Tema 3

Aplicaciones lineales

En este tema, nuestro objetivo será el de estudiar aplicaciones entre distintos espacios vectoriales (sobre el mismo cuerpo) que "preserven" o "respeten" las operaciones propias de cada espacio. Estas aplicaciones, a las que llamaremos *lineales*, conllevan un *rango*, que se relacionará con el de las matrices. También permiten introducir el concepto *isomorfismo de e.v.* el cual, en el caso finitamente generado, hace resaltar la importancia de los e.v. $K^n(K)$. Interpretaremos las matrices $m \times n$ a partir de aplicaciones lineales entre espacios $K^n(K)$, $K^m(K)$, lo que nos permitirá entender mejor tanto las propiedades de las matrices como las de las aplicaciones lineales. Finalmente, ganaremos en abstracción introduciendo el concepto de *espacio dual*. Entre otras aplicaciones, este concepto permite dar una interpretación geométrica de la trasposición de una matriz y sus propiedades. En adelante, siempre consideraremos dos e.v. $V(K)$, $V'(K)$ construidos sobre el mismo cuerpo conmutativo K.

3.1. El concepto de aplicación lineal

3.1.1. Definición y primeras propiedades

Definición 3.1. *Dados dos e.v., $V(K), V'(K)$, una aplicación $f : V \to V'$ se dice que es* lineal *u* homomorfismo de espacios vectoriales *si verifica las siguientes dos propiedades:*

(i) *Es un homomorfismo de grupos, entre $(V,+)$ y $(V',+)$, esto es:*
$f(u+v) = f(u) + f(v)$, $\forall u,v \in V$.

(ii) $f(a \cdot v) = a \cdot v$, $\forall u \in V$, $\forall a \in K$.

Nota 3.2. El nombre de *homomorfismo de grupos* para la primera propiedad es general para aplicaciones entre dos grupos cualesquiera. De hecho, las propiedades que obtengamos para las aplicaciones lineales y que no dependan del producto por escalares, resultan válidas también para cualquier homomorfismo de grupos.

Podemos resumir las dos condiciones anteriores en una única:

Proposición 3.3. *Una aplicación $f : V \to V'$ es lineal si y sólo si verifica:*

$$f(a \cdot u + b \cdot v) = a \cdot f(u) + b \cdot f(v) \qquad \forall u,v \in V, \quad \forall a,b \in K.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Aplicando primero (i) y después (ii):

$$f(a\cdot u+b\cdot v)=f(a\cdot u)+f(b\cdot v)=a\cdot f(u)+b\cdot f(v)$$

($\Leftarrow$) Aplicando la condición expresada:

$$\begin{aligned} f(u+v)= &\quad f(1\cdot u+1\cdot v)=1\cdot f(u)+1\cdot f(v)=f(u)+f(v) \\ f(a\cdot v)= &\quad f(a\cdot v+0\cdot\vec{0})=a\cdot v+0\cdot f(\vec{0})=a\cdot v \end{aligned}$$

donde 0 y $\vec{0}$ son, resp., el escalar nulo de K y el vector nulo de V. ∎

Algunas propiedades simples de las aplicaciones lineales son las siguientes:

Proposición 3.4. *Sea $f:V\to V'$ una aplicación lineal. Se verifica:*

1. $f(0)=0$ *(esto es, $f(\vec{0})=\vec{0}'$ donde $\vec{0}$ y $\vec{0}'$ son, resp. los vectores nulos de V y V').*
2. $f(-v)=-f(v)$, $\forall v\in V$.
3. $f(\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot u_i)=\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot f(u_i)$, $\forall u_i\in V$, $\forall a_i\in K$, $\forall i\in\{1,\ldots,k\}$.
4. *Si $S\subset V$ entonces*[1] $f(L(S))=L(f(S))$.
5. *Si U es un s.v. de V, entonces $f(U)$ es un s.v. de V'. En particular, $Im(f)$ es un s.v. de V'.*
6. *Si U' es un s.v. de V' entonces*[2] $f^{-1}(U')$ *es un s.v. de V.*

Demostración. 1. Claramente, $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$, donde en la última igualdad se usa la propiedad (i) de las aplicaciones lineales. El resultado se sigue sumando $-f(0)$ a ambos miembros.

2. Para demostrar que $f(-v)$ es el opuesto de $f(v)$, operamos ambos elementos y comprobamos que se obtiene el vector cero de V': $f(v)+f(-v)=f(v+(-v))=f(0)=0$ (la primera igualdad por la propiedad (i), la segunda por ser $-v$ el opuesto de v, y la tercera por el punto 1 anterior).

3. Inmediato por inducción sobre el número de sumandos.

4. Si S es un conjunto finito, $S=\{u_1,\ldots,u_m\}$, el punto 3 anterior afirma que la imagen de cualquier elemento en $L(S)$ es una combinación lineal de $f(S)=\{f(u_1),\ldots,f(u_m)\}$, y viceversa, lo que prueba la doble inclusión. Si S es infinito, el problema se reduce al caso finito, porque en las combinaciones lineales de S y $L(S)$ sólo interviene un conjunto finito de vectores.

5. Sean $u',w'\in f(U)$, por lo que existen $u,w\in U$ tales que $f(u)=u',f(w)=w'$, y sean $a,b\in K$. La pertenencia de $au'+bw'$ a $f(U)$ se deriva de la linealidad de f:

$$au'+bw'=af(u)+bf(w)=f(au+bw)\in f(U)$$

(la pertenencia de $au+bw$ a U, consecuencia de que U sea un s.v. y $u,w\in U$). Para la última afirmación, basta con aplicar la primera a $f(V)=\mathrm{Im}(f)$.

[1] Abusando de la notación, para cada $C\subset V$ denotamos por $f(C)$ a lo que, rigurosamante, es $f_*(C):=\{f(v):v\in C\}$ (recuérdese que $f_*:\mathcal{P}(V)\to\mathcal{P}(V')$ era la aplicación imagen directa entre los conjuntos de las partes de V y V').

[2] Abusando de la notación, para cada $C'\subset V'$ denotamos por $f^{-1}(C')$ a $f^*(C'):=\{v\in V:f(v)\in C'\}\subset V$ (recuérdese que $f^*:\mathcal{P}(V')\to\mathcal{P}(V)$ era la aplicación imagen recíproca). Remarquemos que f no tiene por qué ser biyectiva, esto es, f^{-1} no denota la aplicación inversa aquí.

6. Sean $u,w \in f^{-1}(U')$, por lo que existen $u',w' \in U'$ tales que $f(u) = u', f(w) = w'$, y sean $a,b \in K$. Usando la linealidad de f,

$$f(au+bw) = af(u)+bf(w) = au' + bw' \in U'$$

(la pertenencia de $au' + bw'$ a U', consecuencia de que U' es un s.v. y $u',w' \in U'$). Por tanto, $au+bw \in f^{-1}(U')$, como se quería demostrar. ∎

Nota 3.5. Los puntos 1 y 2 de la proposición anterior se han demostrado usando solamente la propiedad (i) de las aplicaciones lineales. Por esto, resultan válidas para cualquier homomorfismo de grupos (véase la nota 3.2 anterior). No obstante, ambos puntos se pueden demostrar también usando sólo la propiedad (ii) (hágase como ejercicio).

Como ejemplos sencillos y generales de aplicaciones lineales se tienen:

1. La aplicación identidad $I_V : V \to V$, $I_V(v) := v$, para todo $v \in V$ (que también denotaremos simplemente I), es claramente lineal en cualquier e.v. $V(K)$. Es de remarcar que las estructuras de e.v. que soporta V en el dominio y el codominio de I_V se entiende que son la misma.

2. La aplicación nula $f_0 : V \to V'$, $f_0(v) := 0$ para todo $v \in V$, (que también denotaremos simplemente 0) es claramente lineal para todo par de e.v., $V(K)$ y $V'(K)$.

   La aplicación nula puede verse como un caso particular de aplicación constante. Concretamente, sea $v'_0 \in V'$ un vector fijo y definamos la aplicación constante igual a v'_0 como $f_{v'_0} : V \to V'$, $f_{v'_0}(v) := v'_0$, para todo $v \in V$. Claramente, de entre todas la aplicaciones constantes de V a V' la aplicación nula es la única lineal (¿por qué?).

3. La homotecia de razón $\lambda \in K \setminus \{0,1\}$, dada por $H_\lambda : V \to V$, $H_\lambda(v) = \lambda v, \forall v \in V$, es claramente lineal (compruébese, ¿qué pasaría si K no fuera conmutativo?).

4. Si $U \subset V$ es un s.v. de $V(K)$, la aplicación inclusión $i : U \to V$, $i(u) = u$ para todo $u \in U$, es claramente lineal.

5. Generalizando el ejemplo anterior, si $f : V \to V'$ es lineal y $U \subset V$ es un s.v., la restricción de f a U, $f|_U : U \to V$ es una aplicación lineal.

   El ejemplo anterior es el caso particular del presente cuando f es I_V y, por tanto $i = (I_V)|_U$.

Ejemplo 3.6. [Aplicaciones lineales y K^n] (i) Se considera en $K^n(K)$ la $i-$ésima proyección $p_i : K^n \to K$ definida por $p_i((x_1,\dots,x_n)) = x_i$, para todo $(x_1,\dots,x_n) \in K^n$. Claramente, esta aplicación es lineal.

(ii) Sea $A \in M_{m\times n}(K)$. Considerando los elementos de K^n y K^m como columnas, la aplicación $f_A : K^n \to K^m$ dada por $f_A(x) = A \cdot x$, también es claramente lineal. Como veremos a lo largo del tema, toda aplicación lineal de K^n en K^m se puede escribir de este modo.

(iii) Fijemos n vectores $\{v_1,\dots,v_n\}$ de $V(K)$. La aplicación $f : K^n \to V$, dada por $f((x_1,\dots,x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ es lineal (generalizaremos este ejemplo en el teorema 3.8).

Ejercicio 3.7. *Sea $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el conjunto de todas las apicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y U el conjunto de todas las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que son derivables en todo punto (que es un s.v. de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Demostrar que la aplicación* Der: $U \to F(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, que a cada función h le hace corresponder su función derivada h' (esto es, $h \mapsto h'$), es lineal.*

3.1.2. Construcción de aplicaciones lineales extendiendo por linealidad

Veremos a continuación que toda aplicación lineal queda determinada cuando se prescriben las imágenes de los vectores de una base, y construiremos explícitamente la aplicación.

Teorema 3.8. *Sea $V(K)$ un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base suya. Sea $(w'_1, \ldots, w'_n)$ una n-upla de vectores de $V'(K)$. Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \to V'$ que verifica $f(v_i) = w'_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demostración. Para demostrar la existencia de f, construyámosla explícitamente mediante el siguiente procedimiento. Como cada $v \in V$ se escribe como $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ para ciertos escalares a_i (las coordenadas de v en B) unívocamente determinados, podemos definir sin ambigüedad una aplicación $f : V \to V'$ como:

$$f(v) = \sum_{i=1}^n a_i w'_i.$$

Claramente, $f(v_i) = w'_i$, pues $(v_i)_B = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0)$, donde el 1 aparece en la posición i-ésima. Para demostrar que f es lineal, si tomamos un segundo vector genérico $w = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ y dos escalares cualesquiera $a, b \in K$ se tiene, sin más que usar las propiedades de los sumatorios:

$$av + bw = a \sum_{i=1}^n a_i v_i + b \sum_{i=1}^n b_i v_i = \sum_{i=1}^n (aa_i + bb_i) v_i,$$

Por tanto:

$$f(av + bw) = \sum_{i=1}^n (aa_i + bb_i) w'_i = a \sum_{i=1}^n a_i w'_i + b \sum_{i=1}^n b_i w'_i = af(v) + bf(w),$$

la primera y tercera igualdades por la definición de f, y la segunda por las propiedades de los sumatorios, con lo que se prueba la linealidad. Para comprobar la unicidad de f, obsérvese que si $\bar{f}$ fuera otra aplicación lineal que satisfaciera las mismas propiedades se tendría:

$$\bar{f}(v) = \bar{f}(\sum_{i=1}^n a_i v_i) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{f}(v_i) = \sum_{i=1}^n a_i w'_i = f(v)$$

(la segunda y tercera igualdades por las condiciones impuestas a $\bar{f}$, y la tercera por la definición de f), lo que concluye el resultado. ∎

Observación 3.9. (1) No se impone ninguna restricción sobre los vectores w'_i (por ejemplo, podrían ser todos iguales). No obstante, es inmediato de la construcción que la familia $\{w'_1, \ldots, w'_n\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$. Además, veremos a lo largo del tema que esta familia es linealmente independiente (resp. un sistema de generadores, una base) en V' si y sólo si f es inyectiva (resp. suprayectiva, biyectiva)

(2) Al procedimiento constructivo de f en el teorema 3.8 se le llama *extensión por linealidad* (de los valores de f sobre la base B).

(3) En este teorema se ha supuesto que $V(K)$ es finitamente generado. No obstante, si se elimina esta restrición y se fijan una base (posiblemente infinita) B y una aplicación $B \to V'$, $v_i \mapsto w'_i$, entonces el mismo procedimiento de extensión por linealidad demuestra la existencia de una única aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que $f(v_i) = w'_i$ para todo $v_i \in B$. Obsérvese que en ningún caso se ha supuesto que $V'(K)$ sea finitamente generado.

(4) Del teorema se concluye que dos aplicaciones lineales son iguales si coinciden en *alguna* base.

3.1.3. Tipos de aplicaciones lineales. Isomorfismos

El siguiente resultado proporciona un modo de construir aplicaciones lineales a partir de otras, y será usado en la discusión de los tipos de aplicaciones lineales.

Proposición 3.10. *Sean V, V', V'' tres e.v. sobre el mismo cuerpo K, y sean $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ aplicaciones lineales.*
(1) La composición $g \circ f : V \to V''$ es una aplicación lineal.
(2) Si f es biyectiva entonces la aplicación inversa $f^{-1} : V' \to V$ es lineal.

Demostración. (1) Para todo $v, w \in V$, $a, b \in K$:

$$g\circ f(av+bw) = g(f(av+bw)) = g(af(v)+bf(w)) = ag(f(v))+bg(f(w)) = a(g\circ f)(v)+b(g\circ f)(w)$$

(la linealidad de f y de g se usan, resp., en la segunda y tercera igualdades), como se quería.

