# EDIP:
# RELACIÓN 5

**GRUPO B4:**
Moreno Guerrero, Alejandro
Nieto López, Pablo
Pérez Ruiz, Daniel
Suárez González, David
Zufrí Quesada, Daniel

**1. Sea "X" una variable aleatoria con función masa de probabilidad P(X=i) = k·i; i = 1 , … , 20.**

**a) Determinar el valor de "k", la función de distribución y las probabilidades mostradas a continuación.**

- Para saber cuál es el valor de la constante "k", utilizaremos la definición de la función masa de probabilidad, sabiendo que:

$$\sum_{i=1}^{20} P[X = x_i] = 1$$

- Procedamos a calcularlo:

$$\sum_{i=1}^{20} P[X = x_i] = 1 \Leftrightarrow K \cdot \sum_{i=1}^{20} i = 1 \Leftrightarrow K \cdot 210 = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{210}$$

- Es por tanto que:

$$P(X = i) = \frac{1}{210} \cdot i \text{ }, \forall i \in \{1, \dots, 20\}$$

- Ahora procederemos a calcular las siguientes probabilidades:

$$P[X = 4] = \frac{1}{210} \cdot 4 = \frac{2}{105}$$

$$P[X < 4] = \frac{1}{210} + \frac{2}{210} + \frac{3}{210} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$$

$$P[3 \leq X \leq 10] = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=3}^{10} i = \frac{52}{210} = \frac{26}{105}$$

$$P[3 < X \leq 10] = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=4}^{10} i = \frac{7}{30}$$

$$P[3 < X < 10] = \frac{1}{120} \cdot \sum_{i=4}^{9} i = \frac{13}{70}$$

- La función de distribución quedaría de la siguiente manera:

$$F_x(X) = F[X \leq x] = \sum_{i=1}^{x} \frac{i}{210}$$

**b) Supongamos que un jugador gana 20 monedas si al observar esta variable obtiene un valor menor que 4, gana 24 monedas si obtiene el valor 4 y, en caso contrario, pierde una moneda. Calcular la ganancia esperada del jugador y decir si el juego le es favorable.**

- Para este apartado primero calcularemos las siguientes probabilidades:

$$P[X < 4] = \frac{1}{35}$$

$$P[X = 4] = \frac{2}{105}$$

$$P[X > 4] = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=5}^{20} i = \frac{20}{21}$$

- Ahora, calcularemos la esperanza matemática de la variable aleatoria X:

$$E[X] = \sum_{i} x_i \cdot P[X = x_i] = \sum_{i=3}^{3} x_i \cdot P[X = x_i] = \frac{20}{35} + \frac{48}{105} - \frac{20}{21} = \frac{8}{105}$$

- Como E[X] $>$ 0, el juego le es favorable, siempre que su apuesta inicial sea menor a 8/105.

**2. Sea X el número de bolas blancas obtenidas al sacar dos de una urna con 10 bolas de las que 8 son blancas. Calcular:**

**a) Función masa de probabilidad y función de distribución.**

- Calcularemos la función masa de probabilidad en primer lugar:

  Tenemos tres casos: el primero es que no saquemos ninguna bola blanca, el segundo es que una de las dos bolas que hemos sacado sea blanca y la última posibilidad es que cojamos dos bolas blancas:

$$P[X=0]=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$$

$$P[X=1]=\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{16}{45}$$

$$P[X=2]=\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$$

- Ahora que tenemos la función masa de probabilidad, calcularemos la función de distribución:

$$F_x(X)=\begin{cases} 0, \ \ si\ 0>x \\ \frac{1}{45}, si\ 0\le x<1 \\ \frac{16}{45}, si\ 1\le x<2 \\ 1, si\ 2\le x \end{cases}$$

**b) Media, mediana y moda, dando la interpretación de cada una de estas medidas.**

- Calcularemos la esperanza matemática de la variable aleatoria X, cuyo resultado será la media.

$$E[X]=\frac{16}{45}+2\cdot\frac{28}{45}=\frac{8}{5}$$

- La moda de la variable, Mo(X), es igual a 2, ya que es el valor de X que más se repite.

