GEOMETRÍA I
(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)
Segunda prueba parcial (20/12/2017)

1. **[2 puntos]**. Sea $V(K)$ un e.v. de dimensión finita $n \geq 3$ y sean ϕ, ψ dos formas lineales no nulas sobre V. Demuéstrese la siguiente afirmación:

   - $\{\phi, \psi\}$ es linealmente independiente si y sólo si $V = \text{Nuc } \phi + \text{Nuc } \psi$.

   Discútase qué sucede en los casos $n = 1$ y $n = 2$.

2. **[2 puntos]**. Sean $V(K)$, $V'(K)$ espacios vectoriales de dimensiones $n, m \in \mathbb{N}$, respectivamente, y sea $f : V \to V'$ lineal. Razónese si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

   - f es suprayectiva si y sólo si f^t es inyectiva.

3. **[3 puntos]**. Se consideran los espacios vectoriales de matrices cuadradas $M_2(\mathbb{R})$ y matrices simétricas $S_2(\mathbb{R})$, y la aplicación lineal:

$$F : M_2(\mathbb{R}) \to S_2(\mathbb{R}), \qquad F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+2b+c & 2a+3b+c+2d \\ 2a+3b+c+2d & -a+c-4d \end{pmatrix}$$

   Determinar, caso de ser posible, una base B de $M_2(\mathbb{R})$ y otra B' de $S_2(\mathbb{R})$ tales que la matriz de F en esas bases sea:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. **[3 puntos]**. Se considera en el espacio dual $\mathbb{R}_3[x]^*$ del espacio de los polinomios de grado ≤ 3, las formas lineales $\phi(p(x)) = p(1), \psi(p(x)) = p(-1)$.

   Determinar un endomorfismo h de $\mathbb{R}_3[x]^*$ cuyo núcleo sea $L\{\phi, \psi\}$ y que verifique $h \circ h = h$, proporcionando su matriz en la base dual de la usual de $\mathbb{R}_3[x]$.

Duración: 2:30 min.

1. Sea $V(K)$ un e.v. de dimensión finita $n \geq 3$ y sean ϕ, ψ dos formas lineales no nulas sobre V. Demuéstrese la siguiente afirmación:

   - $\{\phi, \psi\}$ es linealmente independiente si y sólo si $V =$ Nuc ϕ + Nuc ψ.

   Discútase qué sucede en los casos $n = 1$ y $n = 2$.

Demostración directa. Si $\{\phi, \psi\}$ es linealmente independiente entonces Nuc $\phi \cap$ Nuc ψ es un subespacio de dimensión $n - 2$. De hecho, Nuc $\phi \cap$ Nuc $\psi = \{v \in V : \phi(v) = 0, \psi(v) = 0\}$, que puede verse como el conjunto de soluciones de un sistema con n incógnitas y dos ecuaciones, las cuales son independientes, al serlo[1] $\{\phi, \psi\}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \dim(\text{Nuc } \phi + \text{Nuc } \psi) &= \dim(\text{Nuc } \phi) + \dim(\text{Nuc } \psi)\text{-} \dim(\text{Nuc } \phi \cap \text{Nuc } \psi) \\ &= (n-1) + (n-1) - (n-2) = n = \dim V, \end{aligned}$$

de donde se sigue Nuc ϕ + Nuc $\psi = V$.

Para el recíproco, si $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente entonces existe un $a \neq 0$ tal que $\psi = a\phi$ lo cual implica Nuc $\phi =$ Nuc ψ. Por tanto, Nuc ϕ + Nuc ψ= Nuc $\phi \neq V$ (lo último por ser $\phi \not\equiv 0$).

Demostración a partir de resultados teóricos conocidos. Se sabe que el núcleo de cada forma lineal es un hiperplano[2] (subespacio vectorial de dimensión $n - 1$). Por tanto, el subespacio suma Nuc ϕ+ Nuc ψ tiene dimensión al menos $n-1$ (pues incluye a, digamos, Nuc ϕ) y para que sea igual a todo V basta con que no sea igual a Nuc ϕ (pues su dimensión tiene que ser entonces mayor que $n - 1$ y sólo puede ser igual a n). Asimismo, se sabe que $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente si y sólo si[3] Nuc $\phi =$ Nuc ψ. Partiendo de esta base, se razona:

Si $\{\phi, \psi\}$ es linealmente independiente entonces Nuc ϕ+ Nuc ψ es igual a V porque, en caso contrario, Nuc $\psi \subset$ Nuc ϕ+ Nuc $\psi =$ Nuc ϕ, lo que implica Nuc $\psi =$ Nuc ϕ (al tener ambos subespacios la misma dimensión), obteniéndose la contradicción de que $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente.

Para el recíproco, si $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente entonces Nuc $\phi =$ Nuc ψ. Por tanto, Nuc ϕ+ Nuc ψ= Nuc $\phi \neq V$.

Discusión casos $n = 1, 2$. Cualquiera de las dos demostraciones anteriores es válida en toda dimensión finita, incluyendo $n = 1, 2$ (y también $n = 0$).

