Distribución binomial (demostraciones)

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\quad x=0,1,\dots,n;\qquad M_X(t)=\left(pe^t+1-p\right)^n,\quad t\in\mathbb{R}.$$

- **Media:** $E[X]=np$

  ◇ *Cálculo a partir de la definición*:

$$E[X]=\sum_{x=0}^{n}x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\sum_{x=1}^{n}x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=^{1}=np\sum_{x=1}^{n}\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-x}=\begin{bmatrix} m=n-1\\ y=x-1\end{bmatrix}$$
$$=np\sum_{y=0}^{m}\binom{m}{y}p^y(1-p)^{m-y}=np.$$

  ◇ *Cálculo a partir de la función generatriz de momentos*:

$$E[X]=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=n\left(pe^t+1-p\right)^{n-1}pe^t\Big|_{t=0}=np.$$

- **Momento de orden dos:** $E[X^2]=n(n-1)p^2+np$

  ◇ *Cálculo a partir de la definición*: $E[X^2]=E[X(X-1)]+E[X]=E[X(X-1)]+np$

$$E[X(X-1)]=\sum_{x=0}^{n}x(x-1)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\sum_{x=2}^{n}x(x-1)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=^{2}$$
$$=n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}(1-p)^{n-x}=\begin{bmatrix} m=n-2\\ y=x-2\end{bmatrix}=n(n-1)p^2\sum_{y=0}^{m}\binom{m}{y}p^y(1-p)^{m-y}=$$
$$=n(n-1)p^2.$$

  ◇ *Cálculo a partir de la función generatriz de momentos*:

$$E[X^2]=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=n\Big[(n-1)\left(pe^t+1-p\right)^{n-2}p^2e^{2t}+pe^t\left(pe^t+1-p\right)^{n-1}\Big]_{t=0}=n(n-1)p^2+np.$$

- **Varianza:** $Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=np(1-p).$

---

[1] $x\neq 0\Rightarrow x\binom{n}{x}=n\binom{n-1}{x-1}$

[2] $x\neq 0,1\Rightarrow x(x-1)\binom{n}{x}=n(n-1)\binom{n-2}{x-2}$

Distribución de Poisson (demostraciones)

$$P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\quad x=\mathbb{N}\cup\{0\};\qquad M_X(t)=e^{\lambda\left(e^t-1\right)},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Aproximación de las probabilidades binomiales por las de Poisson:

$$X_n\to B(n,p_n)\ \Rightarrow \lim_{\substack{n\to+\infty\\ np_n\to\lambda}} P(X_n=x)=P(Y=x),\quad x\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \text{con } Y\to\mathcal{P}(\lambda).$$

Demostración:

$$P(X_n=x)=\binom{n}{x}p_n^x(1-p_n)^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}\frac{(np_n)^x}{n^x}(1-p_n)^{n-x}=\frac{(np_n)^x}{x!}\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}(1-p_n)^{n-x}$$

- $\displaystyle\lim_{\substack{n\to+\infty\\ np_n\to\lambda}}\frac{(np_n)^x}{x!}=\frac{\lambda^x}{x!}\cdot$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdots[n-(x-1)]}{n^x}=1$ (cociente de polinomios de grado x).
- $\displaystyle\lim_{\substack{n\to+\infty\\ np_n\to\lambda}} p_n=0\Rightarrow\lim_{\substack{n\to+\infty\\ np_n\to\lambda}}(1-p_n)^{n-x}=e^{\lim_{\substack{n\to+\infty\\ np_n\to\lambda}}(n-x)(-p_n)}=e^{-\lambda}.$ $\square$

- **Media:** $E[X]=\lambda$
  - ◇ *Cálculo a partir de la definición*:

$$E[X]=\sum_{x=0}^{+\infty}x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\sum_{x=1}^{+\infty}x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{+\infty}x\frac{\lambda^x}{x(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=[y=x-1]=\lambda e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{+\infty}\frac{\lambda^y}{y!}=\lambda.$$

  - ◇ *Cálculo a partir de la función generatriz de momentos*:

$$E[X]=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\lambda e^te^{\lambda(e^t-1)}\right|_{t=0}=\lambda.$$

