MÉTODOS NUMÉRICOS I

Tema IV: Interpolación

Manuel Ruiz Galán

Curso 2018/2019
Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

UNIVERSIDAD DE GRANADA

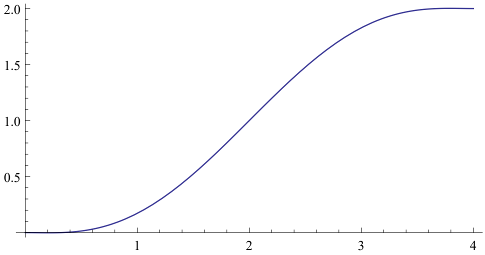
Departamento de Matemática Aplicada

Índice Tema IV

IV.1. Interpolación polinómica: Lagrange y Newton. Error de interpolación

- Modelización
- Diseño industrial
- Problemas numéricos

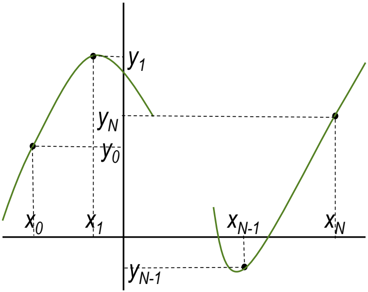
$$p \in \mathbb{P}_5 : \left| \begin{array}{l} p(0) = 0 = p'(0) \\ p(2) = 1 = p'(2) \\ p(4) = 2, \ p'(4) = 0 \end{array} \right.$$



$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2 : \; i, j = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; x_i \neq x_j$$

Existe una única función polinómica de grado menor o igual que N $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; p(x_i) = y_i$$



(Relación de Ejercicios)

Problema

Determinar explícitamente el polinomio de interpolación p

$$p \text{ función polinómica } \leftrightsquigarrow \ p \in \mathbb{P}_N$$

Cálculo de $p \rightsquigarrow$ base en $\mathbb{P}_N$ y sus propiedades

- $\{x^N, \ldots, x, 1\}$, $p(x) = a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0$

$$i = 0, 1, \ldots, N \ \Rightarrow \ p(x_i) = y_i \ \Leftrightarrow \ \left| \begin{array}{c} a_N x_0^N + a_{N-1} x_0^{N-1} + \cdots a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_N x_1^N + a_{N-1} x_1^{N-1} + \cdots a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \cdots \quad \cdots \\ a_N x_N^N + a_{N-1} x_N^{N-1} + \cdots a_1 x_N + a_0 = y_N \end{array} \right.$$

resolver sistema $\rightsquigarrow$ uso pobre de la estructura del problema

- *Lagrange*, $\{l_0(x), l_1(x), \ldots, l_N(x)\}$, $p(x) = \sum_{i=0}^{N} \underline{y_i} l_i(x)$

  base dependiente de los x_i's, cálculo directo

  coeficientes determinados de forma directa $\rightsquigarrow$ no involucran sistema

- *Newton*, $\{\omega_0(x), \omega_1(x), \ldots, \omega_N(x)\}$, $p(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \omega_i(x)$

  base dependiente de los x_i's, cálculo directo

  coeficientes determinados de forma directa $\rightsquigarrow$ no involucran sistema

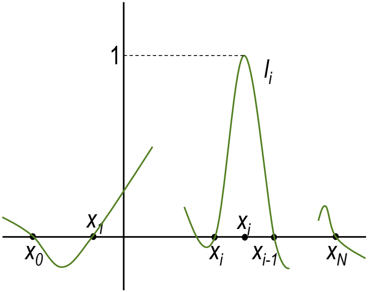
  añadir nodos $\rightsquigarrow$ aprovecha cálculos anteriores

IV.1.1. Polinomio de interpolación tipo Lagrange

Datos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2$$

base $\{l_0(x), l_1(x), \ldots, l_N(x)\} \rightsquigarrow$ cada l_i caracterizado por propiedad interpolatoria



$$i, j = 0, \ldots, N \;\Rightarrow\; l_i(x_j) = \delta_{ij}$$

propiedad interpolatoria $\Rightarrow$ $\{l_0(x), l_1(x), \ldots, l_N(x)\}$ base de $\mathbb{P}_N$

Cálculo explícito de $l_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, N$

$$l_i \in \mathbb{P}_N,\ j = 0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, N \ \Rightarrow\ l_i(x_j) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$l_i \in \mathbb{P}_N \text{ divisible por } (x - x_j), \qquad (j = 0, 1, \ldots, N,\ j \neq i)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{existe } \alpha_i :\ l_i(x) = \alpha_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} (x - x_j)$$

$$\text{existe } \alpha_i : \; l_i(x) = \alpha_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} (x - x_j)$$

$$l_i(x_i) = 1 \;\Rightarrow\; l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Solución del problema

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} y_i l_i(x)$$

$$p \in \mathbb{P}_N, \quad i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; p(x_i) = y_i$$

Hemos probado:

Teorema

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2$ con

$$i, j = 0, 1, \ldots, N,\ i \neq j \ \Rightarrow \ x_i \neq x_j,$$

entonces el único polinomio $p \in \mathbb{P}_N$ que satisface las condiciones de interpolación

$$i = 0, 1, \ldots, N \ \Rightarrow \ p(x_i) = y_j$$

viene dado por

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} y_i l_i(x),$$

donde

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

La fórmula anterior se conoce como *forma de Lagrange del polinomio de interpolación* y las funciones base *polinomios de Lagrange* o *característicos*.

Ejemplo

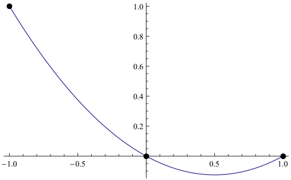
Datos: valores de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = e^x, \qquad (x \in \mathbb{R})$$

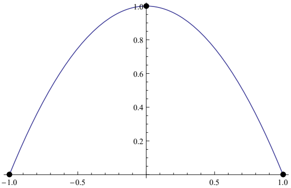
en los puntos de abscisas $-1, 0, 1$:

$$(x_0, y_0) = (-1, e^{-1}),\ (x_1, y_1) = (0, 1),\ (x_2, y_2) = (1, e)$$

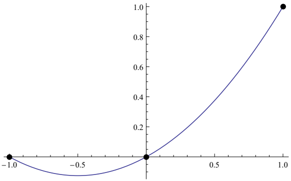
polinomio de Lagrange $l_0(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2}$



polinomio de Lagrange $l_1(x) = 1 - x^2$

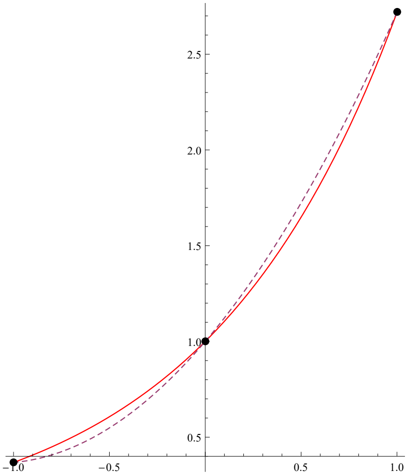


polinomio de Lagrange $l_2(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2}$



polinomio de interpolación (trazo discontinuo en la figura)

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} e^{x_i} l_i(x) = \left(\frac{e}{2} + \frac{1}{2e} - 1\right) x^2 + \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2e}\right) x + 1$$

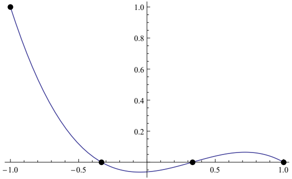


Ejemplo

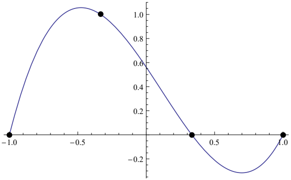
Datos

$$(x_0, y_0) = (-1, 1),\ (x_1, y_1) = (-1/3, 2),\ (x_2, y_2) = (1/3, 0),\ x_3 = (1, 1/4)$$

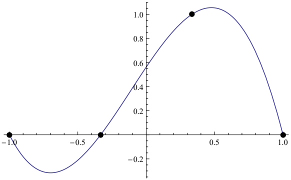
polinomio de Lagrange $l_0(x) = -\frac{9}{16}x^3 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{x}{16} - \frac{1}{16}$