(2) Para comprobar $f^{-1}(av'+bw') = af^{-1}(v')+bf^{-1}(w'), \forall v', w' \in V', a, b \in K$, basta con demostrar que las imágenes por f de ambos miembros de esta igualdad coinciden (la inyectividad de f implica entonces que son iguales), esto es:

$$f(af^{-1}(v')+bf^{-1}(w')) = af(f^{-1}(v'))+bf(f^{-1}(w')) = av'+bw' = f(f^{-1}(av'+bw'))$$

(la primera igualdad por la linealidad de f), como se quería. ∎

Definición 3.11. *Diremos que una aplicación lineal $f : V \to V'$ es un:*
- monomorfismo *si f es inyectiva*
- epimorfismo *si f es suprayectiva (esto es, sobre, exhaustiva).*
- isomorfismo *si f es biyectiva*

En el caso $V = V'$ diremos que f es un endomorfismo. *Si f es un endomorfismo biyectivo diremos que es un* automorfismo *(del e.v. $V(K)$).*

Corolario 3.12. *La composición de dos monomorfismos (resp. epimorfismos, isomorfismos) es un monomorfismo (resp. epimorfismo, isomorfismo).*

Demostración. Por la proposición 3.10(1) se sabe que la composición de aplicaciones lineales es lineal, y por las propiedades de las aplicaciones entre conjuntos que la composición de dos aplicaciones inyectivas (resp. suprayectivas, biyectivas) es inyectiva (resp. suprayectiva, biyectiva). ∎

Definición 3.13. *Se dice que $V(K)$ es isomorfo a $V'(K)$ si existe un isomorfismo de e.v. de V a V' (esto es, con dominio V y codominio V').*

Proposición 3.14. *La relación "ser isomorfo a" en la clase de todos los e.v., es una relación de equivalencia, esto es, verifica las propiedades:*
(i) Reflexiva: todo e.v. es isomorfo a sí mismo.
(ii) Simétrica: si $V(K)$ es isomorfo a $V'(K)$ entonces $V'(K)$ es isomorfo a $V(K)$.
(iii) Transitiva: si $V(K)$ es isomorfo a $V'(K)$ y $V'(K)$ es isomorfo a $V''(K)$ entonces $V'(K)$ es isomorfo a $V(K)$

Demostración. (i) Inmediato de que la aplicación identidad es un isomorfismo.

(ii) Inmediato de que (por lo proposición 3.10(2)), si $f : V \to V'$ es un isomorfismo entonces $f^{-1} : V' \to V$ es un isomorfismo.

(iii) Inmediato de que la composición de dos isomorfismos es un isomorfismo. ∎

El próximo resultado muestra que en la clase de equivalencia de cada e.v. finitamente generado existe un e.v. del tipo $K^n(K)$.

Proposición 3.15. *Sea $V(K)$ un e.v. de dimensión $n \in N$ y sea $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base. La aplicación:*

$$b_B : K^n \to V, \qquad b_B(x_1,\ldots,x_n) := \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \qquad \forall (x_1,\ldots,x_n) \in K^n$$

es un isomorfismo de e.v.

Demostración. Es inmediato comprobar que b_B es lineal. La inversa de esta aplicación es la que asigna a cada vector sus coordenadas en la base B. Por tanto, la inyectividad es consecuencia de la unicidad de las coordenadas en la base (la indepencia lineal de B) y la suprayectividad de que tales coordenadas existan (B es un sistema de generadores). La linealidad se puede comprobar como ejercicio (véase el ejemplo 3.6(iii)). ∎

Observación 3.16. Del hecho de que b_B es lineal y biyectiva se deduce que b_B^{-1} es lineal también (proposición 3.10(2)). No obstante, es fácil de deducir directamente la linealidad de la aplicación que a cada vector de un e.v. le hace corresponder sus coordenadas en B (de hecho, esta propiedad se usó implícitamente en el tema anterior al aplicar matrices).

3.2. Núcleo, imagen y rango

3.2.1. Propiedades del núcleo paralelas a las de la imagen

Definición 3.17. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. El* núcleo *de f se define como el subconjunto:*

$$\mathrm{Nuc}(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : f(v) = 0\}.$$

Sabemos de la proposición 3.4(5) que $\mathrm{Im}(f)$ es un subespacio vectorial de V' y, (como en cualquier aplicación, sea lineal o no) f es suprayectiva si y sólo si $\mathrm{Im}(f) = V'$. Veamos a continuación resultados para el núcleo con cierto paralelismo a los de la imagen.

Proposición 3.18. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal:*

(i) $\mathrm{Nuc}(f)$ *es un subespacio vectorial de V.*

(ii) f es inyectiva si y sólo si $\mathrm{Nuc}(f) = \{0\}$.

Demostración. (i) Consecuencia inmediata de la proposición 3.4(6) (aplicada a $U' = \{0\}$).

(ii) Observemos en primer lugar que, por la proposición 3.4(1), siempre $0 \in \mathrm{Nuc}(f)$. Si suponemos que f es inyectiva, no puede existir otro vector $v \neq 0$ en $\mathrm{Nuc}(f)$, pues violaría la inyectividad ($f(0) = f(v)$, $0 \neq v$). Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{Nuc}(f) = \{0\}$. Si $f(v) = f(w)$ para ciertos $u, w \in V$ entonces $f(v-w) = f(v) - f(w) = 0$. Esto es, $v - w \in \mathrm{Nuc}(f) = \{0\}$ y $v = w$, como se quería. ∎

Definición 3.19. *Sea $f : V \to V'$. Llamaremos* nulidad *de f a la dimensión de* $\mathrm{Nuc}(f)$*, y* rango *de f a la dimensión de* $\mathrm{Im}(f)$*, y los denotaremos, $n(f)$ y $r(f)$, resp.*

Corolario 3.20. *Si $f : V \to V'$ es lineal entonces $r(f) \leq dim_K V$. Más aún, si U es un s.v. de V entonces $dim(f(U)) \leq dim(U)$.*

Demostración. Para la primera afirmación úsese la observación 3.9(1), y para la segunda aplíquese la primera a $f|_U$. ∎

3.2.2. Caracterizaciones y existencia de monomorfismos y epimorfismos

Caracterizamos a continuación la inyectividad y suprayectividad mediante los conceptos de independencia lineal y sistema de generadores.

Teorema 3.21. *Para cualquier $f : V \to V'$ lineal:*

1. *Equivalen:*
   - a) *f es un monomorfismo.*
   - b) *Si $S \subset V$ es linealmente independiente entonces $f(S)$ es l.i.*
   - c) *Existe una base B de V tal que $f(B)$ es l.i.*
2. *Equivalen:*
   - a) *f es un epimorfismo.*
   - b) *Para todo sistema de generadores $S \subset V$, se tiene que $f(S)$ es un s.d.g. de V'.*
   - c) *Existe un sistema de generadores $S \subset V$, tal que $f(S)$ es un s.d.g. de V'.*
3. *Equivalen:*
   - a) *f es un isomorfismo.*
   - b) *Para toda base $B \subset V$, se tiene que $f(B)$ es una base de V'.*
   - c) *Existe una base $B \subset V$, tal que $f(B)$ es una base de V'.*

Demostración. En cada punto demostraremos cíclicamente a)⇒ b) ⇒ c) ⇒ a).

1. a) ⇒ b). Sea $\{w'_1, \dots, w'_m\} \subset f(S)$, donde $w'_i = f(w_i)$ para todo $i = 1, \dots, m$ y $\{w_1, \dots, w_n\} \subset S$. Tomemos una combinación lineal igualada a 0,

$$0 = a_1 w'_1 + \cdots + a_n w'_m = a_1 f(w_1) + \cdots + a_n f(w_m) = f(a_1 w_1 + \cdots + a_n w_m).$$

Como $f(0) = 0$ y f es inyectiva se sigue $a_1 w_1 + \cdots + a_n w_m = 0$, y por ser S l.i. todos los escalares son nulos, como se quería. b) ⇒ c) Inmediato, supuesto que se sabe de la existencia de alguna base B en V. Esto se demostró en el caso finitamente generado, y ya se comentó allí que esto era cierto en todo espacio vectorial. c) ⇒ a) Supongamos que f no es inyectiva, y sea entonces $u \in \mathrm{Nuc}(f) \setminus \{0\}$. Escribiendo u como combinación lineal de B, $u = a_1 v_1 \cdots + a_n v_n$, con $\{v_1, \dots, v_n\} \subset B$ y, necesariamete, no todos los escalares $a_1, \dots, a_n \in K$ nulos, se tiene

$$0 = f(u) = f(a_1 v_1 \cdots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$$

en contradicción con la independencia lineal de $f(B)$.

2. a)$\Rightarrow$ b) Sea $v' \in V'$. Por la suprayectividad, existe $v \in V$ tal que $f(v) = v'$. Por ser S un sistema de generadores, existen $w_1, \ldots, w_m \in S$ y escalares $a_1, \ldots, a_m \in K$ tales que $v = a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m$. Por tanto:

$$v' = f(v) = f(a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m) = a_1 f(w_1) + \cdots + a_m f(w_m) \in L(f(S)),$$

como se quería. b) $\Rightarrow$ c) Tomando $S = V$ se sigue trivialmente. c) $\Rightarrow$ a) Como f es lineal, $\mathrm{Im}(f)$ es un subespacio vectorial de V', luego $L(f(S)) \subset \mathrm{Im}(f)$ y, por ser $f(S)$ un s.d.g., $\mathrm{Im}(f) = V'$.

3. Inmediato de las correspondientes implicaciones en los puntos 1 y 2. ∎

Como consecuencia, se obtiene el siguiente resultado que complementa al teorema 3.8.

Corolario 3.22. *Sea $f : V \to V'$ lineal, y sea B una base de V.*

1. *$f(B)$ es linealmente independiente si y sólo si f es inyectiva. En este caso, $\dim_K V \leq \dim_K V'$.*

2. *$f(B)$ es un sistema de generadores si y sólo si f es suprayectiva. En este caso, $\dim_K V \geq \dim_K V'$.*

3. *$f(B)$ es una base si y sólo si f es biyectiva. En este caso, $\dim_K V = \dim_K V'$.*

Demostración. Las únicas afirmaciones que no están contenidas en el teorema 3.21 son las referentes a las dimensiones. En el caso de que V tenga dimensión[3] $n \in \mathbb{N}$, la primera (resp. segunda, tercera) afirmación se deduce de que $f(B)$ es un subconjunto linealmente independiente (resp. un sistema de generadores, una base) de V con n elementos. En el caso de que V no sea finitamente generado entonces las expresiones $\dim_K V \leq \dim_K V'$ y $\dim_K V = \dim_K V'$ de los casos 1 y 3, resp., deben entenderse simplemente como que V' no es finitamente generado (lo que resulta obvio, pues $f(B)$ es infinito y linealmente independiente), mientras que la expresión $\dim_K V \geq \dim_K V'$ del punto 2 no implica ninguna restricción sobre si V' es finitamente generado o no[4]. ∎

El teorema 3.8 también se puede combinar con los resultados anteriores para concluir que las restricciones sobre las dimensiones en el corolario 3.22, las cuales eran necesarias para la existencia de un monorfismo o un epimorfismo, también son suficientes para su existencia. Por simplicidad, nos restringiremos a dimensión finita, aunque el resultado es cierto sin esta restricción.

Corolario 3.23. *Sean $V(K)$ y $V'(K)$ e.v. de dimensiones $n, m \in \mathbb{N}$, resp.*

1. *Existe un monomorfismo de V a V' si y sólo si $n \leq m$.*

2. *Existe un epimorfismo de V a V' si y sólo si $n \geq m$.*

3. *Existe un isomorfismo de V a V' si y sólo si $n = m$.*

[3]Si $V = \{0\}$ las afirmaciones siguen teniendo sentido tomando $B = \emptyset$ y $L(\emptyset) = 0$, como se explicó en el tema anterior.

[4]No obstante, las desigualdades entre las dimensiones en el caso de que V no sea finitamente generado también pueden interpretarse en el sentido más fuerte de que el cardinal de la base B es mayor, menor o igual que el de cualquier base de V'. Aunque bajo esta interpretación los resultados siguen siendo ciertos, su demostración excede nuestros objetivos.

Demostración. Las implicaciones hacia la derecha en los puntos 1, 2 y 3 están contenidas en el corolario 3.22 anterior. Para las implicaciones hacia la izquierda, sean B y B' bases de V y V', resp. Si $n \leq m$ (resp. $n \geq m$, $n = m$) existe una aplicación inyectiva (resp. suprayectiva, biyectiva) de B a B'. Extendiendo esta aplicación por linealidad (teorema 3.8) se obtiene una aplicación lineal de V a V' que es un monomorfismo (resp. epimorfismo, isomorfismo) por el corolario 3.22. ∎

Aunque inmediata, insistimos en la siguiente importante consecuencia.

Corolario 3.24. *Sean $V(K)$ y $V'(K)$ dos e.v..*

- *V y V' son isomorfos si y sólo si tienen igual dimensión.*
- *Si $V(K)$ es f.g. entonces es isomorfo o bien a $K^n(K)$, para un único $n \in \mathbb{N}$, o bien*[5] *a* $\{0\}$.
- *Si $f : V \to V'$ es un isomorfismo y U un s.v. de V, entonces $dim_K U = dim_K(f(U))$*

Demostración. Las dos primeras afirmaciones son inmediatas del punto 3 del corolario anterior. Para la tercera, como $f(U)$ es un s.v. de V' (proposición 3.4(5)), basta con observar que la aplicación $U \to f(U)$, $v \mapsto f(v)$ (obtenida restringiendo el dominio y codominio de f) es un isomorfismo. ∎

Observación 3.25. Esencialmente, este corolario reduce el estudio de los e.v. finitamente generados al caso de $K^n(K)$. De hecho, implícitamente se usa la última afirmación cuando, dada una base $\mathcal{B}$, para calcular la dimensión de un s.v. de V, se toma un s.d.g. finito y se calcula el rango de la matriz obtenida con sus coordenadas.

3.2.3. Teorema del rango

Demostraremos a continuación una importante relación entre el núcleo y la imagen de una aplicación lineal o, con más precisión, entre su nulidad $n(f)$ y rango $r(f)$ (definición 3.19).

Teorema 3.26. *Sea $f : V \to V'$ lineal tal que $dim_K V = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces,*

$$dim_K V = dim_K(\mathrm{Nuc}(f)) + dim_K(Im(f)), \qquad \textit{esto es,} \qquad n = n(f) + r(f).$$

Demostración. Tomemos una base $B_{\mathrm{Nuc}f}\{v_1, \dots, v_{n(f)}\}$ de $\mathrm{Nuc}(f)$ y ampliémosla a una base de $V(K)$, $B = \{v_1, \dots, v_{n(f)}, v_{n(f)+1}, \dots, v_n\}$. Sabemos que $f(B)$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$ (vease la observación 3.9(1)) y, puesto que los vectores v_i con $i \leq n(f)$ se aplican en 0, el conjunto $\{f(v_{n(f)+1}), \dots, f(v_n)\}$ es también un s.d.g de $\mathrm{Im}f$. Como este conjunto tiene $n - n_f$ vectores, basta con comprobar que es linealmente independiente (pues se obtiene entonces el resultado $r(f) = n - n(f)$). Tomemos por tanto una combinación lineal suya igualada a 0:

$$0 = a_{n(f)+1} f(v_{n(f)+1}) + \cdots + a_n f(v_n) = f(a_{n(f)+1} v_{n(f)+1} + \cdots + a_n v_n),$$

la última igualdad aplicando la linealidad de f. La formula anterior implica que $a_{n(f)+1} v_{n(f)+1} + \cdots + a_n v_n \in \mathrm{Nuc}(f)$ y, por tanto, este vector se puede escribir como combinación lineal de los elementos de $B_{\mathrm{Nuc}f}$. Esto es, para ciertos escalares $a_1, \dots, a_{n(f)}$ se tiene:

$$a_{n(f)+1} v_{n(f)+1} + \cdots + a_n v_n = a_1 v_1 + \cdots + a_{n(f)} v_{n(f)}.$$

[5] La disyuntiva de casos se evita definiendo $K^0 := \{0\}$.

