REPASO DE CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Preliminares.-

Entenderemos por conjunto toda colección de objetos. Esta definición no es muy precisa, pero, para nuestras necesidades la consideramos suficiente. Un conjunto X puede ser dado por extensión (enumerando todos y cada uno de los objetos que lo componen) y por comprensión (dando una propiedad que identifique de forma precisa cada objeto de X). Cuando x es un objeto de X diremos que es un elemento suyo y pondremos $x \in X$. Dos conjuntos X e Y son iguales cuando tienen los mismos elementos, es decir $x \in X$ si y sólo si $x \in Y$. Dados dos conjuntos A y X, diremos que A es subconjunto de X o que A está contenido en X, $A \subset X$, si todo elemento de A es tambien elemento de X, es decir $A \subset X$ si y sólo si ($x \in A$ entonces $x \in X$). En lo que sigue representaremos "si y sólo si" por $\Leftrightarrow$ y "entonces" por $\Rightarrow$ como es habitual. Un conjunto X tiene dos tipos de subconjuntos: los propios, que son $A \subset X$, A con algún elemento pero no con todos los de X ($A \neq X$), y los impropios, que son el mismo X y el subconjunto de X que "no tiene ningún elemento" $\emptyset$ (¡ el vacio !). Este último se introduce por razones lógicas que pondremos de manifiesto más adelante. Es facil observar que $X = Y$ (X e Y son iguales) $\Leftrightarrow (X \subset Y$ y $Y \subset X)$. Al conjunto cuyos elementos son precisamente los subconjuntos de X se le llama el conjunto de las partes de X y se le representa por $\mathcal{P}(X)$. Obsérvese que $A \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow A \subset X$.

Si $A, B \in \mathcal{P}(X)$ se define su intersección $A \cap B$, su unión $A \cup B$ y el complementario en X de A, $X-A$, por

$A \cap B = \{x \in X \,/\, x \in A \text{ y } x \in B\}$, $A \cup B = \{x \in X \,/\, x \in A \text{ o } x \in B\}$, $X-A = \{x \in X \,/\, x \notin A\}$.

A veces, el complementario de A en X, X-A , se lee X "menos" A. Nótese que $A \cap B \in \mathcal{P}(X)$ ya que cuando A y B no tienen ningún elemento común es $A \cap B = \emptyset$. Tambien $A \cup B$ y $X-A$ son subconjuntos de X.

Dados dos conjuntos X e Y definimos su producto cartesiano $X \times Y$ por

$$X \times Y = \{(x,y) \,/\, x \in X,\ y \in Y\}.$$

A cada elemento de $X \times Y$ se le llama par ordenado. Si (x,y) es un par ordenado, se dirá que x es la primera componente del par e y la segunda componente. Esta definición tambien se puede pensar para el caso $X = Y$, así tenemos

$$X \times X = \{(x,y) \,/\, x,y \in X\}$$

donde hay que entender que cabe la posibilidad $x = y$; es decir, para cada $x \in X$ tenemos $(x,x) \in X \times X$. No hay que confundir el par ordenado (x,y), con $x,y \in X$, con el subconjunto $\{x,y\}$ de X.

<u>Relaciones de equivalencia. Conjunto cociente</u>.-

Vamos primeramente a definir lo que es una relación binaria en un conjunto. Dado un conjunto X hacemos $X \times X$. Entonces, decimos que una <u>relación binaria</u> en X es un subconjunto R de $X \times X, R \neq \emptyset$, $R \subset X \times X$. Cuando un par (x,y) de $X \times X$ pertenezca a R diremos que x está relacionado con y según R y escribiremos $x \mathcal{R} y$.

Una relación binaria R en X puede verificar alguna de las propiedades siguientes:

1) <u>Propiedad Reflexiva</u>:

$$\forall x \in X \ : \ (x,x) \in R \quad \text{o} \quad \forall x \in X \ : \ x \mathcal{R} x,$$

es decir, todo elemento está relacionado consigo mismo.

2) Propiedad Simétrica.-

(Si $(x,y)\varepsilon R \Rightarrow (y,x)\varepsilon R$) o (Si $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$).

