# GEOMETRÍA I
## (Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)
### Primera prueba parcial (7/11/2018)

1. **[3 puntos]**. Demostrar, a partir de propiedades elementales de sistemas de generadores y conjuntos linealmente independientes, el siguiente caso particular del Teorema de Steinitz:

   Si un e.v. $V(K)$ admite un sistema de generadores con tres vectores $S = \{w_1, w_2, w_3\}$, entonces no puede contener un conjunto con cuatro vectores $L = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subset V$ que sea linealmente independiente.

2. **[2 puntos]**. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   *a*) Sea $V(K)$ un e.v. de dimensión $n \in \mathbb{N}$, finitamente generado, $B$ una base ordenada suya y $U_1, U_2$ dos subespacios vectoriales cada uno de ellos determinado por un sistema de $m$ ecuaciones implícitas (el mismo número $m$ para $U_1$ y $U_2$). Si $m > n/2$ entonces la suma de los subespacios $U_1$ y $U_2$ no puede ser una suma directa.

   *b*) Todo sistema de generadores de $\mathbb{R}^2(\mathbb{Q})$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

3. **[2 puntos]**. En el espacio vectorial real $S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ obtenido como producto de las matrices simétricas 2x2 por los polinomios de grado $\leq 1$, se considera el subconjunto:

$$U = \left\{ \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, p(x) \right) : a_{11} + p(1) = 0 \right\}$$

   Demostrar que $U$ es un subespacio vectorial de $S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$, calcular una base ordenada $B_U$ de $U$ y hallar, en el caso de que sea posible, las coordenadas en $B_U$ de

$$\left( \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, 1 + x \right).$$

4. **[3 puntos]**. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales dependientes del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} U_\lambda = &\ \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \ \ 3x_1 - \lambda x_2 + 3x_4 = 0\} \\ W_\lambda = &\ L(\{(1, 1, \lambda, 1), (-1, 1, -2, 1)\}) \end{aligned}$$

   Calcular, para cada valor de $\lambda$, una base de $U_\lambda \cap W_\lambda$ y una base de $U_\lambda + W_\lambda$.

**Duración:** 2:30 min.

**1.- Demostrar, a partir de propiedades elementales de sistemas de generadores y conjuntos linealmente independientes, el siguiente caso particular del Teorema de Steinitz:**

**Si un e.v. $V(K)$ admite un sistema de generadores con tres vectores $S = \{w_1, w_2, w_3\}$, entonces no puede contener un conjunto con cuatro vectores $L = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subset V$ que sea linealmente independiente.**

*Solución.* En teoría está demostrado con detalle el teorema de Steinitz en general, por lo que basta con particularizar al caso pedido (simplificándose el procedimiento inductivo). No obstante, se detalla este caso a continuación.

Se va a realizar una demostración por reducción al absurdo. Concretamente, veremos que, en el caso de que tales $S$ y $L$ existieran, se pueden ir sustituyendo uno a uno (en tres pasos) los vectores de $S$ por los tres primeros vectores de $L$, de modo que el nuevo conjunto obtenido en cada paso siga siendo un sistema de generadores. Esto es un absurdo porque entonces el conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$, obtenido en el último paso, sería un s.d.g. y $u_4$ se escribiría como combinación lineal de él (por lo que $L$ no sería linealmente independiente).

Paso 1. Como $S$ es un s.d.g., existen escalares $a_1, a_2, a_3 \in K$ tales que $u_1 = a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3$. *Como L es l.i., $u_1 \neq 0$ y, por tanto, alguno de los escalares $a_1, a_2, a_3$ es distinto de 0. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $a_1 \neq 0$* (en caso contrario, bastaría con reordenar los elementos $w_1, w_2, w_3$ para que se verificara esa condición). El conjunto $S_1 := \{u_1, w_2, w_3\}$ es entonces un s.d.g., ya que

$$w_1 = a_1^{-1}(u_1 - a_2w_2 - a_3w_3) \in L(S_1)$$

(y, por tanto, $S \subset L(S_1)$, luego $L(S) \subset L(S_1)$ y $V = L(S_1)$).