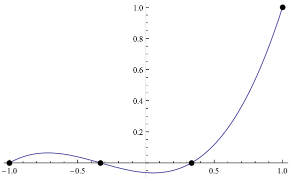
polinomio de Lagrange $l_1(x) = \frac{27}{16}x^3 - \frac{9}{16}x^2 - \frac{27}{16}x + \frac{9}{16}$



polinomio de Lagrange $l_2(x) = -\frac{27}{16}x^3 - \frac{9}{16}x^2 + \frac{27}{16}x + \frac{9}{16}$

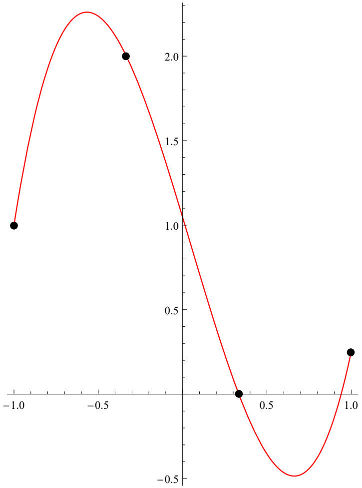


polinomio de Lagrange $l_3(x) = \frac{9}{16}x^3 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{x}{16} - \frac{1}{16}$



polinomio de interpolación

$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i l_i(x) = \frac{1}{64}(189x^3 - 27x^2 - 231x + 67)$$



Primer ejemplo datos generados por función

A subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0, x_1, \dots, x_N \in A$,

$$i = 0, 1 \dots, N \;\Rightarrow\; y_i = f(x_i)$$

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_N, f(x_N))$$

¡No restrictivo! $y_i \leftrightsquigarrow f(x_i)$

Notación polinomio de interpolación

$$\mathbf{I}_N f(x) := \sum_{i=0}^{N} f(x_i) l_i(x)$$

IV.1.2. Forma de Newton del polinomio de interpolación

Datos: A subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0, x_1, \ldots, x_N \in A$,

$$i = 0, 1 \ldots, N \ \Rightarrow \ y_i = f(x_i)$$

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_N, f(x_N))$$

base $\{\omega_0(x), \omega_1(x), \ldots, \omega_N(x)\} \rightsquigarrow \omega_i \in \mathbb{P}_i$ caracterizado por una propiedad recursiva

$$p_N(x) := \mathbf{I}_N f(x) - \mathbf{I}_{N-1} f(x)$$

$$\left. \begin{array}{r} p_N \in \mathbb{P}_N \\ i = 0, 1, \ldots, N-1 \ \Rightarrow \ p_N(x_i) = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \text{existe } \alpha_N \in \mathbb{R} : \ p_N(x) = \alpha_N \prod_{i=0}^{N-1} (x - x_i)$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_N \prod_{i=0}^{N-1} (x - x_i) = \mathbf{I}_N f(x) - \mathbf{I}_{N-1} f(x)$$

$$\alpha_N \prod_{i=0}^{N-1}(x - x_i) = \mathbf{I}_N f(x) - \mathbf{I}_{N-1} f(x)$$

$$\omega_i(x) := \left| \begin{array}{ll} \displaystyle\prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j), & \text{si } i > 0 \\ 1, & \text{si } i = 0 \end{array} \right.$$

(claramente $\{\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_N(x)\}$ base de $\mathbb{P}_N$)

$$\mathbf{I}_N f(x_N) = f(x_N) \;\Rightarrow\; \alpha_N = \frac{f(x_N) - \mathbf{I}_{N-1} f(x_N)}{\omega_N(x_N)}$$

notación

$$f[x_0, x_1, \dots, x_N] := \alpha_N$$

N-ésima diferencia dividida (de Newton)

Conclusión

$$\mathbf{I}_N f(x) = \mathbf{I}_{N-1} f(x) + \omega_N(x) f[x_0, x_1, \dots, x_N]$$

$$\mathbf{I}_N f(x) = \mathbf{I}_{N-1} f(x) + \omega_N(x) f[x_0, x_1, \dots, x_N]$$

Fórmula recursiva

$i = 0$

$$\left| \begin{array}{l} f[x_0] = f(x_0) \\ \\ \mathbf{I}_0 f(x) = f(x_0) \end{array} \right.$$

$i = 1, \dots, N$

$$\left| \begin{array}{l} f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \dfrac{f(x_i) - \mathbf{I}_{i-1} f(x_i)}{\omega_i(x_i)} \\ \\ \mathbf{I}_i f(x) = \mathbf{I}_{i-1} f(x) + \omega_i(x) f[x_0, x_1, \dots, x_i] \end{array} \right.$$

Datos $(x_i, y_i) \rightsquigarrow f(x_i) := y_i$

Ejemplo

Datos

$$(x_0, y_0) = (0.5, 1),\ (x_1, y_1) = (1, 0.2),\ (x_2, y_2) = (-0.25, 1)$$

$$(x_3, y_3) = (-0.5, 0.2),\ (x_4, y_4) = (0.2, 1/3)$$

$f(x_i) = y_i$

Fórmula recursiva

$$f[0.5] = 1, \quad \mathbf{I}_0 f(x) = 1$$

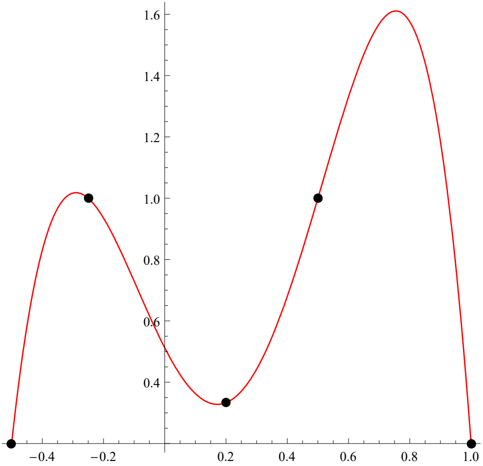
$$f[0.5, 1] = -1.6, \quad \mathbf{I}_1 f(x) = -\frac{8}{5}x + \frac{9}{5}$$

$$f[0.5, 1, -0.25] = -1.28, \quad \mathbf{I}_2 f(x) = -\frac{32}{25}x^2 + \frac{8}{25}x + \frac{29}{25}$$

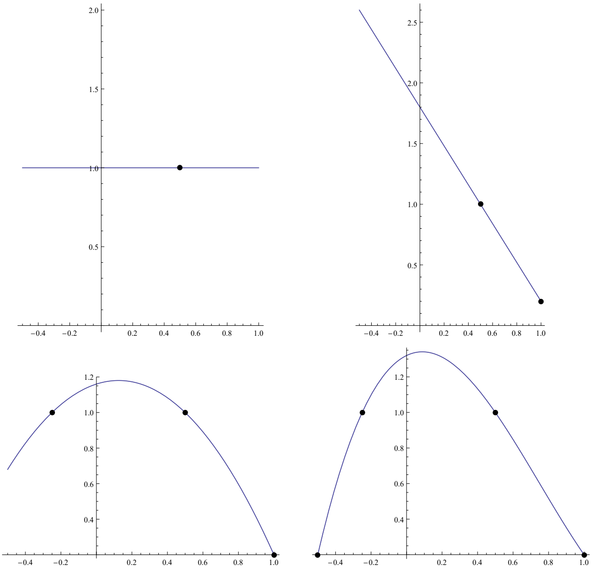
$$f[0.5, 1, -0.25, -0.5] = 1.28, \quad \mathbf{I}_3 f(x) = \frac{32}{25}x^3 - \frac{72}{25}x^2 + \frac{12}{25}x + \frac{33}{25}$$

$$f[0.5, 1, -0.25, -0.5, 0.2] = -\frac{36664}{2835}$$

$$\mathbf{I}_4 f(x) = -\frac{36664}{2835}x^4 + \frac{51878}{4725}x^3 + \frac{50836}{14175}x^2 - \frac{18379}{9450}x + \frac{14507}{28350}$$



Propiedades interpolatorias de $\mathbf{I}_0 f(x), \mathbf{I}_1 f(x), \mathbf{I}_2 f(x), \mathbf{I}_3 f(x)$



Fórmula recursivo-aditiva

$$\mathbf{I}_N f(x) = \mathbf{I}_{N-1} f(x) + \omega_N(x) f[x_0, x_1, \ldots, x_N]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{I}_N f(x) = \sum_{i=0}^{N} \omega_i(x) f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$$

con $f[x_0] := f(x_0)$ y $\omega_0(x) = 1$

Cálculo de las diferencias divididas recursivo ¡y sencillo!:

Proposición

Con la notación anterior

$$i \geq 1 \;\Rightarrow\; f[x_0, x_1, \ldots, x_i] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_i] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}.$$

DEMOSTRACIÓN.

