

## *Tema 4. Campo Electrostático*

*David Blanco  
Alberto Martín  
Miguel Ángel Rodríguez  
Curso 2012-2013*

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Carga eléctrica</b>	<b>3</b>
2.1. Cuantización de la carga . . . . .	3
2.2. Conservación de la carga . . . . .	4
<b>3. Ley de Coulomb</b>	<b>4</b>
3.1. Fuerza ejercida por un sistema de cargas . . . . .	4
<b>4. Campo electrostático</b>	<b>5</b>
4.1. Campo eléctrico creado por un sistema de cargas . . . . .	5
4.2. Campo eléctrico creado por distribuciones continuas . . . . .	5
4.2.1. Línea infinita . . . . .	7
4.2.2. Anillo . . . . .	9
4.2.3. Disco . . . . .	10
4.3. Fuerza entre dos distribuciones continuas de carga . . . . .	12
<b>5. Ley de Gauss</b>	<b>13</b>
5.1. Flujo del campo eléctrico . . . . .	13
5.2. Enunciado de la Ley de Gauss . . . . .	14
<b>6. Cálculo del campo eléctrico mediante la Ley de Gauss</b>	<b>14</b>
6.1. Geometría cilíndrica . . . . .	14
6.2. Geometría esférica . . . . .	18
6.3. Geometría plana . . . . .	20
<b>7. Potencial y energía potencial electrostáticos</b>	<b>22</b>
7.1. Definición de energía potencial electrostática . . . . .	22
7.2. Definición de potencial electrostático . . . . .	23
7.3. Potencial debido a un sistema de cargas puntuales . . . . .	24
7.4. Potencial debido una distribución de carga . . . . .	24
7.5. Relación entre campo y potencial . . . . .	25
<b>8. Dieléctricos y conductores</b>	<b>26</b>
8.1. Dieléctricos . . . . .	26
8.2. Conductores . . . . .	27
8.3. Apantallamiento de conductores . . . . .	29
8.4. Capacidad . . . . .	31

## 1. Introducción

Desde el tiempo de los egipcios se sabe que al hacer frotar ciertos materiales, como el ámbar, adquieren la propiedad de atraer pequeños cuerpos, como trozos de papel, palitos o plumas. Este fenómeno tan simple es el primero que puso de manifiesto la existencia de una propiedad de la materia que produce fuerzas de largo alcance, tanto repulsivas como atractivas. Esta propiedad es la *carga eléctrica*.

## 2. Carga eléctrica

En la experiencia de frotar cuerpos se observó que dos cuerpos iguales frotados de la misma manera tienden a repelerse, mientras que cuerpos distintos pueden atraerse o repelerse. Se observó que los comportamientos de los cuerpos se podían agrupar en los que repelen a un trozo de plástico frotado con un trozo de piel mientras que atraen a un trozo de vidrio frotado con un paño de seda, y los que hacen lo contrario. Así, este fenómeno se puede explicar mediante la existencia de dos tipos de cargas distintas, de forma que las cargas iguales se repelen y las cargas distintas se atraen. Los cuerpos poseen los dos tipos de cargas pero cuando se frotan puede suceder que unos cedan o adquieran un tipo específico de carga. Los cuerpos que se comportan como la barra de vidrio frotada con seda se dice que se han cargado *positivamente* y los que lo hacen como el plástico frotado con piel, que se han cargado *negativamente*. Esto implicaría que dos cuerpos frotados entre sí no podrían repelerse, lo que se comprueba experimentalmente.

Esta explicación sobre los fenómenos electrostáticos fue propuesta por primera vez por Benjamin Franklin, quien no habló de carga sino de dos tipos de “electricidad”, positiva y negativa, y que los cuerpos en condiciones normales poseen una misma cantidad de estos dos tipos de “electricidad”, lo que se altera mediante frotación.

### 2.1. Cuantización de la carga

Hoy sabemos que el comportamiento descrito anteriormente se debe a la estructura microscópica de la materia, compuesta por átomos que están constituidos a su vez de cargas positivas: protones asociados en un núcleo central con prácticamente toda la masa del átomo, y negativas: electrones que se encuentran moviéndose en la corteza lejos del núcleo y son los únicos que pueden ganarse o perderse en fenómenos de frotación. En condiciones normales, el número de estas cargas es el mismo, y los átomos de unas sustancias y otras se diferencian únicamente en el número de estas cargas y en cómo se asocian entre ellas, pero las cargas en sí son iguales en toda la materia.

Así, la menor carga positiva es el protón, que se notará como  $+e$ , y la menor carga negativa es la del electrón  $-e$ . Al estar compuesta toda la materia de la misma manera, la cantidad de carga que puede existir será un número entero de veces  $e$ . En este sentido se dice que la carga está *cuantizada*.

Aunque estamos utilizando la estructura de los componentes atómicos para explicar la cuantización de la carga es importante notar que tanto dicha cuantización como el valor de  $e$  fueron determinados por Robert Millikan en 1909, antes de que la existencia de partículas subatómicas estuviera completamente aceptada. De hecho, el experimento de Millikan supuso un apoyo experimental a la existencia de los electrones.

El comportamiento de los núcleos de los átomos donde se encuentran los protones se explica a partir de la existencia de unas partículas más pequeñas: los *quarks*, los cuales tienen cargas que son fracciones de  $e$ , tanto positivas como negativas. Por tanto, la carga del electrón o del protón no es la menor que puede existir, al menos dentro de los átomos. No prestaremos atención

a este hecho, ya que la existencia de los fenómenos nucleares no influye en la descripción de los fenómenos electromagnéticos. En cualquier caso, aunque se tuviesen en cuenta, la carga seguiría estando cuantizada, aunque la carga menor sería  $\pm \frac{e}{3}$ .

## 2.2. Conservación de la carga

A partir de la explicación microscópica que hemos expuesto, un cuerpo cargado negativamente lo está porque otro le ha dado electrones, quedando este segundo a su vez cargado positivamente. Así la carga eléctrica se puede mover de unos cuerpos a otros, pero sigue siendo la misma en conjunto. Esto no sólo ocurre cuando dos cuerpos se frotan, sino que sucede lo mismo en procesos de difusión, corrientes eléctricas, reacciones químicas, etc. En todos los procesos la carga que gana un cuerpo es igual a la que pierde otro, por lo que la carga eléctrica permanece constante.

Este principio de conservación de la carga es un hecho experimental que se ha comprobado en todas las ramas de la física.

## 3. Ley de Coulomb

Imaginemos que tenemos dos cargas situadas en el vacío, una  $Q$  y otra  $q$ , entre ellas se establece una fuerza que viene dada por la ley de Coulomb, que resulta:

$$\vec{F} = k \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \quad (1)$$

donde  $r$  es la distancia que separa las dos cargas y  $\hat{r}$  es un versor en la dirección de la línea que une las dos cargas y sentido de la carga  $Q$  a la carga  $q$ . La unidad de carga es el *culombio* y se nota por la letra C, de forma que la carga  $e$  resulta

$$e = 1,602166 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Puede verse que la carga mínima tiene un valor muy pequeño, por lo que, aunque hemos visto que a escala microscópica la carga está cuantizada, a escala macroscópica la carga se podrá tomar como una variable continua.

La constante  $k$  se conoce como constante de Coulomb. En lugar de esta constante se suele utilizar la permitividad eléctrica del vacío  $\epsilon_0$ , que toma un valor de

$$\epsilon_0 = 8,8541878176 \dots 10^{-12} \text{ (Cs)}^2/\text{kg m}^3$$

y se relaciona con la constante de Coulomb como  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . Si  $\vec{r}$  es el vector que tiene como origen la carga  $Q$  y final la carga  $q$ , el versor  $\hat{r}$  se puede escribir como  $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ . Teniendo esto en cuenta, de la ecuación (1), la fuerza que la carga  $Q$  ejerce sobre la carga  $q$  queda:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^3} \vec{r} \quad (2)$$

### 3.1. Fuerza ejercida por un sistema de cargas

Si existe  $N$  cargas  $q_1, \dots, q_N$ , a parte de la carga  $q$ , sobre ésta última cada una de las cargas ejercerá una fuerza que se podrá obtener utilizando la expresión (2). Así, si  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  son los vectores de posición de cada una de las  $N$  cargas y  $\vec{r}$  es el vector de posición de la carga  $q$ , la fuerza total que éstas ejercen sobre la carga  $q$  será:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (3)$$

ya que el vector  $\vec{r} - \vec{r}_i$  es el vector de va desde la carga  $q_i$  a la carga  $q$ , tal y como aparece en la Figura 1.

## 4. Campo electrostático

Para que exista una fuerza eléctrica hace falta una carga que sufra el efecto del resto de las cargas. Si tenemos un conjunto de cargas, y no tenemos carga en el punto  $\vec{r}$ , no existirá fuerza en ese punto, al no existir carga que sufra la fuerza ahí. Sin embargo, las propiedades electrostáticas del espacio en ese punto son distintas a las que habría si no existiera el conjunto de cargas. Esto significa que las cargas que hay en las proximidades de un punto ejercen un tipo de acción sobre el punto, aunque no haya carga en él. Esta acción se conoce con el nombre de *campo electrostático* o *eléctrico*.

### 4.1. Campo eléctrico creado por un sistema de cargas

Como puede verse en la ecuación (3), la fuerza que el conjunto de  $N$  ejerce sobre la carga  $q$  se puede escribir como:

$$\vec{F} = q \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Es decir, que cuando se coloque una carga  $q$  en el punto situado en  $\vec{r}$ , la fuerza se puede expresar como  $\vec{F} = q\vec{E}$ , donde  $\vec{E}$  es una magnitud vectorial que no depende del valor concreto de la carga  $q$ , sino sólo del punto  $\vec{r}$  donde se coloque. Esta magnitud vectorial  $\vec{E}$  se conoce como *campo eléctrico*, y se define para un conjunto de  $N$  cargas como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (4)$$

### 4.2. Campo eléctrico creado por distribuciones continuas

Hasta ahora hemos supuesto que las cargas que producen las fuerzas y los campos electrostático son cargas puntuales, es decir, son infinitamente pequeñas. Sin embargo, en muchos casos los cuerpos que crean los campos tienen un tamaño finito y la carga se encuentra distribuida a lo largo del cuerpo. Esta situación se esquematiza en la Figura 2, en la que aparece un cuerpo de un determinado volumen que se encuentra cargado, lo que también se llama una distribución continua de carga.

Para calcular el campo que crea este cuerpo, se procede a dividir el cuerpo en pequeños trozos iguales, tal y como aparece exagerado en la Figura 2. Imaginemos que dividimos el cuerpo en un total de  $N$  trozos, de forma que el centro del trozo  $i$  se encuentra en la posición  $\vec{r}_i$  y tiene una carga total  $q_i$ . En este caso, el campo que crea la distribución se puede aproximar **como si** fuera un sistema de cargas, que según (4) sería:

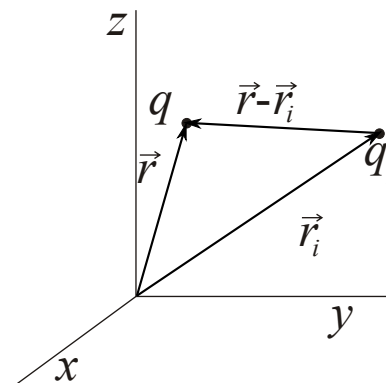


Figura 1: Esquema de vectores

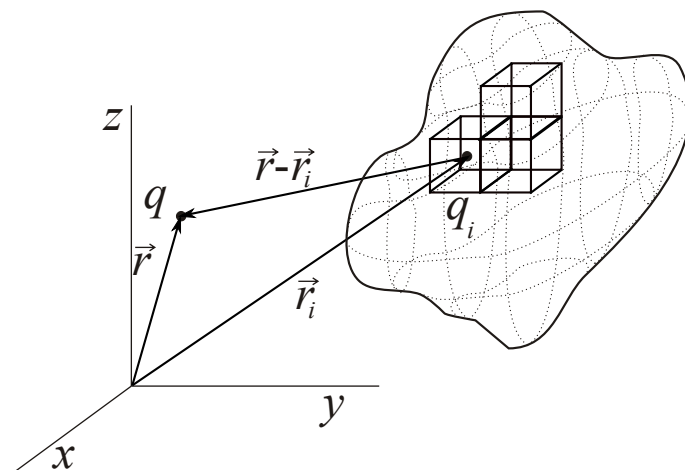


Figura 2: Esquema de una distribución de carga

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Mientras más pequeños sean los trozos, mejor será la anterior aproximación, y mayor será el número total de trozos en los que dividimos el cuerpo. El paso al límite es hacer trozos infinitesimales, es decir, tan pequeños como queramos. En este límite el volumen de cada trozo será  $dV'$ , la carga de cada trozo será  $dq'$  y la posición de cada trozo vendrá dada por el vector de posición  $\vec{r}'$ . La anterior suma se transforma en una integral y la aproximación se convierte en una igualdad, de forma que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (5)$$

Esta integral tiene el significado de sumar muchos trozos infinitesimales cubriendo todo el espacio que ocupa la distribución continua de carga, de forma que lo que varía es el vector  $\vec{r}'$  que recorre todos los puntos de la distribución de carga.

