Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I – Relación 4 - Sucesiones de números reales

1. Sea I un intervalo y $f : I \to I$ una función verificando que $f(I) \subset I$. Sea $a \in I$ y definamos una sucesión $\{x_n\}$ por $x_1 = a$ y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   a) Supongamos que f es estrictamente decreciente en I y que $x_1 \neq x_2$. Prueba que $\{x_n\}$ no es monótona y que si $x_1 \neq x_3$ entonces las sucesiones $\{x_{2n-1}\}$ y $\{x_{2n}\}$ son estrictamente monótonas.

   b) Usa lo visto en a), para estudiar la convergencia de las sucesiones dada para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

   $$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \qquad y_1 = 1, \quad y_{n+1} = \frac{3y_n + 2}{2y_n + 1}$$

2. Estudia la convergencia de las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dadas para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

   $$x_1 = 1, \ x_{n+1} = \frac{5x_n + 2}{x_n + 3}; \qquad y_1 = 1, \ y_{n+1} = \frac{2y_n + 3}{5y_n + 2}$$

3. Supongamos que $\{x_n\}$ no converge a z. Prueba que existe un número $r > 0$ y una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $|x_\sigma(n) - z| \geqslant r$.

4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente verificando que $a < f(x) < b$ para todo $x \in [a, b]$. Definamos $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ converge a $\beta \in]a, b]$ tal que $\beta = \sup f([a, \beta[)$. Además $\beta \leqslant f(\beta)$.

5. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones acotadas. Prueba que:

   $$\underline{\text{lím}}\{x_n + y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n\} + \underline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n + y_n\}.$$

   Prueba con ejemplos que las desigualdades anteriores pueden ser todas estrictas.

6. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones acotadas tales que $x_n \geqslant 0$ e $y_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que

   $$\underline{\text{lím}}\{x_n\}\underline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \underline{\text{lím}}\{x_n y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n\}\underline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n\}\overline{\text{lím}}\{y_n\}.$$

   Deduce que si $\text{lím}\{x_n\} = x > 0$, entonces

   $$\underline{\text{lím}}\{x_n y_n\} = x\,\underline{\text{lím}}\{y_n\}, \quad \overline{\text{lím}}\{x_n y_n\} = x\,\overline{\text{lím}}\{y_n\}.$$

   Prueba con ejemplos que las desigualdades anteriores pueden ser todas estrictas.

7. Calcula los límites de las sucesiones:

   $$a)\ x_n = n\left(\sqrt[5]{\frac{3n+12}{3n+7}} - 1\right) \quad b)\ y_n = \left(\frac{\log(n+5)}{\log(n+1)}\right)^{n \log n} \quad c)\ z_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\sqrt[n]{n!}$$

8. Calcula los límites de las sucesiones:

   $$a)\ x_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right), \quad b)\ x_n = \sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)} - n$$

9. Calcula los límites de las sucesiones:

   $$\text{a) } x_n = \left(\sqrt[5]{n+1} - \sqrt[5]{n}\right)\sqrt{n} \qquad \text{b) } y_n = \sqrt{n^3}\left(\sqrt[4]{4n^2+3} - \sqrt{2n}\right) \qquad \text{c) } z_n = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(5n)^{3n}}}$$