e caso contrário mostre as condições que a matriz não atende e faça operações no sentido de transformá-la em matriz escalonada reduzida.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz A não está na forma escada, pois, embora atenda as condições (i), (ii) e (iv), a condição (iii) não é atendida. Para que a matriz fique no formato escada, basta combinar a segunda e a terceira linhas: $l_2 \to l_2 + l_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{l_2 \to l_2 + l_3}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz B já está escalonada reduzida, pois atende às quatros condições.

A matriz C não está escalonada reduzida, pois não atende às condições (i) e (ii). Para que a matriz fique no formato escada, temos que primeiro permutar as linhas 1 e 2. Em seguida, como a linha dois terá o número 2 na posição do pivô, é necessário que a nova linha 2 seja multiplicada por 1/2. Ou seja, faremos a operação $l_1 \leftrightarrow l_2$ e em seguida $l_2 \to l_2 \div 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{l_2 \to l_2 \div 2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz D não está escalonada reduzida, pois não atende a várias das condições. Para colocar no formato escada, vamos trocar as linhas 2 e 3, pois a linha 2 é uma linha nula e a linha abaixo não é. Depois, basta dividir a nova linha 2 por 3, para que o pivô se torne 1. Assim, $l_3 \leftrightarrow l_2$ e em seguida $l_2 \to l_2 \div 3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \underset{l_3 \leftrightarrow l_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{l_2 \to l_2 \div 3}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entretanto ainda não chegamos ao formato escada, pois a pivô da terceira coluna não está sozinho (condição (iii)). Logo, temos que fazer a combinação: $l_1 \to l_1 + l_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{l_1 \to l_1 + l_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No fim, sempre podemos transformar uma matriz em uma matriz escalonada reduzida? Além disso, essa matriz resultante é única? O teorema a seguir garante a existência e unicidade desta matriz. Em seguida, definimos dois conceitos importantes relacionados à matriz escalonada reduzida.

Teorema 9.1 ***Existência e Unicidade:*** *Toda matriz $A_{m\times n}$ é equivalente a uma única matriz escalonada reduzida, por meio de operações de linha.*

Definição 9.4 *O **posto de uma matriz** $A_{m\times n}$ é o número de linhas não-nulas da matriz escalonada reduzida equivalente a A. Posto de A: p_A.*

Definição 9.5 *A **nulidade de uma matriz** $A_{m\times n}$ é a diferença do número de colunas n da matriz A pelo posto de A. Nulidade de A: $n - p_A$.*

Tomando como exemplo as matrizes do exercício anterior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

E as suas matrizes equivalentes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz A tem posto $p_A = 3$ e a nulidade de A é $n - p_A = 4 - 3 = 1$. A matriz B tem posto $p_B = 2$ e a nulidade de B é $n - p_B = 5 - 2 = 3$. A matriz C tem posto $p_C = 2$ e a nulidade de C é $n - p_C = 3 - 2 = 1$. A matriz D tem posto $p_D = 2$ e a nulidade de D é $n - p_A = 3 - 2 = 1$.

Exemplo 9.4 *Considere o sistema linear abaixo. Encontre a matriz escalonada reduzida equivalente. Se for possível, resolva o sistema. Seria possível resolver o sistema se a última equação resultasse em 2 ao invés de 3?*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Solução: O sistema tem três equações ($m = 3$) e duas variáveis x_1 e x_2 ($n = 2$). O sistema no formato matricial fica $A \cdot X = B$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Já a matriz ampliada é dada por:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Resolvendo na matriz ampliada, pela primeira coluna, deixamos o valor 1 no pivô e zeramos o restante da coluna:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{l_2 \to l_2 - 2l_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{l_3 \to l_3 - l_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Na segunda coluna, repetimos o processo, ou seja, deixamos 1 no pivô e zeramos o restante da coluna:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \underset{l_2 \to l_2 \div (-5)}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \underset{l_1 \to l_1 - 2 \cdot l_2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \underset{l_3 \to l_3 + l_2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Observe que o posto da matriz ampliada é 2. Somente da matriz de coeficientes também é 2. Se passarmos da matriz ampliada para o sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

E assim, o sistema possui uma única solução. Note que a última equação se refere a uma linha nula e não deu nenhuma informação a mais.

Se a última equação fosse $x_1 + x_2 = 2$, teríamos um problema, pois a equação reduzida equivalente seria:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 = -1 \end{cases}$$

Já no sistema, embora as duas primeiras equações forneçam valores para as variáveis, a última equação é um absurdo! Nesse caso, há algum conflito de informações, e o sistema não pode ser resolvido. Ou seja, não existe solução para tal sistema.

9.2 Soluções de Sistemas Lineares

Quando então será possível resolver um sistema de equações lineares? Quais os tipos de sistema, de acordo com a quantidade de soluções? E existe alguma maneira de detectar esses tipos de sistema? Vejamos a definição e o teorema a seguir.

Definição 9.6 *Uma sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas x_j, $1 \leq j \leq n$:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde os coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e os termos independentes $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, poderá ter:

(i) ***Uma única solução****: Sistema possível e determinado;*

(ii) ***Infinitas soluções****: Sistema possível e indeterminado;*

(iii) ***Nenhuma solução****: Sistema impossível.*

Teorema 9.2 *Um sistema de m equações e n variáveis admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes. Caso as matrizes tenham o mesmo posto: (i) se o número de variáveis for igual ao posto (nulidade da matriz de coeficientes zero), então a solução será única; (ii) se n for maior que o posto (nulidade da matriz de coeficientes maior que zero) então há infinitas soluções, pois há variáveis livres. Caso o posto da matriz ampliada for diferente do posto da matriz dos coeficientes, então (iii) não há solução.*

Exemplo 9.5 *Considere o sistema linear abaixo. Encontre a matriz escalonada reduzida equivalente. Se for possível, resolva o sistema.*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ -x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$$

Solução: O sistema possui 3 equações e 3 incógnitas. Fazendo a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Transformando a matriz ampliada em matriz escalonada reduzida, começando pela primeira coluna (pivô 1 e o resto zero):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right] \underset{l_2 \to l_2 - 2l_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right] \underset{l_3 \to l_3 + l_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Com a primeira coluna em perfeito estado, partimos para a segunda coluna. Note que a linha 3 é exatamente o oposto da linha 2. Por isso, vamos fazer primeiro $l_3 \to l_3 + l_2$ e depois colocar o pivô da linha/coluna 2 igual a 1, e por último zerar o restante da coluna 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{array}\right] \underset{l_3 \to l_3 + l_2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{l_2 \to l_2 \div (-5)}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{l_1 \to l_1 - 2 \cdot l_2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/5 & -1 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Agora que estamos na matriz no formato escada: o posto da matriz ampliada é 2; o posto da matriz de coeficientes é 2. Como os postos são iguais, há solução. Agora a nulidade da matriz de coeficientes é $n - p = 3 - 2 = 1$. Portanto, há infinitas soluções. Na verdade, podemos escrever:

$$\begin{cases} x_1 + 3/5x_3 = -1 \\ x_2 + 1/5x_3 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3/5x_3 - 1 \\ x_2 = -1/5x_3 + 1 \end{cases}$$

Ou seja, temos a variável x_3 como livre e as variáveis x_1 e x_2 como dependentes de x_3. Assim, a nulidade da matriz de coeficientes resultou no número de variáveis livres.

Exemplo 9.6 *Resolva o sistema linear visto no exemplo* 9.2.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução: O sistema tem três equações ($m = 3$) e três variáveis x_1, x_2 e x_3 ($n = 3$). A sua matriz ampliada e a sua matriz escalonada reduzida são dadas por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Observe que o posto da matriz ampliada é 3; o posto da matriz de coeficientes é 3. Como os postos são iguais, há solução. Agora a nulidade da matriz de coeficientes é $n - p = 3 - 3 = 0$. Portanto, há uma única solução, sem variáveis livres. A solução é dada por: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = -1$.

9.3 Métodos para Solução de Sistemas

Nessa seção, veremos diversos métodos para solução de sistemas lineares.

9.3.1 Eliminação de Gauss-Jordan

O processo de eliminação de Gauss-Jordan é exatamente o processo que vimos para transformar uma matriz ampliada em uma matriz escalonada reduzida. O algoritmo é dado por 9.1.

Algoritmo 9.1: Algoritmo de Gauss-Jordan

```
Entrada: Matriz ampliada A_{m×(n+1)}, com coeficientes a_{ij}, 1 ≤ i ≤ m e
         1 ≤ j ≤ n + 1 (coluna dos termos independentes);
i=1, j=1;
para i ≤ m e j ≤ n + 1 faça
    Encontre linha i ≤ k ≤ m, em que a_{kj} ≠ 0;
    se Linha k encontrada então
        l_k → l_k ÷ a_{kj};
        l_i ↔ l_k;
        para Cada linha 1 ≤ k ≤ m, k ≠ i faça
            l_k → l_k − a_{kj} · l_i;
        fim
        i++;
    fim
    j++;
fim
```

Exemplo 9.7 *Se possível, resolva o sistema linear abaixo:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Solução: O sistema possui 4 equações e 4 variáveis. A matriz ampliada é dada por:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Para $i = 1$ e $j = 1$, o pivô $a_{11} = 1 \neq 0$. Assim, podemos diretamente zerar o resto da coluna $j = 1$:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1 \\ l_4 \to l_4 + l_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Em seguida, $i = 2$ e $j = 2$. Entretanto, na segunda coluna, para as linhas 2, 3 e 4, não há pivô diferente de zero. Na terceira coluna, $j = 3$, temos $a_{23} = 1 \neq 0$. Em seguida, zeramos o resto da terceira coluna.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{c} l_1 \to l_1 - l_2 \\ \Longrightarrow \\ l_3 \to l_3 + 2l_2 \\ l_4 \to l_4 + 3l_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \end{array}\right]$$

Por fim, com $i = 3$ e $j = 4$, temos o pivô $a_{34} = 1$, e nos resta zerar o restante da coluna 4.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \end{array}\right] \begin{array}{c} l_1 \to l_1 - l_3 \\ \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \\ l_4 \to l_4 - l_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para $i = 4$ e $j = 5$, só temos linhas nulas. Fim do algoritmo. Na matriz final, temos que o posto tanto da matriz de coeficientes quanto da matriz ampliada é 3. Entretanto, o número de variáveis é 4 e portanto a nulidade da matriz de coeficientes é $4 - 3 = 1$. Ou seja, há uma variável livre, no caso, a variável x_2 (variáveis não pivôs).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 32 \\ x_3 = -9 \\ x_4 = -17 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 32 \\ x_3 = -9 \\ x_4 = -17 \end{cases}$$

9.3.2 Eliminação de Gauss

O processo de eliminação de Gauss é parte do processo que vimos anteriormente, entretanto, temos como objetivo chegar em uma matriz triangular superior. O algoritmo é dado por 9.2.

Algoritmo 9.2: Algoritmo de Gauss

Entrada: Matriz ampliada $A_{m\times(n+1)}$, com coeficientes a_{ij}, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n+1$ (coluna dos termos independentes);

i=1, j=1;

para $i \leq m$ *e* $j \leq n+1$ **faça**

    Encontre linha $i \leq k \leq m$, em que $a_{kj} \neq 0$;

    se *Linha* k *encontrada* **então**

        $l_i \leftrightarrow l_k$;

        para *Cada linha* $i+1 \leq k \leq m$ **faça**

            $l_k \to l_k - \dfrac{a_{kj}}{a_{ij}} \cdot l_i$;

        fim

        i++;

    fim

    j++;

fim

Exemplo 9.8 *Se possível, resolva o sistema linear abaixo:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Solução: O sistema possui 4 equações e 4 variáveis. A matriz ampliada é dada por:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Para $i = 1$ e $j = 1$, o pivô $a_{11} = 1 \neq 0$. Assim, podemos diretamente zerar o resto da coluna $j = 1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1 \\ l_4 \to l_4 + l_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Em seguida, $i = 2$ e $j = 2$. Entretanto, na segunda coluna, para as linhas 2, 3 e 4, não há pivô diferente de zero. Na terceira coluna, $j = 3$, temos $a_{23} = 1 \neq 0$. Em seguida, zeramos o resto da terceira coluna, abaixo da linha 2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \\ l_3 \to l_3 + 2l_2 \\ l_4 \to l_4 + 3l_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \end{array}\right]$$

Por fim, com $i = 3$ e $j = 4$, temos o pivô $a_{34} = 1$, e nos resta zerar o restante da coluna 4, abaixo da linha 3.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \\ l_4 \to l_4 - l_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para $i = 4$ e $j = 5$, só temos linhas nulas. Fim do algoritmo. A matriz final é do tipo triangular superior. O número de variáveis é 4, mas as equações disponíveis são 3, e portanto a nulidade da matriz de coeficientes é $4 - 3 = 1$. Assim:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_3 = -9 \\ x_4 = -17 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 32 \\ x_3 = -9 \\ x_4 = -17 \end{cases}$$

Exemplo 9.9 *Se possível, resolva o sistema linear abaixo:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Solução: O sistema possui 3 equações e 3 variáveis. A matriz ampliada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Para $i = 1$ e $j = 1$, o pivô $a_{11} = 1 \neq 0$. Em seguida zeramos o resto da coluna $j = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 + l_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Em seguida, $i = 2$ e $j = 2$. Na segunda coluna, a linha 2 tem valor zero, mas a linha 3 tem valor 2. Assim, trocamos a ordem de 2 e 3:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ l_2 \leftrightarrow l_3 \\ \Longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Abaixo do novo pivô da segunda coluna já temos tudo zero, e em seguida, vamos para a terceira linha e terceira coluna. Como a matriz está no formato triangular superior, chegamos ao fim do algoritmo. Temos que o número de variáveis é 3 e as equações disponíveis são 3, e portanto o sistema possui uma única solução. Assim:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_2 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - 2 - 3 = 1 \\ x_2 = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

9.3.3 Decomposição *LU*

Há outros processos para encontrar a solução de um sistema. Um deles, quando o número de equações e variáveis é o mesmo, é a decomposição LU. Toda matriz de um sistema que possui solução pode ser decomposta em duas matriz uma triângular inferior L (*Lower*) e uma matriz triangular superior U (*Upper*), ou seja, $A_n = L \cdot U$. A matriz L tem a diagonal toda formada por 1, acima da diagonal todos os elementos são nulos e abaixo os elementos são l_{ij}, $i > j$. A matriz U tem abaixo da diagonal temos os elementos com valor zero e na diagonal e acima todos os elementos u_{ij}, $i \leq j$.

Mas, de que maneira isso nos ajuda? Bem, estamos interessados em resolver o sistema $Ax = b$. Onde A é a matriz de coeficientes (ordem n), x é o vetor coluna de variáveis e b é o vetor de termos independentes da equação. Se o sistema é possível e tem uma única solução então:

$$A \cdot x = b$$

$$L \cdot U \cdot x = b$$

$$\text{Se } U \cdot x = y \Longrightarrow L \cdot y = b$$

Onde y é um vetor de variáveis auxiliares. Podemos encontrar y no sistema $L \cdot y = b$, pois, na medida que L é triangular inferior, vamos de cima para baixo nas equações, encontrando y_1, em seguida y_2 usando y_1, e assim sucessivamente, até encontrar y_n. Depois determinamos x no sistema $U \cdot x = y$, pois, na medida que U é triangular superior, vamos de baixo para cima nas equações, encontrando x_n, em seguida x_{n-1} usando x_n, e assim sucessivamente, até encontrar x_1.

Exemplo 9.10 *Se possível, resolva o sistema linear abaixo:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \end{cases}$$

Solução: O sistema possui $n = 3$ equações e 3 variáveis. A matriz de coeficientes A_3 é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, vamos tentar decompor $A = L \cdot U$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Observe que há $3 \times 3 = 9$ variáveis que precisam ser definidas, o mesmo número de elementos de A. Aqui a estratégia é analisar a primeira linha de A, seguido da primeira coluna de A, por meio do produto das matrizes L e U. Depois a segunda linha de A e a segunda coluna de A. Assim sucessivamente até chegarmos à n-ésima linha de A. A n-ésima coluna de A não é necessária, já que todas as posições da matriz A já terão sido visitadas. A cada linha de A, as linhas da matriz U serão conhecidas, enquanto a cada coluna de A as colunas de L vão se tornando conhecidas.