Pasando los términos del segundo miembro al primero, se tiene una combinación de la base B igualada a 0. Por tanto, todos los coeficientes de la combinación deben ser nulos y, en particular, $a_{n(f)+1} = \cdots = a_n = 0$, como se quería demostrar. ∎

Como una aplicación de este teorema se tiene:

Corolario 3.27. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre espacios finitamente generados de igual dimensión. Equivalen:*
(i) f es biyectiva,
(ii) f es inyectiva, y
(iii) f es suprayectiva.

Demostración. Sea n la dimensión común. De la igualdad $n = n(f) + r(f)$ se deduce: f es inyectiva (esto es, $n(f) = 0$), si y sólo si $r(f) = n$ (esto es, f es suprayectiva). ∎

3.3. Expresión matricial de una aplicación lineal

Sabemos que, dada una matriz $A \in M_{m\times n}(K)$, se puede definir la aplicación lineal $f_A : K^n \to K^m$ sin más que multiplicar por A las n-úplas del dominio, consideradas como columnas (véase ejemplo 3.6(ii)). Teniendo en cuenta que, usualmente, consideramos los elementos de K^n y K^m como filas, mientras que escritos por columnas representan las coordenadas en la base usual $\mathcal{B}_u^n$ de K^n y $\mathcal{B}_u^m$ de K^m, podemos expresar f_A como sigue:

$$f_A : K^n \to K^m, \qquad (f_A(x))_{\mathcal{B}_u^m} = A \cdot x_{\mathcal{B}_u^n}. \tag{3.1}$$

Nuestro objetivo será mostrar cómo, aunque en espacios vectoriales arbitrarios no existe ninguna base preferida (a la que podamos llamar usual o canónica), cualquier aplicación lineal se puede representar de esta forma, una vez escogidas bases del dominio y codominio. A lo largo de toda esta sección V y V' serán siempre espacios vectoriales de dimensiones $n, m \in \mathbb{N}$, respectivamente.

3.3.1. Matriz asociada a una aplicación lineal

Definición 3.28. *Sea $f : V \to V'$ lineal y sean $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_m)$ bases de V y V', resp. La* matriz de f en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ *es la matriz en $M_{m\times n}(K)$, la cual, denotaremos $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ o, preferentemente, $M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$, cuya columna j-ésima contiene las coordenadas del vector $f(v_j)$ respecto de $\mathcal{B}'$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Lo simbolizamos así:*

$$M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = \big(f(v_1)_{\mathcal{B}'} \,|\, f(v_2)_{\mathcal{B}'} \,|\, \ldots \,|\, f(v_n)_{\mathcal{B}'}\big).$$

Con esta definición, como anunciamos, podemos generalizar la expresión vista para f_A.

Proposición 3.29 (Ecuaciones de f en $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$)**.** *En las condiciones anteriores, se tiene:*

$$f(v)_{\mathcal{B}'} = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) \cdot v_{\mathcal{B}}.$$

Llamaremos a la igualdad anterior expresión matricial de f en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

Demostración. Tomemos escalares (a_{ij}) de modo que:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot v'_i.$$

De esta forma, la j-ésima columna de $M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ contiene exactamente a los escalares a_{ij} con $i = 1, \ldots, n$. Escribamos ahora un vector genérico $v \in V$ como combinación lineal de de $\mathcal{B}$:

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j$$

es decir, $v_{\mathcal{B}}$ contiene a los escalares x_i con $i = 1, \ldots, n$. Buscamos calcular las coordenadas $(x'_1, \ldots, x'_m)^t$ de $f(v)$ en $\mathcal{B}'$. Teniendo encuenta las dos últimas fórmulas y usando la linealidad de f, se tiene:

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot v'_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_{ij} \cdot v'_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j\right) \cdot v'_i. \end{aligned}$$

Obsérvese que las coordenadas buscadas x'_i verifican

$$f(v) = \sum_{i=1}^{m} x'_i \cdot v'_i$$

y, por la unicidad de estas coordenadas, se pueden igualar los coeficientes de cada v'_i obteniéndose:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j$$

esto es, la expresión buscada $f(v)_{\mathcal{B}'} = (a_{ij}) \cdot v_{\mathcal{B}}$. ∎

Observación 3.30. Dada una matriz $A \in M_{m\times n}$, la aplicación lineal asociada $f_A : K^n \to K^m$ verifica:

$$A = M(f_A, \mathcal{B}_u^m \leftarrow \mathcal{B}_u^n).$$

De hecho, la fórmula (3.1) es la expresión matricial de f_A en $\mathcal{B}_u^n$ y $\mathcal{B}_u^m$. Más aún, toda aplicación lineal $f : K^n \to K^m$ es del tipo f_A, donde A se calcula simplemente como $A = M(f, \mathcal{B}_u^m \leftarrow \mathcal{B}_u^n)$.

El siguiente resultado puede verse como una generalización del caso K^n, K^m a cualesquiera e.v.

Corolario 3.31. *Sea $A \in M_{m\times n}(K)$, y $V(K), V(K')$ e.v. de dimensiones n, m resp. Fijadas bases $\mathcal{B}$ de V y $\mathcal{B}'$ de V' existe una única aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que $A = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$.*

Demostración. Es una aplicación inmediata del teorema 3.8 (compruébese como ejercicio). ∎

Observación 3.32. Un caso particular de aplicación lineal es la identidad $I_V : V \to V$. Claramente, $M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B})$ es igual a la matriz identidad I_n para cualquier base $\mathcal{B}$. Sin embargo, si tomamos dos bases distintas se tiene:

$$M(I_V, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = \big((v_1)_{\mathcal{B}'} \,|\, (v_2)_{\mathcal{B}'} \,|\, \ldots \,|\, (v_n)_{\mathcal{B}'}\big) = M(I, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}),$$

esto es, las matrices de cambio de base pueden verse como casos particulares de las matrices de aplicaciones lineales.

El siguiente resultado muestra una primera propiedad de compatibilidad de las operaciones definidas entre matrices y entre aplicaciones lineales.

Proposición 3.33. *Sean $V(K), V'(K), V''(K)$ e.v. y $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$, resp., bases ordenadas de cada uno.*
(i) Si $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ son lineales entonces:

$$M(g \circ f, \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}) = M(g, \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}).$$

(ii) f es un isomorfismo si y sólo si $M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ es regular. En este caso

$$M(f^{-1}, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})^{-1}$$

Demostración. Para (i), la demostración es análoga a la del cambio de base estudiada en el tema anterior. Sea v cualquier vector de V. Por la proposición 3.29:

$$g(f(v))_{\mathcal{B}''} = M(I, \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}') \cdot f(v)_{\mathcal{B}'} \qquad f(v)_{\mathcal{B}'} = M(I, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) \cdot v_{\mathcal{B}}.$$

Sustituyendo la segunda igualdad en la primera, y usando la asociatividad del producto de matrices:

$$g(f(v))v_{\mathcal{B}''} = \big(M(g, \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})\big) \cdot v_{\mathcal{B}}.$$

Por otra parte, también sabemos:

$$(g \circ f(v))_{\mathcal{B}''} = M(g \circ f, \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}) \cdot v_{\mathcal{B}}$$

Restando las dos igualdades anteriores se tiene entonces:

$$\big(M(g \circ f, \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}) - M(g, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})\big) \cdot v_{\mathcal{B}} = 0_{n\times 1}.$$

Por ser esta igualdad válida para todo v, la expresión que multipica a v_B debe ser la matriz nula.

Para (ii), si f es un isomorfismo, basta aplicar la parte (i) y luego la observación 3.32 para obtener:

$$M(f^{-1}, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}) = I_n,$$

Recíprocamente, si $M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ es regular, la única aplicación lineal $h : V \to V'$ tal que $M(h, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})^{-1}$ (recuérdese el corolario 3.31), verifica:

$$M(h, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = I_n = M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}),$$
$$M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) \cdot M(h, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') = I_n = M(I_{V'}, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}')$$

de donde $h \circ f = I_V, f \circ h = I_{V'}$, esto es, f es biyectiva y h es la inversa de f. ∎

Corolario 3.34. *Sea $f : V \to V'$ lineal, $\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}$ dos bases de V y $\mathcal{B}', \bar{\mathcal{B}}'$ dos bases de V'. Entonces:*

$$M(f, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}}) = M(I_{V'}, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) \cdot M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}})$$

Demostración. Trivialmente, $f = I_{V'} \circ f \circ I_V$ y por la proposición 3.33(i) el miembro derecho es $M(I_{V'} \circ f \circ I_V, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}})$. ∎

3.3.2. Rango y matrices equivalentes

El corolario 3.34 permite ver la relación entre la matriz de una misma apliación lineal cuando se cambian las bases. A onctinuación, estudiaremos con detalle lo que tienen en común todas esas bases. El siguiente ejercicio permite comprobar una primera relación con las transformaciones elementales.

Ejercicio 3.35. *Sea $f : V \to V'$ lineal, $\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}$ dos bases de V y $\mathcal{B}', \bar{\mathcal{B}}'$ dos bases de V', $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_m)$. Calcular la relación entre $M(f, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}})$ y $M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ en cada caso:*

1. *(Transformaciones elementales por columnas.) $\bar{\mathcal{B}}' = \mathcal{B}'$ y $\bar{\mathcal{B}}$ se obtiene de $\mathcal{B}$, para $1 \leq i < j \leq n$:*

   1.- Cambiando de orden los elementos v_i y v_j.

   2.- Cambiando v_1 por $a \cdot v_i$, siendo $a \neq 0$ ($a \in \mathbb{K}$).

   3.- Cambiando v_i por $a \cdot v_i + v_j$, siendo $a \in \mathbb{K}$.

2. *(Transformaciones elementales por filas.)* $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ *y* $\bar{\mathcal{B}}'$ *se obtiene de* $\mathcal{B}'$*, para* $1 \leq i < j \leq m$*:*
   1.- Cambiando de orden los elementos v'_i *y* v'_j*.*
   2.- Cambiando v'_1 *por* $a^{-1} \cdot v'_i$*, siendo* $a \neq 0$ *(*$a \in \mathbb{K}$*).*
   3.- Cambiando v'_i *por* $v'_i - a \cdot v_j$*, siendo* $a \in \mathbb{K}$*.*

Proposición 3.36. *El rango de una aplicación lineal* $f : V \to V'$ *coincide con el de su matriz* $M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ *en cualesquiera bases* $\mathcal{B}$ *de* V *y* $\mathcal{B}'$ *de* V'*.*

Demostración. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}, \mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$ entonces el rango de f es la dimensión de $L\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\} \subset V'$. Como sabemos que la aplicación $b_{\mathcal{B}'} : K^m \to V', (x_1, \ldots, x_m) \mapsto \sum_{i=1}^m x_i v'_i$ es un isomorfismo, esa dimensión coincide con la de $L\{b_{\mathcal{B}'}^{-1}(f(v_1)), \ldots, b_{\mathcal{B}'}^{-1}(f(v_n))\} \subset K^m$. El resultado se concluye entonces porque cada $b_{\mathcal{B}'}^{-1}(f(v_i))$ es precisamente la columna i-ésima de $M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$. ∎

Como consecuencia de la demostración del teorema del rango, se tiene entonces:

Proposición 3.37. *Sea* $f : V \to V'$ *lineal. Entonces existen bases* $\mathcal{B}$ *de* V *y* $\mathcal{B}'$ *de* V' *tales que:*

$$M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r \times (n-r)} \\ \hline O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right),$$

donde $r \in \{0, 1, \ldots, \mathrm{Min}\{m, n\}\}$ *es el rango de* f *(por lo que está unívocamente determinado).*

Demostración. Procediendo como en la demostración del teorema del rango, tómese una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots v_n\}$ donde ahora son los últimos $n - r$ vectores los que forman una base del núcleo (en aquel teorema se pusieron en las primeras posiciones). Sabemos entonces que $\{f(v_1), \ldots, f(v_r)\}$ es un conjunto l. i., por lo que se puede ampliar hasta una base $\mathcal{B}' = \{f(v_1), \ldots, f(v_r), v'_{r+1}, \ldots, v'_m\}$ de todo V'. Es inmediato entonces comprobar que la matriz de f en estas bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ es de la forma requerida. ∎

Observación 3.38. Obsérvese que, si tomamos otras dos bases, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V y V' resp., por la fórmula del cambio de base para aplicaciones lineales (corolario 3.34), se tiene

$$M(f, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}}) = Q^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r \times (n-r)} \\ \hline O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right) \cdot P$$

donde las matrices P y Q son de cambio de base y, por tanto, regulares. Concretamente, $P = M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}}) \in Gl(n, K)$. y $Q = M(I_{V'}, \mathcal{B}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}}') \in Gl(m, K)$

Esta relación entre matrices y aplicaciones lineales, motiva los siguientes conceptos.

Definición 3.39. *Sean* $A, C \in M_{m \times n}(K)$*:*
(i) El núcleo de la matriz A*, denotado* $\mathrm{Nuc}(A)$*, es:*

$$\mathrm{Nuc}(A) = \{x \in M_{n \times 1} \,|\, A \cdot x = 0\},$$

que coincide con el núcleo de la aplicación $f_A : K^n \to K^m$ *(tomando sus elementos por columnas).*
(ii) A *y* C *son* equivalentes *si existen e.v.* V, V'*, bases* $\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}$ *de* V*,* $\mathcal{B}', \bar{\mathcal{B}}'$ *de* V' *y una aplicación lineal* $f : V \to V'$ *tales que:*

$$A = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}), \qquad C = M(f, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}}).$$

Proposición 3.40. *Sean $A, C \in M_{m\times n}$. Las siguientes afirmaciones equivalen:*

1. *A y C son equivalentes.*
2. *A y C tienen el mismo rango*[6].
3. *A y C son equivalentes a una misma matriz $m \times n$ del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$ (necesariamente, con r unívocamente determinado).*
4. *Existen matrices regulares $P \in Gl(n,K)$ y $Q \in Gl(m,K)$ tales que*[7] *$C = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.*
5. *Escogidos dos e.v. V, V' de dimensiones n,m, resp. y una base $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ en cada uno de ellos, resp., y construida la única aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que*
$$A = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}),$$
se pueden hallar dos nuevas bases $\bar{\mathcal{B}}, \bar{\mathcal{B}}'$ en V, V', resp. tales que
$$C = M(f, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}}).$$
En particular, puede escogerse $V = K^n$, $V' = K^m$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_u^n$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_u^m$.

