GEOMETRÍA II. RELACIÓN DE PROBLEMAS 3

ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

Curso 2018-19

1. Sea V un espacio vectorial real. Denotemos por $\mathcal{B}_s^+(V)$ al conjunto de todas las métricas euclídeas sobre V. Demuestra que:

   a) Si $g, g' \in \mathcal{B}_s^+(V)$ entonces $g + g' \in \mathcal{B}_s^+(V)$.

   b) Si $a > 0$ y $g \in \mathcal{B}_s^+(V)$ entonces $a\,g \in \mathcal{B}_s^+(V)$.

   ¿Es $\mathcal{B}_s^+(V)$ un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(V)$?

2. Sean (V, g) y (V', g') dos espacios vectoriales euclídeos. Se define la *métrica producto* $g \times g'$ en $V \times V'$ a partir de la igualdad:

$$(g \times g')\big((u, u'), (v, v')\big) = g(u, v) + g'(u', v').$$

   Demuestra que $g \times g'$ es una métrica euclídea en $V \times V'$.

3. Decide de forma razonada si son euclídeas o no las métricas sobre $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \alpha+4 & -2 & 2 \\ -2 & \alpha+1 & -1 \\ 2 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

4. Dados dos vectores cualesquiera u y v de un espacio vectorial euclídeo (V, g), demuestra que se cumplen estas propiedades:

   a) Identidad del paralelogramo: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\,(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

   b) Teorema del coseno: $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\|u\|\,\|v\|\cos\measuredangle(u, v)$.

   c) Teorema de Pitágoras: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff u \perp v$.

   d) $\|u\| = \|v\| \iff u+v \perp u-v$.

   e) $|\,\|u\| - \|v\|\,| \leq \|u-v\|$.

5. Utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz en un espacio vectorial euclídeo conveniente para probar las siguientes desigualdades y caracterizar cuando se obtiene la igualdad en cada una de ellas.

    a) Para cualesquiera números $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, se cumple que:

    $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

    b) Para cada matriz simétrica A de orden n se verifica que $(\mathrm{tr}(A))^2 \leq n\,\mathrm{tr}(A^2)$.

    c) Para cualquier función continua $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ se cumple que:

    $$\left(\int_a^b \varphi(t)\,dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b \varphi(t)^2\,dt.$$

6. Consideremos $\mathbb{R}^4$ con su métrica euclídea usual g_u. Calcula una base ortonormal de (U, g_U), donde U es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por:

    $$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 4y - z + 3t = 0\}.$$

    Amplia la base anterior hasta conseguir una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, g_u)$. Calcula las coordenadas del vector $u = (1,0,0,1)$ en la base obtenida.

7. En el espacio vectorial $S_2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales se considera la métrica g definida como $g(A,C) = \mathrm{tr}(AC)$.

    a) Prueba que g es una métrica euclídea.

    b) Utiliza el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(S_2(\mathbb{R}), g)$ a partir de la base:

    $$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

    c) Encuentra dos matrices linealmente independientes $A, C \in S_2(\mathbb{R})$ que sean unitarias y que formen ángulo $\pi/3$ con I_2.

8. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por:

    $$g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\,q(x)\,dx.$$

    Demuestra que la base usual B_u de $\mathbb{R}_2[x]$ no es ortonormal. Utilizar el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], g)$ a partir de B_u.

9. En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica g, cuya matriz en la base usual es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Demuestra que la métrica g es euclídea.

   b) Calcula el ángulo que forman los vectores $u = (1,1,0)$ y $v = (0,-1,1)$.

   c) Calcula la proyección ortogonal y la simetría ortogonal del vector $u = (2,1,0)$ con respecto al plano $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$.

10. En el espacio $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por $g(A,C) = \mathrm{tr}(AC^t)$. Se definen las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcula el ángulo determinado por A y C.

   b) Calcula las proyecciones ortogonales de A sobre $U = L(C)$ y sobre $U^\perp$.

   c) Calcula la imagen de A por la simetría respecto del subespacio de $M_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a-b+c-d = 0, -a+d = 0 \right\}.$$

   d) Da una base de $W^\perp$, siendo W el subespacio del apartado anterior.

11. Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y $B = \{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de V. Se sabe que $\|v_i\| = 2$ para cada $i = 1,\ldots,n$ y que $\measuredangle(v_i,v_j) = \pi/3$ si $i \neq j$. Calcula $M(g,B)$ y una base ortonormal de (V,g).

