INSTITUTO FEDERAL
Goiano
Campus Rio Verde

Apostila

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Márcio Belo-Filho

3 de setembro de 2019

Sumário

1 Introdução

Esta apostila foi desenvolvida para o curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear, no Instituto Federal Goiano, Campus Rio Verde. Nela, consta o conteúdo ministrado no curso, com exemplos e exercícios.

A Geometria Analítica é a junção de técnicas de Geometria e Álgebra para problemas matemáticos. Assim, por meio dessas duas perspectivas, é possível associar estruturas geométricas a equações algébricas visando a resolução de aplicações. Já a Álgebra Linear advém de técnicas de resolução de sistemas lineares, por meio de estruturas matemáticas como vetores e matrizes.

Aproveitem!

2 Vetores

Com o foco em Ciência da Computação, o estudo de vetores será abordado a partir de três perspectivas: (1) geométrico; (2) algébrico; e (3) computacional.

Para chegar aos vetores, é interessante relembrar algumas noções primitivas: ponto, reta, plano, espaço.

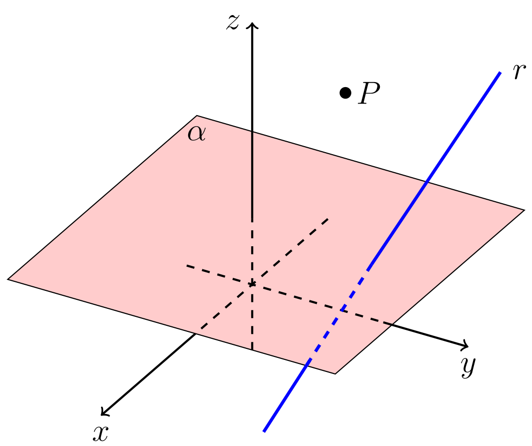
Ponto: Um ponto determina uma posição no espaço. Os pontos não possuem forma nem dimensão, seja comprimento, largura ou profundidade;

Reta: Uma reta é um elemento unidimensional formado por um número infinito de pontos distribuídos em uma determinada direção. Considera-se que tem comprimento, mas não possui largura ou profundidade;

Plano: Um plano é um elemento bidimensional e pode ser considerado como um conjunto infinito de retas não coincidentes, paralelas e dispostas lado a lado. Considera-se que tem comprimento e largura, mas não possui profundidade;

Espaço: Um espaço é um elemento tridimensional e pode ser considerado como um conjunto infinito de planos não coincidentes, paralelos e sobrepostos. Considera-se que tem comprimento, largura e profundidade;

A Figura abaixo apresenta um ponto P, uma reta r e um plano α contidos num espaço cartesiano.



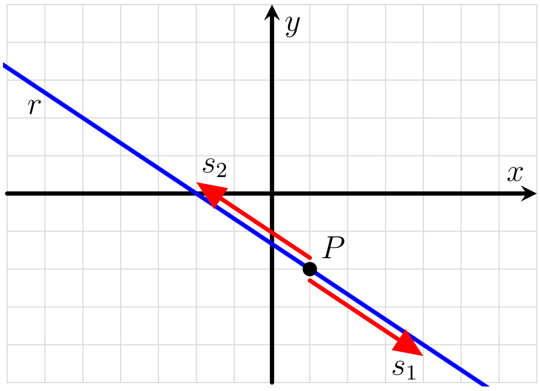
Um ponto no plano cartesiano ou $\mathbb{R}^2$ possui duas coordenadas (x, y). No espaço cartesiano ou $\mathbb{R}^3$ possui três coordenadas (x, y, z). Vale ressaltar, que a ordem das coordenadas deve ser mantida fixa.

Geometricamente, só consideramos espaços de no máximo três dimensões. Já algebricamente, podemos considerar espaços com mais de três dimensões, que são denominados *hiperespaços*. Se o hiperespaço possui n dimensões ($\mathbb{R}^n$), então um ponto contido nele possui n coordenadas, i.e.:

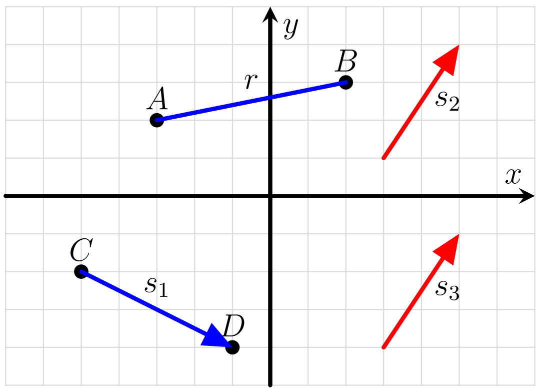
$$P = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n.$$

Computacionalmente, um ponto P de um espaço com n dimensões pode ser considerado como um vetor de tamanho n, em que cada unidade do vetor é uma coordenada do ponto.

Para qualquer reta r no plano cartesiano (ou qualquer espaço com mais de 2 dimensões), temos que a sua inclinação define uma direção, que por sua vez, possui dois sentidos. Na Figura abaixo, podemos fixar um ponto P na reta r e apresentar os dois sentidos s_1 e s_2. Assim, relembramos mais dois conceitos: **direção** e **sentido**.



Sabemos que a reta é um elemento unidimensional que define uma direção e se estende infinitamente nos dois sentidos. Entretanto, podemos escolher um segmento dessa reta, ou seja, uma parte com um comprimento limitado dessa reta. Por último, podemos ainda estabelecer um sentido único para esse segmento, assim definindo um **segmento orientado**. A Figura abaixo mostra: um segmento de reta r, limitado entre os pontos A e B; um segmento orientado s_1, limitado pelos pontos C e D; e os segmentos orientados s_2 e s_3. Observe que os segmentos orientados s_2 e s_3 possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. Quando segmentos orientados têm estas três características iguais, podemos denominá-los **equipolentes**.



A partir destes elementos geométricos, podemos definir vetores.

Definição 2.1 *Um vetor é um conjunto de segmentos orientados equipolentes. Ou seja, são como flechas com três características principais: (1) comprimento; (2) direção; e (3) sentido.*

Em geral, para denotar vetores, podemos usar uma letra acompanhada de uma seta sobrescrita (por exemplo $\vec{u}$), ou então podemos usar os pontos dos limites do vetor (origem e destino), também com uma seta sobrescrita (por exemplo $\overrightarrow{AB}$, com origem no ponto A e destino no ponto B). **Um vetor é definido por coordenadas**, assim como um ponto. Os vetores mais usuais estão no plano $\mathbb{R}^2$ e espaço $\mathbb{R}^3$, mas vetores no $\mathbb{R}^n$ também são utilizados. A representação de um vetor $\vec{u}$ é dada, nos três espaços citados, por:

$$\vec{u} = (x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = (x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Podemos determinar um vetor pela diferença entre os pontos de origem e de destino deste vetor. No plano $\mathbb{R}^2$, dado um ponto de origem $A = (x_A, y_A)$ e o ponto de destino $B = (x_B, y_B)$ então o vetor $\overrightarrow{AB}$ será dado por:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_B, y_B) - (x_A, y_A)$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

No espaço $\mathbb{R}^3$, dado um ponto de origem $A = (x_A, y_A, z_A)$ e o ponto de destino $B = (x_B, y_B, z_B)$ então o vetor $\overrightarrow{AB}$ será dado por:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_B, y_B, z_B) - (x_A, y_A, z_A)$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

No hiperespaço $\mathbb{R}^n$, dado um ponto de origem $A = (x_0^A, x_1^A, \ldots, x_{n-1}^A)$ e o ponto de destino $B = (x_0^B, x_1^B, \ldots, x_{n-1}^B)$ então o vetor $\overrightarrow{AB}$ será dado por:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_0^B, x_1^B, \ldots, x_{n-1}^B) - (x_0^A, x_1^A, \ldots, x_{n-1}^A)$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_0^B - x_0^A, x_1^B - x_1^A, \ldots, x_{n-1}^B - x_{n-1}^A)$$

O comprimento de um vetor $\vec{u} = (x, y)$ no plano $\mathbb{R}^2$, definido como $|\vec{u}|$, pode ser obtido por meio da relação de Pitágoras:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

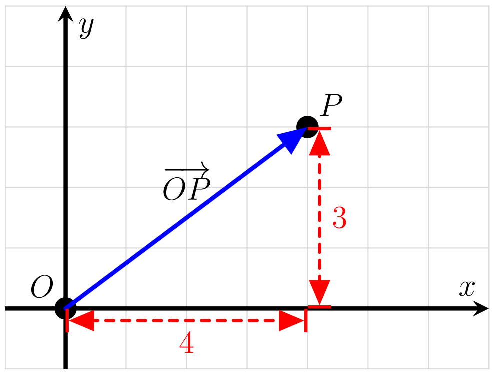
A relação pitagórica pode ser estendida para o comprimento do vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ no espaço $\mathbb{R}^3$:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

E por fim, estendida para calcular o comprimento de qualquer vetor $\vec{u} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ no espaço $\mathbb{R}^n$:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}.$$

Exemplo 2.1 *Na Figura abaixo, considere o ponto $P = (4, 3)$ no plano cartesiano. Calcule o vetor $\overrightarrow{OP}$, $O = (0, 0)$. Determine o seu comprimento.*



Solução: Observe que o vetor $\overrightarrow{OP}$ se deslocou quatro unidades na horizontal, no sentido positivo do eixo x e três unidades na vertical, no sentido positivo do eixo y. Assim, é natural que o vetor $\overrightarrow{OP}$ possa ser definido como:

$$\overrightarrow{OP} = (4, 3) \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Podemos também obter o vetor $\overrightarrow{OP}$, por meio da diferença entre os pontos:

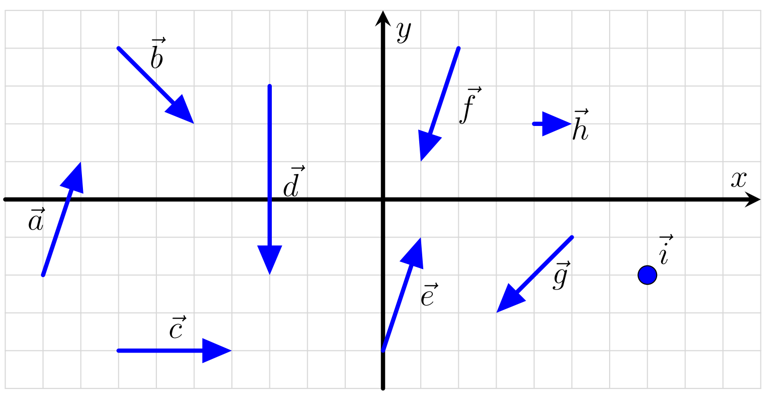
$$\overrightarrow{OP} = P - O = (4, 3) - (0, 0) = (4 - 0, 3 - 0)$$
$$\overrightarrow{AB} = (4, 3)$$

O comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$, denotado $\left|\overrightarrow{OP}\right|$, pode ser calculado facilmente por meio do Teorema de Pitágoras.

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$
$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{25} = 5 \text{ u.c.}$$

Portanto, o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$ é de 5 unidades de comprimento. Note que o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$ é a distância entre os pontos O e P.

Exemplo 2.2 *Determine os vetores indicados abaixo e o comprimento de cada um deles:*



Solução: Para cada vetor, teremos um par (x, y) que o representa, sendo que os sentidos horizontal a direita e vertical para cima são positivos. Além disso, o comprimento de um vetor $\vec{u}$ no $\mathbb{R}^2$ é dado por $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\vec{a} = (1, 3)$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$
$$\vec{b} = (2, -2)$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$
$$\vec{c} = (3, 0)$$
$$|\vec{c}| = 3$$
$$\vec{d} = (0, -5)$$
$$\left|\vec{d}\right| = 5$$
$$\vec{e} = (1, 3)$$
$$|\vec{e}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$
$$\vec{f} = (-1, -3)$$
$$\left|\vec{f}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$
$$\vec{g} = (-2, -2)$$
$$|\vec{g}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$
$$\vec{h} = (1, 0)$$
$$\left|\vec{h}\right| = 1$$
$$\vec{i} = (0, 0)$$
$$\left|\vec{i}\right| = 0$$

Observe que:

- Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{e}$ são **iguais**, pois possuem o mesmo comprimento, direção e sentido.

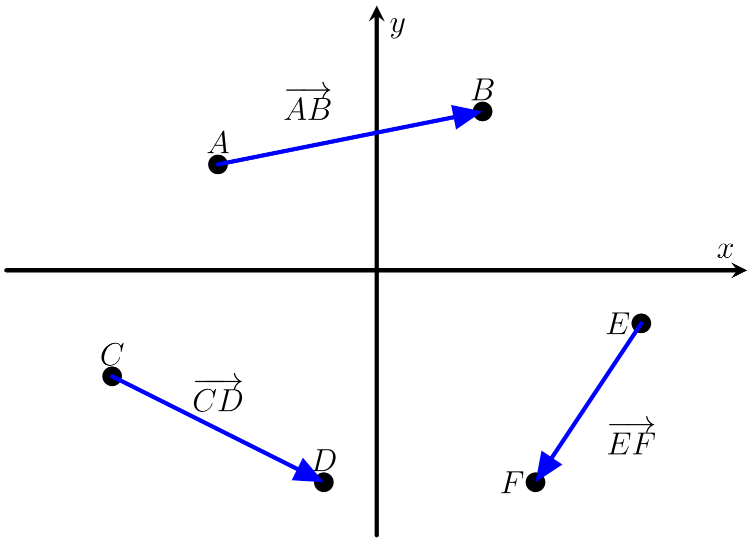
- Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{f}$ são **opostos**, pois possuem o mesmo comprimento e direção, mas têm sentidos opostos.

- O vetor $\vec{h}$ tem comprimento unitário. Vetores cujo comprimento é igual a 1 são denominados vetores **unitários**.

- O vetor $\vec{i}$ tem comprimento zero, o que o caracteriza como vetor **nulo**.

- Os vetores $\vec{c}$ e $\vec{h}$ são **colineare**s, pois possuem a mesma direção. Os vetores $\vec{a}$, $\vec{e}$ e $\vec{f}$ também são colineares entre si.

Exemplo 2.3 *Determine os vetores indicados abaixo e o comprimento de cada um deles, sabendo que:* $A(-3, 2)$, $B(2, 3)$, $C(-5, -2)$, $D(-1, -4)$, $E(5, -1)$ *e* $F(3, -4)$.



Solução: Determinando os vetores como uma diferença entre os pontos e em seguida calculando o seu comprimento:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,3) - (-3,2) = (2-(-3), 3-2) = (5,1)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (-1,-4) - (-5,-2) = (-1-(-5), -4-(-2)) = (4,-2)$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

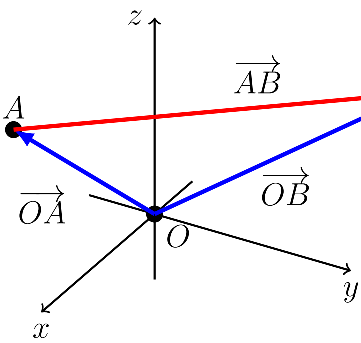
$$\overrightarrow{EF} = F - E = (3,-4) - (5,-1) = (3-5, -4-(-1)) = (-2,-3)$$

$$\left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

Note que o comprimento dos vetores são as distâncias entre os pontos de origem e destino.

