Tesina

Mario Anthony Guerrera

2022/2023

Contents

1 Segnale triangolare

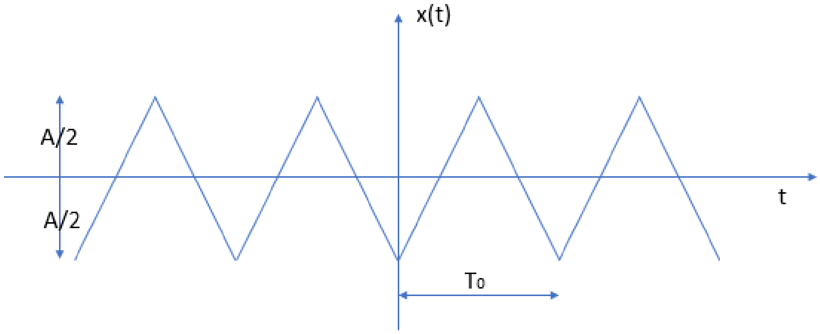


Figure 1: Segnale nel tempo

$$
\begin{aligned}
A &= 8 milliVolt \\
T_0 &= 2 millisecondi \\
f_0 &= 500 Hz
\end{aligned}
$$

1.1 Potenza

Calcoliamo la potenza tramite la formula

$$P_x = \frac{E_{T_0}}{T_0} \tag{1}$$

Da cui

$$
\begin{aligned}
P_x &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 \, dt \\
&= \frac{1}{T_0} \left[\int_0^{\frac{T_0}{2}} \left(\frac{2A}{T_0} t - \frac{1}{2} A \right)^2 dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \left(\frac{3}{2} A - \frac{2A}{T_0} t \right)^2 dt \right] \\
&= \frac{1}{T_0} \left[\int_0^{\frac{T_0}{2}} \left(\frac{4A^2}{T_0^2} t^2 + \frac{1}{4} A^2 - \frac{2A^2}{T_0} t \right) dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \left(\frac{9}{4} A^2 + \frac{4A^2}{T_0^2} t^2 - \frac{6A^2}{T_0} t \right) dt \right] \\
&= \left(\frac{1}{T_0} \frac{4A^2}{T_0^2} \frac{1}{3} \frac{T_0^3}{8} \right) + \left(\frac{1}{T_0} \frac{A^2}{4} \frac{T_0}{2} \right) - \left(\frac{A^2}{T_0^2} \frac{T_0^2}{4} \right) + \left(\frac{1}{T_0} \frac{9A^2}{4} \frac{T_0}{2} \right) + \left(\frac{1}{T_0} \frac{4A^2}{T_0^2} \frac{1}{3} \frac{7}{8} T_0^3 \right) - \left(\frac{1}{T_0} \frac{6A^2}{T_0} \frac{1}{2} \frac{3}{4} T_0^2 \right) \\
&= \frac{A^2}{12} = \frac{16}{3} = 5.33
\end{aligned} \tag{2}
$$

1.2 Grafico nel tempo

Grafichiamo il segnale nel tempo, tramite GnuRadio, sottraendo ad un treno di segnali triangolari di ampiezza A e fase π un segnale costante di ampiezza $\frac{A}{2}$ costruito come somma di due treni di rect di ampiezza entrambi $\frac{A}{2}$ ma con fase π e 0

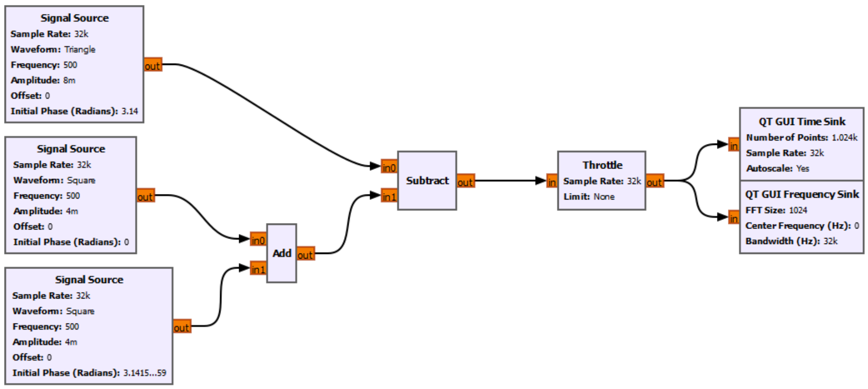


Figure 2: Costrutto GnuRadio

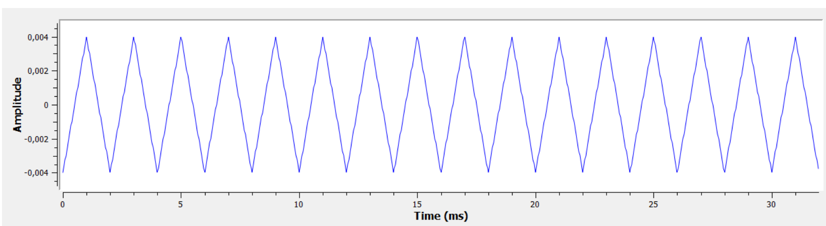


Figure 3: Segnale risultante

1.3 Filtro passa basso con P_{out} almeno $0.98P_{in}$

Per ricavare la banda di un filtro passa basso ideale tale che la potenza in uscita sia almeno il 98% della potenza in ingresso calcoliamo innanzitutto lo spettro del segnale $y(t)$ tramite la prima formula di somma di Poisson