Vamos à estratégia, **1ª linha de** A:

$$a_{11} = [1\ 0\ 0] \cdot [u_{11}\ 0\ 0]^T \Longrightarrow u_{11} = 1$$
$$a_{12} = [1\ 0\ 0] \cdot [u_{12}\ u_{22}\ 0]^T \Longrightarrow u_{12} = 1$$
$$a_{13} = [1\ 0\ 0] \cdot [u_{13}\ u_{23}\ u_{33}]^T \Longrightarrow u_{13} = 1$$

Agora a **1ª coluna de** A, desconsiderando as posições já utilizadas:

$$a_{21} = [l_{21}\ 1\ 0] \cdot [u_{11}\ 0\ 0]^T \Longrightarrow l_{21}u_{11} = 2 \Longrightarrow l_{21} = -1$$
$$a_{31} = [l_{31}\ l_{32}\ 1] \cdot [u_{11}\ 0\ 0]^T \Longrightarrow l_{31}u_{11} = -1 \Longrightarrow l_{31} = 2$$

Note que já conseguimos 5 variáveis das matrizes L e U. Partindo para a **2ª linha de** A, desconsiderando as posições já utilizadas:

$$a_{22} = [l_{21}\ 1\ 0] \cdot [u_{12}\ u_{22}\ 0]^T \Longrightarrow l_{21}u_{12} + u_{22} = 1 \Longrightarrow u_{22} = 2$$
$$a_{23} = [l_{21}\ 1\ 0] \cdot [u_{13}\ u_{23}\ u_{33}]^T \Longrightarrow l_{21}u_{13} + u_{23} = -1 \Longrightarrow u_{23} = 0$$

Para a **2ª coluna de** A, desconsiderando as posições já utilizadas:

$$a_{32} = [l_{31}\ l_{32}\ 1] \cdot [u_{12}\ u_{22}\ 0]^T \Longrightarrow l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 2 \Longrightarrow l_{32} = 0$$

Por último, a **3ª linha de** A, desconsiderando as posições já utilizadas:

$$a_{33} = [l_{31}\ l_{32}\ 1] \cdot [u_{13}\ u_{23}\ u_{33}]^T \Longrightarrow l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 3 \Longrightarrow u_{33} = 1$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E logo temos $L \cdot y = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 15 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = 6 \\ -y_1 + y_2 = -2 \\ 2y_1 + y_3 = 15 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 4 \\ y_3 = 3 \end{cases}$$

Por último, $U \cdot x = y$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_2 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Observe que o último sistema é igual ao último sistema do mesmo problema, usando eliminação de Gauss. Note também que houve uma troca das linhas 2 e 3, do Exemplo 9.9 para o Exemplo 9.10. Isso foi necessário porque a decomposição LU só funciona quando o determinante dos menores principais da matriz de coeficientes A são todos diferentes de zero. Os menores principais são as submatrizes A_{11}, A_{22}, $\ldots$, $A_{(n-1)(n-1)}$. Por exemplo, seja a matriz de coeficientes A do Exemplo 9.9 e os seus menores principais:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_{11} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Agora a matriz de coeficientes A do Exemplo 9.10 e os seus menores principais:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_{11} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Observe que no primeiro exemplo, o determinante de $A_{22} = 0$ e por isso não é possível estabelecer a decomposição LU da matriz. Entretanto, trocando as linhas 2 e 3 (segundo exemplo), já é possível estabelecer a decomposição.

Computacionalmente, os três métodos apresentados tem performance parecida sobre os problemas. O método LU possui alguns ajustes que o tornam um pouco mais rápido, principalmente para matrizes específicas, por exemplo matrizes simétricas.

9.4 Exercícios

1. Se possível, resolva o sistema linear abaixo.
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

2. Descreva todas as possíveis matrizes 2×2, que estão na forma escalonada reduzida.

3. Reduza as matrizes à forma escada reduzida por linhas. Calcule o posto e a nulidade de cada uma delas. Se fossem matrizes ampliadas, teriam solução?
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Se possível, resolva o sistema linear abaixo.
$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$$

5. Determine k, para que o sistema tenha solução.
$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

6. Se possível, resolva o sistema linear abaixo.
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1$$

7. Se possível, resolva o sistema linear abaixo.
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$$

8. Se possível, resolva o sistema linear abaixo.
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$$

9. Se possível, resolva o sistema linear abaixo.
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

10. Se possível, resolva o sistema linear abaixo.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

11. Resolva os sistemas acima utilizando os métodos computacionais conhecidos.

9.5 Exercícios Computacionais

1. Escreva uma função que lê uma matriz de coeficientes e um vetor de valores independentes e tem como saída a matriz ampliada.
2. Escreva uma função que recebe a matriz ampliada e a transforma na matriz escalonada reduzida (Eliminação de Gauss-Jordan).
3. Escreva uma função que recebe a matriz ampliada e retorna o posto da matriz ampliada.
4. Escreva uma função que recebe a matriz ampliada e retorna o posto da matriz de coeficientes.
5. Escreva uma função que recebe a matriz ampliada e retorna a nulidade da matriz de coeficientes.
6. Escreva uma função que recebe a matriz ampliada e retorna a quantidade de variáveis livres do sistema linear correspondente.
7. Escreva uma função que recebe a matriz ampliada e retorna se o problema tem uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução. No caso de uma única solução retorne o vetor solução.
8. Implemente o método de Eliminação de Gauss-Jordan para problemas sabidamente com n equações e n incógnitas (matriz de coeficientes quadrada).
9. Implemente o método de Eliminação de Gauss para problemas sabidamente com n equações e n incógnitas (matriz de coeficientes quadrada).
10. Implemente o método de Decomposição LU para problemas sabidamente com n equações e n incógnitas (matriz de coeficientes quadrada).
11. Implemente o método de Decomposição LU para problemas sabidamente com n equações e variáveis, em que matriz de coeficientes é quadrada e simétrica. Implemente a Decomposição de Cholesky.
12. Encontre a solução de uma matriz tridiagonal com 5 linhas e 5 colunas em que a diagonal principal tem elementos iguais a 2 e as diagonais acima e abaixo da diagonal principal são formadas por elementos 1. Por exemplo, a matriz 5×5 abaixo é

tridiagonal:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A diagonal principal está marcada em vermelho e as diagonais acima e abaixo em azul. Se há 5 variáveis x_i e o vetor coluna for $b = [2\ 3\ 4\ 5\ 6]^T$, qual a solução para as variáveis?

13. E se a matriz tridiagonal for 100×100 e o vetor coluna for $b = [2\ 3\ 3\ \ldots\ 3\ 3\ 2]^T$, qual a solução para as variáveis?

14. E se a matriz tridiagonal for 1000×1000 e o vetor coluna for $b = [b_i = i + 1]^T$, qual a solução para as variáveis? Faça por Eliminação de Gauss-Jordan, Eliminação de Gauss, Decomposição LU e Decomposição por Cholesky. Qual é mais rápido? Se possível, aumente n para 10.000 e reverifique os resultados.

10 Determinantes

Um dos aspectos mais importantes relacionados a matrizes é o cálculo do determinante, um número único que indica algumas propriedades de uma matriz, principalmente relacionados à resolução de sistemas lineares.

Definição 10.1 *O* ***determinante de uma matriz quadrada*** A_n *é uma função det* A_n *que associa a cada matriz quadrada* A_n *um número real. O determinante é utilizado principalmente para "determinar" se uma matriz tem inversa, já que um requisito para uma matriz ter inversa é o determinante da matriz diferente de 0. O determinante de uma matriz* A *é denominado por:*

$$det\ A \quad ou \quad |A| \quad ou \quad det[a_{ij}].$$

O determinante de matrizes A_1, A_2 e A_3 são definidos por:

$$det\ A_1 = det\,[a_{11}] = a_{11}$$

$$det\ A_2 = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$det\ A_3 = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{rr} a_{11}a_{22}a_{33} & -a_{11}a_{23}a_{32} \\ -a_{12}a_{21}a_{33} & +a_{12}a_{23}a_{31} \\ a_{13}a_{21}a_{32} & -a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

Observe que cada determinante acima correspondeu a uma soma em que cada parcela era um produto de elementos com um único elemento de cada linha e um único elemento de cada coluna. Para construir cada uma destas parcelas, podemos tomar um elemento por linha. A coluna deste elemento será dado por uma permutação $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\}$ da sequência $\{1, 2, \ldots, n\}$. Assim garantimos que será pego um elemento por linha e um por coluna.

O determinante é a soma de todas as possibilidades de permutação, algumas com sinal positivo e outras com sinal negativo. Por exemplo, em $det\ A_3$, temos 6 possibilidades de permutação π:

$$\{1,2,3\},\ \{1,3,2\},\ \{2,1,3\},\ \{2,3,1\},\ \{3,1,2\},\ \{3,2,1\}.$$

E para cada permutação π construimos os seguintes termos $a_{1\pi_1}a_{2\pi_2}a_{3\pi_3}$:

$$a_{11}a_{22}a_{33},\ a_{11}a_{23}a_{32},\ a_{12}a_{21}a_{33},\ a_{12}a_{23}a_{31},\ a_{13}a_{21}a_{32},\ a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Mas e o sinal destas parcelas? O sinal pode ser obtido pelo número de inversões, que é a quantidade de vezes em que um número maior aparece antes de um número menor na permutação π. Assim, para as permutações do caso 3, teríamos a Tabela 10.1.

Permutações π	Inversões	Total $I(\pi)$
$\{1,2,3\}$	-	0
$\{1,3,2\}$	$(3,2)$	1
$\{2,1,3\}$	$(2,1)$	1
$\{2,3,1\}$	$(2,1),(3,1)$	2
$\{3,1,2\}$	$(3,1),(3,2)$	2
$\{3,2,1\}$	$(3,2),(3,1),(2,1)$	3

Tabela 10.1 – Inversões com relação a cada permutação de dimensão 3.

Assim, cada parcela $a_{1\pi_1}a_{2\pi_2}a_{3\pi_3}$ é multiplicada por $(-1)^{I(\pi)}$ e o determinante de A_3 é encontrado por:

$$det\ A_3 = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi_1}a_{2\pi_2}a_{3\pi_3}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Estendendo este conceito para uma matriz de dimensão n:

$$det\ A_n = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi_1}a_{2\pi_2}\cdots a_{n\pi_n}$$

E então temos uma fórmula fechada para o determinante de uma matriz $n\times n$. Observe que se o número de inversões for par, então a parcela será positiva. Do contrário, se o número de inversões for ímpar, a parcela será negativa. Por construção, em cada parcela há um único elemento por linha e por coluna. Da mesma forma que construímos a permutação por linha, podemos fazê-la por coluna, obtendo a seguinte formulação:

$$det\ A_n = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} a_{\pi_1 1}a_{\pi_2 2}\cdots a_{\pi_n n}$$

Para uma matriz de dimensão n, haverá $n!$ permutações, o que indica $n!$ parcelas com $n-1$ operações de multiplicação em cada parcela. Além disso, para somar todas as parcelas, serão feitas $n-1$ operações de adição. Ou seja, teremos um total de $n!\cdot(n-1)+(n-1)=(n!+1)(n-1)$ operações aritméticas. Para o cálculo do determinante de uma matriz A_4, teremos $4! = 24$ permutações/parcelas e $(4!+1)(4-1) = 75$ operações aritméticas. Para uma matriz A_5, teremos $5! = 120$ permutações/parcelas e $(5!+1)(5-1) = 484$ operações aritméticas. De todo modo, ao que parece, o cálculo do determinante por meio de permutações é um procedimento computacionalmente caro.

Exemplo 10.1 *Encontre o determinante da matriz abaixo:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz quadrada possui dimensão 3. Para encontrar o determinante de A:

$$det\ A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$det\ A = 0\cdot3\cdot1 - 0\cdot(-1)\cdot0 - 1\cdot2\cdot1 + 1\cdot(-1)\cdot1 + 1\cdot2\cdot0 - 1\cdot3\cdot1$$

$$det\ A = -6$$

10.1 Propriedades do Determinante

Nesta seção, veremos algumas propriedades do determinante, que possibilitarão entendermos outros métodos para o seu cálculo. Tais propriedades tem como base a fórmula definida para o determinante:

$$det\ A_n = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n} \text{ ou}$$
$$det\ A_n = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} a_{\pi_1 1} a_{\pi_2 2} \cdots a_{\pi_n n}$$

Seja uma matriz $A_{n\times n}$. O determinante de A possui as seguintes propriedades:

(i) **Matriz Transposta:** $det\ A = det\ A^T$;

(ii) **Permutação de duas linhas:** Se $l_i \leftrightarrow l_j$, $i \neq j$, então a nova matriz A' possui $det\ A' = -det\ A$;

(iii) **Multiplicação de uma linha/coluna por um escalar:** Se $l_i \to \alpha \cdot l_i$, $\alpha \in \mathbb{R}$, então a nova matriz A' possui $det\ A' = \alpha \cdot det\ A$. Ou equivalentemente, $det\ A = \dfrac{1}{\alpha} \cdot det\ A'$;

(iv) **Multiplicação da matriz por um escalar:** Se $\alpha \in \mathbb{R}$, então $det\ (\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot det\ A$;

(v) **Teorema de Jacobi - Combinação de uma linha com outra:** Se $l_i \to \cdot l_i + \alpha \cdot l_j$, $\alpha \in \mathbb{R}$, então a nova matriz A' possui $det\ A' = det\ A$;

(vi) **Linha/Coluna nula:** Se A possui uma linha ou coluna de zeros, então $det\ A = 0$;

(vii) **Linhas/Colunas proporcionais:** Se A possui duas linhas ou 2 colunas iguais ou proporcionais, então $det\ A = 0$;

(viii) **Decomposição de determinantes:** Se as matrizes A, B e C, com elementos diferentes apenas na linha/coluna k e que nesta linha/coluna $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, então $det\ C = det\ A + det\ B$;

(ix) **Teorema de Binet:** Se $det\ (A \cdot B) = det\ A \cdot det\ B$;

(x) **Matriz triangular:** O determinante de uma matriz triangular superior ou inferior é o produto dos elementos da diagonal principal.

A partir destas propriedades, podemos elaborar duas maneiras de calcular o determinante, que serão vistos nas seções seguintes.

10.2 Determinante por Triangularização

Pela última propriedade, vimos que o determinante de uma matriz triangular superior é o produto dos elementos da diagonal principal. E há outras propriedades que garantem as operações de permutação de linhas, multiplicação de linha por escalar e combinação de uma linha a outra, com alguns ajustes no determinante da matriz. Assim, poderíamos usar o algoritmo de Eliminação de Gauss para encontrar o determinante de uma matriz.

Exemplo 10.2 *Encontre o determinante da matriz abaixo:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz quadrada possui dimensão 3. Para encontrar o determinante de A, por meio da triangularização da matriz A (note a diferença nos limitantes da matriz, de $[A]$ para $|A|$):

$$det\ A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Observe que o elemento $a_{11} = 0$, e por isso temos que fazer uma troca de linha (ou coluna) para que um elemento não nulo fique em a_{11}. Lembre-se que na troca, o determinante muda de sinal. Assim:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\Longrightarrow} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Agora, vamos zerar a coluna 1, abaixo de a_{11}. Podemos combinar a linha 2 com a linha 1. Lembre-se que isso não afeta o valor do determinante. Não há necessidade de fazer combinações com a linha 3, pois ela já tem um elemento zero na coluna 1.

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1}{\Longrightarrow} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aqui, há várias possibilidades. Por exemplo, ao olhar para a segunda linha, podemos dividí-la por 3. Lembre-se que se multiplicamos uma linha de A por $\frac{1}{3}$ (o mesmo que dividir por 3), a nova matriz A' tem o determinante $det\ A' = \frac{1}{3} \cdot det\ A$. Como estamos interessados no determinante de A, então podemos considerar que $det\ A = 3 \cdot det\ A'$ Assim:

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{l_2 \rightarrow l_2 \div 3}{\Longrightarrow} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Agora podemos combinar as linha 3 e a linha 2 para terminar de triangularizar a matriz (sem alterações no determinante):

$$-3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{l_3 \rightarrow l_3 - l_2}{\Longrightarrow} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Como a matriz já está triangularizada, basta multiplicarmos a diagonal da matriz, com os ajustes de fora da matriz:

$$det\ A = -3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = -6$$

Observe que poderíamos ter triangularizado a matriz de outras maneiras.

Exemplo 10.3 *Encontre o determinante da matriz abaixo:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz quadrada possui dimensão 4. O determinante de A, que será resolvido por meio da triangularização da matriz A:

$$det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

Poderíamos começar com uma combinação das linhas 2, 3 e 4 com a linha 1 para deixar a primeira coluna zero, abaixo de a_{11}. Entretanto, se prestarmos atenção na matriz A, veremos que as colunas 1 e 2 são iguais. Logo $det\ A = 0$. De fato, quando resolvemos o exercício 9.8, com a matriz A como matriz de coeficientes, vimos que o sistema tinha infinitas soluções, ou seja, não encontramos uma única solução.

10.3 Determinante pelo Teorema de Laplace

Podemos recursivamente reduzir o determinante de uma matriz para uma soma de determinantes de ordem menor, por meio de um resultado obtido por Laplace. Para tanto, precisamos antes definir cofator:

Definição 10.2 *Dada uma matriz quadrada A de ordem n, o cofator Δ_{ij} do elemento a_{ij} é dado por:*

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

onde A_{ij} é a submatriz de A eliminando a linha i e a coluna j.

Observe que o cofator é um número que depende do determinante da matriz A_{ij}, que possui ordem $n-1$.

Teorema 10.1 *O **determinante de uma matriz** A de ordem n é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha/coluna pelos respectivos cofatores. Se escolhermos uma linha i:*

$$|A| = \sum_j a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_j a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

Se escolhermos uma coluna j:

$$|A| = \sum_i a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_i a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

Pelo teorema, o determinante da matriz A, de ordem n é reduzido para uma soma de determinantes de ordem $n-1$. Como determinantes de ordem 2 são fáceis de calcular, podemos reduzir recursivamente o determinante de ordem n até chegarmos a determinantes de ordem 2. E com isso, obtemos o determinante de A. Observe que uma matriz com alguma linha/coluna com muitos valores nulos (zero) são boas opções para ser escolhidas, pois se um elemento $a_{ij} = 0$, então $a_{ij}\Delta_{ij} = 0$, não havendo a necessidade de calcular o cofator Δ_{ij}.