3) Propiedad Transitiva.-

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } (x,y)\varepsilon R \\ \text{y } (y,z)\varepsilon R\end{array}\right\} \Rightarrow (x,z)\varepsilon R \quad \text{o} \quad \left.\begin{array}{l}\text{Si } x\mathcal{R}y \\ \text{e } y\mathcal{R}z\end{array}\right\} \Rightarrow x\mathcal{R}z .$$

4) Propiedad Antisimétrica.-

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } (x,y)\varepsilon R \\ \text{y } (y,x)\varepsilon R\end{array}\right\} \Rightarrow x = y \quad \text{o} \quad \left.\begin{array}{l}\text{Si } x\mathcal{R}y \\ \text{e } y\mathcal{R}x\end{array}\right\} \Rightarrow x = y .$$

Uno piensa que las propiedades 2) y 4) debieran ser incompatibles. Es decir, que de verificarse una de ellas necesariamente la otra no se verifica. Consideremos el conjunto $X = \{1,2,3\}$ y en él la relación binaria dada por

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

entonces R es simétrica y antisimétrica a la vez.

Una relación binaria que satisfaga las tres primeras propiedades se dice de equivalencia. Si satisface 1), 3) y 4) se llama de orden (parcial). Una relación de orden en la que dos elementos cualesquiera siempre esten relacionados se llama relación de orden total. Nosotros sólo nos vamos a ocupar de las relaciones de equivalencia.

En el conjunto de los enteros naturales $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ la relación "ser menor o igual" es de orden total. La relación de igualdad es de equivalencia. En el plano de la Geometría elemental la relación de equipolencia (dos vectores son equipolentes cuando tienen la misma dirección, sentido y longitud) es una relación de equivalencia.

Sea X un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia en X (la representaremos por $\sim$ para hacer mención que es de este tipo). Para cada $x \in X$ definimos la clase de equivalencia de representante x por

$$C(x) = \{y \in X \,/\, y \sim x\},$$

es decir, $C(x)$ es el subconjunto de X formado por todos los elementos relacionados con x. Veamos algunas propiedades de las clases de equivalencia:

Proposición 0.1.- Si $y \in C(x)$ entonces $C(y) = C(x)$.

Demostración. En efecto, sea $z \in C(y) \Rightarrow z \sim y$, como por hipótesis $y \in C(x)$ ha de ser $y \sim x$ y por la propiedad transitiva $z \sim x$ con lo que $z \in C(x)$. Así hemos probado que $C(y) \subset C(x)$.

Recíprocamente, dado $z \in C(x)$ es $z \sim x$, como $y \sim x$ por ser $y \in C(x)$, por la propiedad simétrica $x \sim y$. Por lo tanto $z \sim y$, lo que prueba $z \in C(y)$. Así $C(x) \subset C(y)$. Uniendo ambas partes $C(x) = C(y)$.

Este resultado nos dice que en cada clase de equivalencia cualquiera de sus elementos puede servir de representante. Es decir, de todos los vectores que son equipolentes a uno dado en el plano, cualquiera de ellos (junto con la relación de equipolencia) nos determina al resto.

Proposición 0.2.- i) $\forall x \in X \; : \; x \in C(x)$.

ii) Para $x, y \in X$, si $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ entonces $C(x) = C(y)$.

Demostración. i) está claro por la propiedad reflexiva. Supongamos que existe $z \in C(x) \cap C(y)$, entonces $z \sim x$, $z \sim y$ y por lo tanto $x \sim y$. Aplicando la Proposición 0.1 tenemos $C(x) = C(y)$.

Este resultado afirma, en primer lugar, que no hay ninguna clase de equivalencia vacia ($= \emptyset$), y, en segundo, que dos clases de equivalencia distintas (es decir de representantes no relacionados) no pueden tener ningún elemento en común.

<u>Definición</u> 0.3.- Dado un conjunto X una <u>partición</u> suya es una colección de subconjuntos no vacíos de X disjuntos dos a dos y cuya unón es todo X.

