15 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

15.1 FUNCIONES LOCALMENTE INTEGRABLES

Definición 15.1.1. Sea $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada.

1) Si $a \in A$, la función es f integrable en $[a, a]$ y $\int_a^a f = 0$.

2) Sean a, $b \in A$ con $a > b$. Si f es integrable en $[b, a]$, diremos que f es integrable en $[a, b]$ y definimos $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Definición 15.1.2. 1) Sea I un intervalo. Una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ es *localmente integrable en* I si es integrable en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en I.

2) Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable. La función $F\colon I \to \mathbb{R}$ definida por
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad (x \in I)$$
la llamaremos la *integral indefinida de* f *con origen* a.

Ejemplo 15.1.3. 1) Cualquier función continua o cualquier función monótona definida en un intervalo es localmente integrable en su dominio.

2) Por el corolario 14.1.13, las funciones integrables son localmente integrables.

Lema 15.1.4. *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función localmente integrable.*

1) *Sean* a, $b \in I$ *y sea* $J = [\min\{a,b\}, \max\{a,b\}]$. *Sea* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|f(x)| \leqslant M$ *para todo* $x \in J$. *Entonces*
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M\,|b-a|\,.$$

2) *Sean* a, b, $c \in I$. *Entonces*
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración. FALTA □

Observación 15.1.5. Dos integrales indefinidas se diferencian en una constante: consideremos
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{y } G(x) = \int_b^x f(t)\,dt.$$
Entonces
$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= \int_a^x f(t)\,dt - \int_b^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt. \end{aligned}$$

15.2 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Teorema 15.2.1. *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función integrable y sea* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *una integral indefinida. Entonces*

1) F *es continua;*

2) *si* f *es continua en* $c \in [a,b]$, F *es derivable en* c *y* $F'(c) = f(c)$.

Demostración. 1) Sea $c \in [a.b]$ y $\{x_n\}$ una sucesión convergente a c con $x_n \in I$ para cualquier n. Como f es integrable en $[a,b]$, existe M tal que $|f(x)| \leqslant M$ para cualquier $x \in [a,b]$. Entonces,

Un razonamiento similar al de la ecuación 15.1 nos permite demostrar que la integral indefinida F del teorema fundamental del cálculo es lipschitziana. En general, cualquier integral indefinida es localmente lipschitziana.

$$\begin{aligned} |F(x_n) - F(c)| &= \left| \int_a^{x_n} f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt \right| \\ &= \left| \int_c^{x_n} f(t)\,dt \right| \leqslant M\,|c - x_n|\,. \end{aligned} \tag{15.1}$$

Tomando límites cuando n tiende a infinito se obtiene que

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} |F(x_n) - F(c)| = \lim_{n\to\infty} M\,|c - x_n| = 0,$$

y, por tanto, que F es continua en c.

2) Supongamos que f es continua en $c \in [a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in [a,b]$, $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$. Entonces,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(c) - f(c)(x-c)| &= \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt - f(c)(x-c) \right| \\ &= \left| \int_c^x f(t)\,dt - f(c)(x-c) \right| \\ &= \left| \int_c^x (f(t) - f(c))\,dt \right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,|x-c| < \varepsilon\,|x-c|\,. \end{aligned}$$

□

Corolario 15.2.2. *Sea* J *un intervalo y* $f\colon J \to \mathbb{R}$ *una función continua. Sean* g, $h\colon I \to \mathbb{R}$ *funciones derivables definidas en un intervalo* I *con* $g(I)$, $h(I) \subset J$. *Entonces la función* $F\colon I \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

es derivable y $F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$, *para todo* $x \in I$.

Ejemplo 15.2.3. La función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \int_0^{\sin(x)} \exp\left(-t^2\right) dt, \quad (x \in \mathbb{R})$$

es derivable y su derivada es

$$F'(x) = \exp\left(-\operatorname{sen}^2(x)\right)\cos(x), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

15.2.1 Primitivas*

Ya sabemos que una condición necesaria para que una función sea la derivada de otra es que verifique la propiedad de Darboux. De aquí se deduce que, por ejemplo, la función parte entera no es la derivada de nadie.

Definición 15.2.4. Sea I un intervalo y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que $F\colon I \to \mathbb{R}$ es una *primitiva* de f si $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$.

Corolario 15.2.5. *Toda función continua tiene una primitiva.*

El estudio de las funciones que son la derivada de una función se remonta prácticamente a los orígenes del Cálculo. ¿Cómo es el conjunto de dichas funciones? Si

$$\mathcal{PR}(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R} : f \text{ tiene una primitiva}\}$$

Algunos autores llaman *funciones de Duhamel o "Duhameliana"* a aquellas que tienen una primitiva. El primer ejemplo, que aquí presentamos, de una función de Duhamel cuyo cuadrado no lo es se debe a Witold Wilkosz [**?**].

Es sencillo comprobar que $\mathcal{PR}(I)$ es un espacio vectorial usando la linealidad de la derivada, pero W. Wilkosz encontró un ejemplo de función con primitiva cuyo cuadrado no tiene.