No obstante, si $n = 1$ entonces ϕ y ψ son necesariamente linealmente dependientes (pues dim $V^* = 1$) y, además, Nuc $\phi =$ Nuc $\psi = \{0\}$ (pues al ser ϕ, ψ no nulas su núcleo sólo puede estar formado por 0). Así, consistentemente, se tiene siempre $V \neq$ Nuc ϕ + Nuc ψ.

Si $n = 2$ entonces dim(Nuc ϕ) = dim (Nuc ψ) = 1, por lo que $V =$ Nuc ϕ + Nuc ψ si y sólo si $V =$ Nuc $\phi \oplus$ Nuc ψ y, por tanto, esta igualdad es también equivalente a que $\{\phi, \psi\}$ sea linealmente independiente.

[1] Con más precisión, Nuc $\phi \cap$ Nuc ψ coincide con al anulador en V del espacio $L\{\phi, \psi\} \subset V^*$, que tiene dimensión 2, por lo que dim (Nuc $\phi \cap$ Nuc ψ)= dim (an $L\{\phi, \psi\}$) = dim V - dim $L\{\phi, \psi\} = n - 2$.

[2] Como cada forma lineal ϕ, ψ, debe tener por imagen todo el codominio K, el teorema del rango proporciona la dimensión $n - 1$ del núcleo.

[3] Si $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente, al no ser ninguna de las formas la nula se sigue $\psi = a\phi$ con $a \neq 0$, de donde la igualdad de los núcleos resulta inmediata. Recíprocamente, si Nuc $\phi =$ Nuc ψ, tomando una base $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ de este núcleo común y ampliándola a una base ordenada $B = (v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ de V, las correspondientes matrices de las formas son $(0, \ldots, 0, \phi(v_n))$ y $(0, \ldots, 0, \psi(v_n))$; esto es, las dos matrices forman un conjunto linealmente dependiente y, por tanto, también lo es $\{\phi, \psi\}$.

2. Sean $V(K)$, $V'(K)$ espacios vectoriales de dimensiones $n, m \in \mathbb{N}$, respectivamente, y sea $f : V \to V'$ lineal. Razónese si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

   - f es suprayectiva si y sólo si f^t es inyectiva.

Recordemos $f^t : V'^* \to V^*$. Podemos demostrar que la afirmación es VERDADERA por cualquiera de los siguientes dos razonamientos.

.

Razonamiento 1

Como cualquier aplicación lineal, f^t es inyectiva si y sólo si Nuc $f^t = \{0\}$ ($\subset V'^*$). Como se sabe que Nuc$f^t = \text{an}(\text{Im } f)$ (¡compruébese!), la inyectividad de f^t es entonces equivalente a la igualdad $\text{an}(\text{Im } f) = \{0\}$.

Ahora bien, $\text{an}(\text{Im } f) = \{0\}$ equivale a la igualdad $\text{Im}(f) = V'$ (pues el único subespacio de V' cuyo anulador es sólo $\{0\}$ resulta ser el propio V') y, por definición, esto equivale a que f sea suprayectiva, QED.

Razonamiento 2 (basado en propiedades elementales de las matrices).

Observemos primero que, escogidas cualesquiera bases B, B' en V, V', resp., y construida la matriz $A := M(f, B' \leftarrow B) \in M_{m\times n}(K)$, se verifica:

(a) f es inyectiva si y sólo si su rango es igual al número n de columnas de A (de hecho, esta propiedad equivale a que las columnas de A formen un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^m$ y, por tanto, a que $f_*(B)$ sea un conjunto linealmente independiente de V').

(b) f es suprayectiva si y sólo si su rango es igual al número m de filas de A (de hecho, esta propiedad equivale a que las columnas de A sean un sistema de generadores de $\mathbb{R}^m$ y, por tanto, a que $f_*(B)$ sea un sistema de generadores de V').

Este mismo razonamiento aplicado a f^t y a $M(f^t, B^* \leftarrow B'^*) = A^t \in M_{n\times m}(K)$ implica:

(a') f^t es inyectiva si y sólo si su rango es igual al número m de columnas de A^t.

(b') f^t es suprayectiva si y sólo si su rango es igual al número n de filas de A^t.

Teniendo en cuenta que los rangos de f, f^t, A y A^t coinciden siempre, se sigue de (b) y (a'): f es suprayectiva si y sólo si el rango de A es igual a m, y si y sólo si f^t es inyectiva, QED.

3. Se consideran los espacios vectoriales de matrices cuadradas $M_2(\mathbb{R})$ y matrices simétricas $S_2(\mathbb{R})$, y la aplicación lineal:

$$F : M_2(\mathbb{R}) \to S_2(\mathbb{R}), \qquad F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+2b+c & 2a+3b+c+2d \\ 2a+3b+c+2d & -a+c-4d \end{pmatrix}$$

