GEOMETRÍA I
(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)
Segunda prueba parcial (19/12/2018)

1. **[3 puntos]**. Se considera un endomorfismo f de un espacio vectorial $V(\mathbb{R})$ de dimensión 2 que verifica:
$$f \circ f = -I_V.$$
   - Demuéstrese que, para todo $v \in V$ distinto de 0, el conjunto $B = \{v, f(v)\}$ es una base de $V(\mathbb{R})$, y calcúlese $M(f, B)$.
   - Razónese detalladamente cómo son todas las matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ tales que $X \cdot X = -I_2$.

2. **[2 puntos]**. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Toda aplicación lineal $f : V \to V'$, con $\dim V = n$, $\dim V' = m$, verifica: $\dim(\mathrm{an}(\mathrm{Im}(f^t))) \leq m$.

   b) Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(K)$ verifica $|A| = 0$ y
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$
   entonces rango $(A) \leq 1$.

3. **[2,5 puntos]**.
   - Calcúlense dos bases B y $\bar{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ tales que la matriz de f en esas bases sea igual a $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, para algún $r \in \mathbb{N}$.
   - Sea B_u la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$. Calcúlense dos matrices regulares P, Q tales que:
$$Q^{-1} \cdot M(f, B_u) \cdot P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

4. **[2,5 puntos]**. Se consideran las formas lineales:
$$\phi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \mathrm{traza}(A)$$
$$\psi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto a_{12} + a_{21}.$$

   Calcúlese $F \in \mathrm{End}(M_2(\mathbb{R}))$ que verifique:
$$F \circ F = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{an}(\mathrm{Nuc}(F)) = L\{\phi, \psi\}.$$

Duración: 2:30 min.

1 . Se considera un endomorfismo f de un espacio vectorial $V(\mathbb{R})$ de dimensión 2 que verifica:

$$f \circ f = -I_V.$$

- Demuéstrese que, para todo $v \in V$ distinto de 0, el conjunto $B = \{v, f(v)\}$ es una base de $V(\mathbb{R})$, y calcúlese $M(f, B)$.
- Razónese detalladamente cómo son todas las matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ tales que $X \cdot X = -I_2$.

Solución. Puesto que la dimensión de $V(\mathbb{R})$ es dos, para el primer apartado basta con comprobar que B es linealmente independiente. Razonando por reducción al absurdo, en caso contrario como $v \neq 0$ existirá un escalar $a \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(v) = a \cdot v.$$

Aplicando f a ambos miembros se tendrá entonces

$$f(f(v)) = a \cdot f(v) = a \cdot (a \cdot v) = a^2 \cdot v.$$

Por la hipótesis sobre f se deduce

$$-v = a^2 \cdot v$$

y, aplicando de nuevo $v \neq 0$, se sigue:

$$a^2 = -1.$$

Esto es absurdo, ya que a es un número real. Por tanto, deducimos que B es una base.

Considerando la ordenación natural $B = (v, f(v))$, de las igualdades inmediatas

$$f(v) = 0 \cdot v + 1 \cdot f(v), \qquad f(f(v)) = -1 \cdot v + 0 \cdot f(v)$$

se obtiene directamente:

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

lo que acaba de resolver el primer apartado.

Para el segundo apartado, observemos en primer lugar que la matriz anterior satisface la ecuación requerida:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

Además, la igualdad $f \circ f = -I_V$ fuerza a que la matriz de f en cualquier otra base $\bar{B}$ también sea una solución. En efecto:

$$M(f, \bar{B}) \cdot M(f, \bar{B}) = M(f \circ f, \bar{B}) = M(-I_V, \bar{B}) = -I_2.$$

Esta matriz $M(f, \bar{B})$ es semejante a $M(f, B)$; de hecho, $M(f, \bar{B}) = P^{-1} \cdot M(f, B) \cdot P$ donde P es la matriz regular $P = M(I_V, B \leftarrow \bar{B})$. Por tanto, también son soluciones de la ecuación matricial todas estas matrices semejantes[1]:

$$P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot P \qquad \forall P \in GL(2, \mathbb{R}). \tag{1}$$

[1]Aunque no sea necesario comprobarlo de nuevo, vale la pena hacerlo directamente:

$$\left(P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot P\right) \cdot \left(P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot P\right) = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot P = P^{-1} \cdot (-I_2) \cdot P = -I_2.$$

Finalmente, demostremos que cualquier solución $X \cdot X = -I_2$ es del tipo expresado en (1), lo que concluye el ejercicio[2]. Observemos que, dada cualquier tal X, el único endomorfismo $f_X \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ que verifica:

$$M(f_X, B_u) = X$$

(en la base usual B_u de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$) satisface:

$$M(f_X \circ f_X, B_u) = M(f_X, B_u) \cdot M(f_X, B_u) = X \cdot X = -I_2 = M(-I_V, B_u).$$

Por tanto, verifica $f_X \circ f_X = -I_V$ y, aplicando el apartado anterior, existe una base B de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ tal que:

$$M(f_X, B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, $M(f_X, B_u)$, es semejante a esa matriz, esto es, X es del tipo (1), como se quería[3].