Observemos que una relación de equivalencia en un conjunto nos induce una partición en dicho conjunto por la Proposición 0.2. Reciprocamente, supongamos dada una partición en X, entonces existe una única relación de equivalencia en X tal que, precisamente, las clases de equivalencia son los subconjuntos que integran la partición. En concreto, sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ la mencionada partición. Decimos que dos elementos de X estan relacionados si pertenecen al mismo C de $\mathcal{C}$ y que cada elemento de X está relacionado con él mismo. Así, definimos en X la única relación de equivalencia con la propiedad antes enunciada (compruébese los detalles). Es por esto que podemos hablar indistintamente de una relación de equivalencia en un conjunto o de una partición en dicho conjunto.

<u>Definición</u> 0.4.- Dado un conjunto X y en él una relación de equivalencia $\sim$ definimos el <u>conjunto cociente</u> X sobre $\sim$, $X/\sim$, como el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de $\sim$.

Si X es el conjunto de todos los vectores del plano y $\sim$ la relación de equipolencia, entonces $X/\sim$ tiene por elementos las clases de vectores equipolentes. A cada clase se le da el nombre de "vector libre".

Si X es el conjunto de los puntos del plano y $\sim$ es la relación de equivalencia "distar lo mismo de un punto fijo" entonces $X/\sim$ tiene por elementos circunferencias todas ellas con centro en ese punto fijo.

Nótese que siendo X un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia en X, La clase de equivalencia $C(x)$ es a la vez un subconjunto de X y un elemento de $X/\sim$.

Aplicaciones entre conjuntos.-

Definición 0.5.- Dados dos conjuntos X e Y una aplicación es una forma de hacerle corresponder a cada elemento de X un único elemento de Y. Una aplicación de X en Y se representa por $f : X \longrightarrow Y$ y ponemos $x \longmapsto y$ o bien $f(x) = y$ si y es el único elemento de Y que corresponde a x mediante f. A $f(x)$ se le suele llamar la imagen mediante f de x.

Se entiende que en esta definición puede ocurrir $X = Y$.

Si $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son respectivamente los conjuntos de números naturales y enteros, entonces $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = -x$ es una aplicación pero $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $h(x) = \frac{1}{2}x$ no lo es (explicar).

Definición 0.6.- Dada una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se define su grafo o gráfico $G(f)$ como

$$G(f) = \{(x,y) \in X \times Y \,/\, y = f(x)\} = \{(x,f(x)) \,/\, x \in X\}.$$

Según esta definición $G(f)$ es un subconjunto de $X \times Y$. Pero, ¿ todo subconjunto G de $X \times Y$ es el grafo de una aplicación f de X en Y ? La respuesta a esta pregunta es que, en general, no todo subconjunto de $X \times Y$ es el grafo de una aplicación. Para ello uno se da cuenta que $G(f)$ verifica:

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \quad \text{con} \quad (x,y) \in G(f).$$

Reciprocamente, dado un subconjunto G de $X \times Y$ que verifique esta propiedad existe una única aplicación $f : X \longrightarrow Y$ tal que $G(f) = G$. Como consecuencia podemos dar una aplicación por un subconjunto G de $X \times Y$ tal que

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \quad \text{con} \quad (x,y) \in G.$$

Dada una aplicación $f : X \longrightarrow Y$, al conjunto X se le llama el dominio (de definición) de f, al conjunto Y el codominio de f Al subconjunto de elementos de Y que son imágenes de alguno de X se le llama la imagen de f y se le representa por $\operatorname{Im} f$, es decir

$$\operatorname{Im} f = \{y \in Y \;/\; \exists x \in X \;:\; f(x) = y\} = \{f(x) \;/\; x \in X\}.$$

Diremos que dos aplicaciones son iguales si tienen el mismo dominio, el mismo codominio y asocian el mismo elemento del codominio a uno mismo del dominio.

Las aplicaciones $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 + 1$ $\forall x \in Z$, y $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $h(x) = x^2 + 1$ $\forall x \in N$, son distintas.

Definición 0.7.- Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación y $A \subset X$, entonces se define la imagen (directa) de A, $f_*(A)$, como

$$f_*(A) = \{f(x) \;/\; x \in A\}.$$

Si $B \subset Y$, se define la imagen recíproca de B, $f^*(B)$, como

$$f^*(B) = \{x \in X \;/\; f(x) \in B\}.$$

Según esta definición tenemos $f_*(A) \subset Y$ y $f^*(B) \subset X$. Además ocurre que $f_*(X) = \operatorname{Im} f$ y $f^*(Y) = X$. Obsérvese que cada aplicación

$f : X \longrightarrow Y$ induce aplicaciones

$$f_* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \qquad f^* : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X).$$

Definición 0.8.- Dados conjuntos X, Y y Z y aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow Z$ podemos definir una nueva aplicación

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto h(f(x)) \end{aligned}$$

que se llama la composición (o compuesta) de f y h, y se representa por $h_\circ f$ (primero se aplica f y luego h).