$\mathbf{J}_{i-1}f(x) \in \mathbb{P}_{i-1}$ polinomio interpolación $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_i, f(x_i))$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{I}_i f(x),\; \mathbf{J}_{i-1}f(x) + \frac{x - x_i}{x_i - x_0}(\mathbf{J}_{i-1}f(x) - \mathbf{I}_{i-1}f(x)) \in \mathbb{P}_i$$

mismo valor en $x_0, x_1, \ldots, x_i$ (distinguir x_0; $x_1, \ldots, x_{i-1}$ y x_i)

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{I}_i f(x) = \mathbf{J}_{i-1}f(x) + \frac{x - x_i}{x_i - x_0}(\mathbf{J}_{i-1}f(x) - \mathbf{I}_{i-1}f(x))$$

coincidencia de coeficientes líderes $\leftrightsquigarrow$ fórmula propuesta. □

Esta propiedad motiva el término *diferencia dividida*.

Fórmula recursivo-aditiva

$$\mathbf{I}_N f(x) = \mathbf{I}_{N-1} f(x) + \omega_N(x) f[x_0, x_1, \ldots, x_N]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{I}_N f(x) = \sum_{i=0}^{N} \omega_i(x) f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$$

con $f[x_0] := f(x_0)$ y $\omega_0(x) = 1$

Proposición anterior $\rightsquigarrow$ cálculo recursivo de las diferencias divididas

$$\begin{array}{c|cccccc}
x_0 & \boxed{f[x_0]} & & & & & \downarrow \\
x_1 & f[x_1] & \boxed{f[x_0, x_1]} & & & & \bullet \longrightarrow \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & \boxed{f[x_0, x_1, x_2]} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
x_N & f[x_N] & f[x_{N-1}, x_N] & f[x_{N-2}, x_{N-1}, x_N] & \cdots & \boxed{f[x_0, x_1, \ldots, x_N]} &
\end{array}$$

Ejemplo

Retomamos datos

$$(x_0, y_0) = (0.5, 1),\ (x_1, y_1) = (1, 0.2),\ (x_2, y_2) = (-0.25, 1)$$

$$(x_3, y_3) = (-0.5, 0.2),\ (x_4, y_4) = (0.2, 1/3)$$

Diferencias divididas ($f(x_i) = y_i = f[x_i]$)

$$\begin{array}{c|ccccc}
0.5 & \mathbf{1} & & & & \\
1 & 0.2 & -\mathbf{1.6} & & & \\
-0.25 & 1 & -0.64 & -\mathbf{1.28} & & \\
-0.5 & 0.2 & 3.2 & -2.56 & \mathbf{1.28} & \\
0.2 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{4}{21} & -\dfrac{1264}{189} & \dfrac{4876}{945} & -\dfrac{\mathbf{36664}}{\mathbf{2835}}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_4 f(x) &= \sum_{i=0}^{4} \omega_i(x) f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \\
&= -\frac{36664}{2835}x^4 + \frac{51878}{4725}x^3 + \frac{50836}{14175}x^2 - \frac{18379}{9450}x + \frac{14507}{28350}
\end{aligned}$$

Teorema

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2$ con

$$i, j = 0, 1, \ldots, N, \ i \neq j \ \Rightarrow \ x_i \neq x_j,$$

entonces el único polinomio $p \in \mathbb{P}_N$ que satisface las condiciones de interpolación

$$i = 0, 1, \ldots, N \ \Rightarrow \ p(x_i) = y_j$$

viene dado por

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} f[x_0, x_1, \ldots, x_i]\omega_i(x),$$

donde $f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$ es la i-ésima diferencia dividida y

$$w_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j).$$

La expresión anterior es la conocida como *forma de Newton del polinomio de interpolación* y las funciones base *polinomios nodales*.

IV.1.3. Error de interpolación. Convergencia y estabilidad. Polinomios de Chebyshev

$$x_0, x_1, \ldots, x_N \in [a,b], \quad f \in C([a,b]) \ \rightsquigarrow \ \mathbf{I}_N f \in \mathbb{P}_N$$

$$\mathbf{I}_N : C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{P}_N$$

bien definida (unicidad polinomio interpolación)

proyección $\mathbf{I}_N^2 = \mathbf{I}_N$

$f \in C([a,b])$

$$f \in \mathbb{P}_N \ \Leftrightarrow \ \mathbf{I}_N f = f$$

$f \in C([a,b])$, $x \in [a,b]$

$$\mathbf{E}_N f(x) := f(x) - \mathbf{I}_N f(x)$$

Error de interpolación

¿$\mathbf{E}_N f(x)$?

$\mathbf{I}_N : C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{P}_N$ operador lineal

$$f, g \in C([a,b]),\ \lambda \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \left| \begin{array}{r} \mathbf{I}_N(f+g) = \mathbf{I}_N f + \mathbf{I}_N g \\ \mathbf{I}_N(\lambda f) = \lambda \mathbf{I}_N f \end{array} \right.$$

(unicidad polinomio interpolación)
$\|\cdot\|_\infty$ en $C([a,b])$ (y $\mathbb{P}_N$)

$$\|\mathbf{I}_N\|_\infty := \sup_{f \in C([a,b]),\ \|f\|_\infty = 1} \|\mathbf{I}_N f\|_\infty$$

Generaliza el concepto de norma matricial inducida a operadores lineales (y continuos)

Ejercicio

Comprueba que

$$\|\mathbf{I}_N\|_\infty = \sup_{f \in C([a,b]),\ f \neq 0} \frac{\|\mathbf{I}_N f\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

$$f \in C([a,b]) \ \Rightarrow \ \|\mathbf{I}_N f\|_\infty \leq \|\mathbf{I}_N\|_\infty \|f\|_\infty$$

Proposición

Con la notación anterior

$$\|\mathbf{I}_N\|_\infty = \Lambda_N,$$

donde

$$\Lambda_N := \|\lambda_N\|_\infty$$

es la *constante de Lebesgue* y

$$\lambda_N(x) = \sum_{i=0}^{N} |l_i(x)|$$

es la *función de Lebesgue*, siendo $\{l_0, l_1, \dots, l_N\}$ la base de los polinomios de Lagrange.

DEMOSTRACIÓN.
$f \in C([a,b])$, $\|f\|_\infty = 1$, forma de Lagrange del polinomio de interpolación

$$\begin{aligned} \|\mathbf{I}_N f\|_\infty &= \max_{x\in[a,b]} \left| \sum_{i=0}^{N} f(x_i) l_i(x) \right| \\ &\leq \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{N} |l_i(x)| \\ &= \Lambda_N \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\mathbf{I}_N\|_\infty \leq \Lambda_N$$

Recíprocamente

$\xi \in [a,b]: \ \|\lambda_N\|_\infty = \lambda_N(\xi)$

$$f \in C([a,b]), \text{ lineal a trozos}, \ i = 0,1,\ldots,N \ \Rightarrow \ f(x_i) := \mathrm{sign}(l_i(\xi))$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{I}_N(f)\|_\infty &= \max_{x\in[a,b]} \left| \sum_{i=0}^N f(x_i) l_i(x) \right| \\ &\geq \left| \sum_{i=0}^N f(x_i) l_i(\xi) \right| \\ &= \sum_{i=0}^N |l_i(\xi)| \\ &= \lambda_N(\xi) \\ &= \|\lambda_N\|_\infty \\ &= \Lambda_N \end{aligned}$$

$\square$

Corolario

$$f \in C([a,b]) \;\Rightarrow\; \|\mathbf{E}_N f\|_\infty \leq (1+\Lambda_N) \inf_{p\in\mathbb{P}_N} \|f-p\|_\infty$$

DEMOSTRACIÓN.

