

# GEOMETRÍA II: Capítulo 1

## Diagonalización de Endomorfismos

- 1.1. Valores y vectores propios. Subespacios propios.
- 1.2. Polinomio característico. Multiplicidad geométrica y algebraica.
- 1.3. El teorema fundamental de diagonalización.

### 1. Introducción

★ Ya conoces que las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, al elegir bases en ellos, las puedes representar por matrices. En particular, si estudias endomorfismos de un espacio vectorial, es suficiente con elegir una base para obtener la representación matricial. Así para  $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}_n)$  y  $\mathcal{B}_1$  una base de  $\mathbf{V}_n$  obtienes la matriz  $M_1 = M(f, \mathcal{B}_1)$ . Recuerda también que, una vez elegida la base, la aplicación  $\Phi_{\mathcal{B}_1} : \mathbf{End}(\mathbf{V}_n) \rightarrow \mathcal{M}_n$  definida, precisamente, por  $\Phi_{\mathcal{B}_1}(f) = M_1 = M(f, \mathcal{B}_1)$  es lineal y biyectiva, esto es, un isomorfismo. De modo que tienes un montón de isomorfismos entre estos espacios vectoriales, uno para cada base que tomes en  $\mathbf{V}_n$ .

★ Por lo anterior, el mismo endomorfismo está representado por diferentes matrices según la base que elijas. Las matrices que representan a un mismo endomorfismo se llaman **semejantes** y algebraicamente están relacionadas como sigue:

$$M_1 = M(f, \mathcal{B}_1) \quad M_2 = M(f, \mathcal{B}_2) \quad \Rightarrow \quad M_2 = P.M_1.P^{-1}$$

donde  $P$  es la matriz de cambio de base  $P = M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ .

★ Recuerda también que las matrices semejantes tienen la misma traza y el mismo determinante. Es decir que el **determinante** y la **traza** son dos invariantes por la semejanza de matrices y, realmente, son **propiedades del endomorfismo**

$$\boxed{\text{traza}(f) = \text{traza}(M(f, \mathcal{B}))}$$

$$\boxed{\det(f) = \det(M(f, \mathcal{B}))}$$

donde  $\mathcal{B}$  es cualquier base del espacio vectorial  $\mathbf{V}_n$ .

★ Naturalmente, un problema general que aparece al estudiar aplicaciones lineales es el de elegir bases para que las representaciones matriciales sean tan simples como sea posible. Esta idea general de simpleza la vamos a concretar, traducir, en nuestro caso por ser **diagonal**. De manera precisa, el problema que planteamos es el siguiente:

**Dado un endomorfismo,  $f \in \text{End}(\mathbf{V}^n)$ , ¿existe una base,  $\mathcal{B}$ , de  $\mathbf{V}_n$  tal que la matriz  $M(f, \mathcal{B})$  es diagonal?**

★ Este problema, planteado en un contexto geométrico, tiene una versión algebraica equivalente:

**Dada una matriz cuadrada,  $M \in \mathcal{M}_n$ , ¿es semejante a otra diagonal?**

Cuando la respuesta sea afirmativa diremos que el endomorfismo es diagonalizable o que la matriz es diagonalizable por semejanza.

★ De manera rápida, nos damos cuenta de que ambos problemas, equivalentes, poseen una **respuesta negativa**. En efecto, la existencia de una base  $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  en  $\mathbf{V}_n$  de manera que  $M(f, \mathcal{B})$  es diagonal obliga a los vectores de dicha base a cumplir la siguiente condición:  $f(E_i)$  debe ser colineal con  $E_i$  esto es

$$\star\star \boxed{f(E_i) = \lambda_i E_i \quad \lambda_i \in \mathbb{R}} \quad 1 \leq i \leq n$$

★ Si consideras en el espacio vectorial  $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$  un giro, con centro el origen, y ángulo, por ejemplo  $\pi/4$ , es obvio que no puedes encontrar vectores, distintos del cero, que al girarlos cuarenta y cinco grados se queden en la misma recta vectorial. Es decir, no puedes encontrar soluciones a la anterior ecuación y por lo tanto no puedes diagonalizar dicho endomorfismo. También puedes realizar el siguiente argumento.

