12 CONTINUIDAD UNIFORME

12.1 FUNCIONES UNIFORMEMENTE CONTINUAS

Definición 12.1.1. La función $f\colon A \to \mathbb{R}$ es *uniformemente continua en* A si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ verificando que si $x, y \in A$ con $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$$\text{f unif. continua en A} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : \left.\begin{array}{l} x, y \in A, \\ |x-y| < \delta \end{array}\right\} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Observación 12.1.2. Si f es uniformemente continua en A y $B \subset A$, entonces f es uniformemente continua en B.

12.1.1 Propiedades básicas

Proposición 12.1.3. *Sean* $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ *dos funciones uniformemente continuas.*

1) $f + g$ *es uniformemente continua.*

2) Supongamos que f *y* g *son funciones acotadas, entonces el producto* fg *es una función uniformemente continua.*

Demostración. 1) Dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que si $x, y \in A$, entonces

$$\begin{aligned} |x-y| < \delta_1 &\implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |x-y| < \delta_2 &\implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Basta tomar $\delta \leqslant \min\{\delta_1, \delta_2\}$ para obtener lo pedido.

2) Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)|, |g(x)| \leqslant M$, para todo $x \in A$. Como f y g son uniformemente continuas, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$ entonces

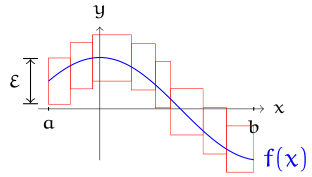
$$|f(x) - f(y)|\,, |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}\,.$$

Entonces, si $|x-y| < \delta$,

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(y)| &\leqslant |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)|\,|g(x) - g(y)| + |g(y)|\,|f(x) - f(y)| \\ &\leqslant M\,|g(x) - g(y)| + M\,|f(x) - f(y)| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$ □

Proposición 12.1.4. *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *una función uniformemente continua en* A. *Supongamos que* $f(A) \subset B$ *y sea* $g\colon B \to \mathbb{R}$ *una función uniformemente continua en* B. *Entonces la composición* $g \circ f$ *es uniformemente continua en* A.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por ser g uniformemente continua, existe $\delta_1 > 0$ para el que se cumple la definición. Por ser f uniformemente continua, dado $\delta_1 > 0$, existe $\delta_2 = \delta > 0$ tal que si $x, y \in A$ y $|x-t| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \delta$ y, por tanto, $|g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$. □



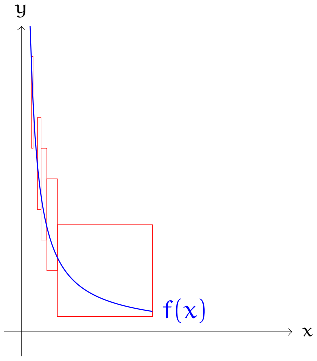


Figura 32.: La función coseno es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ y la función $1/x$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}^+$

Ejemplo 12.1.5. 1) La identidad es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$: basta tomar $\delta = \varepsilon$ en la definición.

2) Usando que $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$, podemos probar que la función valor absoluto es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ y si $|x - y| < \delta$, entonces se cumple $||x| - |y|| < \varepsilon$.

12.1.2 Interpretación geométrica*

Sea I es un intervalo *acotado*, y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función.

- La función f es uniformemente continua en I si, y sólo si, dada una altura $\varepsilon > 0$, la gráfica de f se puede tapar con una cantidad finita de rectángulos adyacentes de altura ε.
- La caracterización de la continuidad es similar: la función f es continua en I si, y sólo si, se puede tapar su gráfica con una familia de rectángulos adyacentes de altura predeterminada. En este caso la familia de rectángulos puede ser infinita.

12.1.3 Caracterización de la continuidad uniforme

Igual que con la continuidad, la continuidad uniforme se puede caracterizar usando sucesiones.

Proposición 12.1.6. *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Son equivalentes:*

1) *f es uniformemente continua.*

2) *Para cualquier par de sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de elementos de A tales que $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ se cumple que $\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n) - f(y_n)\big) = 0$.*

En particular, f no es uniformemente continua si existe $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de elementos de A verificando $|x_n - y_n| < 1/n$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$ para cualquier natural n.

Demostración. Supongamos que f es uniformemente continua en A. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ un par de sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que se verifica la continuidad uniforme. Para dicho $\delta > 0$, usamos la definición de convergencia de sucesiones:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \implies |x_n - y_n| < \delta.$$

Usando la continuidad uniforme, $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$ y, por tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n) - f(y_n)\big) = 0.$$

Recíprocamente, si f no es uniformemente continua, existe $\varepsilon_0 > 0$ de forma que para cada $\delta > 0$ se pueden encontrar $x, y \in A$ tales que $|x - y| < \delta$ y $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0$. Si aplicamos esto tomando $\delta = 1/n$ con n natural, encontramos dos sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ de forma que no se verifica 2). □

Ejemplo 12.1.7. La función $f(x) = x^2$, $(x \in \mathbb{R})$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Por tanto, *el producto de funciones uniformemente continuas puede no serlo.*

Tomemos $x_n = n$ e $y_n = n + \frac{1}{n}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0,$$

pero

$$\lim_{n\to+\infty} \left|x_n^2 - y_n^2\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2\right| = \lim_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = 2.$$

Por tanto, la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ (en ningún que contenga a las sucesiones anteriores).

