0

APUNTES SOBRE TEORÍA DE ERRORES

0.1. Introducción

Una magnitud física es un atributo de un cuerpo, un fenómeno o una sustancia, que puede determinarse cuantitativamente, es decir, es un atributo susceptible de ser medido. Ejemplos de magnitudes son la longitud, la masa, la potencia, la velocidad, etc.

Para establecer el valor de una determinada magnitud tenemos que usar instrumentos y un método de medida. Asimismo es necesario definir unidades de medida. Por ejemplo, si deseamos medir el largo de una mesa, el instrumento de medida será una regla. Si hemos elegido el Sistema Internacional de Unidades (SI), la unidad será el metro y la regla a usar deberá estar calibrada en esa unidad (o submúltiplos). El método de medida consistirá en determinar cuantas veces la regla y fracciones de ella entran en la longitud buscada.

En todo proceso de medida existen limitaciones dadas por los instrumentos usados, el método de medida y/o el observador (u observadores) que realizan la medida. Por ejemplo, cuando usamos un termómetro para medir una temperatura, parte del calor del objeto fluye al termómetro (o viceversa), de modo que el resultado de la medida es un valor modificado del original debido a la inevitable interacción que se ha producido. Está claro que esta interacción podrá o no ser significativa: Si estamos midiendo la temperatura de un metro cúbico de agua, la cantidad de calor transferida al termómetro puede no ser significativa, pero si lo será si el volumen en cuestión es de una pequeña fracción del mililitro.

Por tanto, ya que incluso el propio proceso de medida introduce imprecisiones, puede aceptarse como postulado físico el hecho de que resulta imposible conocer el valor exacto de una magnitud. El principal objetivo de la denominada teoría de errores consiste en acotar el valor de dichas imprecisiones denominadas errores experimentales para establecer los límites dentro de los cuales se encuentra el valor de la magnitud a determinar. Así, en todo lo que sigue, las medidas vendrán caracterizadas no por un único número sino por un intervalo.

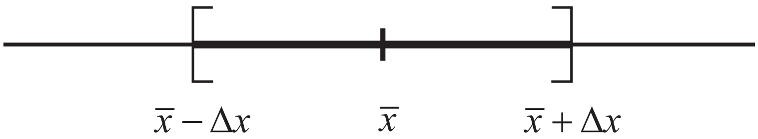

Figura 1: Intervalo de error asociado a la medida de x

Finalmente, hay que resaltar que en teoría de errores el concepto de error tiene un significado diferente del habitual. Coloquialmente, se suele usar el término error como sinónimo de equivocación. En la teoría de errores, el error está asociado al concepto de imprecisión en la determinación del resultado de una medida. Concretamente, lo que intenta en toda medida es conocer las cotas (o límites probabilísticos) de estas imprecisiones. Gráficamente, buscamos establecer un intervalo $\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$ como el de la Figura 1, donde con cierta probabilidad, podamos decir que se encuentra el mejor valor de la magnitud x. Este mejor valor $\bar{x}$ es el más representativo de nuestra medida y a Δx lo denominamos error absoluto de la medida.

0.2. Conceptos importantes: Exactitud, Precisión y Sensibilidad

En lo que respecta a los aparatos de medida, hay tres conceptos muy importantes que es necesario definir para poder usarlos con propiedad: exactitud, precisión y sensibilidad.

0.2.1. Exactitud

La exactitud se define como el grado de concordancia entre el valor verdadero de una magnitud y el obtenido experimentalmente. De modo que, se dice que un instrumento es exacto si las medidas realizadas él son todas muy próximas al valor verdadero de la magnitud.

La exactitud de un instrumento o método de medición está asociada a la calidad de la calibración del mismo. La exactitud es una medida de la calidad de la calibración del instrumento respecto de patrones de medida aceptados internacionalmente. En general los instrumentos vienen calibrados, pero dentro de ciertos limites.

0.2.2. Precisión

El concepto de precisión hace referencia a la concordancia entre una medida y otras de la misma magnitud realizadas en condiciones sensiblemente iguales. De modo que, un instrumento será más preciso cuanto menores sean las diferencias entre distintas medidas de una mismas magnitud realizadas en condiciones parecidas.

Aunque exactitud implica normalmente precisión, la afirmación inversa no es cierta ya que pueden existir aparatos muy precisos que posean poca exactitud. Esto es, aparatos cuyas medidas de una magnitud sean muy parecidas entre sí (y por lo tanto precisas) pero que estén muy lejos del valor verdadero (y por lo tanto poco exactas). Imaginemos que el cronómetro que usamos en un proceso de medida es capaz de determinar la centésima de segundo pero adelanta dos minutos por hora, mientras que un reloj de pulsera común no lo hace. En este caso decimos que el cronómetro es más preciso que el reloj común, pero menos exacto.

