

Tema 6. Campo magnetostático

*David Blanco
Alberto Martín
Miguel Ángel Rodríguez
Curso 2012-2013*

Índice

1. Introducción	3
2. Fuerza de Lorentz	3
3. Fuerza magnética entre corrientes	4
4. Campo magnetostático	7
4.1. Campo producido por una corriente lineal recta infinita	7
4.2. Campo producido por un anillo	9
4.3. Campo magnético para corrientes volúmicas y superficiales	10
5. Ley de Gauss para el campo magnético	11
6. Teorema de Ampere	11
6.1. Simetría cilíndrica	12
6.2. Simetría plana	15
6.3. Solenoide	17

1. Introducción

En los anteriores dos temas hemos estudiado fuerzas que se producen sobre las cargas. Estas fuerzas eran de carácter eléctrico (electrostático en el Tema 4), y se explicaban por la existencia de campos electrostáticos. Se ha estudiado cómo los campos eléctricos, tanto conservativos como no conservativos, producen fuerzas en la misma dirección que los campos. En este tema vamos a estudiar otro tipo de fuerzas que se producen sobre cargas, que son las fuerzas magnéticas. La naturaleza de estas fuerzas es muy distinta a las fuerzas eléctricas por varios motivos. Por un lado, estas fuerzas no sólo requieren que existan cargas, sino que éstas se muevan, por lo tanto no existirán si las cargas no se mueven. Por otro lado, las fuerzas magnéticas se pueden describir en términos de un campo magnético, pero en este caso la fuerza no lleva la misma dirección que el campo magnético sino que es perpendicular al campo magnético.

Comenzaremos el tema suponiendo que existe un campo magnético o inducción magnética \vec{B} y estudiaremos la fuerza que se ejerce sobre una carga moviéndose. En principio no nos preocuparemos de cómo o quién origina estos campos magnéticos, sino sólo del efecto que éstos producen en cargas en movimiento. En el estudio del campo electrostático no se incluyó este análisis porque la relación entre fuerza y campo era muy sencilla, pero en el caso de campo magnético es conveniente comenzar prestando atención a esta relación.

Los términos campo magnético e inducción magnética no son sinónimos en electromagnetismo, ya que son dos magnitudes distintas en presencia de materia. Sin embargo, este tema sólo estudiará el magnetismo en el vacío, donde ambos conceptos son equivalentes. Aún así conviene hacer notar que en futuros cursos se notará el campo magnético como \vec{H} , mientras que \vec{B} será la inducción magnética, y serán magnitudes distintas.

2. Fuerza de Lorentz

Supongamos una carga q en una región del espacio donde existe un campo magnético \vec{B} y un campo eléctrico \vec{E} . Si esta carga se mueve con una velocidad \vec{v} , la fuerza que sufrirá será:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

donde el símbolo “ \times ” colocado entre dos vectores indica el producto vectorial. Esta expresión se conoce como *Ley de Fuerzas de Lorentz*. La primera parte corresponde a la fuerza eléctrica y se obtiene de la ley de fuerzas de Coulomb y la definición de campo eléctrico, tal y como se vio en la Sección 4 del Tema 4, mientras que la segunda parte es la fuerza de origen magnético, cuyo origen estudiaremos un poco más en profundidad en las siguientes secciones.

Si nos centramos únicamente en la fuerza magnética, ésta es:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Imaginemos una carga entrando en una región con campo uniforme \vec{B} , que lleva la dirección del eje z , es decir $\vec{B} = B\hat{k}$. Ahora supongamos que la carga q entra en esta región con una velocidad $\vec{v} = v\hat{i}$. En el instante que entra en la región comienza a sufrir la fuerza magnética, que en este caso será:

$$\vec{F}_m = qvB(\hat{i} \times \hat{k}) = -qvB\hat{j}$$

Esta fuerza hará que aparezca una aceleración en la dirección del eje y , por lo que aparecerá una componente y en la velocidad, haciendo que la carga varíe de dirección, lo que provocará que la fuerza y la aceleración varíen su dirección. El resultado será que la partícula, en el momento que entre en la región con campo magnético comenzará a realizar un movimiento circular con

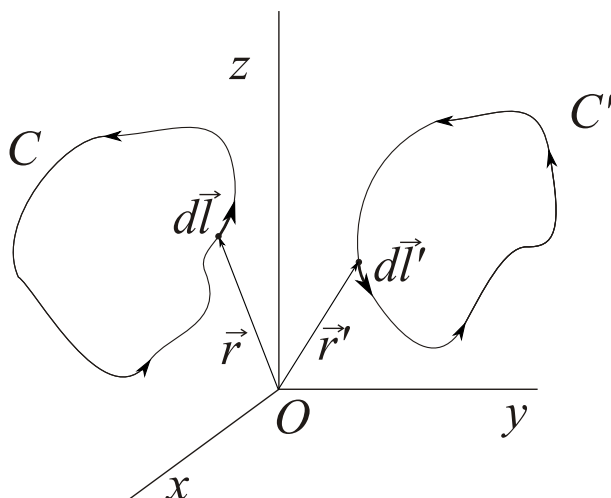


Figura 1: Dos circuitos cerrados por los que circulan corrientes en el sentido de las flechas

velocidad constante, donde el radio dependerá de la carga, la masa, el campo y la velocidad inicial con la que entra en la región.

Este movimiento circular es característico de la situación en la que el campo magnético es perpendicular a la velocidad ($\vec{B} \perp \vec{v}$).

3. Fuerza magnética entre corrientes

Aunque inicialmente hemos introducido la fuerza que sufre una carga en un campo magnético en (1), ésta no es la ley original que se obtuvo en el laboratorio. La ley que se obtuvo experimentalmente resultó del estudio de las fuerzas que se ejercen entre corrientes estacionarias en circuitos cerrados. Esta es la ley experimental porque en el laboratorio es relativamente fácil construir circuitos cerrados con corrientes estacionarias circulando a lo largo de éstos, y luego medir la fuerza que se generan entre estos circuitos en función de las distintas variables del problema.

Supongamos dos circuitos lineales cerrados C y C' , tal y como aparecen en la Figura 1, por los que circulan una intensidad I e I' , respectivamente. Del tema anterior sabemos que para que eso suceda deben existir generadores (fuentes de campo eléctrico no conservativo) que sostenga la corriente, pero en el dibujo los hemos omitidos. Un “trozo” del circuito C será $d\vec{l}$, que también se ha dibujado en la Figura 1, lo mismo que un “trozo” del circuito C' , $d\vec{l}'$. En este caso, la fuerza que el circuito C' ejerce sobre el circuito C , $\vec{F}_{C' \rightarrow C}$, resulta:

$$\vec{F}_{C' \rightarrow C} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C I d\vec{l} \times \int_{C'} \frac{I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2)$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío y toma el valor $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ (es un valor sin error).

Esta expresión se conoce como *Ley de Ampere*, y es una ley experimental, de igual forma que lo fue la Ley de Coulomb en electrostática (ecuación (1) del Tema 4).

Ejemplo. Dos hilos paralelos con intensidades en el mismo sentido. Supongamos que los dos hilos son rectos, infinitos y con dirección \hat{k} . El hilo que corresponde a C se coloca en

el eje z y el que corresponde a C' a una distancia D sobre el eje x , tal y como se muestra en la Figura 2(a). En este caso $d\vec{l} = dz\hat{k}$ y $d\vec{l}' = dz'\hat{k}$, $\vec{r} = z\hat{k}$ y $\vec{r}' = D\hat{i} + z'\hat{k}$. La resta de los vectores de posición de los “trozos” será $\vec{r} - \vec{r}' = (z - z')\hat{k} - D\hat{i}$, por lo que su módulo será $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(z - z')^2 + D^2}$.