En la base usual,  $\mathcal{B}_0 = \{E_1^0, E_2^0\}$ , de  $\mathbb{R}^2$  la rotación anterior viene representada por la matriz siguiente

$$M(R_{\pi/4}, \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Tratamos de encontrar vectores  $E = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  obviamente distintos del vector cero y que verifiquen  $f(E) = \lambda E$  para algún número real  $\lambda$ . Por tanto

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 - \lambda & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así los posibles números reales,  $\lambda$ , que pueden arreglar el problema deben ser los que anulen el determinante de la matriz de coeficientes del sistema homogéneo anterior

$$\lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1 = 0$$

Pero esta ecuación de segundo grado en  $\lambda$  tiene discriminante estrictamente negativo y por lo tanto no tiene raíces reales.

★ Lo mismo ocurre obviamente para cualquier giro  $R_\alpha$  con  $\alpha \neq 0$  ( $\alpha = 0$  es la identidad) y  $\alpha \neq \pi$  ( $\alpha = \pi$  es la aplicación antípoda).

## 2. Vectores y Valores Propios

★ Ya hemos visto que el problema de diagonalizar endomorfismos,  $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$ , (o diagonalizar matrices por semejanza) pasa por encontrar una base  $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  de  $\mathbf{V}^n$  cuyos vectores cumplan  $f(E_i) = \lambda_i E_i$  para ciertos números reales  $\lambda_i$ . Ello nos lleva a considerar las soluciones no triviales de la ecuación siguiente

$$\star\star \boxed{f(X) = \lambda X} \quad X \neq \vec{0}$$

★ Esto sugiere o motiva la siguiente definición. **Un vector  $X \in \mathbf{V}$ , distinto del vector cero, se dice ser propio para  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  si existe un escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  de manera que  $f(X) = \lambda X$ .** Al correspondiente número real se le llama **valor propio del endomorfismo**.

★ Después de esto, el problema de diagonalizar un endomorfismo (o por semejanza, una matriz) es equivalente al de encontrar una base formada por vectores propios.

★ Para trabajar con la ecuación anterior, la representamos de manera matricial. Si elegimos una base cualquiera,  $\mathcal{B}_0 = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ , entonces la ecuación anterior se puede representar matricialmente por

$$X = \sum_{i=1}^n a_i E_i \equiv (a_1, a_2, \dots, a_n) = a \quad M(f, \mathcal{B}_0) = M$$

$$f(X) = M \cdot a^t \quad \lambda X = (\lambda \mathbf{I}_n) a^t$$

$$f(X) = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad (M - \lambda \mathbf{I}_n) \cdot a^t = 0.$$

Para que este sistema homogéneo tenga soluciones no triviales su determinante (polinomio de grado  $n$  en  $\lambda$  que se llama **polinomio característico** de  $f$ ) debe ser cero

$$\star\star \boxed{\mathbf{P}_f(\lambda) = \det(M - \lambda \mathbf{I}_n) = 0} \quad \text{ecuación característica} \star\star$$

★ Una observación antes de seguir. Hemos hablado de polinomio y ecuación característicos de un endomorfismo y en realidad hemos usado una base y la representación matricial en dicha base. Sería bueno que se notara que en realidad no depende de la base. Ello es claro pues si dos matrices,  $M$  y  $N$ , son semejantes, representan al mismo endomorfismo en sendas bases, entonces existe una matriz regular,  $P$ , la del cambio de base, de manera que

$$N = P.M.P^{-1} \quad \Rightarrow \quad N - \lambda \mathbf{I}_n = P.(M - \lambda \mathbf{I}_n).P^{-1}$$

lo que prueba que las matrices  $M - \lambda \mathbf{I}_n$  y  $N - \lambda \mathbf{I}_n$  son también semejantes y en particular tienen el mismo determinante y así producen la misma ecuación característica.

★ A cada valor propio,  $\lambda$ , de un endomorfismo, uno le puede asociar un número natural, su **multiplicidad aritmética**,  $a_\lambda$ , o número de veces que  $\lambda$  aparece como raíz de la ecuación característica.