0.2.3. Sensibilidad

La sensibilidad de un aparato está relacionada con el valor mínimo de la magnitud que es capaz de medir. Normalmente, se admite que la sensibilidad de un aparato viene indicada por el valor de la división más pequeña de la escala de medida. Así por ejemplo, la sensibilidad de una regla cuya mínima división es un milímetro, es de un milímetro. La de una balanza que lo mínimo que aprecia es 0.01 g, es de 0.01 g.

En muchas ocasiones, de un modo erróneo, se toman como idénticos los conceptos de precisión y sensibilidad aunque del análisis de sus definiciones puede verse que se trata de conceptos diferentes.

0.3. Clasificación de los tipos de errores

Decimos que conocemos el valor de una magnitud dada, en la medida en que conocemos sus errores. En ciencia se considera que la medición de una magnitud con un cierto error no significa que se haya cometido una equivocación o que se haya realizado una mala medición. Con la indicación del error de medición se expresan, en forma cuantitativa y lo más precisamente posible, las limitaciones que el proceso de medida introduce en la determinación de la magnitud medida. Los errores no siguen una ley determinada y su origen está en múltiples causas. Atendiendo a las distintas causas que los producen, los errores pueden clasificarse en tres grandes grupos: errores sistemáticos, errores accidentales y errores espurios.

0.3.1. Errores Sistemáticos

Se denomina error sistemático a aquel originado por las imperfecciones de los métodos de medida. Por tanto, este tipo de errores es constante a lo largo de todo el proceso de medida y afecta de la misma forma a todas las medidas siendo el mismo para todas ellas. Por ejemplo, pensemos en un reloj que atrasa o adelanta, o en una regla dilatada, el error de paralaje, etc.

Estos errores tienen un signo determinado y las causas probables pueden ser:

1. *Errores instrumentales.* Estos errores están relacionados con los instrumentos de medida. Un ejemplo de este tipo de errores es el de calibrado.

2. *Errores personales.* Este tipo de errores se deben a limitaciones de carácter personal relacionadas con los observadores que realizan el proceso de medida y son, en general, difíciles de determinar. Un ejemplo de este tipo de errores sería una persona con problemas de tipo visual: es posible que un observador entrenado pueda apreciar con una regla común fracciones del milímetro mientras que otro observador, con la misma regla pero con dificultades de visión sólo pueda apreciar 2 mm.

3. *Error en la selección del método.* Como su propio nombre indica, este tipo de errores se producen debido a una elección inadecuada del método de medida de la magnitud.

0.3.2. Errores Accidentales o Estadísticos

Se denomina error accidental a aquel que se produce en las pequeñas variaciones que aparecen entre observaciones sucesivas realizadas por un mismo operador. Las variaciones no son reproducibles de una medida a la siguiente y no presentan más que por azar la misma magnitud en dos mediciones cualesquiera del grupo . Las causas de estos errores son incontrolables para un observador.

Los errores accidentales se producen al azar y son en su mayoría de magnitud muy pequeña . Estos errores pueden cometerse con igual probabilidad por defecto como por exceso. Por tanto, midiendo varias veces y promediando el resultado, es posible reducirlos considerablemente. Es a este tipo de errores a los que comúnmente hace referencia la teoría estadística de errores de medición que se formularán en lo que sigue.

Un ejemplo de este tipo de error es el que se comete al contar mal las divisiones de una regla o al copiar mal el valor que marca un polímetro.

0.3.3. Errores Espurios

Supongamos que se desea calcular el volumen de un objeto esférico y para ello se determina su diámetro. Si al introducir el valor del diámetro en la fórmula, nos equivocamos en el número introducido, o lo hacemos usando unidades incorrectas, o bien usamos una expresión equivocada del volumen, claramente habremos cometido un error. Esta vez este error está más asociado al concepto convencional de equivocación. A este tipo de errores los designamos como espurios. A este tipo de errores no se aplica la teoría estadística de errores y el modo de evitarlo consiste en una evaluación cuidadosa de los procedimientos realizados en la medición. Un ejemplo de este tipo de error es el que se cometió en el Mars Climate Explorer a fines de 1999, al pasar de pulgadas a cm se cometió un error que costo el fracaso de dicha misión a Marte.

0.4. Error absoluto y error relativo

0.4.1. Error absoluto

Para expresar el valor del error cometido al realizar una medida han de combinarse los errores sistemáticos con los errores estadísticos. Esta combinación de errores se constituye el llamado *error absoluto*. El error absoluto se define a través de la siguiente expresión:

$$\Delta x = \bar{x} - x_0 \tag{1}$$

donde x_0 representa el valor verdadero de la magnitud que se pretende medir y $\bar{x}$ es el valor de la medida obtenido experimentalmente. Por tanto, el error absoluto proporciona información sobre la desviación respecto al valor verdadero.