12. Se consideran los endomorfismos $f,h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dados por:

$$f(x,y,z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z), \quad M(h,B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3/2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Demuestra que f y h son autoadjuntos respecto a la métrica euclídea usual. Calcula dos bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ en las que las matrices de f y h sean diagonales.

13. En $\mathbb{R}^3$ se considera el endomorfismo f que en la base $B = \{(1,0,1),(-1,2,1),(1,1,1)\}$ tiene la siguiente matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudia si f es autoadjunto con respecto a la métrica euclídea usual de $\mathbb{R}^3$ y, en caso de serlo, encuentra una base ortonormal de vectores propios de f.

14. Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo tridimensional. Supongamos que:

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en una cierta base B de V. Sea $f : V \to V$ el endomorfismo dado por:

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que f es autoadjunto en (V,g) y encuentra una base ortonormal de (V,g) formada por vectores propios de f.

15. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

encuentra una matriz $P \in O(3)$ tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

16. Sea g la métrica de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual es:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula los valores propios de A y estudia su signo para determinar el índice de g. Clasifícala en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. ¿En algún caso se obtiene la métrica euclídea usual o la métrica lorentziana usual de $\mathbb{R}^3$?

17. Se considera la familia de métricas $g_{a,b}$ en $\mathbb{R}^4$ tales que:

$$M(g_{a,b}, B_u) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & b & -1 \end{pmatrix}.$$

Clasifica, según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, las métricas $g_{a,b}$.

18. Sean V un plano vectorial, B una base de V y g la métrica en V tal que:

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos, para cada $a \in \mathbb{R}$, el endomorfismo $f_a : V \to V$ dado por:

$$M(f_a,B) = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Prueba que g es una métrica euclídea sobre V y encuentra los valores de a para los que f_a es autoadjunto en (V,g).

b) ¿Existe algún valor de a tal que f_a es una isometría en (V,g)?

19. Describe las isometrías de $(\mathbb{R}^2, g_u)$ cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

20. Sea (V,g) un plano vectorial euclídeo y B una base de V para la que:

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Estudia si los endomorfismos $f,h : V \to V$ tales que:

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M(h,B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

son isometrías de (V,g). En caso afirmativo, describe tales isometrías.

21. En $\mathbb{R}^3$ se consideran la métrica euclídea g cuya matriz en la base usual viene dada por

$$M(g,B_u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}(5x+2y+z, -10x-y+z, 4x+y+2z) .$$

a) Comprueba que f es una isometría.

b) Encuentra una base ortonormal en la que f adopte su forma canónica y clasifícala.

22. Describe geométricamente las isometrías de $(\mathbb{R}^3, g_u)$ cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$D = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

23. Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales se considera la métrica euclídea g tal que la base $B = \{1, x, x^2\}$ es ortonormal. Demuestra que el endomorfismo $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dado por:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \frac{1}{3}\left((2a_0 - a_1 + 2a_2) + (-a_0 + 2a_1 + 2a_2)x + (2a_0 + 2a_1 - a_2)x^2\right)$$

es una isometría en $(\mathbb{R}_2[x], g)$ y descríbela.

24. Sobre el espacio vectorial euclídeo $(S_2(\mathbb{R}), g)$, donde $g(A,C) = \mathrm{tr}(AC)$, se define el endomorfismo $f : S_2(\mathbb{R}) \to S_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$f\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a/\sqrt{2} \\ a/\sqrt{2} & -\sqrt{2}c \end{pmatrix}.$$

Demuestra que f es una isometría de $(S_2(\mathbb{R}), g)$ y descríbela.

25. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con su métrica euclídea usual.

   a) Calcula la matriz $M(f, B_u)$, siendo f la simetría axial con respecto a $U = L((2,3))$.

   b) Calcula, en las coordenadas usuales, las ecuaciones de un giro que lleve el vector $(-4,3)$ en el vector $(5,0)$.

26. Consideremos $\mathbb{R}^3$ con su métrica euclídea usual.

   a) Calcula la matriz $M(f, B_u)$, siendo f una rotación de ángulo $\pi/2$ con eje dado por $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, x - z = 0\}$.

   b) Calcula, en coordenadas usuales, las ecuaciones de la simetría ortogonal respecto al plano perpendicular a la recta U del apartado anterior.

   c) Calcula $M(f, B_u)$, donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una isometría que verifique $f(1,-1,0) = (1,-1,0)$, $f(1,1,5) = (3,3,-3)$ y $\det(f) = 1$.