Para vetores no espaço, adotamos um procedimento análogo, analizando coordenada a coordenada.

Exemplo 2.4 *Determine os vetores indicados abaixo e o comprimento de cada um deles, sabendo que:* $O(0,0,0)$, $A(2,-1,2)$, $B(0,4,3)$.



Solução: Determinando os vetores como uma diferença entre os pontos e em seguida calculando o seu comprimento:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (2,-1,2) - (0,0,0) = (2-0, -1-0, 2-0) = (2,-1,2)$$

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (0,4,3) - (0,0,0) = (0-0, 4-0, 3-0) = (0,4,3)$$
$$\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{(0^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,4,3) - (2,-1,2) = (0-2, 4-(-1), 3-2) = (-2,5,1)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{((-2)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$
Analogamente ao $\mathbb{R}^2$, o comprimento dos vetores são as distâncias entre os pontos de origem e destino.

Analogamente, estendendo o procedimento para vetores de qualquer hiperespaço, basta manter a análise coordenada a coordenada.

Exemplo 2.5 *Dados os pontos no* $\mathbb{R}^5$*:* $O(0,0,0,0,0)$*,* $A(2,-1,2,0,-4)$ *e* $B(0,4,3,-1,-2)$*, determine os vetores* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{AB}$*. Determine também o comprimento deles.*

Solução: Determinando os vetores como uma diferença entre os pontos e em seguida calculando o seu comprimento:
$$\overrightarrow{OA} = A - O = (2,-1,2,0,-4) - (0,0,0,0,0) = (2,-1,2,0,-4)$$
$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(2^2 + (-1)^2 + 2^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,4,3,-1,-2) - (2,-1,2,0,-4)$$
$$\overrightarrow{AB} = (0-2, 4-(-1), 3-2, -1-0, -2-(-4)) = (-2,5,1,-1,2)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{((-2)^2 + 5^2 + 1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{35}$$
Como nos espaços dos exemplos anteriores, o comprimento dos vetores são as distâncias entre os pontos de origem e destino.

2.1 Operações entre vetores

Soma de Vetores

Dados dois vetores podemos fazer a **soma de vetores** dispondo-os de maneira a formar um caminho de vetores. O vetor a partir da origem inicial até o destino final é o vetor soma. Algebricamente, a soma de dois vetores se dá pela soma coordenada por coordenada. Assim, no $\mathbb{R}^2$, dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$:
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_u, y_u) + (x_v, y_v) = (x_u + x_v, y_u + y_v).$$
No $\mathbb{R}^3$, dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$:
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_u, y_u, z_u) + (x_v, y_v, z_u) = (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v).$$
No $\mathbb{R}^n$, dados os vetores $\vec{u} = (x_0^u, x_1^u, \ldots, x_{n-1}^u)$ e $\vec{v} = (x_0^v, x_1^v, \ldots, x_{n-1}^v)$:
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_0^u, x_1^u, \ldots, x_{n-1}^u) + (x_0^v, x_1^v, \ldots, x_{n-1}^v)$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_0^u + x_0^v, x_1^u + x_1^v, \ldots, x_{n-1}^u + x_{n-1}^v).$$

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer:

(i) **Comutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

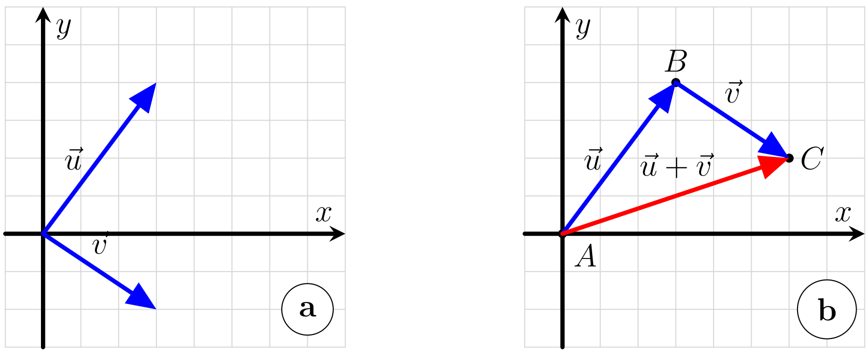
(ii) **Associativa:** $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$;

(iii) **Vetor Nulo:** $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;

(iv) **Vetor Oposto:** $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Exemplo 2.6 *Dados os vetores* $\vec{u} = (3, 4)$ *e* $\vec{v} = (3, -2)$*, calcule o vetor soma* $\vec{u} + \vec{v}$*. Determine o comprimento destes vetores.*

Solução: Os vetores $\vec{u} = (3, 4)$ e $\vec{v} = (3, -2)$ são os vetores da figura (a). Na figura (b), os vetores estão dispostos em um caminho, ou seja, fixada uma origem (ponto A) e percorrendo os vetores $\vec{u}$ (até o ponto B) e em seguida percorrendo o vetor $\vec{v}$ (partindo do ponto B), chegamos ao destino (ponto C). Assim, o vetor soma é dado pelo vetor $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.



Algebricamente:

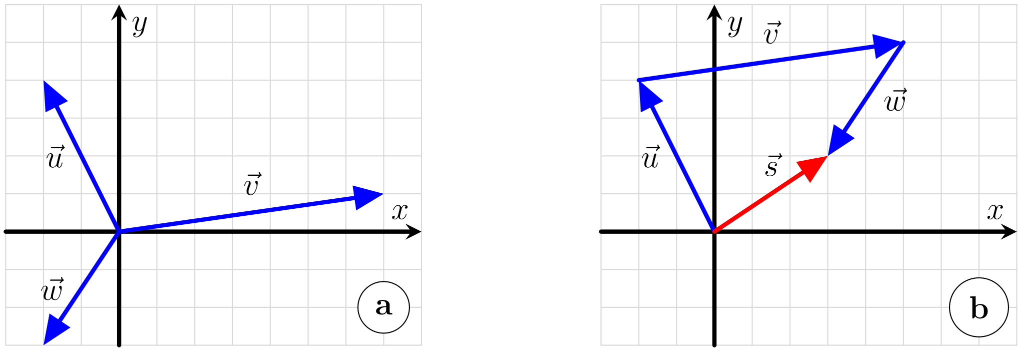
$$\vec{u} + \vec{v} = (3, 4) + (3, -2) = (3 + 3, 4 + (-2)) = (6, 2)$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{(3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$
$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

Observe que, pela desigualdade triangular:

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|\,.$$

Exemplo 2.7 *Dados os vetores* $\vec{u} = (-2, 4)$*,* $\vec{v} = (7, 1)$ *e* $\vec{w} = (-2, -3)$*, calcule o vetor soma* $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$*.*

Solução: Os vetores $\vec{u} = (-2, 4)$, $\vec{v} = (7, 1)$ e $\vec{w} = (-2, -3)$ são os vetores da figura (a). Na figura (b), os vetores estão dispostos em um caminho, começando por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, tendo a soma $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ como o vetor em vermelho.



Algebricamente:

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (-2, 4) + (7, 1) + (-2, -3)$$
$$\vec{s} = (-2 + 7 + (-2), 4 + 1 + (-3)) = (3, 2)$$

Observe que, pela desigualdade triangular:

$$|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|\,.$$

Exemplo 2.8 *Dados os vetores $\vec{u} = (-1, 2, 2)$ e $\vec{v} = (4, -2, 2)$, calcule o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$. Determine o comprimento destes vetores.*

Solução: Calculando a soma dos vetores algebricamente:

$$\vec{u} + \vec{v} = (-1, 2, 2) + (4, -2, 2) = (-1 + 4, 2 + (-2), 2 + 2) = (3, 0, 4)$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{((-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{24}$$
$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Observe que, pela desigualdade triangular:

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|\,.$$

Diferença de Vetores

Dados dois vetores, a **diferença de vetores** é a soma de um vetor com o oposto do outro vetor. Algebricamente, a diferença de dois vetores se dá pela subtração coordenada por coordenada. Assim, no $\mathbb{R}^2$, dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$:

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_u, y_u) - (x_v, y_v) = (x_u - x_v, y_u - y_v).$$

No $\mathbb{R}^3$, dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$:

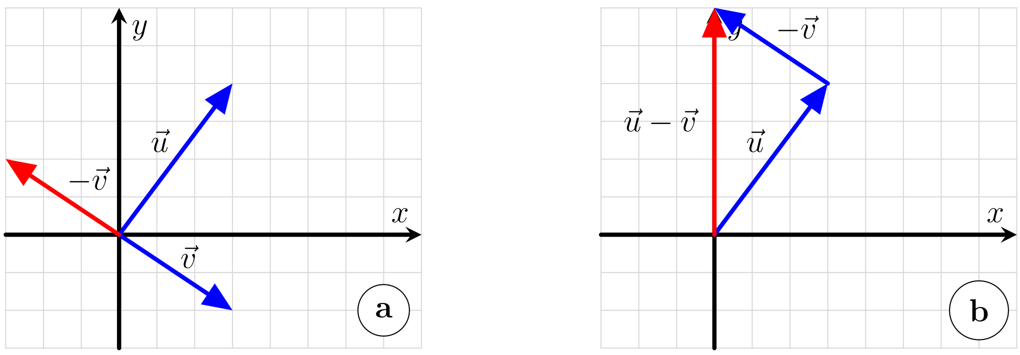
$$\vec{u} - \vec{v} = (x_u, y_u, z_u) - (x_v, y_v, z_u) = (x_u - x_v, y_u - y_v, z_u - z_v).$$

No $\mathbb{R}^n$, dados os vetores $\vec{u} = (x_0^u, x_1^u, \ldots, x_{n-1}^u)$ e $\vec{v} = (x_0^v, x_1^v, \ldots, x_{n-1}^v)$:

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_0^u, x_1^u, \ldots, x_{n-1}^u) - (x_0^v, x_1^v, \ldots, x_{n-1}^v)$$
$$\vec{u} - \vec{v} = (x_0^u - x_0^v, x_1^u - x_1^v, \ldots, x_{n-1}^u - x_{n-1}^v).$$

Exemplo 2.9 *Dados os vetores $\vec{u} = (3, 4)$ e $\vec{v} = (3, -2)$, calcule o vetor diferença $\vec{u} - \vec{v}$. Determine o comprimento destes vetores.*

Solução: Os vetores $\vec{u} = (3, 4)$, $\vec{v} = (3, -2)$ e o seu oposto $-\vec{v} = (-3, 2)$ são os vetores da figura (a). Na figura (b) é feita a soma do vetor $\vec{u}$ e o vetor $-\vec{v}$. Assim:



Algebricamente:

$$\vec{u} + \vec{v} = (3, 4) - (3, -2) = (3 - 3, 4 - (-2)) = (0, 6)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|-\vec{v}| = |\vec{v}| = \sqrt{(3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = 6$$

Observe que, pela desigualdade triangular:

$$|\vec{u} - \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \,.$$

Exemplo 2.10 *Dados os vetores* $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, -2, 0)$ *e* $\vec{w} = (3, 0, 3)$, *no* $\mathbb{R}^3$, *calcule:*

(a) $\vec{w} - \vec{v}$*;*

(b) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$*;*

Solução: Algebricamente:

$$\text{(a) } \vec{w} - \vec{v} = (3, 0, 3) - (2, -2, 0) = (3 - 2, 0 - (-2), 3 - 0) = (1, 2, 3)$$

$$\text{(b) } \vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = (1, 2, 3) + (2, -2, 0) - (3, 0, 3)$$

$$\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = (1 + 2 - 3, 2 + (-2) - 0, 3 + 0 - 3) = (0, 0, 0)$$

Produto de Vetor por Escalar

A **multiplicação de um vetor por escalar** dá escala a um vetor, aumentando-o, diminuindo-o, e até mesmo invertendo o seu sentido. Algebricamente, a multiplicação de um vetor por escalar se dá pelo produto de cada coordenada do vetor pelo escalar. Assim, no $\mathbb{R}^2$, dado um vetor $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot (x_u, y_u) = (\alpha \cdot x_u, \alpha \cdot y_u).$$

No $\mathbb{R}^3$, dado um vetor $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot (x_u, y_u, z_u) = (\alpha \cdot x_u, \alpha \cdot y_u, \alpha \cdot z_u).$$

No $\mathbb{R}^n$, dado um vetor $\vec{u} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$
$$\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha \cdot x_0, \alpha \cdot x_1, \ldots, \alpha \cdot x_{n-1})$$

O valor de α determina a proporção do vetor original $\vec{u}$ que será utilizada. Dessa forma:

(a) O vetor muda de sentido quando $\alpha < 0$;

(b) Há um aumento do comprimento do vetor $\vec{u}$ quando multiplicado por $|\alpha| > 1$;

(c) Há uma redução do comprimento do vetor $\vec{u}$ quando multiplicado por $0 < |\alpha| < 1$.

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(i) **Associativa:** $\alpha \cdot (\beta\vec{u}) = (\alpha \cdot \beta)\vec{u}$;

(ii) **Distributiva:** $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;

(iii) **Distributiva:** $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;

(iv) **Identidade:** $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$;

(v) **Vetor Oposto:** $-1 \cdot \vec{u} = -\vec{u}$;

(vi) **Vetor Nulo:** $0 \cdot \vec{u} = -\vec{u}$;

Por fim, a noção do produto de um escalar por um vetor pode ser utilizada para determinar se dois vetores são paralelos. **Dois vetores paralelos possuem a mesma direção.** Assim, se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos (ou $\vec{u} \mid\mid \vec{v}$), existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

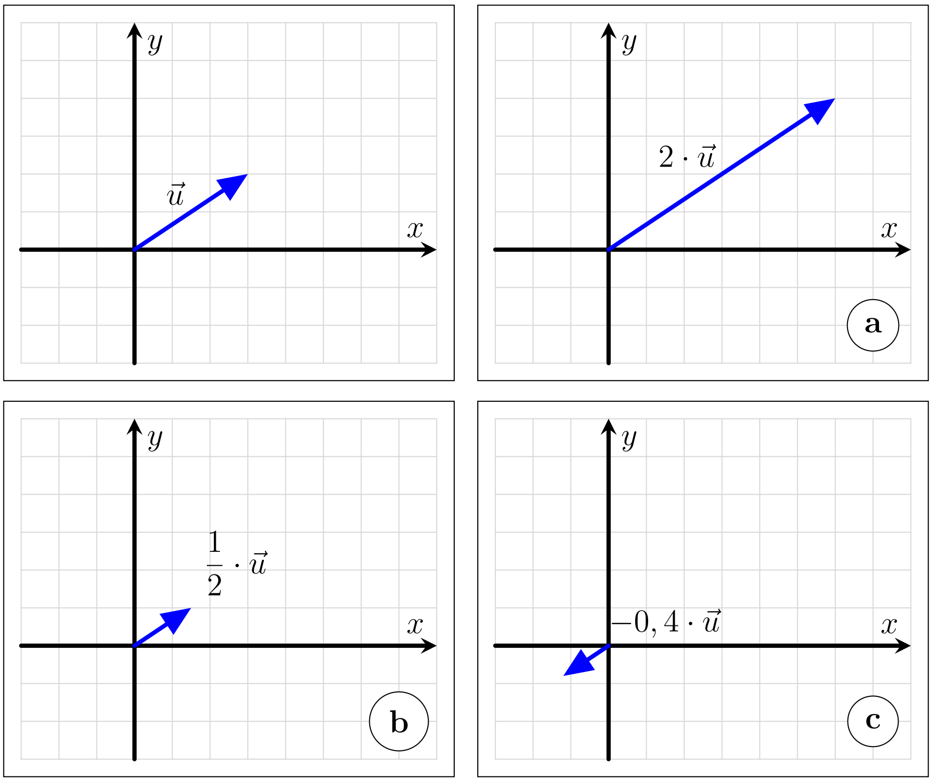
$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$$
$$(x_0^u, x_1^u, \ldots, x_{n-1}^u) = \alpha \cdot (x_0^v, x_1^v, \ldots, x_{n-1}^v) = (\alpha \cdot x_0^v, \alpha \cdot x_1^v, \ldots, \alpha \cdot x_{n-1}^v)$$
$$\begin{cases} x_0^u = \alpha \cdot x_0^v \\ x_1^u = \alpha \cdot x_1^v \\ \vdots \\ x_{n-1}^u = \alpha \cdot x_{n-1}^v \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \frac{x_0^u}{x_0^v} = \frac{x_1^u}{x_1^v} = \cdots = \frac{x_{n-1}^u}{x_{n-1}^v}$$

Portanto, se a razão coordenada a coordenada for igual, ou seja, se as coordenadas forem proporcionais, então os vetores são paralelos.