Paso 2. Como $S_1$ es un s.d.g., existen escalares $b_1, b_2, b_3 \in K$ tales que $u_2 = b_1u_1 + b_2w_2 + b_3w_3$. *Como L es l.i., $u_2 \neq b_1u_1$ y, por tanto, alguno de los escalares $b_2, b_3$ es distinto de 0. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $b_2 \neq 0$* (en caso contrario, bastaría con reordenar los elementos $w_2, w_3$ para que se verificara esa condición). El conjunto $S_2 := \{u_1, u_2, w_3\}$ es entonces un s.d.g., ya que

$$w_2 = b_2^{-1}(u_2 - b_1u_1 - b_3w_3) \in L(S_2)$$

(y, por tanto, $S_1 \subset L(S_2)$, luego $L(S_1) \subset L(S_2)$ y $V = L(S_2)$).

Paso 3. Como $S_2$ es un s.d.g., existen escalares $c_1, c_2, c_3 \in K$ tales que $u_3 = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3w_3$. *Como L es l.i., $u_3 \neq c_1u_1 + c_2u_2$ y, por tanto, $c_3 \neq 0$.* El conjunto $S_3 := \{u_1, u_2, u_3\}$ es entonces un s.d.g., ya que

$$w_3 = c_3^{-1}(u_3 - c_1u_1 - c_2u_2) \in L(S_3)$$

(y, por tanto, $S_2 \subset L(S_3)$, luego $L(S_2) \subset L(S_3)$ y $V = L(S_3)$), obteniéndose así la contradicción requerida.

**2. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:**

1. **Sea $V(K)$ un e.v. de dimensión $n \in \mathbb{N}$, finitamente generado, $B$ una base ordenada suya y $U_1, U_2$ dos subespacios vectoriales cada uno de ellos determinado por un sistema de $m$ ecuaciones implícitas (el mismo número $m$ para $U_1$ y $U_2$). Si $m > n/2$ entonces la suma de los subespacios $U_1$ y $U_2$ no puede ser una suma directa.**

2. **Todo sistema de generadores de $\mathbb{R}^2(\mathbb{Q})$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.**

*Solución.*

1. FALSA.

La dimensión de cada subspacio es $n - m$, por lo que esta dimensión es $< n/2$. En consecuencia, no hay ninguna obstrucción en las dimensiones de $U_1$ y $U_2$ para que la interseción de estos subespacios sea $\{0\}$, esto es, para que su suma sea directa.

De hecho, un contraejemplo válido es $U_1 = U_2 = 0$, pues este subespacio puede verse como la solución de de cualquier sistema de $n$ ecuaciones lineales independientes (y, por tanto, de un sistema de $m = n > n/2$ ecuaciones implíticas), y trivialmente la suma de ambos es directa.

Un contraejemplo menos trivial es $V(K) = \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, tomando como subespacios dos rectas que sólo se intersequen en el origen, por ejemplo:

$$\begin{array}{lll} U_1 = L\{(1,0,0)\} & \text{(solución del sistema} & y = 0, z = 0), \\ U_2 = L\{(0,1,0)\} & \text{(solución del sistema} & x = 0, z = 0), \end{array}$$

pues, claramente, $U_1 \cap U_2 = \{(0,0,0\}$ y, por tanto, se sigue $U_1 \oplus U_2$.

*Observación.* Aun cuando la suma de $U_1$ y $U_2$ sea directa, se tendrá $\dim_k(U_1 \oplus U_2) = 2(n-m) = 2n - 2m < 2n - n = n$ por lo que nuestro e.v. $V$ nunca puede ser igual a la suma de $U_1$ y $U_2$.

2. VERDADERA.

Sea $S$ un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2(\mathbb{Q})$. Esto quiere decir que cualquier $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ se escribe como una combinación lineal de elementos de $S$ con coeficientes en $\mathbb{Q}$, esto es, existen vectores $w_1, \ldots, w_m \in S$ y escalares $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Q}$ tales que

$$v = a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m.$$

Como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, la combinación lineal anterior también es una combinación lineal con coeficientes en $\mathbb{R}$. Por tanto, $v$ también es una combinación lineal de elementos de $S$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, como se quería.

*Observación.* Es digno de mencionar que, mientras que $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ tiene dimensión 2, el e.v. $\mathbb{R}^2(\mathbb{Q})$ no es finitamente generado (la demostración es completemente análoga a la ya conocida de que, aunque $\mathbb{R}(\mathbb{R})$ tiene dimensión 1, el e.v. $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ no es finitamente generado).