[2]Este razonamiento es similar a la demostración, hecha con detalle en clase, de que toda solución de $X \cdot X = X$ es semejante (y no sólo equivalente) a una del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, para algún $r \in \mathbb{N}$.

[3]Este ejercicio es generalizable, pues si un espacio vectorial $V(\mathbb{R})$ de dimensión n admite un endomorfismo f que verifique $f \circ f = -I_V$, entonces la dimensión n debe ser par, y la matriz de f en cualquier base $\bar{B}$ debe ser semejante a una del tipo:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \cdots & 0 \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline 0 & \cdots & \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

(véase la relación de ejercicios).

2. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Toda aplicación lineal $f : V \to V'$, con dim $V = n$, dim $V' = m$, verifica: dim(an(Im(f^t)))$\leq m$.

   b) Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(K)$ verifica $|A| = 0$ y
   $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$
   entonces rango $(A) \leq 1$.

Solución. a) FALSA. Teniendo en cuenta que $\mathrm{Im}(f^t) \subset V^*$ (puesto que $f^t : (V')^* \to V^*$), de las propiedades del anulador y de que el rango de f y f^t traspuesta coinciden, se deduce:

$$\dim(\mathrm{an}(\mathrm{Im}(f^t))) = \dim V - \dim((\mathrm{Im}(f^t)) = n - \mathrm{rango}(f).$$

Claramente, el miembro derecho es $\leq n$, pero no parece darse ninguna desigualdad análoga con m. Así, como contraejemplo, basta con escoger los espacios vectoriales con $n > m$ y cualquier aplicación lineal f con rango menor que $n - m$. En particular, la siguiente aplicación nula:

$$f_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad\qquad x \mapsto 0,$$

sirve de contraejemplo. De hecho, $f_0^t : \mathbb{R}^* \to (\mathbb{R}^2)^*$ también es una aplicación nula, luego $\mathrm{Im}(f_0^t) = \{\phi_0\}$ (donde ϕ_0 es la forma lineal nula en $(\mathbb{R}^2)^*$) y el anulador de $\mathrm{Im}(f_0^t)$ es entonces todo $\mathbb{R}^2$ (o, equivalentemente todo su bidual). En resumen:

$$\dim(\mathrm{an}(\mathrm{Im}(f_0^t))) = 2 > 1 = m.$$

b) FALSA. Obsérvese que, de la condición $|A| = 0$, se deduce sólo rango$(A) \leq 2$ pero, en principio, no se verifica ningún criterio conocido para descartar que se cumpla la igualdad a 2 (p. ej., no se asegura que los menores de orden 2 con líneas no contiguas sean nulos, ni se pueden ir descartando líneas que se escriban como combinación lineal de otras orlando menores).

De hecho, si nos fijamos en la submatriz formada por las primeras dos filas, los dos menores de esta submatriz que son nulos por la hipótesis sobre A, permiten que la primera y tercera columna sean independientes, siempre que la segunda dependa linealmente de ambas (y, por tanto, sea nula), por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, para obtener un contraejemplo, basta con añadir una última fila de ceros, lo que asegura que los otros dos menores de la hipótesis se anulen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Se considera la aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], \qquad p(x) \mapsto p'(x) \qquad \text{(donde } p'(x) \text{ denota la derivada del polinomio).}$$

- Calcúlense dos bases B y $\bar{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ tales que la matriz de f en esas bases sea igual a $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, para algún $r \in \mathbb{N}$.
- Sea B_u la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$. Calcúlense dos matrices regulares P, Q tales que:

$$Q^{-1} \cdot M(f, B_u) \cdot P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Solución. Para el primer apartado, seguiremos el procedimiento sistemático que proporciona el teorema del rango, por lo que empezaremos calculando su núcleo. Como, por la definición de f,

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + 2a_2 x, \qquad \forall a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

se tiene:

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a_1 = a_2 = 0\} = \{a_0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a_0 \in \mathbb{R}\} = L(\{1\}).$$