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$. Ambas matrices sirven para la expresión matricial de una misma aplicación lineal f y sabemos entonces (proposición 3.36): rango(A) = rango(f) = rango (C).

$(2 \Rightarrow 3)$ Consideramos las aplicaciones lineales asociadas $f_A, f_C : K^n \to K^m$. Por la proposición 3.37 sabemos que A y C son equivalentes a matrices del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_{r_A} & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{c|c} I_{r_C} & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, resp. El resultado se sigue de r_A = rango (A) = rango $(C) = r_C$.

$(3 \Rightarrow 4)$ Por la observación 3.38 existen matrices regulares $P_A, P_C \in Gl(n,K)$ y $Q_A, Q_C \in Gl(m,K)$ tales que:
$$A = Q_A^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \cdot P_A, \qquad C = Q_C^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \cdot P_C$$
de donde
$$Q_A \cdot A \cdot P_A^{-1} = Q_C \cdot C \cdot P_C^{-1}, \qquad \text{y, por tanto,} \qquad C = (Q_C^{-1} \cdot Q_A) \cdot A \cdot (P_A^{-1} \cdot P_C)$$
por lo que basta con tomar $P = P_A^{-1} \cdot P_C \in Gl(n,K)$ y $Q = Q_A^{-1} \cdot Q_C \in Gl(m,K)$.

$(4 \Rightarrow 5)$ Dado $A = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$, construiremos las nuevas bases requeridas a partir de P y Q. Sean $\bar{\mathcal{B}}$ y $\bar{\mathcal{B}}'$ las únicas bases en V y V' que verifican respectivamente: $P = M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}}), Q = M(I_{V'}, \mathcal{B}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}}')$. Se tiene entonces:
$$C = Q^{-1} \cdot A \cdot P = M(I_{V'}, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) \cdot M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}}) = M(f, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}})$$
(la primera igualdad por hipótesis y la última por el cambio de bases para aplicaciones lineales).

$(5 \Rightarrow 1)$ Trivial de la definicón de matrices equivalentes. ∎

[6] Así, dos matrices serán equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango, el mismo número de filas y el mismo número de columnas (la igualdad para filas y columnas estaba ya supuesta).

[7] Obviamente, la propiedad es cierta escribiendo Q en lugar de Q^{-1}. No obstante, escogemos Q^{-1} por conveniencia, de modo que en la observación 3.38 P y Q representen cambios de bases "con barra" $\bar{\mathcal{B}}, \bar{\mathcal{B}}'$ a "sin barra" $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ (su utilidad será manifiesta cuando se estudien las matrices semejantes).

Ejercicio 3.41. *Compruébese que cada una de las siguientes propiedades caracteriza que las matrices A y C sean equivalentes:*

(i) Las aplicaciones lineales asociadas $f_A, f_C : K^n \to K^m$ tienen el mismo rango.

(ii) C puede obtenerse a través de transformaciones elementales por filas y columnas de A (véase el ejercicio 3.35)[8].

Como consecuencia inmediata de la proposición 3.40 anterior (p.ej., su punto 2):

Corolario 3.42. *La relación binaria "ser equivalente a" en el conjunto de todas las matrices $M_{m\times n}$ es una relación de equivalencia.*

Finalmente, demos una interpretación de los SEL.

Corolario 3.43. *Sea $A \in M_{m\times n}(K), b \in M_{m\times 1}(K)$:*

- *El SEL $Ax = b$ es compatible si y sólo si $b \in Im(f_A)$.*
- *En este caso, el conjunto de soluciones se escribe a partir de cualquier solución particular x_0 del sistema como $x_0 +$ Nuc $(f_A) := \{x_0 + y \,|\, y \in \mathrm{Nuc}(f_A)\}$.*
- *La dimensión de* Nuc (f_A) *coincide con $n-$ $dim(Imf_A)$*
- *Cuando el SEL sea compatible, será también determinado si y sólo si f_A es inyectiva.*

3.3.3. Estructura de espacio vectorial

Dados los e.v. $V(K), V'(K)$ (no necesariamente finitamente generados) consideremos el conjunto de todas las aplicaciones lineales de V en V':

$$\mathrm{Lin}(V,V') := \{f : V \to V' \,|\, f \text{ es lineal}\}.$$

Usando la estructura de e.v. en V', podemos definir unas operaciones suma y producto por escalares en $\mathrm{Lin}(V,V')$:

$$\begin{array}{rllll} + : \mathrm{Lin}(V,V') \times \mathrm{Lin}(V,V') \to \mathrm{Lin}(V,V'), & (f,g) \mapsto f+g & \text{donde} & (f+g)(v) := & f(v)+g(v), \\ \cdot : K \times \mathrm{Lin}(V,V') \to \mathrm{Lin}(V,V'), & (a,g) \mapsto a\cdot f & \text{donde} & (a\cdot f)(v) := & a\cdot f(v), \end{array}$$

para todo $v \in V$, $a \in K$. No obstante, antes se debe comprobar que las aplicaciones así definidas son lineales.

Lema 3.44. *Las definiciones anteriores son consistentes, esto es, $f+g \in \mathrm{Lin}(V,V')$, $a\cdot f \in \mathrm{Lin}(V,V')$, para todo $f,g \in \mathrm{Lin}(V,V')$ y todo $a \in K$.*

Demostración. Para la suma (el producto por escalares queda como ejercicio):

$$\begin{aligned} (f+g)(av+vw) = & \; f(av+bw)+g(av+bw) = (af(v)+bf(w))+(ag(v)+bg(w)) \\ = & \; a(f(v)+g(v))+b(f(v)+g(w)) = a\cdot(f+g)(v)+b\cdot(f+g)(w) \end{aligned}$$

para todo $v,w \in V$, $a,b \in K$, donde en la primera línea se usa primero la definición de la suma en $\mathrm{Lin}(V,V')$ y después la linealidad de f y g, y en la segunda se agrupan términos operando en V' y se vuelve a aplicar la definición de suma en $\mathrm{Lin}(V,V')$. ∎

[8]Para un estudio más detallado de las transformaciones elementales puede verse el libro de L. Merino y E. Santos.

Proposición 3.45. *Con estas operaciones,* $(\mathrm{Lin}(V,V'),+\cdot K)$ *es un espacio vectorial (al cual denotaremos simplemente* $\mathrm{Lin}(V,V')$*).*

Demostración. Queda como ejercicio, que puede comprobarse de al mneos dos maneras distintas: (a) demostrando directamente todas las propiedades de e.v., o (b) puesto que se sabe del tema anterior que el conjunto $F(X,V')$ de todas las aplicaciones de X en V' tiene una estructura natural de e.v., comprobando que $\mathrm{Lin}(V,V')$ es un subespacio vectorial de $F(X,V')$ para $X=V$. ∎

En el caso finitamente generado, hay una relación natural entre estas operaciones de $\mathrm{Lin}(V,V')$ y las de $M_{m\times n}(K)$.

Proposición 3.46. *Sean V,V' e.v. sobre K de dimensiones $n,m\in\mathbb{N}$ con bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, resp. Entonces:*

$$M(f+g,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})=M(f,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})+M(g,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}),\qquad M(a\cdot f,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})=a\cdot M(f,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})$$

para todo $f,g\in\mathrm{Lin}(V,V')$, $a\in K$.

Demostración. Sean $\mathcal{B}=\{v_1,\ldots,v_n\}$ y $\mathcal{B}'=\{v'_1,\ldots,v'_m\}$, y sea $b_{\mathcal{B}'}^{-1}:V'\to K^m$ la aplicación que a cada $v'\in V'$ le hace corresponder sus coordenadas en $\mathcal{B}'$. La expresión para la suma se deduce de que la columna j-ésima de $M(f+g,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})$ está formada por:

$$((f+g)(v_j))_{\mathcal{B}'}=b_{\mathcal{B}'}^{-1}((f+g)(v_j))=b_{\mathcal{B}'}^{-1}(f(v_j))+b_{\mathcal{B}'}^{-1}(g(v_j)),$$

que es la suma de las columnas j-ésimas de $M(f,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})$ y $M(g,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})$. Para el producto por escalares, razónese análogamente. ∎

La relación entre las estructuras de e.v. de matrices y aplicaciones lineales queda entonces resumida en el siguiente resultado.

Teorema 3.47. *Sean V,V' e.v. sobre K de dim. $n,m\in\mathbb{N}$. Fijadas bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ de V,V' resp., la aplicación $F_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ definida por:*

$$F_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}:\mathrm{Lin}(V,V')\to M_{m\times n},\qquad f\mapsto M(f,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}),$$

es un isomorfismo de e.v. En consecuencia, $\dim_k\mathrm{Lin}(V,V')=m.n$, y una base de $\mathrm{Lin}(V,V')$ es:

$$B_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}:=\left\{f_{ij}\in\mathrm{Lin}(V,V'):M(f_{ij},\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})=E_{ij},\ \forall i\in\{1,\ldots,m\},\forall j\in\{1,\ldots,n\}\right\}$$

donde $E_{ij}\in M_{m\times n}$ es la matriz que tiene todos sus elementos nulos excepto un 1 en la posición (i,j) (esto es, $(E_{ij})_{kl}=\delta_{ik}\delta_{jl}$).

Demostración. La linealidad de $F_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ es el contenido de la proposición 3.46 anterior, y su biyectividad ya se conocía (corolario 3.31). El resto es inmediato de que el conjunto de las matrices E_{ij} forma una base de $M_{m\times n}(K)$ y, por tanto, el conjunto de sus preimágenes por $F_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ es una base de $\mathrm{Lin}(V,V')$. ∎

3.3.4. Anillo de endomorfismos y matrices semejantes

Recordemos que los endomorfismos son un caso especial de aplicaciones lineales $f : V \to V'$ en los que el dominio coincide con el codominio, $V = V'$. Denotaremos $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Lin}(V,V)$, y todos los resultados vistos a lo largo de esta anterior resultan aplicables ahora. No obstante, se tiene ahora que la composición de dos endomorfismos siempre tiene sentido y es un nuevo endomorfismo, por lo que se puede definir la ley de composición interna en $\mathrm{End}(V)$:

$$\circ : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \qquad (f,h) \mapsto f \circ h$$

Esto es similar al caso de las matrices cuadradas $M_n(K)$, para las cuales el producto proporcionaba una ley de composición interna. Recuérdese además que $M_n(K)$ gozaba de una estructura de anillo unitario con la suma y producto (de la cual carecían las matrices no cuadradas).

Proposición 3.48. $(\mathrm{End}(V), \circ, +)$ *es un anillo unitario (al cual llamaremos* anillo $\mathrm{End}(V)$*).*
$(\mathrm{End}(V), +, \cdot K)$ *es un espacio vectorial (al que denotaremos simplemente* $\mathrm{End}(V)$*).*

Demostración. Se puede comprobar fácilmente que se verifican todas las propiedades de anillo, siendo la aplicación identidad I_V su elemento unitario. La segunda afirmación es un caso particular de la estructura de e.v. de $\mathrm{Lin}(V,V')$. ∎

En el caso finitamente generado, cuando se estudian las matrices asociadas a endomorfismos se tiene una posibilidad nueva: escoger la misma base $\mathcal{B}$ en el dominio y codominio. Denotaremos:

$$M(f,\mathcal{B}) := M(f, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}).$$

Se tiene entonces como una consecuencia inmediata del teorema 3.47:

Corolario 3.49. *Sea $V(K)$ un e.v. de dim. $n \in \mathbb{N}$. Fijada una base $\mathcal{B}$ de V la aplicación:*

$$F_{\mathcal{B}} : \mathrm{End}(V) \to M_n, \qquad f \mapsto M(f, \mathcal{B}'),$$

es un isomorfismo de e.v. En consecuencia, $\dim_k \mathrm{Lin}(V,V') = n^2$, y una base de $\mathrm{End}(V)$ *es:*

$$B_{\mathcal{B}} := \left\{ f_{ij} \in \mathrm{End}(V) : M(f_{ij}, \mathcal{B}) = E_{ij},\ \forall i,j \in \{1,\dots,n\} \right\}.$$

Observación 3.50. De la aplicación $F_{\mathcal{B}}$ se puede decir también que es un isomorfismo de anillos unitarios, al ser una aplicación biyectiva entre dos anillos unitarios que verifica:

$$F_{\mathcal{B}}(f \circ h) = F_{\mathcal{B}}(f) \cdot F_{\mathcal{B}}(h), \qquad F_{\mathcal{B}}(f+h) = F_{\mathcal{B}}(f) + F_{\mathcal{B}}(h), \qquad F_{\mathcal{B}}(I_V) = I_n, \qquad \forall f,h \in \mathrm{End}(V),$$

esto es, $F_{\mathcal{B}}$ "preserva" (o "respeta") las estructuras de anillos unitarios de su dominio y codominio. [9]

La elección $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ sugiere el siguiente refinamiento de la relación "ser equivalente a" entre matrices.

[9] También podemos justificar ahora que si dos matrices cuadradas satisfacen $A \cdot C = I_n$ entonces A y C son regulares y $C \cdot A = I_n$, esto es, $C = A^{-1}$. De hecho, tomando, por ejemplo $V = K^n$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_u$ los endomorfismos f,h determinados por A y C resp. verifican $f \circ h = I_V$ por lo que h es biyectivo (en caso contrario, se llega a un absurdo aplicando la composición a un $v \in \mathrm{Nuc}(h) \setminus \{0\}$) y f es biyectivo (al absurdo se llegaría ahora tomando $v \in \mathrm{Nuc}(f) \setminus \{0\}$ y aplicando la composición a $h^{-1}(v)$). En consecuencia, existe la inversa h^{-1} que se puede componer a la derecha de ambos miembros en $f \circ h = I_V$, obteniéndose $f = h^{-1}$. Por tanto, A y C son regulares y $A = M(f,B) = M(h^{-1},B) = M(h,B)^{-1} = C^{-1}$. Demostraciones distintas se obtendrán más adelante, usando determinantes.