Por tanto, todo sistema de generadores $S$ de $\mathbb{R}^2(\mathbb{Q})$ tendrá infinitos elementos (y, desde luego, si se tomara un s.d.g de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, éste no tendría por qué serlo de $\mathbb{R}^2(\mathbb{Q})$).

No obstante, esta propiedad de $S$ no tiene relevancia en el argumento expuesto para la solución del ejercicio, el cual resulta general cuando se usan subcuerpos. Así, dado un espacio vectorial complejo $V(\mathbb{C})$, podemos considerar su e.v. real subyacente $V(\mathbb{R})$ (que verificará $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} V$) y, dado $V(\mathbb{R})$, podemos considerar su e.v. racional subyacente $V(\mathbb{Q})$ (el cual, siempre que $V \neq \{0\}$, tendrá dimensión infinita). Por las mismas razones expuestas, todo s.d.g. de $V(\mathbb{Q})$ es un s.d.g. de $V(\mathbb{R})$, y todo s.d.g de $V(\mathbb{R})$ es un s.d.g. de $V(\mathbb{C})$.

**3. En el espacio vectorial real $S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ obtenido como producto de las matrices simétricas 2x2 por los polinomios de grado $\leq 1$, se considera el subconjunto:**

$$U = \left\{ \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, p(x) \right) : a_{11} + p(1) = 0 \right\}$$

**Demostrar que $U$ es un subespacio vectorial de $S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$, calcular una base ordenada $B_U$ de $U$ y hallar, en el caso de que sea posible, las coordenadas en $B_U$ de**

$$\left( \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, 1 + x \right).$$

*Solución.* Como en todo e.v. producto, el elemento neutro de $S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ es el par formado por el neutro de cada uno de los espacios, esto es:

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, p_0(x) := 0 + 0x \right).$$

Claramente, este vector pertenece a $U$ (pues en este caso $a_{11} + p(1)$ es $0 + 0 = 0$) por lo que, en particular $U \neq \emptyset$. Usando la caracterización conocida de los subespacios vectoriales, sean $a, b \in K$ y sean

$$\left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, p(x) \right), \quad \left( \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}, q(x) \right),$$

dos elementos de $U$, esto es, con

$$a_{11} + p(1) = 0, \qquad b_{11} + q(1) = 0.$$

Debemos comprobar que pertenece a $U$ la combinación lineal:

$$\begin{aligned} & a \cdot \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, p(x) \right) + b \cdot \left( \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}, q(x) \right) \\ = & \left( a \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, ap(x) \right) + \left( b \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}, bq(x) \right) \\ = & \left( \begin{pmatrix} aa_{11} + bb_{11} & aa_{12} + bb_{12} \\ aa_{12} + ab_{12} & aa_{12} + bb_{22} \end{pmatrix}, ap(x) + bq(x) \right), \end{aligned}$$

por lo que basta con tener en cuenta:

$$(aa_{11} + bb_{11}) + (ap(1) + bq(1)) = a\,(a_{11} + p(1)) + b\,(b_{11} + q(1)) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0.$$

Recordemos a continuación que una base ordenada de $S_2(\mathbb{R})$ es $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, y una de $\mathbb{R}_1[x]$ es $(1, x)$. Como en todo e.v. producto $V_1 \times V_2$, podemos construir una base suya sin más que considerar cada elemento $v$ de la base del primer factor como el elemento $(v, 0)$ del producto, y cada elemento $w$ de la base del segundo factor como el elemento $(0, w)$ del producto. Esto es, una base ordenada de $S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ será:

$$B = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right), \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right), \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \right), \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 1 \right), \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x \right) \right)$$

(en particular, $\dim_{\mathbb{R}}(S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]) = \dim_{\mathbb{R}}(S_2(\mathbb{R})) + \dim \mathbb{R}_1[x] = 3 + 2 = 5$). Además, las coordenadas en $B$ de cada $\left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, p(x) = a_0 + a_1 x \right) \in S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ son precisamente $(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_0, a_1)^t$ y $U$ es el subespacio vectorial determinado por la única ecuación implícita:

$$a_{11} + a_0 + a_1 = 0$$

(esto serviría como demostración alternativa de que $U$ es un subespacio vectorial). Solucionando esta ecuación tomando como parámetros $a_{12}, a_{22}, a_0, a_1$, se obtiene la base de $U$:

$$B_U = \left( \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right), \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \right), \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 1 \right), \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x \right) \right).$$

