Ejercicio puntuable Tema 2-Geometría II
1^o Grado en Matemáticas
8 de mayo 2017

Nombre y Apellidos: ______________________________.

1) Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática asociada está dada por

$$\omega_a(x,y,z) = -ax^2 \quad -ay^2 + az^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

a) Calcula el índice, el rango y clasifica la métrica g_a según el valor de a.

b) En el caso $a = 1$ encuentra una base del subespacio ortogonal al plano de ecuación $y - 2z = 0$.

c) ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_0)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{-2})$ isométricos? ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_0)$ y $(\mathbb{R}^3, g_1)$ isométricos? En caso afirmativo construye una isometría.

2) Clasifica la métrica g de $\mathbb{R}^4$ dada en la base canónica por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Existe una descomposición de $\mathbb{R}^4$ en dos subespacios ortogonales en los que la métrica restricción sea definida positiva y definida negativa, respectivamente? En caso afirmativo da una descomposición que verifique lo anterior.

Puntuación: 1.- a), c) 3, **1.- b)** 1, **2.-** 3

1

$$M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

a) $\det(M(g_a, B_u)) = a^3 + 1 + 1 + a + \cancel{a} - \cancel{a} =$

$= a^3 + a + 2 = (a+1)(a^2 - a + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$a^2 - a + 2 = 0$

El discriminante es

$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$.

Luego sólo hay una raíz de la ecuación que es $a = -1$. Por tanto tenemos

g_a es degenerada $\iff a = -1$.

Además observamos que si $a \neq 0$ hay un elemento de la diagonal positivo y otro negativo con lo que la métrica es indefinida. Para $a = 0$ tenemos $g_0(e_i, e_i) = 0$ para los vectores de la base canónica y por tanto la métrica no puede ser ni definida positiva ni negativa, ~~también~~ es idefinida.

Luego tenemos el siguiente cuadro:

	$\det(M(g_a, B_u))$	r	s	Métrica
$a < -1$	$-$	3	1^{*2}	indef no deg.
$a > -1$	$+$	3	2^{*2}	indef no deg.
$a = -1$	0	2^{*1}	1	indef degenerada

*1 El rango en el caso $a = -1$ sabemos que es 2 porque tenemos el menor $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$.

*[2] El índice lo hemos calculado teniendo en cuenta cómo es el det $(M(g_a, B_u))$ en cada caso y utilizando que el signo del determinante de la matriz de una métrica respecto de una base no depende de la base.

b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0\} = L(\{(1,0,0),(0,2,1)\})$

$$U^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} -x + y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x = -2z \\ y = -3z \end{array}\right\} = L(\{(-2,-3,1)\}).$$

c) Sabemos por un resultado de teoría que dos espacios vectoriales métricos (V,g) y (V',g') son isométricos si y sólo si

$$\dim V = \dim V'$$
$$\text{rango}(g) = \text{rango}(g')$$
$$\text{índice}(g) = \text{índice}(g')$$

Usando este resultado tenemos que g_0 y g_{-2} no son isométricos porque tienen distinto índice. En cambio g_0 y g_1 sí son isométricos. Para encontrar una isometría entre ellos basta calcular $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_0)$, $B' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_1)$ y considerar la isometría $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $f(u_i) = u_i'$, $i = 1,2,3$.

Calculemos pues una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_0)$.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{P_1}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{P_2}\sim\begin{pmatrix}2&1&2\\0&-1/2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1/2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}}_{P_3}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Observa que se confirma el índice.

$$P=P_1\cdot P_2\cdot P_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

luego $B=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

Calculamos ahora una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_1)$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{Q_1}\sim\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&2\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&2\\0&2&2\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}_{Q_2}\sim\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&2\\0&2&0\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{Q_3}\sim\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&2\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q_4} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{Q_5} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q = Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Luego $B' = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$

2.-) Calculemos una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, g)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_3} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que la métrica es indefinida no degenerada con índice 2.

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego una base ortonormal es:

$$B = \{ \underset{u_1}{(1,0,0,0)}, \underset{u_2}{(-1,1,0,0)}, \underset{u_3}{(1,-1,1,0)}, \underset{u_4}{(-1,1,-1,1)} \}.$$

Es claro que los subespacios $U = L(\{u_1, u_2\})$ y $W = L(\{u_3, u_4\})$ son ortogonales por ser B una base ortonormal. Además tenemos:

$$M(g_U, \{u_1, u_2\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(g_W, \{u_3, u_4\}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego g_U es definida positiva y g_W es definida negativa.