Para sustituir en la ecuación (2), observamos que el producto $d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = -Ddz'\hat{j}$, con lo que la ecuación (2) queda:

$$\vec{F}_{C' \rightarrow C} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C I d\vec{l} \times \int_{C'} \frac{-I' D dz' \hat{j}}{((z - z')^2 + D^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 D I I'}{4\pi} \int_C d\vec{l} \times (-\hat{j}) \int_{C'} \frac{dz'}{((z - z')^2 + D^2)^{3/2}}$$

Pero el producto $d\vec{l} \times (-\hat{j}) = dz\hat{i}$, con lo que la fuerza queda:

$$\vec{F}_{C' \rightarrow C} = \frac{\mu_0 D I I'}{4\pi} \hat{i} \int_C dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{((z - z')^2 + D^2)^{3/2}}$$

Como ya vimos en la Sección 4.2.1 del Tema 4, en las tablas de integrales se obtiene:

$$\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 + u^2}}$$

Teniendo en cuenta que en el circuito C' , la coordenada z' de sus trozos toma valores de $-\infty$ a ∞ , se puede realizar la primera de las integrales y se obtiene:

$$\vec{F}_{C' \rightarrow C} = \frac{\mu_0 D I I'}{4\pi} \hat{i} \int_C dz \frac{2}{D^2} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi D} \hat{i} \int_C dz \quad (3)$$

La integral que falta resulta ser infinita, lo que implica que la fuerza que se ejerce entre dos hilos infinitos es infinita (como era de esperar). Se puede obtener la fuerza que sufre un trozo del hilo C de longitud L , para lo que sólo se integraría en la ecuación (3) en un trozo de longitud L . Al hacer esto, el resultado es la fuerza que el hilo C' ejerce sobre el trozo L del hilo C , que llamaremos \vec{F}_L y resulta:

$$\vec{F}_L = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I I' L}{D} \hat{i}$$

La fuerza por unidad de longitud que sufre el hilo C debido al hilo infinito C' puede definirse como:

$$\frac{\vec{F}_L}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I I'}{D} \hat{i}$$

Como puede verse, la fuerza entre los dos hilos es atractiva y perpendicular a los dos hilos (a diferencia de lo que ocurría con cargas en electrostática). Esta expresión se utiliza para definir la unidad amperio en función de unidades utilizadas en mecánica, como fuerza o distancia.

Si las corrientes no llevan el mismo sentido, sino sentidos contrarios, el planteamiento de las ecuaciones sería el mismo, pero cambiarían los límites de una de las integrales, lo que supone un cambio de signo. En este caso la fuerza por unidad de longitud llevaría dirección $-\hat{i}$, lo que implica que es repulsiva.

Para terminar se podría haber calculado la fuerza que el circuito C ejerce sobre el circuito C' , lo que es fácil de realizar cambiando los papeles de dz y dz' , I e I' y \vec{r} y \vec{r}' . El resultado del proceso es una fuerza del mismo módulo, misma dirección y sentido contrario, obteniendo $\vec{F}_{C \rightarrow C'} = -\vec{F}_{C' \rightarrow C}$, como era de esperar según la tercera ley de Newton.

Ejemplo. Dos hilos perpendiculares separados una distancia D . Supongamos que los dos hilos son rectos, infinitos, el hilo C coincidiendo con el eje x y el hilo C' paralelo al eje y y a una distancia D por encima de éste, tal y como se indica en la Figura 2(b). La corriente

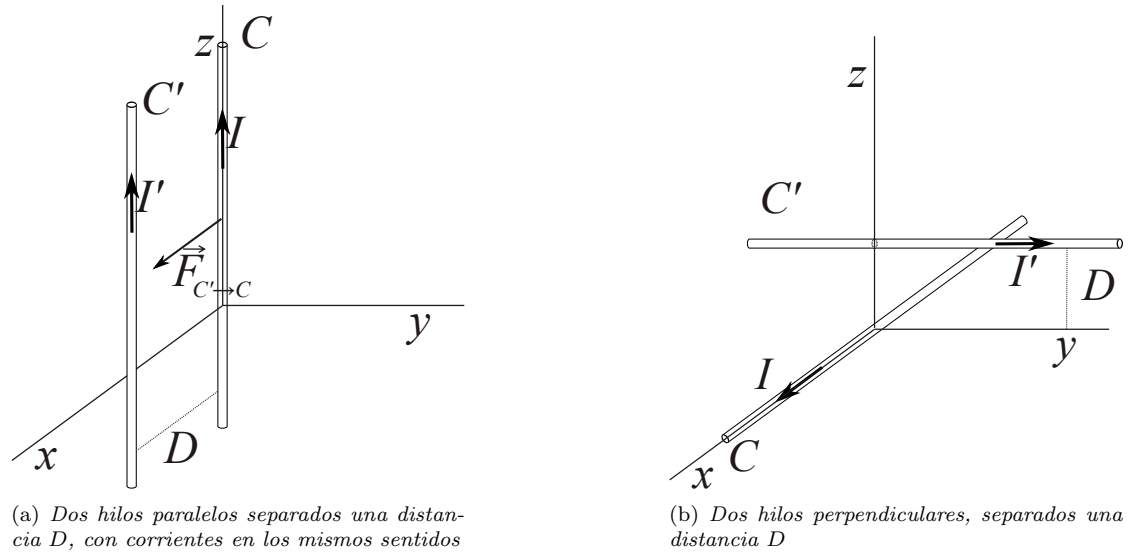


Figura 2:

I en el sentido positivo del eje x y la corriente I' en el sentido positivo del eje y . En este caso $d\vec{l} = dx\hat{i}$ y $d\vec{l}' = dy'\hat{j}$, $\vec{r} = x\hat{i}$ y $\vec{r}' = y'\hat{j} + D\hat{k}$. La resta de los vectores de posición de los "trozos" será $\vec{r} - \vec{r}' = x\hat{i} - y'\hat{j} - D\hat{k}$, por lo que su módulo será $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y'^2 + D^2}$.

Para sustituir en la ecuación (2), observamos que el producto $d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = -Ddy'\hat{i} - xdy'\hat{k}$, con lo que la ecuación (2) queda:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{C' \rightarrow C} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C I d\vec{l} \times \int_{C'} \frac{-I' D dy' \hat{i} - I' x dy' \hat{k}}{(x^2 + y'^2 + D^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{\mu_0 II'}{4\pi} \int_C I d\vec{l} \times (D\hat{i} + x\hat{k}) \int_{C'} \frac{dy'}{(x^2 + y'^2 + D^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

El producto $d\vec{l} \times (D\hat{i} + x\hat{k}) = -x dx \hat{j}$, con lo que la fuerza queda:

$$\vec{F}_{C' \rightarrow C} = \frac{\mu_0 II'}{4\pi} \hat{j} \int_C x dx \int_{C'} \frac{dy'}{(x^2 + y'^2 + D^2)^{3/2}}$$

La integral interior la acabamos de hacer en el anterior ejemplo, con los mismos límites de integración desde $-\infty$ hasta ∞ , y el resultado es:

$$\int_{C'} \frac{dy'}{(x^2 + y'^2 + D^2)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(x^2 + y'^2 + D^2)^{3/2}} = \frac{2}{x^2 + D^2}$$

Con esta integral se tiene:

$$\vec{F}_{C' \rightarrow C} = \frac{\mu_0 II'}{4\pi} \hat{j} \int_C \frac{2x dx}{x^2 + D^2} = \frac{\mu_0 II'}{4\pi} \hat{j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2 + D^2} = \vec{0}$$

Pero la integral que queda por hacer es la integral de una función impar en un intervalo par, por lo que resulta nula, lo que implica que la fuerza que se ejerce entre dos corrientes perpendiculares es nula.

