Examen final-Geometría II
1º Grado en Matemáticas
6 de junio 2017

Apellidos: ______________________________ **Nombre:** ________________.

1) Enuncia y demuestra el Teorema de Cayley-Hamilton.

2) En $\mathbb{R}^3$ se consideran la métrica g cuya matriz en la base usual viene dada por

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, -x - y - 2z, x + y + 2z) \ .$$

a) Comprueba que g es una métrica euclídea. ¿Es f autoadjunto respecto de la métrica g?

b) En caso afirmativo encuentra una base ortonormal de vectores propios de f.

3) a) Encuentra, si es posible, un endomorfismo diagonalizable de $\mathbb{R}^3$ que verifique que

$$\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

y otro endomorfismo no diagonalizable de $\mathbb{R}^3$ que verifique

$$\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, y + z = 0\}$$

y da su matriz en la base usual de $\mathbb{R}^3$.

b) Sean (V, g) un espacio vectorial métrico de dimensión 3 y B una base de V. Prueba que g es una métrica euclídea si y sólo si

$$a_{33} > 0 \ , \quad \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > 0 \quad \text{y} \quad \det(A) > 0 \ ,$$

donde

$$A = M(g, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

c) Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo, End(V) el espacio vectorial de los endomorfismos de V y $G : \mathrm{End(V)} \times \mathrm{End(V)} \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación

$$G(f, h) = \mathrm{traza}(f \circ \widehat{h})$$

donde $\widehat{h}$ es el endomorfismo adjunto de h. Prueba que G es una métrica euclídea en End(V).

4) En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, encuentra si es posible una isometría f que lleve el subespacio $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$ en el subespacio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. Si es posible da $M(f, B_u)$, clasifica y describe la isometría f.

Puntuación: 1.- 2.5 , **2.-** 2.5 , **3.-** 3, **4.-** 2

NOTA: Los ejercicios 3. a) y 4 no tienen solución única. Aquí presentamos una posible solución de estos problemas.

2.- $M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$f(x,y,z) = (2x+y+z, -x-y-2z, x+y+2z)$

a) Observemos que si $A = M(g, B_u)$ entonces:

$\det(A_1) = 3 > 0 \qquad \det(A_2) = 2 > 0 \qquad \det(A) = 1 > 0$

Luego por el Criterio de Sylvester g es una métrica euclídea.

Sabemos que f es autoadjunto si

$M(g, B_u) \cdot M(f, B_u)$ es simétrica.

$$M(g, B_u) \cdot M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} * & 2 & 1 \\ 2 & * & 1 \\ 1 & 1 & * \end{pmatrix}$$

No hace falta calcularlos

Por tanto f es autoadjunto respecto a g.

b) Calculemos el polinomio característico de $M(f, B_u)$

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -(2-\lambda)^2(1+\lambda) - 1 - 2 + (1+\lambda) + 2(2-\lambda) + (2-\lambda)$$

$$= -(2-\lambda)^2(1+\lambda) + 2(2-\lambda) = (2-\lambda)(\cancel{2} + \lambda^2 - \lambda - \cancel{2}) =$$

$$= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Luego los valores propios son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$

$$V_0 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x + y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} z = x \\ y = -3x \end{matrix} \right\} = L(\{(1,-3,1)\})$$

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x = 0 \\ z = -y \end{matrix} \right\} = L(\{(0,1,-1)\})$$

$$V_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cancel{-1} & \cancel{-3} & \cancel{-2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{matrix} \right\} = L(\{(-1,1,-1)\})$$

Sabemos que

$B = \{(1,-3,1), (1,-1,0), (-1,1,-1)\}$

es ortogonal sólo faltaría normalizarla

$$\|(1,-3,1)\| = \sqrt{g((1,-3,1),(1,-3,1))} = \sqrt{(0\ -1\ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

$$\|(1,-1,0)\| = \sqrt{g((0,1,-1),(0,1,-1))} = \sqrt{(1\ 0\ -1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = 1$$

$$\|(-1,1,-1)\| = \sqrt{g((-1,1,-1),(-1,1,-1))} = \sqrt{(-2,-1\ -1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

La base pedida es

$$B' = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-3,1),\quad (1,-1,0),\quad \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1,-1) \right\}$$

