EDIP ~ GRUPO B4
RELACIÓN 3

Moreno Guerrero, Alejandro
Nieto López, Pablo
Pérez Ruiz, Daniel
Suárez González, David
Zufrí Quesada, Daniel

1. Durante un año, las personas de una ciudad utilizan 3 tipos de transportes: metro(M), autobús(A), y coche particular (C). Las probabilidades de que durante el año hayan usado unos u otros transportes son:

M: 0.3	**M y A: 0.1**
A: 0.2	**M y C: 0.05**
C: 0.15	**A y C: 0.06**
M, A y C: 0.01	

Calcular las probabilidades siguientes:

a) Que una persona viaje en metro y no en autobús

$$P(M \cap \overline{A}) = P(M - A) = P(M) - P(M \cap A) = 0.3 - 0.1 = \mathbf{0.2}$$

b) Que tome al menos dos medios de transporte

$$P(M \cap \mathrm{A}) + [P(A \cap C) - P(A \cap M \cap C)] + [P(M \cap C) - P(A \cap M \cap C)]$$
$$= 0.1 + (0.06 - 0.01) + (0.05 - 0.01) = \mathbf{0.19}$$

c) Que una persona viaje en metro o en coche, pero no en autobús

$$P\left((M \cup C) \cap \overline{A}\right) = P\left((M \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A})\right) = P(M \cap \overline{A}) + P(C \cap \overline{A}) - P(M \cap C \cap \overline{A})$$
$$= 0.2 + 0.15 - 0.06 - 0.05 + 0.01 = \mathbf{0.25}$$

d) Que viaje en metro, o bien en autobús y en coche

$$P(\mathrm{M} \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})) = P(M) + P(A \cap C) - P(M \cap A \cap C) = 0.3 + 0.06 - 0.01$$
$$= \mathbf{0.35}$$

e) Que vaya a pie

El resultado que se pide es imposible de calcular, puesto que en el espacio muestral que se nos proporciona no indica explícitamente qué se encuentra en el complementario de los sucesos M, A, y C.

2. Sean A, B, y C tres sucesos de un espacio probabilístico (Ω, *A,* P), tales que:

P(A) = 0.4	P(A ∩ B) = 0.1
P(B) = 0.2	P((A ∪ B) ∩ C) = ∅
P(C) = 0.3	

a) Sólo ocurre A.

$$\boldsymbol{P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.1 = 0.3}$$

b) Ocurren los tres sucesos.

$$P((A \cup B) \cap C) = \emptyset = 0$$

c) Ocurren A y B pero no C

$$\boldsymbol{P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = 0.1 - 0 = 0.1}$$

d) Por lo menos dos ocurren

$$\boldsymbol{P\big((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)\big) = 0.1}$$

e) Ocurren dos y no más

Sólo se puede evaluar el caso: $\boldsymbol{P(A \cap B) = 0.1}$

f) No ocurren más de dos

Como hemos calculado en el apartado b), la probabilidad de que ocurran los tres sucesos a la vez es 0, por tanto, la probabilidad de que no ocurran más de dos es el complementario de dicho caso, con probabilidad 1.

$$\mathrm{P}\left(\overline{(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}}\right) = 1 - \mathrm{P}\big((\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}\big) = 1 - 0 = 1$$

g) Ocurre por lo menos uno

$$P(A \cup B \cup C) = 0.8$$

h) Ocurre sólo uno

$$P(A - B) + P(B - A) + P(C) = 0.4 - 0.1 + 0.2 - 0.1 + 0.3 = 0.7$$

i) No ocurre ninguno

$$\boldsymbol{1 - [P(A \cup B) + P(C)] = 1 - 0.8 = 0.2}$$

3. Se sacan dos bolas sucesivamente sin devolución de una urna que contiene 3 bolas rojas distinguibles y 2 blancas distinguibles.

a) Describir el espacio de probabilidad asociado a este experimento.

Sean R_1, R_2, R_3 y B_1, B_2 las diferentes bolas rojas y blancas respectivamente.

$$\Omega = \{R_1R_2, R_1R_3, R_1B_1, R_1B_2, R_2R_2, R_2R_3, R_2B_1, R_2B_2, R_3R_1, R_3R_2, R_3B_1, R_3B_2,\\ B_1R_1, B_1R_2, B_1R_3, B_1B_2, B_2R_1, B_2R_1, B_2R_3, B_2B_1\}$$

El espacio de probabilidad asociado tiene **20 elementos**. Calculando con combinatoria, dado que:

- No hay repetición.
- Se toman 2 elementos de un conjunto de 5.
- Importa el orden.

Se tiene: $V_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \mathbf{20}$

b) Descomponer en sucesos elementales los sucesos: *la primera bola es roja, la segunda bola es blanca* y calcular la probabilidad en cada uno de ellos.

- **Primera bola es roja:**

  $\boldsymbol{A} = \{R_1R_2, R_1R_3, R_1B_1, R_1B_2, R_2R_2, R_2R_3, R_2B_1, R_2B_2, R_3R_1, R_3R_2, R_3B_1, R_3B_2\}$

- **Segunda bola es blanca:**

  $\boldsymbol{B} =\{R_1B_1, R_1B_2, R_2B_1, R_2B_2, R_3B_1, R_3B_2, B_1B_2, B_2B_1\}$

$$P(A) = \frac{12}{20} = \mathbf{\frac{3}{5}} \qquad P(B) = \frac{8}{20} = \mathbf{25}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurriera alguno de los sucesos considerados en el apartado anterior?

$$P(A \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap C) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{6}{20} = \mathbf{\frac{7}{10}}$$

4. Una urna contiene "a" bolas blancas y "b" bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos bolas simultáneamente sean de distinto color?