Determinar, caso de ser posible, una base B de $M_2(\mathbb{R})$ y otra B' de $S_2(\mathbb{R})$ tales que la matriz de F en esas bases sea:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de F en las bases usuales $B_u = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ de $M_2(\mathbb{R})$ y $B'_u = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ de $S_2(\mathbb{R})$ es:

$$M(F, B'_u \leftarrow B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta el procedimiento estándar de demostración del teorema del rango (y las consiguientes caracterizaciones del concepto de matrices equivalentes), las bases pedidas existirán si y sólo si el rango de $M(F, B'_u \leftarrow B_u)$ es igual a 2 (que es el rango de la matriz del enunciado). Puesto que, en ese caso, después precisaremos calcular el núcleo de F, hallaremos el rango realizando transformaciones elementales por filas:

$$M(F, B'_u \leftarrow B_u) \sim \begin{matrix} F_1+F_3 \\ F_1+2F_3 \\ F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} F_1/2 \\ F_2/3 \\ -F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

que tiene obviamente rango 2. Para el cálculo de Nuc F, basta con solucionar el SEL homogéneo asociado a esta última matriz. Podemos suprimir su primera fila (y cambiar de orden las otras dos), de modo que se obtiene directamente la solución del sistema tomando como incógnitas principales x_1, x_2 y como parámetros las incógnitas secundarias x_3, x_4:

$$x_1 = x_3 - 4x_4, \qquad x_2 = -x_3 + 2x_4.$$

Las elecciones de parámetros $(x_3 = 1, x_4 = 0)$ y $(x_3 = 0, x_4 = 1)$ generan la base del núcleo

$$B_{NucF} = ((1, -1, 1, 0)_{B_u}, (-4, 2, 0, 1)_{B_u}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

La base B requerida puede ser cualquier base obtenida ampliando B_{NucF} hasta una base de $M_2(\mathbb{R})$, ordenando los dos vectores necesarios para la ampliación a continuación de los de B_{NucF} (con esto se asegura que las dos primeras columnas de $M(F, B' \leftarrow B)$ sean nulas, con independencia de B'). Los dos vectores de la ampliación pueden escogerse como los dos primeros de B_u, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(\neq 0).$$

Así, la base B requerida se escoge como:

$$\boxed{B = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).}$$

Para el cálculo de B', una base de Im F viene dada por las imágenes de los vectores con los que se amplió B_{NucF}, esto es:

$$B_{ImF} = \left(F\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\right), F\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\right)\right) = \left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{array}\right)\right).$$

La base B' requerida puede ser cualquier base obtenida ampliando B_{ImF} hasta una base de $S_2(\mathbb{R})$, ordenando el vector necesario para la ampliación antes de los de B_{ImF} (con esto se asegura que la primera fila de $M(F, B' \leftarrow B)$ sea nula). Este vector puede escogerse como el primero de B'_u ya que, al tomar por columnas las coordenadas de los vectores candidatos a base con respecto a B'_u se tiene:

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right| \neq 0.$$

Así, la base B' requerida se escoge como:

$$\boxed{B' = \left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{array}\right)\right).}$$

4. Se considera en el espacio dual $\mathbb{R}_3[x]^*$ del espacio de los polinomios de grado ≤ 3, las formas lineales $\phi(p(x)) = p(1), \psi(p(x)) = p(-1)$.

   Determinar un endomorfismo h de $\mathbb{R}_3[x]^*$ cuyo núcleo sea $L\{\phi, \psi\}$ y que verifique $h \circ h = h$, proporcionando su matriz en la base dual de la usual de $\mathbb{R}_3[x]$.

La base usual de $\mathbb{R}_3[x]$ es $B_u = (1, x, x^2, x^3)$. Al aplicar ϕ, ψ a un polinomio genérico $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ se tiene:

$$\phi(p(x)) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \qquad \psi(p(x)) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3.$$

Aplicando ϕ, ψ sobre los elementos de B_u, se obtienen sus coordenadas en B_u^*:

$$\phi = (1, 1, 1, 1)_{B_u^*}, \qquad \psi = (1, -1, 1, -1)_{B_u^*},$$

en particular, $\{\phi, \psi\}$ es linealmente independiente.

Para obtener la aplicación h requerida, basta con ampliar $\{\phi, \psi\}$ hasta una base ordenada B^* de $\mathbb{R}_4^*[x]$, digamos, $B^* = (\varphi^1, \varphi^2, \phi, \psi)$, y definir h (haciendo uso del teorema fundamental de existencia de aplicaciones lineales) imponiendo:

(a) $h(\phi) = h(\psi) = 0$ (de modo que $\{\phi, \psi\} \subset \text{Nuc } h$, y que $h \circ h = h$ se verifique sobre ϕ, ψ), y

(b) $h(\varphi^i) = \varphi^i$, para $i = 1, 2$ (de modo que, 'por una parte, el rango de h sea 2, lo que implica $L\{\phi, \psi\} = \text{Nuc } h$ y, por otra, que $h \circ h = h$ se verifique también sobre φ^1, φ^2)[4].

Por sencillez, escogemos φ^1, φ^2 como los dos primeros elementos de B_u^*, lo cual puede hacerse ya que forman un conjunto linealmente independiente con ϕ, ψ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \ (\neq 0).$$

Así, con esta elección de B^*, h verifica:

$$M(h, B^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y también} \quad M(h, B_u^* \leftarrow B^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para calcular la matriz requerida $M(h, B_u^*)$, obtenemos primero de manera inmediata:

$$M(I_{V^*}, B_u^* \leftarrow B^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La inversa de esta matriz, obtenida bien por el procedimiento de Gauss-Jordan bien por el algoritmo[5] $A^{-1} = \Delta^t / |A|$ es:

$$M(I_{V^*}, B^* \leftarrow B_u^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

---

[4] Aunque en principio esto es sólo una elección sencilla para que se verifiquen las condiciones impuestas sobre h, el estudio teórico de los endomorfismos que satisfacen $h \circ h = h$ (*proyectores*) muestra que todos ellos se construyen mediante una elección del modo aquí llevado a cabo.

