GUÍA MAESTRA PARA SUCESIONES Y SERIES

Autor: Daniel Pérez Ruiz

1. ALGUNAS SERIES IMPORTANTES

En la siguiente lista se muestran algunas de las series más importantes del Análisis Matemático. Además, son bastante útiles a la hora del estudio de otras series.

SERIE GEOMÉTRICA

- *DEFINICIÓN:*

$$\sum_{n\geq 0} x^n = x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n$$

- *CONVERGENCIA:*
  - La serie converge sí y sólo sí $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1)$$

SERIE ARMÓNICA

- *DEFINICIÓN:*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

- *CONVERGENCIA:*
  - La serie diverge positivamente: $+\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \{1 + 1/2 + 1/4 + \ldots + 1/n\} = +\infty$$

SERIE ARMÓNICA ALTERNADA

- *DEFINICIÓN:*

$$A_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

- *CONVERGENCIA:*
  - La serie converge y su suma es igual a $\log(2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2)$$

SUMA DE FACTORIALES

- *DEFINICIÓN:*

$$H_{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$$

- *CONVERGENCIA*:
    - La serie converge al número e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

SERIES DE BERTRAND

- *DEFINICIÓN:*

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{\alpha} \cdot log(n)^{\beta}}$$

- *CONVERGENCIA:*
    - Las series convergen si $\alpha > 1$ cualquiera sea β
    - También convergen si $\alpha = 1$ y $\beta > 1$
    - En cualquier otro caso, la serie diverge

SERIES DE RIEMANN

- *DEFINICIÓN:*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

- *CONVERGENCIA:*
    - La serie solamente converge si $\alpha > 1$

2. EQUIVALENCIAS ASINTÓTICAS

Útiles para el cálculo de límites, aquí se presentan las siguientes equivalencias asintóticas:

- $log(1 + x_n) \sim x_n \leftrightarrow (x_n \to 0)$
- $log(x_n) \sim x_n - 1 \leftrightarrow (x_n \to 1)$
- $e^{x_n} - 1 \sim x_n \leftrightarrow (x_n \to 0)$
- $(1 + x_n)^{\alpha} \sim \alpha \cdot x_n \leftrightarrow (x_n \to 0)$

- ${x_n}^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot (x_n - 1) \leftrightarrow (x_n \to 1)$

3. CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA SUCESIONES

En el estudio de sucesiones lo interesante es ver dónde converge dicha sucesión (equivalentemente a calcular el límite). Contamos con 2 importantes criterios que nos ayudarán en nuestro análisis:

3.1 CRITERIO DE EQUIVALENCIA LOGARÍTMICA:

- *DEFINICIÓN:* Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\{x_n\} \to 1$ y sea y_n cualquier sucesión de números reales.
  - Para $L \in \mathbb{R}$ se tiene: $\lim\{y_n(x_n - 1)\} = L \leftrightarrow \lim\{{x_n}^{y_n}\} = e^L$
  - $\{{x_n}^{y_n}\} \to +\infty \leftrightarrow \{y_n(x_n - 1)\} \to +\infty$
  - $\{{x_n}^{y_n}\} \to 0 \leftrightarrow \{y_n(x_n - 1)\} \to -\infty$

3.2 CRITERIO DE STOLZ

- *DEFINICIÓN:* Sea $\{y_n\}$ una sucesión positivamente divergente y estrictamente creciente y sea $\{x_n\}$ una cualquier sucesión. Se verifica que si:

$$\left\{\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}\right\} \to L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Rightarrow \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} \to L$$

3.3 CRITERIO DE LA MEDIA ARITMÉTICA

- *DEFINICIÓN:* Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde L es un número real, o $L = +\infty$, o $L = -\infty$. Entonces se verifica que:

$$\left\{\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}\right\} \to L$$

3.3 CRITERIO DE LA MEDIA GEOMÉTRICA

- *DEFINICIÓN*: Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos y L es un número real, o $L = +\infty$. Entonces se verifica que:

$$\left\{\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}\right\} \to L$$

4. CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA SERIES

Las propiedades de las series en raras ocasiones se pueden determinar estudiando la propia serie. Para ello se estudia la sucesión asociada $\{a_n\}$. Además, contamos con criterios de convergencia para series que nos facilitará el análisis de las mismas.

4.1 CRITERIO DE CONVERGENCIA BÁSICO PARA SERIE DE TÉRMINOS POSITIVOS:

- Una serie de términos positivos $\sum_{n\geq 1} a_n$, decimos que es convergente si y sólo si está mayorada, es decir, existe un $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\sum_{k\geq 1} a_k \leq M \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = sup\left\{\sum_{k\geq 1} a_k : n \in \mathbb{N}\right\}$$

- En caso de que la serie no esté mayorada, diverge positivamente.

