EDIP: RELACIÓN 4

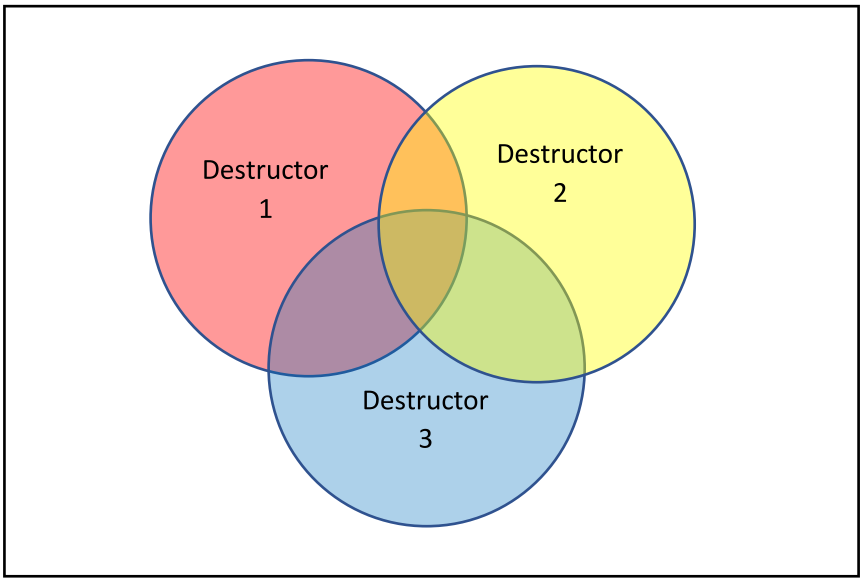
GRUPO B4:
Moreno Guerrero, Alejandro
Nieto López, Pablo
Pérez Ruiz, Daniel
Suárez González, David
Zufrí Quesada, Daniel

<u>EJERCICIO 1:</u> En una batalla naval, tres destructores localizan y disparan simultáneamente a un submarino. La probabilidad de que el primer destructor acierte el disparo es 0.6, la de que lo acierte el segundo es 0.3 y la de que lo acierte el tercero es 0.1. ¿Cuál es la probabilidad de que el submarino sea alcanzado por algún disparo?

Hay que tener en cuenta los siguientes casos:

1. Que sólo sea alcanzado por uno de los destructores.
2. Que sea alcanzado por dos destructores.
3. Que sea alcanzado por los tres destructores.

Si dibujásemos los casos:



Hay que poner énfasis en el hecho de que los 3 sucesos son independientes entre sí, puesto que, si alguno de los destructores alcanza al submarino, no favorece o perjudica la ocurrencia de que otro de los destructores restantes también lo alcance.

En conclusión:

- $P_s = P(D1) + P(D2) + P(D3) - P(D1 \cap D3) - P(D1 \cap D2) - P(D2 \cap D3) + P(D1 \cap D2 \cap D3) = 0.6 + 0.3 + 0.1 - (0.6 \cdot 0.1) - (0.6 \cdot 0.3) - (0.3 \cdot 0.1) + (0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.1) = 0.748$

SOLUCIÓN: La probabilidad de que el submarino sea alcanzado por algún disparo es de 0.748

<u>EJERCICIO 2:</u> Un estudiante debe pasar durante el curso 5 pruebas selectivas. La probabilidad de pasar la primera es 1/6. La probabilidad de pasar la i-ésima, habiendo pasado las anteriores es 1/(7-i). Determinar la probabilidad de que el alumno apruebe el curso.