Para poder calcular la integral en (5) hay que expresar la carga de cada trozo infinitesimal  $dq'$  en función de la coordenada de ese trozo  $\vec{r}'$ , que es la variable de la integral. Esto se realiza definiendo la *densidad volúmica de carga*,  $\rho_v$ , que se define como el cociente entre la carga del trozo infinitesimal y el volumen de dicho trozo:

$$\rho_v = \frac{dq'}{dV'}$$

es decir, la derivada de la carga con respecto al volumen. Este concepto es similar al concepto de densidad de un cuerpo, que se define como la derivada de la masa con respecto al volumen (o masa partido por volumen para cuerpos homogéneo). En general, la densidad de carga será distinta de unos trozos infinitesimales a otros, por lo que puede variar al variar  $\vec{r}'$ , lo que se expresa diciendo que la densidad de carga es una función de la posición  $\vec{r}'$  dentro de la distribución que estamos considerando  $\rho_v = \rho_v(\vec{r}')$ . Según la definición de  $\rho_v$ , la carga de cada trozo infinitesimal se puede expresar como  $dq' = \rho_v(\vec{r}')dV'$ , que se puede sustituir en la expresión (5) y queda:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_v(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (6)$$

La expresión (6) es la forma general del campo creado por una densidad volúmica de carga. En ella se ha supuesto que el cuerpo es tridimensional, y por tanto tiene un volumen, lo que no es cierto si el cuerpo es una línea o una superficie. En estos casos, el procedimiento de calcular el campo sería idéntico al realizado con anterioridad, pero no se puede definir una densidad volúmica de carga, sino que hay que definir una *densidad lineal de carga*  $\rho_l$ , para cuerpos lineales, y una *densidad superficial de carga*  $\rho_s$ , para superficies. La magnitud  $\rho_l$  se define como la derivada de la carga de un trozo infinitesimal con respecto a la longitud de dicho trozo, mientras que  $\rho_s$  se define como la derivada de la carga de un trozo infinitesimal con respecto a la superficie de dicho trozo. Con estas definiciones, el campo que crea un cuerpo superficial (de dos dimensiones) será:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (7)$$

donde la integral recorre toda la superficie del cuerpo. El campo que crea un cuerpo lineal (de una dimensión) será:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\rho_l(\vec{r}') dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (8)$$

donde la integral recorre toda la longitud del cuerpo.

Antes de pasar a estudiar ejemplos concretos, cabe recordar el significado de cada uno de los dos vectores de posición,  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ , con los que se está trabajando. El vector  $\vec{r}$  indica la posición del punto donde se quiere calcular el campo, y se conoce como *punto campo*. El vector  $\vec{r}'$  indica la posición de un trozo infinitesimal (un punto) del cuerpo del cual se quiere calcular el campo que produce en  $\vec{r}$ , y se conoce como *punto fuente*. En la integral se recorren todos los puntos fuente, siendo este la variable de integración, mientras que el punto campo permanece fijo y es por tanto una constante dentro de la integral.

#### 4.2.1. Línea infinita

La primera distribución continua de carga que se va a estudiar es la de un hilo recto infinito y homogéneo, de densidad lineal de carga  $\rho_l$  (será constante al ser el hilo homogéneo). Hacemos coincidir la línea con el eje  $z$ , tal y como aparece en la Figura 3. Para poder aplicar la ecuación (8), que hay identificar cada uno de los elementos que aparecen en la integral. Para ello en la Figura 3 se ha señalado un pequeño trozo del hilo, que se supone infinitesimal (diferencial). Se puede ver en la figura que este trozo se encuentra en una posición  $\vec{r}' = z'\hat{k}$ , y que tiene una longitud  $dl' = dz'$ . El punto  $\vec{r}$  donde se quiere calcular el campo es un punto cualquiera, por lo que se puede expresar en función de sus componentes cartesianas como

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

El vector  $\vec{r} - \vec{r}'$  queda por tanto:

$$\vec{r} - \vec{r}' = x\hat{i} + y\hat{j} + (z - z')\hat{k}$$

y su módulo:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}$$

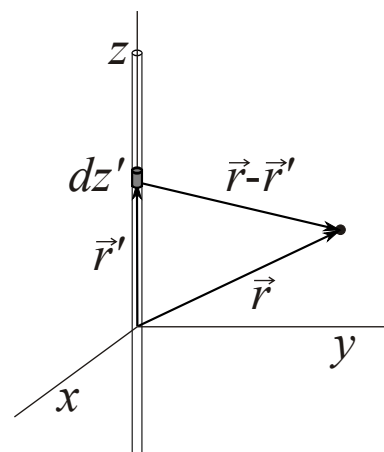


Figura 3: Esquema de un hilo cargado

Con todo esto, y teniendo en cuenta que la densidad de carga lineal  $\rho_l$  es constante, la expresión (8) queda:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} (x\hat{i} + y\hat{j} + (z - z')\hat{k}) \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left( (x\hat{i} + y\hat{j}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} + \hat{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z - z')dz'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} \right)\end{aligned}\quad (9)$$

Las integrales recorren todas los posibles valores de  $z'$ , por lo que, como el hilo es infinito, va desde menos infinito a más infinito. Para obtener el campo hay que realizar las anteriores integrales, la segunda de las cuales es cero, mientras que la primera es igual a  $\frac{2}{x^2 + y^2}$ . Con esto, la expresión del campo que crea un hilo infinito uniforme coincidiendo con el eje  $z$ , en cualquier punto del espacio es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2} \quad (10)$$

**Cálculo de las integrales:** Comencemos con la primera de las integrales de (9):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} = \left| \begin{array}{l} z - z' = u \\ -dz' = du \\ a^2 = x^2 + y^2 \end{array} \right| = - \int_{\infty}^{-\infty} \frac{du}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En las tablas de integrales se encuentra que:

$$\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 + u^2}}$$

que evaluado en los límites de la integral produce la primera de las integrales de (9). Desahaciendo los cambios cuando sea necesario se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

La segunda de las integrales de (9) es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z - z')dz'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} = \left| \begin{array}{l} z - z' = u \\ -dz' = du \\ a^2 = x^2 + y^2 \end{array} \right| = - \int_{\infty}^{-\infty} \frac{udu}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{udu}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Esta integral consiste en la integrar de una función impar (es decir,  $f(-x) = -f(x)$ ) en un intervalo par, por lo que el resultado es cero. Para comprobar explícitamente este resultado no hay más que dividir el intervalo de integración en dos trozos: uno de menos infinito a cero y otro de cero a infinito. Así, la integral quedaría:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{udu}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^0 \frac{udu}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\infty} \frac{udu}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = - \int_0^{\infty} \frac{udu}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\infty} \frac{udu}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Si en la primera integral se realiza el cambio  $u = -t$ . y por tanto  $du = -dt$ , se tendría:

$$- \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\infty} \frac{udu}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Con lo que se han calculado las dos integrales que aparecen en (9). ■



En la expresión (10) se puede observar cómo el campo que produce el hilo no tiene componente  $\hat{k}$ , es decir es perpendicular al hilo. Para poder apreciar la dirección y la dependencia del vector  $\vec{E}(\vec{r})$ , se define  $\rho$  como la distancia del punto al hilo (no confundir esta distancia con las densidades volúmicas, superficiales o lineales de carga  $\rho_v$ ,  $\rho_s$  y  $\rho_l$ ), que en este caso es el eje  $z$ . Por lo tanto la expresión de  $\rho$  en función de las componentes cartesianas del punto será:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (11)$$

Así, la expresión (10) quedaría:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{\rho^2}$$

Pero el vector  $x\hat{i} + y\hat{j}$  tiene módulo  $\rho$ , por lo que se puede definir un versor  $\hat{\rho}$  (que aparece representado en la Figura 4) como:

$$\hat{\rho} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{\rho} \quad (12)$$

y con él se obtiene la expresión más habitual del campo que crea un hilo en cualquier punto del espacio, que es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_l}{2\pi\rho\epsilon_0} \hat{\rho} \quad (13)$$

Por tanto, el campo que crea una distribución lineal de carga en cualquier punto del espacio es inversamente proporcional a la distancia que existe entre el punto y el hilo y lleva como dirección la línea que une el hilo con el punto.

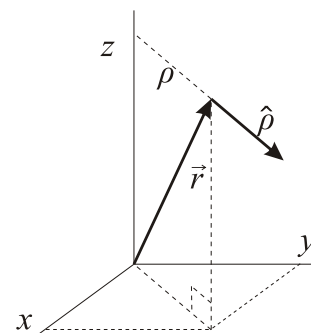


Figura 4: Esquema de  $\rho$  y el versor  $\hat{\rho}$

#### 4.2.2. Anillo

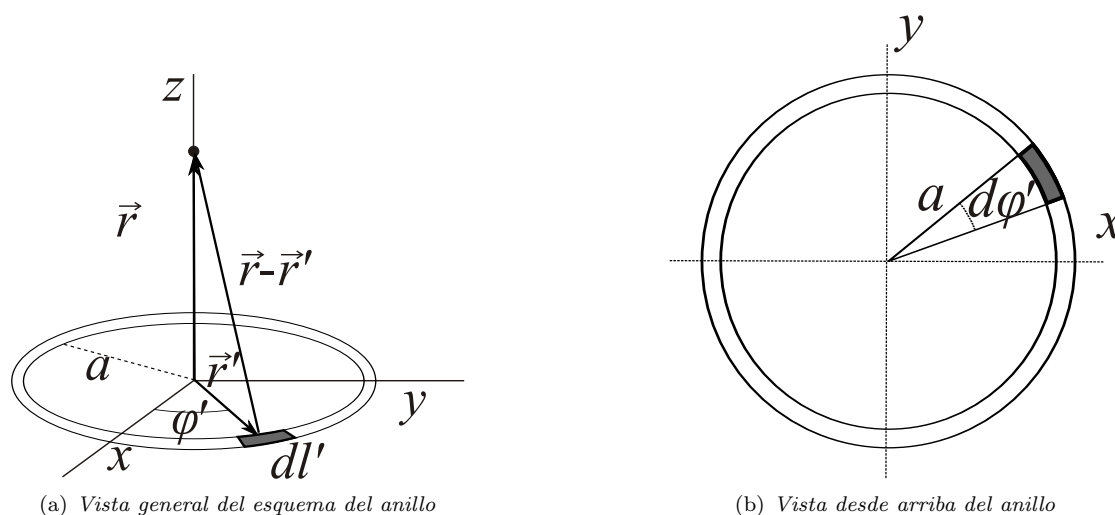


Figura 5: Esquema de un anillo cargado

Se estudia a continuación una distribución lineal de carga en forma de anillo homogéneo de radio  $a$ , tal y como aparece en la Figura 5(a). Lo que se pretende es calcular el campo que esta distribución de carga crea en cualquier punto de su eje. En la Figura 5(a) se presenta un esquema general de la situación, donde se identifica un pequeño trozo diferencial de la distribución. Al igual que en el caso anterior, para poder aplicar la ecuación (8), hay identificar cada uno de los elementos que aparecen en la integral. De la Figura 5 se puede ver que el vector de posición de cualquier punto del eje se puede expresar como  $\vec{r} = z\hat{k}$ , y el vector de posición del trozo señalado es  $\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j}$ , con  $x'^2 + y'^2 = a^2$ , con lo que:

$$\vec{r} - \vec{r}' = -x'\hat{i} - y'\hat{j} + z\hat{k}$$

y su módulo:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2} = \sqrt{a^2 + z^2}$$

El ángulo  $\varphi'$  es el ángulo que la línea que une el centro del anillo y el trozo subtende con el eje  $x$ . El trozo es un pequeño arco de una circunferencia, por lo que su longitud será igual al radio por el ángulo subtendido entre sus extremos, que en este caso se denomina  $d\varphi'$  y aparece en la Figura 5(b), es decir,  $dl' = ad\varphi'$ . Si se tiene en cuenta que la densidad lineal de carga  $\rho_l$  es constante, y teniendo en cuenta los anteriores resultados, la expresión (8) queda:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{ad\varphi'}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (-x'\hat{i} - y'\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{\rho_la}{4\pi\epsilon_0(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi' (-x'\hat{i} - y'\hat{j} + z\hat{k}) \\ &= \frac{\rho_la}{4\pi\epsilon_0(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left( -\int_0^{2\pi} d\varphi' x'\hat{i} - \int_0^{2\pi} d\varphi' y'\hat{j} + \int_0^{2\pi} d\varphi' z\hat{k} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Para realizar la integral hay que expresar las coordenadas  $x'$  e  $y'$  del trozo en función del ángulo  $\varphi'$ , lo que es muy fácil de hacer, ya que  $x' = a \cos \varphi'$  e  $y' = a \sin \varphi'$ . Con esto las dos primera integrales de (14) quedarían:

$$\int_0^{2\pi} a \cos \varphi' d\varphi' \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} a \sin \varphi' d\varphi'$$

y es fácil de comprobar que ambas integrales son nulas (se deja como tarea propuesta). Por otro lado, la tercera integral resulta:

$$\int_0^{2\pi} z d\varphi' = z \int_0^{2\pi} d\varphi' = 2\pi z$$

Una vez obtenidas estas ecuaciones se puede obtener el valor final del campo que crea el anillo cargado en cualquier punto de su eje, y resulta:

$$\vec{E}(z) = \frac{z\rho_la}{2\epsilon_0(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \quad (15)$$

#### 4.2.3. Disco

A continuación se estudia el campo que un disco homogéneo de radio  $a$  crea en cualquier punto de su eje. El esquema de la situación se encuentra en la Figura 6(a), donde se señala un