Exemplo 2.11 *Dado o vetor $\vec{u} = (3, 2)$, calcule os vetores abaixo. Determine o comprimento destes vetores.*

(a) $2 \cdot \vec{u}$; *(b)* $\frac{1}{2} \cdot \vec{u}$; *(c)* $-0,4 \cdot \vec{u}$;

Solução: O vetor $\vec{u} = (3, 2)$ e as soluções dos itens (a), (b) e (c) estão representados nas figuras abaixo.



Algebricamente:

$$\text{(a) } 2 \cdot \vec{u} = 2 \cdot (3, 2) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 2) = (6, 4)$$

$$\text{(b) } \frac{1}{2} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2} \cdot (3, 2) = (\frac{1}{2} \cdot 3, \frac{1}{2} \cdot 2) = (\frac{3}{2}, 1)$$

$$\text{(c) } -0,4 \cdot \vec{u} = -0,4 \cdot (3, 2) = (-0,4 \cdot 3; -0,4 \cdot 2) = (-1,2; -0,8)$$

Quanto às distâncias:

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$|2 \cdot \vec{u}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2 \cdot \sqrt{13}$$

$$\left|\frac{1}{2} \cdot \vec{u}\right| = \sqrt{1,5^2 + 1^2} = \sqrt{3,25} = 0,5 \cdot \sqrt{13}$$

$$|-0,4 \cdot \vec{u}| = \sqrt{(-1,2)^2 + (-0,8)^2} = \sqrt{2,08} = 0,4 \cdot \sqrt{13}$$

Observe que o vetor $\vec{u}$ ao ser multiplicado por α tem seu comprimento $|\vec{u}|$ também multiplicado por α.

Exemplo 2.12 *Dados os vetores* $\vec{u}(1, 2, -2)$, $\vec{v}(3, 6, -6)$ *e* $\vec{w}(-0,5; -1, 1)$, *paralelos entre si. Determine o escalar que satisfaz:*

(a) $\vec{v} = \alpha\vec{u}$; *(b)* $\vec{u} = \beta\vec{v}$; *(c)* $\vec{w} = \gamma\vec{u}$;

Solução: Como os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos, então eles possuem a mesma direção. Assim, calculando o valor do escalar em cada questão:

$$\text{(a) } \vec{v} = \alpha\vec{u}$$

$$(3, 6, -6) = \alpha(1, 2, -2) = (\alpha, 2\alpha, -2\alpha)$$

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ 2\alpha = 6 \qquad \Rightarrow \alpha = 3 \\ -2\alpha = -6 \end{cases}$$

Note que para toda coordenada o escalar α deve ter o mesmo valor. E se isso não tivesse acontecido? Nesse caso, então, os vetores não seriam paralelos, ou seja, não teriam a mesma direção.

$$\text{(b) } \vec{u} = \beta\vec{v}$$

$$(1, 2, -2) = \beta(3, 6, -6) = (3\beta, 6\beta, -6\beta)$$

$$\begin{cases} 3\beta = 1 \\ 6\beta = 2 \qquad \Rightarrow \beta = \dfrac{1}{3} \\ -6\beta = -2 \end{cases}$$

$$\text{(c) } \vec{w} = \gamma\vec{u}$$

$$(-0,5; -1, 1) = \gamma(1, 2, -2) = (\gamma, 2\gamma, -2\gamma)$$

$$\begin{cases} \gamma = -0,5 \\ 2\gamma = -1 \quad \Rightarrow \gamma = -\dfrac{1}{2} = -0,5 \\ -2\gamma = 1 \end{cases}$$

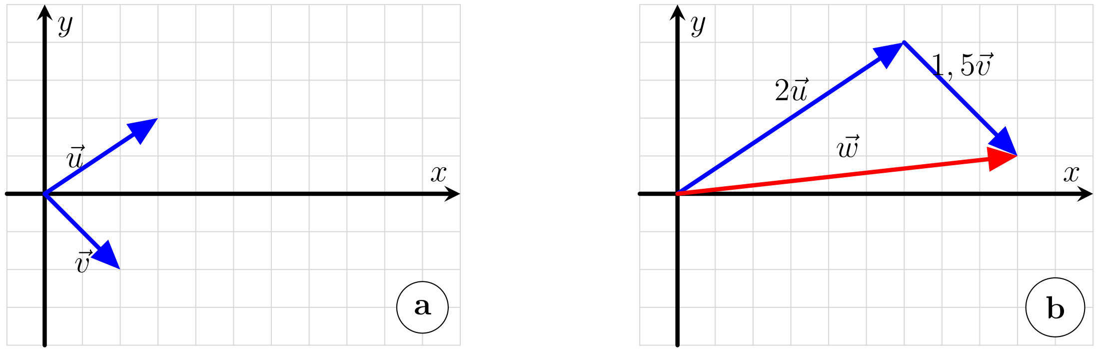
Combinação de Vetores

A **combinação de vetores** ocorre quando usamos as operações de soma de vetores e multiplicação de vetores por escalar. Assim, podemos ter um vetor $\vec{v}$ como uma combinação de vetores $\vec{u_0}, \vec{u_1}, \ldots, \vec{u_{n-1}}$, usando os escalares $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$:

$$\vec{v} = \alpha_0\vec{u_0} + \alpha_1\vec{u_1} + \ldots + \alpha_{n-1}\vec{u_{n-1}};$$

Exemplo 2.13 *Dados os vetores* $\vec{u} = (3, 2)$ *e* $\vec{v} = (2, -2)$*, calcule o vetor combinação* $\vec{w} = 2\vec{u} + 1,5\vec{v}$.

Solução: Os vetores $\vec{u} = (3, 2)$ e $\vec{v} = (2, -2)$ são os vetores da figura (a). Na figura (b), os vetores estão em escala e dispostos em um caminho. Assim, o vetor combinação é dado pelo vetor $\vec{w} = 2\vec{u} + 1,5\vec{v}$.



Algebricamente:

$$\vec{w} = 2\vec{u} + 1,5\vec{v}$$
$$\vec{w} = 2(3,2) + 1,5(2,-2)$$
$$\vec{w} = (6,4) + (3,-3)$$
$$\vec{w} = (9,1)$$

Observe, que qualquer vetor no $\mathbb{R}^2$ poderia ser escrito como uma combinação dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exemplo 2.14 *Dados os vetores* $\vec{u} = (2,1)$, $\vec{v} = (-1,2)$ *e* $\vec{w} = (5,0)$, *calcule* $\vec{w}$ *como combinação dos vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$.

Solução: Como queremos calcular $\vec{w}$ em função dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos, algebricamente:

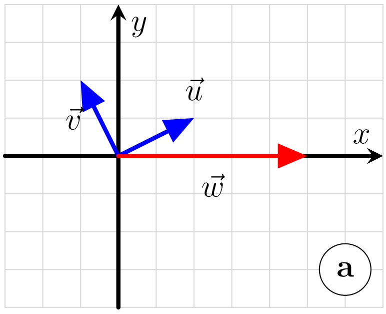
$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
$$(5,0) = \alpha(2,1) + \beta(-1,2)$$
$$(5,0) = (2\alpha, \alpha) + (-\beta, 2\beta)$$
$$(5,0) = (2\alpha - \beta, \alpha + 2\beta)$$
$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 5 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

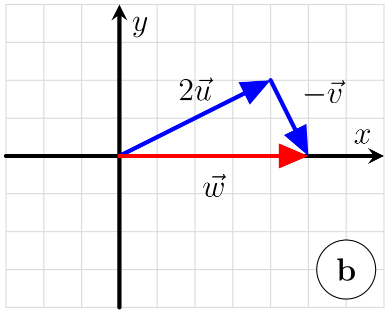
Por fim, chegamos em um sistema de equações com as variáveis α e β. Resolvendo-o, chegamos a conclusão que $\alpha = 2$ e $\beta = -1$. Vamos conferir?

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 2(2,1) - 1(-1,2)$$
$$\vec{w} = (4,2) + (1,-2) = (5,0).$$

Portanto, o resultado está correto!

Geometricamente, mostramos os vetores $\vec{u} = (2,1)$, $\vec{v} = (-1,2)$ e $\vec{w} = (5,0)$ na figura (a). Na figura (b), dispomos a combinação feita pelos vetores.



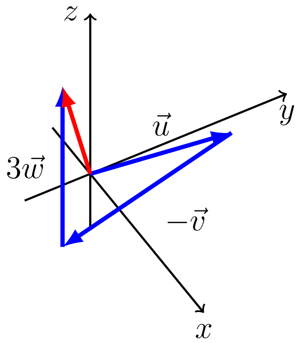


Exemplo 2.15 *Dados os vetores* $\vec{u} = (2,1,2)$*,* $\vec{v} = (1,2,2)$ *e* $\vec{w} = (0,0,1)$*, é possível obter o vetor* $(1,-1,3)$ *como combinação dos três vetores?*

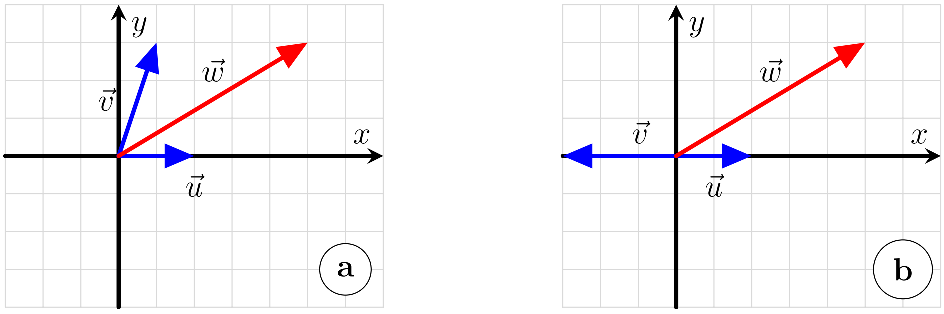
Solução: Para calcular essa combinação:

$$(1,-1,3) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w},\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$$
$$(1,-1,3) = \alpha(2,1,2) + \beta(1,2,2) + \gamma(0,0,1)$$
$$(1,-1,3) = (2\alpha,\alpha,2\alpha) + (\beta,2\beta,2\beta) + (0,0,\gamma)$$
$$(1,-1,3) = (2\alpha+\beta,\alpha+2\beta,2\alpha+2\beta+\gamma)$$
$$\begin{cases} 2\alpha+\beta = 1 \\ \alpha+2\beta = -1 \\ 2\alpha+2\beta+\gamma = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

Geometricamente, o resultado pode ser verificado abaixo:



Dados alguns vetores do $\mathbb{R}^n$, é sempre possível obter um vetor $\vec{u}$ como uma combinação dos vetores dados? A resposta é não. Algebricamente, só poderá ocorrer quando o sistema obtido para calcular os escalares é determinado. Geometricamente, no plano $\mathbb{R}^2$, bastam dois vetores não-colineares $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que qualquer outro vetor pode ser escrito como a combinação de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ fossem colineares, ou seja, com a mesma direção, então os vetores com direções diferentes não poderiam ser escritos como combinação de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Nas figuras (a) e (b), é possível obter o vetor $\vec{w}$ como combinação de $\vec{u}$ e $\vec{v}$?



Na figura (a) sim, basta ter $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$. Entretanto, na figura (b), não é possível estabelecer uma combinação. Quaisquer dois vetores do $\mathbb{R}^2$ não-colineares formam o que chamamos de **base**, ou seja, um conjunto mínimo de vetores do plano que consegue obter todos os outros vetores. No plano $\mathbb{R}^2$, a base mais utilizada é a **base canônica**, formada pelos vetores $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$.

No espaço $\mathbb{R}^3$, são necessários três vetores não-coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ que qualquer outro vetor pode ser escrito como a combinação de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Se os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ fossem coplanares, ou seja, dentro de um mesmo plano, então os vetores com direções que atravessam o plano não poderiam ser escritos como combinação de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Analogamente ao plano, quaisquer três vetores não-coplanares do espaço formam uma **base** do $\mathbb{R}^3$, ou seja, um conjunto mínimo de vetores do espaço que consegue obter todos os outros vetores. No espaço $\mathbb{R}^3$, a base mais utilizada é a **base canônica**, formada pelos vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

No hiperespaço $\mathbb{R}^n$, são necessários n vetores que não estejam num mesmo hiperplano $\vec{u_0}$, $\vec{u_1}$, $\ldots$, $\vec{u_{n-1}}$, que qualquer outro vetor pode ser escrito como a combinação desse conjunto de vetores. Analogamente ao plano e o espaço, quaisquer n vetores não-cohiperplanares do hiperespaço de dimensão n formam uma **base** do $\mathbb{R}^n$, ou seja, um conjunto mínimo de vetores do espaço que consegue obter todos os outros vetores. No espaço $\mathbb{R}^n$, a base mais utilizada é a **base canônica**, formada pelos vetores:

$$\vec{e_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e_{n-1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.16 *Dada a base canônica do espaço* $\mathbb{R}^4$*, obtenha o vetor* $(1, -1, 0, 3)$ *como combinação dos vetores dessa base.*

Solução: A base canônica no $\mathbb{R}^4$ é dada por:

$$\vec{e_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para calcular essa combinação:

$$(1, -1, 0, 3) = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

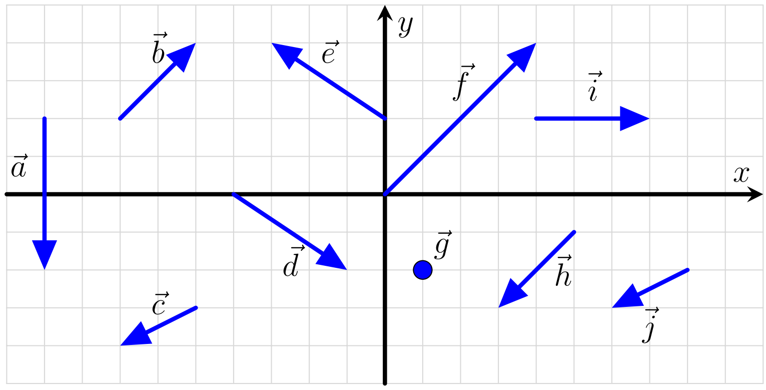
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases}$$

2.2 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Determine os vetores indicados abaixo e o comprimento de cada um deles. Indique algumas relações entre os vetores (colineares, iguais, opostos, unitários, nulos).