- **Momento de orden dos:** $E[X^2]=\lambda^2+\lambda$
  - ◇ *Cálculo a partir de la definición*: $E[X^2]=E[X(X-1)]+E[X]=E[X(X-1)]+\lambda$

$$E[X(X-1)]=\sum_{x=0}^{+\infty}x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{+\infty}x(x-1)\frac{\lambda^x}{x(x-1)(x-2)!}=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}=[y=x-2]=\lambda^2$$

  - ◇ *Cálculo a partir de la función generatriz de momentos*:

$$E[X^2]=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\lambda\left.\Big(e^te^{\lambda(e^t-1)}+\lambda e^{2t}e^{\lambda(e^t-1)}\Big)\right|_{t=0}=\lambda(1+\lambda)..$$

- **Varianza:** $Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\lambda.$

Distribución geométrica (demostraciones)

$$P(X=x)=p(1-p)^x,\quad x=\mathbb{N}\cup\{0\}$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-(1-p)^{[x]+1}, & x\geq 0\end{cases}\quad ;\qquad M_X(t)=\frac{p}{1-(1-p)e^t},\quad t<-\ln(1-p).$$

- **Media:** $E[X]=\dfrac{1-p}{p}\cdot$

  ◇ *Cálculo a partir de la definición*:

$$E[X]=\sum_{x=0}^{+\infty}xp(1-p)^x=p(1-p)\sum_{x=0}^{+\infty}x(1-p)^{x-1}={}^3=p(1-p)\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p}\cdot$$

  ◇ *Cálculo a partir de la función generatriz de momentos*:

$$E[X]=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left[\frac{p(1-p)e^t}{(1-(1-p)e^t)^2}\right]_{t=0}=\frac{1-p}{p}\cdot$$

- **Momento de orden dos:** $E[X^2]=\dfrac{(1-p)(2-p)}{p^2}$

  ◇ *Cálculo a partir de la definición*: $E[X^2]=E[X(X-1)]+E[X]=\dfrac{2(1-p)^2}{p^2}+\dfrac{1-p}{p}=\dfrac{(1-p)(2-p)}{p^2}\cdot$

$$E[X(X-1)]=\sum_{x=0}^{+\infty}x(x-1)p(1-p)^x=p(1-p)^2\sum_{x=0}^{+\infty}x(x-1)(1-p)^{x-2}={}^4=p(1-p)^2\frac{2}{p^3}=\frac{2(1-p)^2}{p^2}\cdot$$

  ◇ *Cálculo a partir de la función generatriz de momentos*:

$$E[X^2]=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\left[\frac{p(1-p)(2-p)e^t}{(1-(1-p)e^t)^3}\right]_{t=0}=\frac{(1-p)(2-p)}{p^2}\cdot$$

- **Varianza:** $Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\dfrac{1-p}{p^2}\cdot$

Propiedad de falta de memoria:

$$X\to G(p)\ \Rightarrow\ P\left(X\geq h+k/X\geq h\right)=P\left(X\geq k\right),\quad \forall h,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Demostración:

$$P(X\geq x)=1-P(X<x)=1-F_X(x-1)=1-[1-(1-p)^x]=(1-p)^x,\quad \forall x\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

$$\Big\Downarrow\ k,h\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

$$P(X\geq h+k/X\geq h)=\frac{P(X\geq h+k,X\geq h)}{P(X\geq h)}=\frac{P(X\geq h+k)}{P(X\geq h)}=\frac{(1-p)^{h+k}}{(1-p)^h}=(1-p)^k=P(X\geq k).\qquad\square$$

---

[3] $|a|<1\ \Rightarrow\ \displaystyle\sum_{x=0}^{+\infty}xa^{x-1}=\frac{1}{(1-a)^2}$

[4] $|a|<1\ \Rightarrow\ \displaystyle\sum_{x=0}^{+\infty}x(x-1)a^{x-2}=\frac{2}{(1-a)^3}$

