GEOMETRÍA II. Examen del Tema 2
– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –
Curso 2014/15

<u>Nombre</u>:

1. En cada caso, probar la afirmación o dar un ejemplo de que es falsa

   (a) Sea un espacio vectorial métrico (V, g) de dimensión 2 con $V = U \oplus W$. Si $g_{|U}$ y $g_{|W}$ son no degeneradas, entonces (V, g) es no degenerado.

   (b) Si $W =< (2, 1) >$, existe una métrica en $\mathbb{R}^2$ donde $W = W^{\perp}$.

   (c) Si g es una métrica definida negativa en un espacio vectorial V de dimensión 4, entonces $\det(M_B(g)) > 0$ para cualquier base B de V.

2. Según el parámetro a, hallar una base conjugada y signatura de la métrica de $\mathbb{R}^3$

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

3. Se considera la forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$ dada por $\phi(x, y, z) = x^2 - y^2 + 3z^2 - 4xz + 2yz$. Hallar una base del subespacio ortogonal de $U = \{(x, y, z) : x - 2y = 0\}$. Hallar la signatura y una base del radical de $g_{|U}$.

4. Sea $U =< (1, 0, 1), (1, 0, -1) >$. Hallar $M_{B_u}(g)$ de una métrica g en $\mathbb{R}^3$ tal que $\sigma(g) = (0, 2)$ y $R(g) \subset U$.

Importante: razonar todas las respuestas

Soluciones

1. En cada caso, probar la afirmación o dar un ejemplo de que es falsa

   (a) FALSO. Sea $\mathbb{R}^2$, $U =< (1,0) >$, $W =< (0,1) >$. Definimos

   $$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix},$$

   donde $a \in \mathbb{R}$ es a determinar. Por un lado, $M_{B_U}(g_{|U|}) = M_{B_W}(g_{|W})(1)$, con $B_U = \{(1,0)\}$ y $B_W = \{(0,1)\}$, y obteniendo que las restricción de la métrica es no degenerada. Como queremos que g sea degenerada, sólo hay que imponer que el determinante de $M_{B_u}(g)$ sea cero, es decir, basta con tomar $a = 1$

   (b) VERDADERO (primera manera, motivados por el plano de Lorentz-Minkowski). Tomamos $B = \{(2,1),(0,1)\}$ y definimos

   $$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Respecto de la base B, en coordenadas, $(x, y) \in W^\perp$ si

   $$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

   es decir, $y = 0$, luego $W\perp =< (1,0)_B >=< (2,1) >= W$.
   (segunda manera) Sea B_u la base usual de $\mathbb{R}^2$. Se está buscando una matriz (la de la métrica) tal que

   $$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

   tenga como única solución vectores proporcionales a $(2,1)$. La ecuación es $(2a + b)x + (2b + c)y = 0$. Por tanto, $(2,1)$ es solución y el rango de la matriz de los coeficientes es 1. Queda pues $4a+4b+c = 0$ y $2a+b \neq 0$ (o $2b+c \neq 0$). Luego basta tomar $a = 0$, $b = 1$, $c = -4$,

   (c) VERDADERO. (primera manera) Respecto de una base ortonormal B', $M_{B'}(g)$ tiene -1 en todos los elementos de la diagonal principal, luego su determinante es 1. La relación entre $M_{B'}(g)$ y $M_B(g)$ es que son conjugadas,

es decir, para cierta matriz regular P, $M_B(g) = P^t M_{B'}(g) P$. Por tanto, $det(M_B(g)) = det(P^t) \cdot 1 \cdot det(P) = det(P)^2 > 0$.
(segunda manera) Se probó en clase que los determinantes encajados obtenidos de una expresión matricial de una métrica definida negativa tienen signo alterno, empezando para $n = 1$ por negativo. Luego para $n = 4$ es positivo.

2. Haciendo ceros por conjugación, tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_{12}(1)]{F_{12}(1)} \begin{pmatrix} -2 & -1 & a \\ -1 & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_{12}(-1/2)]{F_{21}(-1/2)} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{a}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[C_{31}(-a)]{F_{31}(a/2)} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{a}{2} & \frac{a^2}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[C_{31}(-a)]{F_{31}(a/2)} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la signatura es $\sigma(g) = (1, 1)$. Las transformaciones de la identidad son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{21}(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{C_{31}(a/2)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{32}(-a))} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & a \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una base ortogonal es $B = \{(1, 1, 0), (-1/2, 1/2, 0), (a, 0, 1)\}$ y dividiendo por $\sqrt{2}$, $\sqrt{1/2}$ el primero y el segundo respectivamente, tenemos la base conjugada:

$$\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (a, 0, a)\}.$$

3. Calculamos primero la expresión $M_{B_u}(g)$ de la métrica g asociada a ϕ, obteniendo

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallamos una base de U resolviendo el sistema $x - 2y = 0$, obteniendo $U =< (2, 1, 0), (0, 0, 1) >$. Por tanto los vectores (x, y, z) de $U^\perp$ son los que son ortogonales a la base de U, luego

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

obteniendo $2x - y - 3z = 0$ (las dos ecuaciones son las mismas). Resolviendo el sistema, concluimos $U^{\perp} =< (3,0,2),(1,2,0) >$.

Considerando la base anterior de U, $B_U = \{(2,1,0),(0,0,1)\}$, hallamos la expresión matrical de $g_{|U}$:

$$M_{B_u}(g_{|U}) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizamos por congruencias, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_{21}(1)]{F_{21}(1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Haciendo esta transformación a la base de U, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{21}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto nos dice que la signatura es $\sigma(g_{|U}) = (1,0)$ y que una base del radical de $g_{|U}$ es el segundo vector, es decir, $\{(2,1,1)\}$.

4. Tomamos un vector de U, por ejemplo, $(1,0,1)$ y es el que va a generar el radical de g. Ampliamos a una base de$\mathbb{R}^3$: $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$ y definimos

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como esta base es cojungada, entonces la signatura es $\sigma(0,2)$ y el radical lo general el tercer vector de la base, es decir, $R(g) =< (1,0,1) >\subset U$. Para acabar, nos hace falta hallar $M_{B_u}(g)$. Sabemos que

$$M_{B_u}(g) = P^t M_B(g) P, \quad P = M(1_V, B, B_u).$$

Sabemos que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |P^{-1}| = 1.$$

$$P = (P^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$