Ejercicio puntuable Tema 1-Geometría II

22 de marzo 2019

Apellidos y Nombre: ____.

1. En el espacio $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas simétricas de orden dos con coeficientes reales se considera el endomorfismo dado por

$$f(X) = AX + XA^t\ , \quad X \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})\ ,$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) (1 PUNTO) Calcula la matriz de f en la base canónica de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

b) (2 PUNTOS) Estudia si f es diagonalizable. En caso afirmativo encuentra una base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ que diagonalice el endomorfismo.

c) (2 PUNTOS) ¿Existe un endomorfismo $g : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ tal que $g^2 = f$? En caso afirmativo calcula la matriz de g en la base B.

d) (1 PUNTO) ¿Es f una aplicación lineal inyectiva? Razona tu respuesta.

2. **a)** (2 PUNTOS) Sea $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$ una matriz diagonalizable que tiene dos valores propios distintos, uno de ellos simple. Prueba que existen $a, b \in \mathbb{R}$ únicos tal que M es semejante a

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

b) (2 PUNTOS) Prueba que si $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un endomorfismo tal que $h \circ h = Id_{\mathbb{R}^3}$ entonces existen B una base de $\mathbb{R}^3$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $M(h, B) = \widetilde{M}$ para $n = 3$.

1. a) $f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&3\\3&1\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&2\\2&4\end{pmatrix}$

Por tanto $M(f,B) = \begin{pmatrix}2&4&0\\1&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}$

b) Calculemos el polinomio característico de f.

$P_f(\lambda) = \det(M(f,B) - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix}2-\lambda&4&0\\1&3-\lambda&2\\0&2&4-\lambda\end{pmatrix} =$

$= (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) - 4(2-\lambda) - 4(4-\lambda) =$

$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 26\lambda + 24 - 8 + 4\lambda - 16 + 4\lambda =$

$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = -\lambda$

$\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-72}}{2} = \dfrac{9\pm 3}{2} \begin{cases} \lambda = 6 \\ \lambda = 3 \end{cases}$

luego tenemos tres valores propios:

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 6 \qquad \lambda_3 = 3.$

Además $a_{\lambda_1} = a_{\lambda_2} = a_{\lambda_3} = 1$ y por tanto $g_{\lambda_1} = g_{\lambda_2} = g_{\lambda_3} = 1$.

Tenemos que f es diagonalizable.

Calculemos ahora los subespacios propios:

$V_0 = \ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix}x&y\\y&z\end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix}2&4&0\\1&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\} =$

Claramente la segunda fila es combinación lineal de la primera y la tercera

$= \left\{ \begin{pmatrix}x&y\\y&z\end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{matrix} x+2y=0 \\ y+2z=0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}x&y\\y&z\end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{matrix} x=-2y \\ z=-\frac{1}{2}y \end{matrix} \right\}$

$= L\left(\left\{\begin{pmatrix}-4&2\\2&-1\end{pmatrix}\right\}\right)$

$$V_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{la 2ª fila es combinación lineal de las otras dos}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{matrix} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; x = y = z \right\} =$$

$$= L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{La 2ª fila es combinación lineal de las otras dos}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{matrix} -x + 4y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{matrix} x = 4y \\ z = -2y \end{matrix} \right\}$$

$$= L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Luego una base de $S_2(\mathbb{R})$ que diagonalize f es:

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Observemos que tenemos:

$$M(f, B') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

luego basta considerar $g \in End(S_2(\mathbb{R}))$ como el endomorfismo que verifica:

$$M(g, B') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Claramente $M(g^2, B') = M(g, B')^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = M(f, B')$

y por tanto $g^2 = f$.

$$M(g, B) = M(Id_{S_2(\mathbb{R})}, B', B) \cdot M(g, B') \cdot M(Id_{S_2(\mathbb{R})}, B, B')$$

$$= M(Id_{S_2(\mathbb{R})}, B', B) \cdot M(g, B') \cdot M(Id_{S_2(\mathbb{R})}, B', B)^{-1}$$

$$M(Id_{S_2(\mathbb{R})}, B', B) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P$$

$$M(Id_{S_2(\mathbb{R})}, B', B)^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \cdot Adj(P)^t =$$

$$= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -3 & +3 & 3 \\ 6 & 12 & 3 \\ -3 & 12 & -6 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M(g, B) = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{6} & 4\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6} & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \sqrt{6}+4\sqrt{3} & 4\sqrt{6}+4\sqrt{3} & 4\sqrt{6}-8\sqrt{3} \\ \sqrt{6}+\sqrt{3} & 4\sqrt{6}+\sqrt{3} & 4\sqrt{6}-2\sqrt{3} \\ \sqrt{6}-2\sqrt{3} & 4\sqrt{6}-2\sqrt{3} & 4\sqrt{6}+4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

d) f no es inyectiva puesto que $V_0 = \ker(f) \neq \{0\}$.

2. a) Sean λ_1 y λ_2 los valores propios de M con $a_{\lambda_1} = g_{\lambda_1} = n-1$ y $a_{\lambda_2} = g_{\lambda_2} = 1$.

Del ejercicio 21 de la relación tenemos que $\tilde{M}$ es diagonalizable y que sus valores propios son $\tilde{\lambda}_1 = a - b$ y $\tilde{\lambda}_2 = a + (n-1)b$ con multiplicidades $a_{\tilde{\lambda}_1} = g_{\tilde{\lambda}_1} = n-1$ y $a_{\tilde{\lambda}_2} = g_{\tilde{\lambda}_2} = 1$.

En clase hemos visto que dos matrices diagonalizables son semejantes si y sólo si tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

Por tanto M es semejante a una matriz $\tilde{M}$ si y sólo si $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1$ y $\lambda_2 = \tilde{\lambda}_2$.

Luego basta tomar $a, b \in \mathbb{R}$ para que verifiquen

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= a-b \\ \lambda_2 &= a+(n-1)b \end{aligned}\right\} \qquad a = \frac{\lambda_2+(n-1)\lambda_1}{n} \qquad b = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{n}$$

Por tanto tenemos que M es semejante a la matriz $\tilde{M}$ con $a = \frac{\lambda_2+(n-1)\lambda_1}{n}$ y $b = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{n}$.

Como a y b están unívocamente determinados por λ_1 y λ_2 son únicos.

b) Si h es un automorfismo que verifica $h \circ h = Id_{\mathbb{R}^3}$ entonces h es una simetría y sabemos que es diagonalizable y que los posibles valores propios son 1 y -1.
Se nos pueden presentar los siguientes casos:

1.- El valor propio 1 tenga multiplicidad (algebraica y geométrica) 3. Entonces $f = Id_{\mathbb{R}^3}$ y podemos tomar B cualquier base de $\mathbb{R}^3$.
$M(f, B) = I_3$ y por tanto en este caso $a=1$ y $b=0$.

2.- Análogamente si -1 tiene multiplicidad 3, entonces $f = -Id_{\mathbb{R}^3}$ y para B cualquier base tenemos $M(f,B) = -I_3$ y por tanto en este caso $a=-1$ y $b=0$.

3.- Si 1 o -1 tienen multiplicidad 2 se verifican las condiciones del apartado a) y por tanto $\exists$ $\tilde{M}$ y $P \in Gl_3(\mathbb{R})$ tal que $\tilde{M} = P^{-1} M(f, B_u) \cdot P$. Tomando la base B cuyos vectores son las columnas de P tendríamos.
$\tilde{M} = M(f, B)$.