Por ejemplo, si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$ y $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $h(y) = 2y - 3 \quad \forall y \in Z$, entonces $h_\circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ está dada por $(h_\circ f)(x) = 2x^2 - 3$.

La composición de aplicaciones no es "conmutativa" en el sentido de que aunque se pueda hacer tanto $h_\circ f$ como $f_\circ h$ (nótese que para que se pueda efectuar $h_\circ f$ ha de ser el codominio de f igual al dominio de h) en general $h_\circ f \neq f_\circ h$ como lo prueba el ejemplo precedente.

Proposición 0.9.- Sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ y $h : Z \longrightarrow W$ tres aplicaciones , entonces

$$h_\circ(g_\circ f) = (h_\circ g)_\circ f.$$

Demostración. En efecto, ambos miembros de esta igualdad son aplicaciones de X en W, veamos que toman el mismo valor en un elemento genérico $x \in X$.

$$(h_\circ(g_\circ f))(x) = h((g_\circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

$$((h_\circ g)_\circ f)(x) = (h_\circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

La Proposición 0.9 se suele nombrar diciendo que la composición de aplicaciones es "asociativa". Tal resultado lo que nos dice es que para componer tres aplicaciones, componemos dos de ellas y luego la obtenida (en el orden correspondiente) con la otra aplicación.

Hay tres tipos importantes de aplicaciones:

Definición 0.10.- Diremos que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es inyectiva si elementos distintos de X tienen imágenes distintas en Y. Es decir, si $x, x' \in X$, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. O equivalentemente si $f(x) = f(x')$ implica $x = x'$.

Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es sobreyectiva si todo elemento de Y es imagen de alguno de X. Es decir, si $\forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$. O lo que es lo mismo si $\operatorname{Im} f = Y$.

Diremos que una aplicación es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez. De lo anterior es claro que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es biyectiva si y sólo si

$$\forall y \in Y \quad \exists! x \in X \quad : \quad f(x) = y.$$

La aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales) $f(x) = 2x + 3 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ es inyectiva y la aplicación $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ no lo es. La aplicación de inclusión de un subconjunto A de X en X, $i : A \longrightarrow X$, $i(x) = x \ \ \forall x \in A$ es siempre inyectiva. Además es sobreyectiva si y sólo si $A = X$. En este caso tenemos la aplicación identidad en X, $1_X : X \longrightarrow X$ $1_X(x) = x \ \ \forall x \in X$, que claramente es biyectiva. La aplicación f de arriba es tambien sobreyectiva pero g no lo es. Como último ejemplo, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ $x \longmapsto ax + b$ es biyectiva (una de estas es f de arriba).

Definición 0.11.- Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación biyectiva. Sea $y \in Y$. Como sabemos que $\exists! x \in X : f(x) = y$, el asignar a cada $y \in Y$ el único $x \in X$ tal que $f(x) = y$ nos define una aplicación de Y en X que llamaremos la inversa de f y representamos por f^{-1}. Es decir,

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X, \quad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Nótese que f^{-1} que es una aplicación biyectiva como f, está determinada de forma única por f y además cumple

$$f \circ f^{-1} = 1_Y, \quad f^{-1} \circ f = 1_X.$$

¿ Caracterizan estas dos propiedades a f^{-1} ? La respuesta nos la da la siguiente

Proposición 0.12.- i) Sean X e Y dos conjuntos y sean

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{y} \quad g : Y \longrightarrow X$$

dos aplicaciones tales que

$$g \circ f = 1_X$$

entonces f es inyectiva y g es sobreyectiva.

ii) Si además se tiene

$$f \circ g = 1_Y$$

entonces f y g son biyectivas y $f = g^{-1}$, $g = f^{-1}$.