$p \in \mathbb{P}_N$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_N f\|_\infty = \quad & \|f - \mathbf{I}_N f\|_\infty \\ & \leq \|f-p\|_\infty + \|p - \mathbf{I}_N f\|_\infty \\ & = \|f-p\|_\infty + \|\mathbf{I}_N(p-f)\|_\infty \\ & \leq (1+\Lambda_N)\|f-p\|_\infty \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\mathbf{E}_N f\|_\infty \leq (1+\Lambda_N) \inf_{p\in\mathbb{P}_N} \|f-p\|_\infty$$

$\square$

$$\|\mathbf{E}_N f\|_\infty \leq (1+\Lambda_N) \underbrace{\inf_{p\in\mathbb{P}_N} \|f-p\|_\infty}$$

independiente de los nodos $\uparrow$

Además (*Teorema de aproximación uniforme de Weierstrass*, Tema V)

$$\lim_{N\to\infty} \inf_{p\in\mathbb{P}_N} \|f-p\|_\infty = 0$$

...pero

$$\lim_{N\to\infty} \Lambda_N = \infty$$

(vid. [1, Theorem 1])

¡No podemos asegurar *convergencia uniforme*,

$$\lim_{N\to\infty} \|\mathbf{E}_N f\|_\infty = 0!$$

Ejemplo de Bernstein

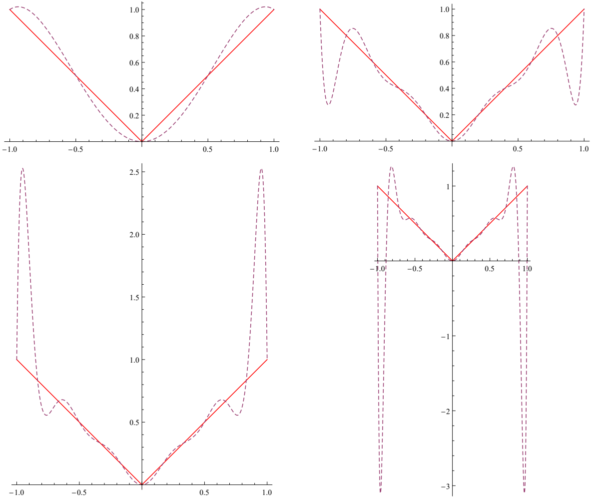
$$f(x) := |x| \quad \text{en } [-1, 1]$$

nodos igualmente espaciados

$$i = 0, 1 \ldots N \;\Rightarrow\; x_i^{(N)} = -1 + \frac{2i}{N}$$

$$\lim_{N \to \infty} \|\mathbf{E}_N f\|_\infty = \infty$$

f e $\mathbf{I}_N f$ (trazo discontinuo), $N = 4, 10, 12, 14$



Ejemplo de Runge

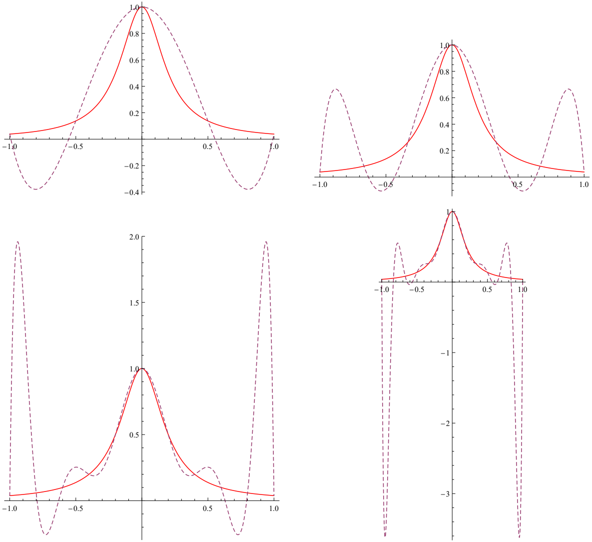
$$f(x) := \frac{1}{1+25x^2}, \quad (x \in [-1,1])$$

nodos uniformemente distribuidos

$$i = 0, 1 \ldots N \ \Rightarrow \ x_i^{(N)} = -1 + \frac{2i}{N}$$

$$\lim_{N\to\infty} \|\mathbf{E}_N f\|_\infty = \infty$$

f e $\mathbf{I}_N f$ (trazo discontinuo), $N = 4, 6, 10, 12$



Estabilidad $\rightsquigarrow \Lambda_N$

f

nodos $x_0, x_1, \ldots, x_N$ | datos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_N, f(x_N))$
datos perturbados $(x_0, \overline{f}(x_0)), (x_1, \overline{f}(x_1)), \ldots, (x_N, \overline{f}(x_N))$

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{I}_N f - \mathbf{I}_N \overline{f}\|_\infty &= \max_{x \in [a,b]} \left| \sum_{i=0}^{N} (f(x_i) - \overline{f}(x_i)) l_i(x) \right| \\
&\leq \Lambda_N \max_{i=0,1,\ldots,N} |f(x_i) - \overline{f}(x_i)|
\end{aligned}
$$

Λ_N solo depende de los nodos $\rightsquigarrow$ medida del condicionamiento

Ejemplo

$f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := e^x$$

21 nodos uniformemente distribuidos en $[-1,1]$

$$i = 0,1,\ldots,20 \ \Rightarrow \Rightarrow \ x_i := -1 + \frac{2i}{20}$$

datos $(x_i, f(x_i))$

datos perturbados $(x_i, \overline{f}(x_i))$, $\overline{f}(x_i) = f(x_i + (-1)^i 10^{-4})$

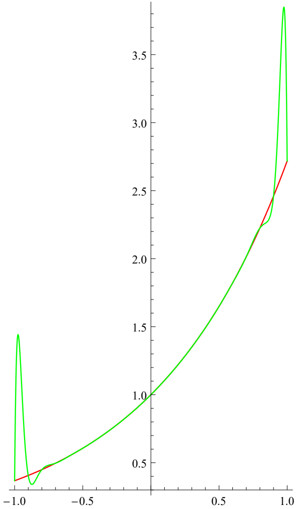
$$\max_{i=0,\ldots,20} |f(x_i) - \overline{f}(x_i)| = 2.7184 \cdot 10^{-4}$$

(redondeo)

...pero

$$\|\mathbf{I}_{20}f - \mathbf{I}_{20}\overline{f}\|_\infty = 1.1964$$

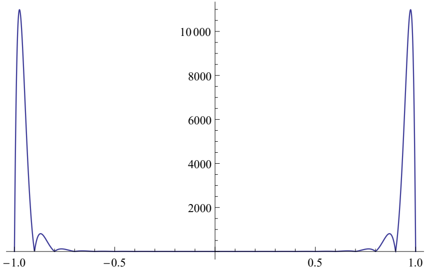
(redondeo)



Mal condicionamiento

$$\Lambda_{20} = 10986.7058$$

(redondeo)



$$\|\mathbf{I}_{20} f - \mathbf{I}_{20} \overline{f}\|_\infty \leq \Lambda_{20} \max_{i=0,\ldots,20} |f(x_i) - \overline{f}(x_i)|$$

$$\downarrow$$

$$1.1964 \leq 10986.7058 \cdot 0.2718 \cdot 10^{-3} = 2.9862$$

Error de interpolación $\mathbf{E}_N f(x) = f(x) - \mathbf{I}_N f(x)$

$$\|\cdot\|_\infty,\ \Lambda_N \ \rightsquigarrow \ \left|\ \begin{array}{c}\text{convergencia uniforme}\\ \text{estabilidad}\end{array}\right.$$

Enfoque puntual:

Proposición

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_N$ números reales distintos, sea $x \in \mathbb{R}$ y sean

$$a := \text{mín}\{x, x_0, x_1, \ldots, x_N\} \quad \text{y} \quad b := \text{máx}\{x, x_0, x_1, \ldots, x_N\}.$$

Supongamos además que $f \in C^{N+1}([a,b])$. Entonces existe $\xi \in]a,b[$ tal que

$$\mathbf{E}_N f(x) = \frac{f^{N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\omega_{N+1}(x),$$

donde ω_{N+1} es el polinomio nodal de grado $N+1$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer $i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; x \neq x_i$.

Función auxiliar: $G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto G(t) := \mathbf{E}_N f(t) - \frac{\mathbf{E}_N f(x)}{\omega_{N+1}(x)}\omega_{N+1}(t)$$

$$G(t) = \mathbf{E}_N f(t) - \frac{\mathbf{E}_N f(x)}{\omega_{N+1}(x)} \omega_{N+1}(t)$$

$G \in C^{N+1}([a, b])$ admite al menos $N + 2$ ceros

$$i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; G(x_i) = 0$$
$$G(x) = 0$$

Teorema de Rolle

- G' tiene al menos $N + 1$ ceros
- G'' posee al menos N ceros
- ...
- $G^{N+1)}$ se anula al menos en un $\xi \in (a, b)$

$$0 = G^{N+1)}(\xi) = f^{N+1)}(\xi) - \frac{\mathbf{E}_N f(x)}{\omega_{N+1}(x)} (N + 1)!$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{E}_N f(x) = \frac{f^{N+1)}(\xi)}{(N + 1)!} \omega_{N+1}(x)$$

$$f(x) = \mathbf{I}_N f(x) + \frac{f^{N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\omega_{N+1}(x)$$

