Geometría II
Grado en Matemáticas

Soluciones del examen de la convoctoria extraordinaria (27/06/2019)

1. *En el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales se considera la forma cuadrática dada por*

$$\omega(A) = \text{traza}(A)^2 - 2\det(A), \quad A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

a) *Calcula $\omega\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ y la matriz de la métrica g_ω en la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,*

$$B = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}.$$

$$\omega\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (a+d)^2 - 2(ad-bc) = a^2 + d^2 + 2bc, \quad \forall \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Por tanto,

$$g_\omega\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)\right) = aa' + dd' + bc' + b'c, \quad \forall \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Sustituyendo $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ por las matrices de la base usual B, obtenemos

$$M := M_B(g_\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) *Calcula el índice, el rango y clasifica la métrica g_ω.*

El polinomio característico de la matriz anterior es

$$p_M(t) = (1-t)^2 \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = (1-t)^2(t^2-1) = (t-1)^3(t+1),$$

que tiene por raíces a 1(triple) y -1 (simple). Estos son los valores propios de M. Por tanto, g_ω tiene índice 1, rango 4 y es no degenerada e indefinida.

c) *Encuentra una base ortonormal de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g_u)$ que diagonalice a g_ω, con $g_u(A,C) = \text{traza}(A \cdot C^t)$ la métrica usual de matrices.*

Calculamos los subespacios propios de M (en rigor, del endomorfismo g_u-autoadjunto asociado a la métrica g_ω):

$$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))_1 = \left\{ (a,b,c,d)_B \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(a,b,c,d)_B \mid b = c\}$$

$$= L(\{(1,0,0,0)_B, (0,1,1,0)_B, (0,0,0,1)_B\}) = L\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}\right).$$

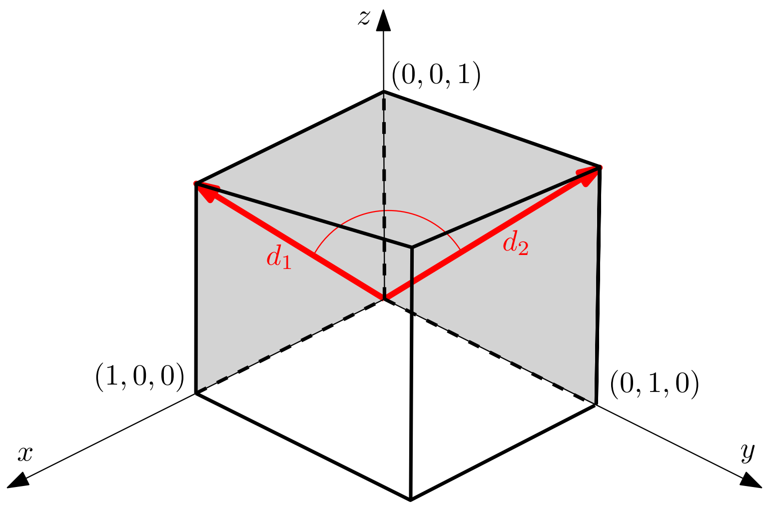

Figure 1: En gris, las caras que contienen las diagonales d_1, d_2 (se han situado de forma que se cortan en un segmento a lo largo del eje z, y $d_1 1, d_2$ concurren en el origen).

$$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))_{-1} = \left\{ (a,b,c,d)_B \mid \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \{(a,b,c,d)_B \mid a = d = 0,\ b + c = 0\} = L(\{(0,1,-1,0)_B\}) = L\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}\right).$$

Llamemos

$$M_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ M_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ M_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ M_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Así, $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ es una base de vectores propios de M. Ortonormalizamos esta base respecto a g_u: notemos que M_1, M_2, M_3, M_4 son matrices g_u-ortogonales, que M_1, M_3 son g_u-unitarias, y que las normas de M_2, M_4 respecto a g_u son $\|M_2\| = \|M_4\| = \sqrt{2}$. Por tanto, $B' := \{M_1, \frac{1}{\sqrt{2}}M_2, M_3, \frac{1}{\sqrt{2}}M_4\}$ es una base g_u-ortonormal de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g_u)$, y

$$M_{B'}(g_\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. *En $\mathbb{R}^3$ con la métrica usual se considera un cubo de arista 1. Calcula el ángulo que forman las diagonales de dos caras adyacentes que concurren en un mismo vértice.*