El error absoluto tiene las mismas dimensiones que la magnitud medida y ha de expresarse con las mismas unidades de ésta. Si $\bar{x}$ es el resultado del proceso de medida y Δx su error absoluto, el valor de la magnitud en estudio x, se expresa como:

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)\, Unidades \tag{2}$$

El significado de esta notación es equivalente a decir que, según la medida realizada, el valor de x está contenido en el intervalo $(\bar{x}-\Delta x, \bar{x}+\Delta x)$con una cierta probabilidad razonable p_0 (normalmente $p_0 = 0{,}68, 68\,\%$). O equivalentemente que: $\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x$ con probabilidad p_0. Un tercera posible notación es: $P(\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x) = p_0$ que significa que la probabilidad de que el mejor estimador de la magnitud x esté comprendido entre $\bar{x} - \Delta x$ y $\bar{x} + \Delta x$ es igual a p_0. El valor de p_0 se conoce con el nombre de coeficiente de confianza y los valores $(\bar{x} - \Delta x\ ,\ \bar{x} + \Delta x)$ determinan un intervalo de confianza para x.

El error absoluto nos da una medida de la desviación en términos absolutos respecto del valor verdadero. No obstante, en ocasiones nos interesa resaltar la importancia relativa de esa desviación. Para tal fin, se usa el *error relativo.*

0.4.2. Error relativo

El *error relativo* se define como el cociente entre el error absoluto y el mejor valor de la magnitud x:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \tag{3}$$

También suele expresarse la cantidad anterior en forma porcentual, así se define el error relativo porcentual de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{x,\%} = \varepsilon_x 100 \tag{4}$$

0.4.3. Comparación entre distintas medidas

La comparación de dos medidas puede realizarse en virtud de dos criterios:

- El error absoluto.
- El error relativo

Ejemplo

Imaginemos que medimos el espesor de un alambre (cuyo diámetro es $d \approx 3$ mm) y su longitud ($L \approx 1m$) con la misma regla graduada en milímetros. Imaginemos que en este caso el error absoluto en ambas medidas se corresponde con la sensibilidad de la regla utilizada ($\Delta d = \Delta L = 1mm$). Sin embargo, resulta evidente que la determinación de la longitud del alambre es mucho mejor que la del diámetro. El error relativo porcentual refleja esta diferencia, ya que para el caso del diámetro su valor es $\varepsilon_{d,\%} \approx 30\,\%$, y para el caso de la longitud tenemos $\varepsilon_{L,\%} \approx 0{,}1\,\%$.

0.5. Expresión de una medida: cifras significativas

0.5.1. Expresión del error absoluto

Para expresar de forma correcta la medida de una magnitud concreta hay que comenzar por expresar correctamente el error de la misma. Esto es, si tenemos una medida y su error, hay que comenzar redondeando el error y luego usaremos el error para redondear la medida.

Normalmente, dado el significado de cota de imprecisión que tiene el error absoluto, éste **jamás debe de tener más de dos cifras significativas**. La *primera cifra significativa* es la primera cifra distinta de cero cuando se empieza a contar por la izquierda. La *segunda cifra significativa* es la que sigue a la primera y así sucesivamente. Así, en el número 0.37258 la primera cifra significativa es el 3, la segunda el 7 y así sucesivamente. En el número 8541, la primera cifra significativa es el 8, la segunda el 5, etc.

Hemos visto que el error absoluto se expresa como máximo con dos cifras significativas, pero ¿cómo se sabe si hay que usar una o dos cifras significativas en la expresión de un error absoluto? Se admite por convenio que el error absoluto sólo puede darse con dos cifras significativas si la primera de ellas es un 1, o si siendo la primera un 2 la segunda no llega a 5. En los demás casos debe darse un valor con una sola cifra. En cualquier caso, hay que aumentar la última cifra significativa una unidad si la que le sigue es 5 o mayor que cinco, en caso contrario la última cifra significativa se deja igual. El concepto anterior se aclara en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Expresar correctamente los siguientes valores correspondientes a errores absolutos: 0.0003545, 0.00178, 0.02254, 1995

- $\Delta x = 0{,}0003545$. El primer paso consiste en calcular el número de cifras significativas de Δx. Para empezar a contar hay que buscar la primera cifra distinta de cero empezando por la izquierda. En este caso la primera cifra significativa es un 3. Como se trata de un 3, el número de cifras significativas con las que hay que dar el error es uno. El siguiente paso es redondear el 3, para ello se mira la cifra que le sigue. Como se trata de un 5, hay que aumentar en una unidad el 3 por lo que el error absoluto queda $\Delta x = 0{,}0004$.

- $\Delta x = 0{,}00178$. La primera cifra significativa es un 1 así que el error se da con dos cifras significativas: 0.0017. El siguiente paso es redondear la última cifra significativa: el 7. Como el 7 va seguido de un 8 que es mayor que cinco, habrá que aumentar el 7 en una unidad. Por tanto, $\Delta x = 0{,}0018$.

- $\Delta x = 0{,}023$.

- $\Delta x = 2000$.

