Índice de las preguntas teóricas del examen de cálculo I.

Pregunta 1: El cuerpo de los números reales. Principio de buena ordenación de N. Densidad de Q y de R\Q en R.

El cuerpo de los números reales:

- Estrucura **algebraica**: propiedades asocitaica, conmutativa, elements neutroa, elementos opuesto e inverso, propiedad distributiva.
- Estructura de **orden**: ley de tricotomía, ley de estabilidad de R+.
- El axioma del **continuo** o de Dedekind. Enunciar. Demostración de la existencia de números irracionales (sqrt(2)).
- Definición de mayorante, minorante, máximo y mínimo. **Principio del Supremo** y Principio del ínfimo. Definiciones de supremo e ínfimo.

Principio de buena ordenación de N.

- Enunciar principio (página 19, proposición 1.24)
- Opcionalmente, proposiciones 1.25 y 1.26 (no tienen demostración)

Densidad de Q y de R\Q en R

- Definición 1.35 (página 24): conjunto denso
- Proposición 1.36: Los conjuntos Q y R\Q son densos en R (¡No viene demostrado!)

Pregunta 2: El conjunto de los números racionales es numerable. Principio de los intervalos encajados. R no es numerable.

El conjunto de los números racionales es numerable

- Definición de conjuntos **equipotentes**.
- Proposición: dos conjuntos equipotentes tienen el mismo número de elementos (¡No viene demostrado!)
- Definición 1.44 (pág 29): Conjunto numerable.
- Proposición 1.45 (pág 29): Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o es equipotente a N. Mini-demostración.
- Proposición 1.48 (pág 30): El conjunto de los números racionales es numerable. Demostración.

Principio de los intervalos encajados

- Proposición 1.49 (pág 30). Demostración

R no es numerable

- Proposición 1.50 (pág 31). Demostración.
- Proposición 1.51 (pág 31): R y R\Q son no numerables. Mini-demostración.

Pregunta 3: Sucesiones convergentes. Sucesiones monótonas.

Sucesiones convergentes.

- Definición 2.2 (pág 36): Suceción convergente y límite.
- Proposición 2.6 (pág 39): Unicidad del límite. Demostración.
- Proposición 2.8 (pág 40): Principio de las sucesiones encajadas. Demostración
- Definición 2.11 (pág 41): Sucesión mayorada, minorada, acotada, creciente estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente, monótona, estrictamente monótona.
- Proposición 2.12 (pág 41): Toda sucesión convergente está acotada. Demostración.

Sucesiones monótonas.

- **Teorema** 2.14 (pág 42): **Toda sucesión monótona y acotada es convergente**. **Demostración**.

Pregunta 4: Las funciones logaritmo y exponencial

Que se lo estudie él.

Pregunta 5: Sucesiones parciales. Valores de adherencia. Teorema de Bolzano – Weierstrass.

Sucesiones parciales y valores de adherencia.

- Definición de suceción parcial y valor de adherencia (pág 57)
- Proposiciones 2.40 y 2.41 (pág 58). Demostración.

Teorema de Bolzano-Weirtrass

- **Lemilla** 2.42 (pág 59). Demostración.
- **Teorema de Bolzano-Weierstrass**. (como consecuencia directa del "lemilla")
- Opcionalmente, proposición 2.44 (pág 60)

Pregunta 6: Teorema de complitud de R. Límites superior e inferior.

Teorema de complitud de R.

- Definición 2.46 (pág 62): **Condición de Cauchy**.
- Teorema 2.47 (pág 62): **Teorema de Complitud de R**. Demostración pa un lao y pa otro.

Límites superior e inferior.

- Epígrafe 2.4.2 (páginas 73 y 74).

Pregunta 7: Convergencia de series de términos positivos. Criterios de comparación, del cociente y de la raíz.

- Proposición 3.9 (pág 86): Criterio **Básico de convergencia** de series de términos positivos. (¡No viene demostrado!)
- Proposición 3.12 (paǵ 87): Criterio básico de **comparación**. Demostración.
- Proposición 3.14 (pág 88): Criterio límite de comparación. Demostración.
- Proposición 3.21 (pág 91): Criterio del **cociente**. Demostración.
- Proposición 2.23 (página 93): Criterio De la **raíz**. Demostración.