Definición 3.51. *Dos matrices cuadradas $A,C \in M_n(K)$ son* semejantes *cuando existe un e.v. $V(K)$, dos bases $\mathcal{B},\bar{\mathcal{B}}$ y un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ que verifican:*

$$A = M(f,B) \qquad y \qquad C = M(f,\bar{\mathcal{B}}).$$

Razonando como en la proposición 3.40 se tiene ahora:

Proposición 3.52. *Sean $A,C \in M_n$. Equivalen:*

1. *A y C son semejantes.*
2. *Existe una matriz regular $P \in Gl(n,K)$ tal que $C = P^{-1} \cdot A \cdot P$.*
3. *Escogidos cualquier e.v. $V(K)$ de dimensión n, y una base $\mathcal{B}$ de V, y construido el único endomorfismo $f : V \to V$ tal que*
$$A = M(f,\mathcal{B}),$$
se puede hallar una nueva base $\bar{\mathcal{B}}$ en V tal que
$$C = M(f,\bar{\mathcal{B}}).$$
En particular, puede escogerse $V = K^n$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_u$.

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$. Particularizando la fórmula del cambio de base para aplicaciones lineales:

$$M(f,\bar{\mathcal{B}}) = M(I_V,\bar{\mathcal{B}} \leftarrow \mathcal{B}) \cdot M(f,\mathcal{B}) \cdot M(I_V,\mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}})$$

En nuestro caso, por hipótesis, $C = M(f,\bar{\mathcal{B}})$ y $A = M(f,\mathcal{B})$, por lo que basta tomar $P = M(I_V,\mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}})$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Dado $A = M(f,\mathcal{B})$, construiremos la nueva base requerida a partir de P. Sea $\bar{\mathcal{B}}$ la única base en V que verifica: $P = M(I_V,\mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}})$. Se tiene entonces:

$$C = P^{-1} \cdot A \cdot P = M(I_V,\bar{\mathcal{B}} \leftarrow \mathcal{B}) \cdot M(f,\mathcal{B}) \cdot M(I_V,\mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}}) = M(f,\bar{\mathcal{B}})$$

(la primera igualdad por hipótesis y la última por el cambio de bases para aplicaciones lineales).

$(3 \Rightarrow 1)$ Trivial de la definición de matrices semejantes. ∎

Resulta fácil de comprobar ahora (p. ej, úsese el punto 2 de la proposición anterior):

Corolario 3.53. *La relación binaria "ser semejante a" en $M_n(K)$ es una relación de equivalencia.*

A diferencia del caso de matrices equivalentes, caracterizadas por el rango, no existe una caracterización sencilla de cuándo dos matrices son semejantes. Una condición necesaria la prporciona el siguiente resultado.

Proposición 3.54. *Sean $A,C \in M_n(K)$ dos matrices semejantes. Entonces sus trazas coinciden.*

Demostración. Recordemos primero que si $X,Y \in M_n(K)$ entonces $\mathrm{tr}(X \cdot Y) = \mathrm{tr}(Y \cdot X)$. Usando que $C = P^{-1} \cdot A \cdot P$ se tiene:

$$\mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}\left(P^{-1} \cdot (A \cdot P)\right) = \mathrm{tr}\left((A \cdot P) \cdot P^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(A \cdot (P \cdot P^{-1})\right) = \mathrm{tr}(A)$$

donde se usa la asociatividad del producto y la propiedad anterior de la traza con $X = P^{-1}$, $Y = AP$. ∎

Este resultado tiene la importante consecuencia de que permite dar una definición consistente para la traza de cualquier endomorfismo de un e.v. finitamente generado.

Definición 3.55. *Sea $V(K)$ finitamente generado y $f \in \mathrm{End}(V)$. La* traza *de f se define como la traza de la matriz $M(f,B)$, para cualquier base B de $V(K)$.*

El siguiente ejercicio ilustra la gran diferencia que existe en que dos matrices cuadradas sean semejantes o equivalentes; concretamente, lo muy restrictivo que supone para una matriz el ser semejante a una del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

Ejercicio 3.56. *(1) Sea $h \in \mathrm{End}(V)$ que verifica $h \circ h = h$. Demostrar:*
(a) $V = Im(h) \oplus Nuc(h)$ (sea o no V finitamente generado).
(b) Si $dim_K V = n \in \mathbb{N}$, existe una base $\mathcal{B}$ tal que

$$M(h,\mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

donde r es el rango de P. Por tanto, en cualquier otra base $\bar{\mathcal{B}}$:

$$M(h,\bar{\mathcal{B}}) = P^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(n-r)} \end{array}\right) \cdot P,$$

para alguna matriz regular $P \in Gl(n,\mathbb{R})$.
(2) Recíprocamente, si h es un endomorfismo cuya matriz en alguna base $\bar{\mathcal{B}}$ satisface la igualdad anterior, entonces h verifica $h \circ h = h$.
(3) Como conclusión para dimensión $n \in \mathbb{N}$, un endomorfismo h verifica $h \circ h$ si y sólo existe alguna base tal que la ecuación en coordenadas de h para esa base es

$$x'_1 = x_1, \ldots\ldots, x'_r = x_r, \quad x'_{r+1} = 0, \ldots\ldots, x'_n = 0.$$

A estos endomorfismos se les llama proyectores.

3.4. Espacios cocientes y teorema de isomorfía

Hemos visto que las soluciones de un SEL compatible $A \cdot x = b$ se pueden escribir como un conjunto del tipo x_0+ Nucf_A : $\{x_0 + y | y \in \mathrm{Nuc}(f_A)\}$ (corolario 3.42). Este conjunto puede entenderse como un "subespacio (no vectorial) paralelo" a Nucf_A que pasa por x_0.

Veremos ahora que, en general, dado un e.v. $V(K)$ y un subespacio vectorial suyo U, tiene sentido considerar un nuevo espacio vectorial, que denotaremos V/U, cuyos elementos se escriben de modo natural mediante expresiones del tipo $v+U$ (esto es, son los "subespacios paralelos" a U). Como una aplicación de estos espacios vectoriales, veremos un teorema de isomorfía para aplicaciones lineales, que extiende al teorema del rango.

3.4.1. Espacios vectoriales cocientes

Sea $V(K)$ un e.v. y $U \subset V$ un s.v. Definimos la siguiente relación binaria $\sim$ en V:

$$v \sim w \iff v - w \in U$$

Proposición 3.57. *(1) La relación binaria $\sim$ es de equivalencia.*

(2) Para cada $v \in V$, su clase de equivalencia $[v]$ viene dada por $[v] = \{v+u : u \in U\}$ por lo que la denotaremos $v+U$, esto es:

$$v+U := \{v+u \mid u \in U\}.$$

Asimismo, al conjunto cociente $V/\sim$ formado por todas las clases anteriores, lo denotaremos V/U.

Demostración. (1) Propiedad reflexiva: como $v-v = 0 \in U$, se tiene $v \sim v$, para todo $v \in V$.

Propiedad simétrica: si $v \sim w$ entonces $v-w = u \in U$ y, al ser U un s.v., $w-v = -u \in U$, esto es, $w \sim v$.

Propiedad transitiva: si $v \sim v'$ y $v' \sim v''$ entonces $v-v' = u \in U$ y $v'-v'' = u' \in U$ por lo que $v-v'' = (v-v')+(v'-v'') = u+u' \in U$ (la pertenencia a U por ser un s.v.) esto es, $v \sim v''$.

(2) Para demostrar $[v] \subset \{v+u : u \in U\}$, obsérvese que si $v' \in [v]$ entonces $v'-v = u \in U$ por lo que $v' = v+u$ para un $u \in U$. Para la inclusión contraria, como $(v+u)-v = u \in U$ las clases de $v+u$ y v coinciden, esto es, $v+u \in [v]$. ∎

Nos podemos preguntar si V/U hereda una estructura de e.v. a partir de la de V, pues parece natural definir:

$$\begin{array}{rccc} +: & V/U \times V/U & \to & V/U \\ & (v+U, w+U) & \mapsto & (v+w)+U \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot: & K \times V/U & \to & V/U \\ & (a, v+U) & \mapsto & (a\cdot v)+U \end{array} \tag{3.2}$$

No obstante, esta definición presenta la dificultad de que se lleva a cabo escogiendo los representantes v y w de cada clase, y podríamos preguntarnos qué ocurriría si tomáramos otros representantes $v' \in v+U$, $w' \in w+U$, esto es, si la clase de $v'+w'$ y $a\cdot v'$ serían las mismas clases que definen $v+w$ y $a\cdot v$, resp. El siguiente lema proporciona una respuesta afirmativa.

Lema 3.58. *Supongamos que v, v', w, w' satisfacen $v+U = v'+U$, $w+U = w'+U$. Entonces:*

$$(v+w)+U = (v'+w')+U \qquad y \qquad (a\cdot v)+U = (a\cdot v')+U,$$

esto es, las operaciones $+$ y $\cdot$ están consistentemente definidas por las expresiones en (3.2).

Demostración. Por hipótesis, $v-v' = u_v \in U, w-w' = u_w \in U$. Por tanto,

$$(v+w)-(v'+w') = (v-v')+(w-w') = u_v+u_w \in U, \qquad a\cdot v - a\cdot v' = a\cdot(v-v') = a\cdot u_v \in U,$$

esto es, $v'+w' \in (v+w)+U$ y también $a\cdot v' \in (a\cdot v)+U$, como se quería. ∎

Proposición 3.59. *Con las operaciones definidas en* (3.2), *$(V/U, +\cdot K)$ es un espacio vectorial, al cual llamaremos* espacio cociente *de V sobre U, y denotaremos simplemente V/U.*

Demostración. Es una computación directa aplicando las definiciones de las operaciones y las propiedades de e.v. de $V(K)$. Lo demostramos para una de ellas y el resto queda como ejercicio.

Propiedad distributiva del producto por escalares respecto a la suma de vectores:

$$\begin{aligned} a\cdot((v+U)+(w+U)) = &\ a\cdot((v+w)+U) = (a\cdot(v+w))+U = ((a\cdot v)+(a\cdot w))+U \\ = &\ ((a\cdot v)+U)+((a\cdot w)+U) = a\cdot(v+U)+a\cdot(w+U) \end{aligned}$$

donde en las igualdades de la primera línea se usan, por orden, la definición de la suma en V/U, la del producto por escalares en V/U y la propiedad distributiva del producto por escalares en V, mientras que en la segunda se usan la definición de la suma en V/U y la del producto por escalares en V/U. ∎

3.4.2. Base y dimensión de V/U

Como en toda relación de equivalencia, la proyección natural

$$\pi : V \mapsto V/U, \qquad v \mapsto v+U$$

es una aplicación suprayectiva. No obstante, en nuestro caso podemos decir más.

Proposición 3.60. *La proyección π es un epimorfismo de e.v. En consecuencia, la imagen por π de cualquier sistema de generadores de V es un s.d.g. de V/U.*

Demostración. Basta con demostrar que π es lineal, puesto que sabemos es suprayectiva y que la última afirmación se cumple para todos los epimorfismos. Con este fin, para todo $v,w \in U$, y $a,b \in K$:

$$\pi(av+bw) = (av+bw)+U = (av+U)+(bw+U) = a\cdot(v+U)+b\cdot(w+U) = a\pi(v)+b\pi(w),$$

la primera y última igualdades por la definición de π, la segunda por la de la suma en V/U y la tercera por la del producto por escalares en V/U. ∎

El siguiente resultado nos permite computar de manera práctica la dimensión de V/U y una base suya, a partir de elementos de V.

Teorema 3.61. *Sea V un e.v. finitamente generado y $U \subset V$ un subespacio vectorial. Si W es un subespacio complementario de U (esto es, $V = U \oplus W$) y $B_W = \{w_1,\dots,w_k\}$ es una base de W entonces*

$$\pi(B_W) = \{w_1+U,\dots,w_k+U\}$$

es una base de V/U. Por tanto, $dim_K(V/U) = dim_K V - dim_K U$.

Demostración. Si ampliamos B_W hasta una base $B = \{w_1,\dots,w_k,u_1,\dots,u_m\}$ de V, donde $B_U = \{u_1,\dots,u_m\}$ es una base de U. Sabemos por la proposición anterior que $\pi(B)$ es un s.d.g. de V/U y, como $u_1+U,\dots,u_m+U$ son todos iguales a la clase del 0, se pueden suprimir del s.d.g. sin que pierda esta característica, esto es, $\pi(B_W)$ es un s.d.g. de V/U. Para comprobar su independencia lineal, sean $a_1,\dots,a_k \in K$ tales que:

$$0+U = a_1(w_1+U)+\cdots+a_k(w_k+U) = (a_1w_1+\cdots+a_kw_k)+U.$$

Esto quiere decir que $a_1w_1+\cdots+a_kw_k \in U$, por lo que se puede escribir como combinación lineal de la base B_U. Por tanto, existirán escalares $b_1,\dots,b_m \in K$ tales que:

$$a_1w_1+\cdots+a_kw_k+b_1u_1+\cdots+b_ku_m = 0.$$

Como $B = B_W \cup B_U$ es una base, todos los coeficientes de esta combinación lineal son 0; en particular, $a_1 = \cdots = a_k = 0$, como se quería. ∎

Observación 3.62. Es fácil comprobar que el teorema anterior es válido incluso en dimensión infinita, en el sentido de que para cualquier suplementario W de U y cualquier base B_W de W su proyección $\pi(B_W)$ es una base de V/U. Como consecuencia, si U es finitamente generado pero V no lo es, entonces V/U tampoco es finitamente generado.

Observación 3.63. El teorema anterior permite construir explícitamente una base de V/U:
Paso 1: Se construye una base $B_U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ de U.
Paso 2: Se amplía B_U hasta una base $B = \{u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ de V.
Paso 3: El conjunto $\{v_{m+1} + U, \ldots, v_n + U\}$ es una base de V/U.

Ejercicio 3.64. Se considera en $M_2(K)$ el subespacio U formado por las matrices de traza nula.
(a) Calcular una base $\mathcal{B}$ de $M_2(K)/U$.
(b) Si $\mathcal{B}_0$ es la base usual de $M_2(K)$ y $\pi : M_2(K) \to M_2(K)/U$ la proyección canónica, calcular las coordenadas de cada uno de los elementos de $\pi(\mathcal{B}_0)$ en la base $\mathcal{B}$ obtenida en el punto anterior.

3.4.3. Teorema de isomorfía

Recordemos que toda aplicación $f : X \to Y$ entre dos conjuntos admitía una descomposición canónica $f = i \circ b \circ p$. Para ello, se establece la relación de equivalencia en X: $x \sim x'$ si y sólo si $f(x) = f(x')$ y se define:

- $p : X \to X/\sim$ es la proyección canónica en el espacio cociente, que resulta ser suprayectiva.
- $b : (X/\sim) \to \mathrm{Im}(f)$, dada por $b([x]) = f(x)$, para todo $x \in X$ está consistentemente definida por cómo se estableció $\sim$, y resulta ser biyectiva.
- i :$\mathrm{Im}(f) \to Y$ es la inclusión natural, que resulta ser inyectiva.