[5] El cálculo se puede simplificar teniendo en cuenta que la matriz con la que se trabaja es del tipo $\begin{pmatrix} E & F \\ 0 & G \end{pmatrix}$ con $E = I_2$, y $\begin{pmatrix} E & F \\ 0 & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E' & F' \\ 0 & G' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EE' & EF' + FG' \\ 0 & GG' \end{pmatrix}$. Así, la segunda matriz es la inversa de la primera si y sólo si $E' = I_2$, $G' = G^{-1}$ y $F' = -FG' = -FG^{-1}$.

Así, la matriz pedida es:

$$M(h,B_u^*) = M(h,B_u^* \leftarrow B^*)\cdot M(I_{V^*},B^* \leftarrow B_u^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

esto es:

$$\boxed{M(h,B_u^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

De hecho, es inmediato comprobar que $M(h,B_u^*)M(h,B_u^*) = M(h,B_u^*)$ (por lo que $h \circ h = h$), que la matriz se anula al multiplicarla por las coordenadas de ϕ y ψ en B_u^* (por lo que ambas formas están incluidas en Nuc h) y que el rango de la matriz es dos (por lo que el núcleo de h está generado por $\{\phi,\psi\}$).[6]

[6]Como observación, B^* será la base dual de alguna matriz B de $\mathbb{R}_3[x]$. Esta base se puede calcular con facilidad sin más que trasponer la matriz (ya calculada) $M(I_{V^*},B^* \leftarrow B_u^*)$. No obstante, en ningún momento se necesita (ni se pide) el cálculo de B.

GEOMETRÍA I
(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)
Segunda prueba parcial (19/01/2017)

1. **[2 puntos]**. Sea $V(K)$ un e.v. de dimensión finita y sean $\phi, \psi \in V^*$. Demostrar que si $\mathrm{Nuc}(\phi) \subset \mathrm{Nuc}(\psi)$ entonces $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente. Discutir si es cierto el recíproco.

2. **[2 puntos]**. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Para todo endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ existe una base B de $V(K)$ y un $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ ($n = \dim_K V$), tales que: $M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$.

   b) Sea $A \in M_{3\times 4}(K)$, $A = (a_{ij})$. Si

   $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} = 0,$$

   entonces rango $(A) \leq 2$.

3. **[3 puntos]**. En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$, se consideran los subespacios de las matrices simétricas $S_2(\mathbb{R})$ y antisimétricas $A_2(\mathbb{R})$.

   - Determinar, en el caso de que sea posible, un endomorfismo f de $M_2(\mathbb{R})$ tal que:
     (i) $f \circ f = 0$, y
     (ii) $A_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Im}(f)$.
   - Idem reemplazando en (ii) las matrices antisimétricas $A_2(\mathbb{R})$ por las simétricas $S_2(\mathbb{R})$.

4. **[3 puntos]**. Se considera el e.v. de polinomios $\mathbb{R}_2[x]$.

   - Determinar una aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ que verifique:
     (i) $\mathrm{Nuc}(f) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = p'(1) = 0\}$, y
     (ii) $\mathrm{Im} f = \mathrm{Nuc}(\phi)$, siendo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \phi(x, y, z) = x - z$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
     calculando su matriz en las bases usuales B_u, B'_u de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.
   - Calcular an(Nuc f) y $\mathrm{Nuc} f^t$.

Duración: 2:30 min.

SOLUCIONES

1. Sea $V(K)$ un e.v. de dimensión finita y sean $\phi, \psi \in V^*$. Demostrar que si $\mathrm{Nuc}(\phi) \subset \mathrm{Nuc}(\psi)$ entonces $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente. Discutir si es cierto el recíproco.

Si ϕ es nula entonces $\{\phi, \psi\}$ es trivialmente linealmente dependiente (además, en ese caso $\mathrm{Nuc}(\phi) = V \subset \mathrm{Nuc}(\psi)$, por lo que ψ también deberá ser nula). En caso contrario, su núcleo tiene dimensión $n-1$ (donde $n = \mathrm{dim}V$). Tomemos una base de ese núcleo $B_{\mathrm{Nuc}(\phi)} = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ y ampliémosla a una base $B = (v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ de V. Se tiene entonces

$$M(\phi, \{1\} \leftarrow B) = (\phi(v_1), \ldots, \phi(v_{n-1}), \phi(v_n)) = (0, \ldots, 0, \phi(v_n)),$$

donde $\phi(v_n) \neq 0$. Como se parte de que Nuc $\phi \subset$ Nuc ψ entonces

$$M(\psi, \{1\} \leftarrow B) = (\psi(v_1), \ldots, \psi(v_{n-1}), \psi(v_n)) = (0, \ldots, 0, \psi(v_n)).$$

En consecuencia:

$$M(\psi, \{1\} \leftarrow B) = \frac{\psi(v_n)}{\phi(v_n)} M(\phi, \{1\} \leftarrow B)$$

esto es, $\psi = \frac{\psi(v_n)}{\phi(v_n)}\phi$, por lo que $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente.