- La mediana de la variable, Me(X), es igual a 2, ya que Fx(2) ≥ 1/2.

**c) Intervalo intercuartílico, especificando su interpretación.**

- El intervalo (o recorrido) intercuartílico se define como $R=Q_3-Q_1$. En dicho intervalo es donde se encuentra el 50% central de los datos.

$$Q_3=2,\ \ Q_1=1\Rightarrow R=2-1=1$$

**3. El número de lanzamientos de una moneda hasta salir cara es una variable aleatoria con distribución P(X = x)=2^(-x); x = 1, 2,...**

**a) Probar que la función masa de probabilidad está bien definida.**

- Tenemos que verificar que cumple las propiedades de una función masa de probabilidad.

- 1. La función es no nula, es decir, $P[X = x] > 0 \ \forall x \in \{1,2,\dots,n\}$

- 2. La suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1.

$$\sum_{i=1}^{\infty} P[X = x_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Hemos utilizado que es una serie geométrica de razón 1/2 , y por tanto es convergente.

**b) Calcular la probabilidad de que el número de lanzamientos necesarios para salir cara esté entre 4 y 10.**

$$P[4 \le X \le 10] = \sum_{i=4}^{10} \frac{1}{2^i} = \frac{127}{1024}$$

**c) Calcular los cuartiles y la moda de la distribución, interpretando los valores.**

- Los datos pedidos son:

Mo = 1 porque $P[X = 1] \ \ge \ P[X = x]$ , con $x \ge 1$.
Q1 = 1 porque $P[X = 1] = 1/2 > 1/4$
Q2 = 1 porque $P[X = 1] = 1/2$
Q3 = 2 porque $P[X = 2] = 1/4$ y $P[X = 1] + P[X = 2] \ge 3/4$.

**d) Calcular la función generatriz de momentos y, a partir de ella, el número medio de lanzamientos necesarios para salir cara y la desviación típica.**

- La función generatriz de momentos sería la siguiente:

$$\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{2^x} = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{e^t}{2}\right)^x = \frac{\frac{e^t}{2}}{1-\frac{e^t}{2}}, \quad \forall t \in [-\infty, \log 2[$$

Esta serie es convergente si $t < \log(2)$.

- Calcularemos E[X] para obtener el número medio de lanzamientos necesarios para que salga cara:

$$E[X] = M_x'(t) = \frac{\frac{e^t}{2} \cdot \left(1 - \frac{e^t}{2}\right) - \frac{e^t}{2} \cdot \left(-\frac{e^t}{2}\right)}{\left(1 - \frac{e^t}{2}\right)^2} \rightarrow t = 0 \rightarrow 2$$

- Finalmente, calcularemos el momento no centrado de orden 2, es decir, la varianza, para obtener así la desviación típica:

$$E[X^2] = M_x''(t) = \frac{2e^t \cdot (e^t - 2)^2 - 2e^t \cdot (e^t - 2) \cdot e^t}{(e^t - 2)^4} \rightarrow t = 0 \rightarrow 6$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 6 - 2^2 = 2$$

$$\sigma_x = \sqrt{2}$$

**4. Sea X una variable aleatoria con función de densidad**

$$\mathbf{f(x)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{k1(x\ +\ 1),} & \mathbf{0\ \leq\ x\ \leq\ 4} \\ \mathbf{k2x2,} & \mathbf{4 <\ x\ \leq\ 6} \end{Bmatrix}$$

**Sabiendo que P(0 ≤ X ≤ 4) = 2/3, determinar k1, k2, y deducir su función de distribución.**

$$P(0 \leq x \leq 4) = \int_0^4 k_1(x+1)\,dx = \mathrm{k}_1\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^4 = 12k_1 = \frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{k_1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}$$

$$P(4 < x \leq 6) = \int_4^6 k_2x^2\,dx = \mathrm{k}_2\left[\frac{x^3}{3}\right]_4^6 = \frac{152}{3}k_1 = \frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{k_1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{152}}$$

$$\mathrm{F_x(X)} = \begin{Bmatrix} 0, & \mathrm{x} < 0 \\ \left|\frac{\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}}{36}\right|_0^{\mathrm{x}}, & 0 \leq \mathrm{x} \leq 4 \\ \frac{2}{3}+\frac{1}{152}\left|\frac{\mathrm{x}^3}{3}\right|_4^{\mathrm{x}}, & 4 \leq \mathrm{x} \leq 6 \\ 1, & 6 < x \end{Bmatrix}$$