Análoga a fórmula de Taylor

Corolario

Bajo las condiciones de la proposición anterior

$$\|\mathbf{E}_N f\|_\infty \leq \frac{\|f^{N+1)}\|_\infty}{(N+1)!}(b-a)^{N+1}$$

Convergencia uniforme: $f \in C^\infty([a,b])$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\|f^{N+1)}\|_\infty}{(N+1)!}(b-a)^{N+1} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{N\to\infty} \|\mathbf{E}_N f\|_\infty = 0$$

- $f \notin C^{\infty}([a,b])$ Bernstein
- $\lim\limits_{N \to \infty} \dfrac{\|f^{N+1)}\|_{\infty}}{(N+1)!}(b-a)^{N+1} \neq 0$ Runge

$\dfrac{f^{i)}(1)}{i!}$, $i = 0, 1, \ldots, 10$ (redondeo)

$$0.8, -3.2, -3.2, 76.8, -243.2, -563.2, 7116.8, -17203.2, -73523.2,$$
$$638156.8, -1.0822 \cdot 10^{6}$$

Ejemplo

$$f(x) = e^x, \quad (x \in [a, b])$$

$$\frac{\|f^{N+1)}\|_\infty}{(N+1)!}(b-a)^{N+1} = \frac{e^b}{(N+1)!}(b-a)^{N+1} \to 0 \quad (N \to \infty)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{N\to\infty} \|\mathbf{E}_N f\|_\infty = 0$$

Ejemplo

$$f(x) = \cos x, \quad (x \in [a, b])$$

$$\frac{\|f^{N+1)}\|_\infty}{(N+1)!}(b-a)^{N+1} \leq \frac{1}{(N+1)!}(b-a)^{N+1} \to 0 \quad (N \to \infty)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{N\to\infty} \|\mathbf{E}_N f\|_\infty = 0$$

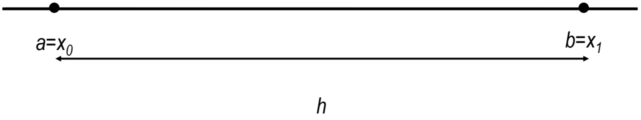
Elección de nodos influye en el error de interpolación

$$\mathbf{E}_N f(x) = \frac{f^{N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\omega_{N+1}(x)$$

Primer enfoque: nodos $x_0, x_1, \ldots, x_N$ uniformemente distribuidos en $[a, b]$

Ejemplo: 2 puntos

$[a, b] = [x_0, x_1]$, $h := x_1 - x_0$



- error de interpolación puntual: $f \in C^2([a, b])$, $x \in [a, b] \rightsquigarrow$ existe $\xi \in]a, b[$:

$$\mathbf{E}_1 f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)(x - x_1)$$

- estimación uniforme para error de interpolación:

$$\|\mathbf{E}_1 f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2} h^2$$

estimación mejorable (acotación de $\omega_2(x)$)

$x \in [x_0, x_1] \;\Rightarrow\;$ existe $0 \leq t \leq 1 :\; x = x_0 + th$

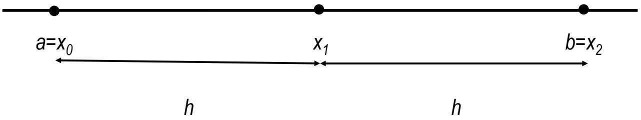
$$\begin{aligned} |(x - x_0)(x - x_1)| &= (x - x_0)(x_1 - x) \\ &= th(1 - t)h \\ &\leq \frac{h^2}{4} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\mathbf{E}_1 f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8} h^2$$

Ejemplo: 3 puntos igualmente espaciados

$[a,b]=[x_0,x_2]$, $x_1=\dfrac{x_2+x_0}{2}$, $h:=x_1-x_0=x_2-x_1$



- error de interpolación puntual: $f\in C^3([a,b])$, $x\in[a,b]\rightsquigarrow$ existe $\xi\in]a,b[$:

$$\mathbf{E}_2 f(x)=\frac{f'''(\xi)}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

- estimación uniforme para error de interpolación:

$$\|\mathbf{E}_2 f\|_\infty\leq\frac{\|f'''\|_\infty}{6}h^3$$

estimación mejorable (acotación de $\omega_3(x)$): $x=x_0+th$, $0\leq t\leq 2$, análogo al caso de 2 puntos (detalles en Relación de Ejercicios)

En general, aun siendo mejorable, para nodos equidistantes

$$\|\mathbf{E}_N f\|_\infty \leq \frac{\|f^{N+1)}\|_\infty}{(N+1)!} h^{N+1}$$

error de interpolación de orden $O(h^{N+1})$

Elección de nodos $x_0, x_1, \ldots, x_N$ no trivial $\rightsquigarrow$ minimizar $\|\omega_{N+1}\|_\infty$ $\rightsquigarrow$ minimizar error de interpolación

$$\mathbf{E}_N f(x) = \frac{f^{N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\omega_{N+1}(x)$$

nodos (y polinomios) de Chebyshev

$[-1,1]$, $[a,b]$ $\leftrightsquigarrow$ $[-1,1]$ isomorfismo afín

$\theta \in \mathbb{R}$, $N \geq 1$

$$\cos(N+1)\theta + \cos(N-1)\theta = 2\cos\theta\cos N\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(N+1)\theta = 2\cos\theta\cos N\theta - \cos(N-1)\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\text{existe } T_n \in \mathbb{P}_N : \; T_N(\cos\theta) = \cos N\theta$$

$$\mathit{cos} : [0, \pi] \longleftrightarrow [-1, 1] \text{ biyección}$$

$$x = \cos\theta$$

$$\cos(N+1)\theta = 2\cos\theta\cos N\theta - \cos(N-1)\theta$$

y

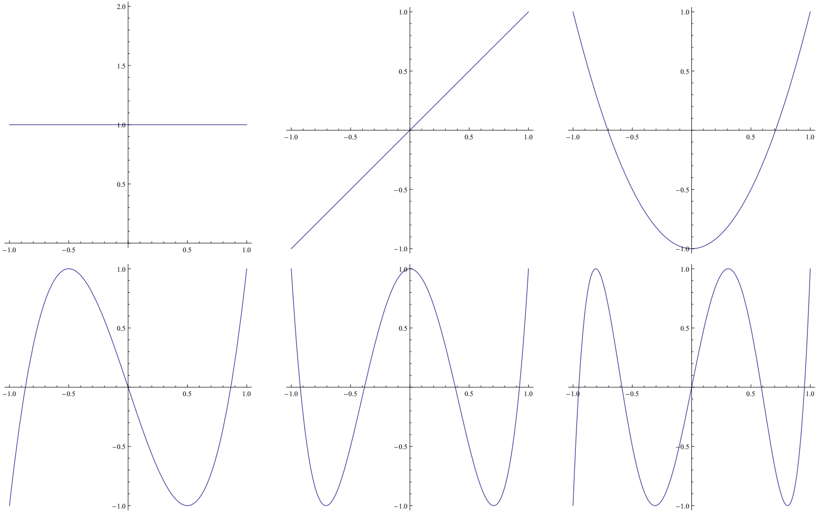
$$T_N(\cos\theta) = \cos N\theta$$

$$\left| \begin{array}{l} T_0(x) = 1 \\ \\ T_1(x) = x \\ \\ i = 0, 1, 2, \ldots \ \Rightarrow \ T_{i+2}(x) = 2xT_{i+1}(x) - T_i(x) \end{array} \right.$$

T_i *polinomio de Chebyshev* de grado i

$$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x \qquad T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \qquad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \qquad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$



Propiedades importantes

- $T_N \in \mathbb{P}_N$ con N ceros reales, todos en $[-1,1]$, y coeficiente líder 2^{N-1}
- $T_N \in C([-1,1])$, $\|T_N\|_\infty = 1$

recurrencia $\rightsquigarrow$ coeficiente líder 2^{N-1}

$$\left.\begin{array}{c} T_N \in \mathbb{P}_N \\ T_N(\cos\theta) = \cos N\theta \\ \cos N\theta = 0 \end{array}\right| \Rightarrow x_i^{(N)} = \cos\frac{2i+1}{2N}\pi, \ (i = 0, \ldots, N-1) \text{ los } N \text{ ceros de } T_N$$

nodos de Chebyshev

$$x \in [-1,1] \ \Rightarrow \ x = \cos\theta$$

$$T_N(x) = T_N(\cos\theta) = \cos N\theta \ \Rightarrow \ |T_N(x)| \le 1$$

$$|T_N(x)| = 1 \ \Leftrightarrow \ \cos N\theta = \pm 1 \ \Leftrightarrow \ x = y_i^{(N)} = \cos\frac{i}{N}\pi, \ (i = 0, \ldots, N)$$

