

Antonio Rodríguez Garzón, Enrique Rafael Aznar García y Manuel Bullejos Lorenzo

Tipología de examen: Parcial

Este examen pertenece al Banco de Exámenes de la Asociación de Estudiantes de Matemáticas de la Universidad de Granada. Si bien su autoría corresponde a los profesores ya citados, en la asociación nos encargamos de almacenarlos y ceder su uso a los estudiantes para que sea más satisfactoria su labor a la hora de preparar un examen.

1. **(3,5 puntos)** Un eminente político ha decidido invertir una cantidad de dinero, que ha conseguido en comisiones ilegales, en metales preciosos: plata, oro y platino.  
Este político solo maneja billetes de 1000 \$, y estamos interesados en conocer el número de billetes invertidos. Sabemos que maneja una cantidad cercana al millón doscientos mil \$, esto es, alrededor de 1200 "de los grandes" y que ha decidido invertir el doble en oro que en plata y el triple en platino que en oro.  
El valor del lingote de plata está en 12 mil \$, el de oro en 14 mil \$ y el de platino en 31 mil \$. Al comprar la plata le sobraron 5 mil \$, que añadió a la cantidad destinada para comprar oro y al comprar oro le sobraron 13 mil \$, que añadió al dinero destinado a comprar platino. Cuando fue a comprar platino, le faltaban 2 mil \$ para poder hacer una compra de lingotes enteros y pidió esta cantidad prestada a su mujer.  
¿Cuántos billetes ha invertido? ¿Qué dinero ha invertido entonces contando con lo que pidió a su mujer?
2. **(3,5 puntos)** Sea  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ es biyectiva}\}$  y  $\phi : B \rightarrow P(X)$  la aplicación definida por  $\phi(f) = \{i \in X \mid f(i) = i\}$ .
  - a) Listar los elementos de B.
  - b) ¿Cuántos elementos tiene  $Im(\phi)$ ? Calcular  $\phi^*(\{\emptyset, \{1, 2\}\})$
  - c) Razonar si  $\phi$  es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o de ninguno de esos tipos.
  - d) Describir el conjunto cociente  $B/R_\phi$  (donde  $R_\phi$  es la relación de equivalencia en B inducida por  $\phi$ ).

## 1. Tipo 1

En las siguientes cuestiones sólo una de las respuestas dadas es correcta. Anota tu respuesta en la hoja adjunta.

1. Si  $X$  es un conjunto con 3 elementos e  $Y$  tiene 4 elementos entonces el conjunto de partes de  $X \cap Y$ :
  - a)  $P(X \cap Y)$  tiene  $2^7$  elementos.
  - b)  $P(X \cap Y)$  tiene como máximo  $2^3$  elementos.
  - c)  $P(X \cap Y)$  tiene como máximo  $2^4$  elementos.
2. La congruencia  $21x \equiv 6 \pmod{12}$ :
  - a) No tiene solución
  - b) Sólo tiene 3 soluciones.
  - c) Ninguna de las respuestas anteriores.
3. En un conjunto con 3 elementos hay:
  - a) Tres relaciones reflexivas distintas.
  - b) Seis relaciones reflexivas distintas.
  - c) Ninguna de las respuestas anteriores.
4. Para cualesquiera conjuntos  $X$  e  $Y$ , si  $X \subset Y$ , entonces:
  - a)  $X \in Y$ .
  - b)  $X \notin Y$ .
  - c) Ninguna de las respuestas anteriores.
5. Para cualesquiera enteros  $a$  y  $b$ , si  $d = \text{m.c.d.}(a, b)$ , se tiene que la ecuación  $ax + by = \text{m.c.d.}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ :
  - a) Tiene solución si  $\text{m.c.d.}(a, b) = ab$ .
  - b) Siempre tiene solución.
  - c) Nunca tiene solución.
6. El sistema de congruencias en  $\mathbb{Z}$ ,  $\begin{cases} x \equiv a \pmod{n} \\ x \equiv b \pmod{n+1} \end{cases}$ :
  - a) Siempre tiene solución.
  - b) Sólo tiene solución si  $n$  es par.
  - c) Nunca tiene solución.
7. El resultado de calcular  $3^{(3^{700})}$  en el anillo  $\mathbb{Z}_{100}$  es:
  - a) 3.
  - b) 27.

- c) Ninguna de las respuestas anteriores.
8. En el conjunto  $\mathbb{Z}_{360}$ :
- a) Hay 96 unidades.
- b) No hay divisores de cero no nulos.
- c) Todos sus elementos no nulos son unidades.
9. Dados enteros positivos  $a$ ,  $n$  se tiene:
- a)  $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ .
- b)  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .
- c) Ninguna de las respuestas anteriores..
10. Si  $X$  es un conjunto finito y  $R$  una relación de equivalencia en  $X$  se tiene:
- a)  $|X/R| < |X|$ .
- b)  $|X| < |X/R|$ .
- c) Si  $|X/R| = |X|$  y  $x_1 \neq x_2$  son dos elementos de  $X$  entonces  $x_1$  y  $x_2$  no están relacionados por  $R$ .
11. Los números enteros 10115 y -9828:
- a) Son primos relativos.
- b) Su máximo común divisor es 7.
- c) Ninguna de las respuestas anteriores.
12. Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación entonces:
- a)  $f$  es inyectiva si verifica que  $(\forall x_1, x_2 \in X, x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$ .
- b)  $f$  es inyectiva si verifica que  $\text{Im}(f) = Y$ .
- c)  $f$  es inyectiva si verifica que  $(\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$ .
13. Si  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  se tiene que el producto  $\text{m.c.d.}(a, b, c) \text{m.c.m.}(a, b, c)$  es igual:
- a) Al producto  $abc$ .
- b) Al producto  $\text{m.c.d.}(a, b) \text{m.c.m.}(b, c)$ .
- c) Ninguna de las respuestas anteriores.
14. Si el examen de hoy, que es a las 9 horas, lo hubiéramos hecho hace 184 horas, tendríamos que haber venido:
- a) A las 10 de la noche.
- b) A las 5 de la tarde.
- c) Ninguna de las respuestas anteriores.
15. Si  $d$  y  $n$  son enteros positivos y  $d|n$  entonces (siendo  $\varphi$  la función de Euler):

- a)*  $\varphi(d) \mid \varphi(n)$ .
- b)*  $\text{m.c.d.}(\varphi(d), \varphi(n)) \neq 1$ .
- c)* Ninguna de las respuestas anteriores.