2. Dados os pontos $A(0,-2)$, $B(2,3)$, $C(-1,2)$, $D(-1,-2)$, determine os vetores abaixo e seus respectivos comprimentos. Faça um esboço dos vetores no plano cartesiano.

   (a) $\overrightarrow{AB}$; (b) $\overrightarrow{BC}$; (c) $\overrightarrow{CD}$; (d) $\overrightarrow{DA}$;

3. Dados os pontos $O = (0,0,0)$, $A(1,-2,2)$, $B(4,0,3)$ e $C(-2,0,-3)$, determine os vetores abaixo e seus respectivos comprimentos. Faça um esboço dos vetores no espaço.

   (a) $\overrightarrow{OA}$; (b) $\overrightarrow{AB}$; (c) $\overrightarrow{AC}$; (d) $\overrightarrow{CB}$;

4. Dados os pontos no $\mathbb{R}^4$: $O = (0,0,0,0)$, $A(2,-1,2,0)$ e $B(0,4,3,-1)$ e $C(-1,1,-1,1)$, determine os vetores abaixo e seus respectivos comprimentos. Nesse é melhor não fazer esboço.

   (a) $\overrightarrow{OC}$; (b) $\overrightarrow{AB}$; (c) $\overrightarrow{AC}$; (d) $\overrightarrow{CB}$;

5. Determine o ponto B do vetor $\overrightarrow{AB}$, dado o ponto de origem A, para os casos a seguir:

   (a) $A = (0,0)$, $\overrightarrow{AB} = (2,-1)$;

   (b) $A = (2,-1)$, $\overrightarrow{AB} = (-2,1)$;

   (c) $A = (1,2,-1)$, $\overrightarrow{AB} = (2,1,-1)$;

   (d) $A = (1,1,-1,-1)$, $\overrightarrow{AB} = (-1,1,2,-1)$;

6. Faça o esboço no plano cartesiano dos seguintes vetores:

(a) $\vec{u} = (0, 3)$;
(b) $\vec{v} = (1, 3)$;
(c) $\vec{w} = (2, 3)$;
(d) $\vec{r} = (2, -3)$;
(e) $\vec{s} = (-2, 3)$;
(f) $\vec{t} = (-1, -3)$;

7. Faça o esboço no espaço dos seguintes vetores:

(a) $\vec{u} = (0, 3, 0)$;
(b) $\vec{v} = (2, 3, 0)$;
(c) $\vec{w} = (0, 3, 2)$;
(d) $\vec{r} = (0, 0, -2)$;
(e) $\vec{s} = (2, 0, 2)$;
(f) $\vec{t} = (-2, 2, 1)$;

8. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (2, -1)$ e $\vec{w} = (3, 1)$, calcule:

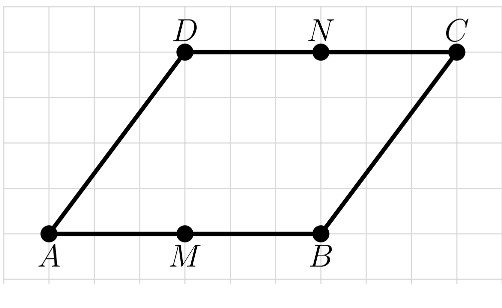
(a) $\vec{u} + \vec{v}$;
(b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$;
(c) $\vec{u} - \vec{v}$;
(d) $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$;
(e) $2\vec{u} - 3\vec{v}$;
(f) $\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$;

9. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 2, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 0)$, calcule:

(a) $\vec{u} + \vec{v}$;
(b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$;
(c) $\vec{u} - \vec{v}$;
(d) $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$;
(e) $2\vec{u} - 3\vec{v}$;
(f) $\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$;

10. Seja o paralelogramo $ABCD$, com os pontos médios M e N, como na figura abaixo. Determine, geometricamente e algebricamente:

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$;
(b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$;
(c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;
(d) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{NC}$;
(e) $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{BC}$;
(f) $\overrightarrow{ND} - \overrightarrow{MB}$;
(g) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$;
(h) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CN}$;



11. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (2, -1)$, calcule o vetor $\vec{w}$ que satisfaz a equação
$$3\vec{w} + (0, 1) = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$$

12. Dados os vetores $\vec{u} = (-1, 1, 2)$ e $\vec{v} = (0, 2, -1)$, calcule o vetor $\vec{w}$ que satisfaz a equação
$$3\vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{w}$$

13. Dados os vetores $\vec{u} = (-1, 1, -2, 2, -3, 3)$ e $\vec{v} = (0, 2, -1, -3, 0, 0)$, calcule o vetor $\vec{w}$ que satisfaz a equação
$$\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v} - \vec{w}$$

14. Dados os vetores $\vec{a} = (1,3)$ e $\vec{b} = (-2,-1)$, determine os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que satisfazem o sistema de equações abaixo:
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ -\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \end{cases}$$

15. Dados os vetores $\vec{a} = (1,3,-1)$ e $\vec{b} = (-2,-1,2)$, determine os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que satisfazem o sistema de equações abaixo:
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ -\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \end{cases}$$

16. Dados os vetores $\vec{a} = (1,3,-1,3)$ e $\vec{b} = (-2,-1,2,-1)$, determine os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que satisfazem o sistema de equações abaixo:
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ -\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \end{cases}$$

17. Calcule o vetor $\vec{w} = (2,2)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (-1,1)$ e $\vec{v} = (0,2)$.

18. Calcule o vetor $\vec{w} = (-2,4)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (2,1)$ e $\vec{v} = (1,-2)$.

19. Calcule o vetor $\vec{w} = (1,2,3)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (-1,1,1)$, $\vec{v} = (1,0,2)$ e $\vec{r} = (0,1,-1)$.

20. Calcule o vetor $\vec{w} = (0,-1,2)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (0,-1,4)$, $\vec{v} = (0,0,-1)$ e $\vec{r} = (1,0,-1)$.

21. Calcule o vetor $\vec{w} = (2,1,1,1)$ como combinação dos vetores $\vec{u} = (1,1,0,0)$, $\vec{v} = (-1,0,0,0)$, $\vec{r} = (0,0,-1,1)$ e $\vec{s} = (0,0,0,2)$.

2.3 Exercícios Computacionais

1. Escreva um algoritmo que retorne o comprimento de um vetor de tamanho n.

2. Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de tamanho n e os escalares α, $\beta \in \mathbb{R}$. Escreva um algoritmo que retorne o vetor combinação de $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$.

3. Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de tamanho n e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Escreva um algoritmo que retorne o vetor combinação $\vec{v} = \vec{v} + \alpha \cdot \vec{u}$.

4. Sejam os vetores $\vec{u_i}$ de tamanho n e os escalares $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Escreva um algoritmo que retorne o vetor combinação $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \cdot \vec{u_i}$.

5. Sejam os vetores $\overrightarrow{Fib_i}$ de tamanho 20, com as i primeiras posições com os números de Fibonacci, para $i = 0, 1, \ldots, 19$. Por exemplo, $\overrightarrow{Fib_6} = (1,1,2,3,5,8,13,0,0,\ldots,0)$. Sejam os escalares $\alpha_i = (-1)^i$. Calcule o vetor combinação $\displaystyle\sum_{i=0}^{19} \alpha_i \cdot \overrightarrow{Fib_i}$.

3 Produto Escalar

No capítulo anterior, foram vistos vários conceitos e operações entre vetores. Nesse capítulo, ainda sob a perspectiva geométrica, algébrica e computacional, vamos ver o produto escalar entre vetores.

Definição 3.1 *O produto escalar (também conhecido como produto interno) de dois vetores é dado pela soma dos produtos coordenada a coordenada. Assim, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no $\mathbb{R}^n$, o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (ou $< \vec{u}, \vec{v} >$) entre eles é dado por:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_0^u, x_1^u, \ldots, x_{n-1}^u) \cdot (x_0^v, x_1^v, \ldots, x_{n-1}^v)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_0^u \cdot x_0^v + x_1^u \cdot x_1^v + \ldots + x_{n-1}^u \cdot x_{n-1}^v.$$

Observe que o resultado do produto é um escalar, i.e., $\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$.

O que acontece se fizermos o produto escalar de um vetor por ele mesmo?

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \cdot (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x_0 \cdot x_0 + x_1 \cdot x_1 + \ldots + x_{n-1} \cdot x_{n-1}$$
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \qquad \text{ou}$$
$$\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}.$$

O lado direito da equação acima é o cálculo do comprimento de um vetor no $\mathbb{R}^n$! Ou seja, podemos estabelecer:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2} \qquad \text{ou}$$
$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2.$$

Com isso, podemos estabelecer algumas propriedades do produto escalar.

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) **Reflexiva:** $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$ e $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$;

(ii) **Comutativa:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;

(iii) **Distributiva:** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{u} \cdot \vec{w}$;

(iv) **Vetor com escalar:** $(\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$;

(v) **Vetor nulo:** $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$;

(vi) **Vetor soma:** $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$;

(vii) **Vetor diferença:** $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2.$

Exemplo 3.1 *Calcule o produto escalar dos vetores a seguir:*

(a) $\vec{u} = (1,2)$ *e* $\vec{v} = (-1,3)$*;*

(b) $\vec{u} = (1,2,3)$ *e* $\vec{v} = (0,1,-3)$*;*

(c) $\vec{u} = (1,2,3,4,5)$ *e* $\vec{v} = (-1,0,1,0,0)$*.*

Solução: Aplicando a definição de produto escalar:

$$\begin{gathered}
\text{(a) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2)\cdot(-1,3) = 1\cdot(-1) + 2\cdot 3 \\
\vec{u}\cdot\vec{v} = -1+6 = 5 \\
\text{(b) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2,3)\cdot(0,1,-3) = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-3) \\
\vec{u}\cdot\vec{v} = 0+2-9 = -7 \\
\text{(c) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2,3,4,5)\cdot(-1,0,1,0,0) = 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 + 4\cdot 0 + 5\cdot 0 \\
\vec{u}\cdot\vec{v} = -1+0+3+0+0 = 2
\end{gathered}$$

Exemplo 3.2 *Calcule o versor dos vetores a seguir:*

(a) $\vec{u} = (1,2)$*;* *(b)* $\vec{u} = (1,2,-2)$*;* *(c)* $\vec{u} = (1,1,1,1)$*.*

Solução: O versor de um vetor $\vec{u}$ é o vetor com a mesma direção e sentido de $\vec{u}$ (paralelo), porém com comprimento unitário, ou seja, igual a 1. Assim, o versor $\vec{v}$ de um vetor $\vec{u}$ é tal que:

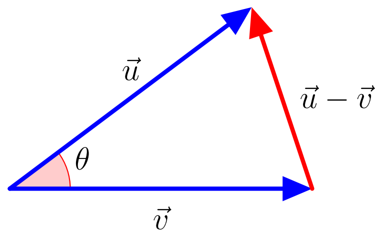
$$\begin{cases} \vec{v} = \alpha\vec{u} \\ |\vec{v}| = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{|\vec{u}|} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}.$$

Assim, aplicando essa conclusão para os vetores acima:

$$\begin{gathered}
\text{(a) } \vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\
\text{(b) } \vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(1,2,-2)}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{(1,2,-2)}{3} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\
\text{(c) } \vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} = \frac{(1,1,1,1)}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)
\end{gathered}$$

Ângulo entre dois vetores

A partir do produto escalar, é possível obter uma relação para encontrar o ângulo entre dois vetores. Seja a figura abaixo, com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com um ângulo θ entre eles.



Pela lei dos cossenos:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta$$

Pela propriedade do produto escalar:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

Por fim, podemos usar as duas relações para obter de maneira simples **o ângulo entre dois vetores**:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

Algumas considerações para o ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (diferentes de $\vec{0}$):

- $\theta = 0°$ se, e somente se, $\vec{u} \,||\, \vec{v}$, eles têm o mesmo sentido e $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$;
- $0° \leq \theta < 90°$ se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$;
- $\theta = 90°$ se, e somente se, $\vec{u} \perp \vec{v}$ (ortogonais) e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- $90° < \theta \leq 180°$ se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$;
- $\theta = 180°$ se, e somente se, $\vec{u} \,||\, \vec{v}$, eles têm sentidos opostos e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

O ângulo entre dois vetores não é maior que 180°. Para verificar que dois vetores são ortogonais (ângulo de 90° entre eles), basta que o produto escalar entre eles resulte em zero, i.e., $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Para verificar que dois vetores são paralelos, basta verificar que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$. Entretanto, computacionalmente, o teste de paralelismo utilizando a proporção das coordenadas é melhor, pois realiza menos operações.

Exemplo 3.3 *Calcule o ângulo entre os vetores a seguir:*

(a) $\vec{u} = (1, 2)$ *e* $\vec{v} = (2, 1)$*;*

(b) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ *e* $\vec{v} = (2, 0, 1)$*;*

(c) $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$ *e* $\vec{v} = (-1, 1, 1, 1)$*.*

Solução: Como visto, o ângulo entre dois vetores pode ser calculado utilizando a relação:

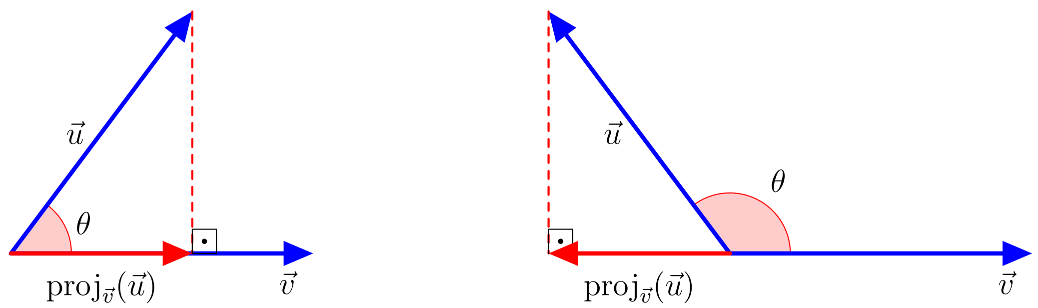
$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}.$$

Assim:

$$\text{(a) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2)\cdot(2,1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 4$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$
$$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 36,87^\circ$$
$$\text{(b) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2,-2)\cdot(2,0,1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + (-2)\cdot 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta = 90^\circ$$
$$\text{(c) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,1,1,1)\cdot(-1,1,1,1) = 1\cdot -1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2+1^2} = 2$$
$$\cos\theta = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 60^\circ$$

Projeção de um vetor sobre outro

A partir do produto escalar e da relação para determinar o ângulo entre dois vetores, podemos calcular a projeção ortogonal de um vetor sobre outro. Assim, dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulo, com um ângulo θ entre eles podemos projetar o vetor $\vec{u}$ ortogonalmente com relação à direção do vetor $\vec{v}$, ou seja, podemos obter a componente do vetor $\vec{u}$ na direção do vetor $\vec{v}$. Nas figuras abaixo, apresentamos a projeção de $\vec{u}$ em $\vec{v}$, denominada $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$.



