GEOMETRÍA II. Examen del Tema 3
– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –
Curso 2014/15

<u>**Nombre**</u>**:**

1. Probar que $f(x,y,z) = (x, 3y, -2x+3z)$ es autoadjunto de $(\mathbb{R}^3, g)$ donde
$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Hallar una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g)$ donde diagonaliza f.

2. Se considera $(\mathbb{R}^3, g)$ donde g es la métrica que tiene como base ortonormal $B = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$. Si $U = \{(x,y,z) : x+y=0\}$, hallar la expresión respecto de B_u de la proyección ortogonal sobre U y la reflexión respecto U.

3. Clasificar la siguiente isometría de $(\mathbb{R}^3, g_u)$ y hallar los elementos geométricos que la define:
$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Importante: razonar todas las respuestas

1. La expresión matricial del endomorfismo es

$$M(f,B)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

El endomorfimo es autoadjunto respecto de la métrica G si $M(f,B)^t M_B(g) = M_B(g)M(f,B)$. Y tenemos que son iguales, donde

$$M(f,B)^t M_{B_u}(g)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3\\ 3 & 6 & -3\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}.$$

Hallamos el polinomio característico de $M(f,B)$, pero al ser triangular, los valores propios son 1 y 3, siendo éste doble. Hallamos subespacios propios.

$$\begin{aligned} V_{\lambda=1} &= \{(x,y,z): \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0\}\\ &= \{(x,y,z): y=0, -x+z=0\} =< (1,0,1) >. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\lambda=3} &= \{(x,y,z): \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0\}\\ &= \{(x,y,z): x=0\} =< (0,1,1),(0,0,1) >. \end{aligned}$$

Sólo queda hallar en cada uno de los subespacios, bases ortornomales. Pero una cuenta fácil con la matrix $M_{B_u}(g)$ nos dice que el vector que define el de V_1 tiene módulo 1 y que los dos de V_3 son ortonormales. Por tanto, una base es: $\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$.

2. (Primera forma de hacer el ejercicio) Hallamos $M_{B_u}(g)$. Si $P = M(I,B_u,B)$, entonces sabemos que

$$M_{B_u}(g)=P^t M_B(g) P = P^t I_3 P = P^t P.$$

Como $P = M(I,B,B_u)^{-1}$, hallamos la inversa de dicha matriz:

$$M(I,B,B_u)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow M(I,B,B_u)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$M_{B_u}(g) = P^t P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallamos una base de U: $B_U = \{(1,-1,0),(0,0,1)\}$ y una de $U^\perp$. Si $e_1 = (1,-1,0)$ y $e_2 = (0,0,1)$, entonces $v = (x,y,z) \in U^\perp$ sii

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x - 5y - 2z = 0.$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y + z = 0.$$

Tomando $z = 1$, tenemos $4x - 5y = 2$ y $x - y = 1$, luego un vector que satisface las dos ecuaciones es $(3,2,1)$. Así $B_{U^\perp} = \{e_3 = (3,2,1)\}$ y una base de $\mathbb{R}^3$ es $B_U \cup B_{U^\perp} = \{(1,-1,0),(0,0,1),(3,2,1)\}$. Una vez establecida la base, sólo queda expresar un vector (x,y,z) en coordenadas respecto de la base: $(x,y,z) = a(1,-1,0) + b(0,0,1) + c(3,2,1)$, obteniendo

$$a = -\frac{1}{5}(-2x + 3y), \ b = -\frac{1}{5}(x + y - 5z), \ c = \frac{1}{5}(x + y).$$

Por tanto

$$\pi_U(x,y,z) = ae_1 + be_2 = \frac{1}{5}(2x - 3y, -2x + 3y, 4x - 2y + 5z).$$

$$S_U(x,y,z) = ae_1 + be_2 - ce_3 = \frac{1}{5}(-x - 6y, -4x + y, -2x - 2y + 5z).$$