Demostración. En efecto, supongamos $f(x) = f(x')$ entonces $g(f(x)) = g(f(x'))$ por ser g una aplicación, luego $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ es decir, $x = x'$. Así se prueba i). La afirmación ii) se obtiene cambiando los papeles en i) de f y g, y el hecho de ser $f^{-1} = g$ (g^{-1} se hace igual) resulta de la definición de f^{-1}. Sea $f^{-1}(y) = x$, entonces $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 1_X(x) = x = f^{-1}(y)$, y así se concluye.

Es claro que existen aplicaciones que no son ni inyectivas ni sobreyectivas, ni por supuesto biyectivas. Sin embargo veremos que toda aplicación se puede poner como composición de una inyectiva, una biyectiva y una sobreyectiva.

Proposición 0.13.- Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Se define en X la siguiente relación binaria

$$x, x' \in X, \quad x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia en X.

Si $p : X \longrightarrow X/\sim$ es la aplicación definida por $p(x) = C(x)$ $\forall x \in X$, $b : X/\sim \longrightarrow \operatorname{Im} f$ definida por $b(C(x)) = f(x)$ e $i : \operatorname{Im} f \longrightarrow Y$ es la inclusión de $\operatorname{Im} f$ en Y, se tiene

$$f = i_{\circ} b_{\circ} p$$

además p es sobreyectiva, b biyectiva e i inyectiva.

Se entiende que en el miembro derecho de la descomposición de f se han de componer primero dos de estas aplicaciones y luego el resultado con la restante. Por la Proposición 0.9 no es preciso poner paréntesis.

Demostración. Como $f(x) = f(x)$ es $x \sim x$ $\forall x \in X$. Si $x \sim y$ entonces $f(x) = f(y)$ y por lo tanto $y \sim x$. Por último, si $x \sim y$ e $y \sim z$, $f(x) = f(y) = f(z)$, con lo que $x \sim z$.

Es trivial que i es una aplicación inyectiva. p le hace corresponder a cada elemento de X su clase de equivalencia como elemento de $X/\sim$, por ello es una aplicación sobreyectiva.

b necesita de un razonamiento más profundo. En efecto, ni siquiera es claro que b sea una aplicación. Para esto, sean $C(x) = C(y)$ entonces $x \sim y$ por la Proposición 0.1, y por como se define la relación $\sim$ en X se tiene $f(x)=f(y)$, es decir $b(C(x)) = b(C(y))$. Así queda probado que b es una aplicación, que es inyectiva ya que $b(C(x))=b(C(z)) \Rightarrow f(x)=f(z)$ y de aquí $x \sim z$. Utilizando ahora la Proposición 0.1 tenemos $C(x)=C(z)$. Para ver que es sobreyectiva, si $f(x) \in \mathrm{Im}\, f$ entonces $b(C(x))=f(x)$. Así ya hemos probado que b es una aplicación biyectiva. Finalmente es inmediato probar que $f = i_\circ b_\circ p$.

<u>Corolario</u> 0.14.- <u>Si</u> f <u>es inyectiva entonces</u> p <u>es biyectiva</u>. <u>Si</u> f <u>es sobreyectiva</u> $i = 1_Y$ <u>es biyectiva y si</u> f <u>es biyectiva</u> p <u>e</u> i <u>son biyectivas</u>.

PROBLEMAS

1.- Se considera en $\mathbb{Z}$ la siguiente relación binaria $x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = 3k$. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$. ¿ En cuantas clases de equivalencia se descompone $\mathbb{Z}$?.

2.- Decir cuales de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son gráficos de aplicaciones y para los que lo sean decir de cual se trata.

$$G_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x^2 + y^2 = 16\}, \quad G_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x = y^2\},$$

$$G_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y = 7x\}, \quad G_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x + y = 0\}.$$

3.- Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones. i) Supongamos que ambas son inyectivas (resp. sobreyectivas) ¿ podemos afirmar que $g_\circ f$ es inyectiva (resp. sobreyectiva) ? ii) Supongamos que $g_\circ f$ es inyectiva (resp. sobreyectiva) ¿ es f inyectiva (resp. g sobreyectiva) ? iii) Si $g_\circ f$ es biyectiva, a partir de lo anterior ¿ que se puede decir de g y de f ?