★ Por otro lado, se puede considerar el conjunto de los vectores de  $\mathbf{V}^n$  que son propios para un mismo valor propio,  $\lambda$  de  $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$ , es decir

$$\mathbf{U}_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbf{V}^n : f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$$

Resulta que  $\mathbf{U}_\lambda$  es siempre un subespacio vectorial de  $\mathbf{V}^n$ , el subespacio propio definido por, o asociado con,  $\lambda$  (**lo puedes comprobar de ejercicio**). Se define la **multiplicidad geométrica** del valor propio  $\lambda$  por la dimensión del subespacio propio asociado con él, es decir

$$\boxed{g_\lambda = \dim(\mathbf{U}_\lambda)} \quad \text{multiplicidad geométrica}$$

★ La suma de subespacios propios es directa. Es decir, si  $\lambda$  y  $\mu$  son dos valores propios distintos de un endomorfismo,  $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$ , entonces  $\mathbf{U}_\lambda \cap \mathbf{U}_\mu = \{0\}$ . Aquí tienes la comprobación

$$X \in \mathbf{U}_\lambda \cap \mathbf{U}_\mu \quad \Rightarrow \quad f(X) = \lambda X = \mu X \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \mu)X = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0$$

### 3. El Caso de dimensión dos

♣ Vamos, en primer lugar, a analizar el caso de dimensión dos. Sea  $f \in \text{End}(\mathbf{V}^2)$  y elegimos una base cualquiera  $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$  de  $\mathbf{V}^2$  así que tenemos la matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

La ecuación característica del endomorfismo es

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \text{traza}(M) \lambda + \det(M) = 0$$

♣ Por lo tanto los valores propios del endomorfismo  $f : \mathbf{V}^2 \rightarrow \mathbf{V}^2$  son las raíces de la anterior ecuación de segundo grado en la que  $M$  es la matriz que lo representa en cualquier base.

♣ Después de esto y como sabes discutir una ecuación de segundo grado, te puedes encontrar con las siguientes posibilidades:

1. Si  $(\text{traza}(M))^2 - 4\det(M) < 0$ , discriminante negativo, la ecuación no tiene raíces reales. No existen valores propios y por tanto el endomorfismo no es diagonalizable, no existe ninguna base en la que lo represente una matriz diagonal.
2. Si  $(\text{traza}(M))^2 - 4\det(M) = 0$ , en este caso la ecuación de segundo grado tiene una raíz doble. Sólomente existe un valor propio. Para poder diagonalizar necesitas una base de vectores propios y por tanto elegir dos vectores propios linealmente independientes, como hay un único valor propio, la única posibilidad es la de que el endomorfismo sea proporcional a la identidad.
3. Si  $(\text{traza}(M))^2 - 4\det(M) > 0$ , en este caso la ecuación tiene dos raíces reales distintas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Sean ahora  $E_1$  y  $E_2$  dos vectores propios para  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente. Entonces  $\{E_1, E_2\}$  forman una base de  $\mathbf{V}^2$ . Para comprobarlo, es suficiente con ver que los dos vectores son linealmente independientes.

$$aE_1 + bE_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(aE_1 + bE_2) = a\lambda_1 E_1 + b\lambda_2 E_2 = 0$$

Manipulando estas dos ecuaciones obtienes

$$a(\lambda_1 - \lambda_2)E_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b = 0$$

Finalmente, la matriz que representa al endomorfismo en esta base es la siguiente matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

♣ Aquí tienes unos cuantos ejemplos para practicar. Se consideran los endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión dos, que en una cierta base vienen representados por las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Discute, en cada caso, la posibilidad de diagonalizar la aplicación lineal y calcula, cuando sea posible, una base de vectores propios.

♣ Observa que cualquier endomorfismo cuya matriz, en cierta base, sea simétrica es automáticamente diagonalizable. En efecto si

$$M = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

entonces si haces la cuenta obtienes

$$(\text{traza}(M))^2 - 4 \det(M) = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0.$$

## 4. Preliminares al Caso General

★ Tenemos  $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$  y tratamos de encontrar condiciones bajo las cuales se puede diagonalizar. Esto es, encontrar una base en la que el endomorfismo esté representado por una matriz diagonal. Además, ya sabemos que ello es lo mismo que decir que los vectores de dicha base deben ser vectores propios. La cuestión entonces se reduce a encontrar condiciones bajo las cuales existe una base en  $\mathbf{V}^n$  formada por vectores propios de  $f$ .