Por último, el elemento del producto que se considera en el enunciado,

$$\left( \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, 1 + x \right)$$

verifica

$$a_{11} + p(1) = -2 + 1 + 1 = 0.$$

Por tanto, este vector pertenece a $U$, y tiene sentido calcular sus coordenadas en $B_U$. Una computación inmediata muestra:

$$\left( \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, 1 + x \right) = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) + 3 \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \right) + \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 1 \right) + \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x \right).$$

Esto es, las coordenadas pedidas son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**4.- Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales dependientes del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:**

$$\begin{array}{rl} U_\lambda = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \; x_1+x_2+x_3=0, \;\; 3x_1-\lambda x_2+3x_4=0\} \\ W_\lambda = & L(\{(1,1,\lambda,1),(-1,1,-2,1)\}) \end{array}$$

**Calcular, para cada valor de $\lambda$, una base de $U_\lambda \cap W_\lambda$ y una base de $U_\lambda + W_\lambda$.**

*Solución.* Resulta inmediato comprobar que las dos ecuaciones que determinan $U_\lambda$ son independientes. En efecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2 (cambiando el orden de las dos primeras columnas por el de las dos segundas, se tiene ya una forma escalonada), independientemente del valor de $\lambda \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\dim_{\mathbb{R}} U_\lambda = 4-2=2$. De hecho, es inmediato calcular una base suya tomando como incógnitas principales $x_3$ y $x_4$ (y, por tanto, $x_1, x_2$ como parámetros): $B_{U_\lambda} = \{(1,0,-1,-1),(0,3,-3,\lambda)\}$.

También es inmediato que el conjunto formado por los dos vectores que generan $W_\lambda$ es linealmente independiente y, por tanto, una base de $W_\lambda$, que denotaremos $B_{W_\lambda}$, pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 2 & -2+\lambda & 2 \end{pmatrix}$$

que también tiene rango 2, independientemente del valor de $\lambda \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\dim_{\mathbb{R}} W_\lambda = 2$.

Usando la fórmula de Grassmann de las dimensiones, se sigue entonces:

$$\dim_R(U_\lambda + W_\lambda) = 4 - \dim_R(U_\lambda \cap W_\lambda) \qquad \text{y, por tanto:} \qquad U_\lambda \cap W_\lambda = \{0\} \Longleftrightarrow U_\lambda + W_\lambda = \mathbb{R}^4.$$

Para calcular $U_\lambda \cap W_\lambda$ basta con imponer que un vector genérico de $W_\lambda$, esto es, que se escribe

$$a(1,1,\lambda,1) + b(-1,1,-2,1)) = (a-b, a+b, \lambda a - 2b, a+b) \qquad \text{para} \qquad a,b \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

satisface las ecuaciones del sistema que define $U_\lambda$, esto es:

$$\left.\begin{array}{rll} 0 = & (a-b)+(a+b)+(\lambda a-2b) & = (2+\lambda)a-2b \\ 0 = & 3(a-b)-\lambda(a+b)+3(a+b) & = (6-\lambda)a-\lambda b \end{array}\right\}$$

Se tienen así dos ecuaciones lineales en las incógnitas $a, b$ (dependientes del parámetro $\lambda$), cuya independencia lineal queda determinada por el rango de la matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2+\lambda & -2 \\ 6-\lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Claramente, el rango de esta matriz es al menos 1 (pues su elemento $(1,2)$ es distinto de 0) y será 1 si y sólo si su determinante se anula, esto es,

$$0 = -\begin{vmatrix} 2+\lambda & -2 \\ 6-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+4\lambda-12,$$

lo cual equivale a decir que (tras hacer la transformación elemental $F_2 \leftrightarrow \lambda F_1 - 2F_2$ en la matriz original) se anula la segunda fila de la matriz $\begin{pmatrix} 2+\lambda & -2 \\ \lambda^2+4\lambda-12 & 0 \end{pmatrix}$. Puesto que las soluciones de la ecuación son $\lambda = 2, -6$ distinguimos los siguientes casos.

