TEMA 6: Algunos modelos de distribuciones discretas

- Distribución degenerada.
- Distribución uniforme discreta.
- Distribución de Bernoulli.
- Distribución binomial.
- Distribución de Poisson.
- Distribución binomial negativa.
- Distribución hipergeométrica.

DISTRIBUCIÓN DEGENERADA

Una variable X tiene distribución degenerada (o es degenerada) en un punto c si toma únicamente dicho valor:

$$X \rightarrow D(c) \;\; (c \in \mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; P(X = c) = 1.$$

Función de distribución: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ \\ 1 & x \geq c \end{cases}$

Función generatriz de momentos: $M_X(t) = e^{tc}, \;\; t \in \mathbb{R}$.

Momentos: $m_k = c^k$ y $\mu_k = 0, \;\; \forall k \in \mathbb{N}$.

- *Media:* $E[X] = c$.
- *Varianza:* $Var[X] = 0$.

Caracterización: *Una variable X es degenerada si y sólo si $Var[X] = 0$.*

DISTRIBUCIÓN UNIFORME DISCRETA

Una variable X tiene distribución uniforme discreta si sólo toma un número finito de valores, todos con la misma probabilidad:

$$X \to U(x_1, \ldots, x_n) \ \ (x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}) \ \Leftrightarrow \ P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Función de distribución: $(x_1 < x_2 < \cdots < x_n)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \dfrac{i-1}{n} & x_{i-1} \leq x < x_i, \ \ i = 2, \ldots, n \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

Función generatriz de momentos: $M_X(t) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}}{n}, \ \ t \in \mathbb{R}.$

Momentos: $m_k = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}$ y $\mu_k = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_1)^k}{n}, \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$

- *Media:* $E[X] = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$ (media aritmética de $x_1, \ldots, x_n$).
- *Varianza:* $Var[X] = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^2.$

DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI

Una variable X tiene distribución de Bernoulli de parámetro p si sólo toma los valores 0 y 1, con probabilidades $1-p$ y p, respectivamente:

$$X \to B(1,p) \quad (0 < p < 1) \;\Leftrightarrow\; P(X=x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

► *X describe el resultado (éxito ($X=1$) o fracaso ($X=0$)) de una prueba de Bernoulli con probabilidad de éxito p.*

Función de distribución: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$

Función generatriz de momentos: $M_X(t) = pe^t + (1-p), \quad t \in \mathbb{R}.$

Momentos: $m_k = p$ y $\mu_k = (1-p)^k p + (-p)^k(1-p), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

- *Media:* $E[X] = p.$
- *Varianza:* $Var[X] = p(1-p).$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL [1]

$$X \to B(n,p) \quad (n \in \mathbb{N},\ 0 < p < 1) \ \Leftrightarrow\ P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

▶ *X describe el número de éxitos en n repeticiones independientes de una prueba de Bernoulli con probabilidad de éxito p.*

$$X \text{ (número de éxitos)} \to B(n,p) \ \Leftrightarrow\ Y = n - X \text{ (número de fracasos)} \to B(n, 1-p).$$

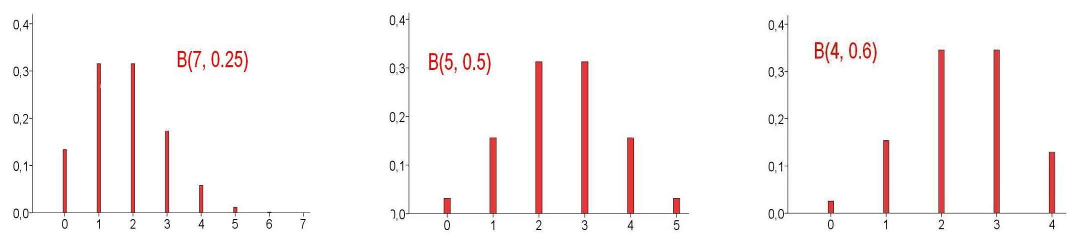
Función generatriz de momentos: $M_X(t) = \left(pe^t + (1-p)\right)^n, \quad t \in \mathbb{R}.$

Media: $E[X] = np.$

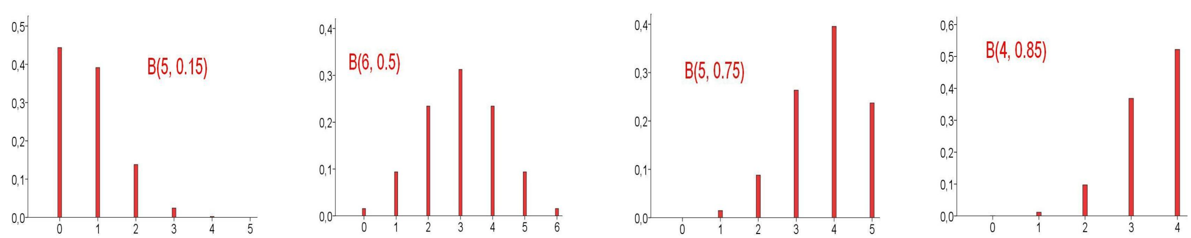
Varianza: $Var[X] = np(1-p).$

Representación gráfica de la función masa de probabilidad:

- Si $(n+1)p \in \mathbb{N} \Rightarrow$ distribución bimodal: $M_o^1 = (n+1)p - 1,\ M_o^2 = (n+1)p$:



- Si $(n+1)p \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ distribución unimodal: $M_o = [(n+1)p]$:



[1] $(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON [2]

$$X \to \mathcal{P}(\lambda)\ (\lambda > 0) \;\Leftrightarrow\; P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$$\boxed{X_n \to B(n, p_n) \;\Rightarrow \lim_{\substack{n \to +\infty \\ np_n \to \lambda}} P(X_n = x) = P(X = x),\ x \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \text{ con } X \to \mathcal{P}(\lambda)}$$

$$\Downarrow$$

- *X describe el número de ocurrencias de un suceso con probabilidad de ocurrencia pequeña, en un gran número de pruebas (ley de los sucesos raros).*

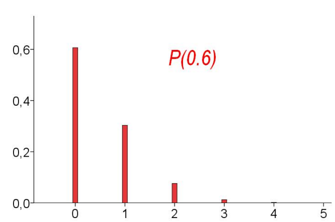
Función generatriz de momentos: $M_X(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}, \quad t \in \mathbb{R}$.