Distribución binomial negativa (demostraciones)

$$P(X=x)=\binom{x+k-1}{x}(1-p)^x p^k, \quad x\in\mathbb{N}\cup\{0\}\,; \qquad M_X(t)=\left[\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right]^k, \quad t<-\ln(1-p).$$

$$M_X(t)=[M_Y(t)]^k, \text{ con } Y\to G(p).$$

- **Media:** $E[X]=k\dfrac{1-p}{p}\cdot$

  ◇ $E[X]=\left.\dfrac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left[k\,(M_Y(t))^{k-1}\,\dfrac{dM_Y(t)}{dt}\right]_{t=0}=k\,(M_Y(0))^{k-1}\,\left.\dfrac{dM_Y(t)}{dt}\right|_{t=0}=kE[Y].$

- **Varianza:** $Var[X]=k\dfrac{1-p}{p^2}\cdot$

  ◇ $$E[X^2]=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=k\left[(k-1)\,(M_Y(t))^{k-2}\left(\frac{dM_Y(t)}{dt}\right)^2+(M_Y(t))^{k-1}\,\frac{d^2M_Y(t)}{dt^2}\right]_{t=0}=$$
  $$=k\left[(k-1)\,(M_Y(0))^{k-2}\left(\left.\frac{dM_Y(t)}{dt}\right|_{t=0}\right)^2+(M_Y(0))^{k-1}\,\left.\frac{d^2M_Y(t)}{dt^2}\right|_{t=0}\right]=$$
  $$=k\left[(k-1)(E[Y])^2+E[Y^2]\right]=k\left[k(E[Y])^2+E[Y^2]-(E[Y])^2\right]=k^2(E[Y])^2+kVar[Y]\cdot$$

  ◇ $Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=kVar[Y]\cdot$

Distribución hipergeométrica (demostraciones)

$$P(X=x)=\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}},\quad x=0,\ldots,n\ /\ x\leq N_1,\ n-x\leq N-N_1.$$

• **Media:** $E[X]=\sum_{x=0}^{n} x\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}}=n\frac{N_1}{N}\cdot$

$$\sum_{x=0}^{n} x\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}=^{5}=N_1\sum_{x=1}^{n}\binom{N_1-1}{x-1}\binom{N-N_1}{n-x}=[\ y=x-1\ ]=N_1\sum_{y=0}^{n-1}\binom{N_1-1}{y}\binom{N-N_1}{(n-1)-y}=$$

$$=N_1\binom{N-1}{n-1}\Rightarrow E[X]=\frac{N_1\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}=n\frac{N_1}{N}\cdot$$

• **Varianza:** $Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=E[X(X-1)]+E[X]-(E[X])^2=n\frac{N_1}{N}\left(1-\frac{N_1}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}\cdot$

$\diamond$ $E[X(X-1)]=\sum_{x=0}^{n}x(x-1)\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{N_1(N_1-1)}{\binom{N}{n}}\binom{N-2}{n-2}.$

$$\sum_{x=0}^{n}x(x-1)\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}=^{6}=N_1(N_1-1)\sum_{x=2}^{n}\binom{N_1-2}{x-2}\binom{N-N_1}{n-x}=[y=x-2]$$

$$=N_1(N_1-1)\sum_{y=0}^{n-2}\binom{N_1-2}{y}\binom{N-N_1}{(n-2)-y}=N_1(N_1-1)\binom{N-2}{n-2}.$$

---

[5] $x\neq 0\ \Rightarrow\ x\binom{N_1}{x}=N_1\binom{N_1-1}{x-1}$

[6] $x\neq 0,1\ \Rightarrow\ x(x-1)\binom{N_1}{x}=N_1(N_1-1)\binom{N_1-2}{x-2}$

Ejercicios del tema 6

1. *Un agente de seguros de vida realiza visitas con el fin de contratar un seguro. Por su trayectoria profesional, se sabe que en el 60 % de las visitas contrata seguro. Definir la variable asociada al resultado de la visita, y calcular su media y su desviación típica.*

2. *Un club de automovilistas comienza una campaña telefónica para aumentar su número de miembros. Por experiencias previas, se sabe que una de cada veinte personas que reciben la llamada se une al club. Si cada día se hacen 25 llamadas, calcular la probabilidad de que un determinado día se unan al club al menos dos personas. Calcular el número medio de personas que se unen al club cada día, y la varianza.*

3. *Un representante realiza 5 visitas diarias a los comercios de su ramo y, por experiencias previas, sabe que la probabilidad de que le hagan pedido en cada visita es 0.4. Calcular:*

a) Distribución del número de pedidos al día.

b) Valor medio y varianza del número de pedidos diarios.

c) Probabilidad de que en un día consiga entre uno y tres pedidos.

d) Probabilidad de que en un día consiga al menos tres pedidos.

