GEOMETRÍA II. Examen del Tema 3
– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –
Curso 2015/16

Nombre:

1. En cada caso[1], probar la afirmación o dar un ejemplo de que es falsa.
   (a) Todo endomorfismo f que satisface $M(f,B)\in O(n)$ es una isometría.
   (b) Todo endomorfismo f que satisface que $M(f,B)$ es simétrica es autoadjunto.
   (c) Toda isometría diagonalizable es una simetría ortogonal.
2. En $\mathbb{R}^2$ con la métrica $M_{B_u}(g)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ hallar la imagen del vector $v=(2,1)$ respecto de la reflexión respecto de $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x+y=0\}$.
3. Sean U y W dos planos perpendiculares[2] en un espacio euclídeo (V^3,g). Clasificar la isometría $S_U\circ S_W$, calculando los elementos geométricos que la define.
4. Clasificar la isometría siguiente de $(\mathbb{R}^3,g_u)$ y calcular los elementos geométricos que la define:
$$M(f,B_u)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}&-1&1\\ \sqrt{2}&1&-1\end{pmatrix}.$$

Importante: razonar todas las respuestas

[1]Para espacios euclídeos
[2]= sus subespacios ortogonales son perpendiculares

Soluciones

1. (a) Falsa. Matricialmente dice que si A es ortogonal y G es una matriz simétrica definida positiva, entonces $A^tGA = G$. Tomamos $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Falsa. Matricialmente dice que si A es simétrica y G es una matriz simétrica definida positiva, entonces GA es simétrica. Vale el mismo ejemplo que antes.
   (c) Verdadero. Hecho en teoría (hacer).

2. Se tiene $U =< (1,-2) >$. Usando la matriz de la métrica, $(x,y) \in U^\perp$ si $y = 0$, luego $U^\perp =< (1,0) >$. Se escribe v en combinación lineal de la base $\{(1,-2),(1,0)\}$: $v = (-1/2)(1,-2) + (5/2)(1,0)$, luego el simétrico es $(-1/2)(1,-2) - (5/2)(1,0) = (-3,1)$.

3. Se sabe que el derminante de la composición es 1. La intersección es un subespacio de dimensión 1. Sea $e_1 \in U \cap W$ de módulo 1. Extendemos a bases ortonormales de U y W respectivamente: $\{e_1,e_2\}$ y $\{e_1,e_3\}$. Con un dibujo se ve que $U^\perp =< e_3 >$ y $W^\perp =< e_2 >$. Probamos que $B = \{e_1,e_2,e_3\}$ es una base ortonormal. Es base pues los dos primeros son linealmente independientes y si $e_3 = ae_1 + be_2$, multiplicando por e_1 da $a = 0$, luego $U = W$, que no es posible. Como $U \cap W \subset U, W$ entonces $U^\perp, W^\perp \subset (U \cap W)^\perp =< e_1 >^\perp =< e_2, e_3 >$. Si $xe_2 + ye_3 \in U^\perp$ y $x'e_2 + y'e_3 \in W^\perp$, al multiplicar por e_2 y e_3 respectivamente da 0, y entre ellos es 0, obteniendo ($\alpha = g(e_2,e_3)$

$$x + y\alpha = 0, x'\alpha + y' = 0,\ xx' + yy' + (xy' + x'y)\alpha = 0.$$

   Sustituyendo las dos primeras ecuaciones en la tercera, tenemos $(\alpha^3 - \alpha)x'y = 0$. Si $\alpha = \pm 1$, entonces $U\perp = W^\perp$, que no es posible. Si $x'y = 0$, entonces $x' = 0$ o $y = 0$, dando $x = x' = y = y' =$, que tampoco es posible. Por tanto $\alpha = 0$, como se quería probar.

   Finalmente, es inmediato que $S_U \circ S_W(e_1) = e_1$, $S_U \circ S_W(e_2) = -e_2$ y $S_U \circ S_W(e_3) = -e_3$, obteniendo que $S_U \circ S_W$ es la simetría axial respecto de $< e_1 >= U \cap W$.

4. Como el determinante es -1 y la traza es -1, es un giro de ángulo θ respecto de V_{-1} seguido de la reflexión respecto del plano $V_{-1}^\perp$, con $-1 + 2\cos\theta = -1$, es decir $\cos\theta = 0$. El subespacio V_{-1} está generado por $(0,-1,1)$. El ortogonal es $V_{-1}^\perp =< e_2, e_3 >=< (1,0,0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) >$. Como esta base es ortonormal, para hallar el seno de θ se tiene $\sin\theta = g(f(e_2), e_3) = g((0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})) = 1$.