★ Una primera cuestión es entonces la de estudiar los vectores propios de  $f$ . Ellos están relacionados a los valores propios de  $f$  los cuales aparecen como raíces de la ecuación característica. A cada valor propio,  $\lambda$ , le hemos asociado dos números naturales

- La multiplicidad aritmética,  $\mathbf{a}_\lambda$ , o número de veces que aparece  $\lambda$  como raíz de la ecuación característica.
- La multiplicidad geométrica,  $\mathbf{g}_\lambda$ , o dimensión del subespacio vectorial propio,  $\mathbf{U}_\lambda$ , formado por los vectores propios correspondientes con  $\lambda$ .

★ Vamos a empezar probando que para cada valor propio,  $\mu$ , de cualquier endomorfismo,  $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$ , siempre se verifica la siguiente relación

$$\star\star \boxed{\mathbf{g}_\mu \leq \mathbf{a}_\mu} \star\star$$

Para ello consideramos una base del subespacio propio  $\mathbf{U}_\mu$ , sea  $\{E_1, \dots, E_{\mathbf{g}_\mu}\}$ . A continuación la ampliamos hasta obtener una base de  $\mathbf{V}^n$ . Entonces, en esta base, el polinomio característico de  $f$  es de la forma siguiente

$$\mathbf{P}_f(\lambda) = (\lambda - \mu)^{\mathbf{g}_\mu} \cdot \mathbf{Q}(\lambda)$$

donde  $\mathbf{Q}(\lambda)$  es un polinomio, en  $\lambda$ , con grado  $n - \mathbf{g}_\mu$ . Lo que prueba que  $\lambda = \mu$  aparece, al menos,  $\mathbf{g}_\mu$  veces como valor propio y así la desigualdad anterior.

★ Suponemos ahora que  $f \in \mathbf{V}^n$  tiene valores propios  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  y representamos por  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_r$  a los subespacios propios asociados con dichos valores propios, los cuales suponemos que son obviamente distintos dos a dos. Tomamos vectores en cada uno de ellos, esto es  $E_i \in \mathbf{U}_i$  con  $1 \leq i \leq r$ . Vamos entonces a ver que estos vectores son necesariamente linealmente independientes. Usamos un argumento de inducción sobre  $r$ . Es obvio que para  $r = 1$ , la afirmación es cierta pues los vectores propios son distintos del vector cero. Además también hemos visto que la afirmación es cierta en el caso  $r = 2$ . Suponemos entonces que la afirmación es cierta para  $r - 1$ . Consideramos pues números reales verificando

$$a_1 E_1 + a_2 E_2 + \dots + a_r E_r = 0$$

aplicando el endomorfismo y usando que los vectores son propios, se obtiene

$$a_1 \mu_1 E_1 + a_2 \mu_2 E_2 + \dots + a_r \mu_r E_r = \vec{0}$$

se multiplica la primera ecuación por  $\mu_1$  y se restan las dos ecuaciones, obteniendo

$$a_2(\mu_2 - \mu_1)E_2 + \dots + a_r(\mu_r - \mu_1)E_r = \vec{0}$$

finalmente, usamos la hipótesis de inducción para garantizar que todos los coeficientes en esta ecuación deben ser cero y como los valores propios son distintos dos a dos, se obtiene

$$a_2 = a_3 = \dots = a_r = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0$$

★ A continuación vamos a ver que la suma de subespacios propios es directa.

- Empezamos considerando dos subespacios propios,  $\mathbf{U}_1$  y  $\mathbf{U}_2$  entonces

$$\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \{\vec{0}\}$$

en efecto, si  $X \in \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$ , entonces  $f(X) = \mu_1 X = \mu_2 X$ . Puesto que los dos valores propios son distintos, se obtiene que  $X = 0$ . Así podemos escribir la suma como  $\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2$ .

- A continuación vamos a ver que  $(\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2) \cap \mathbf{U}_3 = \{\vec{0}\}$ . En efecto, si no fuese así, existiría un vector distinto al cero,  $X \in (\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2) \cap \mathbf{U}_3$ . Lo que implica que existen vectores  $E_1 \in \mathbf{U}_1$  y  $E_2 \in \mathbf{U}_2$  de manera que  $X = E_1 + E_2$  y esto representa una combinación lineal, no trivial, de tres vectores propios asociados a valores propios distintos dos a dos lo que proporciona una contradicción. Por lo tanto se tiene  $\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 \oplus \mathbf{U}_3$ .
- Procediendo así de manera sucesiva observamos que  $(\bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathbf{U}_i) \cap \mathbf{U}_r = \{\vec{0}\}$ . Por lo tanto la suma de subespacios propios es directa. En particular, se tiene

$$\dim(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \dots + \mathbf{U}_r) = \sum_{i=1}^r \mathbf{g}_i$$

donde, naturalmente, los  $\mathbf{g}_i = \dim(\mathbf{U}_i)$  es la multiplicidad geométrica de  $\mu_i$ .