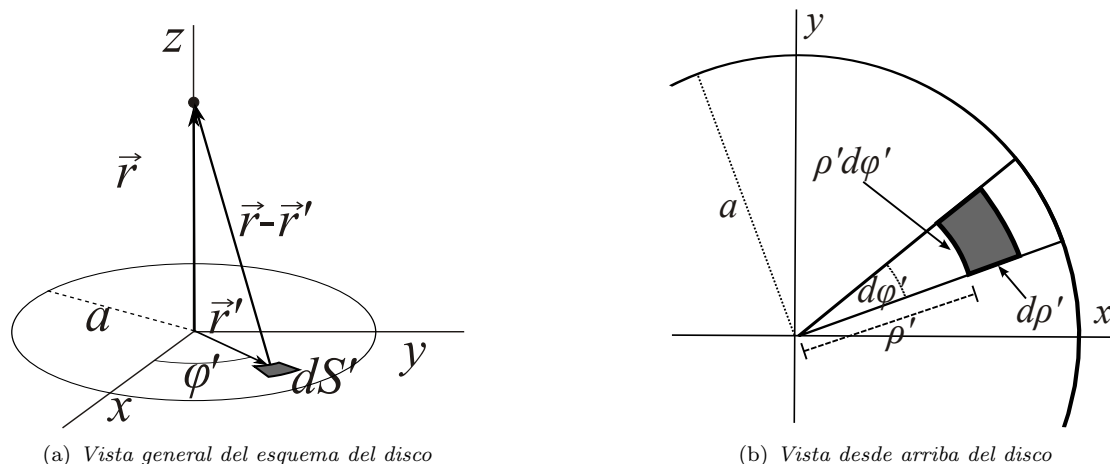


Figura 6: Esquema de un disco cargado

trozo diferencial de disco. Puede verse que  $\vec{r} = z\hat{k}$ , y el vector de posición del trozo señalado es  $\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j}$ . Con esto se tiene:

$$\vec{r} - \vec{r}' = -x'\hat{i} - y'\hat{j} + (-z)\hat{k}$$

y su módulo:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}$$

En este caso, la distancia del centro del disco variará de unos trozos a otros (en el anillo era la misma para todos los trozos), y si a esta distancia se le llama  $\rho'$  (de forma similar a (11)) en función de las coordenadas del trozo será:

$$\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

con lo que el módulo  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  queda:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\rho'^2 + z^2}$$

y las coordenadas del trozo serán  $x' = \rho' \cos \varphi'$  e  $y' = \rho' \sin \varphi'$ .

La forma concreta del trozo elegido aparece en la Figura 6(b), donde también aparece la distancia del trozo al eje  $\rho'$  y el ángulo diferencial  $d\varphi'$  que subtiende los dos lados del trozo que coinciden con trozos de radios del disco. El lado del trozo que mira hacia el centro es un pequeño arco de una circunferencia de radio  $\rho'$ , por lo que tendrá una longitud  $\rho' d\varphi'$ . Los lados que coinciden con trozos de radios del disco tendrán una longitud  $d\rho'$ . Si el trozo es pequeño se podrá considerar prácticamente como un rectángulo y la superficie del trozo será  $dS' = \rho' d\rho' d\varphi'$ . Si todo esto se sustituye en (7) se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (-\rho' \cos \varphi' \hat{i} - \rho' \sin \varphi' \hat{j} + z\hat{k}) \\ &= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_0^a \frac{-\rho'^2 d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi' (\cos \varphi' \hat{i} + \sin \varphi' \hat{j}) + z\hat{k} \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Es fácil ver que las dos primeras integrales son nulas, ya que implican integrar el seno y el coseno entre 0 y  $2\pi$ . En la tercera integral, la integral del ángulo entre 0 y  $2\pi$  es igual a  $2\pi$ , y faltaría integrar la parte de  $\rho'$ . Esta integral es:

$$\int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \left| \frac{\rho'^2 + z^2 = u}{\rho' d\rho' = \frac{du}{2}} \right| = \frac{1}{2} \int_{z^2}^{a^2+z^2} u^{-\frac{3}{2}} du = \left( \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

Las integrales se sustituyen en (16) y se obtiene el campo que crea un disco en cualquier punto del eje:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{k} \quad (17)$$

Se puede comprobar que el cociente  $\frac{z}{|z|}$  es en realidad el signo de  $z$  (+ ó -).

Para terminar, sólo mencionar que la ecuación (17) se puede utilizar para obtener el campo que crea un plano infinito cargado uniformemente con una densidad de carga  $\rho_s$ . Para ello no hay más que utilizar que un plano infinito se puede ver como un disco muy grande, de radio infinito. Por esto, para obtener el campo que crea un plano infinito cargado no hay más que hacer el límite  $a \rightarrow \infty$  en la expresión (17), con lo que se obtiene:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{k} \quad (18)$$

Esta expresión para el campo que crea un plano infinito cargado se volverá a obtener en la Sección 6.3, utilizando la Ley de Gauss que se estudia en la Sección 5.

### 4.3. Fuerza entre dos distribuciones continuas de carga

El concepto de campo electrostático se ha introducido para separar en una interacción electromagnética la parte de dicha interacción que “crea” la fuerza, de la parte de la interacción que “recibe” la fuerza. Así, una distribución de carga, discreta o continua, crea un campo  $\vec{E}(\vec{r})$  en cada punto del espacio  $\vec{r}$ , y si en dicho punto se coloca una carga puntual  $q$ , la fuerza que sufre sería

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$$

Nos queda por estudiar cuál sería la fuerza que sufre una distribución **continua** de carga, con densidad de carga  $\rho_v(\vec{r})$ , si se coloca dentro del campo  $\vec{E}$  creado por otra distribución de carga. La obtención de esta fuerza es sencilla, sin más que repetir el proceso que seguimos para obtener el campo que crea una distribución continua de carga. Este proceso consiste en dividir la distribución continua de carga que sufre la fuerza en trozos muy pequeños (diferenciales). Si nos fijamos en sólo uno de los trozos, tendrá volumen diferencial  $dV$  y se encontrará en un punto del espacio dado por  $\vec{r}$ , donde existe un campo electrostático  $\vec{E}(\vec{r})$ . La carga de este trozo  $dq$  (es diferencial) dependerá de la densidad de carga  $\rho_v$  que exista en el trozo, de forma que:

$$dq = \rho_v(\vec{r})dV$$

Es conveniente notar que aunque se hagan todos los trozos de igual tamaño, la densidad de carga puede variar de unos puntos a otros, por lo que la carga de cada uno de los trozos puede ser distinta. La fuerza que sufre el trozo  $d\vec{F}$  (es diferencial) será:

$$d\vec{F} = \vec{E}(\vec{r})dq = \vec{E}(\vec{r})\rho_v(\vec{r})dV$$

es decir, la carga del trozo por el campo eléctrico que existe en el punto donde se encuentra el trozo. Para calcular la fuerza total que sufre la distribución continua de carga no hay más que

sumar las fuerzas que sufren cada uno de los trozos de esta distribución. Como los trozos son diferenciales, esta suma es una integral, que queda:

$$\vec{F} = \int_V \vec{E}(\vec{r}) \rho_v(\vec{r}) dV$$

## 5. Ley de Gauss

La Ley de Gauss es un resultado matemático que aparece debido a la dependencia del tipo  $\frac{1}{r^2}$  que aparece en ley de fuerzas de Coulomb. Este resultado se puede por tanto extender a cualquier tipo de fuerza que decaiga como el cuadrado de la distancia, lo que también ocurre para la fuerza gravitacional y la fuerza magnetostática.

### 5.1. Flujo del campo eléctrico

La ley se enuncia en términos de flujo del campo electrostático a través de una superficie cerrada, por lo tanto primero se debe estudiar el concepto de flujo, que se corresponde con el concepto coloquial de flujo de un fluido por una tubería, por ejemplo.

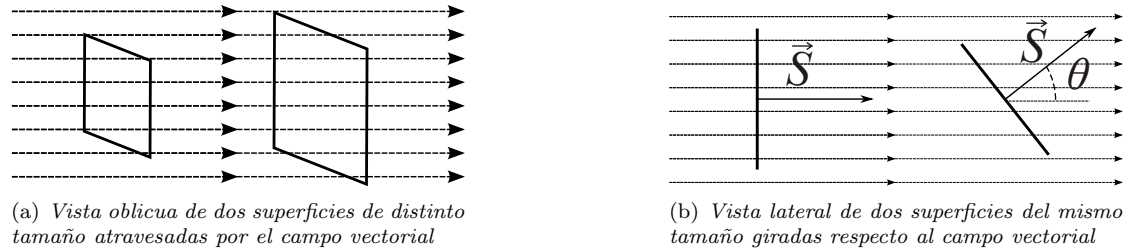


Figura 7: *Flujo de un campo vectorial a través de distintas superficies*

El flujo se puede calcular para cualquier magnitud vectorial, y se define como la cantidad de magnitud que atraviesa una determinada superficie. En la Figura 7 se representa un campo de una magnitud vectorial, que puede ser el campo electrostático o un campo de velocidades, atravesando distintas superficies. Como puede verse en la Figura 7(a), mientras mayor sea la superficie, mayor será la cantidad de campo que la atraviesa. En la Figura 7(b) se observa que la cantidad de campo que atraviesa la superficie no sólo depende del tamaño de ésta, sino también de la inclinación de la superficie, ya que si la superficie subtiende un ángulo  $\theta$  con el campo, éste no “ve” una superficie  $S$ , sino una superficie  $S \cos \theta$ . Tal y como se observa en la Figura 7(b) se puede definir un vector  $\vec{S}$ , que tenga en cuenta el valor del área y la inclinación de ésta. Por tanto, el flujo  $\Phi$  de un campo constante  $\vec{a}$  a través de una superficie plana  $S$ , formando un ángulo  $\theta$  entre ellos, será:

$$\Phi = aS \cos \theta = \vec{a} \cdot \vec{S} \quad (19)$$

Para superficies que no sean constantes o campos variables, hay que dividir la superficies en trozos muy pequeños donde el campo  $\vec{a}$  se pueda considerar constante y donde la superficie se pueda considerar plana. Esta situación aparece esquematizada en la Figura 8. Para calcular el flujo que atraviesa la superficie diferencial  $d\vec{S}$  se puede hacer lo mismo que en (19), obteniéndose:

$$d\Phi = \vec{a} \cdot d\vec{S}$$

y el flujo total a través de toda la superficie  $S$  será la suma de los flujos diferenciales a través de las superficies diferenciales, lo que implica una integral a través de toda la superficie. De esta forma, el flujo de un vector  $\vec{a}$  a través de una superficie se define como:

$$\Phi = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad (20)$$

El flujo se puede calcular para cualquier magnitud vectorial y a través de cualquier superficie que se quiera definir, y dependiendo de esto el flujo tendrá un sentido u otro. Por ejemplo, si la magnitud  $\vec{a}$  es la velocidad de un fluido el flujo es el caudal (volumen de fluido que atraviesa por segundo una superficie), mientras que si  $\vec{a}$  es la densidad de corriente (se estudiará en el próximo tema) el flujo es la intensidad de corriente (carga por unidad de tiempo que atraviesa una superficie).

## 5.2. Enunciado de la Ley de Gauss

El enunciado de la Ley de Gauss en electrostática indica que el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga total encerrada en esa superficie, dividida por  $\epsilon_0$ . Utilizando la ecuación (20), la Ley de Gauss queda como:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \quad (21)$$

donde el círculo en el símbolo de la integral indica que la superficie a través de la cual se calcula el flujo es cerrada, y  $Q_S$  se utiliza para notar la carga total encerrada en esa superficie  $S$ .

La primera consecuencia de (21) es que si no hay carga dentro de una superficie cerrada, el flujo de campo eléctrico que entra es igual a la que sale. Esta ley se puede demostrar de varias formas, pero en cualquier caso requiere conceptos y conocimientos matemáticos superiores a los vistos en cálculo, por lo que no se demostrará.

# 6. Cálculo del campo eléctrico mediante la Ley de Gauss

Para poder utilizar la Ley de Gauss, hay que ser capaz de calcular el término izquierdo de (21) de forma sencilla, para lo que hay que tener en cuenta que la superficie cerrada a través de la cual se calcula el flujo puede ser cualquiera que convenga. Esta superficie es una superficie **matemática** que se construye para aplicar la ley, pero no tiene porqué ser una superficie **real**, como sería el borde de un objeto. Así, se puede elegir la superficie que más convenga según la geometría del problema. A continuación se tratan las tres geometrías más importantes en las cuales es posible utilizar la Ley de Gauss para obtener el campo electrostático. Es importante destacar que aunque la Ley de Gauss es siempre cierta no siempre es una herramienta útil para calcular el campo electrostático, sólo lo es cuando el problema presenta alguna de las tres simetrías que se presentan a continuación.

## 6.1. Geometría cilíndrica

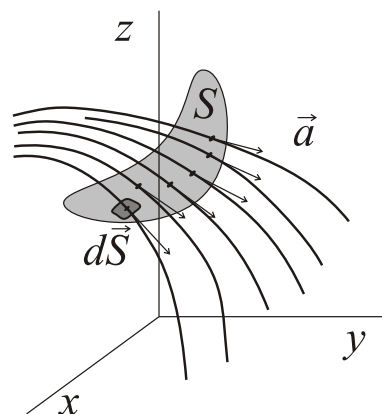


Figura 8: Flujo a través de una superficie curva de un vector  $\vec{a}$  que no es constante

Cuando los cuerpos cargados son hilos o cilindros rectos infinitos, el problema tiene *simetría cilíndrica*, lo que quiere decir que si nos movemos siempre a una misma distancia del eje del sistema, subiendo o bajando o girando entorno al eje, el problema que “vemos” será siempre el mismo, y el problema sólo cambiará al acercarnos o alejarnos del eje. En estos casos, el módulo del campo será una función exclusivamente de la distancia al eje del sistema, que en la ecuación (11) se notó como  $\rho$ . Así el módulo cumplirá que  $E = E(\rho)$ .