PASA	1/6	1/5	1/4	1/3	1/2
NO PASA	5/6	X	X	X	X

(En el caso de que no pase la primera prueba ya no aprueba el curso)

La resolución de este problema se traduce en:

- $P\left[\bigcap_{i=1}^{5} A_i\right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1.388 \cdot 10^{-3}$

<u>EJERCICIO 3:</u> En una ciudad, el 40% de las personas tienen pelo rubio, el 25% tienen ojos azules y el 5% el pelo rubio y los ojos azules. Se selecciona una persona al azar. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Tener el pelo rubio si se tiene los ojos azules.**
b) **Tener los ojos azules si se tiene el pelo rubio.**
c) **No tener pelo rubio ni ojos azules.**
d) **Tener exactamente una de estas características.**

R = "Pelo Rubio"
A = "Ojos Azules"

a) Probabilidad de ser Rubio a condición de tener Ojos Azules:

- $P\left({}^{R}/_{A}\right) = \frac{P(A \cap R)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.25} = 0.2$

b) Probabilidad de tener Ojos Azules a condición de ser Rubio:

- $P\left({}^{A}/_{R}\right) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0.05}{0.4} = 0.125$

c) No ser Rubio ni tener Ojos Azules

- $P = 1 - P(A \cup R) = 1 - [P(A) + P(R) - P(R \cap A)] = 1 - [\, 0.4 + 0.25 - 0.05] = 0.4$

d) Ser Rubio o tener Ojos Azules.

- $P = P(R \cup A) - P(R \cap A) = P(A) + P(B) - P(R \cap A) - P(R \cap A) = 0.4 + 0.25 - 0.05 - 0.05 = 0.55$

<u>EJERCICIO 4:</u> En una población de moscas, el 25% presentan mutación en los ojos, el 50% presentan mutación en las alas, y el 40% de las que presentan mutación en los ojos presentan mutación en las alas.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que una mosca elegida al azar presente al menos una de las mutaciones?**
b) **¿Cuál es la probabilidad de que presente mutación en los ojos pero no en las alas?**

O = "Mutación en los ojos"
A = "Mutación en las alas"

P(O) = 0.25
P(A) = 0.5
P(A / O) = 0.4

- $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{O}) = \mathrm{P}\left({}^{A}/_{O}\right) \cdot P(O) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1$

a) Probabilidad de que la mosca sufra mutación en alas o en ojos.

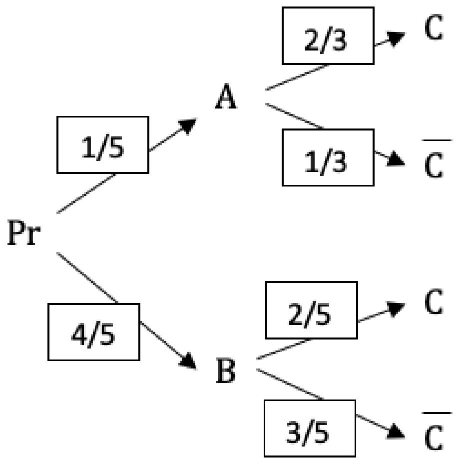
- $P = P(O) + P(A) - P(O \cap A) = 0.25 + 0.5 - 0.1 = 0.65$

b) Probabilidad de mutación en los ojos pero no en las alas

- $P = P(O) - P(A \cap O) = 0.25 - 0.1 = 0.15$

<u>EJERCICIO 5:</u> **Una empresa utiliza dos sistemas alternativos, A y B, en la fabricación de un artículo, fabricando por el sistema A el 20% de su producción. Cuando a un cliente se le ofrece dicho artículo, la probabilidad de que lo compre es 2/3 si este se fabricó por el sistema A y 2/5 si se fabricó por el sistema B. Calcular la probabilidad de vender el producto.**

Sea:
C = "Probabilidad de que el producto sea comprado"
Pr = "Producto producido"
$P(A) = 1/5$
$P(B) = 4/5$

