Capítulo 1

Problemas de Sucesiones

Problema 1.1 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)\operatorname{sen}(n)}{n} \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{e^n+2^n}{5^n} \quad (iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{\ln(\frac{n}{n-1})} \quad (iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

Solución:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)\operatorname{sen}(n)}{n} = \left[\begin{array}{l} \text{escala de infinitos} \\ \operatorname{sen}(n)\ \ \text{acotada} \end{array}\right] = 0 \times \text{acotada} = 0.$$

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{e^n+2^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{5}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^n = [(\text{ número menor que uno })^\infty] = 0+0=0.$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{\ln(\frac{n}{n-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n-1})} = [\text{ infinitésimo del logaritmo }] = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{\frac{1}{n-1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3(n-1)}{n} = 3.$$

$$(iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \cdots$$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$ y $b_n = n\sqrt{n}$, ya que b_n es creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} = [\times \text{ y } \div \text{ por el conjugado}] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)}{\left((n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}\right)\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+n\sqrt{n(n+1)}}{((n+1)^3-n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1+n\sqrt{n^2+n}}{3n^2+3n+1} = \frac{2}{3}.$$

Problema 1.2 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n-\operatorname{sen}(n)}{n} \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (iii)\ \lim_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

$$(iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+n)}{n} \qquad (v)\ \lim_{n\to\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Solución:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n-\operatorname{sen}(n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\operatorname{sen}(n)\right) = [\operatorname{sen}(n)\ \ \text{acotada}] = 1+0\times\text{acotada} = 1.$$

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = [\text{ infinitésimos equivalentes }] = 1.$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}+1\right) = \infty \times \frac{\pi}{4} = \infty.$$

$$(iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+n)}{n} = [\text{escala de infinitos}] = 0.$$

$$(v)\ \lim_{n\to\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = [\text{infinitésimos equivalentes}] = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{2n^2} = 0.$$

Problema 1.3 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)\ln(n^2-n+1)}{n} \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty} 2n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \qquad (iii)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)^n$$

Solución:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)\ln(n^2-n+1)}{n} = \begin{bmatrix} \text{escala de infinitos} \\ \cos(n)\ \ \text{acotada} \end{bmatrix} = 0\times\text{acotada} = 0.$$

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} 2n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} 2\frac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}}=[\text{ infinitésimos equivalentes}]=2.$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}=e^0=1.$$

Para el cálculo de este límite hemos utilizado el criterio del número e.

Problema 1.4 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{e^n-2^n}{n} \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sen}(n)-\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \qquad (iv)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$$

Solución:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{e^n-2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n}\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)=[\text{ escala de infinitos}]=\infty\times 1=\infty.$$

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}=[\text{infinitésimos equivalentes}]=e.$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sen}(n)-\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{sen}(n)\frac{1}{n}-\frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right)=[0\times\text{acotada}]-\frac{0}{\infty}=0.$$

$$(iv)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}=\cdots$$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n=1^3+2^3+\cdots+n^3$ y $b_n=n^4$, ya que b_n es creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{(n+1)^4-n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{4n^3+6n^2+4n+1}=\frac{1}{4}.$$

Problema 1.5 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n)-\mathrm{sen}(n)}{\sqrt{n}} \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2}\right)^n \quad (iii)\ \lim_{n\to\infty} n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Solución:

$(i)\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n) - \mathrm{sen}(n)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}} - \dfrac{\mathrm{sen}(n)}{\sqrt{n}}\right) = [0 \times \text{acotada}] = 0 - 0 = 0.$

$(ii)\ \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - \dfrac{1}{2}\right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0.$

$(iii)\ \lim_{n\to\infty} n^2 \ln(1 + \dfrac{1}{n})\,\mathrm{sen}(\dfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \dfrac{\mathrm{sen}(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = [\text{infinitésimos equivalentes}] = 1.$

Problema 1.6 Calcular los siguientes límites:

$(i)\ \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^3 + 2n - 1}{4n^3 + n^2 - 2n + 1}\right)^n$ $\qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{\arctan(n)\ln(n^2+2)}{n}$

$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{4^n}{5^n}$ $\qquad (iv)\ \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{n^2 + 4n}\right)$

$(v)\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos(1) + \cos(2) + \cdots + \cos(n)}{n^2}$

—————— • ——————

Solución:

$(i)\ \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^3 + 2n - 1}{4n^3 + n^2 - 2n + 1}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^3+2n-1}{4n^3+n^2-2n+1} - 1\right)} =$

$e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^3 + 4n^2 - 2n}{4n^3 + n^2 - 2n + 1}} = e^{-\frac{1}{4}}.$

Para el cálculo del límite hemos aplicado el criterio del número e.