0.5.2. Expresión del valor de la magnitud

Una vez que el error se ha expresado correctamente, se ha redondeado de acuerdo con las reglas anteriores, es el turno del valor de la magnitud. La regla a seguir es la siguiente: el valor de la magnitud debe tener sólo las cifras necesarias para que su última cifra significativa sea del mismo orden decimal que la última del error absoluto llamada cifra de acotamiento. Y

Medida	Error Absoluto	Valor correcto
3,418	0,123	$(3{,}42 \pm 0{,}12)$
6,3	0,09	$(6{,}30 \pm 0{,}09)$
46288	1551	(46300 ± 1600)
428,351	0,27	$(428{,}4 \pm 0{,}3)$
0,01683	0,0058	$(0{,}017 \pm 0{,}006)$

Cuadro 1: Ejemplo de cálculo del valor correcto de una medida.

esa última cifra significativa se redondea de acuerdo con la regla dada en el apartado anterior.

Ejemplo. Veamos un ejemplo para aclarar el proceso anterior. Supongamos que tenemos una magnitud cuyo valor es 75.891 y su error es 1.26987 ambos expresados en las mismas unidades. ¿Cómo se expresa correctamente el valor de esta magnitud y su error?

Como se ha explicado en los apartados anteriores, para expresar adecuadamente la magnitud hay que comenzar redondeando el error. En concreto hay que identificar la primera cifra significativa del mismo. En este caso, la primera cifra significativa del error es un 1. Eso significa que el error debe expresarse con dos cifras significativas, la primera y la segunda. Sin embargo, no sería correcto afirmar que el error es 1.2 (las dos primeras cifras significativas del mismo) ya que, según las reglas que hemos visto, la segunda cifra significativa ha de redondearse según el valor de la tercera cifra significativa. Como la tercera cifra significativa es un 6, mayor que 5, tendremos que sumarle uno a la segunda cifra significativa. Por tanto, el error correctamente expresado es 1.3.

Una vez redondeado el error pasamos a redondear la medida. Como el error tiene una única cifra decimal, la medida sólo puede tener una cifra decimal. Esto nos podría llevar a pensar que el valor de la magnitud ha de ser 75.8. Sin embargo, según las reglas que se han presentado, la última cifra significativa de la medida (un 8) ha de redondearse con la que le sigue (un 9 en este caso). Eso hace que, como 9 es mayor que 5, el valor correcto de la magnitud sea (75.9 ± 1.3).

Como práctica, expresar correctamente los valores de la izquierda de el Cuadro 1.

0.6. Estimación del error y del valor de una magnitud con medidas directas

Como ya se ha comentado, es imposible conocer los valores verdaderos de las magnitudes y, por tanto, es imposible calcular el valor del error absoluto de acuerdo con la expresión 1. En esta sección se introduce el método de estimación del valor de una magnitud así como del error asociado al mismo cuando se dispone de medidas directas de dicha magnitud. Se dice que una **medida** es **directa** cuando se obtiene a través de un proceso realizado con un instrumento. La forma en la que se calcula la estimación del valor de la magnitud y del error depende de la forma de realizar la medida observándose la siguiente casuística:

0.6.1. Sólo es posible realizar una única medida de la magnitud

En este caso, el error absoluto coincide con la sensibilidad del instrumento utilizado para realizar la medida y la estimación de la magnitud es el único valor tomado experimentalmente. Imaginemos por ejemplo que estamos realizando una medida de una resistencia que no podemos repetir. Supongamos que lo mínimo que es capaz de medir el polímetro que estamos utilizando es $0{,}01k\Omega$. Entonces, el error de la medida que hagamos es $0{,}01k\Omega$.

0.6.2. Es posible realizar más de una medida

Con el fin de alcanzar cierta validez estadística en los resultados de las medidas es muy conveniente repetir varias veces la determinación del valor de la magnitud problema. Los resultados de las medidas individuales pueden presentarse dispersos y en función de esta dispersión será conveniente aumentar o no el número de determinaciones del valor de la magnitud. Para decidir el número de medidas necesarias para estimar el valor de la magnitud física se sigue el procedimiento que se presenta a continuación.

Para cada medida donde el proceso de toma de datos se pueda reproducir en las mismas condiciones, se realizan **SIEMPRE** tres medidas de la magnitud. Con estas tres medidas puede calcularse la *media*:

$$\bar{x}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{3} \tag{5}$$

El siguiente paso consiste en calcular de la *dispersión* D de las medidas. La dispersión es el primer criterio que se utiliza para estimar el número de medidas de la magnitud necesarias. La dispersión se define como la diferencia entre los valores extremos de las medidas (valor máximo de las medidas obtenidas menos el valor mínimo):

$$D = x_{max} - x_{min} \tag{6}$$

Si la dispersión calculada con las tres primeras medidas es menor o igual que la sensibilidad del aparato con el que se han tomado dichas medidas, $D \leq S$, estas tres medidas son suficientes para estimar el valor de la magnitud. No es necesario tomar más medidas.