(Segundo forma de hacer el ejercicio) Hacemos el trabajo respecto de la base ortonormal que nos dan $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Sea $(x,y,z)_B$ en coordenadas respecto de B. Entonces $U = < (1,-1,0),(0,0,1) > = < (2,-1,-2)_B, (0,0,1)_B >$. El subespacio ortogonal son los vectores $(x,y,z)_B$ tales que $2x - y - 2z = 0, z = 0$, cuya base es $\{(1,2,0)\}$. Escribimos $(x,y,z) = a(2,-1,-2) + b(0,0,1) + c(1,2,0)$, obteniendo

$$(a,b,c) = \frac{1}{5}(2x - y, 4x - 2y + 5z, x + 2y).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\pi_U(x,y,z)_B &= \frac{1}{5}(2x-y)(2,-1,-2)_B + \frac{1}{5}(4x-2y+5z)(0,0,1)_B \\
&= \frac{1}{5}(4x-2y,-2x+y,5z)_B = \frac{1}{5}((4x-2y)e_1+(-2x+y)e_2+5ze_3) \\
&= \frac{1}{5}(2x-3y,-2x+3y,-x-y+5z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_U(x,y,z)_B &= \frac{1}{5}(2x-y)(2,-1,-2)_B + \frac{1}{5}(4x+2y+5z)(0,0,1)_B - \frac{1}{5}(x+2y)_B \\
&= \frac{1}{5}(2x-y)e_1 + \frac{1}{5}(4x+2y+5z)e_2 - \frac{1}{5}(x+2y)e_3 \\
&= \frac{1}{5}(-x-6y,-4x+y,-2x-2y+5z).
\end{aligned}$$

El último vector ya está escrito respecto de B_u. Finalmente, queda por hacer otro cambio de coordenadas, pues $X=(x,y,z)$ del principio es en verdad, $X=(x,y,z)_B$. Sea $(x,y,z)_B = X' = (x',y',z')_{B_u}$. La relación entre ambas coordenadas es $X = PX'$. Por tanto, si (x',y',z'), entonces $PX' = (x'-y',y',-x'+y'z')$, y ahora hacemos introducimos este vector en las dos expresiones anteriores de π_U y S_U, obteniendo las mismas que ya se obtuvieron por el primer método.

3. Para hallar los valores propios de $M(f,B_u)$, escribimos esta matriz A como $A=C/2$, donde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de C es 8, luego el de A es 1. Por tanto, la isometría es un giro respecto de la recta. Luego el valor propio es el 1, con la posibilidad de que también lo sea el -1, en caso de un giro de 180 grados, lo que daría una simetría axial. Como $(A-I)X=0$ es lo mismo que $(C-2I)X=0$, tenemos

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{(x,y,z) : \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \{(x,y,z) : -2x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}z=0, \sqrt{2}x-y+z=0\} = <(0,1,1)>
\end{aligned}$$

Hallamos el subespacio $V_1^{\perp}$, el cual es $\{(x,y,z) : y+z=0\} =< (1,0,0),(0,1,-1) >$. La imagen de $(1,0,0)$ respecto de la isometría no es $-1\cdot(1,0,0)$, luego no es una simetría axial. Para hallar el ángulo de giro, calculamos una base ortornomal de $V_1^{\perp}$. Como los vectores $\{(1,0,0),(0,1,-1)$ son perpendiculares, la base es $\{e_2 = (1,0,0), e_3 = (0,1,-1)/\sqrt{2}\}$.

La imagen de $(1,0,0)$ mediante la isometría es de la forma, $f(e_2) = \cos\theta e_2 + \sin\theta e_3$. Por tanto,

$$\cos\theta = g(f(e_2), e_2), \quad \sin\theta = g(f(e_2), e_3).$$

Como $f(e_2) = (0,1,-1)/\sqrt{2}$, entonces

$$\cos\theta = 0, \quad \sin\theta = 1,$$

es decir, $\theta = \pi/2$