Para $n = 3$ e escolhendo a linha 1, temos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Caso a coluna 2 tivesse sido escolhida:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$$

$$= a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Exemplo 10.4 *Encontre o determinante da matriz abaixo:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz quadrada possui dimensão 3. Para encontrar o determinante de A, por meio do desenvolvimento de Laplace:

$$det\ A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Escolhendo a linha 1:

$$det\ A = 0 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$det\ A = 0 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot (-3) = -6$$

Observe que não era necessário calcular Δ_{11}, pois $a_{11} = 0$.

Poderíamos ter feito o exercício de maneira diferente, usando algumas manipulações da matriz por meio das propriedades do determinante. Assim, ao fazer uma combinação das colunas 2 e 3 (não altera o determinante), teríamos:

$$det\ A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_2 \to c_2 - c_3}{\Longrightarrow} det\ A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Agora ficou ainda mais vantajoso escolher a linha 1 para fazer o desenvolvimento de Laplace:

$$det\ A = 0 \cdot \Delta_{11} + 0 \cdot \Delta_{12} + 1 \cdot \Delta_{13}$$

$$det\ A = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$det\ A = 1 \cdot 1 \cdot (-6) = -6$$

Exemplo 10.5 *Encontre o determinante da matriz abaixo, pelo método da triangularização e pelo método de Laplace:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz quadrada possui dimensão 4 e o seu determinante é dado por:

$$det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Pelo método da triangularização, para facilitar podemos trocar as colunas 1 e 4 (troca o sinal do determinante). Em seguida zerar o novo elemento a_{41}, fazendo uma combinação da nova linha 1 com a nova linha 4 (não altera o determinante).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_4}{\Longrightarrow} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{l_4 \to l_4 - 2l_1}{\Longrightarrow} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

Combina-se então as linhas 2 e 4 com o intuito de zerar o elemento a_{42} (não altera o determinante). Não é necessário alterar a linha 3, pois o elemento $a_{32} = 0$.

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} \overset{l_4 \to l_4 + (1/3)l_2}{\Longrightarrow} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2/3 & -10/3 \end{vmatrix}$$

Em seguida combina-se a linha 3 e a nova linha 4 com o intuito de zerar o elemento a_{43}

(não altera o determinante).

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2/3 & -10/3 \end{vmatrix} \overset{l_4 \to l_4 + (2/3)l_3}{\Longrightarrow} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8/3 \end{vmatrix}$$

Com a matriz triangular superior:

$$det\ A = -1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = 8$$

Pelo método de Laplace, temos:

$$det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Podemos escolher a coluna 4, que possui 2 elementos nulos:

$$det\ A = 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nos determinantes das submatrizes $|A_{14}|$ e $|A_{44}|$, podemos combinar as colunas 1 e 3 em ambas fazendo $c_1 \to c_1 - c_3$. Assim:

$$det\ A = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Agora, escolhendo a segunda linha do primeiro determinante e a terceira linha do segundo determinante:

$$det\ A = -1 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$det\ A = 1 \cdot 10 + 2 \cdot (-1) = 8$$

10.4 Exercícios

1. Dê o número de inversões das seguintes permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

   (a) $\pi = \{3, 5, 4, 1, 2\}$

   (b) $\pi = \{2, 1, 4, 3, 5\}$

   (c) $\pi = \{5, 4, 3, 2, 1\}$

2. Quantas inversões possui a permutação $\pi = \{n, n-1, \ldots, 2, 1\}$?

3. Calcule o determinante da matriz abaixo pela definição, pelos métodos da triangulação e pelo desenvolvimento de Laplace.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

4. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $det\ A + det\ B$ e $det\ (A+B)$.

5. Calcule o determinante da matriz abaixo pela definição, pelos métodos da triangulação e pelo desenvolvimento de Laplace.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

6. Calcule o determinante da matriz abaixo pelos métodos da triangulação e pelo desenvolvimento de Laplace.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Mostre que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$.

8. Mostre que um triângulo no plano formado pelos pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ tem como área:
$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

10.5 Exercícios Computacionais

1. Escreva uma função que recebe uma permutação do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ e retorna o número de inversões.

2. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna o determinante desta matriz, por meio da soma das permutações.

3. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna o determinante desta matriz, pelo método da triangulação.

4. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna o determinante desta matriz, pelo método de Laplace.

5. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna o determinante desta matriz, pela regra de Chiò.

6. Encontre o determinante de uma matriz tridiagonal com 5 linhas e 5 colunas em que a diagonal principal é formada por elementos 2 e as diagonais acima e abaixo da diagonal principal são formadas por elementos 1. Por exemplo, a matriz 5×5 abaixo é tridiagonal:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   A diagonal principal está marcada em vermelho e as diagonais acima e abaixo em azul.

7. Calcule o determinante da matriz tridiagonal 100×100, pelos métodos: (1) soma das permutações; (2) triangulação; (3) Laplace; e (4) Regra de Chiò. Qual é mais rápido? Se possível, aumente n para 1.000 e reverifique os resultados.

8. Seria possível fazer um método específico para matrizes tridiagonais? Considere que os elementos da tridiagonal principal podem ter qualquer valor.

11 Matrizes Inversas

Dentro da álgebra de matrizes, um componente importante é a matriz inversa. Por meio da matriz inversa, é possível neutralizar alguma matriz em determinado cálculo, resolver um sistema linear e até decompor a matriz em um formato ideal para potência de matrizes.

Definição 11.1 *A* ***matriz inversa de uma matriz quadrada*** A_n *é denominada por* A^{-1} *e possui a seguinte propriedade:*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Algumas perguntas ainda não ficaram respondidas. Dada uma matriz A sempre existe uma matriz inversa? E como determinar a matriz inversa A^{-1} de A?

Para responder à primeira pergunta, utilizamos as propriedades do determinante, pois, a partir da definição de matriz:

$$\begin{gathered} A \cdot A^{-1} = I_n \\ det\ \left(A \cdot A^{-1}\right) = det\ I_n \\ det\ A \cdot det\ A^{-1} = 1 \\ det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A}. \end{gathered}$$

E o determinante da matriz A^{-1} só é determinado, se $det\ A \neq 0$. Assim, para que exista a matriz inversa A^{-1} de uma matriz A é necessário que $det\ A \neq 0$. Chamamos a matriz A de inversível, caso A possua inversa.

Para a segunda pergunta, vamos apresentar dois métodos para o cálculo da matriz inversa A^{-1}: (1) Matriz Adjunta; e (2) Eliminação de Gauss-Jordan (isso mesmo, novamente!).

11.1 Matriz Adjunta

A matriz adjunta é calculada por meio da matriz de cofatores.

Definição 11.2 *A* ***matriz de cofatores de uma matriz quadrada*** A_n *é dada por*

$$\Delta_A = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

Onde os cofatores $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A_{ij}|$ *e* $|A_{ij}|$ *é o determinante da submatriz de* A *sem a linha* i *e a coluna* j*.*

Definição 11.3 *A matriz adjunta de uma matriz quadrada* A_n *é a transposta da matriz de cofatores.*

$$adj\ A = \Delta_A^T$$

Exemplo 11.1 *Encontre a matriz de cofatores e matriz adjunta da matriz abaixo:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em seguida, faça a multiplicação de A por adj A.

Solução: A matriz quadrada possui dimensão 3. Logo, a matriz de cofatores será dada por:

$$\Delta_A = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

Calculando cada um destes termos:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad \Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

Assim, a matriz de cofatores e a matriz adjunta são dadas por:

$$\Delta_A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad adj\ A = \Delta_A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Por fim, multiplicando A por $adj\ A$:

$$A \cdot adj\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = -6 \cdot I_3$$

Perceba que o produto desta matriz acabou resultando na matriz identidade I_3 multiplicada por -6, que é justamente o valor do determinante de A (Exemplo 10.1). Assim, para este caso, $A \cdot adj\ A = (det\ A) \cdot I_3$.

Teorema 11.1 *Seja uma matriz quadrada A_n. Então:*

$$A \cdot adj\ A = (det\ A) \cdot I_n$$

De fato, quando multiplicamos A por $adj\ A$, nos elementos da diagonal da matriz resultante, aparece o cálculo do $det\ A$, por meio do desenvolvimento de Laplace. Para os elementos fora da diagonal da matriz resultante, sempre aparecerá o determinante de uma matriz com alguma linha repetida, o que torna estes elementos nulos.

Por meio da relação do teorema anterior:

$$A \cdot adj\ A = (det\ A) \cdot I_n$$
$$A \cdot \left(\frac{1}{det\ A} \cdot adj\ A\right) = I_n \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot adj\ A$$

E assim temos uma forma de calcular a matriz inversa, usando a matriz adjunta.

Exemplo 11.2 *Encontre a matriz inversa A^{-1} da matriz A do Exemplo 11.1 e o determinante de A^{-1}.*

Solução: Como visto anteriormente,

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Além disso, $det\ A = -6$. Para encontrar a matriz inversa, basta tomar $A^{-1} = \dfrac{1}{det\ A} \cdot adj\ A$:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot adj\ A = \frac{1}{-6} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/6 & 1/6 & 4/6 \\ 3/6 & 1/6 & -2/6 \\ 3/6 & -1/6 & 2/6 \end{bmatrix}$$

Pela definição de matriz inversa, podemos calcular o determinante de A^{-1} por:

$$det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

Exemplo 11.3 *Encontre a matriz inversa A^{-1} de matriz quadrada de ordem 2 qualquer*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Solução: Calculando a matriz de cofatores:

$$\Delta_A = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}d & (-1)^{1+2}c \\ (-1)^{2+1}b & (-1)^{2+2}a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Com isso, pode ser calculada a matriz adjunta, e como $det\ A = ad - bc$, a matriz inversa também pode ser calculada:

$$adj\ A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

11.2 Eliminação de Gauss-Jordan

O processo de cálculo da matriz inversa pode ser visto como um processo de resolução de n sistemas de equações com n incógnitas cada. E com isso, podemos usar o método de eliminação de Gauss-Jordan para resolver estes sistemas. Pela definição de matriz inversa:

$$A \cdot A^{-1} = I_n \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & \dots & a_{1n}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & \dots & a_{2n}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{-1} & a_{n2}^{-1} & \dots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Pela definição de produto de matrizes, se multiplicarmos A pela primeira coluna de A^{-1}, obteremos a primeira coluna de I. Se multiplicarmos A pela segunda coluna de A^{-1}, obteremos a segunda coluna de I. Ou seja, se multiplicarmos A pela j-ésima coluna de A^{-1}, obteremos a j-ésima coluna de I. Assim, temos um sistema para cada coluna de A^{-1}, ou seja, um total de n sistemas.

Na resolução do sistema por meio da Eliminação de Gauss-Jordan, amplia-se a matriz de coeficientes A com a coluna independente. Atua-se então na matriz ampliada fazendo operações que não mudam o sistema linear: (1) permutação de linhas; (2) multiplicação de uma linha por escalar; e (3) combinação de linhas. O objetivo destas operações é tornar a matriz escalonada reduzida, o que especificamente no caso de uma matriz quadrada A, é transformar as primeiras n colunas da matriz ampliada na matriz identidade. Após este processo, a última coluna se torna a solução. Como há n sistemas para ser resolvidos, o processo de Eliminação de Gauss-Jordan teria que ser feito n vezes para mesma matriz A, mudando apenas a última coluna da matriz ampliada. Entretanto, mudar a matriz de coeficientes A, dentro da matriz ampliada, é sempre o mesmo processo. Por isso, ao invés de fazer n processos de Eliminação de Gauss, fazemos apenas 1, ampliando a matriz de coeficientes com todas as colunas da matriz identidade. Assim, ao final do processo de Eliminação de Gauss-Jordan desta super matriz ampliada, teremos do lado esquerdo a matriz identidade e do lado direito a matriz inversa. Visualmente, a super matriz ampliada, de tamanho $n \times 2n$, se $det\ A \neq 0$:

$$[\ A \mid I\ ] \xrightarrow[\text{Gauss-Jordan}]{\text{Eliminação}} \left[\ I \mid A^{-1}\ \right]$$

Exemplo 11.4 *Determine a matriz inversa de:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz A tem dimensão 3 e a matriz ampliada possui tamanho 3×6:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por meio da Eliminação de Gauss-Jordan, como $a_{11} = 0$, podemos fazer a permuta das linhas 1 e 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} l_1 \leftrightarrow l_3 \\ \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Agora $a_{11} = 1$ e temos que zerar o restante da coluna 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ \Longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Divide-se a linha 2 por 3, assim $a_{22} = 1$. Em seguida, zera-se o resto da coluna 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ l_2 \to l_2 \div 3 \\ l_3 \to l_3 - l_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

Agora divide-se a linha 3 por 2 e zera-se o resto da coluna 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right] \begin{array}{c} l_1 \to l_1 - l_3 \\ l_2 \to l_2 + l_3 \\ l_3 \to l_3 \div 2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/6 & 4/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/6 & -2/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/6 & 2/6 \end{array}\right]$$

E assim, colocando todos os denominadores como 6:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/6 & 1/6 & 4/6 \\ 3/6 & 1/6 & -2/6 \\ 3/6 & -1/6 & 2/6 \end{bmatrix}$$

Computacionalmente e manualmente falando, calcular a matriz inversa pelo método de eliminação de Gauss-Jordan é mais rápido que fazê-lo pela matriz adjunta. O cálculo de determinantes é um procedimento computacionalmente caro e deve ser evitado. Assim, prefira calcular a matriz inversa pelo método de eliminação de Gauss-Jordan

11.3 Propriedades da Matriz Inversa

Sejam duas matrizes quadradas de ordem n: A e B. Eis algumas propriedades das matrizes inversas:

(i) **Unicidade:** A matriz inversa A^{-1} é única;

(ii) **Inversa da Inversa:** $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

(iii) **Inversa da Transposta:** $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$;

(iv) **Inversa do Produto:** $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (observe a troca da ordem de A e B);

(v) **Resolução de Sistemas Lineares:** Se A é inversível, a solução do sistema $A \cdot x = b$ é dada por $x = A^{-1} \cdot b$. Entretanto, encontrar a matriz inversa para resolução de sistemas é computacionalmente mais caro que encontrar a solução do sistema pelos métodos vistos no Capítulo 9.

11.4 Exercícios

1. Calcule a matriz inversa de A, pelos métodos da matriz adjunta e da eliminação de Gauss-Jordan.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Calcule a matriz inversa de A, pelos métodos da matriz adjunta e da eliminação de Gauss-Jordan.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $(A \cdot B)^{-1}$, $B^{-1} \cdot A^{-1}$, $(B \cdot A)^{-1}$ e $A^{-1} \cdot B^{-1}$.

4. Calcule a matriz inversa de A pela eliminação de Gauss-Jordan.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Encontre a fórmula geral de matrizes 2×2 usando eliminação de Gauss-Jordan.

6. Uma maneira de codificar uma mensagem é por meio de multiplicação de matrizes. Associando as letras do alfabeto a números, ou seja: Uma mensagem de 9 caracteres

Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Letra	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Número	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Tabela 11.1 – Correspondência Letra-Número

pode ser colocada como uma matriz $A_{3\times3}$ e codificada usando uma matriz $C_{3\times3}$, inversível, por meio do produto $A \cdot C$. Envia-se a mensagem. O destinatário, ao receber a mensagem codificada $A \cdot C$, multiplica-a por C^{-1}, ou seja, decodifica-a: $A \cdot C \cdot C^{-1} = A$. Por exemplo, seja a mensagem: "GAALEFODA". A matriz A será dada por:
$$A = \begin{bmatrix} G & A & A \\ L & E & F \\ O & D & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 12 & 5 & 6 \\ 15 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando a chave C e sua inversa C^{-1}

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -3/6 & 1/6 & 4/6 \\ 3/6 & 1/6 & -2/6 \\ 3/6 & -1/6 & 2/6 \end{bmatrix}$$

Obtemos a seguinte mensagem codificada:

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 12 & 5 & 6 \\ 15 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 7 \\ 16 & 27 & 13 \\ 9 & 27 & 12 \end{bmatrix}$$

Para descodificar:

$$(A \cdot C) \cdot C^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 7 \\ 16 & 27 & 13 \\ 9 & 27 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3/6 & 1/6 & 4/6 \\ 3/6 & 1/6 & -2/6 \\ 3/6 & -1/6 & 2/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 12 & 5 & 6 \\ 15 & 4 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Qual o significado da mensagem abaixo, considerando a mesma matriz de codificação C acima?

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 17 & 17 & 28 \\ 21 & 9 & 12 \\ 23 & 43 & 12 \end{bmatrix}$$

Escolha outra chave C e codifique uma mensagem sua A, de 9 caracteres para um colega. Entregue ao colega a mensagem codificada AC e a chave C para que ele descubra a mensagem. Ele terá que fazer a matriz inversa de C e depois decodificar AC.

11.5 Exercícios Computacionais

1. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna a matriz de cofatores desta matriz.

2. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna a matriz adjunta desta matriz.

3. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna se a matriz é inversível.

4. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna a matriz inversa desta matriz, por meio da matriz adjunta.

5. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada de ordem n e retorna a matriz inversa desta matriz, por meio da Eliminação de Gauss-Jordan.

6. Escreva uma função que recebe a matriz quadrada A de ordem n e um vetor b de tamanho n e retorna a solução deste problema por meio da inversa $A^{-1} \cdot b$.

7. Encontre a solução de uma matriz tridiagonal com 5 linhas e 5 colunas em que a diagonal principal tem elementos iguais a 2 e as diagonais acima e abaixo da diagonal principal são formadas por elementos 1. Por exemplo, a matriz 5×5 abaixo é tridiagonal:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A diagonal principal está marcada em vermelho e as diagonais acima e abaixo em azul. Se há 5 variáveis x_i e o vetor coluna for $b = [2\ 3\ 4\ 5\ 6]^T$, qual a solução para as variáveis? Use a matriz inversa.

8. E se a matriz tridiagonal for 100×100 e o vetor coluna for $b = [2\ 3\ 3\ \ldots\ 3\ 3\ 2]^T$, qual a solução para as variáveis? Use a matriz inversa.

9. E se a matriz tridiagonal for 1000×1000 e o vetor coluna for $b = [b_i = i + 1]^T$, qual a solução para as variáveis? Use a matriz inversa e compare com os métodos anteriores. Se possível, aumente n para 10.000 e reverifique os resultados.

12 Espaços Vetoriais

Nos capítulos anteriores, tivemos uma noção de vetor, principalmente nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Neste capítulo, vamos ampliar a perspectiva de vetores em outros espaços, embora mantendo o foco nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Para isso, precisamos definir um espaço vetorial.

Definição 12.1 *Um **espaço vetorial** é um conjunto V, não vazio, com duas operações: (1) soma de vetores; e (2) multiplicação de vetor por escalar, tais que as propriedades abaixo acerca das duas operações sejam satisfeitas. Um elemento $\vec{v} \in V$ é chamado de **vetor**. Assim, dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ e α, $\beta \in \mathbb{R}$:*

(i) ***Comutativa:*** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

(ii) ***Associativa:*** $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$;

(iii) ***Vetor Nulo:*** $\exists\ \vec{0} \in V$, *tal que* $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;

(iv) ***Vetor Oposto:*** $\exists\ (-\vec{u}) \in V$, *tal que* $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;

(v) ***Associativa:*** $\alpha \cdot (\beta \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta)\vec{u}$;

(vi) ***Distributiva:*** $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;

(vii) ***Distributiva:*** $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;

(viii) ***Identidade:*** $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Exemplo 12.1 *Os espaços $\mathbb{R}^n$ são vetoriais, dadas as operações de soma e produto por escalar tradicionais, (coordenada por coordenada):*

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n)$$

Exemplo 12.2 *Os espaços $\mathcal{M}(m, n)$, ou espaço das matrizes de dimensão $m \times n$ são vetoriais, dadas as operações de soma e produto por escalar abaixo:*

$$\vec{u} + \vec{v} = A_{m \times n} + B_{m \times n}$$
$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot A_{m \times n}$$

Exemplo 12.3 *Os espaços $\mathcal{P}_n$, ou espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n são vetoriais, dadas as operações de soma e produto por escalar abaixo:*

$$\vec{u} + \vec{v} = \Big(u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n\Big) + \Big(v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots + v_n x^n\Big)$$
$$\vec{u} + \vec{v} = \Big(u_0 + v_0 + (u_1 + v_1)x + (u_2 + v_2)x^2 + \ldots + (u_n + v_n)x^n\Big)$$
$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \Big(u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n\Big)$$
$$\alpha \cdot \vec{u} = \Big(\alpha \cdot u_0 + \alpha \cdot u_1 x + \alpha \cdot u_2 x^2 + \ldots + \alpha \cdot u_n x^n\Big)$$

Exemplo 12.4 *O espaço $\mathcal{F}(x)$, ou espaço das funções, é um espaço vetorial dadas as operações de soma e produto por escalar abaixo:*

$$\vec{u} + \vec{v} = f(x) + g(x)$$
$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot f(x)$$

Dentro de um espaço vetorial V é possível identificar espaços U, $U \subseteq V$ que também são espaços vetoriais. A esses subespaços, temos a definição a seguir.

Definição 12.2 *Dado um espaço vetorial V, um subconjunto não-vazio $U \subseteq V$ é* ***subespaço vetorial*** *de V se a soma de vetores e o produto por escalar de vetores de U resultam em vetores em U. Ou seja, as operações mantêm os resultados dentro do subespaço U:*

(i) Se $\vec{u}$, $\vec{v} \in U$ então $\vec{u} + \vec{v} \in U$;

(ii) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in U$ então $\alpha \cdot \vec{u} \in U$;

Ao invés de mostrar a soma e produto escalar separadamente, mostrá-los juntos, combinando-os. Assim, se $\vec{u}$, $\vec{v} \in U$ e α, $\beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in U$. Além do mais, como os vetores de U são também vetores de V, eles já atendem às 8 propriedades dos espaços vetoriais e portanto, os subespaços vetoriais devem sempre conter o vetor nulo e o vetor oposto, por exemplo.

Exemplo 12.5 *Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, com as operações de soma e produto por escalar tradicionais. Determine quais subconjuntos abaixo são subespaços vetoriais.*

(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$;

(b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ ax + by + cz = 0\}$;

(c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ ax + by + cz + d = 0,\ d \neq 0\}$;

(d) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (0, 0, 0) + t \cdot (a, b, c),\ t \in \mathbb{R}\}$;

(e) U : *Reta que não passa pela origem* $(0, 0, 0)$;

(f) $U = \{(0, 0, 0)\}$;

(g) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x, y, z \geq 0\}$;

Solução: O item (a) são todos os pontos $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ e como variamos apenas as coordenadas x e y, é como se tivéssemos o plano $\mathbb{R}^2$, que sabemos ser um espaço vetorial também. Assim, $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

O item (b) representa todos os planos que passam pela origem, $ax + by + cz = 0$. Os vetores $\vec{u}$ deste plano possuem ângulo de $90°$ com o vetor normal (a, b, c), ou seja, $\vec{u} \cdot (a, b, c) = 0$. Se combinarmos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de U, com escalares α e β:

$$(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot (a, b, c) = \alpha\vec{u} \cdot (a, b, c) + \beta\vec{v} \cdot (a, b, c) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

E portanto, a combinação linear $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ também é ortogonal ao vetor normal (a, b, c) e pertence ao plano U.

O item (c) representa todos os planos do $\mathbb{R}^3$ que não passam pela origem. Mas a origem $(0, 0, 0)$ representa o vetor nulo do $\mathbb{R}^3$ e precisa estar em qualquer subespaço vetorial. Portanto, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ ax + by + cz + d = 0,\ d \neq 0\}$ não é nem mesmo espaço vetorial.

O item (d) são todas as retas do espaço $\mathbb{R}^3$ que passam pela origem. Os vetores $\vec{u}$ desta reta são múltiplos do vetor direção (a, b, c). Se combinarmos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de U, com escalares α e β:

$$(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha \cdot k_u \cdot (a, b, c) + \beta \cdot k_v \cdot (a, b, c) = (\alpha \cdot k_u + \beta \cdot k_v) \cdot (a, b, c).$$

E portanto, a combinação linear $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ também é múltipla do vetor direção (a, b, c) e pertence ao plano U.

No item (e), assim com o item (c), o vetor nulo não está no conjunto U : Reta que não passa pela origem $(0, 0, 0)$. E portanto não subespaço vetorial.

O item (f) é espaço vetorial, pois se combinarmos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de U, com escalares α e β:

$$(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha \cdot (0, 0, 0) + \beta \cdot (0, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

O item (g) não é espaço vetorial, pois, dado um vetor de $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x, y, z \geq 0\}$, o seu vetor oposto não está em U.

Os dois teoremas a seguir, ajudam na concepção de subespaços vetoriais.

Teorema 12.1 (Interseção de Subespaços) *Dados U e W subespaços vetoriais de V, então $U \cap W$ também é subespaço vetorial.*

Teorema 12.2 (Soma de Subespaços) *Dados U e W subespaços vetoriais de V, então*

$$U + W = \{\vec{v} \in V;\ \vec{v} = \vec{u} + \vec{w},\ \vec{u} \in U,\ \vec{w} \in W\}$$

também é subespaço vetorial.

Exemplo 12.6 *Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, com as operações de soma e produto por escalar tradicionais. Dados os subespaços vetoriais abaixo, vamos combiná-los de acordo com os teoremas de interseção e soma de subespaços.*

(a) $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y - 3z = 0\}$*;*

(b) $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0,\ z = 0\}$*;*

(c) $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (0, 0, 0) + t \cdot (3, 0, 1),\ t \in \mathbb{R}\}$*;*

Solução: Os subespaços são: U_1 um plano qualquer que passa pela origem e tem vetor normal $(1, 2, -3)$; U_2 a reta que forma o eixo x do $\mathbb{R}^3$; e U_3 uma reta qualquer com vetor direção $(3, 0, 1)$. A reta U_3 pertence ao plano U_1, pois $(1, 2, -3) \cdot (3, 0, 1) = 0$. Fazendo as possíveis interseções:

$U_1 \cap U_2$ tem apenas o ponto $(0, 0, 0)$ que pertence ao dois. Sabemos que o subconjunto $U = \{(0, 0, 0)\}$ é subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

$U_1 \cap U_3 = U_3$, que é subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

$U_2 \cap U_3 = \{(0,0,0)\}$ é a interseção de duas retas que possuem apenas o ponto $(0,0,0)$ em comum. Portanto, é também subespaço vetorial.

Com relação à soma de subespaços:

$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$, pois a soma de vetores em U_1 e vetores de U_2, do tipo $(x,0,0)$ formam qualquer ponto (x,y,z) do $\mathbb{R}^3$.

$U_1 + U_3 = U_1$, pois $U_3 \subset U_1$. E U_1 é subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

$U_2 + U_3$ é o espaço gerado por vetores de duas retas. Utilizando os vetores diretores das duas retas, podemos fazer o produto vetorial entre elas e calcular o vetor normal do plano resultante:

$$\vec{n} = \vec{u_2} \times \vec{u_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,0)$$

Logo, o plano formado por estas retas é dado por: $U_2 + U_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0\}$.

12.1 Combinação Linear

Uma das características mais importantes de um espaço vetorial V, é que, podemos combinar as operações de soma de vetores e de produto de vetor por escalar, numa operação denominada combinação linear. Assim:

Definição 12.3 *Seja um espaço vetorial V, com duas operações bem definidas: (1) soma de vetores; e (2) multiplicação de vetor por escalar. Seja também, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, ..., $\vec{v_n}$ vetores de V e a_1, a_2, ..., a_n números reais. O vetor $\vec{v}$ abaixo pertence a V:*

$$\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \ldots + a_n\vec{v_n}$$

*Além disso, o vetor $\vec{v}$ é denominado de **combinação linear** de $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, ..., $\vec{v_n}$.*

*Todos as possibilidades de vetores como combinação de $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, ..., $\vec{v_n}$, formam um subespaço $U \subseteq V$ e é denominado **subespaço gerado por** $\vec{v_1}$**,** $\vec{v_2}$**,** ...**,** $\vec{v_n}$. Dizemos que:*

$$U = [\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}]\,.$$

Já havíamos vislumbrado algumas propriedades e benefícios da combinação linear quando vimos vetores do espaço no curso. Por conta da combinação linear, é que é possível, por exemplo, decompor um vetor em outros vetores (por exemplo, decompor uma força nas direções $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$). Outro exemplo é a soma de subespaços vetoriais, que compõem vetores, dados vetores de um espaço e de outro.

Exemplo 12.7 *Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, calcule os subespaço gerado pelos vetores:*

(a) $[\vec{v_1}]$;

(b) $[\vec{v_1}, \vec{v_2}]$, $\alpha\vec{v_1} \neq \vec{v_2}$;

(c) $[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}]$, $\vec{v_3} \notin [\vec{v_1}, \vec{v_2}]$;

Solução: No primeiro caso, os vetores $\vec{v}$ gerados por $[\vec{v_1}]$ são dados por:

$$\vec{v} = a_1\vec{v_1}$$

Ou seja, o subespaço vetorial gerado pela combinação linear do vetor $\vec{v_1}$ é a reta em que $\vec{v_1}$ é o vetor diretor.

No segundo caso, os vetores $\vec{v}$ gerados por $[\vec{v_1}, \vec{v_2}]$ são dados por:

$$\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}$$

Ou seja, o subespaço vetorial gerado pela combinação linear dos vetores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ formam um plano gerado pelos vetores. Aqui, o fato que $\alpha\vec{v_1} \neq \vec{v_2}$, significa que os dois vetores não são paralelos e por isso podem gerar o plano. Se $\vec{v_1} \mid\mid \vec{v_2}$, o subespaço gerado seria o mesmo do primeiro caso.

No terceiro caso, os vetores $\vec{v}$ gerados por $[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}]$ são dados por:

$$\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + +a_3\vec{v_3}$$

Ou seja, o subespaço vetorial gerado pela combinação linear dos vetores geram o $\mathbb{R}^3$. Aqui, o fato de $\vec{v_3} \notin [\vec{v_1}, \vec{v_2}]$, implica que $\vec{v_3}$ não é combinação linear de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$. Caso o fosse, o subespaço gerado seria o mesmo do segundo caso, pois um vetor do próprio plano $[\vec{v_1}, \vec{v_2}]$ não acrescenta nenhuma nova direção ao plano.

Exemplo 12.8 *Seja o espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$*, calcule os subespaço gerado pelos vetores a seguir:*

(a) $[(1, 0); (0, 1)]$;

(b) $[(2, 1); (4, 2)]$;

(c) $[(1, 1); (2, 1); (1, 2)]$;

Solução: No primeiro caso, os vetores $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ gerados por $[(1, 0); (0, 1)]$ são:

$$(x, y) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1)$$
$$(x, y) = (a_1, 0) + (0, a_2)$$
$$(x, y) = (a_1, a_2)$$
$$\begin{cases} a_1 = x \\ a_2 = y \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

Portanto, todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ são combinação linear de $\{(1, 0); (0, 1)\}$ e $[(1, 0); (0, 1)] = \mathbb{R}^2$.

No segundo caso, os vetores $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ gerados por $[(2, 1); (4, 2)]$ são:

$$(x, y) = a_1(2, 1) + a_2(4, 2)$$
$$(x, y) = (2a_1 + 4a_2, a_1 + 2a_2)$$
$$\begin{cases} 2a_1 + 4a_2 = x \\ a_1 + 2a_2 = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = \dfrac{x}{2} \\ a_1 + 2a_2 = y \end{cases}$$

O sistema linear aponta que $a_1 + 2a_2$ é igual a $\dfrac{x}{2}$ e y, ao mesmo tempo. Pelo fato de x e y serem quaisquer, em muitos casos $\dfrac{x}{2} \neq y$ e, assim, trata-se de um sistema impossível. Ou seja, não é possível gerar todo o $\mathbb{R}^2$ com estes vetores.

Perceba aqui que $(2,1) \,||\, (4,2)$, ou seja, os vetores apontam para a mesma direção. Assim, pensando de outra maneira:

$$\begin{gathered}\vec{v} = a_1(2,1) + a_2(4,2)\\ \vec{v} = a_1(2,1) + a_2 \cdot 2(2,1)\\ \vec{v} = (a_1 + 2a_2)\cdot(2,1)\end{gathered}$$

Portanto, os vetores $\vec{v}$ que são combinação linear de $\{(2,1);(4,2)\}$ são todos múltiplos de e paralelos a $(2,1)$.

No terceiro caso, os vetores $\vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ gerados por $[(1,1);(2,1);(1,2)]$ são:

$$\begin{gathered}(x,y) = a_1(1,1) + a_2(2,1) + a_3(1,2)\\ (x,y) = (a_1 + 2a_2 + a_3, a_1 + a_2 + 2a_3)\\ \begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 = x\\ a_1 + a_2 + 2a_3 = y\end{cases}\end{gathered}$$

Que é um sistema linear com duas equações, três incógnitas e múltiplas soluções. Portanto, todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ são combinação linear de $\{(1,1);(2,1);(1,2)\}$ e o subespaço gerado por $[(1,1);(2,1);(1,2)] = \mathbb{R}^2$.

Aqui é importante perceber que dos três vetores, é possível obter um como combinação linear dos outros dois. Facilmente percebemos a seguinte relação, e as relações seguintes, por meio de manipulação algébrica:

$$3\cdot(1,1) = (2,1) + (1,2) \Longrightarrow \begin{cases} (1,1) = \dfrac{1}{3}(2,1) + \dfrac{1}{3}(1,2)\\ (2,1) = 3\cdot(1,1) - (1,2)\\ (1,2) = 3\cdot(1,1) - (2,1)\end{cases}$$

O que isso significa? Que podemos retirar um dos vetores, que o subespaço gerado a partir dos outros dois será o mesmo! Neste caso:

$$[(1,1);(2,1)] = [(1,1);(1,2)] = [(2,1);(1,2)] = \mathbb{R}^2.$$

Exemplo 12.9 *Seja o espaço vetorial* $\mathcal{M}(2,2)$*, calcule os subespaço gerado pelos vetores:* $\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right]$*;*

Solução: Um vetor qualquer de $\mathcal{M}(2,2)$ é uma matriz $A = \begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}$. Analisando os vetores gerados por $\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right]$:

$$a_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & a_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{bmatrix}$$

Portanto, a combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ resultam em vetores do tipo $\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$, ou seja, quaisquer matrizes diagonais 2×2.

