Examen final-Geometría II
1^o Grado en Matemáticas
13 de junio 2016

Nombre y Apellidos: ______________________________.

1) Enuncia y demuestra el Teorema fundamental de diagonalización de endomorfismos.

2) Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual viene dada por

$$M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} 3a & -1 & -1 \\ -1 & 1-2a & -a \\ -1 & -a & -1-2a \end{pmatrix}.$$

a) Calcula el índice, el rango y clasifica la métrica g_a según el valor de a.

b) ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_{\frac{1}{3}})$ y $(\mathbb{R}^3, g_{-\frac{1}{3}})$ isométricos? En caso afirmativo construye una isometría.

3) a) Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y f un endomorfismo autoadjunto de g que además es una isometría. ¿Es f necesariamente una simetría ortogonal?

b) Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V$. Prueba que $\|u\| = \|v\| \iff u + v \perp u - v$.

c) Sean V un espacio vectorial y g y g' métricas euclídeas en V que verifican $g(u, v) = 0 \iff g'(u, v) = 0$. Prueba que $g' = \lambda g$, $\lambda > 0$.

d) En el espacio $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales se considera la métrica dada por $g(A, C) = \text{traza}(A\,M\,C^t)$ donde $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Prueba que g es una métrica euclídea si y sólo si $a > 0$ y $\det(M) > 0$.

4) En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, calcula la matriz en la base usual de $h \circ \sigma_U$, donde σ_U es la simetría especular con respecto al plano $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$, y h es el giro de ángulo $\pi/2$ alrededor del eje OZ. Clasifica y describe la isometría resultante.

Puntuación: 1.- 2.5 , **2.-** 2.5 , **3.-** 3, **4.-** 2

2) a) Calcula el índice, el rango y clasifica la métrica g_a según el valor de a.

Lo haremos primero utilizando el criterio de Sylvester.
Calculamos para ello:

$\det(A_1) = 3a$

$\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} 3a & -1 \\ -1 & 1-2a \end{pmatrix} = 3a(1-2a) - 1 =$

$= -6a^2 + 3a - 1$

$\det(A) = \det(A_3) = 3a\,(1-2a)(-1-2a) - a - a$

$-(1-2a) - 3a^3 + (1-2a) = 12a^3 - 3a - \cancel{2a}$

$\cancel{-1} + \cancel{2a} - 3a^3 + \cancel{1} + 2a = 9a^3 - a = a(9a^2-1)$

Observamos en primer lugar que g_a es degenerada si y sólo si $\det(A) = 0$ y esto ocurre si y sólo si

$$a(9a^2-1) = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ \text{ó} \\ a = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3} \end{cases}$$

luego si $a \neq 0$, $a \neq \pm\frac{1}{3}$ la métrica g_a es no degenerada y por tanto rango$(g_a) = 3$.

Además observamos que $\det(A_2) = -6a^2 + 3a - 1$ no tiene raíces reales, luego tiene signo constante, en concreto $\det(A_2) < 0$. Por tanto podemos afirmar que en el caso no degenerado la métrica siempre va a ser <u>indefinida</u>.

Para calcular el índice nos fijamos en el signo de $\det(A)$ pues sabemos que matrices congruentes tienen el mismo signo del determinante

Observamos que det (A) tiene los siguientes signos:

det (A) < 0	det (A) > 0	det (A) < 0	det (A) > 0

$$-\tfrac{1}{3} \qquad 0 \qquad \tfrac{1}{3}$$

Luego ya tenemos la clasificación en el caso no degenerado.

	rango	índice	g_a
$a \in (-\infty, -\frac{1}{3})$	3	1*	métrica indef. no degenerada
$a \in (-\frac{1}{3}, 0)$	3	2*	"
$a \in (0, \frac{1}{3})$	3	1*	"
$a \in (\frac{1}{3}, +\infty)$	3	2*	"

* El índice es 1 si det (A) < 0 porque es congruente a $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ y es 2 si det (A) > 0 porque es congruente a $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

Para los casos degenerados $a = 0$, $a = \frac{1}{3}$ y $a = -\frac{1}{3}$ tenemos $\text{rango}(g_0) = \text{rango}(g_{\frac{1}{3}}) = \text{rango}(g_{-\frac{1}{3}}) = 2$ ya que $\det(A_2) \neq 0$. Para calcular el índice me fijo en los elementos de la diagonal que son

$a = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ Luego la métrica tiene que ser indefinida degenerada. Como el rango $(g_0) = 2$ esto nos dice índice $(g_0) = 1$

$a = \frac{1}{3}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/3 & \\ & & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$ Como en el caso anterior como hay valores positivos y negativos tenemos que $g_{\frac{1}{3}}$ es indefinida degenerada y que índice $(g_{\frac{1}{3}}) = 1$

$a = -\frac{1}{3}$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 5/3 & \\ & & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Razonando como antes tenemos que $g_{-\frac{1}{3}}$ es indefinida degenerada, índice $(g_{-\frac{1}{3}}) = 1$.

b) ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_{\frac{1}{3}})$ y $(\mathbb{R}^3, g_{-\frac{1}{3}})$ isométricos? En caso afirmativo construye una isometría.

