EJERCICIO PUNTUABLE DEL TEMA II. GEOMETRÍA II. CURSO 2018 - 2019

PRIMER EJERCICIO (4 PUNTOS)

APARTADO (1) (2 PUNTOS)

En $\mathbb{R}^{200}$ se considera una métrica g indefinida y degenerada. Supongamos que el rango de g es el doble del índice de g. Prueba que existe una base B de $\mathbb{R}^{200}$ formada por vectores luminosos, es decir, $B \subset \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^{200} \,/\, g(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \}$.

APARTADO (2) (2 PUNTOS)

En $\mathbb{R}^{200}$ se consideran una métrica g no nula y B_u la base usual. Supongamos que todos los menores principales de cualquier orden de la matriz de la métrica g en B_u son *o* bien números mayores que cero *o* bien cero y que el determinante de la matriz de la métrica g en B_u es cero. Demuestra que la métrica g es semidefinida positiva.

SEGUNDO EJERCICIO (6 PUNTOS)

En $\mathbb{R}^5$ se consideran tres métricas g_1, g_2 y g_3 que en la base usual tienen por matrices :

$$\mathcal{M}(g_1, B_u) = \begin{pmatrix} -20 & -4 & -6 & -15 & 16 \\ -4 & 10 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & -2 & 18 & 3 & 4 \\ -15 & -5 & 3 & 8 & 11 \\ 16 & 0 & 4 & 11 & -12 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}(g_2, B_u) = \begin{pmatrix} -20 & -3 & 7 & 2 & 16 \\ -3 & 18 & 0 & 11 & -2 \\ 7 & 0 & 6 & -14 & -10 \\ 2 & 11 & -14 & 8 & -16 \\ 16 & -2 & -10 & -16 & -6 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{M}(g_3, B_u) = \begin{pmatrix} 400 & 12 & -42 & -30 & 256 \\ 12 & 180 & 10 & -55 & 10 \\ -42 & 10 & 108 & -42 & -40 \\ -30 & -55 & -42 & 64 & -176 \\ 256 & 10 & -40 & -176 & 72 \end{pmatrix}.$$

Se pide :

(*a*) Clasifica las tres métricas g_1, g_2 y g_3 dando el tipo de métrica que aparece en cada caso, su rango y su índice. ¿ Son isométricos los espacios $(\mathbb{R}^5, g_1)$ y $(\mathbb{R}^5, g_2)$? ¿ Son isométricos los espacios $(\mathbb{R}^5, g_1)$ y $(\mathbb{R}^5, g_3)$? Razona las respuestas. (3 PUNTOS)

(*b*) Elige tres vectores distintos de la base usual $\{ \vec{e_i}, \vec{e_j}, \vec{e_k} \}$ y una de las tres métricas. Calcula para la métrica que has elegido inducida en el subespacio de dimensión tres generado por $\{ \vec{e_i}, \vec{e_j}, \vec{e_k} \}$ una base ortonormal. (3 PUNTOS)

[Ayuda para el apartado (a) :]
Los polinomios característicos de las tres matrices son :

$p(\lambda) = -212510168032 + 4434582412\,\lambda - 16896124\,\lambda^2 - 126907\,\lambda^3 + 824\,\lambda^4 - \lambda^5$ g_3
$q(\lambda) = 20152 + 103160\,\lambda - 22276\,\lambda^2 + 1216\,\lambda^3 + 4\,\lambda^4 - \lambda^5$ g_1
$r(\lambda) = 1272858 - 98289\,\lambda - 17396\,\lambda^2 + 1407\,\lambda^3 + 6\,\lambda^4 - \lambda^5$. g_2

Teniendo en cuenta el coeficiente de λ^4 determina para cada matriz su polinomio característico y utiliza la "Regla de los Signos de Descartes" para clasificar las métricas.

Granada, 10 de mayo de 2019