Para calcular $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$, usamos a definição trigonométrica do cosseno de θ, para calcular o comprimento do vetor projeção:

$$\cos\theta = \frac{|\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})|}{|\vec{u}|}$$

$$|\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})| = |\vec{u}| \cdot \cos\theta = |\vec{u}| \cdot \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

A partir da proporcionalidade do comprimento $|\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})|$ e do comprimento do vetor $\vec{v}$, $|\vec{v}|$, podemos calcular o vetor $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$:

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{|\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})|}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right) \cdot \vec{v}$$

Exemplo 3.4 *Calcule a projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ a seguir:*

(a) $\vec{u} = (1,2)$ *e* $\vec{v} = (2,1)$*;*

(b) $\vec{u} = (1,2,-2)$ *e* $\vec{v} = (2,0,1)$*;*

(c) $\vec{u} = (1,1,1,1)$ *e* $\vec{v} = (-1,1,1,1)$*.*

Solução: A projeção de um vetor $\vec{u}$ sobre um vetor $\vec{v}$ é dada por:

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right) \cdot \vec{v}$$

Assim, para cada caso:

$$\text{(a) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2)\cdot(2,1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 4$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{4}{(\sqrt{5})^2}\right)\cdot(2,1) = \left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$$

$$\text{(b) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2,-2)\cdot(2,0,1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + (-2)\cdot 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{0}$$

$$\text{(c) } \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,1,1,1)\cdot(-1,1,1,1) = 1\cdot -1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2+1^2} = 2$$

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{2}{2^2}\right)\cdot(-1,1,1,1) = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Observe que no caso (b), não houve projeção, pois vetores ortogonais não possuem projeção entre si.

3.1 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Calcule, com relação aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a seguir, (1) o produto escalar entre eles; (2) o ângulo entre eles; e (3) as projeções $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$ e $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})$:

   (a) $\vec{u} = (-1, 0)$ e $\vec{v} = (2, 1)$;

   (b) $\vec{u} = (-1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1)$;

   (c) $\vec{u} = (-1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1)$;

   (d) $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (4, 2)$;

   (e) $\vec{u} = (1, 2, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$;

   (f) $\vec{u} = (1, 0, 4)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$;

   (g) $\vec{u} = (-1, -2, 2)$ e $\vec{v} = (2, 4, -4)$;

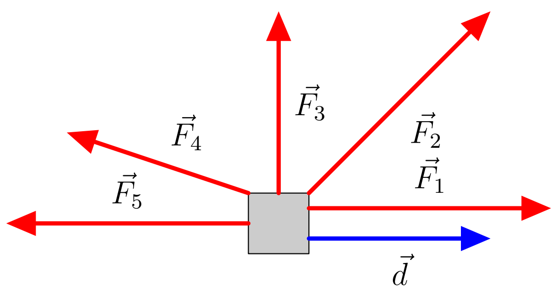
   (h) $\vec{u} = (1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 2)$;

   (i) $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$ e $\vec{v} = (0, -2, 0, 1)$.

   (j) $\vec{u} = (3, 2, 0, 4)$ e $\vec{v} = (1, -2, 0, 1)$.

   (k) $\vec{u} = (-1, 0, 2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, 0, -2, -1, 1)$.

2. Uma das aplicações do produto escalar ocorre na Física, no cálculo de **Trabalho**. O trabalho W realizado por uma força constante $\vec{F}$ no decorrer de um deslocamento $\vec{d}$ é determinado pelo produto escalar
$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$
Se soubermos o ângulo θ entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{d}$, também é possível encontrar o trabalho por meio da relação:
$$W = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{d}\right| \cdot \cos\theta.$$
Pela norma do *S.I.*, a unidade de força é Newton (N), a unidade de deslocamento é metro (m) e a unidade de trabalho é Joule J. Calcule o trabalho das forças $\vec{F_1} = (4, 0)$, $\vec{F_2} = (3, 3)$, $\vec{F_3} = (0, 3)$, $\vec{F_4} = (-3, -1)$ e $\vec{F_5} = (-4, 0)$ no bloco, dado um deslocamento $\vec{d} = (3, 0)$ na figura abaixo.



3. Seja $\vec{u} = (-1, 2)$. Determine um vetor $\vec{v}$, paralelo a $\vec{u}$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = 9$. Os vetores têm o mesmo sentido?

4. Seja $\vec{u} = (1, 2, 2)$. Determine um vetor $\vec{v}$, paralelo a $\vec{u}$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -18$. Os vetores têm o mesmo sentido?

5. Seja $\vec{u} = (-1, 2)$. Determine um vetor $\vec{v}$, ortogonal a $\vec{u}$ cujo comprimento seja $|\vec{v}| = \sqrt{5}$.

6. Seja $\vec{u} = (1, 2, 0)$. Determine um vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo x, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = 8$.

7. Seja o triângulo com os vértices $A = (-1, -2, 4)$, $B = (-4, -2, 0)$ e $C = (3, -2, 1)$. Determine o perímetro do triângulo. Determine os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

8. Seja o triângulo equilátero com os vértices A, B e C e lado de 10 cm. Determine o produto escalar de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. E $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$?

9. Seja um triângulo retângulo com os vértices A, B e C e lados de 5, 12 e 13 cm. Considere o ângulo reto em A. Calcule:

   (a) os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$;

   (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;

   (c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$;

   (d) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$;

   (e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

10. Seja o triângulo de vértices $A(2, 1, 3)$, $B(1, 0, -1)$ e $C(-1, 2, 1)$. Determine:

    (a) os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$;

    (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;

    (c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$;

    (d) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$;

    (e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

11. Obtenha o ponto P do eixo das abscissas (eixo x) equidistante dos pontos $A(2, -3, 1)$ e $B(-2, 1, -1)$.

12. Determine α para que o ângulo entre $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, \alpha)$ seja de 60°.

13. Calcule α para que seja de 30° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, \alpha, 2)$ e $\vec{j}$.

3.2 Exercícios Computacionais

1. Escreva um algoritmo que retorne o resultado do produto escalar de dois vetores de tamanho n.

2. Escreva um algoritmo que retorne o comprimento de um vetor de tamanho n.

3. Escreva um algoritmo que retorne o ângulo entre dois vetores de tamanho n.

4. Escreva um algoritmo que retorne o vetor projeção de um vetor sobre outro (ambos de tamanho n).

5. Gere um vetor de tamanho $n = 50$, com os primeiros 50 números primos. Gere um segundo vetor de tamanho $n = 50$ em que a k-ésima posição é dada por $(-1)^k$. Qual o produto escalar entre os dois vetores? Qual o comprimento dos dois vetores? Qual o ângulo entre os vetores? E qual a projeção do primeiro no segundo vetor?

4 Produto Vetorial

No capítulo anterior, foi visto o produto escalar entre vetores, suas propriedades e consequências geométricas. Nesse capítulo, ainda sob a perspectiva geométrica, algébrica e computacional, vamos ver o produto vetorial entre vetores. Aqui, ficaremos reservados ao espaço $\mathbb{R}^3$, onde o produto vetorial está bem definido.

Definição 4.1 *O produto vetorial de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no $\mathbb{R}^3$, denominado $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado por:*

$$\vec{u} \times \vec{v} = (x_u, y_u, z_u) \times (x_v, y_v, z_v)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u)$$

Onde $|A|$ corresponde ao determinante da matriz A. Observe que o resultado do produto é um vetor, i.e., $\vec{u} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. O vetor resultante do produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é sempre ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente, pois:

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0.$$

O determinante de uma matriz com linhas iguais é zero. Analogamente, pode ser mostrado que $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.

Exemplo 4.1 *Calcule o produto vetorial dos vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 2, 0)$ e apresente um esboço da solução.*

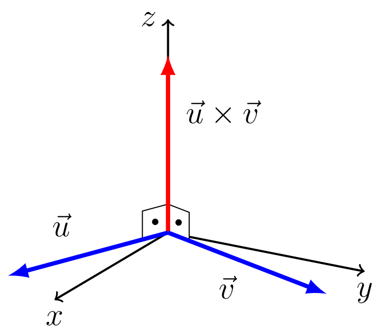
Solução: Aplicando a definição de produto vetorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, 5)$$

O esboço do espaço $\mathbb{R}^3$ seria a figura abaixo, com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:



Com isso, podemos estabelecer algumas propriedades do produto vetorial.

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) **Reflexiva:** $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$;

(ii) **Não Comutativa:** $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$;

(iii) **Distributiva:** $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v}) + \vec{u} \times \vec{w}$;

(iv) **Vetor com escalar:** $(\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$;

(v) **Vetor nulo:** $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$;

(vi) **Vetores paralelos:** $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, para $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$;

(vii) **Identidade de Lagrange:** $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \, |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$;

(viii) **Ângulo θ entre vetores:** $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \, |\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$;

(ix) **Não Comutativa:** $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

Exemplo 4.2 *Calcule o produto vetorial dos vetores a seguir:*

(a) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ *e* $\vec{v} = (0, 1, -3)$;

(b) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ *e* $\vec{v} = (-3, -6, 6)$.

Solução: Aplicando a definição de produto vetorial:

$$\text{(a) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-9, 3, 1)$$

$$\text{(b) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, 0)$$

Observe que no item (b), o resultado foi zero, o que indica que os vetores $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (-3, -6, 6)$ são paralelos.

Exemplo 4.3 *Calcule o ângulo entre os vetores* $\vec{u} = (1, 2, -2)$ *e* $\vec{v} = (2, 0, 1)$.

Solução: O ângulo entre dois vetores pode ser calculado utilizando a relação:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$$

ou

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

Assim:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2, -5, 4)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{3\sqrt{5}}{3 \cdot \sqrt{5}} = 1 \Longrightarrow \theta = 90^\circ$$

Observe que o cálculo de ângulos é computacionalmente e manualmente mais rápido utilizando o produto escalar, ou seja, utilizando a seguinte relação:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

Exemplo 4.4 *Encontre um vetor unitário ortogonal aos vetores* $\vec{u} = (1, 4, 3)$ *e* $\vec{v} = (-3, -2, 6)$.

Solução: Um vetor ortogonal a dois vetores ao mesmo tempo pode ser encontrado por meio do produto vetorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (30, -15, 10)$$

O vetor $\vec{u} \times \vec{v} = (30, -15, 10)$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, porém não é unitário. Para que ele seja unitário, basta multiplicar pelo inverso do seu comprimento. Assim:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{30^2 + (-15)^2 + 10^2} = 35$$

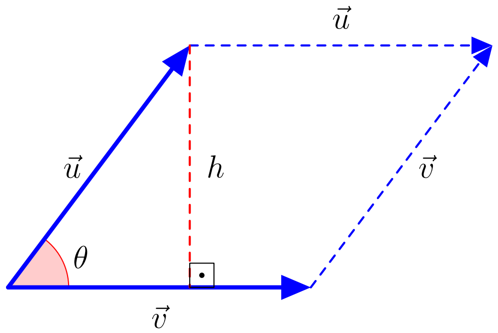
$$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{1}{35} \cdot (30, -15, 10)$$

$$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = (\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{2}{7})$$

Outra solução seria o vetor oposto ao vetor encontrado $(-\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7})$.

Cálculo de áreas

O módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $|\vec{u} \times \vec{v}|$ pode ser interpretado geometricamente como a área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A figura abaixo mostra a relação.



A área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada pelo comprimento do vetor $\vec{v}$ vezes a altura h. A altura h, pode ser escrita em função do ângulo θ e que por fim está relacionado ao produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$. Assim:

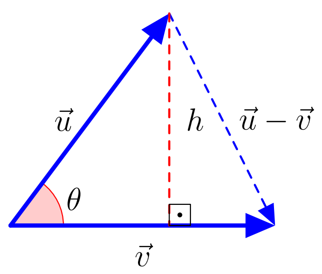
$$Área_{Paralelogramo} = |\vec{v}| \cdot h$$

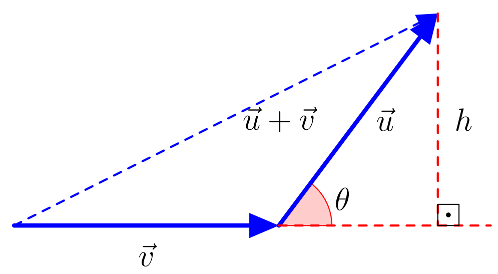
$$Área_{Paralelogramo} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$Área_{Paralelogramo} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

$$Área_{Paralelogramo} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

É possível também determinar a área do triângulo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e algum dos casos $\pm\vec{u} \pm \vec{v}$ como na figura abaixo:





Em qualquer dos casos, basta calcular a metade da área do paralelogramo equivalente. Ou seja:

$$Area_{Triangulo} = \frac{1}{2} \cdot Area_{Paralelogramo}$$
$$Area_{Triangulo} = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$$

Exemplo 4.5 *Calcule a área do paralelogramo correspondente aos vetores:*

(a) $\vec{u} = (1, 4, 3)$ *e* $\vec{v} = (-3, -2, 6)$*;*

(b) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ *e* $\vec{v} = (2, 0, 1)$*;*

(c) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ *e* $\vec{v} = (-3, -6, 6)$.

Solução: Em cada um dos casos, teremos que calcular o produto vetorial entre os vetores, e em seguida o comprimento do vetor resultante:

$$(a)\ \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (30, -15, 10)$$

$$\text{Á}rea_{(a)} = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{30^2 + (-15)^2 + 10^2} = 35$$

$$(b)\ \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2, -5, 4)$$

$$\text{Á}rea_{(b)} = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$(c)\ \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, 0)$$

$$\text{Á}rea_{(c)} = |\vec{u} \times \vec{v}| = 0$$

Observe que nos casos (a) e (b) obtivemos uma área e no caso (c) não obtivemos, pois os vetores $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (-3, -6, 6)$ são paralelos e não formam um paralelogramo.

Exemplo 4.6 *Calcule a área do triângulo cujos vértices são:* $A = (2, 1, 2)$, $B = (-1, 2, 2)$ *e* $C = (3, 0, -2)$.

Solução: Para esse problema, podemos estabelecer dois vetores que formam o triângulo: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Em seguida, podemos calcular o produto vetorial destes vetores, na qual a metade do módulo é igual a área do triângulo ABC.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-3, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, -1, -4)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4, -12, 2)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-12)^2 + 2^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$$

$$\text{Á}rea_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{41} \approx 6,4$$

4.1 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Calcule o produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a seguir e a área relativa ao paralelogramo correspondente.