$(ii)\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{\arctan(n)\ln(n^2+2)}{n} = \left[\begin{array}{c}\arctan(n) \text{ es acotada} \\ \text{escala de infinitos}\end{array}\right] = \text{acotada} \times 0 = 0.$

$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{4^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0.$

$(iv)\ \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{n^2 + 4n}\right) = [\times \text{ y } \div \text{ por el conjugado}] =$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n^2-n} - \sqrt{n^2+4n}\right)\left(\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2+4n}\right)}{\left(\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2+4n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{-5n}{\left(\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2+4n}\right)} =$

$\dfrac{-5}{2}.$

$(v)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(1)+\cos(2)+\cdots+\cos(n)}{n^2}$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n = \cos(1)+\cos(2)+\cdots+\cos(n)$ y $b_n = n^2$, ya que b_n es creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n+1)}{2n+1} = [\text{acotada} \times 0] = 0.$$

Problema 1.7 Calcular los siguientes límites:

$(i)\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^4+2n^3-1}{n^4+2n^2-2n+3}\right)^n$ $\qquad (ii)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)+n}{\sqrt{n}}$

$(iii)\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\ln(1+\sqrt{n}+n)-\ln(n)\right)$ $\qquad (iv)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{sen}(1)+\mathrm{sen}(2)+\cdots+\mathrm{sen}(n)}{n^2}$

Solución:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4+2n^3-1}{n^4+2n^2-2n+3}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n^4+2n^3-1}{n^4+2n^2-2n+3}-1\right)} =$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4-2n^3+2n^2-4n}{n^4+2n^2-2n+3}} = e^2.$$

Para el cálculo del límite hemos aplicado el criterio del número e.

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)+n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-\ln(n)}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}\right) = [\text{escala de infintos}] = 0+\infty = \infty.$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \left(\ln(1+\sqrt{n}+n)-\ln(n)\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1+\sqrt{n}+n)}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right) =$$

$$[\text{infinitésimos equivalentes}] = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0.$$

$(iv)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{sen}(1)+\mathrm{sen}(2)+\cdots+\mathrm{sen}(n)}{n^2}$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n = \mathrm{sen}(1)+\mathrm{sen}(2)+\cdots+\mathrm{sen}(n)$ y $b_n = n^2$, ya que b_n es creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sen}(n+1)}{(n+1)^2-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sen}(n+1)}{2n+1} = [\text{acotada} \times 0] = 0.$$

Problema 1.8 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} n\operatorname{sen}\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(n)\ln(n)}{n}$$
$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (iv)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})}{n^2}$$

Solución:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\operatorname{sen}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\infty\times\operatorname{sen}(1)=\infty.$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(n)\ln(n)}{n}=\left[\begin{array}{c}\text{escala de infinitos}\\ \operatorname{sen}(n)\text{ acotada}\end{array}\right]=0.$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=[\text{infinitésimos equivalente}]=1.$

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})}{n^2}.$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n=\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})$ y $b_n=n^2$, ya que b_n es creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n+1})}{2n+1}=[\text{infinitésimos equivalentes}]=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}=0.$$

Problema 1.9 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2n}{n^3+3n^2-2n-1}\right)^n \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2-2n+7}} \quad (iii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{e^n}$$

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a)+\ln(1+a^2)+\cdots+\ln(1+a^n)}{n}$; $a>0$ (según los valores de a).

Solución:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2n}{n^3+3n^2-2n-1}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n^3-2n}{n^3+3n^2-2n-1}-1\right)}=$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-3n^3+n}{n^3+3n^2-2n-1}} = e^{-3}.$$

Para el cálculo del límite hemos aplicado el criterio del número e.

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2-2n+7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-2n+7}} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{e^n} = [\text{ orden de infinitos}] = 0.$$

$$(iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a)+\ln(1+a^2)+\cdots+\ln(1+a^n)}{n}.$$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz considerando las sucesiones $a_n = \ln(1+a)+\ln(1+a^2)+\cdots+\ln(1+a^n)$ y $b_n = n$, ya que b_n es creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a^n)}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} \ln(1+a^n) = \begin{cases} 0 & a \in (0,1), \\ \ln(2) & a = 1, \\ +\infty & a > 1. \end{cases}$$

Problema 1.10 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4-3n^3-2n^2+1}{n^4-1}\right)^n \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^3+2}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2+3n+1)}{n^2+1}$$

$$(iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{a^n}}{\ln(n)};\ a > 0 \text{ (según los valores de } a).$$