12.2 Dependência Linear

Nos exercícios anteriores, acerca de combinação linear, subespaços gerados, soma/interseção de subespaços sempre era importante identificar vetores que estavam em direções iguais, vetores contidos dentro de subespaços maiores, ou mesmo vetores que eram combinações de outros vetores. Em alguns problemas era possível inclusive retirar/descartar vetores. Mas as perguntas que ficam são, quando posso descartar um vetor, qual vetor pode ser descartado, quando discutimos sobre subespaços gerados? Para isso, precisamos da definição seguinte:

Definição 12.4 *Seja um espaço vetorial V e um conjunto de vetores de V, $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$. O conjunto de vetores é* ***linearmente independente (LI)*** *se nenhum dos vetores é combinação linear dos outros. Do contrário, se houver pelo menos um vetor que pode ser obtido como combinação dos outros, então o conjunto de vetores é* ***linearmente dependente (LD)****.*

Uma outra maneira de determinar que o conjunto de vetores é LI ou LD é verificando o vetor nulo como combinação linear do conjunto de vetores.

$$\vec{0} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \ldots + a_n\vec{v_n}.$$

Perceba que neste caso, a solução trivial $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ sempre é solução da combinação linear. Se a solução trivial $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ é a única solução, então o conjunto de vetores é ***linearmente independente (LI)****. Do contrário, se existir uma solução com algum $a_i \neq 0$, então o conjunto de vetores é* ***linearmente dependente (LD)****.*

Exemplo 12.10 *Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, classifique os conjuntos a seguir, quanto a dependência linear.*

(a) $\{(1,0);(0,1)\}$;

(b) $\{(2,1);(4,2)\}$;

(c) $\{(1,1);(2,1);(1,2)\}$;

(d) $\{(-1,1);(1,0)\}$;

Solução: O conjunto de vetores $\{(1,0);(0,1)\}$, como visto no Exemplo 12.8, gera todo o espaço $\mathbb{R}^2$. E:

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \Longrightarrow (0,0) = 0(1,0) + 0(0,1).$$

Ou seja, a solução trivial $a_1 = a_2 = 0$ é a única solução possível, e por isso o conjunto é LI.

No item (b), os vetores $(2,1)$ e $(4,2)$, como visto no Exemplo 12.8, são paralelos, i.e., um é múltiplo do outro e assim um é combinação linear do outro: $(4,2) = 2 \cdot (2,1)$. Portanto, o conjunto é LD. Note que pelo fato de um ser combinação linear do outro, podemos obter soluções não triviais para o vetor nulo como combinação linear dos vetores $(2,1)$ e $(4,2)$. Por exemplo:

$$2(2,1) - (4,2) = (0,0).$$

Os vetores $(1,1)$, $(2,1)$ e $(1,2)$, como visto no Exemplo 12.8, geram o espaço $\mathbb{R}^2$, entretanto, qualquer um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros dois. Por isso, o conjunto de vetores $\{(1,1);(2,1);(1,2)\}$ é LD. Assim como no item anterior, podemos obter soluções não triviais para o vetor nulo:

$$3(1,1) - (2,1) - (1,2) = (0,0).$$

No último caso, temos dois vetores, com direções diferentes $(-1,1)$ e $(1,0)$. Para verificar sua dependência linear:

$$a_1(-1,1) + a_2(1,0) = (0,0)$$
$$(-a_1 + a_2, a_1) = (0,0)$$
$$\begin{cases} -a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow a_1 = a_2 = 0.$$

Portanto, como a solução trivial $a_1 = a_2 = 0$ é a única solução possível, o conjunto de vetores é LI.

Exemplo 12.11 *Seja o espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$*, classifique os conjuntos a seguir, quanto a dependência linear.*

(a) $\{(1,0,0);(0,0,1)\}$*;*

(b) $\{(2,1,0);(4,2,0);(0,0,1)\}$*;*

(c) $\{(1,1,1);(2,1,0);(1,2,-1)\}$*;*

(d) $\{(-1,1,0);(1,1,0);(1,0,0);(0,1,1)\}$*;*

Solução: O conjunto de vetores $\{(1,0,0);(0,0,1)\}$, se combinados para gerar o vetor nulo:

$$a_1(1,0,0) + a_2(0,0,1) = (0,0,0)$$
$$(a_1, 0, a_2) = (0,0,0)$$
$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow a_1 = a_2 = 0.$$

Ou seja, a solução trivial $a_1 = a_2 = 0$ é a única solução possível, e por isso o conjunto é LI.

No item (b), os vetores são: $(2,1,0)$, $(4,2,0)$ e $(0,0,1)$. Perceba que $(2,1,0)$ e $(4,2,0)$ são paralelos, pois $(4,2,0) = 2 \cdot (2,1,0)$. Portanto, o conjunto é LD. Por outro lado, combinando os vetores em busca do vetor nulo:

$$a_1(2,1,0) + a_2(4,2,0) + a_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$(2a_1 + 4a_2, a_1 + 2a_2, a_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = -2a_2 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Ou seja, qualquer solução não trivial em que $a_1 = -2a_2$, $a_2 \neq 0$, gera o vetor nulo. Portanto, o conjunto é LD.

O conjunto $\{(1,1,1);(2,1,0);(1,2,-1)\}$, se combinados para gerar o vetor nulo:

$$a_1(1,1,1) + a_2(2,1,0) + a_3(1,2,-1) = (0,0,0)$$

$$(a_1 + 2a_2 + a_3, a_1 + a_2 + 2a_3, a_1 - a_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_1 - a_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Portanto, a solução trivial $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ é a única solução possível, e por isso o conjunto é LI.

No último caso, temos o conjunto de vetores $\{(-1,1,0);(1,1,0);(1,0,0);(0,1,1)\}$. Perceba, rapidamente, que $(1,1,0) - 2(1,0,0) = (-1,1,0)$ e portanto o conjunto é LD. Se analisarmos o vetor nulo como combinação do conjunto:

$$a_1(-1,1,0) + a_2(1,1,0) + a_3(1,0,0) + a_4(0,1,1) = (0,0,0)$$

$$(-a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_4, a_4) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} -a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_4 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = -a_2 \\ a_3 = -2a_2 \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

Portanto, como são possíveis solução não-triviais, o conjunto de vetores é LD.

E respondendo às perguntas do início da seção, sempre que um conjunto de vetores é LD, pode-se retirar/cortar os vetores que são combinações dos outros, até que o conjunto de vetores seja LI. O subespaço gerado pelos vetores originais e o subespaço gerado pelos vetores LI (após os cortes) é o mesmo.

Por exemplo, no último exercício, o conjunto $\{(-1,1,0);(1,1,0);(1,0,0);(0,1,1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ é LD. Não podemos tirar o vetor $(0,1,1)$, pois ele independe dos outros vetores (ele é o único que possui coordenada z e $a_4 = 0$). Podemos cortar o vetor $(1,1,0)$, pois há dependência de outros vetores nele. Assim, o conjunto restante é $\{(-1,1,0);(1,0,0);(0,1,1)\}$. Se verificá-lo, o conjunto é LI e gera o espaço $\mathbb{R}^3$.

12.3 Base de um Espaço Vetorial

Como visto nas seções anteriores, conjuntos de vetores de um espaço geram subespaços vetoriais. Mas quantos e que tipos de vetores seriam necessários para se gerar o próprio espaço vetorial? A isso, definimos o conceito de base de um espaço vetorial:

Definição 12.5 *Seja um espaço vetorial V e um conjunto $\beta = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ de vetores de V. O conjunto de vetores β é **base do espaço vetorial** V se for linearmente independente e o subespaço gerado pelo conjunto for o próprio espaço vetorial V.*

Exemplo 12.12 *Determine se os conjuntos abaixo são bases de $\mathbb{R}^2$.*

(a) $\beta_a = \{(1,0);(0,1)\}$;

(b) $\beta_b = \{(2,1);(4,2)\}$;

(c) $\beta_c = \{(1,1);(2,1);(1,2)\}$;

(d) $\beta_d = \{(-1,1);(1,0)\}$;

Solução: Como vimos nos Exemplos 12.8 e 12.10, o conjunto de vetores $\{(1,0);(0,1)\}$ gera todo o espaço $\mathbb{R}^2$ e é LI, portanto β_a é base do $\mathbb{R}^2$.

Já no item (b), conforme os mesmos Exemplos 12.8 e 12.10, o conjunto β_b gera apenas a reta com vetor diretor $(2,1)$ e é LD. Portanto β_b não é base do $\mathbb{R}^2$.

Os vetores $(1,1)$, $(2,1)$ e $(1,2)$, como visto nos Exemplos 12.8 e 12.10, geram o espaço $\mathbb{R}^2$, entretanto, qualquer um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros dois. Por isso, o conjunto de vetores $\{(1,1);(2,1);(1,2)\}$ é LD. Por isso, β_c não é base do $\mathbb{R}^2$.

No último caso, temos dois vetores, com direções diferentes $(-1,1)$ e $(1,0)$, que conforme o Exemplo 12.10 são LI. Para verificar que eles geram todo o espaço $\mathbb{R}^2$:

$$a_1(-1,1) + a_2(1,0) = (x,y)$$

$$(-a_1 + a_2, a_1) = (x,y)$$

$$\begin{cases} -a_1 + a_2 = x \\ a_1 = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = y \\ a_2 = x + y \end{cases}$$

Portanto, $y(-1,1) + (x+y)(1,0) = (x,y)$
e o conjunto de vetores $\beta_d = \{(-1,1);(1,0)\}$ gera todo o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Como atende aos requisitos, β_d é base de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 12.13 *Quais conjuntos a seguir, são base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$?*

(a) $\beta_a = \{(1,0,0);(0,0,1)\}$;

(b) $\beta_b = \{(2,1,0);(4,2,0);(0,0,1)\}$;

(c) $\beta_c = \{(1,1,1);(2,1,0);(1,2,-1)\}$;

(d) $\beta_d = \{(-1,1,0);(1,1,0);(1,0,0);(0,1,1)\}$;

Solução: De acordo com o Exemplo 12.11, os conjuntos β_b e β_d são LD e β_a e β_c são LI. Vamos verificar se eles são capazes de gerar o espaço $\mathbb{R}^3$:

O conjunto de vetores $\{(1,0,0);(0,0,1)\}$, se combinados para gerar o vetor (x,y,z) qualquer do $\mathbb{R}^3$:

$$a_1(1,0,0)+a_2(0,0,1)=(x,y,z)$$
$$(a_1,0,a_2)=(x,y,z)$$
$$\begin{cases} a_1 = x \\ 0 = y \\ a_2 = z \end{cases}.$$

Perceba que uma das equações foi $0=y$. Neste caso, é impossível gerar todos os vetores (x,y,z), pois não há solução para $y\neq 0$. Assim, os dois vetores não conseguem gerar o espaço $\mathbb{R}^3$.

No item (b), os vetores $(2,1,0)$, $(4,2,0)$ e $(0,0,1)$ são LD. Podemos retirar o vetor $(4,2,0)$, que é paralelo a $(2,1,0)$. Da mesma forma que o exemplo anterior, a partir de dois vetores não é possível gerar o espaço $\mathbb{R}^3$.

O conjunto $\{(1,1,1);(2,1,0);(1,2,-1)\}$ é LI. Se combinados para gerar um vetor qualquer $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$a_1(1,1,1)+a_2(2,1,0)+a_3(1,2,-1)=(x,y,z)$$
$$(a_1+2a_2+a_3, a_1+a_2+2a_3, a_1-a_3)=(x,y,z)$$
$$\begin{cases} a_1+2a_2+a_3 = x \\ a_1+a_2+2a_3 = y \\ a_1-a_3 = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{-x+2y+3z}{4} \\ a_2 = \dfrac{3x-2y-z}{4} \\ a_3 = \dfrac{-x+2y-z}{4} \end{cases}$$

Portanto, qualquer vetor (x,y,z), pode ser escrito como combinação linear de $\{(1,1,1);(2,1,0);(1,2,-1)\}$. Ou seja, β_c gera o espaço $\mathbb{R}^3$ e portanto β_c é base do $\mathbb{R}^3$.

No último caso, o conjunto de vetores $\beta_d=\{(-1,1,0);(1,1,0);(1,0,0);(0,1,1)\}$ é LD. Mas β_d gera o espaço $\mathbb{R}^3$, pois o sistema resultante possui soluções.

$$a_1(-1,1,0)+a_2(1,1,0)+a_3(1,0,0)+a_4(0,1,1)=(x,y,z)$$
$$(-a_1+a_2+a_3, a_1+a_2+a_4, a_4)=(x,y,z)$$
$$\begin{cases} -a_1+a_2+a_3 = x \\ a_1+a_2+a_4 = y \\ a_4 = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = -a_2+y-z \\ a_3 = -2a_2+x+y-z \\ a_4 = z \end{cases}$$

Assim, β_d não é base de $\mathbb{R}^3$, pois é LD. Se cortássemos o vetor $(1,1,0)$ do conjunto β_d, os vetores restantes são LI e continuam gerando $\mathbb{R}^3$. Portanto $\beta_d-\{(1,1,0)\}$ é base do $\mathbb{R}^3$.

Perceba que nos exemplos anteriores, as bases geradas em um mesmo espaço vetorial sempre tinham a mesma quantidade de vetores. Isto terá um significado mais adiante. Alguns teoremas a seguir se destacam quando estamos discutindo acerca de bases de espaços vetoriais. Além disso, o conceito de dimensão é proposto em seguida.

Teorema 12.3 *Dado um espaço vetorial V e os vetores $\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots,\vec{v_n}\in V$, tal que $[\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots,\vec{v_n}]=V$. Destes vetores, podemos extrair uma base de V. Além disso, qualquer conjunto com mais de n vetores é linearmente dependente.*

Um corolário da afirmação acima é que qualquer base de V possui o mesmo número de elementos.

Definição 12.6 *O número de elementos de uma base do espaço vetorial V é denominado de* ***dimensão*** *de V ou $dim(V)$. Quando V possui base com um número finito de vetores, então V é um espaço vetorial de dimensão finita. Do contrário, V é um espaço vetorial de dimensão infinita.*

Por exemplo, o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ possui dimensão finita n. O espaço das matrizes $m \times n$, $\mathcal{M}(m,n)$ possui dimensão finita $m \cdot n$. O espaço dos polinômios de ordem n ou menor, $\mathcal{P}_n$ possui dimensão finita $n+1$. O espaço das funções $\mathcal{F}$, apresentado no Exemplo 12.5 possui dimensão infinita.

Teorema 12.4 *Seja o espaço vetorial V de dimensão finita e os vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n} \in V$, linearmente independentes (LI). A este conjunto de vetores, é sempre possível acrescentar outros vetores para obter uma base de V. Além disso, se $dim(V) = n$ qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes forma uma base de V.*

Como consequência dos teoremas e definições acima, podemos chegar nas seguintes maneiras de se formar uma base de V, sob alguma das possibilidades abaixo:

<table>
<tr><th></th><th>LI</th><th>LD</th></tr>
<tr><td>$|\beta| < dim(V)$</td><td>Acrescentar vetores</td><td rowspan="3">Retirar vetores supérfluos e acrescentar outros</td></tr>
<tr><td>$|\beta| = dim(V)$</td><td>Já é base!</td></tr>
<tr><td>$|\beta| > dim(V)$</td><td>Impossível!</td></tr>
</table>

Tabela 12.1 – Relações entre $dim(V)$, quantidade de vetores do conjunto β, $|\beta|$ e a independência linear com o objetivo de formar uma base de V.

Exemplo 12.14 *Quais conjuntos a seguir, são base do espaço vetorial V?*

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1,0); (0,1)\}$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{(1,0,0); (0,0,1)\}$;

(c) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1,1); (2,1); (1,2)\}$;

(d) $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{(1,0,0); (0,0,1); (-1,0,1)\}$;

(e) $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{(1,0,0); (0,0,1); (-1,0,1); (1,0,2)\}$;

(f) $V = \mathcal{M}_{2,2}$, $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$;

(g) $V = \mathcal{P}_3(x)$, $\beta = \left\{1; x; x^2; x^3\right\}$;

(h) $V = \mathcal{P}_2(x)$, $\beta = \left\{1 + x; 3x^2; 1 + x + x^2\right\}$;

Solução: Para $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,0); (0,1)\}$, vimos anteriormente que β é LI. Como $dim(V) = 2 = |\beta|$, então β é base de $\mathbb{R}^2$.

Para $V=\mathbb{R}^3$ e $\beta=\{(1,0,0);(0,0,1)\}$, perceba que β é LI. Mas $dim(V)=3>2=|\beta|$, então β não é base de $\mathbb{R}^3$. Para que β seja uma base, precisamos acrescentar vetores a β, mantendo a independência linear do conjunto. Podemos acrescentar por exemplo o vetor $(0,1,0)$, já que faltam vetores na direção y.