$\mathbf{D_3}$	$\mathbf{T_3}$	**Nº de medidas necesario**
$D_3 \leq S$	Para cualquier valor de T_3	Bastan las tres medidas realizadas.
$D_3 > S$	$T_3 \leq 2\,\%$	Bastan las tres medidas realizadas.
	$2\,\% < T_3 \leq 8\,\%$	Hay que hacer 3 medidas más para tener un total de 6.
	$8\,\% < T_3 \leq 15\,\%$	Hay que hacer 12 medidas más para tener un total de 15.
	$T_3 > 15\,\%$	Hay que hacer un mínimo de 47 medidas para tener un total mínimo de 50.

Cuadro 2: Regla para calcular el número total de medidas necesarias

Si la dispersión calculada con las tres primeras medidas es mayor que la sensibilidad del aparato con el que se han tomado dichas medidas, $D > S$, es necesario buscar un nuevo criterio para estimar el número de medidas totales a realizar.

Este nuevo criterio es el *tanto por ciento de dispersión* T que se define como

$$T = 100\frac{D}{\bar{x}} \tag{7}$$

Sólo será necesario calcular T para las tres primeras medidas que se realicen y será **solamente** este valor de T el que se utilice como criterio a seguir para conocer el número de medidas totales a realizar. Este criterio se presenta en el Cuadro 2.

Estimación del valor de la magnitud y de su error

En esta sección se explica la forma de calcular el valor de la magnitud que se ha medido una vez que el número de medidas necesarias han sido tomadas. Los casos que pueden presentarse se enumeran a continuación:

1. Si $D_3 \leq S$, se toma como estimación del valor "verdadero" de la magnitud el valor medio de las tres medidas y como error absoluto la sensibilidad del aparato:

$$x = (\bar{x}_3 \pm S)\,Unidades \tag{8}$$

2. Si $D_3 > S$ y $T \leq 2\,\%$, se toma como estimación del valor "verdadero" de la magnitud el valor medio de las tres medidas y como error absoluto la sensibilidad del aparato:

$$x = (\bar{x}_3 \pm S)\,Unidades \tag{9}$$

3. Si $D_3 > S$ y $2\,\% < T \leq 8\,\%$, se toma como estimación del valor "verdadero" de la magnitud el valor medio de las seis medidas y como error absoluto el máximo entre un cuarto de la dispersión de las seis medidas y la sensibilidad del aparato:

$$x = \left(\bar{x}_6 \pm \text{máx}\left(\frac{D_6}{4}, S\right)\right) Unidades \tag{10}$$

4. Si $D_3 > S$ y $8\,\% < T \leq 15\,\%$, se toma como estimación del valor "verdadero" de la magnitud el valor medio de las quince medidas y como error absoluto el que aparece en la siguiente expresión:

$$x = \left(\bar{x}_{15} \pm \left(\frac{\sum_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x}_{15})^2}{15}\right)^{1/2}\right) Unidades \tag{11}$$

5. Si se han realizado más de 50 medidas, se construye el histograma representativo de las mismas, tomando en abscisas, a intervalos regulares, los valores de las medidas realizadas y representando cada una por un punto sobre la abscisa correspondiente. En este caso debemos seguir realizando medidas hasta que la distribución resultante tenga forma de distribución gaussiana o normal. Sobre esta distribución se obtiene como estimación del valor "verdadero" de la magnitud el valor medio de la misma y como medida del error absoluto, la desviación standard:

$$x = \left(\bar{x} \pm \left(\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}\right)^{1/2}\right) Unidades \tag{12}$$

El procedimiento seguido en este último caso se debe a que, en una serie repetida de medidas aleatorias de una misma magnitud, la distribución de éstas alrededor del valor medio representa una forma típica que recibe el nombre de distribución gaussiana o distribución normal.

El significado de la desviación estándar (σ) es el que se muestra a continuación:

- En el intervalo $\bar{x} - \sigma < x < \bar{x} + \sigma$ se encuentra el 68,3 % de las medidas realizadas cuando el número de éstas es muy elevado.
- En el intervalo $\bar{x} - 2\sigma < x < \bar{x} + 2\sigma$ se encuentra el 95,4 % de las medidas realizadas cuando el número de éstas es muy elevado.
- En el intervalo $\bar{x} - 3\sigma < x < \bar{x} + 3\sigma$ se encuentra el 99,7 % de las medidas realizadas cuando el número de éstas es muy elevado.

Ejemplo

Supongamos que estamos en el laboratorio y queremos medir el valor de una resistencia desconocida. Para ello contamos con un polímetro que vamos a utilizar en una posición donde lo mínimo que es capaz de apreciar es $0{,}01k\Omega$. Como vamos a realizar una medida directa (vamos a usar un instrumento) y además esta medida la podemos repetir varias veces, vamos a seguir las reglas que se han planteado en las secciones anteriores. Comenzamos realizando 3 medidas porque **siempre** hay que realizar tres medidas de la magnitud a medir. Supongamos que el resultado de estas medidas es: $R_1 = 32{,}86k\Omega$, $R_2 = 33{,}00k\Omega$ y $R_3 = 32{,}96k\Omega$.