$\frac{1}{2^{N-1}} T_N$ coeficiente líder 1, $\frac{1}{2^{N-1}} T_N \in C([-1,1])$

$$\left\| \frac{1}{2^{N-1}} T_N \right\|_\infty = \frac{1}{2^{N-1}}$$

Teorema de Chebyshev

Sea $N \geq 1$ y sea $p \in \mathbb{P}_N$ un polinomio con coeficiente líder 1. Entonces

$$\max_{x \in [-1,1]} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{N-1}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Reductio ad absurdum

$$\max_{x \in [-1,1]} |p(x)| < \frac{1}{2^{N-1}}$$

$$q(x) := \frac{1}{2^{N-1}} T_N - p(x) \in \mathbb{P}_{N-1}$$

$$q(y_0^{(N)}) > 0,\ q(y_1^{(N)}) < 0,\ q(y_2^{(N)}) > 0,\ \ldots,\ (-1)^N q(y_N^{(N)}) > 0$$

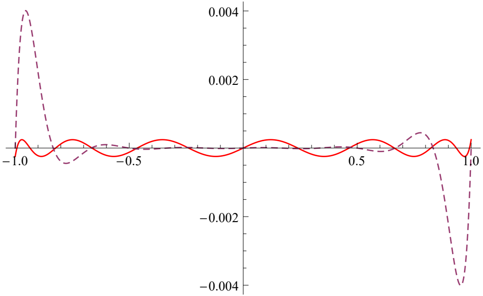
$q \in \mathbb{P}_{N-1}$ al menos N ceros reales distintos $\rightsquigarrow$ $q = 0$ ¡contradicción! $\uparrow$ $\square$

Corolario

Sean $N \geq 1$, $x_0, \ldots, x_N \in [-1, 1]$ y sean $x_0^{(N+1)}, x_1^{(N+1)}, \ldots, x_N^{(N+1)}$ los nodos de Chebyshev. Entonces, en el espacio normado $C([-1, 1])$,

$$\left\| \prod_{i=0}^{N} (x - x_i) \right\|_\infty \geq \left\| \prod_{i=0}^{N} (x - x_i^{(N+1)}) \right\|_\infty = \frac{1}{2^N}.$$

Polinomios nodales con nodos de Chebyshev e igualmente espaciados (trazo discontinuo), $N = 12$

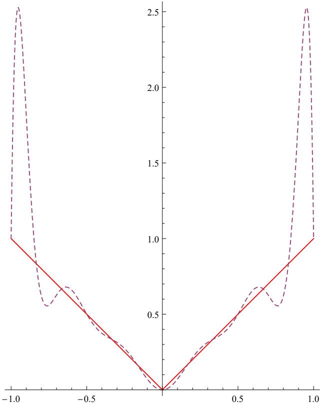


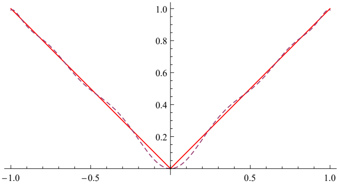
Nodos de Chebyshev

$$\|\mathbf{E}_N f\|_\infty \leq \frac{\|f^{N+1)}\|_\infty}{(N+1)!}\frac{1}{2^N}$$

Ejemplo

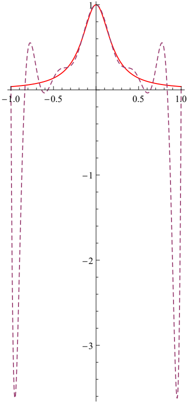
Función de Bernstein con nodos uniformes y de Chebyshev, $N = 12$

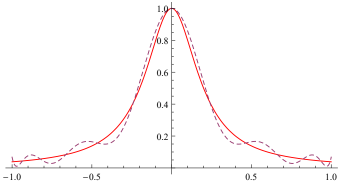




Ejemplo

Función de Runge con nodos uniformes y de Chebyshev, $N = 12$





IV.1.4. Otros problemas de interpolación: Hermite y caso general

$$\text{nodos distintos } x_0, x_1, \ldots, x_N \in [a, b]$$

$$\text{órdenes de derivación } m_0, m_1, \ldots, m_N \geq 0$$

$$\text{función } f \in C^M([a, b]), \quad M := \max_{i=0,\ldots,N} m_i$$

Problema de interpolación de Hermite

encontrar $p \in \mathbb{P}$ de grado mínimo K con

$$i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; [\, j = 0, 1, \ldots, m_i \;\Rightarrow\; p^{j)}(x_i) = f^{j)}(x_i) \,]$$

Enfoque | Lagrange
Newton

$$p \in \mathbb{P}_K : \ p^{j)}(x_i) = f^{j)}(x_i) \ \Leftrightarrow \ L(p) = f^{j)}(x_i)$$

con $L : \mathbb{P}_K \longrightarrow \mathbb{R}$ forma lineal

$$p \mapsto L(p) := p^{j)}(x_i)$$

Problema general de interpolación

E espacio vectorial (real) de dimensión N, $L_1, \ldots, L_N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ formas lineales, $d_1, \ldots, d_N \in \mathbb{R}$

$$\text{encontrar un único } p \in E : \ [\ i = 1, \ldots, N \ \Rightarrow \ L_i(p) = d_i\ ]$$

Proposición

Sea E un espacio vectorial (real) de dimensión $N \geq 1$, sean $L_1, \ldots, L_N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ formas lineales y sea $\{p_1, \ldots, p_N\}$ una base de E. Entonces, el problema general de interpolación admite una única solución, cualesquiera sean $d_1, \ldots, d_N \in \mathbb{R}$, si, y solo si,

$$\det [L_i(p_j)]_{i,j=1}^N \neq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta usar la linealidad de las formas $L_1, \ldots, L_N$ y el hecho de que $\{p_1, \ldots, p_N\}$ es base de E, reduciendo el razonamiento al estudio de un sistema de ecuaciones lineales. $\square$

$[L_i(p_j)]_{i,j=1}^N$ matriz de coeficientes de un sistema cuadrado

unisolvencia para cualesquiera $d_1, \ldots, d_n$ $\Leftrightarrow$ unisolvencia para $d_1 = \cdots = d_N = 0$

Enfoque | **Lagrange**
Newton

Problema general de interpolación

E espacio vectorial (real) de dimensión N, $L_1, \ldots, L_N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ formas lineales, $d_1, \ldots, d_N \in \mathbb{R}$

$$\text{encontrar un único } p \in E : \ [\ i = 1, \ldots, N \ \Rightarrow \ L_i(p) = d_i \ ]$$

$\{l_1, \ldots, l_N\}$ base de E de Lagrange

$$i, j = 1, \ldots, N \ \Rightarrow \ L_i(l_j) = \delta_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$p := \sum_{i=1}^{N} d_i l_i$$

solución del problema general de interpolación

(¡comprobar como ejercicio!)

dificultad $\rightsquigarrow$ determinar la base de Lagrange (¡siempre existe!)

Ejemplo: interpolación polinomial clásica

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2 : \; i, j = 0, 1, \dots, N \;\Rightarrow\; x_i \neq x_j$$

$$E := \mathbb{P}_N, \quad \{1, x, \dots, x^N\} \text{ base}$$

$$i = 0, 1, \dots, N \;\Rightarrow\; L_i(p) := p(x_i)$$

$$\text{encontrar un único } p \in E : \; [\; i = 0, \dots, N \;\Rightarrow\; L_i(p) = y_i \;]$$

$$\det \left[L_i(x^{j-1}) \right]_{i,j=1}^{N+1} \neq 0 \;\rightsquigarrow\; \text{unisolvencia}$$

(Vandermonde)

base de Lagrange $\rightsquigarrow$ polinomios de Lagrange $\{l_0(x), l_1(x), \dots, l_N(x)\}$

Ejemplo: interpolación de Hermite_caso i

$$(x_0, y_0, d_0), (x_1, y_1, d_1), \dots, (x_N, y_N, d_N) \in \mathbb{R}^3 : \ i, j = 0, 1, \dots, N \ \Rightarrow \ x_i \neq x_j$$

$$E := \mathbb{P}_{2N+1}, \quad \{1, x, \dots, x^{2N+1}\} \text{ base}$$

$$i = 0, 1, \dots, N \ \Rightarrow \ \left| \begin{array}{c} L_{2i}(p) := p(x_i) \\ L_{2i+1}(p) = p'(x_i) \end{array} \right.$$

$$\text{encontrar un único } p \in E : \ \left[\ i = 0, 1, \dots, N \ \Rightarrow \ \left| \begin{array}{c} p(x_i) = y_i \\ p'(x_i) = d_i \end{array} \right. \ \right]$$

$$\det\,[L_i(p_j)]_{i,j=0}^{2N+1} \neq 0 \ \leftrightsquigarrow \ \text{problema homogéneo}$$

$$p(x_0) = p'(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; p(x) = (x - x_0)^2 q_0(x), \text{ para cierto } q_0 \in \mathbb{P}_{2N-1}$$