27. En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, calcula la matriz en B_u de $h \circ \sigma_U$, donde σ_U es la simetría ortogonal con respecto al plano U de ecuación $z = 0$, y h es el giro de ángulo $\pi/3$ alrededor del eje OX. Clasifica y describe la isometría resultante.

28. En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, encuentra si es posible una isometría f que lleve el subespacio $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$ en el subespacio $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. Si es posible da $M(f, B_u)$, clasifica y describe la isometría f.

29. Responde de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) Si g es una métrica euclídea sobre V, entonces todos los elementos diagonales de la matriz de g en cualquier base de V son positivos. ¿Es cierto el recíproco?

    b) Sea g una métrica cuya matriz en una base B tiene un valor propio negativo. Entonces g no es euclídea.

    c) Sean u y v dos vectores no nulos de un espacio vectorial euclídeo (V, g) que forman un ángulo α. Entonces el ángulo que forman $2u$ y $2v$ es 2α.

    d) Toda base B de un espacio vectorial V es base ortonormal para una única métrica euclídea sobre V.

    e) Si U es un hiperplano de un espacio vectorial euclídeo entonces hay exactamente dos vectores perpendiculares a U y unitarios.

    f) Toda matriz cuadrada con determinante 1 o -1 es ortogonal.

    g) Si dos subespacios de un espacio vectorial euclídeo son perpendiculares y unimos dos bases ortonormales, una de cada uno de ellos, obtenemos una base ortonormal de la suma de los dos subespacios.

    h) Sea U un subespacio vectorial de un espacio vectorial euclídeo (V, g). Entonces, se cumple la igualdad $I_V = 2\pi_U - \sigma_U$, donde π_U and σ_U son la proyección y simetría ortogonales respecto a U.

    i) Todo endomorfismo autoadjunto de un espacio vectorial euclídeo es automorfismo.

    j) Todo endomorfismo diagonalizable de un espacio vectorial es autoadjunto respecto de alguna métrica euclídea en dicho espacio.

    k) Dos vectores propios linealmente independientes de un endomorfismo autoadjunto son ortogonales.

    l) Si $f : V \to V$ es una isometría de un espacio vectorial euclídeo (V, g) entonces dos vectores propios de f asociados a valores propios distintos son ortogonales.

    m) Toda isometría de un espacio vectorial euclídeo es un endomorfismo autoadjunto.

    n) En un espacio vectorial euclídeo (V, g), dados dos subespacios vectoriales de la misma dimensión siempre existe una isometría de (V, g) que lleva uno en otro.

    ñ) En $(\mathbb{R}^2, g_u)$ consideramos el giro r_θ de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$ y la simetría ortogonal σ con respecto a la recta de ecuación $y = 0$. Entonces, $f = r_\theta \circ \sigma$ es la simetría ortogonal con respecto a la recta de ecuación $(\cos\theta - 1)x + (\operatorname{sen}\theta)y = 0$.

o) En un plano vectorial euclídeo la composición de dos simetrías axiales es un giro.

p) Si una matriz ortogonal de orden 2 no es diagonal y tiene determinante positivo, entonces no es diagonalizable.

q) Toda isometría de un espacio vectorial euclídeo de dimensión 5 para la que el subespacio de vectores fijos tiene dimensión 2 tiene determinante -1.

r) Sobre un espacio vectorial euclídeo (V,g) de dimensión impar no existe ninguna isometría f tal que $f\circ f = -I_V$.

s) Si (V,g) es un espacio vectorial euclídeo y f un endomorfismo autoadjunto de g que además es una isometría entonces f es una simetría ortogonal.

t) Si V un espacio vectorial y g y g' son dos métricas euclídeas en V que verifican $g(u,v)=0 \Longleftrightarrow g'(u,v)=0$, entonces $g'=\lambda g$, $\lambda>0$.

u) Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales y la métrica $g(A,C)=\text{traza}(AMC^t)$ donde $M=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Entonces g es una métrica euclídea si y solo si $a>0$ y $\det(M)>0$.

v) Sea (V,g) un plano vectorial métrico no degenerado que verifica la siguiente propiedad:

Todo endomomorfismo f de V que cumple

$$g(f(u),v)=g(u,f(v))\ ,\forall u,v\in V$$

es diagonalizable.

Entonces g es definida positiva o definida negativa.

w) Dada $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible existe P una matriz ortogonal y Q una matriz triangular superior con todos los elementos de su diagonal positivos tal que $A=P\cdot Q$.