**5. La dimensión en centímetros de los tornillos que salen de cierta fábrica es una variable aleatoria, X, con función de densidad**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{k}{x^2}, \qquad 1 \le x \le 10}$$

**a) Determinar el valor de k, y obtener la función de distribución.**
**b) Hallar la probabilidad de que la dimensión de un tornillo esté entre 2 y 5 cm.**
**c) Determinar la dimensión máxima del 50 % de los tornillos con menor dimensión y la dimensión mínima del 5 % con mayor dimensión.**
**d) Si Y denota la dimensión de los tornillos producidos en otra fábrica, con la misma media y desviación típica que X, dar un intervalo en el que tome valores la variable Y con una probabilidad mínima de 0.99.**

**a)**

$$\int_1^{10} f(x)\,dx = 1 <=> \mathrm{k}\int_1^{10} \frac{1}{x^2}\mathrm{dx} \;= \mathrm{k}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^{10} = \frac{9}{10}k \;= 1$$

$$\boldsymbol{k} \;= \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{9}}$$

$$\mathrm{F_x(X)} = \begin{Bmatrix} 0, & \mathrm{x} < 1 \\ \frac{10}{9}\left|\frac{-1}{\mathrm{x}}\right|_1^{\mathrm{x}}, & 1 \le \mathrm{x} \le 10 \\ 1, & 10 < x \end{Bmatrix}$$

**b)**

$$P(2 \le x \le 5) = F_x(5) - F_x(2) = \tfrac{1}{3}$$

**c)** Me:

$$F_x(x) - F_x(1) = \tfrac{-10}{9x} + \tfrac{10}{9} = \tfrac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{x} \;= \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{11}} = \mathbf{1,8182}$$

$P_{95}$:

$$F_x(x) - F_x(1) = \tfrac{-10}{9x} + \tfrac{10}{9} = 0{,}95$$

$$\boldsymbol{x} \;= \frac{\mathbf{200}}{\mathbf{29}} = \mathbf{6,8966}$$

**d)** Usando la desigualdad de Chebychev:

$P(E[X] - k * Var(X) < Y < E[X] + k * Var(X)) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

$1 - \frac{1}{k^2} \geq 0.99 \rightarrow k \geq 10 \rightarrow$ Para k=10, P(...) = 0.99

Calculamos la varianza:

$E[X] = 1.9021 = E[Y]$

$E[X^2] = 19.0272$

$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 15.4029 = Var(Y)$

Sacamos el intervalo:

$[\ E[X] - 10*Var(X), E[X] + 10*Var(X)] = [-152.1269\ , 155.9311]$

**6. Sea X una variable aleatoria con función de densidad**

$$\mathbf{F_x(X)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{2x - 1}}{\mathbf{10}}, & \mathbf{1} < x \leq 2 \\ \mathbf{0.4}, & \mathbf{4} < x \leq 6 \end{cases}$$

**a) Calcular P(1.5 < X ≤ 2), P(2.5 < X ≤ 3.5), P(4.5 ≤ X < 5.5), P(1.2 < X ≤ 5.2).**
**b) Dar la expresión general de los momentos no centrados y deducir el valor medio de X.**
**c) Calcular la función generatriz de momentos de X.**

a) Calculamos las primitivas para facilitar cálculos:

$$\int_y^t \frac{2x-1}{10}\,dx = \frac{1}{10}\int_y^t 2x - 1\,\mathrm{dx} \;= \frac{1}{10}[\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}]_y^t \qquad \mathrm{y,t} \in [1,2]$$

