GEOMETRÍA II. Examen del Tema 1

– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –

Curso 2015/16

Nombre:

---

1. En cada caso, probar la afirmación o dar un ejemplo de que es falsa

   (a) Si un endomorfismo satisface que coincide la multiplicidad geométrica y aritmética de todos sus valores propios, entonces es diagonalizable.

   (b) Si A y C son dos matrices del mismo orde, A es diagonalizable y C es diagonal, entonces $A+C$ es diagonalizable.

   (c) Sea $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ con $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ y $dim(\text{Ker}(f)) = 2$. Entonces f es diagonalizable.

2. En el espacio vectorial de matrices simétricas $S_2(\mathbb{R})$, consideramos el endomorfismo

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2a-2b+c & -a+b+c \\ -a+b+c & 5a-6b-2c \end{pmatrix}$$

   Hallar los valores y subespacios propios de f y estudiar si es diagonalizable.

3. Probar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   es diagonalizable y a partir de ello, hallar una matriz B tal que $B^2 = A$.

4. Según los parámetros a y b, estudiar si es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & a & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b \end{pmatrix}.$$

   En el caso que lo sea, hallar una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

Importante: razonar todas las respuestas

Soluciones

1. (a) Falsa. Tomamos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. El polinomio característica es $P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$. Entonces sólo hay un valor propio, $\lambda = 1$ con $a_1 = g_1 = 1$. La matriz no es diagonalizable porque $P_A(\lambda)$ no se puede factorizar con 3 raíces reales.

   (b) Falsa. Tomamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $c = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $A + C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   (c) Verdadera. Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base donde los dos primeros vectores generan el núcleo. Entonces
$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$
   Además $Im(f) =< f(e_3) >=< (a, b, c) >$. El número c no es cero: en caso contrario, $(a, b, 0) \in Im(f) \cap < e_1, e_2 >= Im(f) \cap Ker(f)$. Como a, b no pueden ser simultáneamente 0 (entonces $f = 0$ y $Ker(F) = V$), entonces habría un vector no nulo en la intersección. Esta contradicción prueba que $c \neq 0$. Finalmente la matriz $M(f, b)$ es triangular superior y el valor propio $\lambda = c$ tiene multiplicidad aritmética y geométrica 1. Como $\lambda = 0$ es valor propio con multiplicidad aritmética 2 y geométrica $dim(V_0) = dim(Ker(f)) = 2$, entonces f es diagonalizable.

2. Tomamos la base $B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ y así, la expresión matricial de f es
$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$
   El ejercicio está hecho en clase: los valores propios son 3 y -1 con $a_3 = g_3 = 1$ y $a_{-1} = g_{-1} = 1$, luego no es diagonalizable. Y $V_3 =< (1, 0, 1) >$, $V_{-1} =< (-1, -1, 1) >$.

3. Hallamos el polinomio característico usando $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$, obteniendo $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$. Usando el método de Ruffini obtenemos inmediatamente que las raíces son 2 y 1 con $a_2 = 1$ y $a_1 = 2$. Por tanto se satisface la primera parte del teorema de diagonalización. Para la segunda, ya sabemos que $g_2 = 1$, luego falta hallar $g_1 = 3 - r(A - I)$:
$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

luego su rango es 1 y asi, $g_1 = 3 - 1 = 2$.

Para la segunda parte, se sabe que existe una matriz regular P tal que $A = P^{-1}DP$ donde D es diagonal. Si tomamos $B = P^{-1}GP$, donde G es la matriz diagonal donde sus elementos son las raíces cuadradas de los valores propios de A (¡son no negativos!), entonces $B^2 = (P^{-1}GP)(P^{-}GP) = P^{-1}G^2P = P^{-1}DP$, pues $G^2 = D$. Por tanto basta calcular P, P^{-1}, D y G para hallar B.

Una base de los valores propios es $V_2 =< (-1,-1,1) >$ y $V_1 =< (1,0,1),(1,1,0) >$, luego

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $G = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$B = P^{-1}GP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & -1+\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

4. Hallamos el polinomio característica de A, desarrollando por el elemento $(2,2)$ de $A - \lambda I$:

$$det(A-\lambda I) = det \begin{pmatrix} 2a-b-\lambda & 0 & 2a-2b \\ 1 & a-\lambda & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda) \begin{vmatrix} 2a-b-\lambda & 2a-2b \\ -a+b & -a+2b-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(a-\lambda)(\lambda^2 + (a+b)\lambda + ab) = (a-\lambda)(a-\lambda)(b-\lambda).$$

Por tanto los valores propios son a y b. Distinguimos casos dependiendo si $a = b$ o si $a \neq b$.

(a) Caso $a = b$. Entonces $a_a = 3$ y

$$g_a = 3 - r(A - aI) = 3 - r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

luego A no es diagonalizable.

(b) Caso $a \neq b$. Entonces $g_b = 1$. Para $\lambda = a$, tenemos $a_a = 2$ y

$$g_a = 3 - r(A - aI) = r \begin{pmatrix} a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & 0 & 2 \\ -a+b & 0 & -2a+2b \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

pues la primera y tercera fila son proporcionales a la segunda: la matriz es diagonalizable. La matriz P es la matriz cuyas columnas son una base de diagonalización. Tenemos $(x, y, z) \in V_b$ si

$$\begin{pmatrix} 2a-2b & 0 & 2a-2b \\ 1 & a-b & 2 \\ -a+b & 0 & -a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, y usando $a \neq b$, si $x+(a-b)y+2z=0$, $x+z=0$. Tomando $z=1$, tenemos $x=-1$ e $y=-1/(a-b)$ y $V_b =< b-a, -1, a-b >$.
Para $\lambda = a$, tenemos $(x, y, z) \in V_a$ si

$$\begin{pmatrix} a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & 0 & 2 \\ -a+b & 0 & -2a+2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $x+2z=0$. Entonces una base de V_a es $\{0,1,0),(2,0,-1)$. Por tanto

$$P = \begin{pmatrix} b-a & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ a-b & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$