Con respecto al recíproco, si $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente y ninguna de las formas es 0 entonces $\psi = a\phi$ para algún $a \neq 0$ y, claramente, Nuc $(\phi) =$ Nuc (ψ). No obstante, si ϕ es la forma lineal nula (esto es, Nuc $(\phi) = V$) y ψ no lo es, entonces $\{\phi, \psi\}$ es trivialmente linealmente dependiente pero Nuc $(\phi) \not\subset$Nuc (ψ).

Nota. En los apuntes (archivo sobre espacio dual, Prop. 3.46) puede consultarse la demostración del resultado cuando ninguna de las dos formas lineales es la forma lineal 0.

2 [**2 puntos**]. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Para todo endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ existe una base B de $V(K)$ y un $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ($n = \dim_K V$), tales que: $M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$.

b) Sea $A \in M_{3\times 4}(K)$, $A = (a_{ij})$. Si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} = 0,$$

entonces rango $(A) \leq 2$.

- a) FALSA

Como contraejemplo, tómese un múltiplo de la aplicación identidad como, p.ej., $2I_{\mathbb{R}^n}$. De hecho, en cualquier base B de $\mathbb{R}^n$, se tiene $M(2I_{\mathbb{R}^n}, B) = 2I_n$. Otro contraejemplo simple en $V = \mathbb{R}^n$ se construye tomando cualquier matriz A cuya traza no sea igual a su rango (por ejemplo, que tenga traza negativa o no entera) y definiendo f por $M(f, B_u) = A$. Si existiera la base B del enunciado, se obtendría el absurdo traza$(M(f, B)) = r =$ traza$(f) =$ traza $(M(f, B_u)) =$ traza$(A) \neq r$.

Explicación. Se sabe que es posible encontrar *dos* bases, B y B' tales que la matriz de f en esas bases se escribe como en el enunciado (¡compruébese para $2I_{\mathbb{R}^n}$!); más aún, ese tipo de resultado se establece para cualquier aplicación lineal $V \to V'$, aun cuando $V \neq V'$. En consecuencia, toda matriz cuadrada es *equivalente* a una como la del enunciado.

Sin embargo, cuando nos restringimos a endomorfismos e imponemos $B = B'$, no podemos obtener una tal matriz en general. De hecho, la matriz del enunciado se puede obtener si y sólo si $f \circ f = f$ (véase el ejercicio al final de la sección 3.3.4). Como consecuencia, una matriz cuadrada A resulta ser *semejante* a una de las del enunciado si y sólo si $A \cdot A = A$. Así, cualquier matriz que *no* verifique esta igualdad se puede tomar como la matriz de un endomorfismo que sirva de contraejemplo.

Nota. Si no has resuelto bien este apartado, repasa en el archivo sobre expresión matricial lo que eran matrices equivalentes (sección 3.3.2) y semejantes (sección 3.3.4). Es especialmente importante que mires la Prop. 3.65 para que entiendas cuándo se puede conseguir el tipo de matriz del enunciado (lo que resulta muy útil desde el punto de vista práctico), así como que compares las Prop. 3.67 y 3.69.

- b) FALSA

Un contraejemplo es la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Explicación. Si se hubiera asegurado que las dos primeras columnas son independientes, el rango sería 2, ya que los determinantes del enunciado asegurarían que la tercera y cuarta columna dependen linealmente de las dos primeras[1]. Sin embargo, al no tener asegurado que las dos primeras columnas sean independientes, se puede obtener un contraejemplo empezando con cualquier matriz regular $C \in M_3(K)$ y tomando $A = (b|C)$ poniendo como primera columna b de A cualquier múltiplo de la primera columna de C (no necesariamente 0).

[1] De hecho, tomando un menor de orden 2 no nulo de las dos primeras columnas, esos determinantes "orlarían" el menor, por lo que se estaría llevando a cabo un procedimiento estándar de cálculo del rango de A.

3 En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$, se consideran los subespacios de las matrices simétricas $S_2(\mathbb{R})$ y antisimétricas $A_2(\mathbb{R})$.

- Determinar, en el caso de que sea posible, un endomorfismo f de $M_2(\mathbb{R})$ tal que:
  (i) $f \circ f = 0$, y
  (ii) $A_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Im}(f)$.
- Idem reemplazando en (ii) las matrices antisimétricas $A_2(\mathbb{R})$ por las simétricas $S_2(\mathbb{R})$.

Recordemos en primer lugar que una matriz A es simétrica cuando $A = A^t$ y antisimétrica cuando $A = -A^t$. Así, los conjuntos $B_S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ y $B_A = \{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$ son bases de $S_2(\mathbb{R})$ y $A_2(\mathbb{R})$, respectivamente. Además, la unión

$$B = B_S \cup B_A$$

es una base de $M_2(\mathbb{R})$ (esto es consecuencia de $S_2(\mathbb{R}) \cap A_2(\mathbb{R}) = \{0\}$; más aún, se sabe que, en general, $M_n(K) = S_n(K) \oplus A_n(K)$ siempre que el cuerpo K tenga característica distinta de 2).