   El ángulo que nos piden no depende de cómo situemos el cubo en $\mathbb{R}^3$. Situamos el cubo como en la figura, de forma que las diagonales d_1, d_2 que concurren lo hacen en el origen, y las caras del cubo que contienen a d_1, d_2 se cortan en la arista del cubo contenida en el eje z (esto no es estrictamente necesario, pero simplifica las cuentas): Las diagonales son $d_1 = (1,0,1)$,

$d_2 = (0,1,1)$. El ángulo (no orientado) $\sphericalangle(d_1, d_2)$ entre d_1 y d_2 cumple

$$\cos \sphericalangle(d_1, d_2) = \frac{\langle d_1, d_2 \rangle}{\|d_1\| \cdot \|d_2\|} = \frac{1}{2},$$

luego $\sphericalangle(d_1, d_2) = \pi/3$ radianes, o bien 60 grados.

Esto podría haberse razonado de muchas otras formas; por ejemplo, notemos que los extremos de d_1, d_2 determinan los vértices de un triángulo equilátero (el tercer lado del triángulo no está dibujado en la figura, y está contenido en la cara horizontal superior del cubo); el que el triángulo sea equilátero se deduce de que todas las diagonales de las caras de un cubo tienen la misma longitud. Como en cualquier triángulo equilátero los ángulos entre sus lados son 60 grados, ése es el ángulo que nos piden.

3. *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y f un endomorfismo de V que verifica*

$$g(u, f(u)) = 0, \ \forall u \in V.$$

a) *Prueba que la condición anterior es equivalente a $g(f(u), v) = -g(u, f(v))$, $\forall u, v \in V$.*

Si $g(f(u), v) = -g(u, f(v))$ $\forall u, v \in V$, entonces tomando $u = v$ tenemos $g(f(u), u) = -g(u, f(u))$ y por tanto $g(f(u), u) = 0$ $\forall u \in V$.

Recíprocamente, supongamos que $g(u, f(u)) = 0$ $\forall u \in V$ y tomemos $u, v \in V$. Entonces,

$$0 = g(u+v, f(u+v)) = g(u+v, f(u)+f(v)) = g(u, f(u))+g(u, f(v))+g(v, f(u))+g(v, f(v)).$$

Los sumandos primero y cuarto se anulan por hipótesis, luego $g(u, f(v)) + g(v, f(u)) = 0$, es decir, $g(f(u), v) = -g(u, f(v))$.

b) *Prueba que f no tiene valores propios reales distintos de* 0.

Sea $a \in \mathbb{R}$ un valor propio de f, y sea $v \in V - \{0\}$ un vector propio asociado a a. Entonces, $0 = g(v, f(v)) = g(v, av) = a\|v\|^2$. Como $v \neq 0$, tenemos $\|v\|^2 \neq 0$ luego a tiene que anularse.

c) *Prueba que si f es además un isomorfismo entonces* $\dim V$ *debe ser par.*

Como f es un isomorfismo, no puede tener a cero por valor propio. Por el apartado anterior, f no tiene valores propios reales. Por tanto, el polinomio característico de f no puede tener grado impar (en tal caso tendría una raíz real por el Teorema de Rolle), luego $\dim V$ es par.

d) *Prueba que si* $\dim V = 3$*, existe B una base ortonormal de (V, g) y $a \in \mathbb{R}$ tales que*

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\dim V$ es impar, el polinomio característico $p_f(t)$ de f tiene grado impar. Por el Teorema de Rolle, $p_f(t)$ tiene al menos una raíz real, es decir, f tiene al menos un valor propio real. Por el apartado b), este valor propio real ha de ser cero. Discutimos ahora casos según la dimensión de $\ker(f)$ (éste es el subespacio propio asociado al valor propio cero de f, luego su dimensión no puede ser cero):

(I) Si $\dim \ker(f) = 3$, entonces f es el endomorfismo nulo. Por tanto, dada cualquier base ortonormal B de (V, g), se tiene $M(f, B) = 0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, que es del tipo pedido para $a = 0$.

(II) Veamos que el caso $\dim \ker(f) = 2$ no puede darse: En este caso podemos elegir una base ortonormal $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ de (V, g) de forma que $\{u_1, u_2\}$ es base de $\ker(f)$ y $u_3 \in \ker(f)^\perp$. Como B es base ortonormal,

$$f(u_3) = \sum_{i=1}^{3} g(f(u_3), u_i)u_i \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^{2} g(f(u_3), u_i)u_i = -\sum_{i=1}^{2} g(u_3, f(u_i))u_i \overset{(\star\star)}{=} 0,$$

donde en $(\star)$ hemos usado que $g(f(u_3), u_3) = 0$ por hipótesis, y en $(\star\star)$ que $u_1, u_2 \in \ker(f)$. Por tanto, $u_3 \in \ker(f)$, lo que contradice que $u_3 \in \ker(f)^\perp$ y que $u_3 \neq 0$.