Dos espacios métricos (V, g) y (V', g') son isométricos si y solo si verifican
$$\begin{cases} \dim V = \dim V' \\ \text{rango}(g) = \text{rango}(g') \\ \text{índice}(g) = \text{índice}(g') \end{cases}$$

En este caso $V = V'$ y rango $(g_{\frac{1}{3}}) =$ rango $(g_{-\frac{1}{3}}) = 2$ e índice $(g_{\frac{1}{3}}) =$ índice $(g_{-\frac{1}{3}}) = 1$, luego son isométricos.

Para construir la isometría basta con encontrar bases ortonormales de $(\mathbb{R}^3, g_{\frac{1}{3}})$ y $(\mathbb{R}^3, g_{-\frac{1}{3}})$ y definir el isomorfismo que lleva una en la otra.

Calculemos primero una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_{\frac{1}{3}})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1/3 & -1/3 \\ -1 & -1/3 & -5/3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & -4/3 & -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & -4/3 & -8/3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Uparrow$ se confirma el rango y el índice de $g_{\frac{1}{3}}$

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -1 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $B = \left\{ (1,0,0), \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right), (-1,-2,1) \right\}$

es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_{\frac{1}{3}})$

Calculemos una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_{-\frac{1}{3}})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q_1} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q_2} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q_3} \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{8}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{8}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q_4} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{8}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{8}} & 1 & -1/2 \\ \sqrt{\frac{3}{8}} & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $B' = \left\{ \left(-\sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{3}{8}}, 0\right), (1,0,0), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \right\}$ es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_{-\frac{1}{3}})$. Definimos $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ como el isomorfismo que verifica: $f(1,0,0) = \left(-\sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{3}{8}}, 0\right)$, $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) = (1,0,0)$, $f(-1,-2,1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

OTRA FORMA DE HACER 2. a)

2) a) Calcula el índice, el rango y clasifica la métrica g_a según el valor de a.

Calculemos los valores propios de $M(g_a, B_u) = A$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3a-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-2a-\lambda & -a \\ -1 & -a & -1-2a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3a-\lambda)\left((2a+\lambda)^2-1\right) - a - a + (\lambda+2a-1) + a^2(\lambda-3a)$$

$$+ (\lambda+2a+1) = (3a-\lambda)(\lambda^2+4a\lambda+4a^2-1) \cancel{-2a}$$

$$+ \lambda + \cancel{2a} \cancel{-1} + a^2\lambda - 3a^3 + \lambda + 2a + \cancel{1} =$$

$$= -\lambda^3 - a\lambda^2 + 3(3a^2+1)\lambda + a(9a^2-1)$$

Los coeficientes del polinomio son

$a_3 = -1$, $a_2 = -a$, $a_1 = 3(3a^2+1)$, $a_0 = a(9a^2-1)$

Observamos que

$a_3 < 0$

a_2 : $a_2 > 0$ | 0 ($a_2 = 0$) | $a_2 < 0$

$a_1 > 0$

$a_0 = a(9a^2-1)$

- a : $a < 0$ | 0 ($a = 0$) | $a > 0$
- $9a^2-1$: $9a^2-1 > 0$ | $-\frac{1}{3}$ ($9a^2-1=0$) | $9a^2-1 < 0$ | $\frac{1}{3}$ ($9a^2-1=0$) | $9a^2-1 > 0$

Luego para a_0 tenemos

$a_0 < 0$ | $-\frac{1}{3}$ ($a_0 = 0$) | $a_0 > 0$ | 0 ($a_0 = 0$) | $a_0 < 0$ | $\frac{1}{3}$ ($a_0 = 0$) | $a_0 > 0$

Como $a_0 = \det(A)$ sabemos que la métrica es degenerada si y sólo si $a = \pm\frac{1}{3}$ o $a = 0$

Tenemos por tanto:

	a_3	a_2	a_1	a_0	Número de cambios de signo	
$a<-\frac{1}{3}$	$-$	$+$	$+$	$-$	2	Indefinida índice 1 no deg
$-\frac{1}{3}<a<0$	$-$	$+$	$+$	$+$	1	Indefinida índice 2 no deg
$0<a<\frac{1}{3}$	$-$	$-$	$+$	$-$	2	Indefinida índice 1 no deg
$a>\frac{1}{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	1	Indefinida índice 2 no deg

$a=0$ $\qquad p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda = -\lambda(\lambda^2-3)$

Tenemos los valores propios 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$

luego g_0 es indefinida degenerada índice 1 rango 2.