4.- Sea $f : X \longrightarrow X$ una aplicación. Demostrar que f es inyectiva si y sólo si cumple la siguiente propiedad

$$\text{Si } g,h : X \longrightarrow X \text{ son tales que } f_o g = f_o h \Rightarrow g = h.$$

Demostrar que f es sobreyectiva si y sólo si $g_o f = h_o f \Rightarrow g = h$.

5.- Sea A un subconjunto de X. Se consideran las aplicaciones

$$F : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X) \text{ y } \qquad H : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

definidas por $F(B) = A \cap B$, $H(B) = A \cup B$ $\forall B \in \mathcal{P}(X)$. Determinar Im F, Im H, $F^*(\{A \cap B\})$, $H^*(\{A \cup B\})$ siendo $B \subset X$ fijo pero arbitrario.

6.- Sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones biyectivas. Probar que $g_o f$ tambien es biyectiva (ver problema nº 3) y que

$$(g_o f)^{-1} = f^{-1}{}_o g^{-1}$$

7.- El siguiente razonamiento es erroneo. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{R}$ una relación binaria en X simétrica y transitiva. Entonces si $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ por la condición de simetría y como $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x \Rightarrow x\mathcal{R}x$ $\forall x \in X$ por ser una relación transitiva. Así "parece" que hemos demostrado que $\mathcal{R}$ tiene que ser tambien reflexiva. Esto no es cierto (búsquese un contraejemplo) pero ¿ donde está el error ?

8.- Sean X e Y dos conjuntos(*) y $X \times Y$ su producto cartesiano. Probar que las aplicaciones (llamadas proyecciones)

$$p : X \times Y \longrightarrow X \qquad\qquad q : X \times Y \longrightarrow Y$$
$$(x,y) \longmapsto x \qquad\qquad (x,y) \longmapsto y$$

son sobreyectivas. ¿ pueden ser alguna vez inyectivas ?
Obtener la descomposición canónica de la Proposición 0.13 para las aplicaciones p y q.

(*) ambos no vacios.

9.- Aplicar la Proposición 0.13 (descomposición canónica) a la aplicación $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}^*$, donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$, dada por $f(x) = x^2$ $\forall x \in \mathbb{Z}$.

10.- Sean X e Y dos conjuntos, $\sim$ y $\sim'$ relaciones de equivalencia en X e Y respectivamente, y $p : X \longrightarrow X/\sim$, $p' : Y \longrightarrow Y/\sim'$ las proyecciones $p(x) = C(x)$ $\forall x \in X$, $p'(y) = C(y)$ $\forall y \in Y$. Diremos que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es compatible con las relaciones $\sim$ y $\sim'$ si $x \sim x' \Rightarrow f(x) \sim' f(x')$. Demostrar que para cada aplicación $f : X \longrightarrow Y$ compatible con $\sim$ y $\sim'$ existe una única aplicación $\hat{f} : X/\sim \longrightarrow Y/\sim'$ tal que $\hat{f} \circ p = p' \circ f$.

Decir quien es $\hat{f}$ cuando $X = Y =$ vectores de un plano, $\sim =$ $= \sim' =$ relación de equipolencia y $f(\overrightarrow{AB}) = 2.\overrightarrow{AB}$.

11.- Sea V el conjunto de los polinomios de grado a lo sumo 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$, es decir

$$V = \{ a_0 + a_1x + a_2x^2 \;/\; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Se define $D : V \longrightarrow V$ por $D(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2\,a_2x$. Demostrar que D es una aplicación y que no es inyectiva. Sea tambien $E : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $E(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1 + a_2$ (valoración en $x = 1$). Probar que E es una aplicación sobreyectiva. ¿ Es sobreyectiva $E \circ D$?. Aplicar la descomposición canónica establecida en la Proposición 0.13 a D. Dar una interpretación a la aplicación biyectiva "b" que aparece en esta.

12.- Sean X e Y dos conjuntos finitos. Probar que $card(X) \leq card(Y)$ si y solo si existe una aplicación inyectiva $f : X \longrightarrow Y$. Probar que $card(X) \geq card(Y)$ si y solo si existe una aplicación sobreyectiva $f : X \longrightarrow Y$. (card(X) es el número de elementos o cardinal de X).