Para $V=\mathbb{R}^2$ e $\beta=\{(1,1);(2,1);(1,2)\}$, temos β LD e $dim(V)=2<3=|\beta|$ e assim β não é base de $\mathbb{R}^2$. Se tirarmos o vetor $(1,1)$, por exemplo, os vetores restantes formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

Para $V=\mathbb{R}^3$ e $\beta=\{(1,0,0);(0,0,1);(-1,0,1)\}$, perceba que $-(1,0,0)+(0,0,1)=(-1,0,1)$ e β é LD e $dim(V)=3=|\beta|$. Porém β não é base de $\mathbb{R}^3$. Se tirássemos o vetor $(-1,0,1)$, chegaríamos num conjunto com 2 elementos e precisaríamos acrescentar mais um, por exemplo $(0,1,0)$, para que o novo conjunto seja base do $\mathbb{R}^3$.

Para $V=\mathbb{R}^3$ e $\beta=\{(1,0,0);(0,0,1);(-1,0,1);(1,0,2)\}$, perceba que $-(1,0,0)+(0,0,1)=(-1,0,1)$ e $(1,0,0)+2(0,0,1)=(1,0,2)$. Assim β é LD e $dim(V)=3<4=|\beta|$. β não é base de $\mathbb{R}^3$. Se tirássemos os vetores $(-1,0,1)$ e $(1,0,2)$, chegaríamos num conjunto com 2 elementos e precisaríamos acrescentar mais um, por exemplo $(0,1,0)$, para que o novo conjunto seja base do $\mathbb{R}^3$.

Para $V=\mathcal{M}_{2,2}$ e

$$\beta=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\},$$

perceba que β é LI e $dim(V)=4=|\beta|$, portanto β é base de $\mathcal{M}_{2,2}$.

Para $V=\mathcal{P}_3(x)$ e $\beta=\left\{1;x;x^2;x^3\right\}$, perceba que β é LI e $dim(V)=4=|\beta|$, portanto β é base de $\mathcal{P}_3(x)$.

Para $V=\mathcal{P}_2(x)$ e $\beta=\left\{1+x;3x^2;1+x+x^2\right\}$, note que $(1+x)+\frac{1}{3}(3x^2)=(1+x+x^2)$ e assim β é LD. $dim(V)=3=|\beta|$, mas β não é base de $\mathcal{P}_3(x)$. Para que seja base, pode-se retirar o vetor $3x^2$ e substituí-lo por 1, por exemplo.

Mais alguns teoremas e definições:

Teorema 12.5 *Sejam U e W são subespaços de V cuja dimensão é finita. Então: $dim(U)\leq dim(V)$, $dim(W)\leq dim(V)$ e $dim(U+W)=dim(U)+dim(W)-dim(U\cap W)$, pelo princípio da inclusão-exclusão de conjuntos.*

Teorema 12.6 *Seja o espaço vetorial V e a base $\beta=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots,\vec{v_n}\}$ de V. Todo vetor $\vec{v}$ é escrito de maneira única como combinação linear de $\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots,\vec{v_n}$.*

Definição 12.7 *Seja o espaço vetorial V e a base $\beta=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots,\vec{v_n}\}$ de V. Como:*

$$\vec{v}=a_1\vec{v_1}+a_2\vec{v_2}+\ldots+a_n\vec{v_n},$$

podemos chamar $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ de coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base β. Ou seja: $[\vec{v}]_\beta=(a_1,a_2,\ldots,a_n)_\beta$ Observe, que nesse caso, a ordem dos vetores é muito importante para as coordenadas.

Exemplo 12.15 *Quais as coordenadas dos vetores a seguir, dadas as bases do espaço vetorial V?*

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1,0);(0,1)\}$ *e* $\vec{v} = (1,2)$;

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(0,1);(1,0)\}$ *e* $\vec{v} = (1,2)$;

(c) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1,1);(1,-1)\}$ *e* $\vec{v} = (1,2)$;

(d) $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ *e* $\vec{v} = (1,2,3)$;

(e) $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{(1,0,0);(1,0,1);(0,1,1)\}$ *e* $\vec{v} = (1,2,3)$;

Solução: No primeiro caso, temos que achar as coordenadas do vetor $(1,2)$, para a base $\beta = \{(1,0);(0,1)\}$ do $\mathbb{R}^2$. Assim:

$$(1,2) = a_1(1,0) + a_2(0,1)$$

$$(1,2) = (a_1, a_2)$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow (1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)$$

E portanto, as coordenadas de $(1,2)$ na base β é dada por: $(1,2)_\beta$. Perceba que as coordenadas são as mesmas do vetor $(1,2)$. Isso se deve pelo fato da base ser a base canônica, que é a mais natural e mais utilizada.

No segundo caso, temos que achar as coordenadas do vetor $(1,2)$, para a base $\beta = \{(0,1);(1,0)\}$ do $\mathbb{R}^2$. Assim:

$$(1,2) = a_1(0,1) + a_2(1,0)$$

$$(1,2) = (a_2, a_1)$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow (1,2) = 2(0,1) + 1(1,0)$$

E portanto, as coordenadas de $(1,2)$ na base β é dada por: $(2,1)_\beta$. Observe que a troca de posição dos vetores na base, fez com que as coordenadas fossem diferentes.

No terceiro caso, temos que achar as coordenadas do vetor $(1,2)$, para a base $\beta = \{(1,1);(1,-1)\}$ do $\mathbb{R}^2$. Assim:

$$(1,2) = a_1(1,1) + a_2(1,-1)$$

$$(1,2) = (a_1 + a_2, a_1 - a_2)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 - a_2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow (1,2) = \frac{3}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1)$$

E portanto, as coordenadas de $(1,2)$ na base β é dada por: $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})_\beta$.

No primeiro caso do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, temos que achar as coordenadas do vetor $(1,2,3)$, para a base canônica $\beta = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$. Assim:

$$(1,2,3) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1)$$

$$(1,2,3) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 3 \end{cases} \Longrightarrow (1,2,3) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1).$$

E portanto, as coordenadas de $(1,2,3)$ na base β é dada por: $(1,2,3)_\beta$.

No último caso, temos que achar as coordenadas do vetor $(1,2,3)$, para a base $\beta = \{(1,0,0);(1,0,1);(0,1,1)\}$ do $\mathbb{R}^3$. Assim:

$$(1,2,3) = a_1(1,0,0) + a_2(1,0,1) + a_3(0,1,1)$$

$$(1,2,3) = (a_1 + a_2, a_3, a_2 + a_3)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_3 = 2 \\ a_2 + a_3 = 3 \end{cases} \Longrightarrow (1,2,3) = 0(1,0,0) + 1(1,0,1) + 2(0,1,1).$$

E portanto, as coordenadas de $(1,2,3)$ na base β é dada por: $(0,1,2)_\beta$.

12.3.1 Mudança de Base

Dadas duas bases $\beta_1 = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ e $\beta_2 = \{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_n}\}$ do mesmo espaço vetorial V. Um vetor $\vec{v} \in V$ pode ser escrito em coordenadas $[\vec{v}]_{\beta_1} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e coordenadas $[\vec{v}]_{\beta_2} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$:

$$\begin{aligned} [\vec{v}]_{\beta_1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{v} = a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} + \ldots + a_n\vec{u_n} \\ [\vec{v}]_{\beta_2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{v} = b_1\vec{w_1} + b_2\vec{w_2} + \ldots + b_n\vec{w_n} \end{aligned}$$

O objetivo desta subseção é obter um método para se fazer a mudança de base, da base β_1 para a base β_2, ou seja, a partir de $[\vec{v}]_{\beta_1}$, obter $[\vec{v}]_{\beta_2}$. Para isso, precisaremos determinar os vetores da base β_1 como combinações dos vetores da base β_2. Então:

$$\begin{aligned} [\vec{u_1}]_{\beta_2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{u_1} = a_{11}\vec{w_1} + a_{21}\vec{w_2} + \ldots + a_{n1}\vec{w_n} \\ [\vec{u_2}]_{\beta_2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{u_2} = a_{12}\vec{w_1} + a_{22}\vec{w_2} + \ldots + a_{n2}\vec{w_n} \\ &\vdots \\ [\vec{u_n}]_{\beta_2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{u_n} = a_{1n}\vec{w_1} + a_{2n}\vec{w_2} + \ldots + a_{nn}\vec{w_n} \end{aligned}$$

Mas vimos anteriormente as coordenadas $[\vec{v}]_{\beta_1}$. Substituindo as combinações anteriores:

$$[\vec{v}]_{\beta_1} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} = a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} + \ldots + a_n\vec{u_n}$$

$$\vec{v} = a_1\left(a_{11}\vec{w_1} + a_{21}\vec{w_2} + \ldots + a_{n1}\vec{w_n}\right) + a_2\left(a_{12}\vec{w_1} + a_{22}\vec{w_2} + \ldots + a_{n2}\vec{w_n}\right)$$
$$+ \ldots + a_n\left(a_{1n}\vec{w_1} + a_{2n}\vec{w_2} + \ldots + a_{nn}\right)\vec{w_n}$$

Agora reorganizando em função dos vetores da base β_2:

$$\vec{v} = \left(a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + \ldots + a_{1n}a_n\right)\vec{w_1} + \left(a_{21}a_1 + a_{22}a_2 + \ldots + a_{2n}a_n\right)\vec{w_2}$$
$$+ \ldots + \left(a_{n1}a_1 + a_{n2}a_2 + \ldots + a_{nn}a_n\right)\vec{w_n}$$

No resultado anterior, obtemos novamente o vetor $\vec{v}$ como combinação dos vetores da base β_2. Assim, podemos comparar as coordenadas do último resultado àquelas do resultado inicial $[\vec{v}]_{\beta_2} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

$$b_1 = a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + \ldots + a_{1n}a_n$$
$$b_2 = a_{21}a_1 + a_{22}a_2 + \ldots + a_{2n}a_n$$
$$\vdots$$
$$b_n = a_{n1}a_1 + a_{n2}a_2 + \ldots + a_{nn}a_n$$

Em formato matricial:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \iff [\vec{v}]_{\beta_2} = [I]_{\beta_1\beta_2} [\vec{v}]_{\beta_1}$$

Do lado esquerdo da equação, temos as coordenadas de $\vec{v}$ na base β_2. A direita, temos a matriz mudança de base $[I]_{\beta_1\beta_2}$ e as coordenadas de $\vec{v}$ na base β_1. Observe que as colunas da matriz $[I]_{\beta_1\beta_2}$ são as coordenadas dos vetores da base β_1 em relação à base β_2.

Exemplo 12.16 *Considere a base* $\beta_1 = \{(1,0);(0,1)\}$ *(base canônica do* $\mathbb{R}^2$*) e a base* $\beta_2 = \{(1,1);(-1,1)\}$ *do* $\mathbb{R}^2$*. Determine as matrizes mudança de base* $[I]_{\beta_1\beta_2}$ *e* $[I]_{\beta_2\beta_1}$*. Qual das duas matrizes foi mais fácil de se obter? Em seguida, multiplique as matrizes obtidas. Qual o significado disso? Use a mudança de base para descrever* $(1,2)_{\beta_1}$ *na base* β_2*. Use a mudança de base para descrever* $(1,2)_{\beta_2}$ *na base* β_1*.*

Solução: Para encontrar $[I]_{\beta_1\beta_2}$, é preciso colocar as coordenadas de β_1 em função de β_2.

$$(1,0) = a_{11}(1,1) + a_{21}(-1,1) = (a_{11} - a_{21}, a_{11} + a_{21})$$
$$\begin{cases} a_{11} - a_{21} = 1 \\ a_{11} + a_{21} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{11} = \dfrac{1}{2} \\ a_{21} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$
$$(0,1) = a_{12}(1,1) + a_{22}(-1,1) = (a_{12} - a_{22}, a_{12} + a_{22})$$
$$\begin{cases} a_{12} - a_{22} = 0 \\ a_{12} + a_{22} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{12} = \dfrac{1}{2} \\ a_{22} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto, a matriz de mudança de base $[I]_{\beta_1\beta_2}$:

$$[I]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Do contrário, para encontrar $[I]_{\beta_2\beta_1}$, é preciso colocar as coordenadas de β_2 em função de β_1.

$$(1,1) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) = (a_{11}, a_{21})$$
$$\begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 1 \end{cases}$$

$$(-1,1) = a_{12}(1,0) + a_{22}(0,1) = (a_{12}, a_{22})$$

$$\begin{cases} a_{12} = -1 \\ a_{22} = 1 \end{cases}$$

Portanto, a matriz de mudança de base $[I]_{\beta_2\beta_1}$:

$$[I]_{\beta_2\beta_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Perceba que as contas nesse caso ficaram muito mais fáceis, pois tivemos que colocar os vetores da base β_2 em função da base canônica. Como consequência, os índices da matriz de mudança de base foram os próprios vetores da base $\beta_2 = \{(1,1); (-1,1)\}$ dispostos nas colunas.

Se multiplicarmos $[I]_{\beta_1\beta_2} \cdot [I]_{\beta_2\beta_1}$:

$$[I]_{\beta_1\beta_2} \cdot [I]_{\beta_2\beta_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, as matrizes mudanças de base são inversas!

Por fim, dado $(1,2)_{\beta_1}$, na base β_2:

$$[\vec{v}]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{\beta_2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\beta_2}$$

Para $(1,2)_{\beta_2}$, na base β_1:

$$[\vec{v}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\beta_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{\beta_1} = (-1,3)_{\beta_1}$$

Teorema 12.7 *Dadas duas bases β_1 e β_2 do mesmo espaço vetorial V. As matrizes de mudança de base $[I]_{\beta_1\beta_2}$ e $[I]_{\beta_2\beta_1}$ são matrizes inversas.*

Teorema 12.8 *Dada uma base $\beta_1 = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ e a base canônica β_* de V. A matriz de mudança de base $[I]_{\beta_1\beta_*} = [[\vec{u_1}]\,[\vec{u_2}]\ldots[\vec{u_n}]]$.*

Exemplo 12.17 *Considere as bases do $\mathbb{R}^2$: $\beta_1 = \{(2,3); (-1,-1)\}$ e a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Determine as matrizes mudança de base $[I]_{\beta_1\beta_*}$ e $[I]_{\beta_*\beta_1}$. Coloque os vetores $(2,1)$, $(-1,2)$ e $(0,0)$ na base β_1.*

Solução: Usando os teoremas anteriores, a matriz mudança da base β_1 para a base canônica é:

$$[I]_{\beta_1\beta_*} = [[\vec{u_1}]\,[\vec{u_2}]] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

A mudança de base inversa é:

$$[I]_{\beta_*\beta_1} = [I]^{-1}_{\beta_1\beta_*} = \frac{1}{det([I]_{\beta_1\beta_*})} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Quanto aos vetores $(2,1)$, $(-1,2)$ e $(0,0)$ (na base canônica), para a base β_1:

$$[\vec{v}]_{\beta_1} = [I]_{\beta_* \beta_1} \cdot [\vec{v}]$$

$$[\vec{v}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}_{\beta_1} = (-1,-4)_{\beta_1}$$

$$[\vec{v}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}_{\beta_1} = (3,7)_{\beta_1}$$

$$[\vec{v}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta_1} = (0,0)_{\beta_1}$$

12.4 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. O vetor $\vec{u} = (1, 2)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (1, 0)$ e $\vec{v_2} = (1, -2)$?

2. O vetor $\vec{u} = (0, 2)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (-2, 4)$ e $\vec{v_2} = (1, -2)$?

3. O vetor $\vec{u} = (1, 2)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (3, 6)$?

4. O vetor $\vec{u} = (1, -1, 2)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (1, -2, 4)$ e $\vec{v_2} = (2, 1, -2)$?

5. O vetor $\vec{u} = (5, 0, 0)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (1, -2, 4)$ e $\vec{v_2} = (2, 1, -2)$?

6. O vetor $\vec{u} = (-2, -1, 2)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (1, -2, 4)$ e $\vec{v_2} = (2, 1, -2)$?

7. O vetor $\vec{u} = (-2, -1, 2)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (2, 1, 4)$, $\vec{v_2} = (1, -1, 3)$ e $\vec{v_3} = (3, 2, 2)$?