Esto es, $\{1\}$ es una base de $\mathrm{Nuc}(f)$. Ampliamos esta base hasta una de todo $\mathbb{R}_2[x]$. Esta ampliación la podemos conseguir con elementos de la base usual $B_u = (1, x, x^2)$ aunque, por conveniencia, ordenaremos estos nuevos elementos poniéndolos al principio. Escogemos así:

$$\boxed{B := (x, x^2, 1).}$$

Se sabe del teorema del rango que las imágenes de los polinomios correspondientes a la ampliación forman una base de la imagen:

$$B_{\mathrm{Im} f} = \{f(x), f(x^2)\} = \{1, 2x\}.$$

Finalmente, ampliamos este conjunto linealmente independiente hasta una base $\bar{B}$ del codominio, ordenando los nuevos elementos correspondientes a la ampliación al final de la base. Para ello, debemos añadir a $B_{\mathrm{Im} f}$ un polinomio apropiado (cualquiera de grado 2), que podemos escoger de entre los de la base usual (en este caso, necesariamente x^2). Escogemos así:

$$\boxed{\bar{B} := (1, 2x, x^2).}$$

Por construcción, se tiene la expresión pedida con $r = 2$, esto es:

$$M(f, \bar{B} \leftarrow B) = \left(\begin{array}{c|c|c} (f(x))_{\bar{B}} & (f(x^2))_{\bar{B}} & (f(1))_{\bar{B}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} (1)_{\bar{B}} & (2x)_{\bar{B}} & (0)_{\bar{B}} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para la segunda parte, la relación:

$$M(f, \bar{B} \leftarrow B) = M(f, \bar{B} \leftarrow B_u) \cdot M(f, B_u) \cdot M(I, B_u \leftarrow B),$$

proporciona directamente las matrices P y Q requeridas:

$$\boxed{P = M(I, B_u \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = M(I, B_u \leftarrow \bar{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Nota. Aunque no es necesario, se puede comprobar directamente la igualdad requerida. De hecho,

$$M(f, B_u) = \left(\ (0)_{B_u} \ \middle| \ (1)_{B_u} \ \middle| \ (2x)_{B_u} \ \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego:

$$Q^{-1} \cdot M(f, B_u) \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Se consideran las formas lineales:

$$\phi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \text{traza}(A)$$
$$\psi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto a_{12} + a_{21}.$$

Calcúlese $F \in \text{End}(M_2(\mathbb{R}))$ que verifique:

$$F \circ F = 0 \qquad \text{y} \qquad \text{an}(\text{Nuc}(F)) = L\{\phi, \psi\}.$$

Solución. Por la última condición, se tiene:

$$\begin{aligned}\text{Nuc}(F) &= \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \phi(A) = 0, \psi(A) = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a_{11} + a_{22} = 0, a_{12} + a_{21} = 0\}.\end{aligned}$$

Esto es, $\text{Nuc}(F)$ proporciona las soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales (claramente independientes) y cuatro incógnitas. Este sistema es inmediato, obteniéndose entonces como base del núcleo:

$$B_{\text{NucF}} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}.$$

Se tendrá así dim(Im(F))$= 4 - 2 = 2$. La condición $F \circ F = 0$ equivale a $\text{Im}F \subset \text{Nuc}(F)$ y, al ser ambos subespacios de dimensión 2, equivale a $\text{Im}(F) = \text{Nuc}(F)$. Basta entonces con definir F ampliando B_{NucF} y haciéndole corresponder a los dos vectores de la ampliación los dos de B_{NucF}. Con más precisión, empezamos construyendo una base B, ampliando B_{NucF} con los dos primeros vectores de la base usual:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

De hecho, podemos comprobar que B es linealmente independiente computando el determinante de la matriz formada por las coordenadas de sus vectores en la base usual de $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

(las dos primeras igualdades desarrollando por los adjuntos de la última fila). Así, <u>definimos F como el único endomorfismo de $M_2(\mathbb{R})$ obtenido extendiendo por linealidad las relaciones:</u>

$$\boxed{\begin{array}{ll} F(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & F(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ F(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & F(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}}$$

Claramente, las dos primeras igualdades imponen $\text{an}(L\{\phi, \psi\}) \subset \text{Nuc}(F)$ y las dos últimas $\text{Im}(F) = \text{Nuc}(F)$. Así, no sólo se tiene $F \circ F = 0$ sino también la igualdad en la inclusión anterior (al coincidir las dimensiones de ambos subespacios) y, tomando anuladores, $L\{\phi, \psi\} = \text{an}(\text{Nuc}(F))$, como se quería.

Nota. Aunque no es necesario, podemos especificar F también de otras formas. Por ejemplo,

$$M(F, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato que esta matriz tiene rango 2 y que el núcleo de F está generado por los dos primeros vectores de la base B, así como que $M(F, B) \cdot M(F, B) = 0 \in M_4(\mathbb{R})$, esto es, $F \circ F = 0$.

Análogamente, si queremos calcular la matriz de F en la base usual, basta con computar:

$$\begin{aligned} F(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) &= -F(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) + F(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ F(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) &= -F(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}) + F(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

obteniéndose entonces:

$$M(F, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De nuevo, es inmediato comprobar que esta matriz tiene rango 2 y que B_{NucF} genera su núcleo, así como que $M(F, B_u) \cdot M(F, B_u) = 0 \in M_4(\mathbb{R})$, lo cual equivale a $F \circ F = 0$.