Usemos

- **D:** distinto color.
- **B:** blanca.
- **N:** negra.

$$P(D) = P(B) \cdot P(N) + P(N) \cdot P(B) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1}$$

5. Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 rojas. Se extraen 2 bolas simultáneamente. Calcular la probabilidad de obtener:

a) Dos bolas rojas

$$\boldsymbol{P(2R) = \frac{\frac{3!}{2!\,(3-2)!}}{\frac{8!}{2!\,(8-2)!}} = \frac{3}{28} \cong 0,1071}$$

b) Dos bolas blancas

$$\boldsymbol{P(2B)} = \frac{\frac{5!}{2!\,(5-2)!}}{\frac{8!}{2!\,(8-2)!}} = \frac{5}{14} = 0,3571$$

c) Una blanca y otra roja

$$\boldsymbol{P\big((1^{a}B \cap 2^{a}R) \cup (1^{a}R \cap 2^{a}B)\big)} = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} = \frac{15}{28} \cong 0,5357$$

6. En una lotería de 100 billetes hay 2 que tienen premio.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar al menos un premio si se compran 12 billetes?

$\boldsymbol{G} =$ "*Ganar al menos un premio*".

$$\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{G}}) = \frac{\frac{98!}{12!\,(98-12)!}}{\frac{100!}{12!\,(100-12)!}} = 0{,}77\hat{3} \qquad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{G}) = 1 - \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{G}}) = 0{,}22\hat{6}$$

b) ¿Cuantos billetes habrá que comprar para que la probabilidad de ganar al menos un premio sea mayor que 4/5?

$$\frac{4}{5} < \boldsymbol{P}(\boldsymbol{G}) \rightarrow \frac{1}{5} > \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{G}}) = \frac{\frac{98!}{\mathrm{x}!\,(98-\mathrm{x})!}}{\frac{100!}{\mathrm{x}!\,(100-\mathrm{x})!}} = \frac{98!}{(98-\mathrm{x})!} \cdot \frac{(100-\mathrm{x})!}{100!} =$$

$$\frac{(100-\mathrm{x})!}{(98-\mathrm{x})! \cdot 100 \cdot 99} \rightarrow 1980 > \frac{(100-\mathrm{x})!}{(98-\mathrm{x})!}$$

$$\mathrm{z}(\mathrm{z}+1) = 1980 \rightarrow \mathrm{z} = 44$$

$$máx\{z \in \mathbb{N}\ tq\ z(z+1) < 1980\} = 43 \rightarrow 100 - \mathrm{x} = 44 \rightarrow \mathrm{x} = 56$$

Hay que comprar al menos 56 billetes para que la probabilidad de ganar sea mayor que 4/5.

7. Se consideran los 100 primeros números naturales. Se sacan 3 al azar.

a) Calcular la probabilidad de que en los 3 números obtenidos no exista ningún cuadrado perfecto.

$$\text{P(ningún perfecto)} = \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{88}{98} = \mathbf{0.7265}$$

b) Calcular la probabilidad de que exista al menos un cuadrado perfecto.

$$\text{P(al menos un perfecto)} = \text{P(un perfecto)} + \text{P(dos perfectos)} + \text{P(tres perfectos)}$$

$$\text{P(un perfecto)} = \frac{10}{100} \cdot \frac{90}{99} \cdot \frac{89}{98} + \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{99} \cdot \frac{89}{98} + \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{10}{98} = \frac{\mathbf{267}}{\mathbf{1078}}$$

$$\text{P(dos perfectos)} = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{90}{98} + \frac{10}{100} \cdot \frac{90}{99} \cdot \frac{9}{98} + \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{99} \cdot \frac{9}{98} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{1078}}$$

$$\text{P(tres perfectos)} = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{8}{98} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2695}}$$

$$\text{P(al menos un perfecto)} = \frac{267}{1078} + \frac{9}{1078} + \frac{2}{2695} = \frac{\mathbf{692}}{\mathbf{2695}} = \mathbf{0.2568}$$

c) Calcular la probabilidad de que exista un sólo cuadrado perfecto, de que existan dos, y la de que los tres lo sean.

Véase apartado **b**.

8. En una carrera de relevos cada equipo se compone de 4 atletas. La sociedad deportiva de un colegio cuenta con 10 corredores y su entrenador debe formar un equipo de relevos que disputará el campeonato, y el orden en que participarán los seleccionados.

a) ¿Entre cuántos equipos distintos habrá de elegir el entrenador si los 10 corredores son de igual valía? (Dos equipos con los mismos atletas en orden distinto se consideran diferentes)

$$\boldsymbol{V_{10}^{4}} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040$$

b) Calcular la probabilidad de que un alumno cualquiera sea seleccionado.

$$\frac{4}{10} = 0.4$$

9. Una tienda compra bombillas en lotes de 300 unidades. Cuando un lote llega, se comprueban 60 unidades elegidas al azar, rechazándose el envío si se supera la cifra de 5 defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote en el que haya 10 defectuosas?

A = "menos de 5 unidades defectuosas"

P("i defectuosas en el lote de 60 unidades") $= \frac{\binom{10}{i}\binom{290}{60-i}}{\binom{300}{60}}$

P(A) $= \sum_{i=0}^{5} \frac{\binom{10}{i}\binom{290}{60-i}}{\binom{300}{60}} \approx 0{,}9944$

10. Una secretaria debe echar al correo 3 cartas; para ello, introduce cada carta en un sobre y escribe las direcciones al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una carta llegue a su destino?

A_i = "Llega la carta i"

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_3 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$P(A_i) = \frac{1}{3}$
$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$