Ejemplo 15.2.6. La función $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$\Phi(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

tiene primitiva, pero su cuadrado no.

Sea $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ya hemos visto, en el ejemplo 9.2.4, que es derivable y que

$$f(x) = F'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Evidentemente $f \in \mathcal{PR}(\mathbb{R})$.

La función $\varphi(x) = 2x\operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$ también tiene primitiva por ser continua. Por tanto, $\Phi = \varphi - f$ también tiene primitiva.

Sea $B(x)$ una primitiva de Φ. Entonces $B'(x/2) = {}^1\!/\!_2 \cos(2/x)$, $B'(0) = 0$.

Obsérvese que, si $x \neq 0$, $\Phi^2(x) = \cos^2(1/x) = {}^1\!/\!_2\,(1 + \cos(2/x))$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que existe una función A tal que $A' = \Phi^2$. Entonces $A(x) - B(x/2)$ es una función derivable y su derivada

$$A'(x) - B'(x/2) = \begin{cases} 1/2, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

tiene una discontinuidad de salto, lo que es una contradicción. Por tanto, no existe ninguna función cuya derivada sea Φ^2.

15.3 REGLA DE BARROW

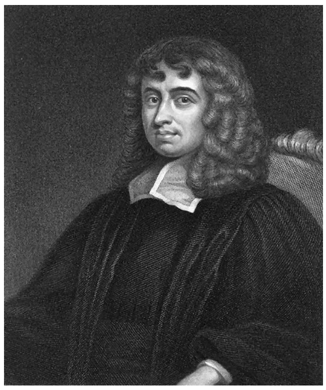

Figura 42: Isaac Barrow (1630–1677)

A la vista del teorema fundamental del cálculo podemos plantearnos las siguientes preguntas:

1) Si una función tiene primitiva, ¿es integrable?

2) Si es integrable, ¿tiene que tener primitiva?

3) Si es integrable y tiene primitiva, ¿la primitiva tiene que ser la integral indefinida?

Las primeras dos afirmaciones tienen respuesta negativa.

Ejemplo 15.3.1. La función $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es derivable y su derivada es

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La función F' no es integrable porque no está acotada:

$$F'\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = -2\sqrt{2n\pi}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ejemplo 15.3.2. La función parte entera es integrable en cualquier intervalo por ser monótona. También sabemos que no verifica la propiedad del valor intermedio y, por tanto, no es la derivada de ninguna función.

La respuesta a la tercera pregunta es afirmativa. Este resultado se conoce como regla de Barrow.

La regla de Barrow también es conocida como fórmula de Newton-Leibniz.

Teorema 15.3.3 (Regla de Barrow). *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y sea F una primitiva. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demostración. Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Aplicando el teorema del valor medio, existen $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ tales que $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ para cualquier i. Entonces

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \Sigma(f, \dot{P}),$$

donde $\dot{P} = (P, \{c_i\})$. En particular, si P_n es la partición que consiste en dividir el intervalo $[a,b]$ en n trozos iguales y tomamos límites cuando n tiende a infinito se obtiene que

$$F(b) - F(a) = \Sigma(f, \dot{P}_n) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

como queríamos demostrar. □

Una consecuencia directa es que una integral indefinida y una primitiva de una función integrable se diferencia en una constante.

Corolario 15.3.4. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y supongamos que f tiene una primitiva F. Entonces*

$$F(x) - \int_a^x f(t)\,dt$$

es constante.

Demostración. Aplicando la regla del Barrow al intervalo $[a,x]$,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a), \quad (x \in [a,b]).$$

Por tanto, $F(x) - \int_a^x f(t)\,dt = F(a)$, para cualquier $x \in [a,b]$. □

15.3.1 Integración por partes

Proposición 15.3.5. *Sean* $F, G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones derivables. Entonces,* FG' *es integrable si, y sólo si, lo es* $F'G$ *y, en ese caso,*

$$\int_a^b F(x)G'(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F'(x)G(x)\,dx. \tag{15.2}$$

En particular, si f *y* g *son integrables, se verifica la igualdad anterior.*

Notación: $F\big|_a^b = F(b) - F(a)$

Es muy común encontrar escrita la fórmula de integración por partes (15.2) de la forma

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

donde du o dv hacen referencia a las derivadas de las funciones u y v, respectivamente.

ALPES o LIATE son algunas reglas mnemotécnica para decidir qué función elegir como v y como v. Cada letra indica un tipo de función. En ALPES, las letras representan funciones "arco", logaritmos, polinomios, exponenciales y funciones trigonométricas (senos, cosenos). La función que aparece primero en ALPES se toma como u, se deriva, en otras palabras. El resto se toma como dv. En LIATE, del inglés, las iniciales representan logaritmos, funciones inversas trigonométricas (inverse functions), polinomios (algebraic), funciones trigonométricas y exponenciales

Ejemplo 15.3.6. Calcula $\displaystyle\int_0^1 xe^{3x}\,dx$.

$$\int_0^1 e^{3x}x\,dx = x\frac{e^{3x}}{3}\bigg|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}\,dx = \frac{2e^3+1}{9}.$$

¿Qué elección de funciones en la regla de integración por partes hemos hecho?