8. Verifique se os vetores a seguir geram o $\mathbb{R}^3$:

   (a) $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 2, 0)$, $w = (3, 0, 0)$;

   (b) $u = (1, 1, 2)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (2, 1, 3)$;

   (c) $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 3, 0)$, $w = (-2, 0, 0)$;

9. Verifique quais dos seguintes conjuntos são LI ou LD.

   (a) $\vec{v_1} = (1, 2)$ e $\vec{v_2} = (-3, 6)$, $V = \mathbb{R}^2$;

   (b) $\vec{v_1} = (2, -1)$ e $\vec{v_2} = (1, 1)$, $V = \mathbb{R}^2$;

   (c) $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, 3, 5)$, $w = (3, 2, 5)$, $V = \mathbb{R}^3$;

   (d) $u = (7, 2, 1)$, $v = (0, 1, 4)$, $w = (3, 5, 6)$, $t = (4, 2, 3)$, $V = \mathbb{R}^3$;

10. Quais dos seguintes conjuntos são base do $\mathbb{R}^2$?

    (a) $\vec{v_1} = (2, 1)$ e $\vec{v_2} = (3, 0)$;

    (b) $\vec{v_1} = (2, 3)$ e $\vec{v_2} = (-2, -3)$;

    (c) $\vec{v_1} = (0, 0)$, $\vec{v_2} = (1, 3)$ e $\vec{v_3} = (1, -1)$;

11. Quais dos seguintes conjuntos são base do $\mathbb{R}^3$?

    (a) $\vec{v_1} = (1,0,0)$, $\vec{v_2} = (2,2,0)$ e $\vec{v_3} = (3,3,1)$;

    (b) $\vec{v_1} = (3,1,-4)$, $\vec{v_2} = (2,5,6)$ e $\vec{v_3} = (1,4,8)$;

    (c) $\vec{v_1} = (2,3,-1)$, $\vec{v_2} = (4,4,1)$ e $\vec{v_3} = (0,7,-1)$;

    (d) $\vec{v_1} = (1,6,4)$, $\vec{v_2} = (2,4,-1)$ e $\vec{v_3} = (-1,2,5)$;

12. Na base $\beta_1 = \{(1,2),(2,3)\}$ do $\mathbb{R}^2$, o vetor $\vec{v}$ é dado pelas coordenadas $(2,4)_{\beta_1}$. Sejam ainda as bases $\beta_2 = \{(1,3),(1,4)\}$ e a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Determine:

    (a) Qual a matriz de mudança da base β_1 para a base β_2?

    (b) Qual a matriz de mudança da base β_2 para a base β_1?

    (c) Qual a matriz de mudança da base canônica para a base β_1?

    (d) Qual a matriz de mudança da base canônica para a base β_2?

    (e) Calcule as coordenadas de $\vec{v}$ na base β_2.

    (f) Calcule as coordenadas de $\vec{v}$ na base canônica do $\mathbb{R}^2$.

13. Considere o vetor $\vec{v} = (2,3,4)$ na base canônica do $\mathbb{R}^3$, e a base $\beta = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$. Determine:

    (a) Qual a matriz de mudança da base canônica para a base β?

    (b) Qual a matriz de mudança da base β para a base canônica?

    (c) Calcule as coordenadas de $\vec{v}$ na base β.

14. Considere o vetor $\vec{v} = (2,3,4)_{beta_1}$ na base $\beta_1 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ do $\mathbb{R}^3$, a base $\beta_2 = \{(1,2,1),(1,1,2),(0,1,2)\}$ e a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

    (a) Qual a matriz de mudança da base β_1 para a base β_2?

    (b) Qual a matriz de mudança da base β_2 para a base β_1?

    (c) Qual a matriz de mudança da base canônica para a base β_1?

    (d) Qual a matriz de mudança da base canônica para a base β_2?

    (e) Calcule as coordenadas de $\vec{v}$ na base β_2.

    (f) Calcule as coordenadas de $\vec{v}$ na base canônica do $\mathbb{R}^3$.

12.5 Exercícios Computacionais

1. Escreva um algoritmo que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e um conjunto de vetores S, verifica se o conjunto S é lineamente independente.

2. Escreva um algoritmo que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e um conjunto de vetores S, verifica se um vetor $\vec{v}$ é combinação linear dos vetores de S.
3. Escreva um algoritmo que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e um conjunto de vetores S, verifica se o conjunto S é base do $\mathbb{R}^n$.
4. Escreva um algoritmo que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ gera bases aleatórias do $\mathbb{R}^n$.
5. Escreva um algoritmo que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e uma base β do $\mathbb{R}^n$, determina a matriz mudança de base da base canônica para S_1 para β, e vice-versa.
6. Escreva um algoritmo que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, uma base β do $\mathbb{R}^n$ e um vetor $\vec{v}$ com coordenadas canônicas, determina as coordenadas do vetor na base β.
7. Escreva um algoritmo que, dado um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e dois conjuntos de vetores S_1 e S_2, verifica se os conjuntos são bases do $\mathbb{R}^n$ e determina a matriz mudança de base de S_1 para S_2, e vice-versa.

13 Transformações Lineares

No capítulo anterior, trabalhamos com espaços vetoriais, principalmente os espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Dentre espaços vetoriais é possível estabelecer relações entre elementos/vetores destes espaços. Um dos principais tipos de relação entre espaços vetoriais é a Transformação Linear:

Definição 13.1 *Uma* ***transformação linear (aplicação linear)*** *é uma função f do espaço vetorial V no espaço vetorial W. Esta função $f : V \to W$ deve satisfazer: para $\vec{v}, \vec{u} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:*

(i) $f(\vec{v} + \vec{u}) = f(\vec{v}) + f(\vec{u})$*;*

(ii) $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$*;*

A propriedade (i) implica que a transformação f da soma de vetores é a soma das transformações de cada vetor. E a propriedade (ii) implica que a transformação f do produto de um vetor e um escalar é o produto do escalar e a transformação do vetor. Em conjunto, (i) e (ii) implicam que a transformação de uma combinação linear é a combinação linear das transformações, ou seja, considerando $\vec{v}, \vec{u} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$$

Exemplo 13.1 *Seja $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial e a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $f(\vec{v}) = k \cdot \vec{v}$, em que $k \in \mathbb{R}$. A aplicação f é transformação linear?*

Solução: Sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vejamos a aplicação f com relação à combinação linear $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$:

$$\begin{aligned}
f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) &= k \cdot (\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) \\
f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) &= k \cdot (\alpha \cdot \vec{u}) + k \cdot (\beta \cdot \vec{v}) \\
f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) &= \alpha \cdot (k \cdot \vec{u}) + \beta \cdot (k \cdot \vec{v}) \\
f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) &= \alpha \cdot f(\vec{u}) + \beta \cdot f(\vec{v})
\end{aligned}$$

Como a função da combinação linear é a combinação linear das funções, então a aplicação f é transformação linear.

Exemplo 13.2 *Seja $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial, com $\vec{v}$ um vetor coluna e a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que $f(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$, em que A é uma matriz com m linhas e n colunas. A aplicação f é transformação linear?*

Solução: Sejam os vetores coluna $\vec{u}, \vec{v} \in V$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vejamos a aplicação

f com relação à combinação linear $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$:

$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = A \cdot (\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v})$$
$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = A \cdot (\alpha \cdot \vec{u}) + A \cdot (\beta \cdot \vec{v})$$
$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot (A \cdot \vec{u}) + \beta \cdot (A \cdot \vec{v})$$
$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot f(\vec{u}) + \beta \cdot f(\vec{v})$$

Como a função da combinação linear é a combinação linear das funções, então a aplicação f é transformação linear.

Exemplo 13.3 *Seja o espaço vetorial das matrizes* $\mathcal{M}(2,2)$, *com um elemento* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *e a função determinante* $det : \mathcal{M}(2,2) \to \mathbb{R}$, *tal que* $det(A) = ad - bc$. *A aplicação* f *é transformação linear?*

Solução: Seja o vetor $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$. Vejamos a aplicação f com relação ao produto por escalar $\alpha \cdot A$:

$$f(\alpha \cdot A) = \det(\alpha \cdot A) = \alpha^2 \cdot \det(A) = \alpha^2 \cdot f(A) \neq \alpha \cdot f(A)$$

Portanto, como a função do produto por escalar não foi o produto da função por escalar, então a aplicação f não é transformação linear.

Exemplo 13.4 *A aplicação* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *tal que* $f(x,y) = (2x, 0, x+y)$ f *é transformação linear?*

Solução: Sejam os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vejamos a aplicação f com relação à combinação linear $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$:

$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = f(\alpha \cdot (x_u, y_u) + \beta \cdot (x_v, y_v))$$
$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = f((\alpha x_u, \alpha y_u) + (\beta x_v, \beta y_v))$$
$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = f(\alpha x_u + \beta x_v, \alpha y_u + \beta y_v)$$
$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = (2(\alpha x_u + \beta x_v), 0, (\alpha x_u + \beta x_v) + (\alpha y_u + \beta y_v))$$
$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = (2\alpha x_u + 2\beta x_v, 0, \alpha x_u + \alpha y_u + \beta x_v + \beta y_v)$$
$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = (2\alpha x_u, 0, \alpha x_u + \alpha y_u) + (2\beta x_v, 0, \beta x_v + \beta y_v)$$
$$f(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot f(x_u, y_u) + \beta \cdot f(x_v, y_v)$$

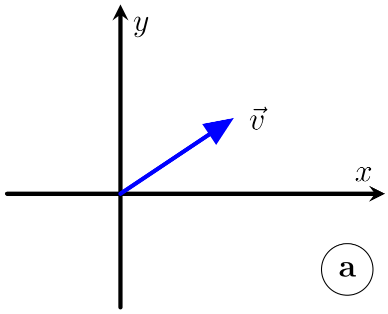
Como a função da combinação linear é a combinação linear das funções, então a aplicação f é transformação linear. Outra maneira de mostrar isso, é que a aplicação pode ser vista como um produto de matriz por vetor:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Como vimos no Exemplo 13.2, toda vez que isso acontecer, teremos uma transformação linear.

13.1 Transformações no $\mathbb{R}^2$

Uma ótima maneira de perceber as transformações lineares é no espaço $\mathbb{R}^2$, quando notamos o resultado das transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, ou seja, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Aqui consideraremos o vetor qualquer $\vec{v} = (x, y)$, que nas figuras será representado pelo vetor $\vec{v} = (3, 2)$.



Aqui veremos as seguintes transformações:

(i) Expansões ou Reduções e Vetor Oposto;

(ii) Reflexões em torno dos eixos x, eixo y e origem;

(iii) Rotações de θ no sentido horário;

(iv) Projeções Ortogonais no eixo x, eixo y;

(v) Projeções ou Reflexões sobre uma reta r que passa pela origem;

(vi) Composição de Transformações Lineares.

Expansões, Reduções e Vetor Oposto

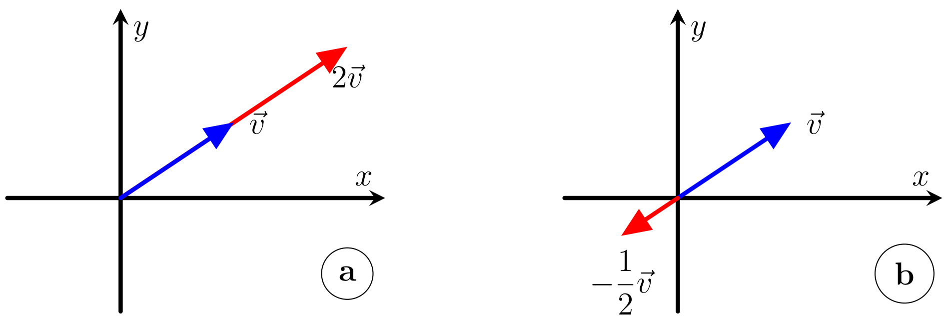
As expansões ou reduções são como o Exemplo 13.1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $T(\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}$. Se $\alpha > 1$ então o resultado da transformação é um vetor na mesma direção e sentido, entretanto α vezes maior. Se $0 < \alpha < 1$ então o resultado da transformação é um vetor na mesma direção e sentido, só que menor, α vezes. Se α é negativo então o resultado da transformação é um vetor na mesma direção, só que sentido inverso, que será maior ou menor dependendo de $-\alpha$. Observe que se $\alpha = 1$, temos a **aplicação identidade**, que transforma um vetor nele mesmo. E se $\alpha = 0$, temos a **aplicação nula**, que transforma todo vetor no vetor nulo.

Exemplo 13.5 *Apresente os resultados das seguintes transformações lineares:*

(a) $T(\vec{v}) = 2 \cdot \vec{v}$

(b) $T(\vec{v}) = -\dfrac{1}{2} \cdot \vec{v}$

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (3, 2)$, teremos as figuras a seguir. Observe na Figura a que o vetor foi duplicado, ou seja, $T(\vec{v}) = 2\vec{v}$. Na letra b, o vetor é substituído por seu vetor oposto e em seguida reduzido pela metade.



Observe que para qualquer caso desta transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, poderíamos ter utilizado uma matriz:

$$T(\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v} = \alpha \cdot I_2 \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \vec{v}$$

Reflexões em torno dos eixos x, eixo y e origem

As reflexões são como espelhos e refletem o vetor de acordo com um ponto ou eixo. Em uma reflexão, o vetor não muda de tamanho. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. As transformações são:

Reflexão em torno do eixo x:

$$R_x(x, y) = (x, -y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Reflexão em torno do eixo y:

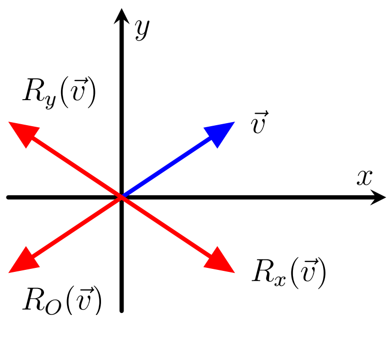
$$R_y(x, y) = (-x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Reflexão em torno da Origem O:

$$R_O(x, y) = (-x, -y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 13.6 *Faça as reflexões no vetor* $\vec{v} = (3, 2)$.

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (3, 2)$:



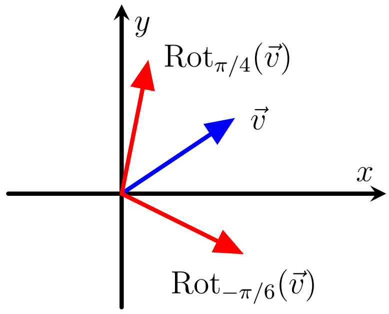
Rotação do ângulo θ na origem

Na rotação, dado um ângulo θ, no sentido anti-horário, o vetor gira sobre o ponto de origem O. Em uma rotação, o vetor não muda de tamanho. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{Rot}_\theta(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 13.7 *Faça as rotações do vetor* $\vec{v} = (3,2)$ *nos ângulos de* $\frac{\pi}{4}$ *e* $-\frac{\pi}{3}$ *radianos.*

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (3,2)$:



Projeções ortogonais no eixo x e no eixo eixo y

As projeções ortogonais nos eixos x e y são as componentes horizontais e verticais, respectivamente, de cada vetor. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. As transformações são:

Projeção ortogonal no eixo x:

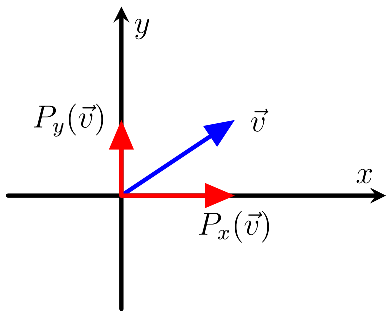
$$P_x(x,y) = (x,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Projeção ortogonal no eixo y:

$$P_x(x,y) = (0,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 13.8 *Faça as projeções ortogonais do vetor* $\vec{v} = (3,2)$ *nos eixos* x *e* y*.*

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (3,2)$:



Projeções e Reflexões em relação a uma reta r na origem

Uma reta r que passa pela origem $O = (0,0)$ possui um vetor diretor $\vec{u} = (a,b)$. Assim, a equação vetorial da reta é $r : (0,0) + t \cdot (a,b)$. A projeção ortogonal de um vetor $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ é dada por:

$$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \right) \cdot \vec{u}$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. As transformações são:

Projeção ortogonal na reta r:

$$P_r(x,y) == \begin{bmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{ab}{a^2+b^2} \\ \frac{ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

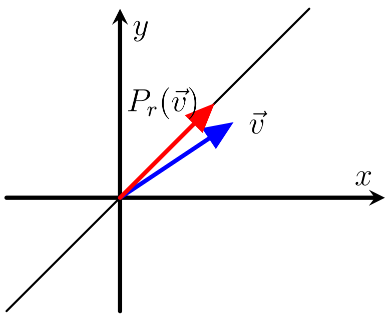
Já na reflexão, usamos o fato de que: $R_r = 2P_r(x,y) - (x,y)$.

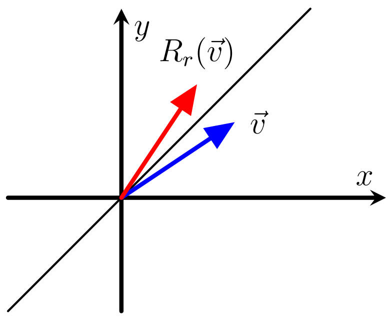
Reflexão ortogonal na reta r:

$$R_r(x,y) == \begin{bmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 13.9 *Faça a projeção ortogonal e a reflexão do vetor $\vec{v} = (3,2)$ na reta $r : t(1,1)$, ou seja, a reta $x = y$.*

Solução: Aplicando ao vetor $\vec{v} = (3,2)$:





Composição de Transformações Lineares

Dadas todas as transformações lineares discutidas anteriormente, é possível combinar todas para se buscar um determinado resultado. Note que a ordem das transformações lineares é importante, pois pode alterar o resultado. Vejamos dois exemplos.