(III) Si $\dim \ker(f) = 1$, entonces podemos elegir una base ortonormal $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ de (V, g) de forma que $u_3 \in \ker(f)$. Calculamos $M(f, B)$:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= g(f(u_1), u_1)u_1 + g(f(u_1), u_2)u_2 + g(f(u_1), u_3)u_3 \\ &\overset{(\diamondsuit)}{=} g(f(u_1), u_2)u_2 - g(u_1, f(u_3))u_3 \\ &= g(f(u_1), u_2)u_2, \end{aligned}$$

donde en $(\diamondsuit)$ hemos usado la hipótesis sobre f y el apartado a), y análogamente,

$$\begin{aligned} f(u_2) &= g(f(u_2), u_1)u_1 + g(f(u_2), u_2)u_2 + g(f(u_2), u_3)u_3 \\ &\overset{(\diamondsuit)}{=} -g(u_2, f(u_1))u_1 - g(u_2, f(u_3))u_3 \\ &= -g(f(u_1), u_2)u_1, \end{aligned}$$

luego ahora sólo tenemos que llamar $a := -g(f(u_1), u_2) \in \mathbb{R}$ y se tiene que $M(f, B)$ es del tipo pedido (ya que $f(u_3) = 0$).

4. *En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, calcula la matriz en la base usual B_u de $h \circ \sigma_U$, donde σ_U es la simetría ortogonal con respecto al plano $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$ y h es el giro de ángulo $\pi/2$ alrededor del eje OY. Clasifica la isometría resultante y encuentra una base ortonormal en la que la isometría adopte su forma canónica.*

Primero calculamos $M(h, B_u)$. Por ser h un giro de ángulo $\pi/2$ alrededor del eje OY (no nos dicen en qué sentido es este giro), tenemos

$$h(e_1) = \mp e_3, \quad h(e_2) = e_2, \quad h(e_3) = \pm e_1,$$

donde $B_u = \{e_1, e_2, e_3\}$ (el criterio de los signos anteriores es que se dan 'los dos de arriba' o 'los dos de abajo'). Por tanto,

$$M(h, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ahora calculamos $M(\sigma_U, B_u)$. Una base de U es $e_1 + e_3, e_2$, luego una base de $U^\perp$ es $e_1 - e_3$. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ descomponemos de la forma siguiente:

$$(x, y, z) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 0) + c(1, 0, -1),$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Resolviendo el sistema anterior con incógnitas a, b, c obtenemos $a = \frac{1}{2}(x + z)$, $b = y$, $c = \frac{1}{2}(x - z)$ luego

$$\begin{aligned}
\sigma_U(x, y, z) &= \tfrac{1}{2}(x + z)\,\sigma_U(1, 0, 1) + y\,\sigma_U(0, 1, 0) + \tfrac{1}{2}(x - z)\,\sigma_U(1, 0, -1) \\
&= \tfrac{1}{2}(x + z)(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) - \tfrac{1}{2}(x - z)(1, 0, -1) \\
&= (z, y, x).
\end{aligned}$$

Tomando (x, y, z) como cada uno de los vectores de la base usual, tenemos $\sigma_U(e_1) = e_3$, $\sigma_U(e_2) = e_2$, $\sigma_U(e_3) = e_1$. Por tanto,

$$M(\sigma_U, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Finalmente,

$$M(h \circ \sigma_U, B_u) = M(h, B_u) \cdot M(\sigma_U, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 \end{pmatrix}.$$

En cualquiera de los dos casos para el signo, se tiene $\det(h \circ \sigma_U) = -1$, luego $h \circ \sigma_U$ es una simetría. En el caso que el signo sea el 'de arriba' tenemos que $h \circ \sigma_U$ es la simetría ortogonal respecto a $L(\{e_1, e_2\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$, mientras que si el signo es el 'de abajo' tenemos que $h \circ \sigma_U$ es la simetría ortogonal respecto a $L(\{e_2, e_3\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$. Finalmente, una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_u)$ en la que $h \circ \sigma_U$ adopta su forma canónica es, según acabamos de ver, la base usual.