El siguiente paso es utilizar las medidas anteriores para saber si es necesario realizar más medidas o si con sólo tres es suficiente. Según el cuadro 2, para saber el número de medidas a utilizar necesito comenzar calculando la dispersión (D_3) y la sensibilidad (S). La sensibilidad es lo mínimo que es capaz de apreciar el instrumento de medida, en este caso $0{,}01k\Omega$. En cuanto a la dispersión, de acuerdo con la expresión 6, $D_3 = 33{,}00k\Omega - 32{,}86k\Omega = 0{,}14k\Omega$. En este caso, como $D_3 > S$ es necesario calcular el tanto por ciento de dispersión (T de la expresión 7). Para este ejemplo, $T = 0{,}14/32{,}93666 * 100 = 0{,}43\,\%$. De acuerdo con el cuadro 2, como $T < 2\,\%$ las tres medidas que se han tomado son suficientes.

Una vez que sabemos que con tres medidas es suficiente, ya podemos dar un valor de la resistencia. Para ello usaremos los valores de D_3 y T que hemos calculado. Según estos valores ($D_3 > S$ y $T < 2\,\%$), podemos ver que estamos en el caso 2 (ecuación 9). Como nuestro caso es el 2, el error de la medida es la sensibilidad de la misma. Para calcular el valor de la resistencia tenemos que calcular la media. En este caso, la media es 32.9366666kΩ. Ya sólo queda redondear esta media. El valor de la resistencia ha de tener dos cifras decimales (porque el error tiene dos cifras decimales) y la última cifra decimal se redondea con la que le sigue. Por tanto, $R = (32{,}94 \pm 0{,}01)k\Omega$.

0.7. Estimación del error y del valor de una magnitud con medidas indirectas

Las medidas indirectas de magnitudes son aquellas que se realizan a través de una aplicación de una fórmula a un conjunto de medidas (variables independientes o datos) que las relacionan con la magnitud problema. Mediante dicha fórmula puede obtenerse además el error de dicha medida. Este será el objetivo en esta sección.

Supongamos que la magnitud $\mathcal{F}$ cuyo valor estamos interesados en estimar, puede expresarse en función de otras magnitudes y que se relaciona con ellas a través de la siguiente expresión matemática:

$$\mathcal{F} = f(x, y, z, ...) \tag{13}$$

Si se conocen los valores de las magnitudes que aparecen en la fórmula (13) y sus errores, el modo de proceder es el siguiente:

1. Se calcula el valor de la magnitud $\mathcal{F}$ sustituyendo en la expresión (13) los valores de las medidas de cada una de las variables.

2. Para calcular el valor del error de $\mathcal{F}$, hay que calcular derivadas parciales con respecto a cada una de las variables de las que depende $\mathcal{F}$ y combinarlas de la siguiente forma:

$$\Delta\mathcal{F} = |\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}|_{y,z,..}\Delta x + |\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}|_{x,z,..}\Delta y + |\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}|_{x,y,..}\Delta z + ... \tag{14}$$

Ejemplo. Las magnitudes $\mathcal{F}$, x, y y z se relacionan a través de la siguiente expresión:

$$\mathcal{F} = xy - z \tag{15}$$

La magnitudes x, y y z se han medido de forma directa y sus valores son $x = (3{,}12 \pm 0{,}16)$, $y = (2{,}7 \pm 0{,}4)$ y $z = (12{,}42 \pm 0{,}23)$. Calcular el valor de $\mathcal{F}$ así como el de su error.

En primer lugar se calcula el valor de $\mathcal{F}$ simplemente sustituyendo en la fórmula:

$$\mathcal{F} = 3{,}12 * 2{,}7 - 12{,}42 = -3{,}9960$$

El siguiente paso es el cálculo del error. Para ello, necesitamos calcular en primer lugar cada una de las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}|_{y,z} &= y \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}|_{x,z} &= x \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}|_{x,y} &= -1 \end{aligned}$$

A continuación se sustituye en la expresión del error:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{F} &= |y|\Delta x + |x|\Delta y + |-1|\Delta z \\ &= 2{,}7 * 0{,}16 + 3{,}12 * 0{,}4 + 0{,}23 \\ &= 1{,}9100 \end{aligned}$$

Ya sólo queda expresar correctamente tanto la medida como el error. Para ello se siguen los pasos presentados en la Sección 5. Y el resultado es:

$$\mathcal{F} = (-4{,}0 \pm 1{,}9)\, Unidades$$

Nota: Trabajar con números irracionales. Cuando se trabaja con números irracionales tales como π, e, etc... no es posible introducir en los cálculos todos los decimales que contienen. Por ello, es necesario elegir el número de cifras significativas que han de tomarse en estos cálculos para que los errores cometidos al aproximar estos números irracionales no afecten a la magnitud del error absoluto de la magnitud que se pretende determinar.