4. Campo magnetostático

En la sección de campo electrostático la fuerza que una carga o un sistema ejerce sobre otra carga la descompusimos como el producto de dos partes: una que sólo depende de la carga o el sistema que ejerce la fuerza, que llamamos campo, por otra parte que sólo depende de la carga que sufre el campo, que era la carga. A continuación realizaremos una separación similar.

Si observamos la estructura de la expresión (2), se puede apreciar que es posible separar la contribución de los dos circuitos definiendo la inducción magnética o campo magnético como:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4)$$

Se puede apreciar cómo el campo magnético definido así sólo depende del vector \vec{r} , que corresponde al punto campo, ya que no depende del vector \vec{r}' al haberse integrado.

Con la definición (4) de campo magnético la ecuación (2) queda:

$$\vec{F}_{C' \rightarrow C} = \int_C I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (5)$$

Por lo tanto, para cualquier corriente se puede estudiar el campo magnético que produce en cualquier parte del espacio mediante (4), y si se quiere saber la fuerza que ejerce sobre otra corriente no hay más que tomar el campo calculado anteriormente y realizar la integral (5).

4.1. Campo producido por una corriente lineal recta infinita

Como primer ejemplo vamos a calcular el campo magnético que crea un hilo recto infinito en cualquier punto del espacio. El esquema se presenta en la Figura 3, donde se ha colocado el hilo infinito coincidiendo con el eje z . Para calcular el campo magnético hay que identificar las distintas partes que aparecen en la expresión (4), de forma similar a como hicimos para calcular campos electrostáticos.

En este caso hay que identificar $d\vec{l}'$, \vec{r} y \vec{r}' , que aparecen indicados en el dibujo. El vector \vec{r} corresponde con un punto genérico del espacio, por lo que se tendrá $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. El vector \vec{r}' es el vector de posición de un “trozo” del hilo, por lo que $\vec{r}' = z'\hat{k}$, lo que produce $\vec{r} - \vec{r}' = x\hat{i} + y\hat{j} + (z - z')\hat{k}$ y $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}$. Por último, falta obtener el valor de $d\vec{l}'$ que es un vector que tiene como módulo la longitud del trozo del hilo que estamos considerando y como dirección y sentido los de la corriente. Es fácil ver del dibujo que $d\vec{l}' = dz'\hat{k}$. Sustituyendo en la expresión (4) se tiene:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{I' dz' \hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + (z - z')\hat{k})}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

El producto vectorial resulta $\hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + (z - z')\hat{k}) = x\hat{j} - y\hat{i}$, lo que es constante y puede salir de la integral. Si además se tiene en cuenta los límites de la integral, el campo queda:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} (x\hat{j} - y\hat{i}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

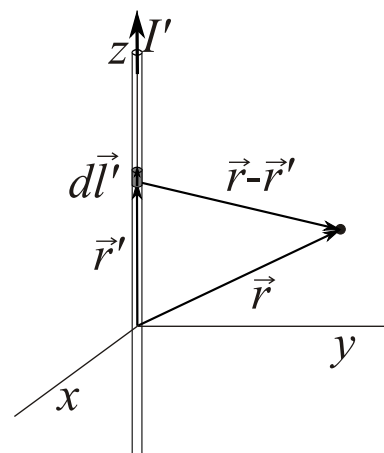


Figura 3: Esquema de vectores para un hilo recto infinito

La integral ya la hemos hecho varias veces y resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

con lo que se obtiene:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I'}{2\pi} \frac{x\hat{j} - y\hat{i}}{x^2 + y^2}$$

que es el campo que se ejerce en cualquier punto del espacio.

Del Tema 4 sabemos que la distancia de un punto al hilo, cuando éste coincide con el eje z , es $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, lo que se puede utilizar para simplificar la anterior expresión:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I'}{2\pi\rho} \frac{x\hat{j} - y\hat{i}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Es fácil ver que el vector $\frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ tiene módulo unidad por lo que es un versor. Igual que al versor $\frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ se le llamó $\hat{\rho}$, a este versor se le denomina $\hat{\phi}$. En la Figura 4(a) se representa este versor $\hat{\phi}$, junto con los versores $\hat{\rho}$ y \hat{k} , mientras que en la Figura 4(b) se observa cómo el versor $\hat{\phi}$ es tangente a una circunferencia centrada en el hilo y que pasa por el punto. En la Figura 4(c) se presenta una vista desde arriba de los versores $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$. Es fácil ver que los tres versores $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ y \hat{k} son perpendiculares, de unos puntos a otros el versor \hat{k} permanece constante y que los versores $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ varían en general en función del punto.

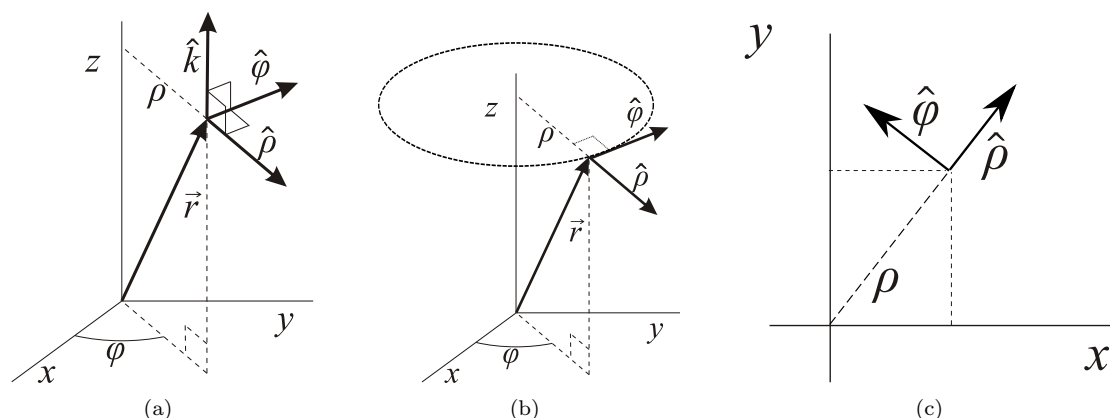


Figura 4: Esquema de los versores $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ en un punto \vec{r} en tres dimensiones (a) y (b), y en el plano paralelo al plano xy que contiene al punto

Con el versor $\hat{\phi}$, el campo que crea una corriente recta lineal infinita queda:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I'}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (6)$$

Como puede verse el campo magnético que crea un hilo infinito es inversamente proporcional a la distancia entre el punto y el hilo (que es ρ) y en todo punto lleva la dirección de $\hat{\phi}$, es decir, dirección tangente a una circunferencia centrada en el hilo y que pasa por el punto. El sentido es el mismo que el versor $\hat{\phi}$ si la corriente lleva el mismo sentido \hat{k} y contrario a $\hat{\phi}$ si la corriente

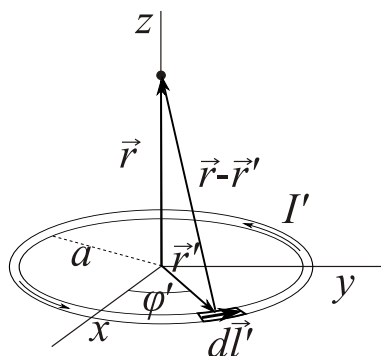


Figura 5: Esquema de sectores para una corriente lineal circular

lleva sentido contrario a \hat{k} . El sentido se puede determinar por la regla de la mano derecha, de forma de que si con los dedos de la mano derecha se realiza un giro siguiendo el campo, el pulgar debe apuntar en el sentido de la corriente.

