Ejercicio puntuable Tema 1-Geometría II
1^o Grado en Matemáticas
15 de marzo 2016

Nombre y Apellidos: ______________________________.

1) Consideramos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica viene dada por:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & a \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}$$

para $a \in \mathbb{R}$.

a) Calcula a para que 2 sea un valor propio de f.

b) Para el valor de a calculado en el apartado anterior, determina si f es diagonalizable. Si f es diagonalizable calcula una base de $\mathbb{R}^3$ que diagonalice el endomorfismo.

c) Estudia si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.¿Puede ser A la matriz del endomorfismo f respecto de alguna base?

2) Prueba que $\lambda = 0$ es un valor propio de una matriz si y sólo si ésta no es regular. A continuación prueba que si λ es un valor propio de una matriz regular M, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de M^{-1}.

Puntuación: 1.- a) y c) 2 , **1.- b)** 4, **2.-** 2

1) a) Vamos a calcular el polinomio característico de f e imponer que 2 sea una raíz de dicho polinomio.

$$P_f(\lambda) = \det\left(M(f, B_u) - \lambda I_3 \right) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & 4-\lambda & a \\ 1 & -a & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(4-\lambda)(-\lambda) - 2a - 2a - [-2(4-\lambda) - a^2(3-\lambda) - 2\lambda]$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda - 4a + 8 - \cancel{2\lambda} + 3a^2 - a^2\lambda + \cancel{2\lambda} =$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 + (-12 - a^2)\lambda + 3a^2 - 4a + 8$$

Impongamos que $P_f(2) = 0$

$$-2^3 + 7 \cdot 2^2 + (-12 - a^2)2 + 3a^2 - 4a + 8 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(a-2)^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{a = 2}$$

Luego $a = 2$ para que $\lambda = 2$ sea un valor propio de f.

b) Vamos a calcular el polinomio característico para $a = 2$.

$$P_f(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$$

Como sabemos que $\lambda = 2$ es una raíz por el apartado a), podemos utilizar Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 7 & -16 & 12 \\ 2 & & -2 & 10 & -12 \\ \hline & -1 & 5 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

Luego tenemos que

$$P_f(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

Calculemos ahora las raíces de $\lambda^2 - 5\lambda + 6$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

Luego la factorización de $P_f(\lambda)$ queda:

$$P_f(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

tenemos por tanto dos valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidades algebraicas $a_{\lambda_1} = 2$ y $a_{\lambda_2} = 1$.

Para ver si es diagonalizable calcularemos las multiplicidades geométricas. La más sencilla es la de λ_2 ya que

$$1 \leq g_{\lambda_2} \leq a_{\lambda_2} = 1 \implies g_{\lambda_2} = 1$$

Calculemos ahora g_{λ_1}.

$$g_{\lambda_1} = \dim V_{\lambda_1} = 3 - \text{rango}\left(M(f, B_u) - 2 \cdot I_3\right) =$$

$$= 3 - \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

Tenemos por tanto que $a_{\lambda_1} + a_{\lambda_2} = 3$ / $a_{\lambda_1} = g_{\lambda_1}$ y $a_{\lambda_2} = g_{\lambda_2}$. Luego por el Teorema fundamental de la diagonalización f es diagonalizable.

Busquemos una base que diagonalice f. Para ello debemos calcular una base de vectores propios

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

observar que la segunda y tercera filas son proporcionales a la primera

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 2z = 0 \} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y + 2z \} =$$

$$= \{ (2y+2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R} \} =$$

$$= L(\{ (2,1,0), (2,0,1) \})$$

$$V_{\lambda_2} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

la 3ª fila es combinación lineal de las otras dos

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} -2y - 2z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{array} \} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} z = -y \\ x = y + 2z = y - 2y = -y \end{array} \}$$

$$= \{ (-y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R} \} = L(\{ (-1,1,-1) \})$$

luego una base que diagonaliza f viene dada por

$$B = \{ (2,1,0), (2,0,1), (-1,1,-1) \}$$

c) Calculemos el polinomio característico de A.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 (3-\lambda)$$

luego los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidades algebraicas $a_{\lambda_1} = 2$ y $a_{\lambda_2} = 1$.

Calculemos las multiplicidades geométricas.

$$g_{\lambda_1} = \dim V_{\lambda_1} = 3 - \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Como $a_{\lambda_1} \neq g_{\lambda_1}$ ya podemos afirmar que A no es diagonalizable.

A no puede ser la matriz de f respecto a ninguna base porque si lo fuera sería semejante a una matriz diagonalizable y por tanto diagonalizable y hemos visto que A no lo es.

2) $\lambda = 0$ es un valor propio de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ $\Leftrightarrow$ A no regular $\Leftrightarrow \det(A)=0$

$\lambda = 0$ es un valor propio de una matriz A $\Leftrightarrow$

El subespacio propio asociado al valor propio 0 V_0 tiene $\Leftrightarrow$ dimensión mayor o igual que 1.

$$\dim V_0 = n - \text{rango}(A - 0 \cdot I_n) = n - \text{rango}(A) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{rango}(A) < n \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) = 0$$

Veamos ahora que si λ es un valor propio de una matriz regular M entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de M^{-1}.

Sea λ valor propio de M. Como M es regular por lo anterior sabemos $\lambda \neq 0$. Por ser λ valor propio de M tenemos $\exists\ x \in k^n \setminus \{0\}$ tal que $M \cdot x = \lambda \cdot x$. Multiplicando a la izquierda por M^{-1} obtenemos:

$$\underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I_n} \cdot x = \lambda \cdot M^{-1} x$$

$$x = \lambda \cdot M^{-1} x$$

Como $\lambda \neq 0$ podemos dividir la igualdad anterior por λ.

$$\frac{1}{\lambda} \cdot x = M^{-1} \cdot x$$

De aquí $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de M^{-1}.