Para ver la dirección que llevará el vector  $\vec{E}$ , se esquematiza la situación en la Figura 9, donde se presenta el esquema general de una distribución cilíndrica maciza de carga infinita en la que se ha elegido el eje  $z$  coincidiendo con el eje del sistema cilíndrico. Esta situación también es válida para un hilo recto infinito, cilindro hueco, etc, en general para cualquier problema que presente la simetría cilíndrica de la que estamos hablando. Para poder deducir la dirección del vector  $\vec{E}$  en el punto  $\vec{r}$ , se estudia el campo eléctrico que producen pequeñas porciones de la distribución de carga, ya que el campo eléctrico total será la suma de las contribuciones individuales. En la Figura 10(a) se toman dos trozos iguales de cilindro en el plano perpendicular al eje y que contiene el punto  $\vec{r}$ , de forma que subtienden el mismo ángulo con la línea que une el punto y el eje, pero en sentidos contrarios. Se esquematiza la dirección que tendrían los campos que crean cada uno de los dos trozos, que tienen el mismo módulo al ser los trozos iguales y estar a la misma distancia, y se observa cómo la suma de los dos campos individuales lleva la dirección de la línea que une el punto y el eje. Lo mismo sucede para puntos por encima y por debajo de la citada línea y en el plano que incluye al eje y al punto  $\vec{r}$ , tal y como se esquematiza en la Figura 10(b), produciendo también que la suma de los dos campos creados por cada uno de los trozos lleva la dirección de la línea que une el eje y el punto. Para un trozo de cilindro que esté fuera de los planos descritos es fácil ver que se pueden encontrar otro trozo como se muestra en la Figura 10(c), de forma que la suma de las contribuciones va en la misma dirección de los casos

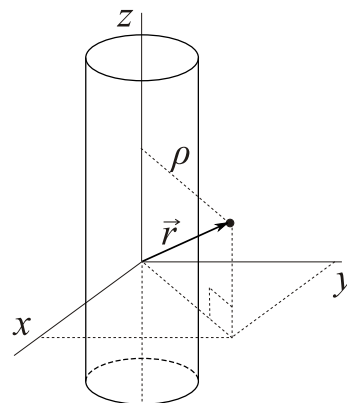


Figura 9: Vista general del esquema del cilindro cargado

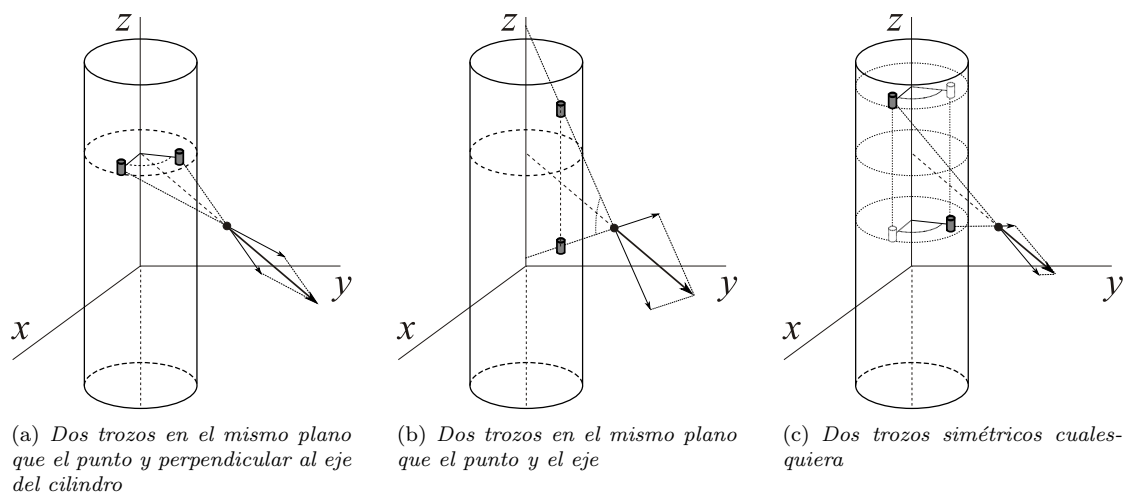


Figura 10: Esquema de un cilindro cargado

estudiados antes.

Por todo esto, se puede deducir que el vector  $\vec{E}$  en un punto  $\vec{r}$  lleva la dirección de la línea que une el punto con el eje. El versor en esta dirección se llamó  $\hat{\rho}$ , que se definió en (12) y se esquematizó en la Figura 4.

Uniendo los dos últimos resultados, sabemos que en un problema con simetría cilíndrica, el campo electrostático  $\vec{E}$  en un punto  $\vec{r}$  tendrá una forma:

$$\vec{E} = E(\rho)\hat{\rho} \quad (22)$$

lo que significa que el módulo sólo depende de la distancia al eje y su dirección es la de la línea que une el punto y el eje.

Una vez que sabemos la dirección del campo electrostático en cada punto y cómo varía su módulo, se puede construir una superficie apropiada para aplicar la Ley de Gauss y calcular el campo. Esta superficie será de tal forma que el flujo a través de ella se pueda calcular fácilmente. En el caso de geometría cilíndrica, la superficie de integración que tomamos es un cilindro de radio  $\rho$ , altura  $H$  con el eje del sistema coincidiendo con el eje  $z$ . Esta superficie de integración se representa en la Figura 11, donde aparece sombreada. Así, si se desea saber cuál es el campo electrostático en un punto  $\vec{r}$ , se construye un cilindro de altura  $H$  de forma que el punto en cuestión se encuentre contenido en la pared del cilindro. Para que esto suceda, el radio  $\rho$  del cilindro tiene que ser  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , donde  $x$  e  $y$  son las componentes del vector  $\vec{r}$  en los correspondientes ejes.

Para aplicar la Ley de Gauss, hay que calcular cuánto sería el flujo del campo electrostático a través de todo el cilindro que hemos construido. Para calcular este flujo primero se tiene en cuenta la forma de  $\vec{E}$  que se ha deducido para esta geometría y que está recogida en (22). Según esto:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E(\rho)\hat{\rho} \cdot d\vec{S}$$

A continuación se separa la contribución de cada una de las superficies del cilindro, de forma que el flujo total será igual a la suma de los flujos a través de cada una de estas superficies:

$$\oint_S E(\rho)\hat{\rho} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Base de arriba}} E(\rho)\hat{\rho} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Base de abajo}} E(\rho)\hat{\rho} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Pared}} E(\rho)\hat{\rho} \cdot d\vec{S}$$

Sin embargo, el vector  $d\vec{S}$  en cualquier trozo pequeño de la base de arriba o de la base de abajo lleva dirección  $\hat{k}$  (sentido hacia arriba o hacia abajo dependiendo de la base que se considere), mientras que el vector  $\hat{\rho}$  siempre permanece en el plano  $xy$ , como puede verse en la Figura 4. Por lo tanto, para cualquiera de las dos bases  $\hat{\rho} \cdot d\vec{S} = 0$  y el flujo del campo eléctrico a través de estas bases es cero. Por otro lado, en cualquier pequeño trozo de la pared, el vector  $d\vec{S}$  lleva dirección perpendicular a la pared del cilindro, que corresponde con el versor  $\hat{\rho}$  en ese punto. Así, para cualquier pequeño trozo de la pared del cilindro el producto escalar resulta  $\hat{\rho} \cdot d\vec{S} = dS$ . Con esto el flujo a través de todo el cilindro queda:

$$\oint_S E(\rho)\hat{\rho} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Pared}} E(\rho)\hat{\rho} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Pared}} E(\rho)dS$$

Pero todos los trozos de la pared se encuentran a la misma distancia  $\rho$  del eje del sistema, por lo que  $E(\rho)$  es una constante en la integral, que puede salir. Así el flujo a través de todo el cilindro queda:

$$E(\rho) \int_{\text{Pared}} dS = E(\rho)2\pi\rho H$$



La Ley de Gauss para el caso de geometría esférica quedaría:

$$E(\rho)2\pi\rho H = \frac{Q_S}{\varepsilon_0} \quad (23)$$

donde  $Q_S$  es la carga encerrada dentro de la superficie cilíndrica de integración que hemos construido. Para poder calcular  $Q_S$  habrá que tener en cuenta la distribución cilíndrica de carga concreta con la que se está trabajando, pero una vez calculada, el módulo del campo en cualquier punto  $\vec{r}$  se obtiene en función del valor  $\rho$  del punto sin más que despejar en (23) el campo.

Para terminar este apartado se presentan dos ejemplos de cálculo de campo para sistemas de simetría cilíndrica.

**Ejemplo: Línea recta infinita uniformemente cargada.** El campo que genera una distribución lineal recta cargada con densidad lineal de carga  $\rho_l$  constante se estudió en la Sección 4.2.1. En este ejemplo se obtendrá el mismo campo, pero utilizando la Ley de Gauss. Este sistema tiene simetría cilíndrica, por lo que la Ley de Gauss toma la forma (23), en la que hay que calcular la carga encerrada por la superficie cilíndrica de integración, lo cual se representa en la Figura 12(a). Como puede verse, la carga encerrada en el cilindro de integración será igual a la carga que tenga el trozo de hilo que está dentro del cilindro. Como la densidad lineal de carga es constante, esta carga será igual a  $\rho_l$  por la longitud del trozo de hilo, que en este caso es igual a la altura del cilindro  $H$ . Por tanto  $Q_S = \rho_l H$  y la ecuación (23) queda:

$$E(\rho)2\pi\rho H = \frac{\rho_l H}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(\rho) = \frac{\rho_l}{2\pi\rho\varepsilon_0}$$

Una vez que se tiene la expresión del módulo se utiliza (22) y se tiene:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_l}{2\pi\rho\varepsilon_0} \hat{\rho}$$

que es idéntico al campo que se obtuvo en (13), como era de esperar.

**Ejemplo: Cilindro indefinido de radio  $a$  uniformemente cargado (densidad volúmica de carga  $\rho_v$  constante).** Este sistema también presenta una simetría cilíndrica y ha sido el que se ha utilizado para la representación gráfica del problema genérico en las figuras 9, 10 y 11. Al igual que en el ejemplo anterior, hay que calcular la carga encerrada por la superficie cilíndrica de integración  $Q_S$ , para poder utilizar la ecuación (23) y obtener el campo. Sin embargo, existe una diferencia con el ejemplo anterior, ya que existen dos posibles situaciones, dependiendo de si se calcula el campo dentro o fuera del cilindro cargado. Vamos a estudiar estas dos situaciones por separado.

Primero estudiamos la situación en la que nos interesa calcular el campo en un punto  $\vec{r}$  externo ( $\rho > a$ ). En este caso tomamos como superficie de integración un cilindro de altura  $H$  que contenga al punto en su superficie exterior, tal y como aparece en la Figura 11. En este caso, existe carga dentro de la superficie de integración únicamente en el trozo de cilindro cargado de altura  $H$ , por lo que gran parte del volumen que encierra la superficie de integración carece de carga. Esta carga será igual al volumen de dicho trozo de cilindro cargado por la densidad volúmica de carga, es decir:

$$Q_S = \rho_v \pi a^2 H$$

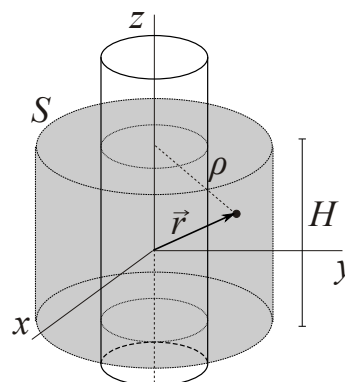


Figura 11: Superficie de integración en geometría cilíndrica

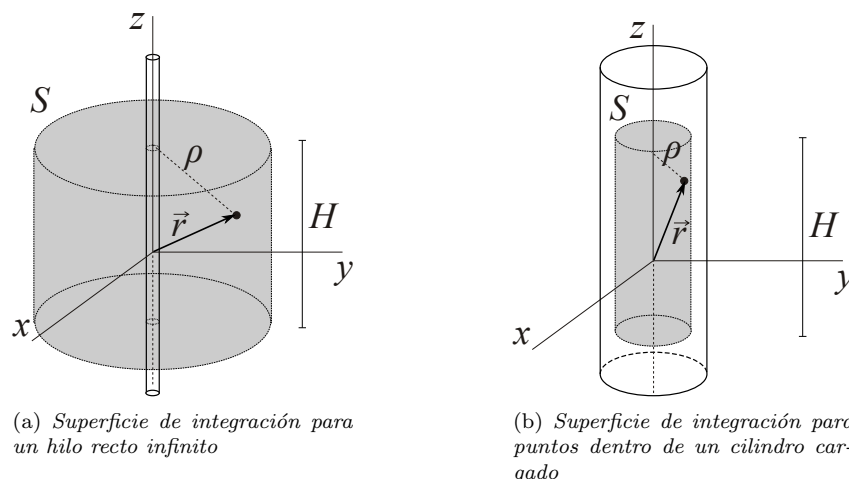


Figura 12: Superficies de integración para sistemas con geometría cilíndrica

En el caso de que queramos calcular el campo en un  $\vec{r}$  interno al cilindro cargado ( $\rho \leq a$ ), se toma como superficie de integración otro cilindro de altura  $H$ , con el punto  $\vec{r}$  en la superficie externa del mismo, y por tanto contenido por completo dentro del cilindro cargado, tal y como aparece en la Figura 12(b). Ahora existirá carga en todo el volumen encerrado por la superficie de integración, por lo que la carga que encierra es igual a la densidad de carga por el volumen del cilindro:

$$Q_S = \rho_v \pi \rho^2 H$$

La carga encerrada se sustituye en la ecuación (23) y se tiene:

$$E(\rho) 2\pi \rho H = \begin{cases} \frac{\rho_v \pi a^2 H}{\varepsilon_0} & \text{para } \rho > a \\ \frac{\rho_v \pi \rho^2 H}{\varepsilon_0} & \text{para } \rho \leq a \end{cases} \Rightarrow E(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho_v a^2}{2\rho \varepsilon_0} & \text{para } \rho > a \\ \frac{\rho_v \rho}{2\varepsilon_0} & \text{para } \rho \leq a \end{cases}$$

Con lo que el campo en cualquier punto  $\vec{r}$  que crea el cilindro es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_v a^2}{2\rho \varepsilon_0} \hat{\rho} & \text{para } \rho > a \\ \frac{\rho_v \rho}{2\varepsilon_0} \hat{\rho} & \text{para } \rho \leq a \end{cases}$$

Puede comprobarse cómo el campo  $\vec{E}(\vec{r})$  es continuo en los puntos con  $\rho = a$ . ¿Podría haber una situación donde  $\vec{E}(\vec{r})$  no fuese continuo en algún punto?