4. *Se envían 20 invitaciones a los representantes estudiantiles para asistir a una conferencia. La probabilidad de que cada representante acepte la invitación, independientemente del resto, es 0.8. Determinar la probabilidad de que la acepten, como mínimo, 17 representantes.*

5. *El número medio de accidentes por mes en una empresa constructora es 3. Suponiendo que el número de accidentes en cualquier intervalo de tiempo tiene distribución de Poisson, calcular:*

a) Probabilidad de que no ocurra ningún accidente en un mes, de que ocurran menos de cinco, y de que ocurran más de tres.

b) Probabilidad de que ocurran exactamente nueve accidentes en un trimestre.

6. *El número medio de empresas que presentan suspensión de pagos es 6.8 por año. Admitiendo que el número de empresas que presentan suspensión de pagos en un intervalo de tiempo tiene distribución de Poisson, obtener:*

a) Probabilidad de que en un determinado trimestre, ninguna empresa presente suspensión de pagos.

b) Probabilidad de que al menos dos empresas presenten suspensión de pagos en un año.

7. *Se sabe que el 1 % de los artículos importados de un determinado país tiene algún defecto. Si se toma una muestra de 30 artículos elegidos de forma independiente, determinar la probabilidad de que tres de ellos o más sean defectuosos.*

8. *A una calculadora le fallan, por término medio, dos transistores en cada hora de trabajo, y se sabe que el número de transistores que fallan durante un intervalo de tiempo tiene distribución de Poisson. La calculadora deja de funcionar si se averían al menos seis transistores. Calcular la probabilidad de que una operación de tres horas pueda realizarse.*

9. *Un examen consta de 20 preguntas tipo test y se sabe que un determinado alumno tiene probabilidad 0.7 de contestar bien cada una de ellas, independientemente del resto. Calcular la probabilidad de que la primera pregunta que contesta bien sea la cuarta.*

10. *Una máquina produce piezas de alta precisión en serie, y la probabilidad de que cada una de ellas salga defectuosa, independientemente del resto, es 0.15.*

a) *Calcular la probabilidad de que al entrar en funcionamiento, la primera pieza defectuosa sea la número cuarenta.*

b) *Calcular la media y la varianza del número de piezas buenas fabricadas antes de la primera defectuosa.*

c) *Si en la fabricación de cada pieza se tardan veinte segundos, calcular el tiempo medio que hay que esperar desde que la máquina entra en funcionamiento hasta que se produce la primera pieza defectuosa.*

11. *Un examen consta de 20 preguntas tipo test y se sabe que un determinado alumno tiene probabilidad 0.7 de contestar bien cada una de ellas, independientemente del resto. Si para aprobar el examen es preciso contestar bien diez preguntas, calcular la probabilidad de que el alumno apruebe al contestar la duodécima.*

12. *En un invernadero se dispone de bulbos de tulipanes en macetas para ser transplantados. Un mes antes de proceder al transplante se sabe que el 40% de las macetas supera los 22 cm requeridos para el mismo. Si se efectúa un muestreo con reemplazamiento del conjunto total de macetas, ¿Cuál es la probabilidad de que haya que examinar siete macetas hasta encontrar la tercera en condiciones de ser transplantada?*

13. *Veinte propietarios de una comunidad de vecinos, de los que ocho son mujeres, deben seleccionar cinco para asistir a una reunión de mancomunidad. ¿Cuál es la probabilidad de que asistan exactamente tres mujeres a la reunión?*

14. *Se presentan cuarenta personas a un proceso de selección aleatoria de veinte para aumentar la plantilla de una empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los seleccionados estén los diez mejores que se presentaron?*