Antonio Rodríguez Garzón

Final

1. Teoría

1. Define el concepto de dominio euclídeo y cita dos ejemplos de éste y uno de dominio de integridad que no sea euclídeo. Demuestra que en cualquier dominio euclídeo todo elemento no nulo y no unidad tiene factorización como producto de irreducibles.

2. *a*) Se considera la aplicación norma $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ definida por $N(a+bi) = a^2 + b^2$. Razona si N es una aplicación inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de estos tipos y calcula las clases de los elementos $1+i$ y $2+i$ en el conjunto cociente $\mathbb{Z}[i]/R_N$, donde R_N es la relación de equivalencia en $\mathbb{Z}[i]$ inducida por la aplicación N.

   b) Si se considera en $\mathbb{Z}[i]$ la relación binaria definida por:

   $$\alpha R \beta \iff \alpha \text{ y } \beta \text{ son asociados.}$$

   Razona que R es una relación de equivalencia y calcula las clases de los elementos $1+i$ y $2+i$ en el conjunto cociente $\mathbb{Z}[i]/R$. ¿Hay alguna relación entre R y R_N?

3. Dado el sistema de congruencias siguiente en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$:

   $$\left.\begin{array}{rcll} x & \equiv & 1 & mod(1+\sqrt{-2}) \\ \sqrt{-2}x & \equiv & 2 & mod(1-\sqrt{-2}) \\ x & \equiv & 3 & mod(5) \end{array}\right\}$$

   a) Discute su solución sin resolver el sistema.

   b) Calcula la solución general.

   c) Halla una solución $a + b\sqrt{-2}$ tal que $100 < a < 110$ y $15 < b < 40$. ¿Cuántas soluciones hay con esa propiedad?

4. *a*) Factoriza en irreducibles los siguientes polinomios:

   - $x^6 + 3x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$
   - $\frac{1}{3}x^7 + x^2 + 5 \in \mathbb{Q}[x]$
   - $3x^4 + x^3 + 3x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$

b) Del polinomio $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 2x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$ sabemos que tiene un factor $p(x)$ de grado 2 que reducido módulo 3 es $p_3(x) = x^2 + 1$. Utiliza el método de interpolación de Lagrange para calcular este factor $p(x)$ y factoriza en irreducibles $f(x)$.

2. Test

En las siguientes cuestiones sólo una de las respuestas dadas es correcta. Anota tu respuesta en la hoja adjunta.

1. La correspondencia $f(x) = \frac{1}{x}$:
   a) Determina una aplicación inyectiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.
   b) Determina un homomorfismo de anillos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.
   c) No determina una aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.
2. El conjunto $R = \{(0,0),(1,1),(1,0)\}$:
   a) Es una relación de equivalencia en $X = \{0,1\}$.
   b) Es una relación de orden en $X = \{0,1\}$.
   c) No es una relación ni de orden ni de equivalencia, es sólo un subconjunto de $X \times X$.
3. Sea $f : \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{13} \to \mathbb{Z}_{169}$ una aplicación. Entonces:
   a) f es inyectiva si y solamente si es biyectiva.
   b) Si f es biyectiva entonces es inyectiva pero el recíproco no es cierto.
   c) f no está bien definida puesto que $[0]_{13} = [13]_{13}$ pero $[0]_{169} \neq [13]_{169}$.
4. Si $f :\to Y$ es una aplicación inyectiva entonces la aplicación inducida $f^* : P(Y) \to P(X)$:
   a) Es sobreyectiva.
   b) Es inyectiva.
   c) Ninguna de las anteriores.
5. El anillo $\mathbb{Z}_6[x]$:
   a) Tiene infinitas unidades.
   b) Tiene 2 unidades.
   c) Tiene 6 unidades.
6. El cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}[x]$:
   a) Es $\mathbb{Q}[x]$.
   b) No existe.
   c) Ninguna de las anteriores.
7. Si $m \in \mathbb{Z}^+$, $m \neq 0,1$, el sistema:

$$\begin{cases} (m-1)x & \equiv 1 \bmod m \\ mx & \equiv 1 \bmod m+1 \end{cases}$$

  a) Siempre tiene solución.
  b) Nunca tiene solución.
  c) Solo tiene solución si m es primo.

8. Si D es un D.E (dominio euclídeo) entonces:
  a) Cualquier subanillo suyo es un D.E.
  b) Cualquier ideal suyo es impropio.
  c) Ninguna de las anteriores.

9. En $\mathbb{Z}_{140}$ se tiene que $[429^{531}] - [9]^{-1}$:
  a) Es una unidad.
  b) Es $[20]$.
  c) Ninguna de las anteriores.

10. El anillo cociente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}$:
  a) Tiene característica 3.
  b) Tiene característica cero.
  c) Tiene característica 2.

11. Para todo $n \geq 1$ se verifica:
  a) $2^n \equiv (-1)^{n+1} (\text{mod } 3)$.
  b) $3 \mid 2^n + (-1)^{n+1}$.
  c) Ninguna de las anteriores.

12. Las igualdades $-2 = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = (5+3\sqrt{3})(5-3\sqrt{3})$:
  a) Representan dos descomposiciones en irreducibles, que no son esencialmente idénticas, de -2 en $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$
  b) Representan dos descomposiciones en irreducibles de -2 en $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ pero son esencialmente idénticas.
  c) No representan dos descomposiciones en irreducibles de -2 en $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ ya que los factores no son irreducibles por tener norma negativa.

13. El polinomio $10x^{17} + 6x + 6$:
  a) Es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ por el criterio de Eisenstein utilizando el primo $p = 3$.
  b) Es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ ya que al reducir módulo 5 nos queda $x + 1$ que es un polinomio de grado uno y por tanto irreducible..
  c) Es reducible en $\mathbb{Z}[x]$.

14. El ideal $\mathbb{Z}[i]$ generado por 2 y $-1 + 3i$:

a) No es principal puesto que está generado por dos elementos.

b) Es principal y está generado por $1 + i$.

c) Es todo $\mathbb{Z}[i]$.

15. El elemento $3 + \sqrt{-2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$:

a) Es irreducible pero no es primo.

b) Es primo pero no es irreducible.

c) Es irreducible y también primo.

16. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces:

a) m.c.d.$(n, n+5) = 5$.

b) m.c.d.$(n, n+5) = 1$.

c) m.c.d.$(n, n+5) = 1$ si n no acaba en cero o cinco.

17. Sea A un anillo conmutativo:

a) Si A es un D.E. entonces $A[x]$ es un D.E.

b) Si A es un D.I. entonces $A[x]$ es un D.I.

c) Si A es un cuerpo entonces $A[x]$ es un cuerpo.

18. Sea D un D.I. (dominio de integridad):

a) Si D es un D.E. entonces D tiene todos sus ideales principales.

b) Si D es un D.F.U. (dominio de factorización única) entonces D es un D.E..

c) Si D es un D.F.U. entonces todos sus ideales son principales.

19. En el anillo $\mathbb{Z}_4[x]$:

a) No hay unidades porque $\mathbb{Z}_4$ no es un D.I.

b) Hay polinomios no constantes que son unidades.

c) Las únicas unidades son $1{,}3 \in \mathbb{Z}_4$.

20. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$:

a) $3 - 2\sqrt{2}$ es irreducible.

b) $3 - \sqrt{2}$ es reducible.

c) 3 es irreducible.

The End.