15.3.2 Cambio de variable

Proposición 15.3.7 (Sustitución)**.** *Sea* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función derivable en* $[a,b]$ *cuya derivada,* g'*, es integrable. Sea* I *un intervalo tal que* $g([a,b]) \subseteq I$ *y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces* $(f\circ g)g'$ *es integrable en* $[a,b]$ *y*

$$\int_a^b (f\circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f = F(g(b)) - F(g(a)),$$

donde F *es una primitiva de* f *en I.*

Demostración. La función $F\circ g$ es derivable y su derivada, usando la regla de la cadena, es

$$(F\circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

La regla de Barrow nos dice que podemos calcular el valor de la integral usando una primitiva si sabemos que es integrable: $f\circ g$ es integrable por ser continua (composición de función continuas) y g' es integrable. Como el producto de funciones integrables es integrable, entonces

$$\int_a^b (f\circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f = F(g(b)) - F(g(a)). \qquad \square$$

Ejemplo 15.3.8. Calcula $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\log(x)}$.

$$\int_2^3 \frac{dx}{x\log(x)} = \begin{bmatrix} y = \log(x) \\ dy = dx/x \end{bmatrix} = \int_{\log(2)}^{\log(3)} \frac{dy}{y} = \log(\log(3)) - \log(\log(2)).$$

15.4 TEOREMAS DEL VALOR MEDIO PARA LA INTEGRAL

El primer teorema del valor medio para la integral se debe a Cauchy (1821)

Teorema 15.4.1 (Primer teorema del valor medio para la integral)**.** *Sean* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones integrables. Supongamos que* $g(x) \geqslant 0$ *para cualquier* x *de* $[a,b]$*. Entonces existe* $\mu \in \left[\inf f([a,b]), \sup f([a,b])\right]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)dx. \tag{15.3}$$

Si f *es continua existe un punto* $c \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{15.4}$$

Demostración. Como la función g es continua, $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ si, y sólo si, $g(x) = 0$ para cualquier x. En ese caso, la identidad que queremos probar es trivial.

Supongamos que $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Sean $M = \sup f$ y $m = \text{mín} f$, entonces

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Dividiendo por $\int_a^b g(x)\,dx$,

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

Basta tomar

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}.$$

Si f es continua, $f([a,b]) = [m,M]$ y, existe $c \in [a,b]$ tal que $\mu = f(c)$. □

Corolario 15.4.2. *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces existe* $c \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{15.5}$$

Por analogía con la media aritmética, se suele decir que $f(c)$ es el *valor medio* de la función f.

Teorema 15.4.3 (Segundo teorema del valor medio para la integral)**.** *Sean* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones integrables. Supongamos que* g *es monótona. Entonces existe* $c \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Corolario 15.4.4 (Versión de Bonnet del segundo teorema del valor medio para la integral)**.** *Sean* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones integrables.*

1) *Si* g *es decreciente y* $g(x) \geqslant 0$*, para cualquier* x*, existe* $c \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx.$$

2) *Si* g *es creciente y* $g(x) \geqslant 0$*, para cualquier* x*, existe* $c \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

15.4.1 Resto integral de Taylor*

Teorema 15.4.5. *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^{n+1}. *Sea* P_n *el polinomio de Taylor de* f *centrado en* $a \in I$. *Entonces dado* $x \in I$,

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.$$

Fórmula integral del resto de Taylor

Aplicación: acotar el error de la función logaritmo de nuevo.

15.5 EJERCICIOS

Ejercicio 15.1. Sea $r \in \mathbb{R}^+$ y $f \in C([-r, r])$. Prueba que

1) Si f es par, entonces $\int_{-r}^{r} f(x)\, dx = 2\int_0^r f(x)\, dx$.

2) Si f es impar, entonces $\int_{-r}^{r} f(x)\, dx = 0$.

Ejercicio 15.2. Sea I un intervalo no trivial y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua. Prueba las siguientes igualdades:

1) $\displaystyle\int_{a-h}^{b-h} f(x+h)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$, $\forall a, b \in I$, $\forall h \in \mathbb{R}$.

2) $\displaystyle\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$, $\forall\, a, b \in I$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

Ejercicio 15.3. Demuestra que si f es una función continua y periódica de período T se verifican las siguientes igualdades

$$\int_x^{x+T} f(s)\, ds = \int_0^T f(u+x)\, du, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 15.4. Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ una función continua verificando que

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_x^1 f(t)\, dt$$

para cualquier $x \in [0,1]$. Demuestra que $f(x) = 0$, para todo x.

Ejercicio 15.5. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $\int_0^1 f(x)\, dx = 1/2$. Demuestra que f tiene un punto fijo.

Ejercicio 15.6. Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas de forma que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Demuestra que existe un punto $c \in [a,b]$ de forma que $f(c) = g(c)$.

Ejercicio 15.7. Sea $f \in C(\mathbb{R})$ y $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$H(x) = \int_{x^2}^{x^3} f(t)\, dt.$$

Prueba que H es derivable y calcula su derivada.