4.2 CRITERIO BÁSICO DE COMPARACIÓN

- Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq b_n$ para todo $n > k$. Se verifica que:

$$\sum_{n\geq 1} a_n (converge) \leftrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n (converge)$$

- De forma análoga se cumple para la divergencia de ambas series.

4.3 CRITERIO LÍMITE DE COMPARACIÓN

- Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ dos series de términos positivos, y supongamos que:

$$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} \rightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

- Si $L = +\infty$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ es divergente, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ es divergente.
- Si $L = 0$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.
- Si $L \in \mathbb{R}^+$, ambas series $\sum_{n\geq 1} b_n$ y $\sum_{n\geq 1} a_n$ son convergentes o divergentes.
- En particular, si dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son asintóticamente equivalentes, las series $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ convergen o divergen.

4.4 CRITERIO DE CONDENSACIÓN DE CAUCHY

- Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de números positivos. Se verifica que las series $\{A_n\}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ donde:

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, Bn = a_1 + 2a_2 + 4a_3 + \ldots + 2^n a_{2^n}$$

- Ambas convergen o ambas divergen.

4.5 CRITERIO DEL COCIENTE O D'ALEMBERT

- Si se cumple que:

$$\lim\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \rightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

- Si $L < 1$ entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, la sucesión $\{a_n\}$ no converge a 0 y por tanto, la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ no es convergente.

- Cuando $L = 1$, la serie puede ser convergente o divergente. **NO DA INFORMACIÓN, USAR OTRO CRITERIO**.

4.6 CRITERIO DE LA RAÍZ O DE CAUCHY

- Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$ una serie de términos positivos. Si se verifica que:

$$\lim \left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\} \to L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

- Si $L < 1$ entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, la sucesión $\{a_n\}$ no converge a 0 y por tanto, la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ no es convergente.

- Cuando $L = 1$, la serie puede ser convergente o divergente. **NO DA INFORMACIÓN, USAR OTRO CRITERIO**.

RELACIÓN ENTRE EL CRITERIO DE LA RAÍZ Y DEL COCIENTE

- Supuesto $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que:

$$\underline{\lim} \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \leq \underline{\lim} \left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\} \leq \overline{\lim} \left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\} \leq \overline{\lim} \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$$

- Siempre que el criterio del cociente de información, el de la raíz también lo proporciona.
- Si el criterio del cociente no da información, es posible que el de la raíz **SI LO PROPORCIONE**

4.7 CRITERIO DE RAABE

- Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y pongamos:

$$R_n = n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

- Supongamos que $\lim\{R_n\} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
  - Si $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.
  - Si $L < 1$ o $L = -\infty$, o si existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq R_n$ tal que $R_n \leq 1$ para todo $n \geq k$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es divergente.

4.8 CRITERIO DE RAABE (FORMA ALTERNATIVA)

- Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
- Sea $S_n = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n$:
  - Si $S_n \to e^L$ con $L > 1$ o si $S_n \to +\infty$, la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.
  - Si $S_n \to e^L$ con $L < 1$ o si $S_n \to 0$ la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es divergente.

4.9 CRITERIO DE LEIBNIZ PARA SERIES ALTERNADAS

- Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y convergente a cero. Entonces la serie alternada $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} a_n$es convergente. Además, si:
  - $S_n = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} a_k$

    - $S = \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$
- Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $|S - S_n| \leq a_{n+1}$

5. CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONVERGENCIA CONMUTATIVA

- *DEFINICIÓN DE CONVERGENCIA CONMUTATIVA:* Se dice que una serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es CONMUTATIVAMENTE CONVERGENTE si, para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se verifica que la serie definida por la sucesión $\{a_{\pi(n)}\}$, es decir, la serie:

$$\sum_{n\geq 1} a_{\pi(n)} = \{a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)} + \ldots + a_{\pi(n)}\} \Rightarrow CONVERGE$$

- *DEFINICIÓN DE CONVERGENCIA ABSOLUTA:* Se dice que una serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE si la serie $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ es convergente.
- **Toda serie absolutamente convergente es conmutativamente convergente.**

5.1 TEOREMA DE RIEMANN

- Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$ una serie convergente pero no absolutamente convergente y sea $\alpha \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$. Entonces existe una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \alpha$$

- CONVERGENCIA ABSOLUTA $\Leftrightarrow$ CONVERGENCIA CONMUTATIVA