12.1.4 Teorema de Heine

Teorema 12.1.8 (Teorema de Heine)**.** *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces* f *es uniformemente continua.*

Demostración. Por reducción al absurdo: si f no es uniformemente continua existe ε_0 y existen sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ en $[a,b]$ tales que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Como $a \leqslant x_n \leqslant b$, la sucesión $\{x_n\}$ tiene una parcial, $\{x_{\sigma(n)}\}$, convergente y su límite, x_0, también pertenece a dicho intervalo. Por tanto $y_{\sigma(n)} \to x_0$ también y, en consecuencia, $\left|f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})\right| \to 0$ lo que es una contradicción. □

Observación 12.1.9. ¿Qué relación hay entre continuidad, continuidad uniforme, sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy? Sea $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.

1) f es uniformemente continua.
2) f lleva sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy.
3) f lleva sucesiones convergentes en sucesiones convergentes.
4) f es continua.

Se cumple que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longleftrightarrow$ 4).

1) ⇒ 2) Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy de elementos de A y $\varepsilon > 0$, aplicamos la definición de Cauchy tomando $\delta > 0$ dado por la continuidad uniforme: existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geqslant n$, entonces $|x_p - x_q| < \delta$ y, por tanto, $|f(x_p) - f(x_q)| < \varepsilon$.

2) $\not\Rightarrow$ 1) La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ lleva sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy y no es uniformemente continua.

Si el conjunto A es acotado, entonces sí son equivalentes las dos primeras afirmaciones (ejercicio 12.8).

2) ⇒ 3) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente, entonces es de Cauchy y, por tanto, $\{f(x_n)\}$ también es de Cauchy. Si $x_0 \in A$ es el límite de $\{x_n\}$, podemos formar la sucesión $y_n = x_n$ si n es par, $y_n = x_0$ si n es impar que también es convergente y que $\{f(y_n)\}$ sea una sucesión de Cauchy implica que $\{f(x_n)\}$ es convergente.

3) $\not\Rightarrow$ 2) La función $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ lleva sucesiones convergentes en convergentes, pero la sucesión $\{1/n\}$ es de Cauchy y su imagen, $\{n\}$ no lo es.

Si el conjunto A es cerrado, las dos afirmaciones son equivalentes.

3) ⇔ 4) Esta equivalencia es la caracterización por sucesiones de la continuidad.

Extensión de funciones continuas

La caracterización de la continuidad uniforme en conjuntos acotados como aquellas funciones que preservan las sucesiones de Cauchy nos permite dar una descripción muy útil de las funciones uniformemente continuas en conjuntos acotados: son aquellas que se pueden extender de forma continua al cierre del dominio.

Teorema 12.1.10. *Sean* $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ *una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *existe una función continua* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = f(x)$, *para todo* $x \in]a,b[$; *y*

2) *la función* f *es uniformemente continua.*

Demostración. Si existe una función g continua que es una extensión de f, entonces por el teorema de Heine, sabemos que g y, por tanto, f son uniformemente continuas.

Recíprocamente, supongamos que f es uniformemente continua. La única definición posible de $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es

$$g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to a} f(x), & \text{si } x = a, \\ f(x), & \text{si } a < x < b, \\ \lim_{x\to b} f(x), & \text{si } x = b, \end{cases}$$

siempre que seamos capaces de demostrar que la función f tiene límite en a y en b. Veamos que existe el primer límite. El segundo es análogo.

Consideremos una sucesión $\{x_n\} \to a$, con $x_n \in]a,b[$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{x_n\}$ es convergente, es también una sucesión de Cauchy y, por tanto, $\{f(x_n)\}$ es también de Cauchy y, en consecuencia, convergente. Dicho límite es independiente de la sucesión elegida por la proposición 12.1.6. Por tanto, f tiene límite en a como queríamos demostrar. $\square$

12.2 FUNCIONES LIPSCHITZIANAS

Figura 33.: Rudolf Lipschitz (1832–1903)

Definición 12.2.1. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que la función es *lipschitziana* si existe K tal que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x-y|\,,$$

para todo x, $y \in A$. La menor constante K que verifica la anterior identidad se llama *constante de Lipschitz* de f.

Dicha constante es

$$K = \sup\left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} : x, y \in A,\ x \neq y \right\}.$$

Diremos que la función es *contractiva* si es lipschitziana con constante de Lipschitz menor que uno.