$$\int_y^t 0{,}4\,dx = 0{,}4[\mathrm{x}]_y^t \qquad \mathrm{y,t} \in [4,6]$$

$$P(1{,}5 < x \leq 2) = F_x(2) - F_x(1{,}5) = \frac{1}{8}$$
$$P(2{,}5 < x \leq 3{,}5) = F_x(2) - F_x(1{,}5) = 0$$
$$P(4{,}5 \leq x < 5{,}5) = F_x(5{,}5) - F_x(4{,}5) = \frac{2}{5}$$
$$P(1{,}2 < x \leq 5{,}2) = F_x(2) - F_x(1{,}2) + F_x(5{,}2) - F_x(4) = 0{,}656$$

b)

$$\mathrm{m_k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x^k(2x-1)}{10}\mathrm{dx} + \int_4^6 x^k 0{,}4\,\mathrm{dx}$$

$$\mathrm{E(x)} = \mathrm{m_1} = \frac{1}{10}\int_1^2 2x^2 - x\,\mathrm{dx} + 0{,}4\int_4^6 x\,\mathrm{dx} = \frac{1}{10}\left[\frac{2}{3}\mathrm{x}^3 - \frac{\mathrm{x}^2}{2}\right]_1^2 + 0{,}4\left[\frac{\mathrm{x}^2}{2}\right]_4^6 = \frac{19}{60} + 4$$
$$= 4{,}3167$$

c)

$$\mathrm{m_x(t)} = \mathrm{E(e^{tx})} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx = \frac{1}{10}\int_1^2 e^{tx}(2x-1)\,\mathrm{dx} + 0{,}4\int_4^6 e^{tx}\,\mathrm{dx}$$
$$= \left[(2\mathrm{x}-1)\left(\frac{\mathrm{e^{tx}}}{\mathrm{t}}\right)\right]_1^2 - 2\left[\frac{\mathrm{e^{tx}}}{\mathrm{t}}\right]_1^2 + 0{,}4\left[\frac{\mathrm{e^{tx}}}{\mathrm{t}}\right]_4^6$$

f = 2x-1, $g' = e^{tx}$, $f' = 2$, $g = \frac{e^{tx}}{t}$

**7. Con objeto de establecer un plan de producción, una empresa ha estimado que la demanda de sus clientes, en miles de unidades del producto, se comporta semanalmente con arreglo a una ley de probabilidad dada por la función de densidad:**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{4}(2x - x^2), \quad 0 \le x \le 2}$$

**a) ¿Qué cantidad deberá tener dispuesta a la venta al comienzo de cada semana para poder satisfacer plenamente la demanda con probabilidad 0.5?**

$$\frac{3}{4}\int_a^t 2x - x^2 dx = \frac{3}{4}\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{4}\left(t^2 - \frac{t^3}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t^2 - \frac{t^3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$t_1 = 1 \in [0,2] \qquad t_2 = 1 - \sqrt{3} \notin [0,2] \qquad t_3 = 1 + \sqrt{3} \notin [0,2]$$

La cantidad debe ser igual a 1000 unidades.

**b) Pasado cierto tiempo, se observa que la demanda ha crecido, estimándose que en ese momento se distribuye según la función de densidad:**

$$\boldsymbol{f(y) = \frac{3}{4}(4y - y^2 - 3), \quad 1 \le y \le 3}$$

**Los empresarios sospechan que este crecimiento no ha afectado a la dispersión de la demanda, ¿es cierta esta sospecha?**

$$E(x) = \frac{3}{4}\int_0^2 2x^2 - x^3 dx = \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 1$$

$$E(y) = \frac{3}{4}\int_1^3 4y^2 - y^3 - 3y\, dy = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}y^3 - \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}y^2\right]_1^3 = 2$$

$$E(x^2) = \frac{3}{4}\int_0^2 2x^3 - x^4 dx = \frac{3}{4}\left[\frac{2}{4}x^4 - \frac{x^5}{4}\right]_0^2 = 1{,}2$$

$$E(y) = \frac{3}{4}\int_1^3 4y^3 - y^4 - 3y\hat{}2\, dy = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}y^4 - \frac{y^5}{4} - y\hat{}3\right]_1^3 = 4{,}2$$

$$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$$

$$Var(y) = E(y^2) - E(y)^2 = 4{,}2 - 4 = 0{,}2$$

$$CV_x = \frac{+\sqrt{Var(x)}}{E(x)} = \frac{\sqrt{0{,}2}}{1} \qquad CV_y = \frac{+\sqrt{Var(y)}}{E(x)} = \frac{\sqrt{0{,}2}}{2}$$