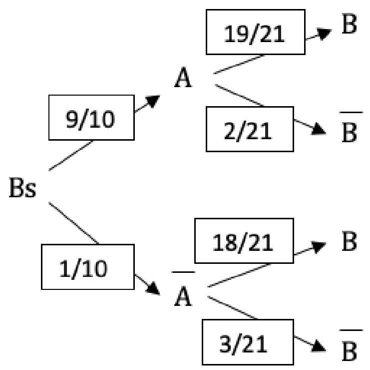


- $P(C) = P(A) * P(C/A) + P(B) * P(C/B) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{34}{75} \cong 0,4533$

<u>EJERCICIO 6:</u> **Se consideran dos urnas: la primera con 20 bolas, de las cuales 18 son blancas, y la segunda con 10 bolas, de las cuales 9 son blancas. Se extrae una bola de la segunda urna y se deposita en la primera; si a continuación, se extrae una bola de ésta, calcular la probabilidad de que sea blanca.**

Sea:
A = “Probabilidad de sacar una bola blanca de la 2ª caja”
B = “Probabilidad de sacar una bola blanca de la 1ª caja”
Bs = “Bola sacada”

Tenemos entonces:



$$P(B) = P(A) * P(B/A) + P(A) * P(B/A) = \frac{9}{10} \times \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \times \frac{18}{21} = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

EJERCICIO 7: **Se dispone de tres urnas con la siguiente composición de bolas blancas y negras:**

U1: 5B y 5N U2: 6B y 4N U3: 7B y 3N.

Se elige una urna al azar y se sacan cuatro bolas sin reemplazamiento.

a) **Calcular la probabilidad de que las cuatro sean blancas.**

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\right)=\mathbf{0,0873}$$

b) **Si en las bolas extraídas sólo hay una negra, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido U2?**

- Por el Teorema de Bayes:

$$P(A_n|B)=\frac{P(B|A_n)\cdot P(A_n)}{\sum_{n\in N}P(B|A_n)\cdot P(A_n)}$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)\cdot P(A_2)}{\mathrm{P(B|A_1)}\cdot P(A_1)+\mathrm{P(B|A_2)}\cdot P(A_2)+\mathrm{P(B|A_3)}\cdot P(A_3)}$$

- Sea:

  $A_n=$ escoger Urna "n".

- Realicemos algunos cálculos previos:

$$P(A_2)=\frac{1}{3}$$

$$P(B|A_1)=P(B|A_1)=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot5}{10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{5}{34}$$

$$P(B|A_2)=P(B|A_1)=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot4}{10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{2}{21}$$

$$P(B|A_3)=P(B|A_1)=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot3}{10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{1}{8}$$

$$P(A_2|B)=\frac{\frac{2}{21\cdot3}}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{84}+\frac{2}{21}+\frac{1}{8}\right)}=\mathbf{0,34}$$

EJERCICIO 8: **La probabilidad de que se olvide inyectar el suero a un enfermo durante la ausencia del doctor es2/3. Si se le inyecta el suero, el enfermo tiene igual probabilidad de mejorar que de empeorar, pero si no se le inyecta, la probabilidad de mejorar se reduce a 0.25. Al regreso, el doctor encuentra que el enfermo ha empeorado. ¿Cuál es la probabilidad de que no se le haya inyectado el suero?**

Sean:

$A = suero\ olvidado.$

$B = \ enfermo\ empeora.$

Por el Teorema de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{\mathrm{P(B|A)} \cdot P(A) + P\left(B\middle|\overline{A}\right\} \cdot P\left(\overline{A}\right\}}$$

De donde:

$$P(A|B) = \frac{0{,}75 \cdot \frac{2}{3}}{0{,}75 \cdot \frac{2}{3} + 0{,}5 \cdot \frac{1}{3}} = \mathbf{0{,}75}$$

<u>EJERCICIO 9:</u> N urnas contienen cada una 4 bolas blancas y 6 negras, mientras otra urna contiene 5 blancas y 5 negras. De las N + 1 urnas, se elige una al azar y se extraen dos bolas sucesivamente, sin reemplazamiento, resultando ser ambas negras. Sabiendo que la probabilidad de que queden 5 blancas y 3 negras en la urna elegida es 1/7, encontrar N.

