1. Teoría

1. **(2,5 puntos)** Da (¡breve!) respuesta a las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuándo es falsa una *proposicion* $P \Rightarrow Q$?

   b) Si $A, B \subseteq S$, ¿Qué relación hay entre $c(A)$, $c(B)$, $c(A \cap B)$ y $c(A \cup B)$?

   c) ¿Cuándo se dice que una aplicación es *inyectiva*? ¿Y *sobreyectiva*?

   d) ¿Qué es una *relación de equivalencia*? ¿Qué es el *conjunto cociente*?

   e) ¿Qué es un *anillo conmutativo*?

   f) ¿Qué nos dice la *distributividad generalizada* en un anillo?

   g) ¿Qué es una *unidad* en un anillo conmutativo? ¿Qué es un *cuerpo*?

   h) ¿Qué significa la expresión na, donde $n \in \mathbb{Z}$ y a es un elemento de un anillo?

   i) ¿Qué es la *norma* de un entero o de un racional cuadrático?

   j) ¿Qué es un *homomorfismo* entre anillos?

2. **(2,5 puntos)** Demuestra que, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}$, con $b \neq 0$, existen dos únicos $q, r \in \mathbb{N}$, tales que $a = bq + r$ y $r < b$.

2. Cuestiones teórico-prácticas

1. **(1 punto)** Calcula el cociente y el resto de dividir el entero -2120 entre 19. Calcula el resto de dividir por 19 el resultado de multiplicar 4825 por -2120. (Deja constancia del procedimiento y cálculos que has usado)

2. **(1 punto)** Sea $f : S \to T$ una aplicación. Prueba que, para cualesquiera subconjuntos $A \subseteq S$ y $B \subseteq T$, se verifica que $f_*(A \cap f^*(B)) = f_*(A) \cap B$ (Recuerda que, si $X \subseteq S$ e $Y \subseteq T$, entonces $f_*(X) = \{f(x) \,|\, x \in X\}$ y $f^*(Y) = \{x \in S \,|\, f(x) \in Y\}$)

3. **(1 punto)** Determina todas las unidades del anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Calcula también el inverso de $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\sqrt{-5}$ en el cuerpo $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$. (Deja constancia del procedimiento y cálculos que has usado)

4. **(1 punto)** ¿Es correcto definir una aplicación $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ diciendo que la imagen de cada racional $\frac{a}{b}$ es $f\left(\frac{a}{b}\right) = a - b$? ¿Y si la pregunta es $f\left(\frac{a}{b}\right) = ab^{-1}$? En caso afirmativo para alguna de ellas, ¿es esa aplicación un homomorfismo? ¿Y monomorfismo? (Razona la respuesta)

5. **(1 punto)** Prueba que, para cualquier $n \geq 2$, las aplicaciones polinómicas $f, g : \mathbb{Z}_3[x] \to \mathbb{Z}_3$, definidas por los polinomios $f = x^2+2x+1$ y $g = (x^2+2x+1)^n+1$ son iguales. (Deja constancia del procedimiento y cálculos que has usado)

The End.