Por tanto, **sí ha afectado a la dispersión.**

8- Calcular las funciones masa de probabilidad de las variables $Y = X + 2$, $Z = X^2$, siendo X una variable aleatoria con distribución:

$$P(X=-2)=\frac{1}{5} \quad P(X=-1)=\frac{1}{10} \quad P(X=0)=\frac{1}{5} \quad P(X=1)=\frac{2}{5} \quad P(X=2)=\frac{1}{10}$$

¿Cómo afecta el cambio de X a Y en el coeficiente de variación?

$$P(x=-2)=\frac{1}{5} \qquad P(Y=0)=\frac{1}{5} \qquad P(Z=0)=\frac{1}{5}$$

$$P(x=-1)=\frac{1}{10} \qquad P(Y=1)=\frac{1}{10} \qquad P(Z=1)=\frac{1}{2}$$

$$P(x=0)=\frac{1}{5} \qquad P(Y=2)=\frac{1}{5} \qquad P(Z=4)=\frac{3}{10}$$

$$P(x=1)=\frac{2}{5} \qquad P(Y=3)=\frac{2}{5}$$

$$P(x=2)=\frac{1}{10} \qquad P(Y=4)=\frac{1}{10}$$

$$E(X)=0,1 \quad E(Y)=2,1 \quad E(X^2)=1,7 \quad E(Y^2)=6,1$$

$$Var(X)=1,69 \quad Var(Y)=1,69 \quad CV_x=\frac{\sqrt{1,69}}{0,1}=13 \quad CV_y=\frac{\sqrt{1,69}}{2,1}=\frac{13}{21}$$

$$CV_x = 21 \cdot CV_y$$

9- Calcular las funciones de densidad de las variables Y = 2X +3 y Z = |X|, siendo X una variable continua con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{4}, \quad -2 < x < 2$$

$$X = \frac{Y-3}{2} = h^{-1}(y), \quad y \in [-1, 7]$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -1 \quad ; \quad x = 2 \Rightarrow y = 7$$

- Sea:

$g(y) = f(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)|, \quad$ **si** $y \in ]-1, 7[$

$g(y) = 0, \quad$ **otro caso**

$$g(y) = f\left(\frac{y-3}{2}\right) \cdot \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \quad \textbf{si } -1 < y < 7$$

- Para $z = |X|, z \in [-2, 2]$: Para una rama tenemos:

$$g(y) = f(z) \cdot 1 = \frac{1}{4}, \quad \textbf{si } z \in [-2, 0],$$

$$\textbf{Como hay dos ramas, } g(y) = \frac{1}{2}, \quad z \in ]0, 2]$$

**10. Si X es una variable aleatoria con función de densidad**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}}, -\infty < x < \infty,$$

**Hallar su función de distribución y la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:**

a) $\{\mathbf{|X| \leq 2}\}$.
b) $\{\mathbf{|X| \leq 2 \text{ ó } X \geq 0}\}$.
c) $\{\mathbf{|X| \leq 2 \text{ y } X \leq -1}\}$.
d) $\{\mathbf{X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0}\}$.
e) $\{\mathbf{X \text{ es irracional}}\}$.

$$F(x) = \begin{Bmatrix} \left|\frac{e^x}{2}\right|_{-\infty}^{x}, & x < 0 \\ 1 - \left|\frac{e^{-x}}{2}\right|_{0}^{x}, & x \geq 0 \end{Bmatrix}$$

$$P(x < 0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} e^x dx = \frac{1}{2}[e^x]_{-\infty}^{t}$$

$$P(x \leq t) = \frac{1}{2}\int_{0}^{t} e^{-x} dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^t = 1 - \frac{e^{-x}}{2}$$