Por otra parte, la condición (i) significa $f(f(v)) = 0$ para todo $v \in V$, esto es, $f(v) \in$Nuc f para todo $v \in V$ o, equivalentemente:

$$\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Nuc}f.$$

Primera cuestión. Para construir f basta con asegurar que la imagen de f sea igual a $A_2(\mathbb{R})$ y que B_A (y, por tanto, todo $A_2(\mathbb{R})$) se aplique en 0. Por ejemplo, el endomorfismo f que se obtiene imponiendo sobre la base B,

$$f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y extendiendo estas igualdades por linealidad, satisface claramente (i) e (ii).

Segunda cuestión. Como se pide $S_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Im}f$, necesariamente rango$(f) \geq 3$. Pero como Im$f$ debe estar incluida en Nuc$f$, también dim(Nuc f)≥ 3. Esto contradice el teorema del rango, pues

$$4 = \dim_{\mathbb{R}}(M_2(\mathbb{R})) = \dim_K(\mathrm{Im}f) + \dim_K(\mathrm{Nuc}f) \geq 3 + 3 = 6,$$

lo cual resulta absurdo. Por tanto, tal f no puede contruirse.

4 Se considera el e.v. de polinomios $\mathbb{R}_2[x]$.

- Determinar una aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ que verifique:
  (i) $\text{Nuc}(f) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = p'(1) = 0\}$, y
  (ii) $\text{Im}f = \text{Nuc}(\phi)$, siendo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \phi(x, y, z) = x - z$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
  calculando su matriz en las bases usuales B_u, B'_u de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.
- Calcular an(Nuc f) y Nucf^t.

Observemos en primer lugar

$$\begin{aligned}
\text{Nuc}f = &\ \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a + b + c = 0,\ b + 2c = 0\} = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] : b = -2c,\ a = c\} \\
= &\ L\{1 - 2x + x^2\} \\
\text{Im}f = &\ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\} = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} \\
= &\ L\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\},
\end{aligned}$$

con lo que se obtienen una base del núcleo y de la imagen de f. Completemos la base del núcleo hasta una base de $\mathbb{R}_2[x]$, por ejemplo: $B = (1 - 2x + x^2, x, x^2)$. La aplicación lineal f obtenida extendiendo por linealidad las igualdades:

$$f(1 - 2x + x^2) = (0, 0, 0), \qquad f(x) = (1, 0, 1), \qquad f(x^2) = (0, 1, 0),$$

verifica las propiedades requeridas. De hecho, la imagen de f está generada por una base de Nucϕ, por lo que se cumple (ii); como $1 - 2x + x^2$ pertenece a su núcleo, y éste tiene dimensión 1 (no puede ser > 1 porque la imagen tiene dimensión 2 y el teorema del rango es aplicable), también se cumple (i).

Por construcción, se verifica:

$$M(f, B'_u \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que B_u difiere de B sólo en el primer elemento, para obtener la matriz requerida basta con calcular[2] $f(1)$. Como $1 = (1 - 2x + x^2) + 2x - x^2$, se sigue:

$$f(1) = f(1 - 2x + x^2) + 2f(x) - f(x^2) = (0, 0, 0) + 2(1, 0, 1) - (0, 1, 0) = (2, -1, 2)$$

por lo que

$$M(f, B'_u \leftarrow B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[2] Alternativamente, se puede obtener de manera más sistemática mediante un cambio de base. Como $M(I, B_u \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculando la inversa, $M(I, B \leftarrow B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y, entonces:

$$M(f, B'_u \leftarrow B_u) = M(f, B'_u \leftarrow B) \cdot M(I, B \leftarrow B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para el segundo apartado, Nuc$f$ se define como el anulador de dos formas lineales $\{\phi, \psi\}$, concretamente:

$$\phi(p(x)) = p(1) = a + b + c, \qquad \psi(p(x)) = p'(1) = b + 2c \qquad \forall p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x],$$

por lo que an(Nuc$f$)= an(an($\{\phi, \psi\}$))= $L\{\phi, \psi\}$.

Finalmente, podemos calcular de modo directo Nucf^t. De hecho, si $A = M(f^t, B_u^* \leftarrow (B_u')^*)$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Cálculo Nuc}(A): \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Nuc}(A) = L\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Esto es, si escribimos $B_u^* = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$, una base de Nuc$f^t$ es $\{\phi^1 - \phi^2\}$ y

$$\text{Nuc}f^t = L\{\phi^1 - \phi^2\} = L\{\phi\},$$

donde ϕ es la forma lineal que aparece en el punto (ii) del enunciado.[3]

[3] Este coincidencia no es casual y, de hecho, se podría haber deducido directamente de la igualdad (que se sabe por la teoría) Nucf^t = an(Imf). En efecto, como por la condición (ii) se impuso Imf =Nuc(ϕ) se sigue ahora Nucf^t = an(anϕ)= $L\{\phi\}$.