Nuestro objetivo es comprobar que, si X,Y son espacios vectoriales $X = V(K)$, $Y = V'(K)$ y f es lineal, entonces la relación $\sim$ coincide con la que define el espacio cociente de V sobre $\mathrm{Nuc}(f)$, de modo que $V/\mathrm{Nuc}(f)$ resulta ser isomorfo a $\mathrm{Im}(f)$.

Teorema 3.65. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal, y sea $\sim$ la relación de equivalencia en V dada por $v \sim w$ si y sólo si $f(v) = f(w)$. Entonces*

$$v \sim w \Leftrightarrow v - w \in \mathrm{Nuc}(f), \qquad \textit{esto es}, \qquad [v] = v + \mathrm{Nuc}(f), \tag{3.3}$$

y se verifica $f = i \circ b \circ p$ donde:
(i) $p : V \to V/Nuc(f)$ es un epimorfismo de e.v.
(ii) $b : V/Nuc(f) \to Im(f)$ es un isomorfismo de e.v.
(iii) i :$Im(f)) \to V'$ es un monomorfismo de e.v.

Demostración. Para demostrar (3.3):

$$v \sim w \Leftrightarrow f(v) = f(w) \Leftrightarrow f(v - w) = 0 \Leftrightarrow v \in \mathrm{Nuc}(f),$$

donde en la segunda equivalencia se usa la linealidad de f.

La descomposición $f = i \circ b \circ p$ (incluyendo la consistencia de la definición de b) se sabe que ocurre para cada aplicación, sea lineal o no. No obstante, la linealidad de f asegura que también lo son tanto la inclusión i como la proyección p (esta última por la proposición 3.60). Basta por tanto con demostrar la linealidad de b, para lo cual:

$$\begin{aligned} b\left((a \cdot (v + \mathrm{Nuc}(f)) + c \cdot (w + \mathrm{Nuc}(f))\right) = &\quad b\left((av + cw) + \mathrm{Nuc}(f)\right) = f(av + cw) = af(v) + cf(w) \\ = &\quad a \cdot b(v + \mathrm{Nuc}(f)) + c \cdot b(w + \mathrm{Nuc}(f)) \end{aligned}$$

para todo $v + \mathrm{Nuc}(f), w + \mathrm{Nuc}(f) \in V/\mathrm{Nuc}(f)$, y todo $a, c \in K$, donde se ha usado sucesivamente la definición de las operaciones en V/U, la definición de b, la linealidad de f y de nuevo la definición de b. ∎

Observación 3.66. Por el punto (ii) se tiene que $V/\mathrm{Nuc}(f)$ es isomorfo a $\mathrm{Im}(f)$. Puesto que, en dimensión finita para V, sabemos (teorema 3.61) que la dimensión del primero es $\dim_K(V/\mathrm{Nuc}(f)) = \dim_K V - \dim_K \mathrm{Nuc}(f)$, se reobtiene ahora la fórmula del rango: $\dim_K V = \dim_K \mathrm{Nuc}(f) + \dim_K \mathrm{Im}(f)$.

3.5. El espacio dual

El espacio dual es un caso particular del espacio de todas las aplicaciones lineales entre dos e.v. prefijados $\mathrm{Lin}(V,V')$ para el cual V' es el cuerpo $K(K)$ sobre el que está definido V. Por tanto, podremos aplicar a él todo lo que sabemos sobre $\mathrm{Lin}(V,V')$.

Restringiremos nuestro estudio al caso finitamente generado. Así, en adelante, $V(K)$ será un e.v. de dimensión $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

3.5.1. Concepto de espacio dual y forma lineal

Definición 3.67. *Dado un e.v. $V(K)$, su* espacio dual *es el espacio*

$$V^*(K) := \mathrm{Lin}(V,K) = \{\phi : V \to K : \ \phi \textit{ lineal}\}.$$

A cada elemento del dual $\phi \in V^*(K)$ se le llamará forma lineal de V.

De la propia definición se sigue inmediatamente:

Corolario 3.68. *Dado un e.v. V de dimensión n, el espacio dual $V^*(K)$, dotado de sus operaciones naturales, es un espacio vectorial de la misma dimensión n.*

Demostración. Basta con particularizar las propiedades generales de $\mathrm{Lin}(V,V')$ para concluir que $V^* = \mathrm{Lin}(V,\mathbb{R})$ es un e.v., cuya dimensión resulta ser: $\dim V \cdot \dim K = n\cdot 1 = n$. ∎

Si fijamos una base ordenada $\mathcal{B} = (v_1,\ldots,v_n)$ de $V(K)$ y tomamos $\{1\}$ como elección estándar de una base en $K(K)$ entonces para cada $\phi \in V^*(K)$ podemos calcular la matriz de la aplicación ϕ expresada en dichas bases $M(\phi,\{1\}\leftarrow\mathcal{B})$, la cual resulta ser igual a $(\phi(v_1)\ldots\phi(v_n))$. De esta forma, si $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \in V$ entonces

$$\phi(v) = \sum_{i=1}^n \phi(v_i)a_i = (\phi(v_1)\ldots\phi(v_n))\cdot\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

$$= M(\phi,\{1\}\leftarrow\mathcal{B})\cdot\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \in K.$$

Ejercicio 3.69. *Demostrar que toda forma lineal $\phi \in (K^n)^*(K)$ se escribe como $\phi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i^1}^n b_i x_i$ para ciertos $b_1,\ldots,b_n \in K$.*

Observación 3.70. Por el ejercicio anterior, el núcleo de una forma lineal $\phi \in (K^n)^*(K)$ es el conjunto de soluciones del sistema líneal homogéneo:

$$b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0,$$

cuyas soluciones, siempre que ϕ no sea la forma lineal nula, constituyen un subespacio vectorial de dimensión $n-1$. Estas propiedades se generalizan automáticamente a cualquier espacio vectorial V, sin más que fijar una base ordenada y calcular $M(\phi,\{1\}\leftarrow\mathcal{B})$.

La importancia del núcleo para las formas lineales se pone de manifiesto a continuación.

Proposición 3.71. *Sea $\phi \in V^*(K)$:*

(a) Si ϕ no es la forma lineal nula entonces $Nuc(\phi)$ es un hiperplano vectorial, por lo que $dim_K Nuc(\phi) = n-1$.

(b) Si $H \subset V$ es un hiperplano vectorial, existe un forma lineal ϕ tal que $Nuc(\phi) = H$.

(c) Dos formas lineales no nulas ϕ, ψ son proporcionales (esto es, $\psi = a\phi$ para algún $a \in K \setminus \{0\}$) si y sólo si sus núcleos coinciden.

Demostración. (a) Por el teorema del rango, $\dim_K \text{Nuc}(\phi) = n - \dim_K \text{Im}(\phi)$. Como $\text{Im}(\phi) \subset K$ y ϕ no es la forma lineal nula, $\text{Im}(\phi) = K$, de donde $\dim_K \text{Im}(\phi) = 1$ y se sigue el resultado (una demostración alternativa se sigue de la observación 3.70).

(b) Sea $\mathcal{B}_H = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ una base de H y sea $v_n \in V$ cualquier vector que amplía $\mathcal{B}_H$ a una base $\mathcal{B}$ de V (esto es, $v_n \notin H$). La única forma lineal $\phi : V \to K$ tal que

$$\phi(v_1) = \cdots = \phi(v_{n-1}) = 0, \qquad \phi(v_n) = 1$$

satisface claramente $H \subset \text{Nuc}(\phi) \subsetneq V$. Así, las dimensiones de H y $\text{Nuc}(\phi)$ coinciden y $H = \text{Nuc}(\phi)$.

(c) Claramente, de $\psi = a\phi$ se sigue $\phi(v) = 0 \Rightarrow \psi(v) = 0$, esto es, $\text{Nuc}(\phi) \subset \text{Nuc}(\psi)$ y, como $a \neq 0$, también se verifica la inclusión contraria. Recíprocamente, llamemos H al núcleo común, $H = \text{Nuc}(\phi) = \text{Nuc}(\psi)$ y, como en el apartado anterior, construyamos una base $\mathcal{B}$ ampliando una $\mathcal{B}_H$ de H. Se tiene entonces:

$$\begin{array}{ll} M(\phi, \{1\} \leftarrow \mathcal{B}) = (0, \ldots, 0, \phi(v_n)), & \qquad \phi(v_n) \neq 0 \\ M(\psi, \{1\} \leftarrow \mathcal{B}) = (0, \ldots, 0, \psi(v_n)), & \qquad \psi(v_n) \neq 0 \end{array}$$

por lo que basta con tomar $a = \psi(v_n) \cdot \phi(v_n)^{-1}$. ∎

Ejercicio 3.72. *(1) Si $\phi, \psi \in V^*$, demostrar: $\psi = a\phi$ para algún $a \in K$ si y sólo si $Nuc(\phi) \subset Nuc(\psi)$.*

(2) Demostrar que las aplicaciones $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \phi(x,y) = 2x + y, \psi(x,y) = x - 2y$ son formas lineales independientes. Representar gráficamente los núcleos de $\phi, \psi, 2\phi$ y $\phi + \psi$ así como las preimágenes de $1 \in \mathbb{R}$ para cada una de esas formas lineales.

3.5.2. Base dual y teorema de reflexividad

Consideremos los espacios vectoriales $V(K)$, $V^*(K)$ y fijemos una base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $V(K)$.

Teorema 3.73. *Existe una única base $\mathcal{B}^* = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$ de $V^*(K)$ que verifica*

$$\phi^i(v_j) = \delta^i_j \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \textit{(donde } \delta^i_j \textit{ es la delta de Kronecker).} \tag{3.4}$$

A esta base $\mathcal{B}^*$ se le llamará base dual *de la base $\mathcal{B}$.*

Demostración. Mediante el procedimiento de extensión lineal (teorema 3.8) se sigue inmediatamente que, para cada índice $i \in \{1, \ldots, n\}$ las relaciones (3.4) definen unívocamente una forma lineal. Por tanto, basta con demostrar que el conjunto $\mathcal{B}^*$ es linealmente independiente (recuérdese que $\dim_K V = n$). Sean $a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que:

$$a_1\phi^1 + \cdots + a_n\phi^n = 0$$

donde el 0 a la derecha debe entenderse como la forma lineal nula ($0(v) = 0, \forall v \in V$). Aplicando ambos miembros de la igualdad a cada vector de la base v_j se obtiene

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi^i(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta^i_j = a_j$$

como se quería. ∎

Corolario 3.74. *Si $v \in V$ verifica $\phi(v) = 0$ para todo $\phi \in V^*$ entonces $v = 0$.*

Demostración. Si $v \neq 0$ se puede ampliar una base $\mathcal{B} = (v = v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de V, y el primer elemento ϕ^1 de $\mathcal{B}^*$ verifica $\phi^1(v) = 1 \neq 0$. ∎

Observación 3.75. Para los elementos de la base dual se tiene

$$\begin{array}{rcl} M(\phi^1, \{1\} \leftarrow \mathcal{B}) & = & (1, 0, \ldots, 0) \\ \vdots & & \vdots \\ M(\phi^n, \{1\} \leftarrow \mathcal{B}) & = & (0, 0, \ldots, 1). \end{array}$$

Esto es, la base dual coincide con la base $B_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ obtenida en general para $\mathrm{Lin}(V, V')$ en el teorema 3.47 para $V' = \mathbb{R}$, $B' = \{1\}$. De hecho, como en el caso de $\mathrm{Lin}(V, V')$, se tiene para cualquier forma lineal ϕ que $M(\phi, \{1\} \leftarrow \mathcal{B})$ coincide con las coordenadas (escritas por filas) de ϕ en la base $\mathcal{B}^*$.

Esta última observación justifica el siguiente convenio.

Convenio. Usaremos la notación $M(\phi, \mathcal{B}) := M(\phi, \{1\} \leftarrow \mathcal{B})$, y abusaremos del lenguaje llamando a esta matriz (tipo fila) *coordenadas de* ϕ *en* $\mathcal{B}$ (en lugar de coordenadas de ϕ en $\mathcal{B}^*$, que propiamente es una matriz columna). Por este motivo, también denotaremos $\phi_{\mathcal{B}} = M(\phi, \mathcal{B})$; esto es, $\phi_{\mathcal{B}} = (\phi_{\mathcal{B}^*})^t$.

Observación 3.76. Fijada la base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ y su base dual $\mathcal{B}^* = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$ se verifica $\phi^j(v) = \phi^j(\sum_{i=1}^n a^i v_i) = \sum_{i=1}^n a^i \phi^j(v_i) = \sum_{i=1}^n a^i \delta^j_i = a^j$. Esto es,

$$v = \phi^1(v) v_1 + \cdots + \phi^n(v) v_n = \sum_{i=1}^{n} \phi^i(v) v_i, \quad \forall v \in V.$$

Análogamente, si $\phi \in V^*$ y $\phi = \sum_{i=1}^n b_i \phi^i$ entonces $\phi(v_j) = \sum_{i=1}^n b_i \delta^i_j = b_j$. Esto es,

$$\phi = \phi(v_1)\phi^1 + \cdots + \phi(v_n)\phi^n = \sum_{i=1}^{n} \phi(v_i)\phi^i, \quad \forall \phi \in V^*. \tag{3.5}$$

Convenio. Los siguientes convenios sobre las posiciones de índices (que se seguirán en adelante) resultan imprescindibles para el estudio sistemático y uso práctico de tensores. El lector sólo interesado en el espacio dual puede o no seguirlos.

Los índices de los vectores de la base $\mathcal{B}$ se escribirán como subíndices $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ mientras que las coordenadas de un vector v en la base $\mathcal{B}$ se escribirán como superíndices $(a^1, \ldots, a^n)$ de modo que se tiene: $v = \sum_i a^i v_i$.

Los índices de las formas de la base $\mathcal{B}^*$ se escribirán como superíndices $\mathcal{B} = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$ mientras que las coordenadas de una forma ϕ en la base $\mathcal{B}^*$ se escribirán como subíndices $(b_1, \ldots, b_n)$ de modo que se tiene: $\phi = \sum_i b_i \phi^i$.

Las matrices de cambio de base que se estudiarán a continuación serán consistentes con este convenio, levantando cuando sea preciso el índice de fila (para el cambio en V) o el de la columna (para el cambio en V^*); esta notación será también consistente con el convenio que se seguirá para aplicaciones lineales y trasposición, tomando esas aplicaciones como la identidad.

