EJERCICIO PUNTUABLE DEL TEMA III. GEOMETRÍA II. CURSO 2018 - 2019

PRIMER EJERCICIO (5 PUNTOS)

APARTADO (1) (2 ' 5 PUNTOS)

Sean (V, g) un espacio vectorial métrico euclídeo de $\dim(V) \geq 2$ y $B = \{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ una base de V. Sea $B' = \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ la base ortogonal que se obtine *a* partir de B por el método de Gram − Schmidt. Prueba por inducción sobre $n = \dim(V)$ que se verifican las siguientes igualdades :

$$\|\overrightarrow{v_1}\|^2 = \alpha_1,\ \|\overrightarrow{v_2}\|^2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},\ \|\overrightarrow{v_3}\|^2 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2},\ \ldots.,\ \|\overrightarrow{v_n}\|^2 = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}};$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son los menores angulares de la matriz de g en la base B.

APARTADO (2) (2 ' 5 PUNTOS)

Sea (V, g) un espacio vectorial métrico euclídeo de $\dim(V) \geq 2$.
Si $B = \{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ y $B' = \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ son dos bases (no necesariamente ortonormales) de V se dice que B y B' son recíprocas si sus vectores verifican
$g(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{v_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}, \ \forall\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Prueba que dada cualquier base B de V existe una única B' base de V tal que B y B' son recíprocas. $\Phi : V \longrightarrow V^*$

SEGUNDO EJERCICIO (5 PUNTOS)

En el espacio $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas simétricas de orden dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea g que verifica :

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| = 1,\ \left\|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{7},\ \left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{7},$$

$$\sphericalangle\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \sphericalangle\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right),$$

$$\sphericalangle\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \arccos\left(\frac{4}{7}\right).$$

Sea $f : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ el endomorfismo dado por

$$f(X) = A.X + X.A^t,\ \forall\ X \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}),$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Se pide :

(*a*) Comprueba que f es autoadjunto para la métrica g. (2' 5 PUNTOS)
(*b*) Encuentra una base ortonormal para g formada por vectores propios de f. (2' 5 PUNTOS)

Granada, 30 de mayo de 2019