$a=\frac{1}{3}$ $\qquad p_A(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda + 4\lambda = \frac{-1}{3}\lambda(3\lambda^2+\lambda-12)$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+144}}{6} \quad \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{145}}{6} > 0 \\ \frac{-1-\sqrt{145}}{6} < 0 \end{cases}$$

luego $g_{\frac{1}{3}}$ es como en el caso anterior.

$a=-\frac{1}{3}$ $\qquad p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{1}{3}\lambda + 4\lambda = -\frac{1}{3}(3\lambda^2 - \lambda - 12)$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+144}}{6} \quad \begin{cases} \frac{1+\sqrt{145}}{6} > 0 \\ \frac{1-\sqrt{145}}{6} < 0 \end{cases}$$

Igual que el anterior

3.- a) Sea B una base ortonormal de (V,g). Entonces tenemos:

Por ser f autoadjunto $\Rightarrow$ $M(f,B)$ simétrica

Por ser f isometría $\Rightarrow$ $M(f,B)$ ortogonal.

Entonces $M(f,B)^t \cdot M(f,B) = I_n$ por ser $M(f,B)$ ortogonal.

Y por ser simétrica.

$$M(f,B) \cdot M(f,B) = M(f,B)^2 = I_n$$

$$\Rightarrow \quad f^2 = 1_V.$$

Sabemos que si $f^2 = 1_V$ y f es autoadjunto $\Rightarrow$ f es una simetría ortogonal.

b) $$g(u+v, u-v) \underset{\text{g bilineal}}{=} g(u,u) - g(u,v) + g(v,u) - g(v,u)$$

$$\underset{\text{g simétrica}}{=} \|u\|^2 - \cancel{g(u,v)} + \cancel{g(u,v)} - \|v\|^2 = \|u\|^2 - \|v\|^2$$

c) Sea $B = (e_1, \ldots, e_n)$ una base ortonormal de g. Entonces tenemos que B es una base ortogonal de g'. Veamos que además $\|e_i\|_{g'} = \lambda$, $i = 1, \ldots, n$, $\lambda > 0$.

Por el apartado b) basta demostrar que

$g'(e_i + e_j, e_i - e_j) = 0$, para $i \neq j$, $i,j \in \{1, \ldots, n\}$.

Sabemos que $\|e_i\|_g = 1$, $i = 1, \ldots, n$ luego por el apartado b) tenemos $g(e_i + e_j, e_i - e_j) = 0$, para $i \neq j$, $i,j \in \{1, \ldots, n\}$. Luego

$$g'(e_i + e_j, e_i - e_j) = 0$$

como queríamos probar.

En conclusión tenemos

$$M(g, B) = I_n \qquad M(g', B) = \lambda^2 I_n$$

luego claramente $g' = \lambda^2 g$, $\lambda^2 > 0$.

d) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$M(g, B) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} M & O_2 \\ \hline O_2 & M \end{array} \right)$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{traza}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = a$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{traza}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{traza}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = b$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = c$$

Luego g euclídea $\iff$ $a > 0$ y $\det M > 0$.

4.- $\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0\} = L(\{(1,1,0),(0,0,1)\})$

$\mathcal{U}^{\perp} = L(\{(1,-1,0)\})$

$B = ((1,1,0),(0,0,1),(1,-1,0))$

$$M(\sigma_u, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M(\sigma_u, B_u) = M(1_{\mathbb{R}^3}, B, B_u) \cdot M(\sigma_u, B) \cdot M(1_{\mathbb{R}^3}, B_u, B)$$

$$M(1_{\mathbb{R}^3}, B, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad M(1_{\mathbb{R}^3}, B_u, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$M(\sigma_u, B_u) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=0\} = L(\{(0,0,1)\})$

$R^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\} = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$

$B' = ((0,0,1),(1,0,0),(0,1,0))$

$$M(h, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(h, B_u) = M(1_{\mathbb{R}^3}, B', B_u) \cdot M(h, B') \cdot M(1_{\mathbb{R}^3}, B_u, B')$$

$$M(1_{\mathbb{R}^3}, B', B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M(1_{\mathbb{R}^3}, B_u, B') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{t}$$

Por ser un cambio entre bases ortonormales

$$M(h, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(h \circ \sigma_u, B_u) = M(h, B_u) \cdot M(\sigma_u, B_u) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Es claro que $h \circ \sigma_u$ es una simetría especular respecto del plano $\Pi = L((0,1,0),(0,0,1))$