   (a) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-2, -3, 6)$;

   (b) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (0, 0, 1)$;

   (c) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (0, -1, 3)$;

   (d) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (0, 0, 0)$;

   (e) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (1, 2, 3)$;

   (f) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-2, -4, -6)$.

2. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$, determine:

   (a) $\vec{u} \times \vec{v}$;

   (b) $\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$;

   (c) $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$;

   (d) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$;

   (e) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{v})$.

3. Calcule a área do triângulo cujos vértices são: $A = (2, -1, 2)$, $B = (1, 2, -1)$ e $C = (3, 2, 1)$.

4. Sejam $\vec{u} = (1, 2, 2)$ e $\vec{v} = (3, -1, 0)$. Determine um vetor $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, de comprimento igual a 3.

5. Seja $\vec{u} = (1, 2, 3)$. Determine um vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo x e ao vetor $\vec{u}$.

6. Determine a área do triângulo com os vértices $A = (-1, -2, 4)$, $B = (-4, -2, 0)$ e $C = (3, -2, 1)$

7. Determine a área do quadrilátero convexo com os vértices $A = (-1, -2, 4)$, $B = (-4, -2, 0)$, $C = (3, -2, 1)$ e $D = (2, -2, -1)$.

4.2 Exercícios Computacionais

1. Escreva um algoritmo que retorne o resultado do produto vetorial de dois vetores do espaço.

2. Escreva um algoritmo que retorne a área do triângulo dados 3 pontos.
3. Escreva um algoritmo que teste se 3 pontos são colineares, usando o produto vetorial.
4. Escreva um algoritmo que retorne a área de um polígono convexo de n vértices.
5. Escreve um algoritmo que retorne a área de superfície de um tetraedro, dados 4 pontos.

5 Produto Misto

Nos capítulos anteriores, foram definidos os produtos escalar e vetorial entre vetores, com suas propriedades e consequências geométricas. Nesse capítulo, ainda sob a perspectiva geométrica, algébrica e computacional, vamos ver o produto misto entre vetores. Novamente ficaremos reservados ao espaço $\mathbb{R}^3$, pois o produto misto depende do produto vetorial.

Definição 5.1 *O produto misto de três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ no $\mathbb{R}^3$, representado $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é dado por:*

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (x_u, y_u, z_u) \cdot ((x_v, y_v, z_v) \times (x_w, y_w, z_w))$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (x_u, y_u, z_u) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$$

Onde $|A|$ corresponde ao determinante da matriz A. Observe que o resultado do produto misto é um escalar, i.e., $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.1 *Calcule o produto misto dos vetores $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (-1, 3, 3)$ e $\vec{w} = (4, -3, 2)$.*

Solução: Aplicando a definição de produto misto:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 27$$

Podemos estabelecer algumas propriedades do produto misto.

Propriedades:

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{a}$ quaisquer e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) **Não Comutativa:** $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ troca de sinal ao trocarmos a posição de dois vetores;

(ii) **Distributiva:** $(\vec{u}+\vec{a},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + (\vec{a},\vec{v},\vec{w})$;

(iii) **Distributiva:** $(\vec{u},\vec{v}+\vec{a},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + (\vec{u},\vec{a},\vec{w})$;

(iv) **Distributiva:** $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}+\vec{a}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + (\vec{u},\vec{v},\vec{a})$;

(v) **Vetor com escalar:** $(\alpha\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\alpha\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}) = \alpha(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$;

(vi) **Vetor nulo:** Se um dos vetores é $\vec{0}$ então $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$;

(vii) **Vetores paralelos:** $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$, se pelo menos dois vetores são paralelos;

(viii) **Coplanaridade:** $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$ se, e somente se, os três vetores são coplanares.

Exemplo 5.2 *Verifique se os vetores abaixo são coplanares:*

(a) $\vec{u} = (2,3,5)$, $\vec{v} = (-1,3,3)$ *e* $\vec{w} = (4,-3,2)$;

(b) $\vec{u} = (1,2,-2)$, $\vec{v} = (-3,-6,6)$ *e* $\vec{w} = (4,-3,2)$;

(c) $\vec{u} = (2,-10,0)$, $\vec{v} = (1,-1,2)$ *e* $\vec{w} = (1,-3,1)$;

Solução: Aplicando a definição de produto misto:

$$\text{(a) } (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

Portanto, no item (a), os três vetores não são coplanares.

$$\text{(b) } (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

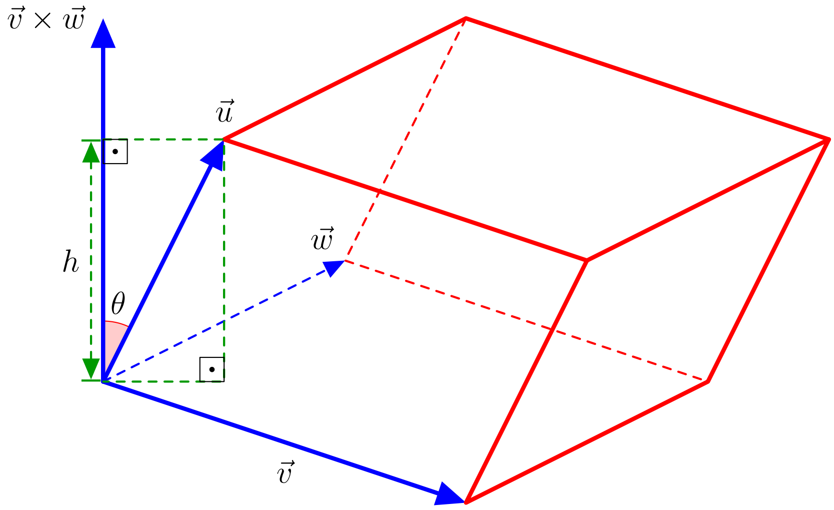
Portanto, no item (b) os três vetores são coplanares. Note que os dois primeiros vetores são paralelos: $\vec{v} = -3\vec{u}$.

$$\text{(c) } (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -10 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, no item (c) os três vetores são coplanares. Observe, que nesse caso, não há vetores paralelos entre si.

Cálculo de volumes

O módulo do produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, $|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|$ pode ser interpretado geometricamente como o volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. A figura abaixo mostra um esboço dos vetores e do volume pretendido.



O volume do paralelepído formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado pela área da base (paralelogramo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$) multiplicada pela altura h. A área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ pode ser determinada por

$$|\vec{v} \times \vec{w}|\,.$$

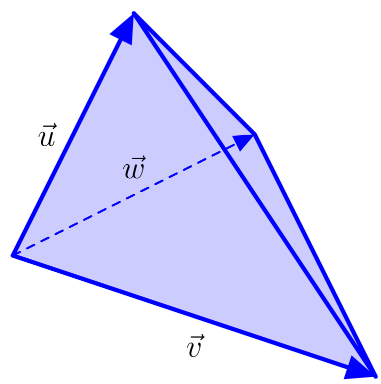
Do ângulo θ temos a relação:

$$\cos\theta = \frac{h}{|\vec{u}|} \qquad \Longrightarrow \qquad h = |\vec{u}|\,\cos\theta.$$

Portanto, o volume pode ser dado por:

$$Volume_{Paralelepipedo} = Area_{Paralelogramo} \cdot h$$
$$Volume_{Paralelepipedo} = |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot |\vec{u}|\,\cos\theta$$
$$Volume_{Paralelepipedo} = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$
$$Volume_{Paralelepipedo} = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

Também pode ser calculado o volume do tetraedro formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, conforme a figura abaixo:



O volume do tetraedro é $\dfrac{1}{6}$ do volume do paralelepípedo:

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6} Volume_{Paralelepipedo} = \frac{1}{6}\left|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\right|$$

Exemplo 5.3 *Calcule o volume do paralelepípedo e do tetraedro formado pelos seguintes vetores:*

(a) $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (-1, 3, 3)$ *e* $\vec{w} = (4, -3, 2)$;

(b) $\vec{u} = (2, -10, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$ *e* $\vec{w} = (1, -3, 1)$;

Solução: Aplicando o resultado do volume do paralelepípedo como produto misto de três vetores:

$$\text{(a) } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

$$Volume_{Paralelepipedo} = \left|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\right| = 27 \text{ u.v.}$$

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6} Volume_{Paralelepipedo} = \frac{27}{6} = 4,5 \text{ u.v.}$$

Portanto, no item (a), os três vetores formam um paralelepípedo com volume de 27 unidades de volume e o tetraedro correspondente possui 4,5 unidades de volume.

$$\text{(b) } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -10 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, no item (b) os três vetores são coplanares e nesse caso, não há paralelepípedo nem tetraedro correspondente.

Exemplo 5.4 *Determine o volume do tetraedro formado pelos vértices* $A = (1, 2, -1)$, $B = (5, 0, 1)$, $C = (2, -1, 1)$ *e* $D = (6, 1, -3)$ *e a altura do tetraedro relativo ao vértice* D.

Solução: O volume do tetraedro é dado por:

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, -3, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (5, -1, -2)$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 36$$

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6}\,|36| = 6 \text{ u.v.}$$

Já a altura do tetraedro pode ser obtida usando-se o fato de que o volume do tetraedro pode ser obtido como $\frac{1}{6}$ do volume do paralelepípedo, que por sua vez é a área do paralelogramo formado por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ multiplicada pela altura no ponto D. Assim:

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \cdot h_D$$

$$6 = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \cdot h_D$$

$$36 = |(2, -6, -10)| \cdot h_D$$

$$36 = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-10)^2} \cdot h_D$$

$$h_D = \frac{36}{\sqrt{140}} \approx 3,043 \text{ u.c.}$$

5.1 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Calcule o produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, verifique se os vetores são coplanares e, caso o contrário, calcule o volume relativo ao tetraedro correspondente.

   (a) $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$;

   (b) $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 0, -4)$;

   (c) $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (7, -1, 4)$;

2. Calcule o valor de α para que os vetores abaixo sejam coplanares:

   (a) $\vec{u} = (2, -1, \alpha)$, $\vec{v} = (1, 0, 2)$ e $\vec{w} = (\alpha, 3, \alpha)$;

   (b) $\vec{u} = (2, \alpha, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, \alpha)$ e $\vec{w} = (3, 0, -3)$;

3. Qual o valor do paralelepípedo e do tetraedro definido pelos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$?

4. Calcule o volume do tetraedro formado pelos vértices abaixo, e calcule a altura do tetraedro relativo ao vértice D.

   (a) $A(1, 2, -3)$, $B(2, -1, -4)$, $C(0, 2, 0)$ e $D(-1, 2, 1)$;

   (b) $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(3, 2, -2)$ e $D(0, 0, -10)$;

5.2 Exercícios Computacionais

1. Escreva um algoritmo que retorne o resultado do produto misto de três vetores do espaço.

2. Escreva um algoritmo que teste se três vetores são coplanares, usando o produto misto.

3. Escreva um algoritmo que retorne o volume de um tetraedro, dado quatro pontos no espaço.

4. Escreva um algoritmo que retorne a altura de um ponto em relação a outros três pontos no espaço. (Como os três últimos pontos formam um plano, seria o equivalente à distância de um ponto ao plano).

5. Escreva um algoritmo que retorne o volume de um poliedro convexo, dados os conjuntos dos vértices e das arestas.

6 Reta

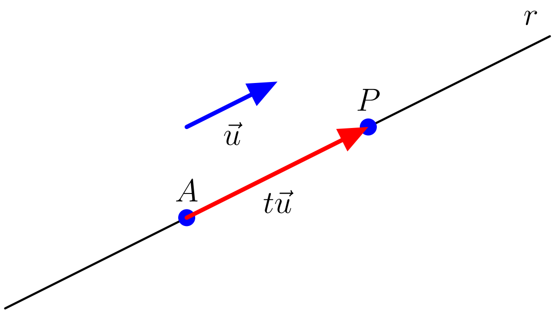
Uma reta, no plano, espaço ou hiperespaço pode ser determinada a partir de duas estruturas: (1) um ponto contido na reta, que servirá de referência; e (2) uma direção, dada por um vetor não-nulo. Assim, seja uma reta r, com um ponto de referência A e um vetor diretor $\vec{u}$:

Plano $\mathbb{R}^2$: $A = (x_A, y_A)$ e $\vec{u} = (x_u, y_u)$.

Espaço $\mathbb{R}^3$: $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$.

Espaço $\mathbb{R}^n$: $A(x_0^A, x_1^A, \ldots, x_{n-1}^A)$ e $\vec{u} = (x_0^u, x_1^u, \ldots, x_{n-1}^u)$.

Um ponto qualquer P da reta r, pode ser então determinado por meio da relação, conforme a figura abaixo:



$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$P - A = t \cdot \vec{u}$$
$$P = A + t \cdot \vec{u}$$

O ponto A é o ponto de referência e $\vec{u}$ é o vetor diretor da reta. O valor do parâmetro t pode ser qualquer número real e por isso, qualquer ponto P da reta é o ponto A somado do vetor $\vec{u}$ com a escala t. As equações acima são denominadas **Equação Vetorial da Reta**. Tais equações podem ser modificadas, conforme vamos ver a seguir. Entretanto, faremos todas as operações no espaço $\mathbb{R}^3$. Para o plano e espaços com mais dimensões, o raciocínio é análogo.

Assim, no $\mathbb{R}^3$, podemos visualizar a equação da reta, pensando em cada coordenada separadamente:

$$P = A + t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t(x_u, y_u, z_u)$$
$$\begin{cases} x = x_A + tx_u \\ y = y_A + ty_u \\ z = z_A + tz_u \end{cases}$$

As equações acima são denominadas **Equações Paramétricas da Reta**. Novamente, o parâmetro t pode ser qualquer número real. Equações paramétricas são muito importantes para análises de outras curvas no espaço, como circunferências, helicoidais, parábolas etc.