Solución:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4-3n^3-2n^2+1}{n^4-1}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{n^4-3n^3-2n^2+1}{n^4-1}-1\right)} =$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-3n^4-2n^3+2n}{n^4-1}} = e^{-3}.$$

Para el cálculo del límite hemos aplicado el criterio del número e.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^3+2}\right)^{\frac{1}{n}} = [0^0]$. Por tanto, supondremos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^3+2}\right)^{\frac{1}{n}} = A$, de donde

$$\ln(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{n^3+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln(n^3+2)}{n}\right) = [\text{escala de infinitos}] = 0.$$

Finalmente, $A = e^0 = 1$.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2+3n+1)}{n^2+1} = [\text{acotada} \times 0] = 0.$

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a^n}}{\ln(n)}.$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con$a_n = 1 + \dfrac{1}{a} + \cdots + \dfrac{1}{a^n}$ y $b_n = \ln(n)$, ya que b_n es creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a^{n+1}}}{\ln(n+1)-\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{n+1}\ln(1+\frac{1}{n})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})}\frac{n}{a^{n+1}} = \begin{cases} +\infty, & a \le 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$$

Problema 1.11 Calcular los siguientes límites:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{bn}; b \in \mathbb{R}$ $\quad (ii)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n+2}{n^2-2n+1}\left(e^{\frac{1}{n+7}}-1\right)$ $\quad (iii)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{e^n}$

Solución:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{bn} = 1, \text{ si } b = 0.$

Supongamos que $b \neq 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{bn} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} bn\left(\frac{n+1}{n-1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2bn}{n-1}\right)} = e^{2b}.$$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n+2}{n^2-2n+1}\left(e^{\frac{1}{n+7}}-1\right) = [\text{infinitésimos equivalentes}] =$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n+2}{(n^2-2n+1)(n+7)}\frac{\left(e^{\frac{1}{n+7}}-1\right)}{\frac{1}{n+7}} = 1.$$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{e^n} = [\text{escala de infinitos}] = \infty.$

Problema 1.12 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(n - \operatorname{sen}(n)\right) \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+1)^n}{n^2} \quad (iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$

———————— • ————————

Solución:

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(n - \operatorname{sen}(n)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}\right) = 0 \times \text{ acotada } = 0.$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+1)^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln(n^2+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n} = [\text{ escala de infinitos}] = 0.$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\tan\left(\frac{1}{n}\right)} \frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\frac{1}{2n}} \frac{\frac{1}{2n^2}}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} =$

$[\text{ infinitésimos equivalentes }] = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty.$

Problema 1.13 Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida de forma recurrente por $x_{n+1} = x_n^2$, $x_0 = 1/2$. Demostrar que:
(a) (x_n) está acotada inferiormente por 0 y superiormente por $\frac{1}{2}$.
(b) (x_n) es una sucesión decreciente.
(c) Estudiar la convergencia de la sucesión.

———————— • ————————

Solución: (a) $x_0 = 1/2 \geq 0$ y $x_{n+1} = x_n^2 \geq 0$. Luego, (x_n) está acotada inferiormente por 0.

Para deducir que (x_n) está acotada superiormente por $\frac{1}{2}$ procedemos por inducción. En primer lugar, $x_0 = 1/2 \leq 1/2$. Supongamos que $x_n \leq 1/2$ (H.I), debemos demostrarlo para x_{n+1}.

$$x_{n+1} = x_n^2 \leq 1/4 \leq 1/2,$$

por la hipótesis de inducción.

(b) Para demostrar que (x_n) es una sucesión decreciente procedemos de nuevo por inducción. En primer lugar, $x_0 = 1/2 \geq 1/4 = x_1$. Supongamos que $x_{n+1} \leq x_n$ (H.I.), debemos demostrar que $x_{n+2} \leq x_{n+1}$.

$$x_{n+2} = x_{n+1}^2 \leq x_n^2 = x_{n+1},$$

por la hipótesis de inducción.

(c) Por el Teorema de la convergencia monótona, x_n es una sucesión convergente, ya que está acotada inferiormente y es decreciente. Para calcular el límite de la sucesión, suponemos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Entonces, de la relación de recurrencia tenemos que

$$l^2 = l \implies l = 0 \text{ o } l = 1.$$

Como $x_n \leq 1/2$, el límite de la sucesión es $l = 0$.

Problema 1.14 Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida de forma recurrente por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\big), \;\; x_0 = \alpha.$$

Demostrar que:
(a) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente por $\sqrt{\alpha}$.
(b) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente.
(c) Estudiar la convergencia de la sucesión.