a) $P(|X| \leq 2) = P(-2 \leq x \leq x) = P(-2 \leq X \leq 0) + P(0 \leq x \leq 2) = F_x(0) - F_x(-2) + F_x(2) - F_x(0) = F_x(2) - F_x(-2) = 1 - e^{-2}$
b) $P(|X| \leq 2 \text{ ó } X \geq 0) = P(X \geq -2) = F(\infty) - F(-2) = 1 - \frac{1}{2e^2}$
c) $P(|X| \leq 2 \text{ y } X \leq -1) = P(-2 \leq X \leq -1) = F(-1) - F(-2) = \frac{e^{-1} - e^{-2}}{2}$
d) $P(X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0) = P\big((X-2)(X^2 + X + 1) \leq 0\big) = P(X \leq 2) =$
$= 1 - \frac{1}{2e^2}$
e) $P(X \text{ es irracional}) = 1 - P(X \in Q) = 1$, ya que Q es numerable.

**11. Sea X una variable aleatoria con función de densidad**

$$\boldsymbol{f(x) = 1, \qquad 0 \leq x \leq 1.}$$

**Encontrar la distribución de las variables:**

a) $\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{1-X}}$

$$Y(1+X) = X \rightarrow Y + YX - X = 0 \rightarrow Y + X(Y-1) = 0 \rightarrow X = \frac{Y}{1-Y}$$

$$\left\{\begin{matrix} \text{Si x} = 0 \rightarrow y = 0 \\ \text{Si x} = 1 \rightarrow y = 1/2 \end{matrix}\right\} \rightarrow y \in [0\,,1/2]$$

$$f_y(y) = f\left(\frac{y}{1-y}\right) \cdot \left|\frac{1-y-y(-1)}{(1-y)^2}\right| = 1 \cdot \left|\frac{1}{(1\ -\ y)^2}\right| = \frac{1}{(1\ -\ y)^2}$$

$$f_y(y) = \left\{\begin{matrix} \dfrac{1}{(1\ -\ y)^2}, & y \in [0,1/2] \\ 0, & \text{otro caso} \end{matrix}\right\}$$

b) $\mathbf{Z} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{-1}, & \boldsymbol{X} < 3/4 \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{X} = \mathbf{3/4} \\ \mathbf{1}, & > 3/4 \end{matrix}\right\}$

$$P(Z = -1) = P(X < 3/4) = \int_0^{3/4} dx = \frac{3}{4}$$

$$P(Z = 0) = 0$$

$$P(Z = 1) = P(X > 3/4) = \int_{3/4}^{1} 1dx = \frac{1}{4}$$

**12. Sea X una variable aleatoria simétrica con respecto al punto 2, y con coeficiente de variación 1. ¿Qué puede decirse acerca de las siguientes probabilidades?:**

a) **P(-8 < X < 12)**

b) **P(-6 < X < 10)**

$$\boldsymbol{CV_X = 1 = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)} \rightarrow \sqrt{Var(X)} = E(X), simétrica\ respecto\ al\ 2 \rightarrow E(X) = 2}$$

Como sabemos que

$\exists CV_X \rightarrow \exists Var(X) \rightarrow \exists m_2 \rightarrow \exists (X^2)$.

Por tanto, podemos aplicar la desigualdad de Chebychev.

$$\mathrm{P}\left(|\mathrm{X}-\mathrm{E(X)}| < k\sqrt{\mathrm{Var(X)}}\right) \geq 1-\frac{1}{\mathrm{k}^2},\quad \forall \mathrm{k} > 0$$

$$\mathrm{P}\big(|\mathrm{X}-\mathrm{E(X)}| < kE(X)\big) \geq 1-\frac{1}{\mathrm{k}^2},\quad \forall \mathrm{k} > 0$$

$$\mathrm{P}\big(-\mathrm{kE}(X) < X - E(X) < kE(X)\big) \geq 1-\frac{1}{\mathrm{k}^2},\quad \forall \mathrm{k} > 0$$

$$\mathrm{P}(-2\mathrm{k}\ +\ 2 < X < 2k+2) \geq 1-\frac{1}{\mathrm{k}^2},\quad \forall \mathrm{k} > 0$$

$$P(-8 < X < 12) \geq 1-\frac{1}{25} = 0{,}96\ \ (k=5)$$

$$P(-6 < X < 12) \geq 1-\frac{1}{16} = 0{,}9375\ \ (k=4)$$