$x_1, \ldots, x_N \rightsquigarrow\rightsquigarrow$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$p(x) = \alpha \prod_{i=0}^{N+1} (x - x_i)^2$$

$p \in \mathbb{P}_{2N+1} \rightsquigarrow p = 0$

Unisolvencia

base de Lagrange $\rightsquigarrow$ polinomios de Hermite $\{h_0(x), h_1(x), \ldots, h_{2N+1}(x)\}$

razonamiento análogo al caso polinomial clásico

$$i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{c} h_{2i}(x) = (1 - 2(x - x_i) l_i'(x_i)) l_i^2(x) \\ \\ h_{2i+1}(x) = (x - x_i) l_i(x)^2 \end{array} \right.$$

$\{l_0(x), l_1(x), \ldots, l_N(x)\}$ polinomios de Lagrange

$$i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Solución

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} (y_i h_{2i}(x) + d_i h_{2i+1}(x))$$

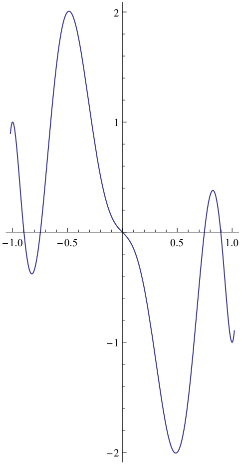
Estudio del error de interpolación similar al caso polinomial clásico

Datos concretos

nodos: $x_0 = -1,\ x_1 = -0.5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0.5,\ x_4 = 1$

valores: $y_0 = 1,\ y_1 = 2,\ y_2 = 0,\ y_3 = -2,\ y_4 = -1$

derivadas: $d_0 = 0,\ d_1 = 1,\ d_2 = -1,\ d_3 = 1,\ d_4 = 0$



$$p(x) = -x - \frac{833}{18}x^3 + \frac{385}{2}x^5 - \frac{740}{3}x^7 + \frac{904}{9}x^9$$

Ejemplo: interpolación de Hermite_caso ii

$$(x_0, d_0, d_1, \ldots, d_N) \in \mathbb{R}^{N+2}$$

$$E := \mathbb{P}_N, \quad \{1, x, \ldots, x^N\} \text{ base}$$

$$i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; L_i(p) := p^{i)}(x_0)$$

$$\text{encontrar un único } p \in E : \;\left[\; i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; p^{i)}(x_0) = d_i \right]$$

$$\det\left[L_i(p_j)\right]_{i,j=0}^{N} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^N \\ 0 & 1 & 2x_0 & \cdots & N x_0^{N-1} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & N(N-1)x_0^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N! \end{bmatrix} \neq 0$$

Unisolvencia

base de Lagrange $\rightsquigarrow$ polinomios de Taylor $\{t_0(x), t_1(x), \ldots, t_N(x)\}$

razonamiento análogo al caso polinomial clásico

$$i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; t_i(x) = \frac{(x - x_0)^i}{i!}$$

Solución

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} \frac{d_i}{i!}(x - x_0)^i$$

$d_i \;\leftrightsquigarrow\; f^{i)}(x_0)$ polinomio de Taylor

Ejercicio

Decide razonadamente si el problema de interpolación

$$\text{encontrar } p \in \mathbb{P}_3 : \left| \begin{array}{c} p(0) = 0 \\ p'(0) = 0 \\ p'(-1) = 0 \\ p''(-0.5) = 0 \end{array} \right.$$

es unisolvente.

IV.2. Interpolación mediante funciones splines

Mejorar precisión $\rightsquigarrow$ partición de $[a, b]$ y grado polinomial bajo

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$$

partición de $[a, b]$

Definición

Dados un intervalo $[a, b]$ y una partición P del mismo, el *espacio de funciones splines* de clase k y grado m viene dado por

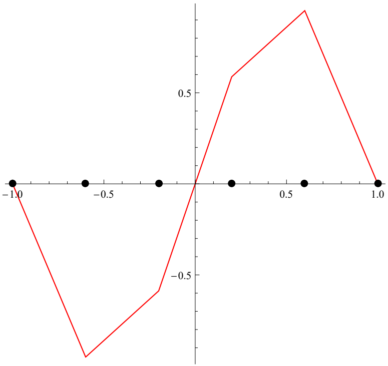
$$\mathbb{S}_m^k(P) := \left\{s \in C^k([a, b]) : \; i = 0, 1, \ldots, N-1 \; \Rightarrow \; s_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m\right\}$$

Espacio vectorial

$\mathbb{S}_m^m = \mathbb{P}_m \rightsquigarrow k < m$

IV.2.1. Funciones splines lineales

$\mathbb{S}_1^0(P)$



$\dim \mathbb{S}_1^0(P) = 2N - (N-1) = N+1$

base usual $\{B_0(x), B_1(x), \ldots, B_N(x)\}$

Definición

Sean $a < b$ y sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. La *base usual* del espacio $\mathbb{S}_1^0(P)$ viene dada por

$$i = 0, 1, \ldots, N, \;\Rightarrow\; B_i(x) := \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\[2ex] \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\[2ex] \quad 0, & \text{fuera} \end{array} \right. .$$

Ejercicio

Comprueba que, efectivamente, las $N+1$ funciones splines anteriores forman una base de $\mathbb{S}_1^0(P)$.
(Indicación: para la independencia lineal basta observar que

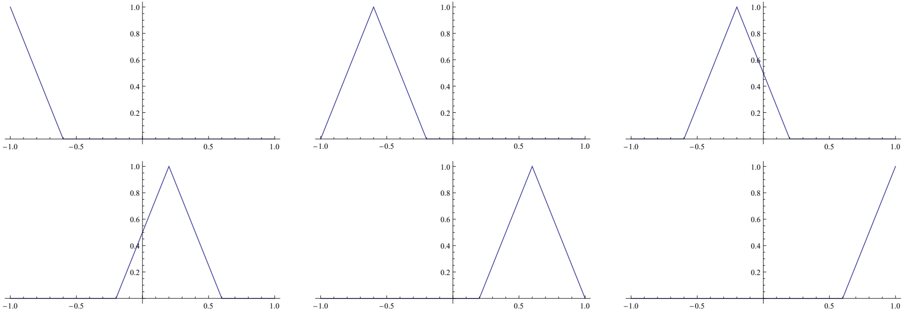
$$i, j = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; B_i(x_j) = \delta_{ij},$$

mientras que para probar que forman un sistema de generadores, solo hay que demostrar que

$$s \in \mathbb{S}_1^0(P) \;\Rightarrow\; s(x) = \sum_{i=0}^{N} s(x_i) B_i(x) \;).$$

$$P = \{-1, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1\}$$

$N = 5$



Problema de interpolación en $\mathbb{S}_1^0(P)$

Dados un intervalo $[a, b]$, una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$ y una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, se considera el problema de interpolación

$$\text{encontrar } s \in \mathbb{S}_1^0(P): \ [i = 0, 1, \ldots, N \ \Rightarrow \ s(x_i) = f(x_i)\ ]$$

Estructura de problema de interpolación general claramente unisolvente (¡comprobar!)