Se puede observar la similitud con el campo eléctrico que crea un hilo infinito cargado, que se estudió en la Sección 4.2.1 del Tema 4, ya que el valor numérico de ese campo también es inversamente proporcional al radio. Sin embargo, es importante notar que el campo eléctrico \vec{E} llevaba la dirección del versor $\hat{\rho}$, por lo que es perpendicular al campo magnético \vec{B} que acabamos de obtener.

Una vez que conocemos el campo \vec{B} que crea un hilo recto es fácil calcular la fuerza entre hilos rectos utilizando (5) y (6).

Ejemplo. Dos hilos paralelos con intensidades en el mismo sentido. En este caso recordar que teníamos el hilo C coincidiendo con el eje z y el hilo C' a una distancia D sobre el eje x , paralelo al anterior, ambos con corrientes en la dirección \hat{k} . Estamos interesados en la fuerza que el hilo C' ejerce sobre C , por lo tanto tenemos que conocer el campo que crea el hilo C' . Como se ha visto anteriormente, el campo \vec{B} que crea C' en cualquier punto es inversamente proporcional a la distancia del punto al eje y lleva la dirección tangente a una circunferencia perpendicular al hilo C' , centrada en éste y que contenga al punto. Por tanto el campo que el hilo C' crea en cualquier punto del hilo C es:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I'}{2\pi D} \hat{j}$$

ya que todos los puntos del hilo C se encuentran a una distancia D del hilo C' y para todos los puntos de C , el versor $\hat{\phi}$ que ve el hilo C' es el versor \hat{j} .

Para calcular la fuerza no hay más que sustituir $\vec{B}(\vec{r})$ en (5) e integrar. Para ello lo primero es realizar el producto $-\vec{dl} \times \hat{j}$, con $\vec{dl} = dz\hat{k}$, lo que resulta $-\vec{dl} \times \hat{j} = dz\hat{i}$, con lo que la expresión (5) queda:

$$F_{C' \rightarrow C} = \frac{\mu_0 I'}{2\pi D} \hat{i} \int dz$$

que es la misma expresión (3) que se obtuvo calculando la fuerza directamente.

4.2. Campo producido por un anillo

A continuación calcularemos el campo magnético creado por una corriente circular en cualquier punto de su eje. Para ello nos fijamos en la Figura 5, donde se señalan los elementos \vec{r} , \vec{r}' y $d\vec{l}'$. En concreto puede verse cómo $\vec{r} = z\hat{k}$, $\vec{r}' = a\hat{\rho}'$ y $d\vec{l}' = ad\varphi'\hat{\phi}'$. Esto implica que

$\vec{r} - \vec{r}' = -a\hat{\rho}' + z\hat{k}$, mientras que el módulo queda (teniendo en cuenta que \hat{k} y $\hat{\rho}'$ son versores perpendiculares) $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}$. Si estos valores se sustituyen en la expresión (4) se obtiene:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 a I'}{4\pi} \int_{C'} d\varphi' \hat{\varphi}' \times \frac{(-a\hat{\rho}' + z\hat{k})}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Tanto a como z son constantes al movernos en φ' , por lo que pueden salir de la integral y tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 a I'}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_{C'} d\varphi' \hat{\varphi}' \times (-a\hat{\rho}' + z\hat{k}) \\ &= \frac{\mu_0 a I'}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \left(-a \int_{C'} d\varphi' \hat{\varphi}' \times \hat{\rho}' + z \int_{C'} d\varphi' \hat{\varphi}' \times \hat{k} \right) \end{aligned}$$

De la Figura 4(a) puede verse como $\varphi' \times \rho' = -\hat{k}$ y $\hat{\varphi}' \times \hat{k} = \hat{\rho}'$, con lo que el campo queda:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 a I'}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \left(a\hat{k} \int_{C'} d\varphi' + z \int_{C'} d\varphi' \hat{\rho}' \right) \quad (7)$$

donde se ha tenido en cuenta que \hat{k} es constante, y por tanto puede salir de la integral. De esta forma, la primera integral de (7) queda:

$$\int_{C'} d\varphi' = 2\pi$$

Sin embargo, $\hat{\rho}$ no es constante sino que varía de dirección al variar φ' , por lo que no puede salir de la segunda integral de (7). Para hacer esta segunda integral hay que expresar $\hat{\rho}'$ en función de φ' , lo que se puede obtener de la Figura 4(c). Teniendo en cuenta que $\hat{\rho}'$ tiene módulo unidad, se obtiene:

$$\hat{\rho}' = \cos(\varphi')\hat{i} + \sin(\varphi')\hat{j}$$

La segunda integral de (7) quedaría:

$$\int_{C'} d\varphi' \hat{\rho}' = \hat{i} \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos(\varphi') + \hat{j} \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin(\varphi') = \vec{0}$$

Esta integral es idéntica a la que se realizó en varios ejemplos del Tema 4, como se puede ver en las ecuaciones (14) y (16) de ese tema. Con la anterior integral, el campo magnético que crea una corriente lineal circular en cualquier punto de su eje resulta:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{a^2 \mu_0 I'}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

4.3. Campo magnético para corrientes volúmicas y superficiales

La expresión (4) se obtuvo a partir de la Ley de Ampere (2) para corrientes lineales, pero también se podría haber extendido de forma sencilla para tratar con corrientes volúmicas y superficiales. Para hacer esto no hay más que utilizar la relación que existe entre el vector densidad de corriente y la intensidad, en el caso de corrientes volúmicas y superficiales, que se estudió en la Sección 2 del Tema 5.

Teniendo esto en cuenta, el campo magnético que crea una corriente volúmica sería:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}_v(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (8)$$

donde \vec{j}_v es el vector densidad volúmica de corriente. El vector \vec{r}' recorre todos los puntos donde existe corriente, lo que ocurre en un volumen V' . En la expresión (8) se ha especificado que la densidad de corriente \vec{j}_v puede variar de unos puntos.

Para una corriente superficial, la expresión será similar y quedaría:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{j}_s(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS' \quad (9)$$

En este caso la integral es a lo largo de la superficie S' donde exista corriente.

5. Ley de Gauss para el campo magnético

En el campo electrostático las cargas positivas son puntos donde el campo electrostático sale en todas direcciones, mientras que las cargas negativas son puntos donde el campo entra desde todas las direcciones. Así el flujo a través de superficies cerradas podía ser distinto de cero si dentro de la superficie existen cargas, lo que se recogía en el Ley de Gauss. En el caso del campo magnético, debido a la forma de (4), no existen puntos donde el campo entra o sale desde todas las direcciones, por lo que no existen cargas magnéticas análogas a las cargas eléctricas que vimos en electrostática. La Ley de Gauss también se puede aplicar al campo magnético, ya que tiene la misma dependencia con el cuadrado de la distancia que el campo eléctrico, pero al no existir las cargas magnéticas, el flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo. Así, la Ley de Gauss para el campo magnético queda:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

La Ley de Gauss se cumple para cualquier superficie cerrada, lo que significa que el mismo campo que entra por una parte de una superficie cerrada sale por otra parte, produciendo un flujo nulo. De esta forma las líneas de campo, que se construyen de forma que el campo sea tangente a ellas en cada punto, son **cerradas** (no existen monopolos magnéticos).

6. Teorema de Ampere

Como se ha visto, la Ley de Gauss para campo magnético no se puede utilizar para cálculo, ya que el flujo magnético será siempre nulo. Para calcular el campo en situaciones con suficiente simetría se utiliza otro teorema que presentaremos a continuación, que se denomina *Teorema de Ampere*.

Al igual que una superficie cerrada define un volumen, una trayectoria cerrada puede definir una superficie cuyo borde sea dicha trayectoria. La diferencia radica en que se pueden construir infinitas superficies cuyo borde sea la trayectoria cerrada. Teniendo esto en cuenta, el Teorema de Ampere queda:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_S \quad (10)$$

donde C es la trayectoria cerrada e I_S es la intensidad que atraviesa cualquier superficie S cuyo contorno sea C .