3.a) $Im(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} =$

$= L(\{(1,-1,0), (1,0,-1)\})$

$B = \{(1,-1,0), (1,0,-1), (0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Entonces basta considerar f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(f,B_u) = M(Id_{\mathbb{R}^3}, B, B_u)\, M(f,B) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}, B_u, B)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{*}{=}$$

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}, B_u, B) = M(Id_{\mathbb{R}^3}, B, B_u)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{*}{=} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el segundo endomorfismo calculamos una base de

$Im(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0, y+z=0\}$

$= L(\{(-1,1,-1)\})$

Sea B' la base

$B' = \{(-1,1,-1), (0,1,0), (0,0,1)\}$

Podemos considerar el endomorfismo

$$M(f,B') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que f no es diagonalizable ya que $P_f(\lambda) = -\lambda^3$ cuya única raíz es $\lambda = 0$.
Pero $\dim V_0 = 3 - \text{rango}(M(f,B')) = 3 - 1 = 2$
luego $a_\lambda \neq g_\lambda$ y por tanto no es diagonalizable.

$$M(f,B_u) = M(Id_{\mathbb{R}^3}, B', B_u) \cdot M(f,B') \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}, B_u, B')$$

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}, B_u, B') = M(Id_{\mathbb{R}^3}, B', B_u)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$M(f,B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. b) Supongamos que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y consideremos la base $B' = \{v_3, v_2, v_1\}$. Observemos que

$$C = M(g,B') = M(Id_{\mathbb{R}^3}, B', B)^t \cdot M(g,B) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}, B', B) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{13} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Por el criterio de Sylvester sabemos que g es una métrica euclídea si y sólo si:

$\det(C_1) = a_{33} > 0$ $\quad \det(C_2) = \det\begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} \\ a_{32} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > 0$

y $\det(C_3) = \det(C) = \det(A) > 0$

3. c) Consideremos B una base ortonormal de (V,g).

En primer lugar observemos que:

$$G(f,h) = \text{traza}(f\circ \hat{h}) = \text{traza}(M(f\circ\hat{h},B)) =$$

$$= \text{traza}(M(f,B)\cdot M(\hat{h},B)) \underset{\uparrow}{=}$$

B base ortonormal para (V,g)

$$= \text{traza}(M(f,B)\cdot M(h,B)^t)$$

luego

$$(*) \quad \boxed{G(f,h) = \text{traza}(M(f,B)\cdot M(h,B)^t)}$$

- Veamos ahora que <u>G es simétrica.</u>

$$G(h,f) \underset{\text{De } *}{=} \text{traza}(M(h,B)\cdot M(f,B)^t) \underset{\text{traza}(C)=\text{traza}(C^t)}{=} \text{traza}((M(h,B)\cdot M(f,B)^t)^t)$$

$$= \text{traza}((M(f,B)^t)^t\cdot M(h,B)^t) \underset{(C^t)^t=C}{=} \text{traza}(M(f,B)\cdot M(h,B)^t) =$$

$$\underset{\text{De } *}{=} G(f,h)$$

- Veamos que es bilineal. Como ya hemos probado que es simétrica basta probar que:

$$G(\alpha f_1 + \beta f_2, h) = \alpha G(f_1,h) + \beta G(f_2,h)$$

para $f_1, f_2, h \in \text{End}(V)$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$$G(\alpha f_1+\beta f_2,h) \underset{\text{De } *}{=} \text{traza}(M(\alpha f_1+\beta f_2,B)\cdot M(h,B)^t) =$$

$$= \text{traza}((\alpha M(f_1,B)+\beta M(f_2,B))\cdot M(h,B)^t) =$$

$$= \text{traza}(\alpha M(f_1,B)\cdot M(h,B)^t + \beta M(f_2,B)\cdot M(h,B)^t) =$$

$$\underset{\text{traza}(C_1+C_2)=\text{traza}(C_1)+\text{traza}(C_2)}{=} \text{traza}(\alpha M(f_1,B)\cdot M(h,B)^t) + \text{traza}(\beta M(f_2,B)\cdot M(h,B)^t) =$$

$= \alpha \, \text{traza}\left(M(f_1,B) \cdot M(h,B)^t \right) + \beta \, \text{traza}\left(M(f_2,B) \cdot M(h,B)^t \right) =$

traza $(\alpha C) = \alpha$ traza (C)

$= \alpha \, G(f_1,h) + \beta \, G(f_2,h)$

De $*$

- Por último veamos que la métrica es euclídea.