Base de Lagrange $\rightsquigarrow \{B_0(x), B_1(x), \ldots, B_N(x)\}$

Solución: notando $s = \mathbf{S}_N^1 f$

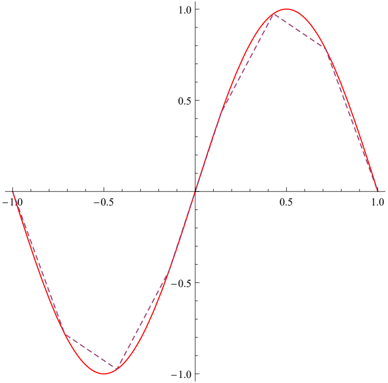
$$\mathbf{S}_N^1 f(x) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i) B_i(x)$$

Ejemplo

P partición uniforme de $[-1,1]$ en $N=7$ subintervalos

$$f(x)=\operatorname{sen}(\pi x), \quad (x\in[-1,1])$$

$\mathbf{S}_7^1 f(x)$ trazo discontinuo



Error de interpolación

$$\mathbf{E}_N f(x) = f(x) - \mathbf{S}_N^1 f(x)$$

$f \in C^2([a,b])$

$$i = 0, 1 \ldots, N-1,\ x \in [x_i, x_{i+1}] \ \Rightarrow\ |f(x) - \mathbf{S}_N^1 f(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8}(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|f - \mathbf{S}_N^1 f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8}\left(\max_{i=0,\ldots,N-1}(x_{i+1} - x_i)\right)^2$$

Hemos probado:

Proposición

Con la notación anterior, si $f \in C^2([a,b])$, entonces

$$\lim_{N\to\infty} \max_{i=0,\ldots,N-1} (x_{i+1} - x_i) = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{N\to\infty} \|f - \mathbf{S}_N^1 f\|_\infty = 0.$$

Ejercicio

Sea $f \in C([a,b])$, sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$ y sea $\mathbf{S}_N^1 f$ el único elemento de $\mathbb{S}_1^0(P)$ que interpola a f en los nodos de P, i.e.,

$$i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; \mathbf{S}_N^1 f(x_i) = f(x_i).$$

- Comprueba que si $i = 0, 1, \ldots, N-1$ y $x \in [x_i, x_{i+1}]$, entonces

$$\mathbf{S}_N^1 f(x) \leq \max\{f(x_i), f(x_{i+1})\}.$$

- Deduce que

$$\|\mathbf{S}_N^1 f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

- Demuestra que

$$\|f - \mathbf{S}_N^1 f\|_\infty \leq 2 \inf_{s \in \mathbb{S}_1^0(P)} \|f - s\|_\infty.$$

IV.2.2. Funciones splines cúbicas

$\mathbb{S}_3^1(P)$ datos Hermite $\rightsquigarrow$ tratamiento similar problema de interpolación general

$\mathbb{S}_3^2(P)$ $\rightsquigarrow$ tratamiento alternativo

$\dim \mathbb{S}_3^2(P) = 4N - 3(N-1) = N + 3$

Funciones splines cúbicas naturales

$$i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; s(x_i) = f(x_i)$$

2 condiciones adicionales: $s''(a) = 0 = s''(b)$

Construcción directa de las funciones splines cúbicas naturales en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

Por comodidad expositiva puntos distribuidos uniformemente en $[a, b]$

$$h = (b-a)/N, \; i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; x_i = a + ih$$

Notación

$$s := \mathbf{S}_N^2 f$$

$$i = 0, 1, \ldots, N-1 \;\Rightarrow\; s_i := \mathbf{S}_N^2 f_{|[x_i, x_{i+1}]}$$

$$i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; y_i := s(x_i), \quad d_i := s'(x_i), \quad c_i := s''(x_i)$$

- $i = 1, \ldots, N$, $s_{i-1} \in \mathbb{P}_3 \;\Rightarrow\; s''_{i-1} \in \mathbb{P}_1$

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \;\Rightarrow\; s''_{i-1}(x) = c_{i-1}\frac{x_i - x}{h} + c_i \frac{x - x_{i-1}}{h}$$

Automáticamente

$$i = 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i) \tag{1}$$

Integrando 2 veces

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \;\Rightarrow\; s_{i-1}(x) = c_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + c_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + \alpha_{i-1}(x - x_{i-1}) + \beta_{i-1}$$

- Condiciones de interpolación

$$i = 1, \ldots, N-1 \;\Rightarrow\; s_{i-1}(x_{i-1}) = y_{i-1},\; s_{i-1}(x_i) = y_i$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_{i-1} = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h} - \dfrac{h}{6}(c_i - c_{i-1}) \\[2em] \beta_{i-1} = y_{i-1} - c_{i-1}\dfrac{h^2}{6} \end{array} \right.$$

Automáticamente $s \in C([a, b])$

¡Los d_i's no intervienen!

- $s \in C^1([a,b])$ ($\Rightarrow$ $s \in C^2([a,b])$ por (1))

$$i = 1, \ldots, N-1 \;\Rightarrow\; s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$$

$$\Downarrow$$

$$i = 1, \ldots, N-1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}c_{i-1} + 2c_i + \frac{1}{2}c_{i+1} = \rho_i,$$

$$\rho_i := \frac{3}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

Sistema de $N-1$ ecuaciones lineales y $N+1$ incógnitas $\rightsquigarrow$ añadimos 2 ecuaciones que impliquen trivialmente las condiciones $s''(a) = s''(b) = 0$

$$2c_0 = 0$$

$$2c_N = 0$$

Resumen: $i = 1, \ldots, N$

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \;\Rightarrow\; s_{i-1}(x) = c_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + c_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + \alpha_{i-1}(x - x_{i-1}) + \beta_{i-1}$$

$$\left|\begin{array}{l} \alpha_{i-1} = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h} - \dfrac{h}{6}(c_i - c_{i-1}) \\ \\ \beta_{i-1} = y_{i-1} - c_{i-1}\dfrac{h^2}{6} \end{array}\right.$$

Los c_i's solución del sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix} = \frac{3}{h^2} \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ \vdots \\ y_N - 2y_{N-1} + y_{N-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

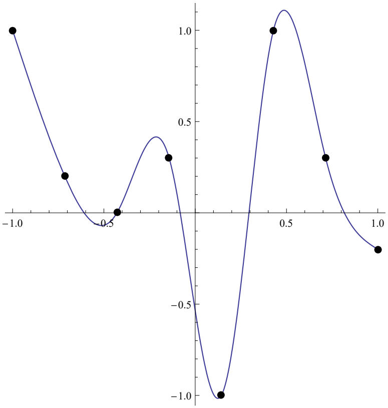
$$[-1, 1], \quad N = 7$$

$$y_0 = 1,\ y_1 = 0.2,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0.3,\ y_4 = -1,\ y_5 = 1,\ y_6 = 0.3,\ y_7 = -0.2$$

Solución del sistema (redondeo)

$$c_0 = 0,\ c_1 = 5.3882,\ c_2 = 22.5474,\ c_3 = -58.8278,\ c_4 = 95.1637,\ c_5 = -79.277$$

$$c_6 = 23.4942,\ c_7 = 0$$


1.0
0.5
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.5
1.0

Ejemplo

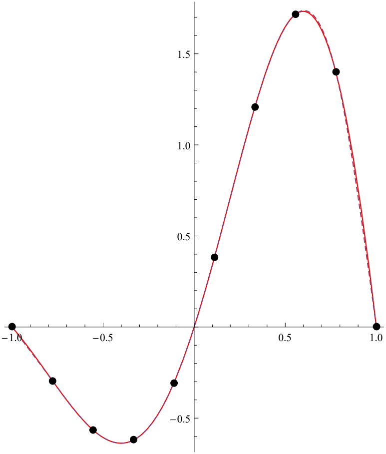
$$[-1,1], \quad N = 9, \quad f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)e^x$$

Solución del sistema (redondeo)

$$c_0 = 0,\ c_1 = -0.3741,\ c_2 = 4.6056,\ c_3 = 7.98,\ c_4 = 8.4266,\ c_5 = 3.7284$$

$$c_6 = -6.5546,\ c_7 = -16.2233,\ c_8 = -28.8036,\ c_9 = 0$$

$s = \mathbf{S}_9^2 f$ trazo discontinuo



Error de interpolación

Proposición

Con la notación anterior, si $f \in C^4([a,b])$ entonces

$$j = 0,1,2,3 \;\Rightarrow\; \|f^{j)} - \mathbf{S}_N^2 f^{j)}\|_\infty \leq K_j h^{4-j} \|f^{4)}\|_\infty,$$

donde $K_0 = 5/384$, $K_1 = 1/24$, $K_2 = 3/8$ y $K_4 = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Véase [3]. □

Principio de mínima energía

Proposición

Sean $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g \in C^2([a, b])$ de forma que

$$i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; g(x_i) = f(x_i).$$

Si además s es la función spline cúbica natural que satisface la misma condición de interpolación, entonces

$$\int_a^b s''(x)^2 dx \leq \int_a^b g''(x)^2 dx,$$

dándose la igualdad si, y sólo si, $g = s$.

DEMOSTRACIÓN. Véase [2]. □

IV.3. Bibliografía

1. P. Erdos, *Problems and results on the theory of interpolation II*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **12** (1961), 235–244.

2. W. Gautschi, *Numerical analysis*, second edition, Springer, New York, 2012.

3. A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical mathematics*, second edition, Texts in Applied Mathematics **37** Springer–Verlag, Berlin, 2007.