La demostración de este Teorema está fuera de los objetivos de este curso, aunque se esquematizará una demostración en el último de los temas del curso dedicado a las ecuaciones de Maxwell.

Al igual que sucedió con la Ley de Gauss en el campo electrostático, el Teorema de Ampere se podrá utilizar en situaciones con suficiente simetría, en los que se podrá construir una trayectoria

donde la circulación del lado izquierdo de (10) sea fácil de realizar. En las siguientes secciones se pasará a estudiar las situaciones concretas donde el teorema se puede utilizar para calcular el campo.

6.1. Simetría cilíndrica

En el Tema 4 se estudiaron los sistemas con simetría cilíndrica, que eran aquéllos que no presentaban variación salvo al acercarse o alejarse al eje de simetría. En el caso de una corriente con simetría cilíndrica serán hilos o cilindros (huecos o macizos) por los que circula corriente en dirección paralela al eje de simetría. En la Figura 6 se presenta el esquema de un sistema con simetría cilíndrica, concretamente un cilindro infinito por donde circula corriente paralela a su eje, pero las consecuencias se pueden extender a cualquier otra corriente con simetría cilíndrica.

Para poder aplicar el Teorema de Ampere hay que ser capaz de identificar un tipo de trayectoria a lo largo de la cual sea fácil calcular la circulación de \vec{B} . Para ello es necesario identificar de qué depende el valor numérico del campo y cuál será su dirección. Esto es similar a lo que se realizó en el campo electrostático para poder identificar una superficie cerrada donde fuera sencillo calcular el flujo y así poder utilizar la Ley de Gauss para obtener \vec{E} .

Al ser un sistema con simetría cilíndrica, el valor numérico del campo magnético sólo puede depender de la distancia al eje de simetría del problema. Como esta distancia se expresa como ρ , esto implica $B = B(\rho)$.

Para poder determinar la dirección de \vec{B} hay que tomar un “pequeño” elemento de corriente, obtener la dirección del pequeño campo que crea ese elemento, y luego tomar otro elemento de corriente perteneciente al cilindro, simétrico respecto al punto, calcular el pequeño campo que crea este otro elemento y sumar las contribuciones. Este es el mismo proceso que se seguía para obtener la dirección del campo electrostático en distintas simetrías en el Tema 4, pero en este caso, debido a la presencia del producto vectorial va a ser algo más complicado obtener la dirección.

Tomamos un elemento de corriente cualquiera $dV'\vec{j}_v$. La dirección de la corriente es constante, por lo que cualquier elemento de corriente tendrá dirección \hat{k} , como puede apreciarse en la Figura 7(a). Este elemento de corriente producirá un pequeño campo en el punto \vec{r} :

$$d\vec{B} = dV'\vec{j}_v \times (\vec{r} - \vec{r}')$$

Un vector \vec{c} que sea el producto vectorial de otros vectores, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, es perpendicular al vector \vec{a} y al vector \vec{b} . Por tanto el pequeño campo $d\vec{B}$ será perpendicular a $dV'\vec{j}_v$ y por tanto a \hat{k} . Esto quiere decir que $d\vec{B}$ estará contenido en el plano paralelo al plano xy y que pasa por el punto donde queremos calcular el campo, el cual está representado en los dos esquemas de la Figura 7.

En la Figura 7(a) se toma un elemento de corriente también en el plano mencionado anteriormente y se dibuja el campo $d\vec{B}$ que produce (que también estará en el plano). Posteriormente se toma otro elemento de corriente simétrico respecto del punto, tal y como aparece en la Figura 7(a) y se dibuja el campo $d\vec{B}$ que produce. La suma de los campos de estos dos elementos de corrientes produce un campo que lleva la dirección $\hat{\phi}$.

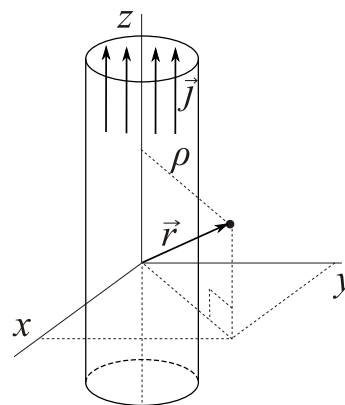


Figura 6: Vista general de una corriente con simetría cilíndrica

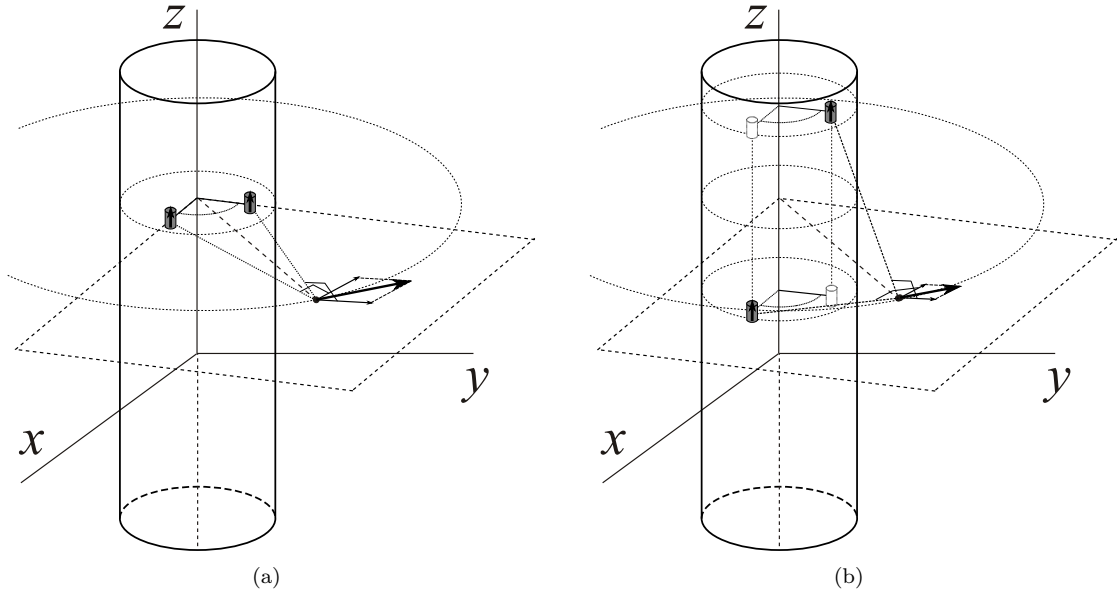


Figura 7: Elementos de corriente y campo magnético que éstas producen en \vec{r}

En la Figura 7(b) se esquematiza una situación parecida, pero esta vez los elementos pueden estar en cualquier punto. Los elementos de corrientes son simétricos respecto del punto, también crearán campos $d\vec{B}$ en el plano dibujado anteriormente, y la suma de las dos contribuciones también resulta en un campo en la dirección $\hat{\varphi}$.