Calculemos $G(f,f)$

$G(f,f) = \text{traza}\left(M(f,B) \cdot M(f,B)^t \right)$

De $*$

Observemos que si llamamos v_i al vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes viene dado por la i-ésima fila de $M(f,B)$ tenemos

$$M(f,B) \cdot M(f,B)^t = \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & * & \cdots & * \\ * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ * & \cdots & * & \|v_n\|^2 \end{pmatrix}$$

No nos interesa.

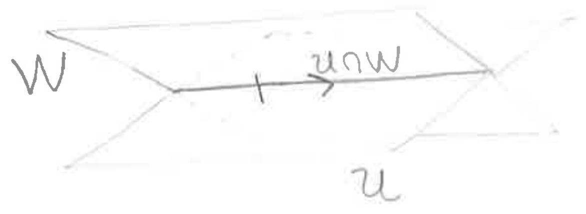
Norma en la métrica usual de $\mathbb{R}^n$

Por tanto $G(f,f) = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2 \geq 0$

Además $G(f,f) = 0$ entonces $\|v_i\| = 0 \;\; \forall \, i = 1, \ldots, n.$

Es decir $v_i = (0, \ldots, 0)$ y así f debe ser el endomorfismo nulo.

4.- Calculemos en primer lugar $U \cap W$.



$$U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x-z=0 \\ z=0 \end{matrix}\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=z=0\}$$

$$= L(\{(0,1,0)\})$$

Vamos a buscar una base ortonormal de U cuyo primer vector sea $u_1 = (0,1,0)$. Para ello, calculamos

$$(U \cap W)^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0\}$$

De aquí

$$U \cap (U\cap W)^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x-z=0 \\ y=0 \end{matrix}\} = L(\{(1,0,1)\})$$

Luego vamos a considerar

$$u_2 = \frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)$$

Finalmente buscamos u_3 vector unitario perpendicular a u_1 y u_2. Para ello podemos coger el vector director del plano U y hacerlo unitario. Es decir

$$u_3 = \frac{(1,0,-1)}{\|(1,0,-1)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1)$$

Vamos a hacer el mismo razonamiento para el plano W. Tomamos $w_1 = (0,1,0)$ y calculamos

$$W \cap (U\cap W)^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} z=0 \\ y=0 \end{matrix}\} = L(\{(1,0,0)\})$$

Por tanto $w_2 = (1,0,0)$.

Finalmente consideramos el vector director del plano W y lo hacemos unitario:

$$w_3 = \frac{(0,0,1)}{\|(0,0,1)\|} = (0,0,1).$$

Por tanto tenemos dos bases ortonormales:

$$B = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$B' = \{w_1, w_2, w_3\}$$

tal que $\mathcal{U} = L(\{u_1, u_2\})$ y $W = L(\{w_1, w_2\})$.

Por tanto una isometría que podemos considerar es:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que}$$

$$f(u_i) = w_i \qquad i = 1,2,3$$

Para calcular $M(f, B_u)$ podemos utilizar que

$$M(f, B, B') = I_3$$

y por tanto:

$$M(f, B_u) = M(Id_{\mathbb{R}^3}, B', B_u) \cdot M(f, B, B') \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}, B_u, B)$$

$$= M(Id_{\mathbb{R}^3}, B', B_u) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}, B, B_u)^t$$

$M(Id_{\mathbb{R}^3}, B_u, B)$ es ortogonal por ser B y B_u bases ortonormales de $(\mathbb{R}^3, g_u)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Para clasificar y describir la isometría observemos que:

$$\det(M(f, B_u)) = -1$$

Calculemos V_1

9

$$V_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} (\sqrt{2}-2)x + \sqrt{2}z = 0 \\ \cancel{\sqrt{2}x - (\sqrt{2}+2)z = 0} \end{matrix} \} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{2}-2)x + \sqrt{2}z = 0 \} =$$

$$= L(\{ (0,1,0), (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}+2) \})$$

Luego f es una simetría especular respecto al plano $V_1 = L(\{(0,1,0), (\sqrt{2},0,-\sqrt{2}+2)\})$.