## 5. El Criterio General de Diagonalización

★ Sea  $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$  un endomorfismo y supongamos que es diagonalizable entonces existe una base formada por vectores propios. La matriz que lo representa, en dicha base, es diagonal y consideramos que en su diagonal principal aparecen  $r$  números reales distintos,  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ , y cada  $\mu_i$  se repite  $\mathbf{a}_i$  veces y naturalmente  $\sum_{i=1}^r \mathbf{a}_i = n$ . El polinomio característico del endomorfismo es entonces

$$\mathbf{P}_f(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{\mathbf{a}_1} \cdot (\lambda - \mu_2)^{\mathbf{a}_2} \dots (\lambda - \mu_r)^{\mathbf{a}_r}$$

por tanto, el subespacio propio  $\mathbf{U}_i$  admite una base formada por los  $\mathbf{a}_i$  vectores de la anterior que son propios para el valor propio  $\mu_i$ , lo que implica que  $\mathbf{g}_i = \mathbf{a}_i$ . Se tiene entonces la siguiente condición necesaria para la diagonalización:

**Para que un endomorfismo  $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}_n)$  sea diagonalizable, es necesario que las dos siguientes condiciones se cumplan**

- La ecuación característica tiene  $n$  raíces, valores propios, contados con sus multiplicidades,  $\sum_{i=1}^r \mathbf{a}_i = n$ .
- Para cada valor propio las multiplicidades aritmética y geométrica deben coincidir,  $\mathbf{g}_i = \mathbf{a}_i$  para  $1 \leq i \leq r$ .

★★ Resulta que las condiciones anteriores son suficientes para que un endomorfismo sea diagonalizable. Así suponemos que

1.  $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$  admite  $n$  valores propios contados con multiplicidad sean  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  con multiplicidades  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$  verificando  $\sum_{i=1}^r \mathbf{a}_i = n$



2. Para cada valor propio las multiplicidades aritmética y geométrica coinciden,  $\mathbf{g}_i = \mathbf{a}_i$  para  $1 \leq i \leq r$

Entonces  $f$  es **diagonalizable**.

★★ **Prueba.-** Empezamos considerando la suma, que sabemos es directa, de los subespacios propios, entonces su dimensión usando las condiciones suficientes es

$$\dim(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \dots + \mathbf{U}_r) = \sum_{i=1}^r \mathbf{g}_i = \sum_{i=1}^r \mathbf{a}_i = n$$

lo que prueba que

$$\mathbf{V}^n = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \dots + \mathbf{U}_r$$

Ahora se considera una base de cada subespacio propio y al reunirlos, se obtiene una base, de  $\mathbf{V}^n$ , formada por vectores propios de  $f$ .

Como resumen aquí tienes el enunciado del criterio que acabamos de probar para diagonalizar endomorfismos

**CRITERIO DE DIAGONALIZACIÓN.-** Un endomorfismo,  $f \in \text{End}(\mathbf{V}^n)$  es diagonalizable si y solamente si se cumplen las dos siguientes condiciones

- Su ecuación característica tiene, exactamente,  $n$  raíces o valores propios, contados con multiplicidad.
- Para cada valor propio, las multiplicidades aritmética y geométrica coinciden.

## 6. Algunos Ejercicios

♣ Considera el endomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  que en la base canónica viene representado por la siguiente matriz

$$M(f, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

¿Es diagonalizable?

La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$$

así, el discriminante es  $\Delta = 36 > 0$  y es diagonalizable al tener dos valores propios distintos. Los valores propios son  $\mu_1 = 8$  y  $\mu_2 = 2$ . Calculamos los subespacios propios.