Proposición 12.2.2. *Sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función lipschitziana. Entonces* f *es uniformemente continua.*

Demostración. Si f es K-lipschitizina, dado $\varepsilon > 0$ en la definición de continuidad uniforme, podemos tomar $\delta \leqslant \varepsilon/M$. $\square$

12.2.1 Caracterización

Proposición 12.2.3. *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función derivable. Entonces* f *es lipschitziana si, y sólo si,* f' *es una función acotada. Además la constante de Lipschitz de* f *es*

$$K = \sup\left\{\left|f'(x)\right| : x \in I\right\}.$$

Demostración. Si f es lipschitziana con constante K, dado $a \in I$,

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leqslant K, \quad \forall x \in I.$$

Tomando límites cuando x tiende a a, se tiene que $|f'(a)| \leqslant K$ y, en particular,

$$\sup\left\{\left|f'(x)\right| : x \in I\right\} \leqslant K.$$

Recíprocamente, si f' está acotada, entonces, usando el teorema del valor medio, dados a y b en I, existe un punto intermedio c tal que

$$\left|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right| = \left|f'(c)\right| \leqslant \sup\left\{\left|f'(x)\right| : x \in I\right\}.$$

Tomando supremos,

$$\sup\left\{\left|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right| : a,b \in I, a \neq b\right\} \leqslant \sup\left\{\left|f'(x)\right| : x \in I\right\},$$

o, lo que es lo mismo, $K \leqslant \sup\{|f'(x)| : x \in I\}$ con lo que f es lipschitziana y, según hemos visto,

$$K = \sup\left\{\left|f'(x)\right| : x \in I\right\}. \qquad \square$$

Observación 12.2.4. El mismo resultado es cierto si la función es derivable en el intervalo abierto, pero sólo exigimos continuidad en los extremos.

Corolario 12.2.5. *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1*. Entonces* f *es lipschitziana.*

Ejemplo 12.2.6. La función valor absoluto es lipschitziana con constante uno. En efecto, si $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, entonces

$$\left|\frac{|x|-|y|}{x-y}\right| \leqslant \left|\frac{x-y}{x-y}\right| = 1.$$

Por tanto, es lipschitziana con constante menor o igual que uno. Si x e y tienen el mismo signo, se da la igualdad.

Ejemplo 12.2.7. La función raíz cuadrada en $\mathbb{R}_0^+$ es uniformemente continua, pero no es lipschitziana.

1) No es lipschitziana: su derivada no está acotada.

2) Si $0 \leqslant x \leqslant y$, entonces $\sqrt{y}-\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x}$ ya que

$$\begin{aligned}\sqrt{y}-\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x} &\iff y+x-2\sqrt{xy} \leqslant y-x\\ &\iff x \leqslant \sqrt{xy} \iff x^2 \leqslant xy\\ &\iff x \leqslant y.\end{aligned}$$

Por tanto, $\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|y-x|}$ para cualesquiera $x, y \geqslant 0$. Dado $\varepsilon > 0$, es suficiente con tomar $\delta \leqslant \varepsilon^2$ y se obtiene la continuidad uniforme.

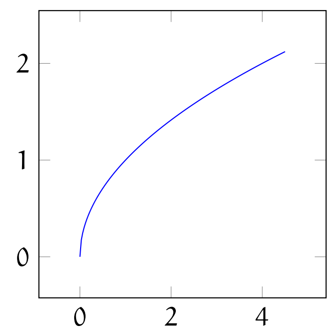


Figura 34.: La función raíz cuadrada es uniformemente continua en $\mathbb{R}_0^+$, pero no es lipschitziana

12.2.2 Una aplicación: puntos fijos*

Un ejercicio típico del teorema de los ceros de Bolzano consiste en demostrar que una función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ continua tiene un punto fijo: existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

Definición 12.2.8. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que $a \in A$ es un *punto fijo* de la función f si $f(a) = a$.

Teorema 12.2.9. *Sea* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una aplicación contractiva. Entonces* f *tiene un único punto fijo.*

12.3 EJERCICIOS

Ejercicio 12.1. Dado $r \in \mathbb{R}^+$, prueba que la restricción del logaritmo a $[r, +\infty[$ es lipschitziana, pero que la restricción a $]0, r]$ no es uniformemente continua.

Ejercicio 12.2. Consideremos la función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Dado $r > 0$, prueba que la restricción de f a la semirrecta $[r, +\infty[$ es lipschitziana, mientras que la restricción al intervalo $]0, r]$ no es uniformemente continua.

Ejercicio 12.3. Consideremos la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^{3/2}\sin(1/x), & \text{si } x \in]0,1] \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demuestra que f es uniformemente continua, derivable y que no es lipschitziana.

Ejercicio 12.4. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ periódica. Prueba que

1) f está acotada y alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

2) f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 12.5. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $r > 0$. Prueba que, si la restricción de f al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant r\}$ es uniformemente continua, entonces f también lo es.

Ejercicio 12.6. Sea I un intervalo no trivial y supongamos que todas las funciones continuas definidas en I son uniformemente continuas. Prueba que I es cerrado y acotado.

Ejercicio 12.7. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que la función f tiene límite en $+\infty$ y $-\infty$. Demuestra que f es uniformemente continua.

Ejercicio 12.8. Sea A un conjunto acotado y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Demuestra que f es uniformemente continua si, y sólo si, lleva sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy.

Ejercicio 12.9. Sea A un conjunto acotado y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Demuestra que $f(A)$ es un conjunto acotado.