ÁLGEBRA I

Doble grado en Informática y Matemáticas, 2º Curso.

Examen Final (enero 2018)

EJERCICIO 1. Sea A un anillo y sean I, J ideales de A de forma que $J \subset I$. Demuestra que:

(1) I/J es un ideal de A/J

(2) Existe un isomorfismo

$$\frac{A/J}{I/J} \approxeq \frac{A}{I}$$

EJERCICIO 2. Sea $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(a,b) = a-b$. Sea $ker(f) = \{((a,b),(c,d)) : f(a,b) = f(c,d)\}$ el núcleo de f.

(1) Describe la clase de $(0,0)$ en $(\mathbb{N} \prod \mathbb{N})/ker(f)$

(2) Demuestra que hay una biyección entre $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/ker(f)$ y $\mathbb{Z}$.

(3) Calcula $f^{-1}(1)[= f^*(\{1\}]$

EJERCICIO 3.

(1) Calcula las unidades de $\mathbb{Z}[i]/(2)$.

(2) Calcula el resto de dividir $11^{12345678}$ entre 26 en $\mathbb{Z}$.

(3) Resuelve el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv i \mod 3 \\ \\ x \equiv 1+i \mod 5+2i \end{cases}$$

EJERCICIO 4.

(1) Demuestra que el ideal I generado por $\{x^3 + 2x^2 - x - 2, x^3 - 1\}$ en $\mathbb{Q}[x]$ es principal. Encuentra $a(x)$ de forma que $I = (a(x))$.

(2) Estudia la irreducibilidad de $18x^5 + 6x + 3$ en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$.

(3) Factoriza el polinomio $x^6 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ en $\mathbb{Q}[x]$.