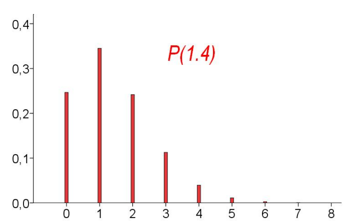
Media: $E[X] = \lambda$.

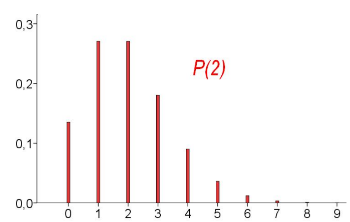
Varianza: $Var[X] = \lambda$.

Representación gráfica de la función masa de probabilidad:

- Si $\lambda \in \mathbb{N} \Rightarrow$ la distribución es bimodal: $M_o^1 = \lambda - 1,\ M_o^2 = \lambda$.
- Si $\lambda \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ la distribución es unimodal: $M_o = [\lambda]$.
- Asimétrica a la derecha.







[2] $e^a = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{a^x}{x!}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA [3]

$$X \rightarrow G(p) \;\; (0 < p < 1) \;\Leftrightarrow\; P(X = x) = (1-p)^x p, \quad x \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

► *X describe el número de fracasos antes de que ocurra el primer éxito en sucesivas repeticiones independientes de una prueba de Bernoulli con probabilidad de éxito p.*

Función de distribución: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-(1-p)^{[x]+1} & x \geq 0. \end{cases}$

Función generatriz de momentos: $M_X(t) = \dfrac{p}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\ln(1-p).$

Media: $E[X] = \dfrac{1-p}{p}$.

Varianza: $Var[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$.

PROPIEDAD DE FALTA DE MEMORIA

- $X \rightarrow G(p) \;\Rightarrow\; P\left(X \geq h+k/X \geq h\right) = P\left(X \geq k\right), \quad \forall h, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

- **Caracterización de la distribución geométrica:** *Es la única distribución con valores en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ que verifica la propiedad de falta de memoria.*

[3] $|a| < 1: \quad \displaystyle\sum_{x=0}^{+\infty} a^x = \frac{1}{1-a}, \qquad \sum_{x=0}^{+\infty} x a^{x-1} = \frac{1}{(1-a)^2}, \qquad \sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1)a^{x-2} = \frac{2}{(1-a)^3}.$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA [4]

$$X \to BN(k,p) \ \ (k \in \mathbb{N},\ 0 < p < 1) \ \Leftrightarrow \ P(X = x) = \binom{x+k-1}{x}(1-p)^x p^k, \quad x \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

- *X describe el número de fracasos antes de que ocurra el k-ésimo éxito en sucesivas repeticiones independientes de una prueba de Bernoulli con probabilidad de éxito p.*

DISTRIBUCIÓN DE PASCAL O DE TIEMPO DE ESPERA

$Y = X + k$: *número de pruebas hasta el k-ésimo éxito*

Función generatriz de momentos: $M_X(t) = \left(\dfrac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^k, \quad t < -\ln(1-p).$

Media: $E[X] = \dfrac{k(1-p)}{p}\cdot$

Varianza: $Var[X] = \dfrac{k(1-p)}{p^2}\cdot$

[4] *Coeficientes binomiales negativos*:

- Definición: $\binom{\alpha}{x} = \dfrac{(\alpha)(\alpha-1)\cdots(\alpha-x+1)}{x!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{N}.$
- Propiedad 1: $\binom{-\alpha}{x} = (-1)^x \binom{x+\alpha-1}{x}, \ \ \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{N}.$
- Propiedad 2: $\displaystyle\sum_{x=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{x} t^x = (1+t)^\alpha, \ \ |t| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R}.$

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA [5]

$X \rightarrow H(N, N_1; n) \quad (N, N_1, n \in \mathbb{N};\ N_1, n \leq N) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(X = x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, \ldots, n \ / \ x \leq N_1,\ n - x \leq N - N_1.$$

► *Si se considera una población de tamaño N y una subpoblación de tamaño N_1, y se extrae una muestra aleatoria de tamaño n, sin reemplazamiento o simultáneamente, X describe el número de individuos de la muestra que pertenecen a la subpoblación.*

Media: $E[X] = n\frac{N_1}{N}\cdot$

Varianza: $Var[X] = n\frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}\cdot$

Relación con la distribución binomial:

$$X_{N,N_1} \rightarrow H(N, N_1, n) \ \Rightarrow \lim_{\substack{N, N_1 \to +\infty \\ N_1/N \to p}} P(X_{N,N_1} = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, \ldots, n.$$

[5] $\displaystyle\sum_{x=\text{máx}(0,n-b)}^{\text{mín}(n,a)} \binom{a}{x}\binom{b}{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{a}{x}\binom{b}{n-x} = \binom{a+b}{n}, \quad \forall a, b \in \mathbb{N}.$