Cambio de base en el dual

Sean $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$, $\overline{\mathcal{B}} = (\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n)$ dos bases de $V(K)$ y $\mathcal{B}^* = (\phi^1,\dots,\phi^n)$, $\overline{\mathcal{B}}^* = (\bar{\phi}^1,\dots,\bar{\phi}^n)$ sus respectivas bases duales. Supongamos que

$$\bar{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a^i{}_j v_i, \qquad \forall j \in \{1,\dots,n\} \tag{3.6}$$

es decir,

$$M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \overline{\mathcal{B}}) = (a^i{}_j)_{i,j} = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n{}_1 & \dots & a^n{}_n \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Entonces, si $v \in V$ y $v = \sum_{i=1}^n a^i v_i = \sum_{j=1}^n \bar{a}^j \bar{v}_j$ se tiene $a^i = \sum_{i=1}^n a^i{}_j \bar{a}^j$. Esto es,

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \overline{\mathcal{B}}) \cdot \begin{pmatrix} \bar{a}^1 \\ \vdots \\ \bar{a}^n \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.77. *Con la notación anterior:*

$$M(I_{V^*}, \overline{\mathcal{B}}^* \leftarrow \mathcal{B}^*) = M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \overline{\mathcal{B}})^t. \tag{3.8}$$

Demostración. Escribimos ahora $\phi^k = \sum_{j=1}^n b_j^k \bar{\phi}^j$ donde los elementos de la matriz (b_j^k) serán los de la matriz $M(Id,, \overline{\mathcal{B}}^* \leftarrow \mathcal{B}^*)$ (el índice superior es ahora el segundo, por lo que indicará columna y no fila). Así, (3.8) se sigue de $b_j^k = \phi^k(\bar{v}_j) = a^k{}_j$ (la primera igualdad por (3.5)). ∎

Como consecuencia de (3.8), si $\phi = \sum_{i=1}^n b_i \phi^i = \sum_{j=1}^n \bar{b}_j \bar{\phi}^j$ se tiene

$$\bar{b}_j = \sum_{i=1}^{n} a^i{}_j b_i,$$

(o bien, directamente, $\bar{b}_j = \phi(\bar{v}_j) = \sum_{i=1}^n a^i{}_j \phi(v_i) = \sum_{i=1}^n a^i{}_j b_i$).

Ejercicio. Se consideran en $\mathbb{R}^3$ la base usual $\mathcal{B}_u$ y la base

$$\overline{\mathcal{B}} = ((0,1,1),(1,0,1),(-1,-1,0)).$$

Hallar las coordenadas de la forma lineal $\phi(x,y,z) = x + 2z$ en $\mathcal{B}_u^*$ y $\overline{\mathcal{B}}^*$, así como la matriz de cambio de base $M(I_{V^*}, \mathcal{B}_u^* \leftarrow \overline{\mathcal{B}}^*)$.

Teorema de Reflexividad

Sean $V(K)$ y $V^*(K)$ un espacio vectorial y su dual, respectivamente. Podemos considerar el dual de $V^*(K)$, o *bidual* de $V(K)$: $V^{**}(K) = (V^*(K))^*$. Estos tres espacios vectoriales tienen igual dimensión y, por tanto, son isomorfos. Sin embargo, mientras que no existe ningún isomorfismo canónico general entre $V(K)$ y $V^*(K)$, sí podemos definir uno entre $V(K)$ y $V^{**}(K)$. Ello, en la práctica, equivale a considerar ambos espacios como iguales y a que no nos resulte necesario recurrir a espacios como el dual del bidual $V^{***}(K)$ (que sería naturalmente isomorfo al dual $V^*(K)$), etc.

Lema 3.78. *Fijado un vector $v \in V$ la aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi_v : V^* &\to K \\ \phi &\mapsto \phi(v) \end{aligned}$$

es lineal y, por tanto, pertenece al bidual $V^{**}(K)$.

Demostración. Aplicando la definición de Φ_v,

$$\Phi_v(a\phi + b\psi) = (a\phi + b\psi)(v) = a\phi(v) + b\psi(v) = a\Phi_v(\phi) + b\Phi_v(\psi)$$

para todo $\phi, \psi \in V^*$ y para todo $a, b \in K$. ∎

Teorema 3.79. *(de Reflexividad). La aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi : V &\to V^{**} \\ v &\mapsto \Phi_v \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Por el lema anterior, la aplicación Φ está definida consistentemente. Para demostrar que es lineal, debemos comprobar que $\Phi_{av+bw}(= \Phi(av + bw))$ es igual a $a\Phi_v + b\Phi_w(= a\Phi(v) + b\Phi(w))$ para todo $v, w \in V$, $a, b \in K$. Para ello, aplicamos ambos a una forma lineal genérica $\phi \in V^*$:

$$\begin{aligned} \Phi_{av+bw}(\phi) = &\quad \phi(av + bw) = a\phi(v) + b\phi(w) \\ (a\Phi_v + b\Phi_w)(\phi) = &\quad a\Phi_v(\phi) + b\Phi_w(\phi) = a\phi(v) + b\phi(w), \end{aligned}$$

comprobándose que son iguales. Para demostrar la biyectividad de Φ, basta con comprobar su inyectidad (al tener V y V^{**} la misma dimensión), esto es, $\mathrm{Nuc}(\Phi) = \{0\}$. Sea $v \in V$ tal que Φ_v es la forma nula del bidual. Esto quiere decir $\Phi_v(\phi) = 0$, esto es, $\phi(v) = 0$, para todo $\phi \in V^*$, lo que implica que v es 0 (véase el corolario 3.74). ∎

Observación 3.80. El significado de este isomorfismo puede entenderse como sigue. Sean $\mathcal{B}$, $\overline{\mathcal{B}}$ dos bases de $V(K)$. Sabemos que existe un único isomorfismo $F : V \to V^*$ que, de manera ordenada, aplica $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}^*$ y, análogamente, un único isomorfismo $G : V^* \to V^{**}$ que aplica $\mathcal{B}^*$ en su base dual $\mathcal{B}^{**}$. De igual modo, con $\overline{\mathcal{B}}$ obtenemos isomorfismos $\overline{F} : V \to V^*$, $\overline{G} : V^* \to V^{**}$. En general, $F \neq \overline{F}$ y $G \neq \overline{G}$. Sin embargo, las composiciones $G \circ F, \overline{G} \circ \overline{F} : V \to V^{**}$ sí verifican $G \circ F = \overline{G} \circ \overline{F}$; de hecho, ambos coinciden con el isomorfismo que proporciona el Teorema de Reflexividad (compruébese como ejercicio).

Corolario 3.81. *Toda base $\mathcal{B}' = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$ de $V^*(K)$ es la base dual de una única base $\mathcal{B}$ de $V(K)$.*

Demostración. En efecto, dada la base del dual $\mathcal{B}'$, podemos tomar su base dual $\mathcal{B}'^* \subset V^{**}$, y escribir $\mathcal{B}'^* = (\Phi_{v_1}, \ldots, \Phi_{v_n})$ donde $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ es la base $\Phi^{-1}(\mathcal{B}'^*)$ de $V(K)$, proporcionada por el teorema de reflexividad. Se tiene entonces

$$\delta^i_j = \Phi_{v_j}(\phi^i) = \phi^i(v_j) \ , \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

la primera igualdad por ser $\mathcal{B}'^*$ la base dual de $\mathcal{B}'$ y la segunda por la definición de Φ. En consecuencia, $\mathcal{B}'$ satisface la ecuación $\phi^i(v_j) = \delta^i_j$ que define la base dual de $\mathcal{B}$, esto es, $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$. ∎

3.5.3. Anuladores

Como se comentó en la observación 3.70, el núcleo de una forma lineal siempre se puede ver como la solución de un sistema lineal homogéneo de una sola ecuación:

$$a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n = 0.$$

En el caso de que tengamos un sistema de m ecuaciones, cada fila de su matriz $A = (a^i{}_j)$ proporciona una forma lineal ϕ^i que "anula" a todas las soluciones del sistema. En general, todo subespacio vectorial U puede verse de este modo cuando escribimos unas ecuaciones implícitas para él. Desarrollamos a continuación estas ideas.

Definición 3.82. *Dado cualquier subconjunto $S \subset V$, se define su* anulador *en V^* como*

$$an(S) = \{\phi \in V^* : \phi(v) = 0, \forall v \in S\}.$$

Proposición 3.83. *El anulador verifica las siguientes propiedades:*
(1) $an(S)$ es un subespacio vectorial de V^*.
(2) Si $S \subset S'$ entonces $an(S) \supset an(S')$.
(3) $an(S) = an(L(S))$
(4) $an(\{0\}) = V^*$; $an(V) = \{0\}$ (donde $0 \in V^*$ es la forma lineal nula).

Demostración. (1) Sean $\phi, \psi \in \mathrm{an}(S)$, $a, b \in K$. Entonces, para cualquier vector v de S:

$$(a\phi + b\psi)(v) = a\phi(v) + b\psi(v) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0,$$

esto es, $a\phi + b\psi \in \mathrm{an}(S)$

(2) Es inmediato (¡compruébese!).

(3) La inclusión $\supset$ es consecuencia del apartado anterior. Para la contraria, sea $\phi \in \mathrm{an}(S)$ y $w \in L(S)$, esto es, $v = \sum_{i=1}^m a_i v_i$ con $v_1, \ldots, v_m \in S$. Entonces,

$$\phi(v) = \phi(\sum_{i=1}^m a_i v_i) = \sum_{i=1}^m a_i \phi(v_i) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot 0 = 0.$$

(4) Trivialmente, $\mathrm{an}(\{0\}) \subset V^*$, y la inclusión contraria se da porque $\phi(0) = 0$ para todo $\phi \in V^*$ (al ser ϕ una aplicación lineal).

Trivialmente, $\mathrm{an}(V) \supset \{0\}$, y la inclusión contraria equivale a decir que si $v \in V$ verifica $\phi(v) = 0$ para todo $\phi \in V$ entonces $v = 0$, lo que ya es conocido (corolario 3.74). ∎

Ejercicio 3.84. *Dado cualquier subconjunto $\tilde{S} \subset V^*$ definimos su anulador en V como*

$$an(\tilde{S}) = \{v \in V : \phi(v) = 0, \forall \phi \in \tilde{S}\} \quad (= \cap_{\phi \in \tilde{S}} \mathrm{Nuc}(\phi)).$$

(1) Enunciar propiedades para $an(\tilde{S})$ análogas a las vistas para $an(S)$ en la proposición anterior, comprobándolas de dos maneras: (a) directamente, y (b) aplicando el teorema de reflexividad.

(2) Comprobar que, en el caso finito, $\tilde{S} = \{\phi^1, \ldots, \phi^m\}$, su anulador puede escribirse como la solución de un SEL homogéneo de m ecuaciones y n incógnitas (véase la observación 3.70).

(3) Demostrar que si $\tilde{S} \subset V^*$, su anulador en V, $an_V(\tilde{S})$ y su anulador en V^{**}, $an_{V^{**}}(S)$ están relacionados por el teorema de reflexividad, esto es, $\Phi(an_V(\tilde{S})) = an_{V^{**}}(\tilde{S})$.

Teorema 3.85. *Sea U un subespacio vectorial de $V(K)$ de dimensión m. Entonces:*

(1) $dim_K(an(U)) = n - m$.

(2) Si Φ es el isomorfismo del teorema de reflexividad entonces $\Phi(U) = an(an(U))$, esto es, con la identificación natural de V y V^{**}, $U = an(an(U))$.

(3) Dado otro subespacio W, se tiene que $U = W$ si y sólo si $an(U) = an(W)$.

Demostración. (1) Sea $B = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ una base de todo $V(K)$ obtenida ampliando una $B_U = (v_1, \ldots, v_m)$ de U. La base dual $B^* = (\phi^1, \ldots, \phi^m, \phi^{m+1}, \ldots, \phi^n)$ verifica $\{\phi^{m+1}, \ldots, \phi^n\} \subset \mathrm{an}(U)$ trivialmente. Puesto que este conjunto es linealmente independiente y consta de $n-m$ elementos, basta con comprobar que es un sistema de generadores de $\mathrm{an}(U)$. Para ello, sea $\phi \in \mathrm{an}(U)$ y escribámoslo como combinación lineal de B^*:

$$\phi = b_1\phi^1 + \ldots b_m\phi^m + b_{m+1}\phi^{m+1} + \cdots + b_n\phi^n.$$

Como cada b_i verifica $b_i = \phi(v_i)$ y los primeros m vectores de B pertenecen a U (que está contenido en el núcleo de ϕ), se sigue $b_1 = \cdots = b_m = 0$, como se quería demostrar.

(2) Como por el apartado anterior $\dim_K(\mathrm{an}(\mathrm{an}(U)) = n-$ $\dim_K(\mathrm{an}(U)) = \dim_K(U)$, la cual coincide con $\dim_K(\Phi(U))$, basta con demostrar la inclusión $\subset$, que es inmediata (para cada $u \in U$ y todo $\phi \in \mathrm{an}(U)$ se tiene $\Phi_u(\phi) = \phi(u) = 0$, esto es, $\Phi_u \in \mathrm{an}(\mathrm{an}\ (U))$ como se quería)

(3) La implicación hacia la derecha es trivial. Hacia la izquierda, de $\mathrm{an}(U) = \mathrm{an}(W)$ se sigue $\mathrm{an}(\mathrm{an}(U)) = \mathrm{an}(\mathrm{an}(W))$ y por el apartado anterior $U = W$. ∎

Observación 3.86. Desde el punto de vista teórico, el punto (1) del teorema anterior permite construir explícitamente una base del anulador de S:

Paso 1: se determina una base $B_S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ de $L(S)$.

Paso 2: se amplía hasta una base $B = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ de $V(K)$.

Paso 3: Se construye la base dual $B^* = (\phi^1, \ldots, \phi^m, \phi^{m+1}, \ldots, \phi^n)$.

Paso 4: $\{\phi^{m+1}, \ldots, \phi^n\}$ es la base de $\mathrm{an}(S)$ que se buscaba.

Además, puede usarse que si se construyó la base B calculando sus coordenadas respecto a otra base prefijada B_0, esto es, si se conoce $M(I_V, B_0 \leftarrow B)$, entonces el Paso 4 se resuelve sin más que tener en cuenta $M(I_V, B_0 \leftarrow B)^t = M(I_{V^*}, B^* \leftarrow B_0^*)$, y calcular la inversa de esta última matriz.

No obstante, desde un punto de vista práctico, debe tenerse en cuenta lo siguiente. Siempre que se tenga un subespacio vectorial U determinado por unas ecuaciones implícitas (bien porque se esté trabajando en $K^n(K)$ o, con más generalidad, porque se haya prefijado una base B de V y se esté trabajando con coordenadas en esa base):

$$\begin{array}{cccc} a^1_1 x^1 + & \ldots & + a^1_n x^n & = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^m_1 x^1 + & \ldots & + a^m_n x^n & = 0 \end{array}$$

entonces la fila i-ésima puede verse como la ecuación del núcleo de la forma lineal ψ^i tal que

$$\psi^i_B = ({a^i}_1, \ldots, {a^i}_n)$$

de modo que una base de an(U) es, directamente,[10] $\{\psi^1, \ldots, \psi^m\}$.

Por otra parte, el punto (2) del teorema anterior asegura que, si $\{\psi^1, \ldots, \psi^m\}$ genera el anulador de U, entonces U es el anulador de $\{\psi^1, \ldots, \psi^m\}$.

