Ejercicio puntuable Tema 1-Geometría II
16 de marzo 2018

Apellidos y Nombre: ____.

1. Dada $a \in \mathbb{R}$ se considera la matriz de coeficientes reales
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) Estudia para qué valores del parámetro a la matriz es diagonalizable.

   b) Para los valores calculados en el apartado anterior, encuentra P matriz regular y D matriz diagonal tal que $P^{-1} A\, P = D$.

   c) Para los valores calculados en el apartado a) calcula, si es posible, una matriz C tal que $C^6 = A$.

2. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que su polinomio característico es $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5$. Prueba que A es una matriz regular y que $A^{-1} = \frac{1}{5}A^2$.

Puntuación: 1.- a) 2, **1.- b), c)** 3, **2.-** 2

1. a) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a & a \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) - a - \left(a(1-\lambda) - a(2-\lambda) \right) =$

$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) - a(1 + 1 - \lambda - 2 + \lambda)$

$= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$

Luego los valores propios son $\lambda_1 = 1$ $a\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = 2$ $a\lambda_2 = 1 = g\lambda_2$

A será diagonalizable cuando $g\lambda_1 = 2$. Sabemos que

$$g\lambda_1 = 3 - \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $g\lambda_1 = 2$ si y sólo si rango $\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$.

Esto ocurre si y sólo si $a = 0$.

Luego A es diagonalizable si y sólo si $\boxed{a = 0}$

b) Para calcular P necesitamos una base de vectores propios de A.

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{-1} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0 \} = L(\{(1,0,-1), (0,1,0)\})$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} y + z = 0 \\ x = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= L(\{(0,1,-1)\})$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Del apartado b) tenemos

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[6]{2} \end{pmatrix}^6$$

De aquí:

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[6]{2} \end{pmatrix}^6 \cdot P^{-1} = \left(P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[6]{2} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \right)^6$$

Por tanto una matriz C que verifica que $A = C^6$ es

$$C = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[6]{2} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[6]{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\sqrt[6]{2} & 1 & 1-\sqrt[6]{2} \\ -1+\sqrt[6]{2} & 0 & \sqrt[6]{2} \end{pmatrix}$$

2.- Por definición $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. De aquí sabemos que $p_A(0) = \det(A)$. Observamos que $p_A(0) = 5$.
Por tanto $\det(A) = 5 \neq 0$ y consecuentemente A es regular.
Además por el Teorema de Cayley-Hamilton tenemos que

$$p_A(A) = -A^3 + 5 \cdot I_3 = O_3,$$ donde O_3 es la matriz nula de orden 3×3.

De aquí $A^3 = 5 \cdot I_3$

De donde se deduce que $\left(\frac{1}{5} A^2\right) \cdot A = I_3$

y por tanto $A^{-1} = \frac{1}{5} A^2$.