■  $U_1$ :

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x \\ 8y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 2y \quad \text{recta}$$

■  $U_2$ :

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -4y \quad \text{recta}$$

Eligiendo un vector en cada una de las rectas propias, se obtiene una base de vectores propios

$$\mathcal{B}: \quad E_1 = (2, 1) \quad E_2 = (-4, 1)$$

Entonces la matriz de  $f$  en la base  $\mathcal{B}$  es

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

♣ *Considera el endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  que en la base canónica viene representado por la siguiente matriz*

$$M(f, \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

*Calcula sus valores y subespacios vectoriales propios, ¿es diagonalizable?. Si lo fuera, calcula una base de vectores propios.*

La ecuación característica es

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda)(4 - \lambda) = 0$$

El endomorfismo tiene tres valores propios simples, la multiplicidad aritmética de cada uno de ellos vale uno. Calculamos sus subespacios propios

■  $U_1$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = z = 0$$

■  $U_2$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = y - x = 0$$

■  $U_3$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \Leftrightarrow z - y = -2x + y + z = 0$$

Eligiendo un vector en cada una de las rectas propias, se obtiene una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  en la cual la matriz de  $f$  es diagonal, precisamente

$$M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

## 7. Ejercicios

**Ejercicio 1.-** Calcula los valores propios de las siguientes matrices o de los endomorfismos de  $\mathbb{R}^3$  que ellas representan, o de los endomorfismos de  $V$  que en la base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  vienen representados por ellas

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 2.-** En el espacio vectorial  $\mathcal{P}_2$  se considera la base  $\mathcal{B}_0 = \{1, t, t^2\}$  y el endomorfismo,  $f$ , que en dicha base viene representado por la siguiente matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

¿Existe en  $\mathcal{P}_2$  una base de vectores propios para dicho endomorfismo? ¿Es la matriz  $M$  semejante a una matriz diagonal?

**Ejercicio 3.-** Sea  $f \in \text{End}(V)$  un endomorfismo de manera que  $\lambda = 0$  es uno de sus valores propios. ¿Se puede garantizar que  $f$  no es automorfismo?

**Ejercicio 4.-** Sea  $f \in \text{End}(V)$  de manera que no es automorfismo. ¿Se puede garantizar que  $\lambda = 0$  es necesariamente un valor propio de  $f$ ?

**Ejercicio 5.-** Sea  $f \in \text{End}(V)$  y  $\lambda$  un valor propio del mismo. Comprueba que el subespacio propio  $U_\lambda$  coincide con el núcleo del endomorfismo  $f - \lambda I_V$

**Ejercicio 6.-** Sea  $f \in \text{End}(V)$  de manera que admite  $n$  valores propios simples. ¿Se puede garantizar que  $f$  es diagonalizable?

**Ejercicio 7.-** En  $S_2$  se considera la base siguiente

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y el endomorfismo  $f$  que en dicha base viene representado por la matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Existe en  $\mathcal{P}_2$  una base de vectores propios para dicho endomorfismo? ¿Es la matriz  $M$  semejante a una matriz diagonal?

**Ejercicio 8.-** En  $\mathcal{M}_2$  se considera el endomorfismo definido como sigue

$$f \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}$$

Calcula valores propios y subespacios propios. ¿Es diagonalizable?

**Ejercicio 9.-** Sea  $\lambda$  un valor propio de  $f \in \text{End}(V)$ . Considera el endomorfismo  $f^2 = f \circ f$ , ¿puedes asegurar que  $\lambda^2$  es un valor propio de dicho endomorfismo? De manera general, ¿puedes afirmar que  $\lambda^r$  es un valor propio de  $f^r = f \circ \dots \circ f$  ( $r$  veces)?

**Ejercicio 10.-** Si  $f \in \text{End}(V)$  es un endomorfismo diagonalizable, ¿se puede asegurar que  $f^r$  también lo es?

**Ejercicio 11.-** En  $\mathcal{M}_2$  se considera el endomorfismo definido como sigue

$$f \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} b & b+c \\ 2a-2c & 4d \end{pmatrix}$$

Calcula valores propios y subespacios propios. ¿Es diagonalizable?

**Ejercicio 12.-** En  $\mathbb{R}^4$  se considera el endomorfismo  $f$  cuya matriz en la base canónica es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿Es diagonalizable?

**Ejercicio 13.-** Responde, de manera razonada, si las siguientes afirmaciones son ciertas

- Si un endomorfismo es diagonalizable y todos sus valores propios son distintos de cero, entonces es un automorfismo.

- Si un automorfismo es diagonalizable, entonces su inverso también lo es.
- Si dos matrices son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico.
- Si dos matrices tienen la misma traza, el mismo determinante y el mismo polinomio característico, entonces son semejantes.