Geometría I
Doble Grado Informática-Matemáticas

Examen Tema 3 (22/01/2016)

1. (a) *(2 puntos) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $f, g \in End(V)$ tales que $f \circ g = 1_V$. Demostrar que f, g son automorfismos y que $g = f^{-1}$.*

Como f, g son endomorfismos, son aplicaciones lineales de V en sí mismo. Para que sean automorfimos basta probar que son biyectivas. Como ambas aplicaciones van entre espacios vectoriales de la misma dimensión (de hecho, entre el mismo espacio vectorial), podemos reducirnos a probar que son inyectivas o bien sobreyectivas.

Sea $x \in \ker(g)$. Entonces, $x = 1_V(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$ donde hemos usado que $g(x) = 0$ y que f es lineal. Esto nos dice que $\ker(g) = \{0\}$, luego g es inyectiva. Por tanto, g es biyectiva. Ahora tenemos dos opciones:

(I) Como g es biyectiva, existe su inversa g^{-1}, y $f = f \circ 1_V = f \circ (g \circ g^{-1}) = (f \circ g) \circ g^{-1} = 1_V \circ g^{-1} = g^{-1}$. Por tanto, f también es biyectiva. Finalmente, $f^{-1} = (g^{-1})^{-1} = g$ y hemos terminado.

(II) Dado $y \in V$, tenemos $f(g(y)) = (f \circ g)(y) = 1_V(y) = y$, luego $y \in \mathrm{Im}(f)$. Como y es arbitrario en V, entonces f es sobreyectiva, luego f es biyectiva. Esto último implica que existe su inversa f^{-1}, y $g = 1_V \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ 1_V = f^{-1}$. En particular, g es también biyectiva y ya hemos probado que $g = f^{-1}$.

(b) *(2 puntos) Sea U un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Probar que las ecuaciones implícitas (independientes) de U vienen dadas por*

$$\left.\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\} (\star)$$

si y sólo si las formas lineales $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ definidas mediante

$$\varphi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ i = 1 \ldots, m$$

forman base del anulador de U.

El anulador de U es $\mathrm{an}(U) = \{\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \varphi(x) = 0,\ \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in U\}$.

Supongamos que las ecuaciones implícitas de U vienen dadas por el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(\star)$. Considero las formas $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in (\mathbb{R}^n)^*$ dadas en el enunciado. Notemos que sobre vectores $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios, $\varphi_i(x)$ no tiene porqué anularse, pero sí se anula $\varphi_i(x)$ para todo $x \in U$, porque x cumple la i-ésima ecuación de $(\star)$. Por definición de anulador de U, esto nos dice que $\varphi_i \in \mathrm{an}(U)$, $\forall i = 1, \ldots, m$. Además, las formas $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ son linealmente independientes porque las ecuaciones de $(\star)$ se suponen independientes. Como la dimensión de $\mathrm{an}(U)$ es $n - \dim U$ y $\dim U = n-$[número de ecuaciones independientes de $(\star)$] $= n - m$, entonces $\dim \mathrm{an}(U) = n - (n - m) = m$. Como $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ es un conjunto linealmente independiente en el espacio vectorial $\mathrm{an}(U)$, que tiene dimensión m, entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ es base de $\mathrm{an}(U)$.

Recíprocamente, supongamos que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ es base de $\mathrm{an}(U)$. En particular, $\varphi_i \in \mathrm{an}(U)$ $\forall i = 1, \ldots, m$ luego $\varphi_i(x) = 0$ $\forall x \in U$ por definición de anulador, de donde

$$U \subseteq \{\text{soluciones de } (\star)\}.$$

Queda ver que se da la igualdad en la última inclusión. Basta que se dé la igualdad entre las dimensiones. Veamos estoúltimo y habremos terminado:

$$\dim U = n - \dim \mathrm{an}(U) \overset{\text{(a)}}{=} n - m,$$

donde en (a) hemos usado que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ es base de $\mathrm{an}(U)$. Como las formas $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ son linealmente independientes, también lo son las ecuaciones que forman $(\star)$. Es decir, lo anterior se escribe

$$\dim U = n - [\text{número de ecuaciones independientes de } (\star)] = \dim\{\text{soluciones de } (\star)\}.$$

2. *En el espacio vectorial $P_2[x]$ de polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que 2, se consideran las formas lineales $\psi_1, \psi_2 \colon P_2[x] \to \mathbb{R}$ dadas por*

$$\psi_1(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\, dx, \qquad \psi_2(p(x)) = p(0), \qquad p(x) \in P_2[x].$$

En el espacio vectorial $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ de matrices simétricas reales de orden 2, se considera el subespacio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \;/\; \begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a-b-c=0 \end{array} \right\}.$$

(a) *(3 puntos) Encontrar una aplicación lineal $f \colon P_2[x]^* \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ tal que $\dim\ker(f) = 2$ y $f(U) = W$, donde $U = L(\{\psi_1, \psi_2\})$.*

Tomamos un polinomio arbitrario $p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2[x]$. Entonces,

$$\psi_1(p(x)) = \int_{-1}^{1} (a + bx + cx^2) dx = \left[ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = 2a + \frac{2}{3}c.$$