0.8. Regresión Lineal: Método de Mínimos Cuadrados

Con frecuencia se plantea el problema de encontrar una expresión matemática del tipo $y = f(x)$ de la ley física que rige el comportamiento de un determinado fenómeno a partir de una serie de medidas de las magnitudes x e y que lo caracterizan. En un experimento típico, se cambia el valor de una variable independiente x para observar el comportamiento de otra variable y dependiente de la anterior; por ejemplo, el cambio de la densidad del agua (y) con la temperatura (x). Cuando hacemos una representación gráfica $y(x)$ (y en el eje vertical de ordenadas y x en el eje horizontal de abscisas), la curva obtenida tendrá una forma dada. En el laboratorio, al reproducir un experimento de este tipo, obtendríamos una gráfica idéntica a la arrojada por la teoría. Sin embargo, la existencia de muchas fuentes de indeterminación (no sólo errores sino también las simplificaciones hechas en la propia teoría, influencias de otros factores, etc) hacen que los datos experimentales no coincidan exactamente con la curva teórica, sino que tiendan a disponerse alrededor de ésta. Surge entonces la pregunta de qué curva "ajusta" mejor los datos experimentales. Con "ajusta" se quiere decir, no que la curva pase exactamente por todos los puntos experimentales, sino que tienda a estar lo más cerca posible de todos ellos en conjunto.

El ajuste de datos experimentales a curvas es extremadamente importante, no sólo para poder comparar con la teoría, sino incluso para poder establecer la validez o no de la misma teoría. El caso general es complejo y laborioso, así que nos limitaremos a una curva en la que la dependencia entre x e y es de tipo lineal.

Supongamos que para cada valor x_i de la variable independiente se obtiene un valor y_i de la variable dependiente (aquí los subíndices i denotan distintos valores de x e y, y no guardan relación alguna con los valores de una misma cantidad utilizados en la Sección 6). El problema consiste en encontrar una curva del tipo $y = ax + b$, (una recta, en este caso) que ajuste mejor el conjunto de datos; en concreto, se buscan los valores de a y b tales que la suma de distancias entre la recta y todos los puntos experimentales sea mínima.

Se puede demostrar, minimizando dicha suma de distancias, que los valores a y b que nos dan el mejor ajuste vienen dados por las siguientes expresiones:

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{i=N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{i=N} x_i \sum_{i=1}^{i=N} y_i}{N\sum_{i=1}^{i=N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=N} x_i\right)^2} \quad (16)$$

$$b = \frac{N\sum_{i=1}^{i=N} x_i^2 y_i - \sum_{i=1}^{i=N} x_i \sum_{i=1}^{i=N} x_i y_i}{N\sum_{i=1}^{i=N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=N} x_i\right)^2} \quad (17)$$

$$\Delta a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} (y_i - a x_i - b)^2}{(N-2)\sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \bar{x})^2}} \quad (18)$$

$$\Delta b = \sqrt{\left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \bar{x})^2}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{i=N} (y_i - a x_i - b)^2}{N-2}\right)} \quad (19)$$

Cuando se quiere conocer la validez o bondad del ajuste, o cuando se tienen dudas sobre si la relación $x - y$ es lineal, se acude al *coeficiente de correlación lineal* (C.C.L.), descrito con la letra r, definido como:

$$r = \frac{N\sum_{i=1}^{i=N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{i=N} x_i \sum_{i=1}^{i=N} y_i}{\sqrt{\left(N\sum_{i=1}^{i=N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=N} x_i\right)^2\right)\left(N\sum_{i=1}^{i=N} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=N} y_i\right)^2\right)}} \quad (20)$$

El valor absoluto de r nos indica lo bien que los puntos experimentales ajustan a la curva teórica. Si $r = 1$, el ajuste es perfecto; un valor $r = 0{,}95$ nos indica un buen ajuste; un valor de r inferior a 0,85 no resulta apenas aceptable.

0.9. Construcción de Gráficas

En esta sección se introducen algunas reglas para realizar una representación gráfica adecuada de los fenómenos que se estudian en el laboratorio.

- Las gráficas han de representarse con un mallado en ambos ejes en los extremos de los cuales han de indicarse la magnitud que se representa así como la unidad en la que se mide. El título de la representación ha de estar situado en la parte superior de la misma claramente indicado.

- La variable independiente del fenómeno debe ir representada en abscisas y la dependiente en ordenadas. Ambas variables deben de etiquetarse bajo el eje correspondiente acompañadas de sus unidades entre paréntesis.

- Las escalas, sobre ambos ejes, han de permitir una lectura rápida y sencilla. Para ello han de elegirse escalas con intervalos adecuados de manera que los puntos que se representen estén repartidos de manera homogénea en el gráfico. Normalmente los datos se representan en escala lineal. Para ello se usa un gráfico cartesiano o gráfico x-y, donde la primera coordenada corresponde a la variable independiente, mientras que la segunda corresponde a la variable dependiente. También se pueden representar los datos en escala semi logarítmica. En esta escala, cada división en uno de los ejes (generalmente el eje y) es una potencia de diez. Así mismo, se puede utilizar la escala logarítmica en la que cada división en cada uno de los ejes es una potencia de diez.