Exemplo 13.10 *Dado um vetor, gire-o $\frac{\pi}{2}$ radianos (90°) no sentido anti-horário e aumente-o ao dobro do tamanho. Faça isso para o vetor $\vec{v} = (3,2)$.*

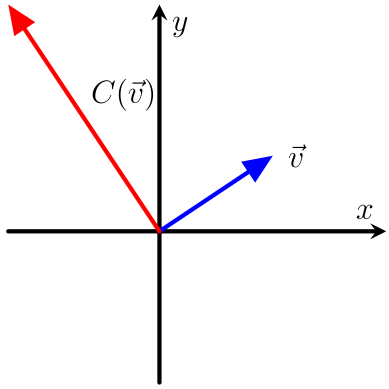
Solução: Para fazer a composição das aplicações lineares, deve-se fazer as Transformações Lineares: (1) $\text{Rot}_{\pi/2}$; e (2) $T : (x,y) \to 2(x,y)$. A operação que tiver de ser realizada primeiro, deve ter a sua matriz mais próxima do vetor. Combinando-os para formar a transformação linear C:

$$C(x,y) = T \circ \text{Rot}_{\pi/2}(x,y) = 2 \cdot \left(\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

$$C(x,y) = 2 \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$C(x,y) = (-2y, 6x)$$

Tomando por exemplo $\vec{v} = (3,2)$:



Para este exemplo, a ordem das transformações poderia ser trocada.

Exemplo 13.11 *Dado um vetor qualquer (x, y), faça a projeção dele com relação a x e rotacione $\frac{\pi}{6}$ no sentido horário. Faça isso para o vetor $\vec{v} = (3, 2)$. Em seguida, mude a ordem das transformações.*

Solução: Para fazer a composição das aplicações lineares, deve-se fazer as Transformações Lineares: (1) P_x e (2) $\text{Rot}_{-\pi/6}$. A operação que tiver de ser realizada primeiro, deve ter a sua matriz mais próxima do vetor. Combinando-os para formar a transformação linear C_1:

$$C_1(x, y) = \text{Rot}_{\pi/6} \circ P_x(x, y) = \begin{bmatrix} \cos -\frac{\pi}{6} & -\operatorname{sen} -\frac{\pi}{6} \\ \operatorname{sen} -\frac{\pi}{6} & \cos -\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$C_1(x, y) = \begin{bmatrix} 0,866 & 0 \\ -0,5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$C_1(x, y) = (0,866x; -0,5x)$$

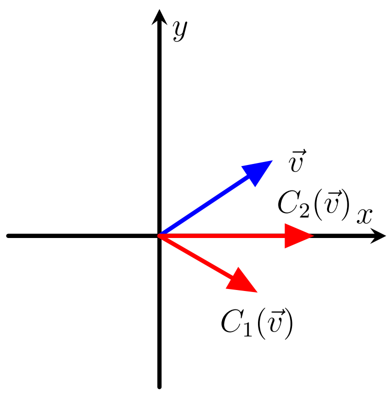
Se a ordem das operações fosse contrária, $C_2(x, y)$ seria:

$$C_2(x, y) = P_x \circ \text{Rot}_{\pi/6}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos -\frac{\pi}{6} & -\operatorname{sen} -\frac{\pi}{6} \\ \operatorname{sen} -\frac{\pi}{6} & \cos -\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,866 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$C(x, y) = (0,866x + 0,5y; 0)$$

Tomando por exemplo $\vec{v} = (3, 2)$, $C_1(3, 2) = (2,598; -1,5)$ e $C_2(3, 2) = (4,098; 0)$:



Para este exemplo, a ordem das transformações não poderia ser trocada.

13.2 Propriedades das Transformações Lineares

Nesta Seção, alguns teoremas e definições serão discutidos, com o intuito entendermos melhor as transformações lineares e as aplicarmos.

Teorema 13.1 *Dados os espaços vetoriais V, W e uma base $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ em V. A partir de n vetores arbitrários de W: $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n$ (não necessariamente uma base), é possível definir uma única transformação linear $T : V \to W$, tal que: $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$, $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$, ..., $T(\vec{v}_n) = \vec{w}_n$. Assim:*

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n$$
$$T(\vec{v}) = T(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n)$$
$$T(\vec{v}) = a_1T(\vec{v}_1) + a_2T(\vec{v}_2) + \ldots + a_nT(\vec{v}_n)$$
$$T(\vec{v}) = a_1\vec{w}_1 + a_2\vec{w}_2 + \ldots + a_n\vec{w}_n$$

Nas transformações lineares, assim como nas funções, há o conceito de domínio, de contradomínio e de imagem. Além disso, há também o conceito de núcleo de uma transformação linear. Em seguida, aplicamos também os conceitos de injetividade e sobrejetividade.

Definição 13.2 *Seja uma transformação linear $T : V \to W$.*

*O **domínio de** T é o espaço vetorial das possíveis entradas da aplicação.*

*O **contradomínio de** T é o espaço vetorial das possíveis saídas/resultados da transformação linear.*

*A **imagem de** T é o conjunto de vetores $\vec{w} \in W$, tais que existe $\vec{v} \in V$, que satisfaz $T(\vec{v}) = \vec{w}$. Ou seja:*

$$Im(T) = \{\vec{w} \in W;\ T(\vec{v}) = \vec{w},\ \vec{v} \in V\} \subseteq W$$

*O **núcleo (kernel) de** T é o conjunto de todos os vetores de V tais que $T(\vec{v}) = \vec{0}$. Ou seja:*

$$Ker(T) = \{\vec{v} \in V;\ T(\vec{v}) = \vec{0}\} \subseteq V$$

O conjunto $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W enquanto o conjunto $Ker(T)$ é subespaço vetorial de V.

Definição 13.3 *Seja uma transformação linear $T : V \to W$, cuja imagem é $Im(T)$ e cujo núcleo é $Ker(T)$.*

***Uma transformação linear é injetora** se dados quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$, tais que $\vec{u} \neq \vec{v}$, então $T(\vec{u}) \neq T(\vec{v})$. Para transformações lineares, se $Ker(T) = \{\vec{0}\}$, ou seja, se a dimensão do conjunto núcleo da transformação linear é nula $dimKer(T) = 0$, então T é injetora.*

***Uma transformação linear é sobrejetora** se $Im(T) = W$. Para transformações lineares, se a dimensão do conjunto imagem da transformação linear é a mesma do espaço vetorial W, ou seja $dimIm(T) = dimW$, então T é sobrejetora.*

E já que estamos falando de dimensões, segue um dos teoremas mais utilizados na prática de transformações lineares:

Teorema 13.2 *Seja uma transformação linear $T : V \to W$, cuja imagem é $Im(T)$ e cujo núcleo é $Ker(T)$. Então:*

$$dimKer(T) + dimIm(T) = dimV$$

Algumas consequências ocorrem daqui:

(i) Se $dimV < dimW$, então T pode ser injetora mas não pode ser sobrejetora ($dimIm(T) < dimW$).

(ii) Se $dimV > dimW$, então T pode ser sobrejetora mas não pode ser injetora ($dimKer(T) > 0$).

(iii) Se $dimV = dimW$, então T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

(iv) Se T é injetora e $dimV = dimW$, então T leva base em base.

(v) Se $dimV = dimW$ e T é injetora e sobrejetora, então pode ser chamada de ***isomorfismo****, e nesses casos, existe uma transformação linear inversa $T^{-1} : W \to V$.*

Teorema 13.3 *Seja uma transformação linear $T : V \to W$, tal que $T(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$, sendo A a matriz da transformação linear. Também que a imagem da transformação é $Im(T)$ e o núcleo é $Ker(T)$. Então, a $dimIm(T) = postoA$, ou seja, o número de linhas não nulas quando a matriz é reduzida à forma escada. E a $dimKer(T) = nulidadeA$, ou seja, o número de colunas da matriz A menos o $postoA$ quando A é reduzida à forma escada.*

Exemplo 13.12 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1,0) = (2,-1,0)$ e $T(0,1) = (0,0,1)$. Determine a matriz da transformação linear T. Em seguida, defina o domínio, o contra-domínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.*

Solução: Primeiro precisamos determinar a transformação linear T. Como $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, então T possui domínio $\mathbb{R}^2$ de dimensão 2 e contradomínio $\mathbb{R}^3$ de dimensão 3. Para fazermos a transformação linear de um vetor qualquer $\vec{v} = (x, y)$ de V:

$$\vec{v} = (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

$$T(\vec{v}) = T(x,y) = T(x(1,0) + y(0,1))$$

$$T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(2,-1,0) + y(0,0,1)$$

$$T(x,y) = (2x,-x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Agora com a matriz de transformação, podemos encontrar as outras propriedades. Comecemos pelo núcleo de T, pela definição:

$$Ker(T) = \{\vec{v} \in V;\ T(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

$$T(x, y) = (2x, -x, y) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = y = 0$$

Portanto, $Ker(T) = \{\vec{0}\}$, ou seja, $\dim Ker(T) = 0$ e a transformação linear T é injetora.

Pelo teorema que relaciona as dimensões:

$$\dim Ker(T) + \dim Im(T) = \dim V$$

$$0 + \dim Im(T) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \dim Im(T) = 2$$

Como $\dim Im(T) < \dim \mathbb{R}^3 = 3$, então a transformação linear T não é sobrejetora.

Usando a matriz e reduzindo-a a forma escada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} l_1 \to l_1 \cdot 0,5 \\ \Longrightarrow \\ l_2 \leftrightarrow l_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \\ l_3 \to l_3 - l_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, no formato escada reduzida, temos: $\dim ImT = \text{posto}A = 2$, e $\dim KerT = \text{nulidade}A = 2 - 2 = 0$.

Exemplo 13.13 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $T(x, y) = x + y$. Determine a matriz da transformação linear T. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.*

Solução: Primeiro precisamos determinar a matriz de transformação linear T.

$$T(x, y) = x + y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Como $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, então T possui domínio $\mathbb{R}^2$ de dimensão 2 e contradomínio $\mathbb{R}$ de dimensão 1.

Agora com a matriz de transformação, podemos encontrar as outras propriedades. Comecemos pelo núcleo de T, pela definição:

$$T(x, y) = x + y = 0 = \vec{0}$$

$$x = -y \Longrightarrow (x, y) = (-y, y) = y(-1, 1)$$

Portanto, todos os múltiplos de $(-1, 1)$ fazem parte do núcleo $Ker(T) = \{(-1, 1)\}$, ou seja, $\dim Ker(T) = 1$ e a transformação linear T não é injetora.

Pelo teorema que relaciona as dimensões:

$$\dim Ker(T) + \dim Im(T) = \dim V$$

$$1 + \dim Im(T) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \dim Im(T) = 1$$

Como $\dim Im(T) = \dim \mathbb{R} = 1$, então a transformação linear T é sobrejetora.

Como a matriz já está reduzida à forma escada: $\dim ImT = \text{posto}A = 1$, e $\dim KerT = \text{nulidade}A = 2 - 1 = 1$.

Exemplo 13.14 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$. Determine a matriz da transformação linear T. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.*

Solução: Primeiro precisamos determinar a matriz da transformação linear T.

$$T(x, y, z) = (x, 2y, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Como $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, então T possui domínio e contradomínio $\mathbb{R}^3$ de dimensão 3. Com a matriz de transformação, podemos encontrar as outras propriedades. Comecemos pelo núcleo de T, pela definição:

$$Ker(T) = \{\vec{v} \in V;\ T(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

$$T(x, y, z) = (x, 2y, z) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = y = 0$$

$$Ker(T) = \{(x, y, z) \in V;\ T(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

$$Ker(T) = \{(0, 0, z)\} = \{(0, 0, 1)\}$$

Portanto, $Ker(T) = \{(0, 0, 1)\}$, ou seja, $\dim Ker(T) = 1$ e a transformação linear T não é injetora. Relacionando as dimensões:

$$\dim Ker(T) + \dim Im(T) = \dim V$$

$$1 + \dim Im(T) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \dim Im(T) = 2$$

Como $\dim Im(T) < \dim\mathbb{R}^3 = 3$, então a transformação linear T não é sobrejetora.

Usando a matriz e reduzindo-a a forma escada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Longrightarrow \\ l_2 \to l_2 \cdot 0,5 \\ \Longrightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, no formato escada reduzida, temos: $\dim ImT = \text{posto}A = 2$, e $\dim KerT = \text{nulidade}A = 3 - 2 = 1$.

Exemplo 13.15 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y, z) = (x+y, y+z, x+y+z)$. Determine a matriz da transformação linear T. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.*

Solução: Primeiro precisamos determinar a matriz da transformação linear T.

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + y + z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Como $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, então T possui domínio e contradomínio $\mathbb{R}^3$ de dimensão 3. Com a matriz de transformação, podemos encontrar as outras propriedades reduzindo-a a forma escada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (2^{\text{o}}) l_1 \to l_1 - l_2 \\ \Longrightarrow \\ (1^{\text{o}}) l_3 \to l_3 - l_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} l_1 \to l_1 + l_3 \\ l_2 \to l_2 - l_3 \\ \Longrightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, no formato escada reduzida, temos: $\dim ImT = \text{posto} A = 3$, e $\dim KerT = \text{nulidade} A = 3 - 3 = 0$. Portanto a transformação linear T é injetora e sobrejetora, ou seja, se trata de um isomorfismo!

13.3 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Seja o vetor $(4, -3)$. Calcule as seguintes transformações lineares no plano: (a) Triplicar; (b) Reduzir a $1/4$; (c) Refletir no eixo x; (d) Refletir no eixo y; (e) Refletir na origem O; (f) Projetar no eixo x; (g) Projetar no eixo y; (h) Rotacionar $75°$ no sentido horário; (i) Rotacionar $60°$ no sentido anti-horário; (j) Projetar na reta $r:\ t(-2, 1)$; e (k) Refletir na reta $r:\ t(-2, 1)$.

2. Seja o vetor $(2, 0)$. Calcule as seguintes transformações lineares no plano: (a) Duplicar no sentido oposto; (b) Reduzir a $2/3$; (c) Refletir no eixo x; (d) Refletir no eixo y; (e) Refletir na origem O; (f) Projetar no eixo x; (g) Projetar no eixo y; (h) Rotacionar $15°$ no sentido horário; (i) Rotacionar $120°$ no sentido anti-horário; (j) Projetar na reta $r:\ t(2, 3)$; e (k) Refletir na reta $r:\ t(2, 3)$.

3. Seja o vetor $(2, 2)$. Calcule as seguintes transformações lineares no plano: (a) Transformação Identidade; (b) Reduzir a metade; (c) Refletir no eixo x; (d) Refletir no eixo y; (e) Refletir na origem O; (f) Projetar no eixo x; (g) Projetar no eixo y; (h) Rotacionar $40°$ no sentido horário; (i) Rotacionar $40°$ no sentido anti-horário; (j) Projetar na reta $r:\ t(0, 1)$; e (k) Refletir na reta $r:\ t(0, 1)$.

4. Determine a matriz de transformação linear da composição das transformações no plano abaixo. Verifique se a ordem inversa das transformações também pode ser usada.

   (a) Duplicar no sentido oposto; Refletir no eixo x;

   (b) Refletir no eixo y; Projetar no eixo x;

   (c) Rotacionar $45°$ no sentido horário; Rotacionar $45°$ no sentido anti-horário;

   (d) Projetar na reta $r:\ t(1, 2)$; Rotacionar $30°$ no sentido anti-horário;

   (e) Rotacionar $30°$ no sentido anti-horário; Refletir na reta $r:\ t(-1, 3)$; Reduzir a metade;

5. No plano, uma rotação anti-horária de $45°$ é seguida por uma dilatação de $\sqrt{2}$. Ache a aplicação T que representa esta transformação no plano. Qual seria a aplicação inversa?

6. Determine a matriz da transformação linear T. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, x + 2y)$.

(b) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (0, x+2y)$.

(c) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (0,0)$.

(d) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x,y) = x-y$.

(e) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (0,0,x+y)$.

(f) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x,-y,2x+y)$.

(g) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y+2z, 2y+z, x+y+z)$.

(h) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (-x-y, x+y, z)$.

(i) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (0,0,z)$.

(j) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x+y+2z, 2y+z)$.

(k) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x+y+z, 0)$.

7. Ache a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(1,0,0) = (2,0)$, $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.

8. Ache a transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,-2) = (0,1,0)$. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.

9. Ache a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(3,2,1) = (1,1)$, $T(0,1,0) = (0,-2)$ e $T(0,0,1) = (0,0)$. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.

10. Ache a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1,0,1) = (1,1,1)$, $T(0,1,0) = (0,2,-2)$ e $T(0,1,1) = (1,0,0)$. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.

11. Ache a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1,0,1) = (1,1,1)$, $T(0,1,0) = (0,2,0)$ e $T(0,1,1) = (1,0,1)$. Em seguida, defina o domínio, o contradomínio, a imagem e o núcleo de T e suas respectivas dimensões. Determine se a função é injetora e sobrejetora.

13.4 Exercícios Computacionais

1. Escreva um algoritmo que, dada a matriz da transformação linear T determina $\dim ImT$.

2. Escreva um algoritmo que, dada a matriz da transformação linear T determina $\dim KerT$.

3. Escreva um algoritmo que, dadas duas bases de $\mathbb{R}^n$, gera a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, em que os vetores da base estão relacionados um a um em ordem.