Por tanto, las coordenadas de ψ_1 respecto de $B_u^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ son

$$\psi_1 \equiv (\psi_1(1), \psi_1(x), \psi_1(x^2))_{B_u^*} = (2, 0, 2/3)_{B_u^*}. \tag{1}$$

Análogamente, $\psi_2(p(x)) = p(0) = a$, luego las coordenadas de ψ_2 respecto de B_u^* son

$$\psi_2 \equiv (\psi_2(1), \psi_2(x), \psi_2(x^2))_{B_u^*} = (1, 0, 0)_{B_u^*}. \tag{2}$$

Como la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 2, tenemos que $(2,0,2/3)$ y $(1,0,0)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$. Por tanto, ψ_1, ψ_2 son linealmente independientes en $P_2[x]^*$, luego $\dim U = 2$. Amplío $\{\psi_1, \psi_2\}$ a una base de $P_2[x]^*$. Como

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2/3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2/3 \neq 0,$$

entonces $\{(2,0,2/3),(1,0,0),(0,1,0)\}$ son base de $\mathbb{R}^3$. Esto implica que $\{\psi_1, \psi_2, \varphi_2\}$ son base de $P_2[z]^*$. Ya tenemos la parte de la izquierda del cuadro que definirá f vía el teorema fundamental de las aplicaciones lineales. Vamos a razonar la parte de la derecha de dicho cuadro:

Las ecuaciones de W son

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ a-b-c=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ a=0 \end{array}\right\},$$

que son dos ecuaciones independientes. Esto nos dice que $\dim W = 1$ y resolviendo, que $\left\{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base de W. Como $\dim \ker(f) = 2$, la fórmula de la nulidad y el rango nos dice que $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim P_2[x]^* - 2 = 3 - 2 = 1$. Como $W = f(U) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ y $\dim W = \dim \mathrm{Im}(f) = 1$, tenemos que $W = \mathrm{Im}(f)$. Ahora podemos formar el cuadro que definirá f:

$$\begin{array}{rcl} f\colon P_2[x]^* & \to & \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \\ \psi_1 & \mapsto & f(\psi_1) = A \\ \psi_2 & \mapsto & f(\psi_2) = A \\ \varphi_2 & \mapsto & f(\varphi_2) = A \end{array}$$

(no es la única opción: podemos poner a la derecha cualesquiera tres múltiplos de A siempre que $f(\psi_1)$ o bien $f(\psi_2)$ sea distinto de cero, ya que esto garantiza que $f(U) = W$). Por el teorema fundamental de las aplicaciones lineales, existe una única $f\colon P_2[x]^* \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ aplicación lineal que cumple este cuadro. A partir del cuadro, es evidente que $\mathrm{Im}(f) = W$ luego $f(U) = W$ y $\dim \ker(f) = 2$.

(b) *(3 puntos) Para la aplicación f del apartado anterior, calcular la matriz $M(f, B_u^*, B_u')$ siendo B_u^* la base dual de $B_u = \{1, x, x^2\}$ y $B_u' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.*

Calculamos $M(f, B_u^*, B_u')$ por columnas. De (2) se deduce directamente que $\varphi_1 = \psi_2$. Por tanto,

$$f(\varphi_1) = f(\psi_2) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde la primera columna de $M(f, B_u^*, B_u')$ es $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Hacemos lo mismo con las otras dos columnas de $M(f, B_u^*, B_u')$: Por definición, $f(\varphi_2) = A$ luego la segunda columna de

$M(f, B_u^*, B_u')$ es igual que la primera. Para la tercera columna necesitamos calcular $f(\varphi_3)$, luego escribimos primero φ_3 en combinación lineal de $\{\psi_1, \psi_2, \varphi_2\}$: pongamos $\varphi_3 = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \delta\varphi_2$, siendo $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ incógnitas a calcular. Entonces,

$$0 \overset{\text{(a)}}{=} \varphi_3(1) = \alpha\psi_1(1) + \beta\psi_2(1) + \delta\varphi_2(1) \overset{\text{(b)}}{=} 2\alpha + \beta$$

donde en (a) hemos usado la definición de bases duales, y en (b) hemos usado las ecuaciones (1), (2) anteriores. Analogamente,

$$\begin{array}{l} 0 = \varphi_3(x) = \alpha\psi_1(x) + \beta\psi_2(x) + \delta\varphi_2(x) = \delta \\ 1 = \varphi_3(x^2) = \alpha\psi_1(x^2) + \beta\psi_2(x^2) + \delta\varphi_2(x^2) = \frac{2}{3}\alpha \end{array}$$

resolviendo el sistema 3×3 anterior queda $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = -3$, $\delta = 0$ de donde $\varphi_3 = \frac{3}{2}\psi_1 - 3\psi_2$. Finalmente,

$$f(\varphi_3) \quad = \quad \tfrac{3}{2}f(\psi_1) - 3f(\psi_2) = \left(\tfrac{3}{2} - 3\right)A = -\tfrac{3}{2}A,$$

de donde la tercera columna de $M(f, B_u^*, B_u')$ es $-\frac{3}{2}$ por cualquiera de las dos primeras. En resumen:

$$M(f, B_u^*, B_u') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3/2 \\ -1 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$