**Ejercicio 14.-** Responde, de manera razonada, si las siguientes afirmaciones son ciertas

- Si dos endomorfismos son diagonalizables y poseen los mismos valores propios entonces son idénticos.
- Si  $\lambda = 42$  es un valor propio de un cierto endomorfismo,  $f$ , entonces  $f$  tiene exactamente 21 vectores propios asociados con  $\lambda = 42$ .
- Dos vectores propios, asociados a dos valores propios diferentes, son automáticamente linealmente independientes.
- Un endomorfismo puede ser diagonalizado en varias bases diferentes.

**Ejercicio 15.-** En el espacio vectorial  $\mathcal{P}_2$  se considera la base  $\mathcal{B} = \{1 - t, 1 + t, t^2\}$  y el endomorfismo,  $f$ , representado, en dicha base, por la siguiente matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿Es diagonalizable? ¿se puede afirmar que la matriz anterior es semejante a una matriz diagonal?

**Ejercicio 16.-** En  $\mathbb{R}^4$  se considera el endomorfismo,  $f$ , representado en la base canónica por la siguiente matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿Es diagonalizable? ¿se puede afirmar que la matriz anterior es semejante a una matriz diagonal?

**Ejercicio 17.-** Responde, de manera razonada, si las siguientes afirmaciones son ciertas

- Si  $\lambda$  es un valor propio de  $f \in \text{End}(V)$  entonces  $-\lambda$  es un valor propio de su endomorfismo dual  $f^* \in \text{End}(V)_n^*$

- $\lambda$  es un valor propio de  $f \in \text{End}(V)$  si y solo si lo es de su endomorfismo dual  $f^* \in \text{End}(V)_n^*$
- Un endomorfismo y su dual tienen el mismo polinomio característico.
- Un endomorfismo es diagonalizable si y solo si su endomorfismo dual lo es.

**Ejercicio 18.-** En el espacio vectorial  $\mathbf{A}_3$  de las matrices antisimétricas de orden tres se considera la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Se considera el endomorfismo,  $f \in \mathbf{End}(\mathbf{A}_3)$ , representado en la base anterior por la siguiente matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿Es diagonalizable? ¿se puede afirmar que la matriz anterior es semejante a una matriz diagonal?

**Ejercicio 19.-** Responde, de manera razonada, si las siguientes afirmaciones son ciertas

- Si  $\lambda$  es un valor propio de  $f \in \text{End}(V)$  y  $\mu$  un valor propio de  $h \in \text{End}(V)$  entonces  $\lambda + \mu$  es un valor propio de  $f + h$
- Toda matriz simétrica de orden dos es semejante a una matriz diagonal.
- Si  $f \in \text{End}(V^{17})$  posee 17 valores propios simples, entonces es diagonalizable.
- Si  $f \in \text{End}(V^{24})$  posee 24 valores propios simples, entonces es diagonalizable.

**Ejercicio 20.-** En el espacio vectorial  $\mathcal{P}_2$  se considera la base  $\mathcal{B} = \{1 + t^2, 1 - t^2, t\}$  y el endomorfismo,  $f$ , representado, en dicha base, por la siguiente matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿Es diagonalizable? ¿se puede afirmar que la matriz anterior es semejante a una matriz diagonal?

**Ejercicio 21.-** Para cada número real  $\alpha \in \mathbb{R}$  se considera el endomorfismo  $f_\alpha$  de  $\mathbb{R}^3$  cuya matriz en la base canónica es

$$M_\alpha = M(f_\alpha, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 1 & 1 - \alpha \\ \alpha - 2 & \alpha & 2 - \alpha \\ \alpha - 2 & \alpha - 1 & 3 - \alpha \end{pmatrix}$$

¿ Qué valores debe tomar  $\alpha$  para que algún valor propio de  $f_\alpha$  tenga multiplicidad aritmética dos?. ¿ Para qué valores de  $\alpha$  es diagonalizable  $f_\alpha$ ?

**Ejercicio 22.-** Se consideran las siguientes matrices cuadradas y de orden tres

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

¿ Existe alguna de ellas que sea semejante a una matriz diagonal?

**Ejercicio 23.-** ¿ Son semejantes las dos matrices siguientes?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 24.-** Estudia para qué valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  la siguiente matriz representa, en una cierta base de un cierto espacio vectorial, a un endomorfismo diagonalizable

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha \\ 3 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$