## 6.2. Geometría esférica

Los sistemas que poseen *simetría esférica* son aquéllos que presentan un mismo aspecto para todos los puntos que se encuentran a la misma distancia del centro del sistema. Ejemplo de este tipo de sistemas es una carga puntual o una distribución esférica de carga.

Como estos sistemas presentan el mismo aspecto al movernos de unos puntos a otros manteniendo la distancia al origen fija, el módulo del campo eléctrico que producen dependerá únicamente de la distancia del punto al centro del sistema. Por tanto, si en el centro del sistema con simetría esférica se coloca el origen de coordenadas, tal y como aparece en la Figura 13(a), el

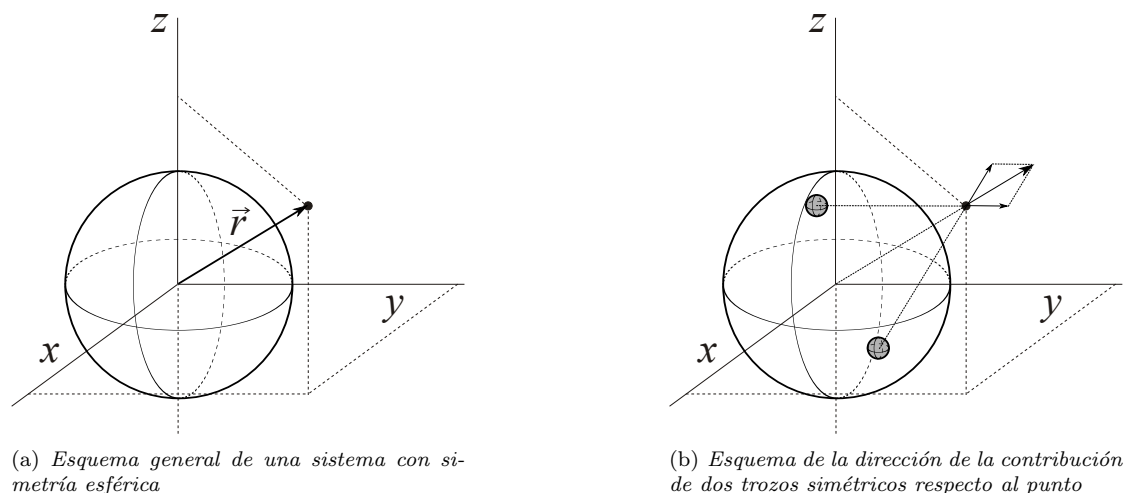


Figura 13: Esquema de una esfera cargada

campo que el sistema crea en el punto  $\vec{r}$  tendrá un módulo que sólo dependerá de la distancia de ese punto al origen, es decir,  $E = E(r)$ .

Para estudiar la dirección del campo  $\vec{E}(\vec{r})$  que una distribución de carga con simetría esférica crea en un punto  $\vec{r}$ , en la Figura 13(b) se toma un trozo diferencial dentro de la distribución y se observa que siempre es posible encontrar otro punto simétrico con respecto del punto, de forma que la suma de los campos diferenciales que crean cada uno de los dos trozos lleva la dirección de la línea que une el punto y el origen, es decir, la dirección de  $\vec{r}$ .

Si se nota  $\hat{r}$  como un versor en la dirección  $\vec{r}$ , la discusión anterior produce como conclusión que el campo que crea una distribución de carga con simetría esférica en un punto  $\vec{r}$  toma la forma:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

Es decir, lleva la dirección de la línea que une el centro y el punto, y el módulo sólo depende de la distancia al origen.

Debido a la forma que se sabe que tiene el campo, la superficie de integración que se construye para poder aplicar la Ley de Gauss (21) será una esfera que contenga al punto donde se quiere calcular el campo lo que se esquematiza en la Figura 14. El vector de superficie de un pequeño trozo de esta superficie será radial, por lo que el producto escalar que aparece en el flujo a través de la superficie de integración se transforma en un producto de escalares, de forma que dicho flujo queda:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E(r)\hat{r} \cdot d\vec{S} = \oint_S E(r)dS$$

Como toda la superficie de integración se encuentra a una misma distancia del origen, el módulo del campo es constante y puede salir de la integral, quedando el flujo:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)4\pi r^2$$

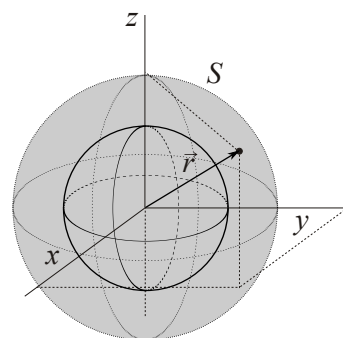


Figura 14: Superficie de integración con geometría esférica

La Ley de Gauss para un sistema con geometría esférica queda finalmente:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q_S}{\varepsilon_0} \quad (24)$$

donde  $Q_S$  es la carga encerrada dentro de la superficie esférica de integración que se ha construido.

**Ejemplo: Carga puntual  $q$ .** En el caso de tener únicamente una carga puntual, la situación tiene simetría esférica, de forma que se coloca el origen de coordenadas en la carga. En este caso, la carga encerrada en cualquier superficie esférica será  $q$ , con lo que la ecuación (24) queda:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

y el vector campo electrostático queda finalmente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Que es el campo que se obtiene directamente de la Ley de Coulomb (2).

### 6.3. Geometría plana

En este caso, el sistema es tal que presenta un mismo aspecto al moverse en un plano paralelo al del sistema, de forma que sólo depende de la distancia al plano. Así, si el plano del sistema se hace coincidir con el plano  $xy$ , el módulo del campo será únicamente función de la distancia del punto donde se considere a dicho plano, lo que representa el valor absoluto de la coordenada  $z$ , es decir,  $E = E(|z|)$ .

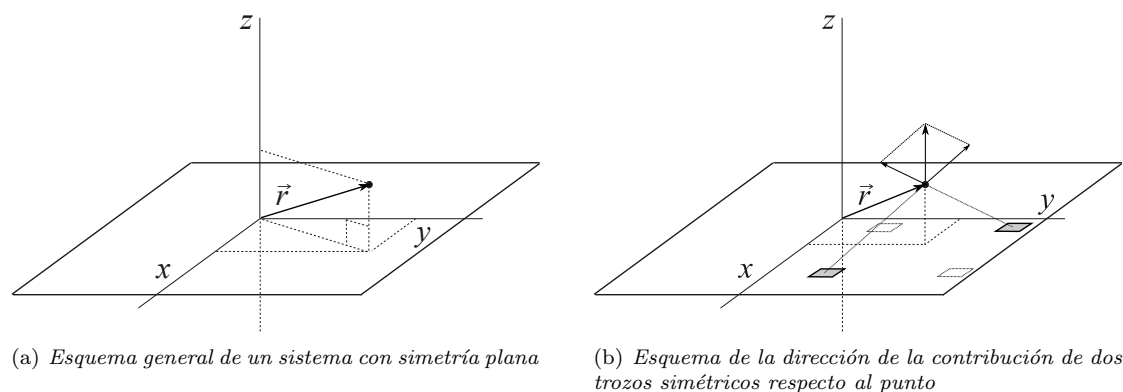


Figura 15: Esquema de un plano cargado

Para ver la dirección que tiene el campo  $\vec{E}(\vec{r})$  en el punto  $\vec{r}$ , en la Figura 15(b) se ilustra que para cualquier trozo pequeño de la distribución de carga, y siempre se puede encontrar otro trozo igual y simétrico respecto del punto, de forma que producen campos cuyas componentes horizontales se compensan, dejando únicamente componente vertical. Como esto se puede hacer para cualquier trozo, el campo total llevará dirección  $\pm\hat{k}$ , donde el signo “+” será para los puntos situados por arriba del plano y el signo “-” para los situados por debajo del plano.

El vector de campo electrostático tendrá por tanto la forma:

$$\vec{E} = \pm E(|z|)\hat{k}$$

Lo que significa que el campo  $\vec{E}(\vec{r})$  es en todo punto perpendicular al plano del y su módulo depende sólo de la distancia a dicho plano.

La dependencia y dirección del campo se puede utilizar para construir la superficie de integración, que puede ser un cilindro perpendicular al plano o un prisma. En la Figura 16 se ha tomado un cilindro de base  $A$  y altura  $2z$  perpendicular al plano del sistema, de forma que el punto donde se quiera calcular el campo esté en una de las bases, y las dos bases están a la misma distancia del plano del problema. Es fácil ver que el flujo a través de las paredes del cilindro será nulo, ya que el vector superficie de los trozos en las paredes y el campo en los puntos de esa superficie son perpendiculares, por lo que el flujo a través de la superficie de integración es:

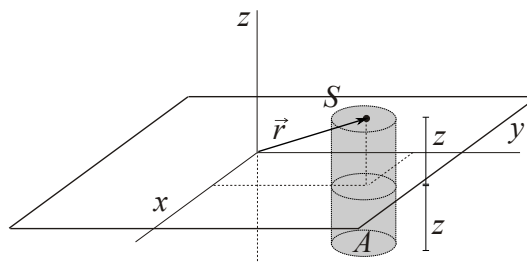


Figura 16: Superficie de integración en geometría plana

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Base arriba}} E(|z|) \hat{k} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Base abajo}} E(|z|) (-\hat{k}) \cdot d\vec{S}$$

Por otro lado, en las bases superior e inferior el campo y el vector de superficie llevan la misma dirección, ya que en la base de arriba el vector  $d\vec{S}$  lleva dirección  $\hat{k}$ , mientras en la base de abajo lleva dirección  $-\hat{k}$ . Así, el flujo a través de la superficie de integración queda:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Base arriba}} E(|z|) dS + \int_{\text{Base abajo}} E(|z|) dS$$

Ahora, en las bases, la distancia de los puntos al plano es constante e igual a  $|z|$ , por lo que puede salir de la integral y el flujo queda:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(|z|) \int_{\text{Base arriba}} dS + E(|z|) \int_{\text{Base abajo}} dS = 2E(|z|)A$$

La Ley de Gauss para un sistema con geometría plana queda finalmente:

$$E(|z|)2A = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \quad (25)$$

donde  $Q_S$  es la carga encerrada dentro de la superficie cilíndrica de integración que se ha construido.

**Ejemplo: Plano infinito con densidad superficial de carga  $\rho_s$  uniforme.** Para calcular el campo basta con calcular la carga encerrada en un cilindro como el que aparece en la Figura 16, que será la carga que hay en el trozo de plano que queda dentro del cilindro de integración. El área de este trozo es igual a  $A$ , por lo que la carga total encerrada es:

$$Q_S = \rho_s A$$

Este resultado se sustituye en la ecuación (25) y queda:

$$E(|z|)2A = \frac{\rho_s A}{\epsilon_0} \Rightarrow E(|z|) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

con lo que el vector campo electrostático queda finalmente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \pm \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{k} \quad (26)$$

## 7. Potencial y energía potencial electrostáticos

La fuerza de Coulomb que se introdujo en (1) y (2) es una fuerza central, ya que si se toma como origen una de las cargas, el módulo de la fuerza que sufre la otra carga varía con la distancia, y la dirección de dicha fuerza sigue la línea que une ambas cargas, siendo por tanto radial.

En el Tema 1 se estudió que todas las fuerzas centrales son conservativas, por lo que la fuerza electrostática es conservativa y se puede definir una energía potencial asociada a dicha fuerza, de forma que el trabajo que realiza la fuerza electrostática será igual a menos la variación de la energía potencial, es decir  $W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_p$ . Para obtener la energía potencial es necesario calcular el trabajo que realiza la fuerza electrostática cuando una carga se desplaza de una posición a otra. Una vez realizado el cálculo, se identificará la forma de la energía potencial, tal y como se realizó para varios ejemplos en el Tema 1.