Ejercicio 3.87. *Se consideran los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:*

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}, \qquad W = L(\{(1,1,1),(3,2,0)\}.$$

Calcular bases de an(U), an(W), an$(U+W)$ y an$(U \cap W)$.

Ejercicio 3.88. *Sean U, W dos subespacios vectoriales de $V(K)$. Demostrar:*

(1) an $(U+W)$ =an$(U) \cap$ an(W),

(2) an $(U \cap W)$ = an(U)+ an(W).

Nota: *es posible demostrar el apartado (2) a partir del apartado (1) (tómense los anuladores de cada miembro de (2) y aplíquense (1) y el teorema de reflexividad).*

3.5.4. Trasposición de aplicaciones lineales

Sean $V(K)$, $V'(K)$ dos espacios vectoriales y $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre ellos. Para cada $\phi' \in V'^*(K)$ podemos definir la aplicación $\phi' \circ f : V \to K$. Como $\phi' \circ f$ es una composición de aplicaciones lineales se tiene que $\phi' \circ f$ es también lineal y, por tanto, $\phi' \circ f \in V^*(K)$.

Definición 3.89. *Dada una aplicación lineal $f : V \to V'$, su* aplicación traspuesta *f^t se define por:*

$$\begin{aligned} f^t : V'^* &\to V^* \\ \phi' &\mapsto f^t(\phi') := \phi' \circ f. \end{aligned}$$

Las propiedades de la trasposición se resumen en el siguiente resultado.

Proposición 3.90. *Sea $f : V \to V'$ lineales.*

(1) La aplicación traspuesta f^t es lineal.

(2) $I_V^t = I_{V^*}$, esto es, la traspuesta de la aplicación identidad en V es la identidad en V^*.

(3) Si V'' es otro e.v. y $h : V' \to V''$ es lineal entonces $(h \circ f)^t = f^t \circ h^t$.

(4) $(f+g)^t = f^t + g^t$ y $(a \cdot f)^t = a \cdot f^t$, para todo $g \in \mathrm{Lin}(V,V')$, $a \in K$. Más aún, la aplicación trasposición

$$\begin{aligned} t : \mathrm{Lin}(V,V') &\to \mathrm{Lin}(V'^*, V^*) \\ f &\mapsto f^t \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

(5) Con la identificación natural de V con V^{**} y V' con V'^{**},

$$f = (f^t)^t \qquad \text{esto es} \qquad f = (\Phi')^{-1} \circ (f^t)^t \circ \Phi$$

donde $\Phi : V \to V^{**}$, $\Phi' : V' \to V'^{**}$ son los isomorfismos naturales por reflexividad.

[10] Por supuesto, si no estuviera garantizado que las ecuaciones son independientes, este conjunto de formas sería un sistema de generadores de an(U), del cual se podría extraer una base.

Demostración. (1) Veamos que, para todo $\phi', \psi' \in V'^*$ y $a,b \in K$ se tiene $f^t(a\cdot\phi' + b\cdot\psi') = a\cdot f^t(\phi') + b\cdot f^t(\psi')$. Como ambas expresiones pertenecen a V^*, comprobaremos que proporcionan el mismo resultado al aplicarlas a un $v \in V$ arbitrario:

$$\begin{aligned} [f^t(a\cdot\phi' + b\cdot\psi')](v) = &\quad (a\cdot\phi' + b\cdot\psi')(f(v)) = a\cdot\phi'(f(v)) + b\cdot\psi'(f(v)) \\ [a\cdot f^t(\phi') + b\cdot f^t(\psi')](v) = &\quad a\cdot[f^t(\phi')](v) + b\cdot[f^t(\psi')](v) = a\cdot\phi'(f(v)) + b\cdot\psi'(f(v)) \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad de la primera línea y la última de la segunda se usa la definición de la traspuesta.

(2) Para todo $\phi \in V^*$, $I_V^t(\phi) = \phi \circ I_V = \phi$.

(3) Como $(h\circ f)^t, f^t\circ h^t : V''^* \to V^*$ debemos comprobar que, para todo $\phi'' \in V''^*$ se tiene $(h\circ f)^t(\phi'') = f^t\circ h^t(\phi'')$. Ambas expresiones pertenecen a V^*, y es fácil comprobar que coinciden:

$$\begin{aligned} (h\circ f)^t(\phi'') = &\quad \phi''\circ(h\circ f) \\ (f^t\circ h^t)(\phi'') = &\quad f^t(h^t(\phi'')) = f^t(\phi''\circ h^t) = (\phi''\circ h)\circ f, \end{aligned}$$

y la igualdad se sigue de la asociatividad de la composición.

(4) Para probar la linealidad basta con tomar también $b \in K$ y demostrar $(a\cdot f + b\cdot g)^t = a\cdot f^t + b\cdot g^t$. Como ambas se definen de $V'^* \to V^*$, debemos demostrar $(a\cdot f + b\cdot g)^t(\phi') = (a\cdot f^t + b\cdot g^t)(\phi')$ para $\phi' \in V'^*$:

$$\begin{aligned} (a\cdot f + b\cdot g)^t(\phi') = &\quad \phi'\circ(a\cdot f + b\cdot g) \\ (a\cdot f^t + b\cdot g^t)(\phi') = &\quad a\cdot f^t(\phi') + b\cdot g^t(\phi') = a\cdot(\phi'\circ f) + b\cdot(\phi'\circ g) \end{aligned}$$

y la igualdad de ambas expresiones se sigue de la linealidad de ϕ' (¡compruébese aplicándolas a un $v \in V$ arbitrario!).

Para demostrar que la aplicación trasposición es un isomorfismo, basta con comprobar que es inyectiva (al tener su dominio y codominio la misma dimensión), y para esto que su núcleo es 0, esto es, si $f^t = 0$ entonces $f = 0$. Ahora bien, si $f^t = 0$ se tiene $f^t(\phi') = \phi'\circ f = 0$ para todo $\phi' \in V'^*$. Así, para cada $v \in V$ se tiene $\phi(f(v)) = 0$ para todo $\phi \in V'^*$, por lo que $f(v) = 0$, como se quería.

(5) Debemos demostrar $\Phi'\circ f = (f^t)^t\circ\Phi$. Como ambas se definen $V \to V'^{**}$, debemos demostrar que $\Phi'_{f(v)} (= \Phi'\circ f(v))$ coincide con $(f^t)^t(\Phi_v) (= (f^t)^t\circ\Phi(v))$ para todo $v \in V$. Como ambos pertenecen a V'^{**}, debemos comprobar que coinciden al aplicarlo a un $\phi' \in V'^*$ arbitrario:

$$\begin{aligned} \Phi'_{f(v)}(\phi') = &\quad \phi'(f(v)) \\ [(f^t)^t(\Phi_v)](\phi') = &\quad [\Phi_v\circ f^t](\phi') = \Phi_v[f^t(\phi'))] = \Phi_v(\phi'\circ f) = (\phi'\circ f)(v), \end{aligned}$$

esto es, la igualdad se cumple aplicando las definiciones de trasposición e isomorfismos Φ, Φ'. ∎

Para trabajar con bases, fijemos la siguiente notación. Tomamos bases $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_m)$ en V y V', resp., y sus correspondientes bases duales $\mathcal{B}^* = (\phi^1, \dots, \phi^n)$, $\mathcal{B}'^* = (\phi'^1, \dots, \phi'^m)$. Aunque no sea imprescindible, conviene subir uno de los índices de las matrices de las aplicaciones lineales, el de fila o el de columna según la aplicación sea entre V y V' o sus duales. Esto es:

• Al construir $M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ subiremos (consistentemente con convenios anteriores) el primer índice (filas) para los elementos de esa matriz , esto es, escribiremos $f(v_j) = \sum_i a^i{}_j v'_i$. En consecuencia, para cada columna j, los $a^i{}_j$ son las coordenadas del vector $f(v_j)$ en la base $\mathcal{B}'$, con el correspondiente índice i arriba.

• Sin embargo, si $h^* : V^* \to V'^*$ es una aplicación lineal entre los correspondientes espacios duales, para los elementos de la matriz $M(h^*, \mathcal{B}'^* \leftarrow \mathcal{B}^*)$ subiremos el segundo índice (columnas), esto es, escribiremos $h^*(\phi^j) = \sum_i a_i{}^j \phi'^i$. En consecuencia, para cada columna j, los $a_i{}^j$ son las coordenadas de la forma $h^*(\phi^j)$ en la base $\mathcal{B}'^*$, con el correspondiente índice i abajo.

Proposición 3.91. *La matriz de la aplicación traspuesta f^t verifica:*

$$M(f^t, \mathcal{B}^* \leftarrow \mathcal{B}'^*) = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})^t.$$

Demostración. (i) Si se denota por $a^i{}_j$ (resp. $b_i{}^j$) el elemento (i, j) de la matriz de f (resp. de f^t) se obtiene:

$$b_i{}^j = [f^t(\phi'^j)](v_i) = (\phi'^j \circ f)(v_i) = \phi'^j(f(v_i)) = \phi'^j(\sum_{l=1}^{n} a^l{}_i v'_l) = \sum_{l=1}^{n} a^l{}_i \phi'^j(v'_l) = a^j{}_i$$

(obsérvese que el índice de columna y el de fila a la izquierda coincide, resp. con el de fila y columna a la derecha). ∎

Observación 3.92. Tomando $f = I_V$, de este resultado se reobtiene la fórmula del cambio de base: $M(I_{V^*}, \mathcal{B}^* \leftarrow \mathcal{B}'^*) = M(I_V^t, \mathcal{B}^* \leftarrow \mathcal{B}'^*) = M(I_V, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})^t$.

La proposición anterior permite afirmar que el rango de f coincide con el de su traspuesta, a partir de las propiedades ya conocidas del rango de matrices. No obstante, el siguiente resultado permite dar una demostración directa para aplicaciones lineales y, en consecuencia, deducir a partir de él que el rango de una matriz coincide con el de su traspuesta (compárese con el lema 2.169 y teorema 2.170 del tema anterior).

Teorema 3.93. *Para cualquier aplicación lineal $f : V \to V'$:*
(i) $an(Im\ f) = Nuc(f^t)$.
(ii) $rango(f) = rango(f^t)$.
En consecuencia, para cualquier matriz $A \in M_{m\times n}(K)$ se tiene $rango(A) = rango(A^t)$.

Demostración. (i) Sea $\phi' \in V^*$, aplicando las definiciones:

$$\phi' \in \text{an}(Imf) \quad \Leftrightarrow \quad \phi'(f(v)) = 0,\ \forall v \in V \quad \Leftrightarrow \quad \phi' \circ f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f^t(\phi') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi' \in \text{Nuc} f^t$$

(ii) Aplicando el teorema del rango a f^t, el apartado anterior y que $\dim(\text{an}(\text{Im}(f)) = m - \dim(\text{Im}(f))$:

$$\text{rango}(f^t) := \dim(\text{Im} f^t) = m - \dim(\text{Nuc} f^t) = m - \dim(\text{an}(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rango}(f).$$

Finalmente, para demostrar la última afirmación, dada A podemos hallar una aplicación lineal f cuya matriz asociada sea A (corolario 3.31) y el rango r de f coincidirá con el de A (proposición 3.36). Según se acaba de demostrar, r coincide con el rango de f^t y, como A^t es la matriz asociada a f^t en bases apropiadas (proposición 3.91), el rango de A^t coincide con r. ∎

Observación 3.94. Este último resultado muestra que se puede desarrollar toda la teoría de aplicaciones lineales independientemente de la de matrices. Una vez hecho esto, las propiedades de las matrices se deducen inmediatamente de las de las aplicaciones lineales.

Corolario 3.95. *an*$(Nuc\ f) = Im(f^t)$.

Demostración. Las siguientes dos demostraciones tienen interés propio.

Dem. 1 Aplicando el apartado (i) del teorema 3.93 anterior a f^t, se sigue an(Im f^t)=Nuc($(f^t)^t$). Tomando anuladores en ambos miembros se tiene an(an((Im f^t))=an(Nuc($(f^t)^t$)), y el resultado se sigue aplicando el teorema de reflexividad en V^*. □

Dem. 2 Para la inclusión ($\supset$), dado $\phi \in \mathrm{Im}(f^t)$, sea $\phi' \in V'^*$ tal que $\phi = f^t(\phi') = \phi' \circ f$. Claramente, esta composición se anula sobre Nuc(f) por lo que $\phi \in$ an(Nuc(f)).

La inclusión ($\subset$) se obtiene directamente porque las dimensiones de ambos subespacios son iguales: dim(an(Nuc f))= dim(Im(f))= dim(Im(f^t)), la última igualdad por (ii) del teorema 3.93. □

Por completitud, incluimos también a continuación una demostración directa y constructiva de la inclusión ($\subset$).

Demostración alternativa de ($\subset$). Sea $\phi \in$ an(Nuc$f$), esto es, Nuc$(f) \subset$ Nuc(ϕ). Podemos suponer $\phi \neq 0$ (pues el resultado sería trivial en este caso), con lo que Nuc(ϕ) tiene dimensión $n-1$. Construyamos una base $B = (v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ de V tomando primero una base de Nuc(f), que constituirá los últimos $n-r$ vectores de B, ampliándola a continuación a una base de Nuc(ϕ), que constituirá los vectores de B a partir del segundo, y finalmente ampliando ésta a una base de V usando un vector v_1 (el cual, obviamente, no pertenecerá a Nuc(ϕ)) de modo que $\phi(v_1) = 1$. Necesariamente, $B'_{Imf} := \{f(v_1), \ldots, f(v_r)\} \subset V'$ es una base de Im(f), y podemos escoger una forma lineal ϕ' que cumpla: $\phi'(f(v_1)) = 1$ y ϕ' se anula sobre $f(v_2), \ldots, f(v_r)$ (por ejemplo, ϕ' se puede construir ampliando B'_{Imf} hasta una base ordenada B' de V y escogiendo el primer elemento de su dual B'^*). Se sigue entonces $\phi = f^t(\phi')$, pues al aplicar $f^t(\phi')$ sobre la base inicial B se obtiene:

$$\begin{cases} f^t(\phi')(v_1) = & \phi'(f(v_1)) = 1 \quad (= \phi(v_1)) & & \text{(por la elección de } \phi') \\ f^t(\phi')(v_k) = & \phi'(f(v_k)) = 0 \quad (= \phi(v_k)) & \forall k \in \{2, \ldots, r\} & \text{(por la elección de } \phi') \\ f^t(\phi')(v_k) = & \phi'(f(v_k)) = 0 \quad (= \phi(v_k)) & \forall k \in \{r+1, \ldots, n\} & \text{(porque } f(v_k) = 0) \end{cases}$$

En consecuencia, $\phi \in \mathrm{Im} f^t$, como se quería demostrar. ∎