<u>*Caso* $\lambda \neq 2, \lambda \neq -6$.</u> Como el rango de la matriz del sistema es 2, su única solución es la trivial, esto es, $U_\lambda \cap W_\lambda = \{0\}$. Por tanto, la base de $U_\lambda \cap W_\lambda$ sería el conjunto vacío. Puesto que en este

caso $U_\lambda + W_\lambda = \mathbb{R}^4$, una base de la suma sería cualquier base de $\mathbb{R}^4$. Así, por ejemplo, la base usual $B_u$ de $\mathbb{R}^4$ es una base de $U_\lambda + W_\lambda$.

*Observación.* Como en este caso se tiene la suma directa $U_\lambda \oplus W_\lambda$, la unión $B$ de las bases ya obtenidas de $U_\lambda$ y $W_\lambda$,

$$B = B_{U_\lambda} \cup B_{W_\lambda} = \{(1,0,-1,-1),(0,3,-3,\lambda),(1,1,\lambda,1),(-1,1,-2,1)\}$$

será una base de $U_\lambda + W_\lambda$ (y, por tanto, de $\mathbb{R}^4$).

*Casos* $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -6$. Como el rango de la matriz del sistema es 1, para calcular $U_\lambda \cap W_\lambda$ basta con solucionar la primera de las dos ecuaciones, esto es, $b = (2+\lambda)a/2$. Tomando $a = 2$ y sustituyendo este valor (y, consistentemente, $b = 2+\lambda$) en (1) se obtiene la base

$$B_{U_\lambda \cap W_\lambda} = \{(-\lambda, 4+\lambda, -4, 4+\lambda)\}.$$

Para hallar una base de $U_\lambda + W_\lambda$ basta con ampliar $B_{U_\lambda \cap W_\lambda}$ por una parte a una base de $U_\lambda$ (cualquiera de los dos vectores de $B_{U_\lambda}$ es independiente de $(-\lambda, 4+\lambda, -4, 4+\lambda)$ y, por tanto, válido para este fin; escogeremos el primero, $(1,0,-1,-1)$) y, por otra, a una base de $W_\lambda$ (cualquiera de los dos vectores de $B_{W_\lambda}$ es independiente de $(-\lambda, 4+\lambda, -4, 4+\lambda)$ y, por tanto, válido para este fin; escogeremos el segundo, $(-1,1,-2,1)$) por lo que la base requerida es:

$$B_{U_\lambda + W_\lambda} = \{(-\lambda, 4+\lambda, -4, 4+\lambda),(1,0,-1,-1),(-1,1,-2,1)\}.$$

Explícitamente, para $\lambda = 2$:

$$B_{U_2 \cap W_2} = \{(-2,6,-4,6)\} \qquad B_{U_2 + W_2} = \{(-2,6,-4,6),(1,0,-1,-1),(-1,1,-2,1)\},$$

y para $\lambda = -6$:

$$B_{U_{-6} \cap W_{-6}} = \{(6,-2,-4,-2)\} \qquad B_{U_{-6} + W_{-6}} = \{(6,-2,-4,-2),(1,0,-1,-1),(-1,1,-2,1)\}.$$

(por supuesto, en ambos casos se podria simplificar la elección de $B_{U_\lambda \cap W_\lambda}$ dividiendo por 2, pero esto no es necesario.)

*Observación.* Otras formas de resolver el problema son:

(1) Para calcular $U_\lambda \cap W_\lambda$: hallar unas ecuaciones implícitas para $W_\lambda$ (necesariamente, dos ecuaciones) y solucionar el SEL de 4 ecuaciones y 4 incógnitas obtenido uniendo las ecuaciones implícitas de $U_\lambda$ y las de $W_\lambda$ (discutiendo casos según los valores del parámetro $\lambda$).

(2) Calcular primero $U_\lambda + W_\lambda$, teniendo en cuenta que $B_{U_\lambda} \cup B_{W_\lambda}$, es un sistema de generadores de la suma con cuatro vectores, del cual se puede extraer una base (discutiendo el rango de la correspondiente matriz dependiente de $\lambda$). Una vez hecho esto, estudiar la intersección considerando sólo los valores de $\lambda$ para los que se sabe que no es nula.

Estos procedimientos son válidos aunque más largos. No obstante, será aconsejable hacerlo también de estos modos más adelante, como ejercicio sobre el uso de los determinantes.