Solución:

(a) Debemos demostrar que $x_n \geq \sqrt{\alpha}$.

$x_n \geq \sqrt{\alpha} \iff \frac{1}{2}\big(x_{n-1} + \frac{\alpha}{x_{n-1}}\big) \geq \sqrt{\alpha} \iff x_{n-1}^2 + \alpha \geq 2x_{n-1}\sqrt{\alpha} \iff$

$x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}\sqrt{\alpha} + \alpha \geq 0 \iff (x_{n-1} - \sqrt{\alpha})^2 \geq 0,$

desigualdad que es siempre cierta.

(b) Debemos demostrar que $x_{n+1} \leq x_n$.

$x_{n+1} \leq x_n \iff \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\big) \leq x_n \iff$

$x_n^2 + \alpha \leq 2x_n^2 \iff \alpha \leq x_n^2 \iff \sqrt{\alpha} \leq x_n,$

desigualdad que es cierta por el apartado (a).

(c) Como (x_n) es una sucesión decreciente y acotada inferiormente el Teorema de la convergencia monótona asegura que (x_n) converge. Además si $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ se verifica:

$\lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\big) \iff \ell = \dfrac{1}{2}\big(\ell + \dfrac{\alpha}{\ell}\big) \iff$

$2\ell^2 = \ell^2 + \alpha \iff \ell^2 = \alpha \iff \ell = \sqrt{\alpha},$

ya que el límite debe ser positivo, por ser (x_n) una sucesión de términos positivos.

Problema 1.15 Sea (y_n) una sucesión de números reales tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{y_1}{1} + \dfrac{y_2}{2} + \cdots + \dfrac{y_n}{n}}{\ln(n)}.$$

Solución: Para el cálculo del límite podemos aplicar el criterio de Stolz ya que la sucesión del denominador $\ln(n)$ es estrictamente creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{y_1}{1}+\frac{y_2}{2}+\cdots+\frac{y_n}{n}}{\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{y_{n+1}}{n+1}}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{y_{n+1}}{n+1}}{n} = a,$$

donde se ha aplicado que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ es un infinitésimo equivalente a $\frac{1}{n}$ y que $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

Problema 1.16 Una sucesión (x_n) es una progresión aritmética si existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_{n+1} = d + x_n,\ \ n \geq 1.$$

(i) Probar que $x_n = x_1 + (n-1)d$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(ii) Probar que $x_1 + \cdots + x_n = n\frac{x_1+x_n}{2}$.
(iii) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right).$$

Solución: Sea (x_n) una progresión aritmética es decir

$$x_{n+1} = d + x_n,\ \ n \geq 1.$$

(i) Para probar que $x_n = x_1 + (n-1)d$, $\forall n \in \mathbb{N}$, procedemos por inducción.

Por definición $x_2 = d + x_1 = x_1 + (2-1)d$, por tanto se verifica la fórmula para $n = 2$. Supongamos que es cierta para n, es decir, $x_n = x_1 + (n-1)d$ (H.I.), debemos probarla para $n+1$,

$$x_{n+1} = x_n + d = x_1 + (n-1)d + d = x_1 + nd.$$

Luego la fórmula es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Para probar $x_1 + \cdots + x_n = n\frac{x_1+x_n}{2}$, procedemos de nuevo por inducción.

Para $n = 2$, $x_1 + x_2 = 2\frac{x_1+x_2}{2}$, luego la fórmula es cierta. Supongamos ahora que es cierta para n, es decir, $x_1 + \cdots + x_n = n\frac{x_1+x_n}{2}$. Debemos probarla para $n+1$.

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} &= n\frac{x_1+x_n}{2} + x_{n+1} = n\frac{x_1+x_{n+1}-d}{2} + x_{n+1} \\ &= n\frac{x_1+x_{n+1}}{2} - \frac{dn}{2} + x_1 + nd = n\frac{x_1+x_{n+1}}{2} + \frac{dn}{2} + \frac{2x_1}{2} \\ &= n\frac{x_1+x_{n+1}}{2} + \frac{dn+x_1}{2} + \frac{x_1}{2} \\ &= n\frac{x_1+x_{n+1}}{2} + \frac{x_{n+1}}{2} + \frac{x_1}{2} = (n+1)\frac{x_1+x_{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

(iii) Usando el apartado anterior obtenemos que

$$1 + 2 + \cdots + n = n\frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Por tanto el límite pedido es

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{1}{2}.$$