Sean:

$A = La\ urna\ N + 1$

$B = \ Extraer\ dos\ bolas\ negras\ sucesivamente\ \text{sin}\ reemplazamiento$

Por el Teorema de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{\mathrm{P(B|A)} \cdot P(A) + P\left(B\middle|\overline{A}\right\} \cdot P\left(\overline{A}\right\}}$$

De donde:

$$P(A|B) = \frac{0{,}5 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{N+1}}{N \cdot 0{,}6 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{N+1} + 0{,}5 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{N+1}} = \frac{1}{7}$$

Despejamos la N y obtenemos que el número de urnas que contienen 4 bolas blancas y 6 bolas negras es 4. **N=4**

<u>EJERCICIO 10:</u> Se dispone de 6 cajas, cada una con 12 tornillos; una caja tiene 8 buenos y 4 defectuosos; dos cajas tienen 6 buenos y 6 defectuosos y tres cajas tienen 4 buenos y 8 defectuosos. Se elige al azar una caja y se extraen 3 tornillos con reemplazamiento, de los cuales 2 son buenos y 1 es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que la caja elegida contuviera 6 buenos y 6 defectuosos?

Caja tipo A: 8 buenos y 4 defectuosos.

Caja tipo B: 6 buenos y 6 defectuosos.

Caja tipo C: 4 buenos y 8 defectuosos.

M = 3 tornillos (2 buenos y 1 defectuoso)

Por el Teorema de Bayes:

$$P(B|M) = \frac{P(M|B) \cdot P(B)}{\mathrm{P(M|A)} \cdot P(A) + P(M|B) \cdot P(B) + P(M|C) \cdot \mathrm{P(C)}}$$

Donde:

$$P(M|B) \cdot P(B) = \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{2}{6} = 0{,}0416$$

$$P(M|A) \cdot P(A) = \frac{8}{12} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{6} = 0{,}0247$$

$$P(M|C) \cdot P(C) = \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{3}{6} = 0{,}037$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{P(B|M) = 0,4027}$$

EJERCICIO 11: Se seleccionan n dados con probabilidad $p_n = 1/2^n$; $n \in N$. Si se lanzan estos n dados y se obtiene una suma de 4 puntos, ¿cuál es la probabilidad de haber seleccionado 4 dados?