Como para cada elemento de corriente se puede encontrar otro simétrico, la suma total también llevará dirección $\hat{\varphi}$. El sentido es el dado por la regla de la mano derecha. Teniendo esto en cuenta, el campo que crea un sistema con simetría cilíndrica es:

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\hat{\varphi}$$

Esta forma del campo se puede utilizar para construir la trayectoria cerrada con que aplicar el Teorema de Ampere para calcular \vec{B} en un determinado punto \vec{r} . En concreto la trayectoria elegida será una circunferencia en un plano perpendicular al eje del cilindro y centrada en dicho eje. Para esta trayectoria es fácil ver que $d\vec{r} = \rho d\varphi \hat{\varphi}$, por lo que el producto $\vec{B} \cdot d\vec{r}$ queda:

$$\vec{B} \cdot d\vec{r} = B(\rho)\rho d\varphi$$

y la circulación de (10) queda:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} B(\rho)\rho d\varphi = B(\rho)\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\rho B(\rho)$$

Así el Teorema de Ampere para una corriente con simetría cilíndrica queda:

$$2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 I_S \quad (11)$$

Se puede obtener el valor numérico $B(\rho)$ sin más que estudiar en cada situación cuál es la corriente que atraviesa cualquier superficie que tenga como borde la trayectoria cerrada, y despejar de (11).

Ejemplo. Campo que crea un hilo recto indefinido por el que circula un corriente I' . Es fácil ver que este problema tiene simetría cilíndrica por lo que el Teorema de Ampere aplicado a una trayectoria que consista en una circunferencia de radio ρ , en un plano perpendicular al hilo y centrada en éste tomará la forma (11). Como hemos dicho antes, para poder obtener el valor numérico del campo no hay más que calcular la intensidad que atraviesa cualquier superficie que tenga como borde la circunferencia que vamos a utilizar como trayectoria, por ejemplo una superficie circular. Es fácil ver que la intensidad a través del círculo es I' , con lo que el valor numérico del campo se obtiene despejando de (11):

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 I'}{2\pi\rho}$$

Y teniendo en cuenta la dirección del campo en problemas con simetría cilíndrica, éste queda finalmente:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I'}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

que es la misma expresión que se obtuvo en la Sección 4.1 mediante integración directa.

Ejemplo. Cilindro de radio a infinito con una corriente I' distribuida uniformemente y con una dirección de la corriente paralela al eje. Este problema también tiene simetría cilíndrica, por lo que si se toma como trayectoria una circunferencia centrada en el eje del cilindro y en un plano perpendicular al eje del cilindro, el Teorema de Ampere queda como (11). Falta por determinar la corriente que atraviesa una superficie definida por la trayectoria. Como superficie se toma el círculo cuyo borde es la circunferencia. La intensidad que atraviesa la superficie dependerá de si la circunferencia es interior o exterior al anillo.

En el caso de que la circunferencia que se toma como trayectoria tenga un radio ρ mayor que el del cilindro ($\rho > a$), la corriente que atraviesa el círculo definido por la trayectoria es toda la intensidad I' . Despejando de (11) se obtiene el valor numérico del campo para puntos \vec{r} que cumplen $\rho > a$, que resulta:

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 I'}{2\pi\rho}$$

Puede verse que éste sería el mismo valor que tendría el campo producido por un corriente lineal infinita de intensidad igual a la intensidad total que circula por el cilindro.

Sin embargo, si el radio ρ es menor que el radio del cilindro ($\rho < a$), no toda la intensidad I' atraviesa el círculo definido por la trayectoria. Para calcular esta I_S hay que tener en cuenta la relación entre densidad de corriente volumétrica e intensidad, que se estudió en el Tema 5 y resultó ser:

$$I = \int_S \vec{j}_v \cdot d\vec{S}$$

Como la corriente se distribuye uniformemente, esto implica que \vec{j}_v es constante, por lo que para cualquier superficie perpendicular a la corriente (es decir a \vec{j}_v) se tiene:

$$I = j_v S \Rightarrow j_v = \frac{I'}{S} = \frac{I'}{\pi a^2}$$

Es decir, al ser la corriente uniforme, la densidad de corriente es un vector constante, de dirección la del eje del cilindro y módulo la intensidad total I' dividida por el área transversal del cilindro. Así, la intensidad que atraviesa por un círculo dentro del cilindro con radio $\rho < a$ será:

$$I_S = j_v \pi \rho^2 = I' \frac{\rho^2}{a^2}$$

Una vez obtenida I_S no hay más que despejar de (11) y se obtiene el valor numérico del campo magnético para puntos que cumplan $\rho < a$:

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 I' \rho}{2\pi a^2}$$

Uniendo las dos situaciones, se tiene que el campo \vec{B} que crea la corriente cilíndrica uniforme es:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I' \rho}{2\pi a^2} \hat{\phi} & \text{para } \rho < a \\ \frac{\mu_0 I'}{2\pi \rho} \hat{\phi} & \text{para } \rho \geq a \end{cases}$$

6.2. Simetría plana

Al igual que en el Tema 4, un sistema con simetría plana es aquél que no varía salvo cuando nos acercamos o alejamos del plano de simetría. En este caso la corriente tendría que distribuirse uniformemente y simétrica respecto de este plano. Un ejemplo, que es el que se presenta en la Figura 8, es el de una corriente superficial distribuida uniformemente a lo largo de un plano. En la figura se ha hecho coincidir el plano con el plano xy y la dirección de la corriente con el eje y , de forma que el vector densidad de corriente es un vector constante que lleva la dirección \hat{j} . Otro ejemplo de simetría plana sería una plancha plana indefinida, limitada por dos planos paralelos y con una distribución uniforme de carga en una dirección paralela a los planos a lo largo de todo el volumen de la plancha. Se pueden construir otras muchas situaciones que tengan simetría plana y para todas ellas van ser válidas las conclusiones que se van a obtener a continuación.

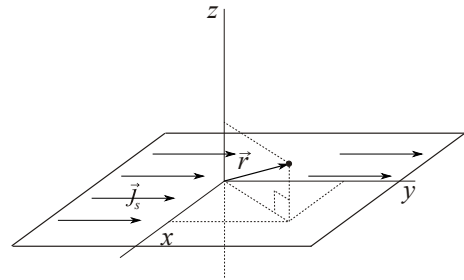


Figura 8: Vista general de una corriente con simetría plana

La corriente provocará un campo en un punto \vec{r} cuyo módulo sólo dependerá de la distancia al plano, lo que viene caracterizado por el valor absoluto de la coordenada z del punto.

Para obtener la dirección hay que proceder de la misma forma que antes, tomar un elemento de corriente y obtener la dirección del campo $d\vec{B}$ que produce, posteriormente tomar otro trozo simétrico respecto al punto con el anterior, calcular el campo $d\vec{B}$ que produce y ver que dirección toma el campo resultante. En este caso, cualquier elemento de corriente que elijamos $dS'\vec{j}_s$ llevan dirección \hat{j} , por lo que el campo que producirá $d\vec{B} = dS'\vec{j}_s \times (\vec{r} - \vec{r}')$ estará contenido en un plano paralelo al plano xz y que pasa por el punto \vec{r} donde queremos calcular el campo. Este plano aparece esquematizado en la Figura 9, donde también aparecen resaltados dos de los anteriormente mencionados elementos de corriente. Puede verse cómo la suma de los campos que producen los dos elementos de corrientes que se han tomado producen un campo en la dirección \hat{i} .

De esta forma se obtiene:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \pm B(|z|)\hat{i}$$

El símbolo “ \pm ” indica que por encima del plano el campo tendrá sentido \hat{i} y por debajo del plano sentido $-\hat{i}$.

La dirección del campo \vec{B} también se podría haber obtenido si se considera el plano con la corriente superficial a lo largo del plano como la superposición de hilos de corrientes muy juntos. En los casos de las figuras 8-9, los hilos se encontrarían en el plano xy con direcciones paralelas

al eje x . Como ya se ha estudiado la dirección del campo \vec{B} que produce un hilo, es fácil ver cuál sería la dirección de una suma o colección de hilos paralelos y obtener así la dirección del campo que crea el plano.