Una vez definida la energía potencial electrostática, se definirá el potencial electrostático siguiendo el mismo camino que se realizó para definir el campo electrostático a partir de la fuerza electrostática. Igual que el campo electrostático es una fuerza por unidad de carga, es decir una *fuerza específica*, el potencial será una energía potencial por unidad de carga, o lo que es lo mismo una *energía potencial específica*.

### 7.1. Definición de energía potencial electrostática

Se comenzará definiendo la energía potencial de dos cargas puntuales, de carga  $Q$  y  $q$ , donde la fuerza que aparece entre ellas viene dada por (2). Como hemos dicho antes, para definir la energía potencial electrostática primero hay que calcular el trabajo que realiza la fuerza electrostática (2) para ir de un punto a otro. Para ello supongamos que la carga  $Q$  está fija en el origen de coordenadas y la carga  $q$  se coloca inicialmente en un punto  $A$ , dado por  $\vec{r}_A$ , y se mueve a lo largo de una trayectoria hasta un punto  $B$ , dado por  $\vec{r}_B$ . En cualquier punto  $\vec{r}$  de la trayectoria la fuerza electrostática entre las dos cargas sigue la forma (2). Esta fuerza se puede expresar como una componente que sólo depende del módulo de  $\vec{r}$  por el versor  $\hat{r}$ , es decir,  $\vec{F} = F(r)\hat{r}$ , que se estudió en la Sección 6 del Tema 1 como definición de una fuerza central. En esa misma sección, en el ejemplo 2, se calculó de forma genérica el trabajo que realiza una fuerza central y resultó ser:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F(r) dr$$

Sustituyendo la expresión de la componente radial para el caso de la fuerza electrostática, se tiene que en nuestro caso:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Como la energía potencial se define de forma que se cumpla:

$$W_{A \rightarrow B} = - (E_{pB} - E_{pA})$$

identificando términos se llega a la definición de la energía potencial electrostática para un sistema de dos cargas puntuales:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r} \quad (27)$$

Conviene destacar que la relación entre la fuerza electrostática y la energía potencial electrostática es la misma que existe entre cualquier fuerza conservativa y su energía potencial. Por

un lado, la energía potencial en función de la fuerza se escribe como:

$$\Delta E_p = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (28)$$

donde la integral se puede realizar a través de cualquier camino (no explícito), ya que la fuerza es conservativa. Por otro lado, tal y como se estudió en el Tema 1, la fuerza se puede expresar en función de la energía potencial como menos el gradiente de la energía potencial:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p \quad (29)$$

Por último, recordar que el origen de energía potencial es arbitrario, ya que sólo tiene sentido físico la diferencia de energía potencial, por lo que se puede añadir cualquier constante a la definición (27).

## 7.2. Definición de potencial electrostático

En la Sección 4 se puso de manifiesto la necesidad de que existan las dos cargas anteriores  $q$  y  $Q$  para que exista fuerza electrostática entre ellas. Sin embargo, se discutió que aunque sólo exista una de ellas, el espacio que rodea a esta carga se ve modificado, de forma que no tiene las mismas propiedades electrostáticas que si la carga no estuviera. Para estudiar cómo varían las propiedades electrostáticas del espacio que rodea la carga se definió el campo electrostático, como la fuerza por unidad de carga. Así, la existencia del campo electrostático sólo depende de la presencia de la carga que *crea* el campo y no de la presencia de la carga que *sufre* la fuerza.

La definición de este campo electrostático nos ha permitido estudiar cómo distintos sistemas cargados, tanto discretos como continuos, modifican las propiedades electrostáticas del espacio que los rodea, de forma que para conocer la fuerza que una carga  $q$  sufriría en un determinado punto  $\vec{r}$  en las inmediaciones de esos sistemas, sólo hay que multiplicar el valor del campo electrostático en ese punto por el valor de la carga  $q$  que va a sufrir la fuerza.

Este mismo sentido tiene el potencial electrostático respecto de la energía potencial electrostática. De la ecuación (27) se desprende que para que exista energía potencial electrostática es necesario que existan las dos cargas,  $q$  y  $Q$ . Sin embargo, si sólo está presente la carga  $Q$  el espacio que la rodea tiene unas propiedades electrostáticas distintas, que se reflejan en el hecho de que existe un campo  $\vec{E}$ . Aunque no exista energía potencial en este caso, se podría definir una energía potencial por unidad de carga, de igual forma que el campo  $\vec{E}$  es la fuerza electrostática por unidad de carga. Así, se define el *potencial electrostático*  $V$  como la energía potencial electrostática por unidad de carga, de forma que  $V = E_p/q$ . Así, para una carga puntual  $Q$  colocada en el origen de coordenadas, el potencial se obtiene a partir de (27) como:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (30)$$

A partir de esta definición del potencial que crea una carga puntual se puede obtener el potencial que crean varias cargas puntuales y distribuciones continuas de carga, siguiendo el mismo procedimiento que se realizó para la obtención del campo electrostático de distintos sistemas (véase Sección 4).

El potencial en el sistema internacional se mide en *voltios* (V), que es equivalente a julio partido culombio.

### 7.3. Potencial debido a un sistema de cargas puntuales

Como se ha indicado anteriormente, el potencial electrostático es una energía potencial por unidad de carga. Si tenemos un sistema de cargas puntuales  $\{q_i\}_{i=1,\dots,N}$  ejerciendo una fuerza sobre una carga  $q$ , está vendrá dada por (3), lo que implica que es la suma de las fuerzas individuales que cada una de las cargas  $q_i$  del sistema ejerza sobre la carga  $q$ . Cada una de estas fuerzas individuales que sufre  $q$  es conservativa, por lo que a la carga  $q$  se le puede asociar una energía potencial  $E_{p_i}$  para cada una de ellas, y la energía potencial total de la carga  $q$  será la suma de las energías potenciales.

$$E_p = \sum_{i=1}^N E_{p_i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = q \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

donde  $|\vec{r} - \vec{r}_i|$  no es otra cosa que la distancia de la carga  $q_i$  a la carga  $q$ , tal y como se representa en la Figura 1. Para cada una de las energías potenciales individuales  $E_{p_i}$  se puede definir un potencial de forma que  $E_{p_i} = qV_i$ , y también se puede definir un potencial total para el sistema de cargas  $V = \sum_{i=1}^N V_i$ , que cumple  $E_p = qV$  y que toma la forma:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (31)$$

Éste será el potencial electrostático que un sistema de cargas puntuales crea en el punto  $\vec{r}$ .

### 7.4. Potencial debido una distribución de carga

Para calcular el potencial electrostático que crea una distribución continua de carga, se realiza el mismo procedimiento que se hizo para calcular el campo, donde la distribución continua se divide en “trozos” y se aproxima a un sistema de cargas puntuales. A continuación se hace tender el tamaño de los trozos a cero y la suma de contribuciones se transforma en una integral. Este proceso es fácil de realizar siguiendo los mismos pasos que para el campo (Sección 4.2) y produce que para una distribución volúmica de carga, el potencial que crea en un punto  $\vec{r}$  genérico es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_v(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (32)$$

Para una distribución lineal de carga se tendría:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\rho_l(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl' \quad (33)$$

y para una distribución superficial se tendría:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' \quad (34)$$

**Ejemplo: Potencial que crea un anillo homogéneo de radio  $a$  y densidad lineal de carga  $\rho_l$  en su eje.** El campo que crea un anillo en cualquier punto de su eje se calculó en la Sección 4.2.2, y la situación se esquematizó en la Figura 5(a). Para aplicar la expresión (33) sólo hay que encontrar el valor de  $dl'$  y  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  en esta situación. Ambas cantidades se obtuvieron en la Sección 4.2.2, y resulta por un lado  $dl' = ad\phi'$ , y por otro:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}$$



con lo que el campo que crea en cualquier punto del eje sería:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_l a d\varphi'}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi'$$

Finalmente se obtiene que el potencial que crea el anillo en cualquier punto  $z$  de su eje es:

$$V(z) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\rho_l a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \quad (35)$$

## 7.5. Relación entre campo y potencial

La relación entre el campo electrostático y el potencial electrostático es muy fácil de obtener a partir de la relación que existe entre la fuerza electrostática y la energía potencial electrostática, teniendo en cuenta que el campo electrostático es la fuerza por unidad de carga que sufre la carga y el potencial electrostático es la energía potencial electrostática por unidad de carga que posee la carga, lo que se expresa como:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \text{y} \quad V = \frac{E_p}{q}$$

Teniendo en cuenta estas expresiones y la relación entre  $\vec{F}$  y  $E_p$  que aparece en (28) y (29), se obtiene  $\vec{E}$  en función de  $V$  y  $V$  en función de  $\vec{E}$  como:

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (36)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (37)$$

Estas dos ecuaciones tienen dos consecuencias fundamentales:

1. Si se conoce el campo electrostático que crea un sistema, se puede calcular la diferencia de potencial entre dos puntos utilizando la ecuación (36). Esto implica realizar una circulación del vector  $\vec{E}$  entre dos puntos, pero como la circulación de  $\vec{F}$  no depende del camino, tampoco dependerá la circulación de  $\vec{E}$  del camino.
2. Si se conoce el potencial en todo punto, se puede obtener el campo electrostático utilizando la ecuación (37). Esto implica que para conocer el campo  $\vec{E}$  basta con calcular una integral, que es lo que se requiere para calcular  $V$ , y luego tres derivadas, que es lo que se requiera para calcular el gradiente. El cálculo directo de  $\vec{E}$ , salvo en las situaciones donde se puede aplicar la Ley de Gauss, implica realizar tres integrales, lo que suele ser más difícil que el camino alternativo a través de  $V$ . En cursos superiores el principal objetivo será la obtención de  $V$ , a partir del cual el campo  $\vec{E}$  será inmediato por derivación.

**Ejemplo: Campo que crea un anillo homogéneo de radio  $a$  y densidad lineal de carga  $\rho_l$ .** Este campo se ha calculado directamente en la Sección 4.2.2, y el potencial se obtuvo en la ecuación (35). Para obtener la el campo a partir del potencial no hay más que utilizar la ecuación (37). El gradiente del potencial que aparece en (35) no se puede calcular en general, ya que sólo se conoce el potencial en los puntos del eje, sin embargo, se puede calcular la componente  $z$  del campo  $\vec{E}$ , que corresponde con la derivada parcial de  $V(z)$  con respecto a  $z$ . Esto queda:

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{2\epsilon_0} \rho_l a \frac{\partial \left( (a^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial z} = -\frac{1}{2\epsilon_0} \rho_l a \left( -\frac{1}{2} \right) (2z) \left( (a^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right)$$

Así, la componente  $z$  del campo queda:

$$E_z = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\rho a z}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Como en la Sección 4.2.2 se demostró que el campo en cualquier punto del eje sólo tiene componente  $z$ , la expresión anterior es idéntica al campo que se obtuvo en (15), salvo por el versor  $\hat{k}$ .

## 8. Dieléctricos y conductores

Hasta ahora se ha estudiado el campo electrostático en el vacío, ya que en la ecuación de partida (2) se supuso que era vacío lo que había entre las cargas. Esta expresión también es válida para el caso en que sea aire lo que se interponga entre las cargas, ya que se comporta prácticamente como el vacío.

Sin embargo, no siempre existirá vacío o aire entre las cargas, por lo que hay que estudiar cómo se comportan distintos tipos de materiales en presencia de campo electrostático. Como se dijo al principio del tema, aunque la materia se presente a menudo en la naturaleza con una carga neta nula, está compuesta por átomos y moléculas, que a su vez están formados por cargas positivas y negativas (protones y electrones). Esto hace que cualquier tipo de materia sufra cambios en presencia de un campo electrostático externo.

Los materiales se suelen clasificar en dos grandes grupos: dieléctricos y conductores. En los primeros las cargas que los componen no se pueden mover mientras los segundos presentan cargas que se pueden mover con cierta libertad. El comportamiento de estos materiales es ideal y sólo aparece en materiales reales de forma aproximada, pero los metales se comportan por lo general de forma muy similar a conductores perfectos y el aire o el plástico a dieléctricos ideales. A los materiales dieléctricos se les conoce también como aislantes.

Existen otros tipos de materiales en función de sus propiedades electromagnéticas, como son los semiconductores y los superconductores, pero las propiedades generales se pueden describir a partir de las propiedades de conductores y dieléctricos. Por ejemplo, un semiconductor se comporta como conductor en ciertas condiciones y como dieléctrico en otras, mientras que un superconductor se comporta como un conductor de resistencia prácticamente nula.

### 8.1. Dieléctricos

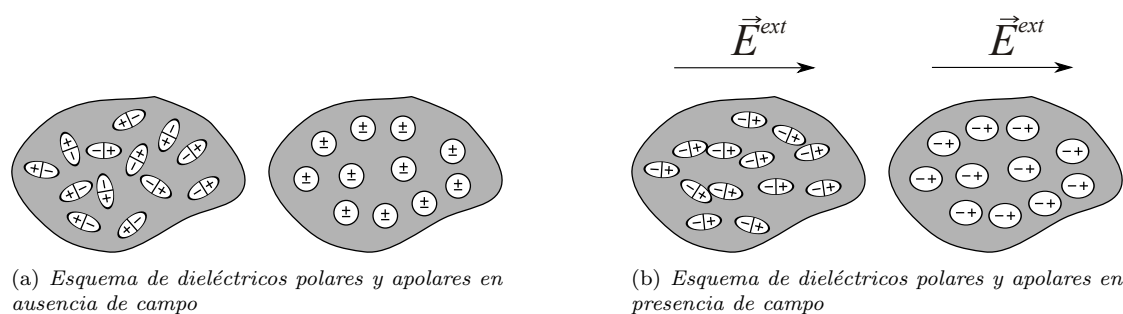


Figura 17: Dieléctrico en distintas situaciones.