Há ainda mais duas versões de equações da reta mais utilizadas. A primeira delas toma as equações paramétricas da reta e isola o parâmetro t para todas as coordenadas. Assim:

$$\begin{cases} x = x_A + tx_u \\ y = y_A + ty_u \\ z = z_A + tz_u \end{cases}$$

$$t = \frac{x - x_A}{x_u} = \frac{y - y_A}{y_u} = \frac{z - z_A}{z_u}$$

Com isso, podemos dispensar o parâmetro t para obter as **Equações Simétricas da Reta**:

$$\frac{x - x_A}{x_u} = \frac{y - y_A}{y_u} = \frac{z - z_A}{z_u}$$

Por fim, podemos reorganizar as coordenadas do ponto P, (x, y, z) para que elas fiquem em função de apenas uma outra coordenada, a partir das equações simétricas. Por exemplo, para tornar y em função de x:

$$\frac{x - x_A}{x_u} = \frac{y - y_A}{y_u}$$

$$y - y_A = \frac{y_u}{x_u}x - \frac{y_u}{x_u}x_A$$

$$y = \frac{y_u}{x_u}x + \left(y_A - \frac{y_u}{x_u}x_A\right)$$

$$y = mx + n$$

Analogamente, para tornar z em função de x:

$$\frac{x - x_A}{x_u} = \frac{z - z_A}{z_u}$$

$$z = \frac{z_u}{x_u}x + \left(z_A - \frac{z_u}{x_u}x_A\right)$$

$$z = px + q$$

Assim, combinando os dois resultados, podemos obter as **Equações Reduzidas da Reta**:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$$

Exemplo 6.1 *Determine todas as equações da reta que passa pelos pontos $A(1, 2, 0)$ e $B(0, 3, 2)$.*

Solução: Dois pontos distintos são suficientes para se construir uma reta. A direção dessa reta pode ser obtida usando-se o vetor que une os dois pontos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 3, 2) - (1, 2, 0) = (-1, 1, 2)$$

Assim, a equação vetorial da reta, considerando o parâmetro $t \in \mathbb{R}$, é dada por:

$$P = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(-1, 1, 2)$$

Observe que o ponto B também poderia ter sido escolhido para ser o ponto de referência. Da mesma forma, o vetor $\overrightarrow{BA}$ também poderia ter sido escolhido como vetor diretor. Na verdade, qualquer múltiplo de $\overrightarrow{AB}$ poderia ter sido escolhido como vetor diretor. Continuando, para a equação paramétrica basta separar as coordenadas:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 0 + 2t \end{cases}$$

Considerando as equações simétricas:

$$t = \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{2}$$

E por fim, obtemos as equações reduzidas a partir das equações simétricas, colocando todas as coordenadas em função de x:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} \implies y - 2 = -x + 1 \implies y = -x + 3$$
$$\frac{x-1}{-1} = \frac{z-0}{2} \implies z = -2x + 2$$
$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ z = -2x + 2 \end{cases}$$

Para as equações reduzidas, também poderia ter sido determinado as coordenadas em função da coordenada y ou da coordenada z, entretanto é mais usual deixá-la em função de x.

Exemplo 6.2 *Determine todas as equações da reta que passa pelos pontos $A(-1, 1, 0)$ e $B(-1, 2, 2)$.*

Solução: Novamente, a partir de dois pontos distintos obtemos a direção da reta por meio do vetor $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 2, 2) - (-1, 1, 0) = (0, 1, 2)$$

Observe que a coordenada x do vetor diretor é zero. Isso terá algumas consequências na forma como descrevemos as equações. A equação vetorial da reta, usando dessa vez B como referência e o parâmetro $t \in \mathbb{R}$, é dada por:

$$P = B + t \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$(x, y, z) = (-1, 1, 0) + t(0, 1, 2)$$

Para a equação paramétrica basta separar as coordenadas:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + t \\ z = 0 + 2t \end{cases}$$

Note que para a coordenada x, não há dependência do parâmetro t, pois $x = -1$, constante. Considerando as equações simétricas:

$$\begin{cases} x = -1 \\ t = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-0}{2} \end{cases}$$

Como x independe de t, a representação das equações simétricas fica um pouco diferente. E por fim, obtemos as equações reduzidas a partir das equações simétricas, mas dessa vez vamos colocar z em função de y, visto que a coordenada x é constante.

$$\frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{2} \quad \Longrightarrow \quad z = 2y - 2$$
$$\begin{cases} x = -1 \\ z = 2y - 2 \end{cases}$$

Exemplo 6.3 *Determine um ponto de referência e o vetor diretor das retas abaixo e em seguida escreva a equação vetorial da reta.*

(a) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$

(b) $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = z$

(c) $\begin{cases} y = x - 1 \\ z = -3x + 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y = 2 \\ x - 2 = \dfrac{z}{3} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 2 \end{cases}$

Solução:

(a) O item trata de equações paramétricas da reta. Para se obter um ponto da reta, basta considerar um valor para o parâmetro t. O mais fácil, em geral, é considerar $t = 0$.

Assim:

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \cdot 0 = 3 \\ y = 1 + 0 = 1 \\ z = -0 = 0 \end{cases}$$

Portanto, o ponto $(3, 1, 0)$ pertence a reta. Para calcular o vetor diretor, basta notar o número que acompanha o parâmetro t. E assim, o vetor diretor é dado por $(2, 1, -1)$. A equação vetorial então é dada por:

$$P = (3, 1, 0) + t(2, 1, -1)$$

(b) O item trata de equações simétricas da reta. Para encontrar o ponto de referência, consideramos os valores de x, y e z em que $t = 0$, ou seja, em que os numeradores das frações são zero. Assim $x + 1 = 0$, $y - 1 = 0$ e $z = 0$, e o ponto de referência é $(-1, 1, 0)$. Para o vetor diretor, basta tomar os números que estão no denominador das frações. E assim, o vetor diretor é dado por $(-1, 2, 1)$. A equação vetorial então é dada por:

$$P = (-1, 1, 0) + t(-1, 2, 1)$$

(c) O item trata de equações reduzidas da reta. Para facilitar, escolhemos uma das coordenadas para ser igual a t. Como as coordenadas y e z estão em função de x, vamos colocar $x = t$. Assim:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = -3t + 1 \end{cases}$$

As equações acima são as equações paramétricas da reta e podemos analisar como no item (a). O ponto de referência, em $t = 0$ é $(0, -1, 1)$. O vetor diretor é dado por $(1, 1, -3)$. E a equação vetorial então é dada por:

$$P = (0, -1, 1) + t(1, 1, -3)$$

(d) O item trata de equações simétricas da reta. Entretanto, aqui a coordenada y é constante. Para encontrar o ponto de referência, consideramos os valores de x, y e z em que $t = 0$, ou seja, em que os numeradores das frações são zero. Assim $x - 2 = 0$, $y = 2$ e $z = 0$, e o ponto de referência é $(2, 2, 0)$. Para o vetor diretor, basta tomar os números que estão no denominador das frações. No caso da coordenada y, como $y = 2$ e não há variação do seu valor, então a direção é $0\vec{j}$. E assim, o vetor diretor é dado por $(1, 0, 3)$. A equação vetorial então é dada por:

$$P = (2, 2, 0) + t(1, 0, 3)$$

(e) O item trata de equações reduzidas da reta. Para facilitar, escolhemos uma das coordenadas para ser igual a t. Como a coordenada y está em função de x e z é constante, vamos colocar $x = t$. Assim:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = 2 + 0t \end{cases}$$

As equações acima são as equações paramétricas da reta e podemos analisar como no item (a). O ponto de referência, em $t = 0$ é $(0, -1, 2)$. O vetor diretor é dado por $(1, 2, 0)$. E a equação vetorial então é dada por:

$$P = (0, -1, 2) + t(1, 2, 0)$$

6.1 Relações entre retas

Dadas duas retas r e s no espaço $\mathbb{R}^3$, quais relações podemos obter entre elas? Há várias relações que podemos obter entre duas retas, por exemplo ângulo, posição relativa, distância, coplanaridade etc. Para os problemas a seguir, vamos sempre considerar as retas r e s abaixo:

$$r: \ P_r = A + t\vec{u}$$
$$s: \ P_s = B + t\vec{v}$$

A reta r tem ponto de referência A e vetor diretor $\vec{u}$. A reta s tem ponto de referência B e vetor diretor $\vec{v}$.

Com a relação entre as retas e seus vetores diretores, várias das propriedades das retas são oriundas das relações entre os vetores.

Ângulo entre duas retas

Para verificar o ângulo entre duas retas basta analisar as direções das duas retas e pegar o menor ângulo entre as duas direções. Assim, considerando que as retas r e s possuem um ângulo θ entre elas, podemos usar a relação de ângulos entre vetores:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}.$$

O produto escalar no numerador está em módulo, porque o ângulo entre retas é sempre o menor, e em módulo $0 \leq \theta \leq 90°$.

Retas paralelas

As retas r e s são paralelas ($r \mid\mid s$) se possuem a mesma direção. Assim, basta verificar se os vetores diretores das retas são paralelos. Ou seja:

$$r \mid\mid s \iff \vec{u} \mid\mid \vec{v} \iff\Longrightarrow \vec{u} = \alpha\vec{v}$$
$$\alpha = \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v} = \frac{z_u}{z_v}$$

Uma outra maneira de verificar é usar o ângulo entre os vetores. Se o ângulo entre os vetores diretores for zero, então a direção dos vetores é a mesma. Entretanto, fazer isso é manual e computacionalmente mais demorado para ser calculado.

Retas ortogonais

As retas r e s são ortogonais ($r \perp s$) se o ângulo formado entre elas é de $90°$. Assim, se o produto escalar dos vetores diretores é nulo, então as retas são ortogonais. Ou seja:

$$r \perp s \iff \vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Retas coplanares

As retas r e s são coplanares se estão no mesmo plano. Para tanto, os vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e os pontos A e B devem estar contidos no mesmo plano. Se A e B estão no mesmo plano, o vetor $\overrightarrow{AB}$ também está no mesmo plano. Assim, podemos usar o produto misto dos três vetores para testar a sua coplanaridade. Assim, r e s são coplanares se:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0$$

Se o produto misto dos três vetores for diferente de zero, então as retas não são coplanares e são chamadas de reversas. Observe que o teste de coplanaridade não está definido para espaços $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, pois não definimos produto vetorial e misto nos outros espaços.

Posições relativas entre retas

Duas retas r e s no espaço podem ter as seguintes posições relativas:

- **Coplanares:** As retas estão no mesmo plano.
  - **Coincidentes:** As retas são a mesma.
  - **Paralelas:** $r \parallel s$ e não possuem ponto de interseção entre si.
  - **Concorrentes:** Se as retas não são paralelas, então elas são concorrentes e possuem um ponto de interseção.
- **Reversas:** As retas não são coplanares e não possuem interseção entre si.

Para determinar a posição relativa entre duas retas, pode-se então adotar o seguinte algoritmo 6.1.

Exemplo 6.4 *Determine a posição relativa entre as retas abaixo e o ângulo entre elas:*

(a) $r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

(b) $r_2 : \begin{cases} y = 1 \\ \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{z+2}{4} \end{cases}$

(c) $r_3 : P = (-2, -1, 1) + t(-1, 0, 2)$

(d) $r_4 : \begin{cases} x = 2z - 9 \\ y = -2z + 5 \end{cases}$

Algoritmo 6.1: Posição Relativa entre duas retas

Entrada: Reta r: ponto A e vetor $\vec{u}$;
Entrada: Reta s: ponto B e vetor $\vec{v}$;
se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ **então**
    se $A \in s$ **então**
        As retas são coincidentes e coplanares;
    senão
        As retas são paralelas e coplanares;
    fim
senão
    se $(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ **então**
        As retas são concorrentes e coplanares;
    senão
        As retas são reversas;
    fim
fim

Solução: O primeira passo a ser dado é calcular o vetor diretor e um ponto de cada reta:

$$\textbf{(a)}\ (t=0) \Longrightarrow A = (0,1,2)$$
$$\vec{u}_1 = (1,0,-2)$$
$$\textbf{(b)}\ (t=0) \Longrightarrow B = (2,1,-2)$$
$$\vec{u}_2 = (-2,0,4)$$
$$\textbf{(c)}\ (t=0) \Longrightarrow C = (-2,-1,1)$$
$$\vec{u}_3 = (-1,0,2)$$
$$\textbf{(d)}\ (z=0) \Longrightarrow D = (-9,5,0)$$
$$(z=t) \Longrightarrow \vec{u}_4 = (2,-2,1)$$

A partir disso, usamos o algoritmo 6.1. Para as retas r_1 e r_2:

$$r_1 \parallel r_2\ ?$$
$$(1,0,-2) = k(-2,0,4) \Longrightarrow k = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \text{Vetores diretores paralelos;}$$
$$A \in r_2\ ?$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ \dfrac{0-2}{-2} = \dfrac{2+2}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Portanto r_1 e r_2 são coincidentes, ou seja, são a mesma reta! Para as retas r_1 e r_3:

$$r_1 \mid\mid r_3 \ ?$$

$$(1,0,-2) = k(-1,0,2) \Longrightarrow k = -1 \text{ Vetores diretores paralelos;}$$

$$A \in r_3 \ ?$$

$$(0,1,2) = (-2,-1,1) + t(-1,0,2)$$

$$(0,1,2) - (-2,-1,1) = t(-1,0,2)$$

$$(2,2,1) = t(-1,0,2)$$

Aqui, não existe t tal satisfaz a equação, pois se olharmos para a coordenada y, veremos que $2 = t \cdot 0$, que é um absurdo! Portanto, como A não pertence a r_3 então as retas são paralelas e coplanares, não-coincidentes. Como as retas r_1 e r_2 são iguais e r_1 é paralela a r_3, então r_2 e r_3 são paralelas. Para as retas r_1 e r_4:

$$r_1 \mid\mid r_4 \ ?$$

$$(1,0,-2) = k(2,-2,1) \Longrightarrow \nexists k \text{ então: Vetores diretores não são paralelos;}$$

$$(\overrightarrow{AD}, \vec{u}_1, \vec{u}_4) = 0 \ ?$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (-9,5,0) - (0,1,2) = (-9,4,-2)$$

$$(\overrightarrow{AD}, \vec{u}_1, \vec{u}_4) = \begin{vmatrix} -9 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$$

Portanto, as retas r_1 e r_4 não pertencem ao mesmo plano e são reversas. Como as retas r_1 e r_2 são iguais então r_2 e r_4 são reversas. Entretanto, não é possível ainda afirmar a relação entre r_3 e r_4. Já sabemos que r_3 e r_4 não possuem a mesma direção, mas e quanto à coplanaridade?

$$(\overrightarrow{CD}, \vec{u}_3, \vec{u}_4) = 0 \ ?$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (-9,5,0) - (-2,-1,1) = (-7,6,-1)$$

$$(\overrightarrow{CD}, \vec{u}_3, \vec{u}_4) = \begin{vmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

E portanto r_3 e r_4 são retas concorrentes e coplanares. Nesse caso, elas possuem um ponto de interseção, que pode ser calculado colocando as equações em um mesmo sistema:

$$\begin{cases} P = (-2,-1,1) + t(-1,0,2) \\ x = 2z - 9 \\ y = -2z + 5 \end{cases}$$

$$(2z-9, -2z+5, z) = (-2,-1,1) + t(-1,0,2)$$

$$(2z-9, -2z+5, z) - (-2,-1,1) = t(-1,0,2)$$

$$(2z-7, -2z+6, z-1) = (-t, 0, 2t)$$

$$\begin{cases} 2z - 7 = -t \\ -2z + 6 = 0 \\ z - 1 = 2t \end{cases} \implies \begin{cases} z = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$P = (-2,-1,1) + t(-1,0,2) = (-2,-1,1) + 1 \cdot (-1,0,2) = (-3,-1,3)$$

Logo, o ponto de interseção entre as retas r_3 e r_4 é o ponto $(-3,-1,3)$.

