Convocatoria ordinaria de junio - Geometría II

1º Doble grado en Informática y Matemáticas

18 de junio 2018

1) Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática asociada está dada por:

$$\omega_a(x,y,z) = x^2 + y^2 + az^2 + 2axz - 4ayz$$

a) (1,5 PUNTOS) Calcula el índice, el rango y clasifica la métrica g_a según el valor de a.

b) (0,5 PUNTOS) ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_0)$ y $(\mathbb{R}^3, g_2)$ isométricos? ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_{-1})$ y $(\mathbb{R}^3, g_2)$ isométricos?

2) (2 PUNTOS) Sea (V,g) un espacio métrico no degenerado con $\dim(V) \geq 2$ y U un subespacio de $V, U \neq \{0\}, U \neq V$. Prueba que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) Toda base ortonormal de (U, g_U) puede extenderse a una base ortonormal de (V,g).

b) $V = U \oplus^{\perp} U^{\perp}$.

3) En un plano vectorial euclídeo (V,g) y respecto de una base $B = \{v_1, v_2\}$ se sabe que:

$$||v_1|| = \sqrt{3}, \qquad ||v_2|| = 2, \qquad \measuredangle(v_1, v_2) = \frac{\pi}{6}.$$

Se pide:

a) (1.5 PUNTOS) Calcula la matriz en la base B de la simetría ortogonal respecto de la recta $L(v_1 + v_2)$.

b) (1.5 PUNTOS) Demuestra que el endomorfismo h de V dado por:

$$h(v1) = -6v_1 + 3v_2, \qquad h(v_2) = -4v_1 + 2v_2$$

es autoadjunto y calcula una base ortonormal de (V,g) formada por vectores propios de h.

4) Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo y f un endomorfismo de V que verifica:

$$g(f(u), v) = -g(u, f(v)), \forall u, v \in V.$$

Se pide:

a) (1 PUNTO) Demuestra que $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ son subespacios ortogonales de V.

b) (1 PUNTO) Demuestra que $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(f)$.

c) (1 PUNTO) Demuestra que si B es una base ortonormal de (V,g) entonces $M(f,B)$ es antisimétrica.