$\boldsymbol{A_i}$: ***lanzar i dados***

$\boldsymbol{B}$: ***sacar suma de 4***

$\boldsymbol{P(B|A_1) = 1/6}$ $\boldsymbol{P(A_1) = 1/2}$

$\boldsymbol{P(B|A_2) = 3/36}$ $\boldsymbol{P(A_2) = 1/4}$

$\boldsymbol{P(B|A_3) = 1/72}$ $\boldsymbol{P(A_3) = 1/8}$

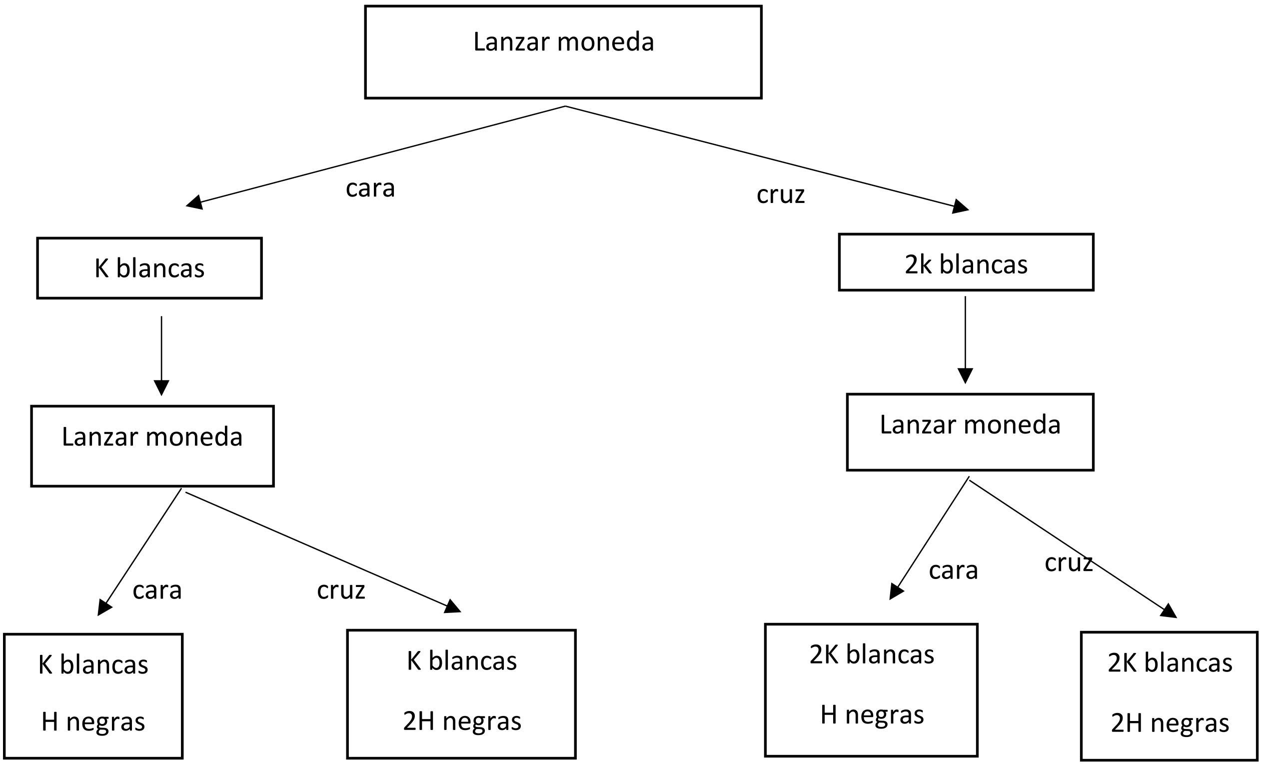
$\boldsymbol{P(B|A_4) = 1/6^4}$ $\boldsymbol{P(A_4) = 1/16}$

$$P(A_4|B) = \frac{P(B|A_4) \cdot P(A_4)}{\mathrm{P(B|}A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot \mathrm{P}(A_3) \cdot \mathrm{P(B|}A_4) \cdot \mathrm{P}(A_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6^4 \cdot 16}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{72} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6^4} \cdot \frac{1}{16}} = \mathbf{1/2197}$$

<u>EJERCICIO 12:</u> Se lanza una moneda; si sale cara, se introducen k bolas blancas en una urna y si sale cruz, se introducen 2k bolas blancas. Se hace una segunda tirada, poniendo en la urna h bolas negras si sale cara y 2h si sale cruz. De la urna así compuesta se toma una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?

$\boldsymbol{B: sacar\ una\ bola\ negra}$



$A_1: K\ blancas, H\ negras$

$A_2: K\ blancas, 2H\ negras$

$A_3: 2K\ blancas, H\ negras$

$A_4: 2K\ blancas, 2H\ negras$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(B|A_i)P(A_i)$$

$$\mathrm{P(B|A_1)} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{k+h}},\ \ \mathrm{P(B|A_2)} = \frac{\mathrm{2h}}{\mathrm{k+2h}},\ \ \mathrm{P(B|A_3)} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{2k+h}},\ \ \mathrm{P(B|A_4)} = \frac{\mathrm{2h}}{\mathrm{2k+2h}}$$

$$P(B) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{k+h}} + \frac{\mathbf{2h}}{\mathbf{k+2h}} + \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{2k+h}} + \frac{\mathbf{2h}}{\mathbf{2k+2h}}\right)$$