Estos materiales están compuestos de cargas que no se pueden mover, por lo que si existe un campo electrostático externo sobre las cargas del material aparecerán fuerzas electrostáticas

aunque las cargas no se podrán mover de sus posiciones. Las moléculas de estos materiales pueden tener zonas con cargas positivas y negativas distribuidas de forma asimétricas, lo que se llaman moléculas polares y aparecen esquematizadas en el material de la izquierda de la Figura 17(a). Otras moléculas pueden presentar sus cargas distribuidas de forma simétrica, llamándose moléculas apolares y aparecen esquematizadas en el material de la derecha de la Figura 17(a).

En el caso de moléculas polares, éstas tenderán a orientarse en presencia de un campo externo, tal y como aparece en el material de la izquierda de la Figura 17(b). Por otro lado, las moléculas apolares en presencia de un campo externo dejarán de serlo de forma que la parte positiva de la molécula tenderá a irse en el sentido del campo y la parte negativa en sentido contrario, tal y como se esquematiza en la Figura 18.

Tanto para un dieléctrico formado con moléculas polares como uno compuesto con moléculas apolares, en presencia de un campo externo  $\vec{E}^{ext}$  ambos tipos de dieléctricos presentan un exceso de cargas positivas en la superficie situada en sentido del campo y un exceso de cargas negativas en la superficie situada en sentido contrario al campo. Estos excesos de cargas producen que en el interior del dieléctrico se “induzca” un campo interno  $\vec{E}^{ind}$  de sentido contrario al externo, de forma que el campo total dentro será:

$$\vec{E} = \vec{E}^{ext} + \vec{E}^{ind}$$

Por tanto el campo dentro del dieléctrico será menor que el campo externo (el módulo sería  $E = E^{ext} - E^{ind}$ ).

Para una gran cantidad de dieléctricos, el campo que se induce es proporcional al campo externo, es decir  $\vec{E}^{ind} = -\alpha \vec{E}^{ext}$ . Para cada uno de estos dieléctricos se define una permitividad eléctrica del material  $\epsilon$ , de forma que  $\vec{E}^{ind} = -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \vec{E}^{ext}$ . Como  $E^{ind}$  es siempre menor que  $E^{ext}$ , se cumple que  $\epsilon_0 < \epsilon$ . De esta forma, el campo dentro de un dieléctrico queda:

$$\vec{E} = \vec{E}^{ext} - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \vec{E}^{ext} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \vec{E}^{ext}$$

## 8.2. Conductores

Estos materiales se caracterizan porque poseen cargas libres que pueden moverse dentro del conductor. Así, si se coloca un conductor con carga neta nula en una región con un campo electrostático uniforme  $\vec{E}^{ext}$ , las cargas libres sufrirán una fuerza que será igual a su carga por el valor del campo. Supongamos que todas las cargas libres son iguales y las notamos como  $q$ , esta fuerza será  $q\vec{E}^{ext}$ , que hará que la carga comience a moverse. Como las cargas pueden moverse libremente dentro del conductor, éstas se moverán en la dirección y sentido del campo  $\vec{E}^{ext}$  (sentido contrario si la carga  $q$  es negativa) hasta que lleguen a la superficie del conductor, donde se acumularán. Por tanto se producirá un exceso de carga en la superficie del conductor en la dirección y sentido de  $\vec{E}^{ext}$  y un defecto de estas cargas en la parte contraria del conductor, que es de donde vienen las cargas  $q$  (recordar que se ha supuesto que el conductor es globalmente neutro). Estas concentraciones de carga inducen un campo  $\vec{E}^{ind}$  en la misma dirección que  $\vec{E}^{ext}$  pero sentido contrario. El movimiento de cargas terminará cuando, debido a la acumulación de carga en las superficies, el campo  $\vec{E}^{ind}$  alcance el valor de  $\vec{E}^{ext}$ , de forma que el campo total en el interior del conductor sea cero.

En la Figura 19(a) se presenta la situación descrita anteriormente, donde se observa cómo debido al campo exterior  $\vec{E}^{ext}$  las cargas libres positivas se mueven hacia la derecha y las cargas

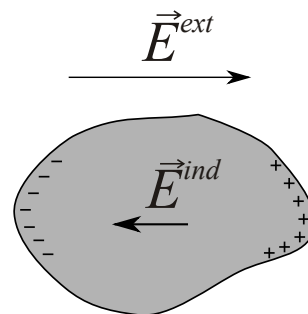


Figura 18: Esquema de un dieléctrico en presencia de campo externo.

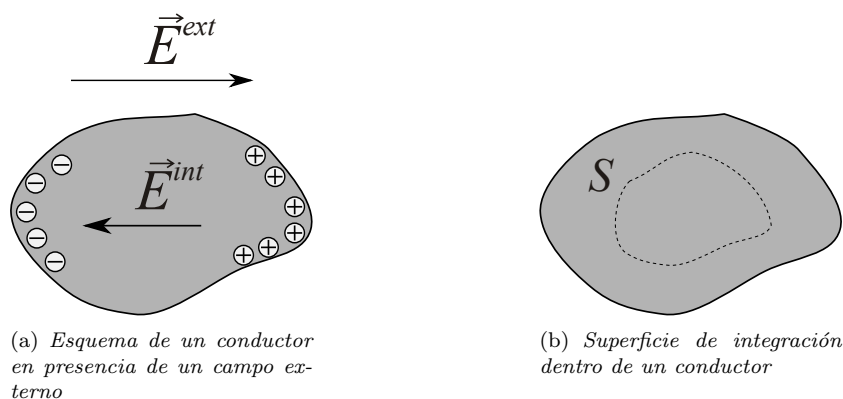


Figura 19: Conductor macizo

libres negativas hacia a la izquierda. No es necesario que existan estos dos tipos de carga. Por ejemplo, en un metal sólo existen cargas libres negativas, que son los electrones, pero al moverse los electrones hacia la izquierda la parte derecha del conductor se volverá positiva, al perder electrones. Se observa cómo estos excesos de cargas producen un campo  $\vec{E}^{ind}$  que se opone al campo exterior. Como se ha dicho anteriormente, cuando el campo  $\vec{E}^{ind}$  es igual al exterior, la fuerza en el interior del conductor es nula y las cargas dejan de moverse. En este caso el conductor se encuentra en una situación **estática**, ya que las cargas estarán en reposo y se caracteriza porque **el campo en el interior del conductor es nulo**.

Del hecho de que el campo sea nulo en el interior de un conductor se pueden extraer cuatro consecuencias principales:

- La primera es que, debido a las relaciones que existen entre el campo y el potencial dadas por (36) y (37), un campo  $\vec{E}$  nulo en el interior del conductor implica un potencial constante, ya que si no lo fuese, el gradiente no sería nulo y se tendría un campo  $\vec{E}$  no nulo. Por tanto, la primera conclusión es que, en condiciones estáticas, **todo los puntos del conductor se encuentran a un mismo potencial**. Aunque la situación en un circuito no es estática, ya que existen cargas moviéndose, esto es precisamente lo que se hace en teoría de circuitos al considerar un trozo de conductor, que une dos elementos en el circuito, a un mismo potencial.
- La segunda conclusión se obtiene aplicando la Ley de Gauss a cualquier superficie cerrada *dentro* del conductor, tal y como se representa en la Figura 19(b). Como el campo es nulo dentro de un conductor, también lo será en los puntos de la superficie que hemos construido, y por ello el flujo a través de la superficie será también nulo, lo que implica que la carga encerrada tiene que ser nula. Como esto se cumple para cualquier superficie dentro del conductor, en la situación estática **la carga neta en el interior del conductor es nula**, y por tanto **todo el exceso de carga se concentra en la superficie**. Esto implica que si se carga un conductor, toda la carga se distribuirá por su superficie.
- Relacionado con la primera conclusión, se puede obtener la dirección del campo electrostático en la superficie del conductor, teniendo en cuenta que todo el conductor se encuentra a un mismo potencial, por lo que la superficie de un conductor es una superficie equipotencial, y aplicando la relación que existe entre el potencial y el campo, dada por (37). En la Figura 20(a) se presenta un punto en la superficie del conductor y cuatro direcciones en

las cuales vamos a estudiar cómo varía el potencial, partiendo del punto. Como el campo es menos el gradiente del potencial, la dirección de máxima variación del potencial será la dirección que llevará el campo electrostático. Si nos movemos en la dirección perpendicular a la superficie hacia dentro del conductor el potencial no varía, ya que todo el conductor está al mismo potencial. Si nos movemos en una dirección paralela a la superficie a otro punto del conductor, el punto estará al mismo potencial, de forma que no hay variación. Sin embargo, si nos movemos en la dirección perpendicular a la superficie pero hacia fuera del conductor se llega a puntos fuera del conductor, por lo que el potencial no tiene que ser el mismo y puede variar. Así, el potencial sólo varía si nos movemos en una dirección perpendicular a la superficie y sentido hacia fuera, por lo que ésta será la dirección del campo. La conclusión es que **el campo electrostático en la superficie de un conductor lleva la dirección perpendicular a la superficie**. Si el potencial aumenta hacia fuera del conductor el sentido del campo será hacia dentro y si el potencial disminuye será hacia fuera.

- Por último, vamos a estudiar cómo se relaciona la carga en la superficie de un conductor con el campo en esta superficie, del que ya sabemos su dirección. Para obtener esta relación aplicamos la Ley de Gauss sobre una pequeña superficie cerrada de integración (ficticia) como la que aparece en la Figura 20(b). La superficie tiene que ser pequeña para que la superficie del conductor pueda considerarse plana en ese pequeño trozo. Para aplicar la Ley de Gauss hay que calcular el flujo a través de la superficie cerrada, lo que haremos estudiando el flujo a través de cada una de las superficies del cilindro. Por un lado, el flujo a través de la base inferior es nula, ya que los puntos de la base se encuentran dentro del conductor y ahí el campo es nulo. Por otro lado en los puntos de la superficie lateral del cilindro, el campo o es nulo (en los puntos de dentro del conductor) o es paralelo a la superficie, ya que anteriormente hemos visto que el campo justo sobre el conductor es perpendicular a la superficie. Así, el flujo a través del cilindro que se ha construido será únicamente el flujo a través de la base externa, que será  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_1$ . La superficie de la base superior  $dS_1$  y la superficie del conductor están tan cerca como se quiera, ya que la altura del cilindro es infinitesimal ( $2dh$ ), por lo que el campo en esta cara será prácticamente el campo en la superficie, que ya hemos visto que es perpendicular a la superficie. Así, el flujo a través de la cara superior será  $E dS_1$ , donde  $E$  es el valor del campo en la superficie. Según la Ley de Gauss, este flujo es igual a la carga encerrada en el cilindro dividido por  $\epsilon_0$  (si el conductor está rodeado de aire o vacío). La carga encerrada será la densidad superficial de carga  $\rho_s$  (que se puede considerar constante al ser el cilindro muy pequeño) por el área, de forma que la Ley de Gauss queda:

$$\int_{S_1} E dS_1 = \frac{\rho_s S_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

Por tanto, **el campo en un punto de la superficie de un conductor toma una dirección normal a la superficie y de componente igual a la densidad superficial de carga en ese punto dividida por  $\epsilon_0$** , el sentido será hacia fuera del conductor si  $\rho_s$  es positiva y hacia dentro del conductor si  $\rho_s$  es negativa.

### 8.3. Apantallamiento de conductores

Una situación especialmente importante es cuando se tienen dos conductores en situación de *apantallamiento*, que consiste en que un conductor englobe completamente a otro. Un sistema de

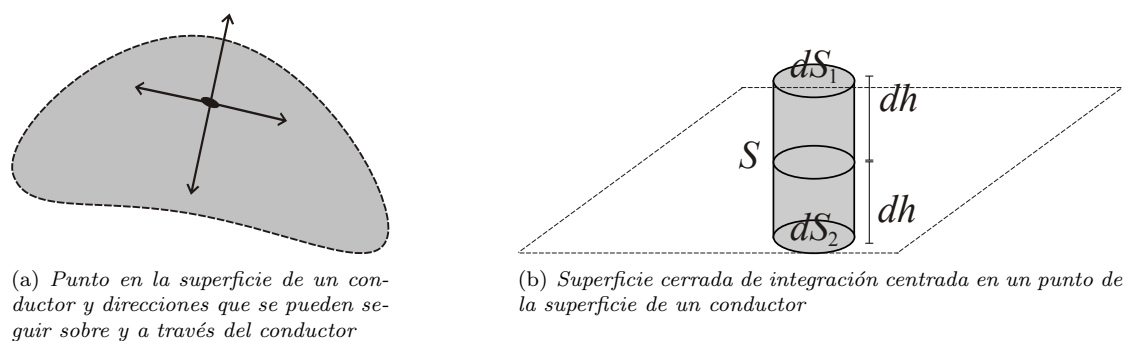


Figura 20: Superficie externa de un conductor

dos conductores en esta situación de apantallamiento recibe el nombre de *condensador*. Para estudiar este efecto se parte de la segunda de las conclusiones anteriores, en la que se comprobó que todo exceso de carga en un conductor tiene que encontrarse en su superficie. Esta situación se esquematizó en la Figura 19(b) para un conductor sin hueco. Ahora vamos a ver qué sucede si existe un hueco en el conductor. En este caso se construye una superficie de integración que envuelva al hueco y esté dentro del conductor, tal y como aparece en Figura 21(a). Al igual que antes, el campo en la superficie de integración tiene que ser nulo, por lo que el flujo a través de la superficie será nulo. Por la Ley de Gauss esto implica que la carga encerrada dentro de la superficie también será nula, lo que implica que en la superficie interior no puede haber carga neta.

