

Antonio Martínez Cegarra y José Luis Bueso

Tipología de examen: Final (2º parcial, para quien hubiera aprobado el 1º)

Este examen pertenece al Banco de Exámenes de la Asociación de Estudiantes de Matemáticas de la Universidad de Granada. Si bien su autoría corresponde a los profesores ya citados, en la asociación nos encargamos de almacenarlos y ceder su uso a los estudiantes para que sea más satisfactoria su labor a la hora de preparar un examen.

**Teoría (5 puntos)** Demuestra los siguientes tres hechos:

1. *En un Dominio Euclídeo  $A$ , todo ideal es principal. Además, existe el máximo común divisor de cualesquiera dos elementos de  $A$  y, si  $d = m.c.d.(a, b)$ , existen  $u, v \in A$  tales que  $d = au + bv$ .*
2. *Si  $m, n \geq 2$  son enteros primos entre sí, entonces hay un isomorfismo de anillos  $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ .*
3. *Si  $A$  es un DFU, el producto de polinomios primitivos en  $A[x]$  es primitivo.*

**Ejercicios (5 puntos)** Resolver los siguientes tres ejercicios:

1. Calcular la capacidad de un depósito de vino, sabiendo que:
  - a) Esa capacidad está entre los 1000 y los 1500 litros.
  - b) Ha faltado 1 litro al intentar llenarlo con garrafas de 5 litros.
  - c) A otro depósito similar, pero de quintuple capacidad, le ha faltado también 1 litro tanto si se intentaba llenar con garrafas de 7 litros como de 11 litros.
2. Determinar todas las soluciones de la ecuación  $19^{49}x = 42$ , en el anillo  $\mathbb{Z}_{60}$ .
3. Factorizar en irreducibles los siguientes polinomios del anillo  $\mathbb{Z}[x]$ :
  - a)  $x^6 + 5x^6 + x^2 + 6x + 5$ .
  - b)  $48x^4 + 24x^3 - 72x^2 + 80$ .
  - c)  $x^3 - 6x + 1$ .
  - d)  $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1$ .