- Las escalas deben abarcar todo el intervalo de medidas realizadas y *sólo el citado intervalo.*

- Sobre los ejes sólo se indican los valores correspondientes a las divisiones enteras de la escala usada (que han de quedar uniformemente espaciados). **Nunca** se señalan los valores correspondientes a las medidas realizadas.

- Los valores medidos se representan sobre el papel milimetrado por el punto correspondiente a sus dos coordenadas (punto experimental) y rodeado por el denominado rectángulo de error cuya base abarca desde $\bar{x} - \Delta x$ hasta $\bar{x} + \Delta x$ y cuya altura se extiende desde $\bar{y} - \Delta y$ hasta $\bar{y} + \Delta y$ siendo $(\bar{x}, \bar{y})$ las coordenadas del punto experimental. En el caso de que Δx o Δy sean despreciables en comparación con la escala utilizada, el rectángulo de error queda reducido a un simple segmento vertical u horizontal según el caso.

- Las gráficas han de ser líneas finas y continuas, nunca quebradas que han de pasar por todos los rectángulos de error aunque para ello dejen muchas veces de pasar por los puntos experimentales que pueden quedar a derecha o izquierda de la gráfica.

En la Figura 2 se muestra un ejemplo realizado con la hoja de cálculo del software OpenOffice 3.1. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Introducimos los datos de las variables a representar en cada uno de los ejes en una columna diferente de la hoja de cálculo.

2. Marcamos *Insertar* y dentro de este menú la opción *Gráfico.*

3. Seleccionamos como tipo de gráfico *XY (dispersión).*

4. El siguiente paso consiste en pulsar la opción *Series de datos* del asistente para gráficos y pulsamos el botón *Agregar.* Automáticamente aparecen en la casilla de *Rango de Datos* tres opciones que nos permitirán añadir los datos de nuestra tabla. Si pulsamos la opción *valores-X*, nos aparece una casilla con el nombre Rango para valores de X

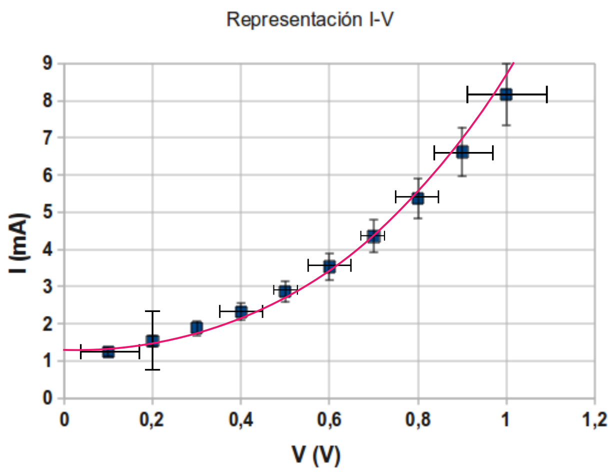

Figura 2: Ejemplo de representación gráfica

junto a la cual aparece un botón que, al ser pulsado, nos permite seleccionar de la hoja de cálculo los datos que queremos representar en el eje X. De igual manera se procede con la opción *valores-Y*.

5. El siguiente paso es añadir la cuadrícula, el título y las etiquetas a cada uno de los ejes. Todas esas opciones pueden modificarse en el paso 4 *Elementos de Gráficos*.

6. Para terminar, pulsamos el botón *Finalizar*.

7. Llegados a este punto, conseguimos insertar un gráfico en la hoja de cálculo. Ya sólo queda introducir las barras de error y añadir la línea de tendencia en caso de que se nos pida. Ambas acciones aparecen en un menú que se despliega al pulsar con el botón derecho sobre los puntos de la representación. Si escogemos la opción *Agregar Línea de tendencia*, se abre una ventana con dos pestañas. En la pestaña *Tipo* se puede elegir el tipo de línea de tendencia (lineal, exponencial, logarítmica, etc..) así como la posibilidad de presentar su ecuación y el coeficiente de correlación en el gráfico.

0.10. Normas del Laboratorio

1. Leer el guión de prácticas antes de entrar en el laboratorio.

2. El alumno ha de completar la parte correspondiente al trabajo de prelaboratorio antes de realizar la práctica correspondiente.

3. El puesto de trabajo ha de estar ordenado y con todo apagado antes de abandonar el laboratorio. Antes de irse, cada pareja avisará al profesor

para que juntos revisen si todo está en orden y en buen estado.

4. Los dispositivos experimentales no deben tocarse o cambiarse de configuración a menos que lo indique explícitamente el guión.

5. El uso inapropiado del material implicará la expulsión del laboratorio y un cero en la sesión de prácticas.

6. Tras la realización de cada práctica, los alumnos deben de entregar la parte de trabajo de laboratorio al profesor.

7. No se permite faltar injustificadamente al laboratorio.

8. Las prácticas cuentan un 30 % de la nota global de la signatura.