Una vez determinada la dependencia y la dirección del campo, el siguiente paso es construir una trayectoria cerrada que permita el uso del Teorema de Ampere para el cálculo del campo en un punto \vec{r} . Esta trayectoria es un camino rectangular, donde dos de sus lados tienen dirección \hat{i} y tamaño D y otros dos dirección \hat{k} y tamaño $2|z|$, tal y como se muestra en la Figura 10, donde la corriente estaría entrando en el plano del dibujo a lo largo del eje x . Como puede verse en esta figura el camino es simétrico respecto del plano.

Para calcular la circulación de $\vec{B}(\vec{r})$ a lo largo de una superficie cerrada hay que sumar las contribuciones de los cuatro trozos, de forma que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{r}$$

En todo punto el campo magnético lleva dirección \hat{i} , mientras que en los trozos de 2 a 3 y de 4 a 1, los vectores desplazamiento $d\vec{r}$ se expresan como $dz\hat{k}$, por lo que el producto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{r}$ será nulo en estos trozos. Por otro lado, tanto en el trozo de 1 a 2 como en el trozo de 3 a 4 el vector $d\vec{r}$ se expresa como $dx\hat{i}$, mientras que el sentido de campo \vec{B} es el mismo que \hat{i} en el trozo de 1 a 2 ($\vec{B} = B\hat{i}$ con B el módulo), mientras que lleva sentido contrario a \hat{i} en el trozo de 3 a 4

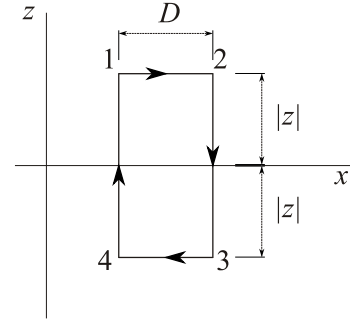


Figura 10: Trayectoria para una corriente con simetría plana

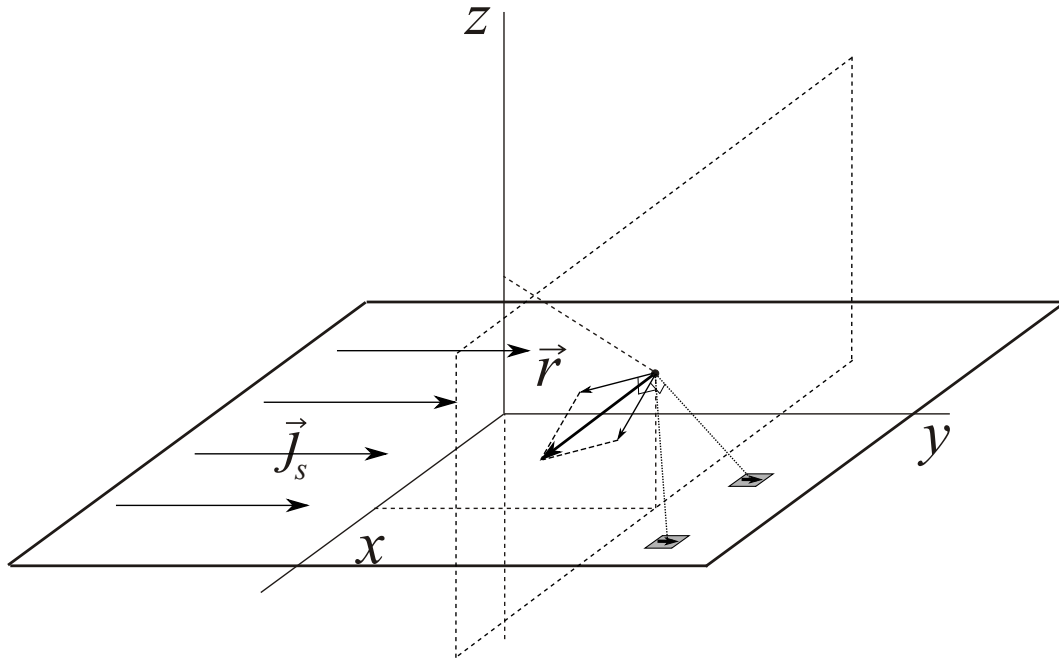


Figura 9: Dos elementos de corrientes simétricos respecto del punto y los campos que producen

($\vec{B} = -B\hat{i}$ con B el módulo). Así, la circulación queda:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 B(z)dx - \int_3^4 B(-z)dx$$

Antes hemos visto que el módulo del campo sólo depende de la distancia al plano y, tanto en el trozo de 1 a 2 como en el trozo de 3 a 4, todos los puntos se encuentran a la misma distancia del plano, por lo que B es constante y puede salir de la integral. Es más, la distancia de ambos trozos al plano será la misma, por lo que el módulo del campo B será el mismo. La circulación queda como:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(|z|) \left(\int_1^2 dx - \int_3^4 dx \right) = B(|z|) \left(\int_1^2 dx + \int_4^3 dx \right) = 2DB(|z|)$$

El Teorema de Ampere para problemas con simetría plana, tomando una trayectoria rectangular como la dibujada en la Figura 10, queda:

$$2DB(|z|) = \mu_0 I_S \quad (12)$$

donde I_S es la intensidad total que atraviesa la superficie rectangular definida por la trayectoria.

Ejemplo. Plano con corriente \vec{j}_s constante. Este es el caso que se esquematizó en la Figura 8, por lo que presenta simetría plana y se puede aplicar la forma particular del Teorema de Ampere (12) para una trayectoria como la que aparece en la Figura 10. Queda por determinar cuál sería la intensidad I_S que atraviesa la superficie rectangular definida por la trayectoria. Es fácil ver en la Figura 10 que la corriente sólo atraviesa los puntos del eje x que quedan dentro del rectángulo. Como esta línea tiene longitud D , si se tiene en cuenta la relación que se estudió en el Tema 5 entre la densidad superficial de corriente y la intensidad y el hecho de que la densidad superficial de corriente sea constante, se obtiene:

$$I_S = j_s D$$

Si esto se sustituye en (12) se obtiene el módulo del campo en cualquier punto:

$$B(|z|) = \frac{\mu_0 j_s}{2}$$

y finalmente el campo que crea una corriente plana uniforme con \vec{j}_s en la dirección y sentido de \hat{j} queda:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \pm \frac{\mu_0 j_s}{2} \hat{i}$$

donde, como ya se ha mencionado antes, el signo más es para puntos por encima del plano y el signo menos para puntos por debajo del plano.

Puede verse cómo, al igual que sucedía en problemas con simetría plana en electrostática en el Tema 4, al principio hemos supuesto que el campo podía depender de la distancia al plano, pero luego hemos obtenido que el campo va a ser de módulo constante independiente del punto donde se calcula.

6.3. Solenoide

Otra situación donde se puede aplicar el Teorema de Ampere para calcular el campo magnético es en un solenoide. Este sistema es una corriente lineal de intensidad I' que se enrolla a lo largo de un cilindro infinito, por lo que la corriente lineal tiene una forma helicoidal. Se supone que las distintas vueltas de la corriente lineal están muy juntas, de forma que el solenoide es

prácticamente como un conjunto de conductores circulares cerrados de corriente I' cada uno y colocados muy pegados a lo largo de un cilindro infinito. El esquema general de un solenoide se presenta en la Figura 11(a).