6.2 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Verifique se os pontos $P_1(1,2,3)$ e $P_2(0,-1,2)$ pertencem às retas abaixo:

   (a) $(0,-2,0)+t(0,1,2)$;

   (b) $\begin{cases} x = 3-3t \\ y = 2-t \\ z = 3t \end{cases}$;

   (c) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{-1}$;

   (d) $\begin{cases} y = -x+3 \\ z = 3x \end{cases}$;

2. Qual o ponto $P(2,y,z)$ pertencente à reta determinada pelos pontos $A(3,-1,4)$ e $B(4,-3,-1)$?

3. Determine as equações das retas que passam pelos pontos:

   (a) $A(-2,1,1)$ e $B(0,3,2)$;

   (b) $A(-2,2,1)$ e $B(1,2,2)$;

   (c) $A(0,3,2)$ e $B(1,3,2)$;

   (d) $A(1,2,2)$ e $B(-2,2,1)$;

4. Mostre que os pontos $A(-1,4,-3)$, $B(2,1,3)$ e $C(4,-1,7)$ são colineares.

5. Determine um ponto de referência e o vetor diretor das retas abaixo e em seguida escreva a equação vetorial da reta.

   (a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 2-t \end{cases}$

   (b) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = z$

   (c) $\begin{cases} y = 2x-3 \\ z = -x+2 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} z = 1 \\ x+1 = \dfrac{y-2}{-1} \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} x = 2z-1 \\ y = -1 \end{cases}$

   (f) $x = y = z$

6. Calcule a posição relativa e o ângulo entre as retas a seguir:

   (a) $r: \begin{cases} x = -2t-2 \\ y = 2t \\ z = -4t+3 \end{cases}$ e $s: \dfrac{x}{4} = \dfrac{y+6}{2} = \dfrac{z-1}{2}$;

(b) $r: \begin{cases} y = -2x - 1 \\ z = x + 2 \end{cases}$ e $s: \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{-3};\ x = 2;$

(c) $r: \begin{cases} y = -x + 2 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $s: \ P = (1,2,3) + t(3,2,1);$

(d) $r: \begin{cases} y = x + 2 \\ z = -2x + 1 \end{cases}$ e $s: \ P = (2,1,-2) + t(-2,-2,4);$

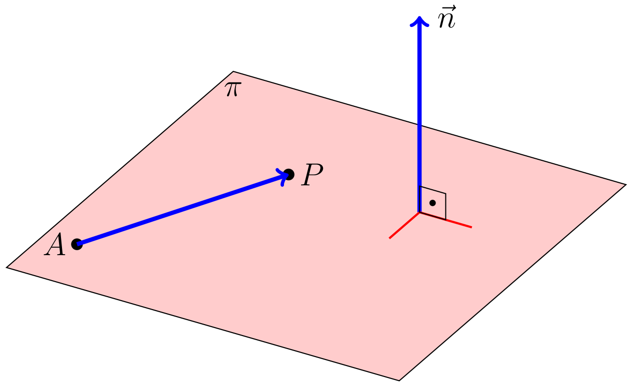
7. Qual a equação da reta que passa pelo ponto $A(3,2,1)$ e é ortogonal simultaneamente às retas $r: \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3 \end{cases};$

6.3 Exercícios Computacionais

1. Escreva um algoritmo que a partir de dois pontos escreve as equações da reta.
2. Escreva um algoritmo que define se três pontos são colineares.
3. Escreva um algoritmo que descreve a posição relativa entre duas retas.
4. Escreva um algoritmo que a partir de três pontos encontre o menor ângulo entre as retas formadas por eles.
5. Escreva um algoritmo que a partir de n pontos encontre o menor ângulo entre as retas formadas por eles.

7 Plano

Para encontrar a equação do plano, assim como na reta, precisaremos de um ponto de referência e um vetor. O ponto de referência é um ponto que pertence ao plano e o vetor é um vetor normal ao plano, ou seja, um vetor ortogonal ao plano. A Figura abaixo mostra o plano π, com um ponto de referência A e um vetor normal $\vec{n}$ e queremos definir qualquer ponto P do plano.



Como o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é ortogonal a qualquer vetor do plano π, podemos definir, considerando o ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e $P = (x, y, z)$.

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(P - A) \cdot \vec{n} = 0$$

$$((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0$$

$$ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0, \quad d = -ax_A - by_A - cz_A$$

A última linha representa a equação geral do plano π.

Exemplo 7.1 *Determine um ponto e o vetor normal do plano* $\pi: \ 3x + 2y - 4z + 6 = 0$.

Solução: O vetor normal pode ser obtido facilmente por meio dos coeficientes que multiplicam x, y e z. Assim $\vec{n} = (3, 2, -4)$. Para obter um ponto qualquer, basta colocar valores para duas coordenadas. Por exemplo, se $y = z = 0$, $x = -2$ satisfaz a equação do plano. Assim $(-2, 0, 0)$ é um ponto do plano π.

Exemplo 7.2 *Qual a equação geral do plano que passa pelos pontos* $A(2, -1, 3)$, $B(3, 2, 1)$ *e* $C(0, -1, -1)$.

Solução: Com três pontos, podemos obter o plano por meio de dois vetores formados entre os pontos. Por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 2, 1) - (2, -1, 3) = (1, 3, -2)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, -1, -1) - (2, -1, 3) = (-2, 0, -4)$$

Dados dois vetores do plano, podemos obter um vetor ortogonal a esses dois vetores usando o produto vetorial. Assim:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$
$$\vec{n} = (-12, 8, 6) = (a, b, c)$$

Podemos usar vetor normal $\vec{n}$ e um dos pontos para encontrar o plano π:

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$-12x + 8y + 6z + d = 0$$

Para encontrar o coeficiente d, podemos usar o ponto $A(2, -1, 3)$:

$$-12 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 3 + d = 0 \Longrightarrow d = -14$$
$$-12x + 8y + 6z - 14 = 0 \quad \div(-2)$$
$$6x - 4y - 3z + 7 = 0$$

7.1 Relações entre planos

Dados dois planos π_1 e π_2 no espaço $\mathbb{R}^3$, podemos obter algumas relações entre eles, por exemplo ângulo, paralelismo, ortogonalidade etc. Para os problemas a seguir, vamos sempre considerar os planos π_1 e π_2 abaixo:

$$\pi_1 : \; a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$\pi_2 : \; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

O plano π_1 tem como vetor normal $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$. O plano π_2 tem como vetor normal $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

Ângulo entre dois planos

Para verificar o ângulo entre dois planos, temos que analisar as direções dos vetores normais dos planos e pegar o menor ângulo entre as duas direções. Assim, considerando os planos π_1 e π_2 e um ângulo θ entre eles, podemos usar a relação de ângulos entre vetores:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

O produto escalar no numerador está em módulo, porque o ângulo entre planos é sempre o menor, e em módulo $0 \leq \theta \leq 90°$.

Planos paralelos

Os planos π_1 e π_2 são paralelos ($\pi_1 \mid\mid \pi_2$) se seus vetores normais possuem a mesma direção. Assim, basta verificar se os vetores normais aos planos são paralelos. Ou seja:

$$\pi_1 \mid\mid \pi_2 \iff \vec{n}_1 \mid\mid \vec{n}_2 \iff\Longrightarrow \vec{n}_1 = \alpha\vec{n}_2$$

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Uma outra maneira de verificar é usar o ângulo entre os vetores. Se o ângulo entre os vetores normais for zero, então a direção dos vetores é a mesma. Entretanto, fazer isso é manual e computacionalmente mais demorado para ser calculado.

Planos ortogonais

Os planos π_1 e π_2 são ortogonais ($\pi_1 \perp \pi_2$) se o ângulo formado entre eles é de 90°. Assim, se o produto escalar dos vetores normais é nulo, então os planos são ortogonais. Ou seja:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

Posições relativas entre planos

No caso de planos, só existem duas possibilidades de posição relativa entre dois planos: (1) paralelos (que também podem ser coincidentes); ou (2) concorrentes (e nesse caso, a interseção é uma reta). O teste mais fácil é verificar então a proporção entre os vetores normais (teste de paralelismo).

Exemplo 7.3 *Calcule a posição relativa entre os planos abaixo, o ângulo entre eles e, se for o caso, a interseção entre eles:*

(a)
$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ 2x + y - z + 6 = 0 \\ \pi_2 &: \ -4x - 2y + 2z = 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ 2x + 3y - z + 6 = 0 \\ \pi_2 &: \ 3x + 6z - 2 = 0 \end{aligned}$$

Solução: **(a)** Primeiro, é importante pegar o vetor normal a cada plano:

$$\vec{n}_1 = (2, 1, -1)$$
$$\vec{n}_2 = (-4, -2, 2)$$

Testando o paralelismo:

$$\alpha = \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} \Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

Portanto, os planos π_1 e π_2 são paralelos e o ângulo entre eles é zero.

(b) Tomando o vetor normal a cada plano:

$$\vec{n}_1 = (2, 3, -1)$$
$$\vec{n}_2 = (3, 0, 6)$$

Testando o paralelismo:

$$\alpha = \frac{2}{3} = \frac{3}{0} = \frac{-1}{6} \Longrightarrow \nexists \alpha$$

E assim, os planos π_1 e π_2 não são paralelos. Para testar os ângulos, precisamos da relação:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$
$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2, 3, -1) \cdot (3, 0, 6) = 0$$

Como o produto escalar é zero, então os vetores normais são ortogonais e o ângulo entre os planos π_1 e π_2 é de $90°$. Por conta disso, os planos são concorrentes.

Como os planos são concorrentes, há uma interseção entre eles. Para encontrar essa interseção, basta colocar os planos no mesmo sistema e colocar as coordenadas em função de uma única, por exemplo a coordenada x:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 6 = 0 \\ 3x + 6z - 2 = 0 \end{cases}$$
$$3x + 6z - 2 = 0 \Longrightarrow 6z = -3x + 2 \Longrightarrow z = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$
$$2x + 3y - z + 6 = 0 \Longrightarrow 3y = -2x + z - 6 = -2x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} - 6$$
$$y = -\frac{5}{6}x - \frac{17}{9}$$
$$\begin{cases} y = -\dfrac{5}{6}x - \dfrac{17}{9} \\ z = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

O último sistema são as equações reduzidas da reta que é a interseção entre os dois planos.

7.2 Equações Paramétricas do Plano

Qualquer ponto P do plano pode ser descrito como um ponto de referência e a combinação de dois vetores não-paralelos. Assim, seja um ponto de referência A e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de direções diferentes. Além disso, considere dois parâmetros $h, t \in \mathbb{R}$. Descrevendo o vetor $\overrightarrow{AP}$ como combinação de $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}$$

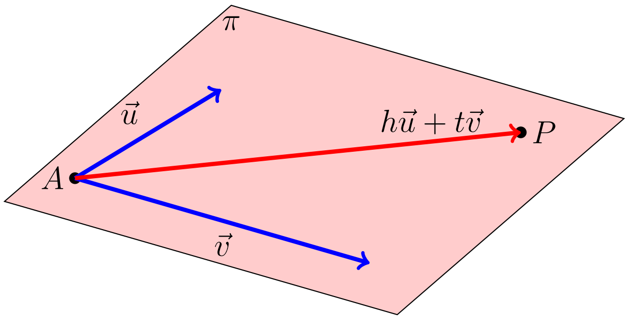
$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + h(x_u, y_u, z_u) + t(x_v, y_v, z_v)$$

$$\begin{cases} x = x_a + hx_u + tx_u \\ y = y_a + hy_u + ty_u \\ z = z_a + hz_u + tz_u \end{cases}$$

A Figura abaixo mostra os vetores no plano π:



As equações paramétricas dependem de dois parâmetros h e t para estabelecer um plano. Esse tipo de equação é muito utilizado para descrição de superfícies, por exemplo planos, parabolóides, elipsóides etc.

7.3 Exercícios

Para alguns exercícios, a dica é usar algum aplicativo matemático para visualizar melhor o problema. Recomendo o Geogebra.

1. Seja o plano $\pi:\ 2x - y + 3z + 1 = 0$. Determine:

   (a) O ponto do plano π que tem abcissa 4 e ordenada 3;

   (b) O ponto do plano π que tem abcissa 1 e cota 2;

   (c) O valor de k para que o ponto $P(2, k+1, k) \in \pi$;

   (d) O ponto de abcissa zero e ordenada o dobro da cota;

   (e) O vetor normal ao plano;

   (f) Dois vetores não-paralelos que pertencem ao plano;

2. Determine a equação geral do plano que:

   (a) Contém o ponto $A(1,2,3)$ e cujo vetor normal $\vec{n} = (2,3,1)$;

   (b) Contém o ponto $A(4,-1,2)$ e é paralelo ao plano $\pi:\ 2x - 3y - z + 5 = 0$;

   (c) Contém o ponto $A(1,2,3)$ e é ortogonal à reta $r:\ \begin{cases} x = 2y - 3 \\ z = -y + 1 \end{cases}$;

   (d) É mediador do segmento $\overline{AB}$, $A(1,-2,6)$ e $B(3,0,0)$;

   (e) É paralelo ao eixo z e contém os pontos $A(0,3,1)$ e $B(2,0,-1)$;

   (f) Contém os pontos $A(-1,2,0)$, $B(2,-1,1)$ e $C(1,1,-1)$;

   (g) Contém os pontos $A(0,0,0)$, $B(0,3,0)$ e $C(0,2,5)$;

   (h) Contém os pontos $A(1,-2,2)$ e $B(-3,1,-2)$ e é ortogonal ao plano $\pi:\ 2x + y - z + 8 = 0$;

   (i) Contém o ponto $A(4,1,0)$ e é ortogonal aos planos $\pi_1:\ 2x - y - 4z - 6 = 0$ e $\pi_2:\ x + y + 2z - 3 = 0$;

   (j) Contém as retas $r:\ \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $s:\ \begin{cases} y = -1 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$;

   (k) Contém o ponto $A(3,-1,2)$ e a reta $r:\ \begin{cases} y = 2 - x \\ z = 3 + 2x \end{cases}$

   (l) Contém o ponto $A(1,-1,2)$ e o eixo z;

3. Determine o ângulo entre os planos abaixo, e se for o caso, a interseção entre eles:

   (a) $\begin{array}{l} \pi_1:\ 2x - 2y + 1 = 0 \\ \pi_2:\ 2x - y - z = 0 \end{array}$

   (b) $\begin{array}{l} \pi_1:\ x - 2y + z + 1 = 0 \\ \pi_2:\ -2x + 4y - 2z = 0 \end{array}$

(c) $\begin{array}{l} \pi_1: \ x - z + 1 = 0 \\ \pi_2: \ x + y + z = 0 \end{array}$

(d) $\begin{array}{l} \pi_1: \ x + 2y + z - 10 = 0 \\ \pi_2: \ 2x + y - z + 1 = 0 \end{array}$

7.4 Exercícios Computacionais

1. Escreva um algoritmo que a partir de três pontos determina a equação do plano;
2. Escreva um algoritmo que a partir de um ponto e dois vetores determina a equação do plano;
3. Escreva um algoritmo que determina a posição relativa de dois planos;
4. Escreva um algoritmo que determina o ângulo entre dois planos;
5. Escreva um algoritmo que determina o ângulo entre um plano e uma reta;
6. Escreva um algoritmo que determina a projeção de um ponto no plano;
7. Escreva um algoritmo que determina a projeção de uma reta em um plano;