1. Axioma del continuo (o de Dedekind)

Con esto se prueba el principio de los intervalos encajados

Si $\quad \varnothing \not\subset A, B \quad a \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad \Rightarrow \quad \exists\, x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b$

2. Teorema de la existencia de supremo e ínfimo

Si A es un conjunto de números reales no vacío y mayorado, entonces el conjunto de los mayorantes de A tiene mínimo, que recibe el nombre de supremo del conjunto A y se representa por $sup(A)$.

Análogamente, si A es un conjunto de números reales no vacío y minorado, entonces el conjunto de los minorantes de A tiene máximo, que recibe el nombre de ínfimo del conjunto A y se representa por $inf(A)$.

3. Densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ $\exists\, r \in \mathbb{Q}$ y $\exists\, \beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ verificando que $x < r < \beta < y$

4. Principio de los intervalos encajados

Con esto se prueba que $\mathbb{R}$ NO es numerable

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, J_n = [a_n, b_n]$ con $a_n \leq b_n$ y $J_{n+1} \subset J_n$
$\Rightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} J_n \neq \varnothing$, es decir, $\exists\, x \in \mathbb{R} : x \in J_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

5. Sucesiones monótonas y acotadas

Toda sucesión monótona y acotada es convergente. De hecho:

1. Si $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, se tiene $lim\{x_n\} = sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$
2. Si $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, entonces $lim\{x_n\} = inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$

6. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Toda sucesión acotada de números reales admite una sucesión parcial convergente.

7. Sucesiones de Cauchy y Teorema de complitud de $\mathbb{R}$

$\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy cuando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta \in \mathbb{N} : p, q \geq \delta \Rightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon$

Es decir, toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

El teorema de complitud dice que toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente

En definitiva tenemos:
$\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ es una sucesión convergente

8. Series convergentes. Criterio de comparación (desigualdad y paso al límite)

8.1. Criterio de desigualdad 1

Si $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ también es convergente y se verifica que:

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n$$

8.2. Criterio de desigualdad 2

Sean $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ dos series de números reales. Supongamos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $k > p$ se tiene $0 \leq a_k \leq b_k$, y que la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$ es convergente. Entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ también es convergente.

8.3. Criterio de paso al límite

Sean $a_n \geq 0$ y $b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, y supongamos que la sucesión $\{a_n/b_n\}$ converge a un límite $L \in \mathbb{R}$, que obviamente verifica $L \geq 0$.

1. Si $L > 0$, la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ equivale a la de la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$
2. Si $L = 0$, y la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ también es convergente.

9. Criterio de la raíz para series (criterio de Cauchy)

Sea $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. Si la sucesión $\sqrt[n]{a_n}$ no está acotada, o bien está acotada con $lim\ sup\{\sqrt[n]{a_n}\} > 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero, luego la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.
2. Si $\sqrt[n]{a_n}$ está acotada con $lim\ sup\{\sqrt[n]{a_n}\} < 1$ entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

10. Criterio del cociente (criterio de D'Alembert)

Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ está acotada.

1. Si $lim\ inf\{a_{n+1}/a_n\} > 1$, la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero y la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.
2. Si $lim\ sup\{a_{n+1}/a_n\} < 1$, la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.

11. Criterio de condensación de Cauchy

Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos, la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ equivale a la de $\sum_{n\geq 0} 2^n a_{2^n}$.

12. Convergencia de series absolutas

Toda serie absolutamente convergente es convergente. Más concretamente, dada una sucesión $\{x_n\}$ de números reales, si la serie $\sum_{n\geq 1} |x_n|$ es convergente, entonces $\sum_{n\geq 1} x_n$ también es convergente y se verifica que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

13. Funciones continuas. Carácter local de la continuidad. Caracterización de la continuidad

Sea $f : A \to R$ una función y $x \in A$. Se dice que f es continua en el punto x cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A que converja a x, se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$. Simbólicamente:
$x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{x_n\} \to x \quad \Rightarrow \quad \{f(x_n)\} \to f(x)$

13.1. Carácter local de la continuidad

Dada una función $f : A \to R$, para cualquier $x \in A$, siempre podemos tomar en el resultado anterior $B =]x-\delta, x+\delta[\cap A$, donde $\delta > 0$ se puede elegir con total libertad. Obtenemos que f es continua en x si, y sólo si, $f_{|B}$ es continua en x. Al pasar de f a $f_{|B}$, lo que hacemos es olvidar los valores de f en los puntos de $A \backslash B$, es decir, considerar solamente los valores de f en puntos suficientemente próximos a x, a distancia menor que un $\delta > 0$ arbitrariamente fijado. Por tanto, vemos que la continuidad de una función en cada punto x sólo depende de los valores de la función en puntos suficientemente próximos a x. A esto nos referimos al hablar del carácter local de la continuidad.

13.2. Caracterización $(\epsilon - \delta)$ de la continuidad.

Sea $f : A \to R$ una función y fijemos $x \in A$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La función f es continua en el punto x.
2. Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, que sea monótona y converja a x, se tiene que $\{f(x_n)\} \to f(x)$.
3. Para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $\delta > 0$ tal que, si $y \in A$ verifica que $|y - x| < \delta$, entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad y \in A, \; |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

14. Teorema del valor intermedio

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, $\forall k \in \mathbb{R} : f(a) < k < f(b)\, o\, f(b) < k < f(a)$, existe al menos un $c \in \mathbb{R}$ perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f(c) = k$.

15. Teorema de Weierstrass

Si una función f es continua en un intervalo compacto (cerrado y acotado) $[a, b]$ entonces hay al menos dos puntos x_1, x_2 pertenecientes a $[a, b]$ donde f alcanza valores extremos absolutos, es decir $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para cualquier $x \in [a, b]$.

16. Resultados que relacionan continuidad y monotonía

16.1. De la continuidad a la monotonía

Sea I un intervalo y $f : I \to R$ una función continua e inyectiva. Entonces f es estrictamente monótona.

16.2. De la monotonía a la continuidad

Si $f : A \to R$ es una función monótona, y $f(A)$ es un intervalo, entonces f es continua.