Como en los anteriores ejemplos para poder aplicar el Teorema de Ampere hay que identificar la dirección del campo \vec{B} y cómo la dependencia de su valor numérico. Puede verse que el problema tiene simetría esférica, por lo que el valor numérico sólo puede depender de la distancia al eje del cilindro, que en este caso es el eje y . Sin embargo, la dirección del campo \vec{B} en un punto no es tangente a una circunferencia perpendicular al eje, centrada en el eje y que pase por el punto, como sucedía en la corriente lineal infinita, sino que llevará la misma dirección que el eje del cilindro. El sentido será el dado por la regla de la mano derecha, donde los dedos llevan esta vez la dirección de la corriente, en puntos dentro del solenoide y contrario en puntos fuera del solenoide. Esto se esquematiza en la Figura 11(b), donde se presenta una vista lateral del solenoide. Se toma un elemento de corriente y se observa la dirección del “pequeño” campo que produce en un determinado punto. A continuación se toma otro elemento de corriente simétrico al anterior respecto del punto, y se observa el “pequeño” campo que produce. Al sumar las contribuciones, se observa que el resultado lleva la misma dirección del eje del cilindro, y el sentido señalado anteriormente. Es conveniente notar cómo los sentidos del campo dentro y fuera del solenoide son contrarios.

Las trayectorias a las que apliquemos el Teorema de Ampere serán rectángulos con dos lados paralelos al eje del cilindro y dos lados perpendiculares a éste. En la Figura 11(b) se presentan dos de estos caminos, uno dentro del solenoide y otro fuera. Vamos a llamar B_a al campo a lo largo del trozo de arriba de una trayectoria y B_b el campo a lo largo del trozo de abajo. En cualquiera de los puntos del dibujo, el campo lleva sentido contrario a \hat{y} . Es fácil ver que en los dos trozos laterales de la trayectoria el producto escalar de \vec{B} y $d\vec{r}$ es nulo, por lo que no contribuirán a la circulación. Para la trayectoria exterior, la circulación queda:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 B_a dy - \int_3^4 B_b dy = -B_a \int_1^2 dy - B_b \int_3^4 dy = -B_a \int_1^2 dy + B_b \int_4^3 dy = D(B_b - B_a)$$

Mientras que para la trayectoria interior la circulación es:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 B_a dy + \int_3^4 B_b dy = B_a \int_1^2 dy + B_b \int_3^4 dy = B_a \int_1^2 dy - B_b \int_4^3 dy = D(B_a - B_b)$$

Faltar por calcular la intensidad I_S que atraviesa la superficies rectangulares que definen las

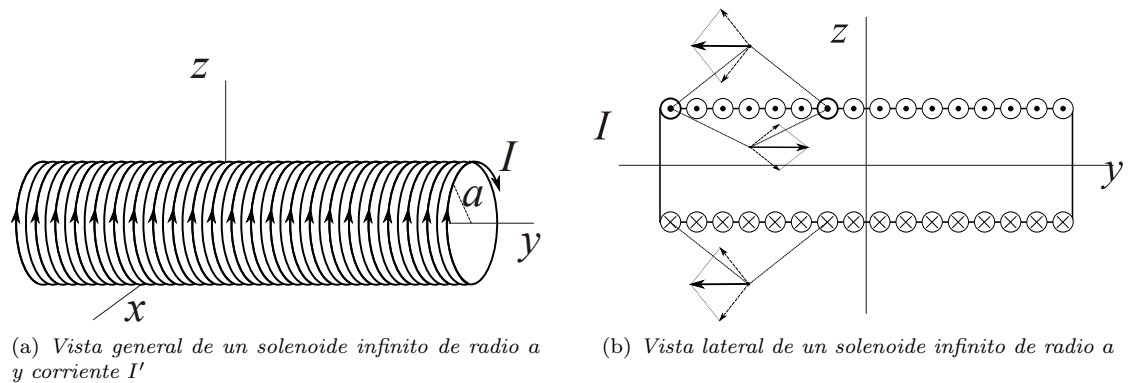


Figura 11: Solenoide infinito

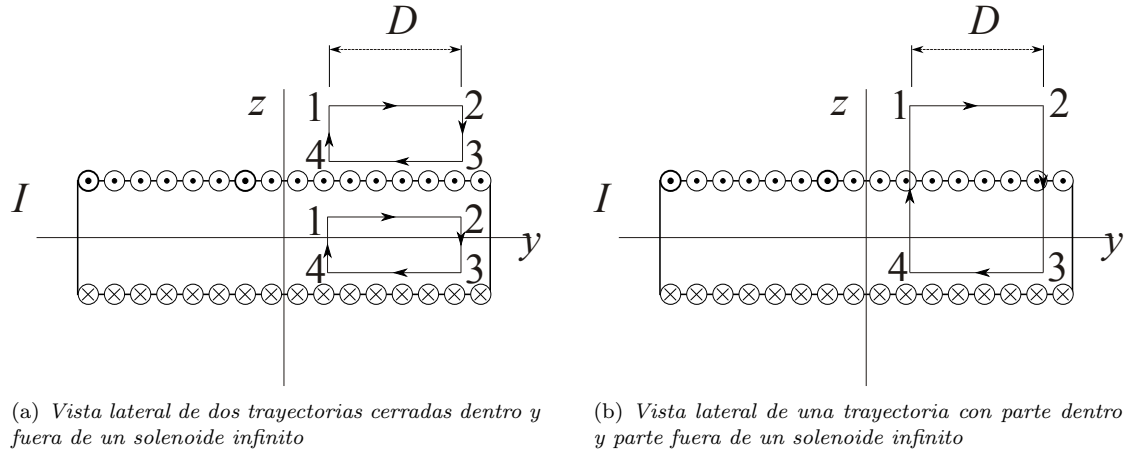


Figura 12: Solenoide infinito (cont.)

trayectorias. Es fácil ver que en ambos casos no hay intensidad atravesando las trayectorias, por lo que el Teorema de Ampere quedaría para cualquiera de las dos trayectorias como:

$$D(B_b - B_a) = 0$$

Esto implica que el módulo del campo en los puntos de las partes superiores e inferiores de las trayectorias son iguales. Pero como se pueden construir trayectorias de este tipo para cualesquiera dos puntos interiores o cualesquiera dos puntos exteriores el resultado es que el campo en todos los puntos exteriores es el mismo, y el campo en todos los puntos interiores es el mismo (campo uniforme).

Lo que en principio puede ser distinto es el campo en los puntos de dentro y en los puntos de fuera, ya que si se quiere construir una trayectoria que incluya a ambos puntos, esta trayectoria tiene que cortar al solenoide, tal y como se esquematiza en la Figura 12(b). En este caso el campo en la parte de arriba de la trayectoria será B^{ext} y el campo en la parte de abajo será B^{int} , y siguiendo un razonamiento idéntico al anterior, la circulación quedaría:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = D(B^{int} - B^{ext})$$

Pero ahora sí hay corriente atravesando la superficie I_S . En concreto, la corriente total que atraviesa será igual a I' por el número de vueltas que queden dentro del rectángulo. Si n es el número de vueltas que del conductor por unidad de longitud del cilindro en el que se enrolla, que se supone constante, la cantidad de vueltas que quedan dentro del rectángulo será nD y la intensidad que atraviesa el rectángulo será $I_S = I'nD$. Con esto el Teorema de Ampere produce:

$$-B^{ext} + B^{int} = \mu_0 n I'$$

Como hemos visto, el campo fuera es constante y será igual al campo que el solenoide produce en el infinito, pero en el infinito el campo tiene que ser nulo, ya que desde ese punto no se observa corriente alguna. Esto se puede ver ya que la parte superior e inferior del solenoide crean campos en sentidos contrarios en cualquier punto del espacio fuera del solenoide, que tienden a cancelarse. De esta forma se tiene $B^{ext} = 0$ y de la anterior expresión se obtiene:

$$B^{int} = \mu_0 n I' \quad (13)$$

Es decir, un solenoide infinito por el que circula una corriente I' y con un número de vueltas por unidad de longitud n , produce un campo nulo en su exterior y un campo constante cuyo módulo viene dado por (13) y el sentido viene dado por la regla de la mano derecha, donde los dedos llevan la dirección de la corriente y el pulgar marca el campo.