Pregunta 8: Series absolutamente convergentes y series conmutativamente o incondicionalmente convergentes. Series alternadas. Criterio de Leibnitz.

- Definiciones de serie **conmutativamente convergente** y **absolutamente convergente**. Página 99.
- Teorema 3.27 (pág 100). Demostración.
- Teorema 3.28 (pág 101). (¡No viene demostrado)
- Proposición 3.29 (pág 101): Criterio de **Leibniz** para series alternadas. Demostración.

Pregunta 9: Funciones reales continuas. Propiedades básicas. Propiedades locales.

Funciones reales continuas.

- Definición de **continuidad en un punto**. Página 109
- Definición 4.11 (pág 110): continuidad por la izquierda, continuidad por la derecha.
- Definición 4.12 (pág 110): **continuidad en un conjunto**
- Proposición 4.13 (pád 111). Demostración. -< **Importante**

Propiedades básicas de las funciones continuas

- Teorema 4.14 (pág 111): Continuidad de las **funciones suma, producto y cociente**. Demostración.
- Corolario 4.15 (pág 112)
- Teorema 4.16 (pág 112): Continuidad de una **función compuesta**
- Funciones racionales y polinómicas (pág 113). Poquito y fácil.

Propiedades locales

- Definición 4.18 (pág 114): Función **restricción**
- Proposición 4.20 (pág 115): **Localización de la continuidad**. Demostración.
- Proposición 4.21 (pág 115). (¡No viene demostrado!)
- Teorema 4.22 (pág 115): **Conservación local del signo**. Demostración.
- Proposición 2.23 (páf 116): **Acotación local**. Demostración.

Pregunta 10: Teorema de Bolzano y teorema del valor intermedio. Consecuencias.

Teorema de los ceros de Bolzano.

- Teorema 4.24 (pág 118). Demostración.

Teorema del valor intermedio.

- Teorema 4.25 (pág 118). Demostración.

Consecuencias.

- **Estrategia** 4.26 (pág 119). Enunciar el truquillo.
- Corolario 4.27 (pág 120): **Existencia de raíces**. Demostración.
- Corolario 4.28 (pág 120): **Ceros de polinomio de grado impar**. Demostración.

Pregunta 11: Continuidad y monotonía.

- Teorema 4.29 (pág 121): Una función monótona cuya imagen es un intervalo es continua. Demostración.
- Corolario 4.30 (pág 122). Enunciarlo.
- Corolario 4.31 (pág 122). Demostración.
- **Teorema 4.32** (pág 122): Toda función inyectiva y continua en un intervalo es estrictamente monótona. Demostración.
- Corolario 4.33 (pág 123). Enunciarlo

Pregunta 12: Continuidad en intervalos cerrados y acotados. Teorema de Weierstrass. Consecuencias.

- Definición 4.34 (pág 125): Función mayorada, minorad, máximo absoluto, mínimo absluto.
- Teorema 4.35 (pág 125): **Teorema de valores máximo y mínimo de Weirstrass**. Demostración.

Consecuencias

- Corolario 4.36: Toda dunción continua en un intervalo cerrado y acotado está acotada en dicho intervalo
- Proposición 4.37. Demostración.

Pregunta 13: Límite de una función en un punto. Caracterización por sucesiones. Límites y discontinuidades de las funciones monótonas.

Límite de una función en un punto

- Definición (página 128, sin señalizar): Límte de un función en un punto
- Proposión (página 128, sin señalizar). Enunciar.
- Límites laterales de una función en un punto (pág 129): límite por la izquierda, límite por la derecha
- Funciones divergentes en un punto (pág 130): positiva/negativamente divergente por la izquierda/derecha.

Caracterización por sucesiones

- Proposición 4.38 (pág 131): Enunciar

Límites y discontinuidades de las funciones monótonas

- Opcional: Definición 4.44 (pág 134): Clasificación de las discontinuidades
- Teorema 4.45 (pág 134): Límites de una función monótona. Demostración.
- Teorema 4.46 (pág 135): Discontinuidades de las funciones monótonas.