José Gómez Torrecillas y Antonio R. Garzón

Tipología de examen: Recuperación

1. *a*) **(1 pt)** Si A es un anillo conmutativo e I es un ideal suyo, construye el anillo cociente A/I y demuestra su propiedad universal.

   b) **(1 pt)** Calcula el menor número de alumnos que se pudo presentar a un examen sabiendo que si se contaban de 7 en 7 sobraba 1, que el doble de ellos menos 1 era múltiplo de 5 y que, si contáramos a los dos profesores presentes, la cantidad de personas en el aula era múltiplo de 4.

2. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   a) **(0,5 pts)** Si $f : X \to Y$ es una aplicación inyectiva entonces la aplicación inducida $f^* : P(Y) \to P(X)$ es sobreyectiva.

   b) **(0,5 pts)** La última cifra del número 87^{95} es 3.

   c) **(0,5 pts)** Una solución de la congruencia $263^{62}x \equiv 2(\mathrm{mod} 50)$ es 37.

   d) **(0,5 pts)** Hay ocho anillos cociente distintos del anillo producto $A = \mathbb{Z}_2 \times \frac{\mathbb{Z}}{(126\mathbb{Z}+45\mathbb{Z})\cap 11\mathbb{Z}}$.

3. **(1,5 pts)** Sea $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R}$. Demostrar que $I = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] : f(\alpha) = 0\}$ es un ideal principal no nulo de $\mathbb{Q}[x]$. Decidir si $\mathbb{Q}[x]/I$ es un cuerpo.

4. Consideremos el ideal I de $\mathbb{R}[x]$ dado que $I = \langle 2x^4 + 3x^2 + 1\rangle + \langle 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2\rangle$.

   a) **(1 pt)** Calcular un generador del ideal I.

   b) **(0,5 pts)** Demostrar que existe un elemento $\alpha \in \mathbb{R}[x]/I$ tal que $\alpha^2 = -1 + I$.

5. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   a) **(0,5 pts)** Si a, b son elementos de un dominio euclidiano con $b \neq 0$, entonces el resto de dividir a entre b es único.

   b) **(0,5 pts)** Existe un cuerpo con 4 elementos.

   c) **(0,5 pts)** El anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/\langle\sqrt{3}\ \rangle$ es un cuerpo con 3 elementos.

   d) **(0,5 pts)** Todo polinomio de grado 1 en $\mathbb{Z}[x]$ es un elemento primo de $\mathbb{Z}[x]$.

   e) **(0,5 pts)** Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio primitivo tal que su reducción módulo 2 es $(x^2 + x + 1)^2$, y su reducción módulo 3 es $(x + 1)g(x)$, para cierto $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de grado 3. Entonces $f(x)$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

   f) **(0,5 pts)** Los anillos $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$ y $\mathbb{Z}[i]/\langle 2\rangle$ son isomorfos.