Sin embargo, en el interior del hueco anterior podríamos colocar una carga  $q$ . El campo en la superficie de integración cerrada que envuelve al hueco seguiría siendo nulo (puesto que en todo interior de un conductor en equilibrio el campo es nulo), por lo que la carga encerrada tiene que seguir siendo nula. Como sabemos que dentro del hueco hay una carga  $q$ , para que la carga neta encerrada sea nula la superficie interior del conductor deberá cargarse de forma que la carga total en esta superficie sea  $-q$ . En la Figura 21(b) se esquematiza esta situación con una carga positiva dentro del hueco, aunque de igual forma podría ser una carga negativa. Si el conductor no está inicialmente cargado, la carga total del conductor tiene que ser nula, por lo que en la superficie exterior tendrá que distribuirse una carga  $q$ , de forma que la carga total del conductor sea nula. Si el conductor estuviera inicialmente cargado, la carga  $-q$  habría que restársela (con signo) al exceso de carga libre acumulada en la superficie exterior del conductor (carga total del conductor). Ya estamos en situación de estudiar dos conductores en situación de apantallamiento,

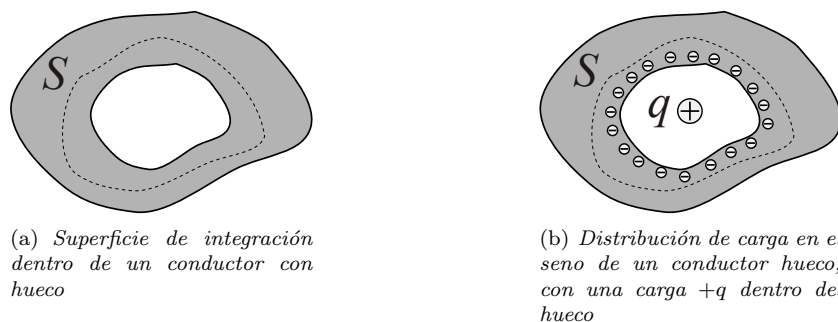
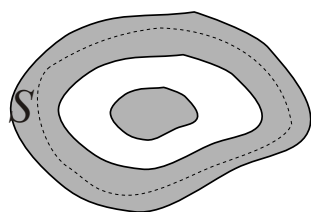


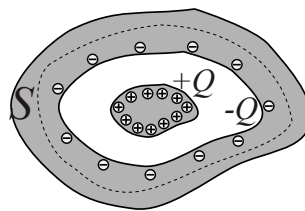
Figura 21: Conductor con hueco en distintas situaciones

es decir uno envolviendo a otro. Esta situación se presenta en la Figura 22(a), donde se puede observar cómo un conductor queda totalmente dentro del otro. Como en los casos anteriores, si se toma una superficie cerrada dentro del conductor exterior que envuelva al hueco (y con ello al conductor interior), el campo electrostático en cualquier punto de la superficie será nulo, por lo que el flujo será nulo y por la Ley de Gauss la carga total encerrada dentro de los conductores será nula. Dentro de la superficie de integración sólo puede haber carga en la superficie interna del conductor exterior y en la superficie del conductor interior, ya que sólo puede haber carga en la superficie de los conductores. Esta situación se ilustra en la Figura 22(b), donde se ha tomado como ejemplo una situación en la que el conductor interior esté cargado con una carga total  $Q$ . Esta carga se tiene que distribuir en la superficie exterior de dicho conductor, tal y como se indica en la figura. Como se ha visto antes, en la superficie interna del conductor exterior se distribuye una carga  $-Q$ , de forma que el flujo a través de cualquier superficie cerrada como la que aparece en la figura sea nulo.

En la superficie exterior del conductor exterior es posible que también se distribuya una carga, lo que dependerá de cuál sea la carga total de este conductor. Si, por ejemplo, el conductor exterior tiene carga neta nula, en la superficie exterior se distribuirá una carga  $Q$ , de forma que la carga total en el conductor sea nula.



(a) Superficie de integración en el seno de un conductor apantallando otro



(b) Dos conductores apantallados, el interior con una carga positiva

Figura 22: Conductores apantallados

#### 8.4. Capacidad

Como hemos visto anteriormente, en un condensador si el conductor interior se carga positivamente con una carga  $q$ , la superficie interior del conductor exterior se carga con una carga  $-q$ . Al producirse esta diferencia de carga también existe una diferencia de potencial  $\Delta V$  entre los conductores (recordar que cada conductor está a un único potencial). La *capacidad* es una magnitud que se define para dos conductores en situación de apantallamiento y es igual al cociente entre el valor absoluto de la carga en uno de los conductores y la diferencia de potencial que existe entre los conductores:

$$C = \frac{|q|}{\Delta V} \quad (38)$$

En el sistema internacional de unidades, la capacidad se mide en *faradios* (F), que corresponde a culombios partido por voltios.

La capacidad de un conductor, como ya se ha visto, es el cociente entre la carga en cualquiera de sus superficies enfrentadas y la diferencia de potencial positiva que existe entre los conductores. Si se aumenta la carga, aumenta de igual forma la diferencia de potencial y el cociente permanece constante. Así, la capacidad de un condensador sólo depende de la geometría y tamaño del condensador, y no de cuánta carga tenga en sus superficies.

**Condensador esférico:** El problema se presenta en la Figura 23(a), donde se muestra cómo un condensador esférico está formado por un conductor esférico interior, de radio  $r_1$ , y otro conductor esférico hueco de radio interior  $r_2$ , de forma que el primero se encuentra dentro del segundo, y los centros de ambos coinciden. Se ha supuesto que la superficie exterior del conductor interno se distribuye una carga  $Q$  que, debido a la simetría esférica del problema, lo hará uniformemente.

Para calcular la capacidad de este sistema, habrá que calcular la diferencia de potencial  $\Delta V$  que existe entre los dos conductores, cuando sobre el interior se distribuye una carga  $Q$  (sobre la superficie interior del conductor externo se distribuirá una carga  $-Q$ ). La diferencia de potencial se relaciona con el campo electrostático a través de la expresión (36), por lo que una forma de obtener  $\Delta V$  es calcular el campo en la región intermedia entre los dos conductores y luego calcular la circulación de la expresión (36) entre ambos conductores. El camino de integración que se utilice para calcular la circulación será el que haga el cálculo más sencillo, ya que el resultado es independiente del camino (campo conservativo).

Para calcular el campo en la región entre los dos conductores se utiliza la simetría esférica del sistema, por lo que la carga  $Q$  se distribuye uniformemente en la superficie del conductor interno. Como el problema tiene simetría esférica, se puede tomar una superficie esférica cerrada de radio  $r$ , con  $r_1 < r < r_2$ , concéntrica con el conductor interno, tal y como aparece en la Figura 23(b). Si se aplica la Ley de Gauss a esta superficie cerrada se tiene la expresión (24), donde la carga total encerrada  $Q_S$  en este caso es  $Q$ . Así, el campo en los puntos de la región  $r_1 < r < r_2$  será:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

La circulación de la expresión (36) se realizará entre un punto de la superficie del conductor interno y otro de la superficie interior del conductor externo, de forma que ambos estén en el mismo radio, a través de la línea recta que los une. Este camino se representa en la Figura 23(c). Así, en esta trayectoria se tiene que  $d\vec{r} = dr\hat{r}$ , por lo que (36) queda:

$$\Delta V = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Una vez calculada la diferencia potencial  $\Delta V$ , no hay más que sustituir en la definición (38) y se obtiene que la capacidad de un condensador esférico es:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Para aumentar la capacidad de los condensadores, el espacio entre los conductores se suele llenar de un dieléctrico de elevada permitividad eléctrica  $\epsilon$ , en cuyo caso la capacidad

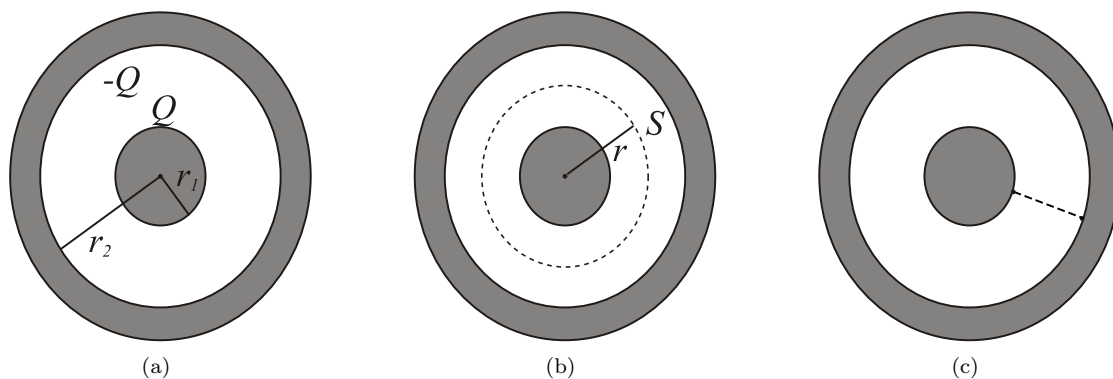


Figura 23: Condensador esférico



pasa a ser:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

**Condensador plano:** El problema se presenta en la Figura 24. En este caso se tiene dos planos infinitos, cargados con signo opuesto y separados una distancia  $H$ . Aunque parezca que en este caso los conductores no están en situación de apantallamiento, no es así. Matemáticamente cada uno de los planos infinitos envuelve al otro a través el infinito, que se refleja en que el conductor de abajo aislará al de arriba de lo que pase arriba y viceversa.

En este caso, la carga que se puede almacenar en estos dos conductores a una determinada  $\Delta V$  es infinita, ya que los conductores son infinitos, por lo que no se puede definir capacidad, pero sí se puede definir capacidad por unidad de área  $A$ , que será la carga por unidad de área dividida por la diferencia de potencial. Así se tiene:

$$C/A = \frac{Q/A}{\Delta V}$$

Pero el cociente  $Q/A$  no es otra cosa que la densidad superficial de carga  $\rho_s$  que se distribuye en la superficie de los planos conductores, por lo que para calcular la capacidad por unidad de área no hay más que calcular la diferencia de potencial entre los dos planos cuando tienen densidades de carga  $\rho_s$  y  $-\rho_s$ .

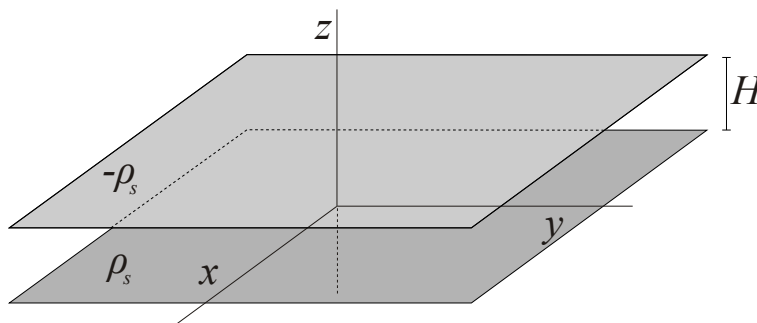


Figura 24: Condensador plano

La diferencia de potencial entre los dos planos se obtiene, al igual que se hizo en el condensador esférico, a través del campo electrostático que hay en la región entre los dos conductores y la relación (36). El campo que crea un plano infinito cargado se obtuvo en (26), por lo que el plano inferior crea un campo en la región entre los dos conductores  $\vec{E}_1$  vertical, constante, de sentido hacia arriba y módulo  $\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$ . El plano superior produce un campo  $\vec{E}_2$  que apunta hacia el plano, por lo que en la región entre los conductores será también vertical, constante, de sentido hacia arriba y módulo  $\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$ . Así, el campo total en la región entre los dos conductores es:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{k}$$

Para calcular la diferencia potencial  $\Delta V$  basta con realizar la circulación de este campo desde un punto de la superficie superior hasta otro de la superficie inferior que esté justo debajo, a través de un camino vertical que tendrá  $d\vec{r} = dz\hat{k}$ . Por tanto:

$$\Delta V = - \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_H^0 E dz = \frac{H\rho_s}{\epsilon_0}$$

La capacidad por unidad de área queda:

$$C/A = \frac{\rho_s}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0}{H}$$

*En situaciones reales no se tienen planos infinitos, sino finitos, pero si la distancia entre los planos  $H$  es muy pequeña comparada con las dimensiones de los planos, el campo entre ellos es uniforme y se comportan como casi planos infinitos. En este caso, los planos finitos tendrán un área definida  $A$ , y la capacidad del condensador plano finito será:*

$$C = \frac{A\epsilon_0}{H}$$

*Al igual que se indicó en el condensador esférico, el espacio entre las dos placas se puede llenar de un material dieléctrico, con permitividad eléctrica  $\epsilon$ , en cuyo caso la capacidad aumenta y resulta:*

$$C = \frac{A\epsilon}{H}$$