Examen Álgebra I – Enero 2020

Ejercicio 1. Sea $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definida por $f(x,y)=3^x5^y$.

a) Determina si la aplicación es inyectiva o sobreyectiva.

b) Calcula $f^*(\{15,20,25\})$.

c) Determina si $\mathrm{Im}(f)$ es un monoide con la operación producto.

Ejercicio 2. Sea $(G,\cdot)$ un grupo, y sea H un subgrupo de G con cardinal h.

a) Dado un elemento $a\in H$, demuestra que $a^h=1$.

b) Prueba que el orden de a divide a h.

c) Calcula el resto de dividir 1111^{2666} entre 91.

Ejercicio 3. Sea $R=\mathbb{Z}[i]/(9-12i)$.

a) Encuentra los ideales de R.

b) Determina cuáles son maximales.

c) Sea $\mathfrak{m}$ uno de esos ideales maximales. Calcula $R/\mathfrak{m}$.

Ejercicio 4. *a*) Sea $\pi_p:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_p$ la proyección de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_p$ (a cada entero lo mandamos a su clase módulo p), y sea $\Pi_p:\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{Z}_p[x]$ la extensión de π_p. Encuentra un polinomio primitivo $f(x)$ de grado cuatro en $\mathbb{Z}[x]$ de forma que

$$\Pi_2(f(x))=(x^3+x+1)(x+1),\quad \Pi_3(f(x))=(x^2+1)(x^2+x+2).$$

¿Es dicho polinomio irreducible?

b) Factoriza $x^5-x^4-12x^3+15x^2-2x-1$ en $\mathbb{Q}(x)$.

Ejercicio 5. Determina si la ecuación

$$(x^2+1)X(x)+(x^4+x-1)Y(x)=6x$$

tiene solución en $\mathbb{Q}[x]$, y en caso de tenerla, calcula todas las soluciones.