Sia $x(t)$ il segnale troncato nel periodo T_0

$$x(t) = A\Delta\left(\frac{t-\frac{T_0}{2}}{\frac{T_0}{2}}\right) - \frac{A}{2}\pi\left(\frac{t-\frac{T_0}{2}}{T_0}\right) \tag{3}$$

E $y(t)$ il segnale periodicizzato

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0) \tag{4}$$

La prima formula di somma di Poisson enuncia

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(f - nf_0) \tag{5}$$

ove

$$c_n = \frac{1}{T_0} X(nf_0) \tag{6}$$

Lo spettro di $X(f)$, cioè lo spettro del segnale troncato è

$$X(f) = A \cdot \frac{T_0}{2} sinc^2(f\frac{T_0}{2}) e^{-j2\pi f \frac{T_0}{2}} - \frac{A}{2} \cdot T_0 sinc(fT_0) e^{-j2\pi f \frac{T_0}{2}} \tag{7}$$

Da cui

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{T_0} A \frac{T_0}{2} \left[\frac{sin(\pi n f_0 \frac{T_0}{2})}{\pi n f_0 \frac{T_0}{2}} \right]^2 - \frac{1}{T_0} \frac{A}{2} T_0 \left[\frac{sin(\pi n f_0 T_0)}{\pi n f_0 T_0} \right] \\ &= \frac{A}{2} \left[\frac{sin(\frac{\pi}{2} n)}{\frac{\pi}{2} n} \right]^2 - \frac{A}{2} \left[\frac{sin(\pi n)}{\pi n} \right] \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} |c_0| &= \frac{A}{2} - \frac{A}{2} = 0 \\ |c_1| &= |c_{-1}| = \frac{16}{\pi^2} = 1.62 \\ |c_2| &= |c_{-2}| = 0 \\ |c_3| &= |c_{-3}| = 0.18 \\ |c_4| &= |c_{-4}| = 0 \\ |c_5| &= |c_{-5}| = 0.06 \end{aligned} \tag{9}$$

Per ottenere il 98% della potenza in ingresso, cioè $0.98 \cdot \frac{16}{3} = 5.22$ dobbiamo ottenere una potenza in uscita dal filtro almeno 5.22 ed essendo un segnale periodico, quindi con spettro a righe, la potenza sarà data da:

$$P_y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} 2|c_n|^2 \tag{10}$$

Per cui sommando le prime due armoniche a frequenza $f_0 = 500$ otteniamo

$$P_{out} = \sum_{n=-1}^{1} |c_n|^2 = |c_{-1}|^2 + |c_0|^2 + |c_1|^2 = 2|c_1|^2 = 2\left(\frac{16}{\pi^2}\right)^2 = 5.2561 \tag{11}$$

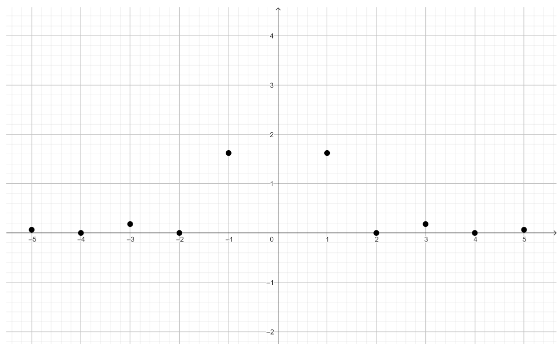


Figure 4: Spettro $Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| \delta(f - nf_0)$

Ed essendo maggiore di $0.98 \cdot P_{in} = 5.22$ possiamo costruire un filtro passa basso ideale che comprenda solo le prime due armoniche a frequenza f_0 e $-f_0$ quindi un filtro con risposta all' impulso $H(f) = \pi \left(\frac{f}{1000} \right)$

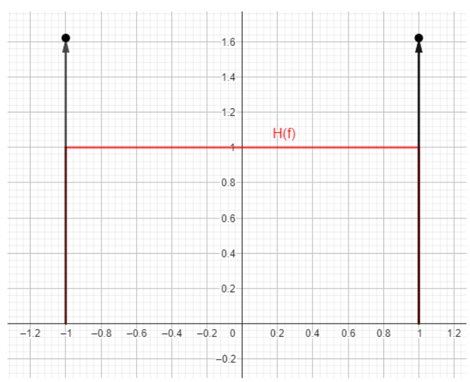
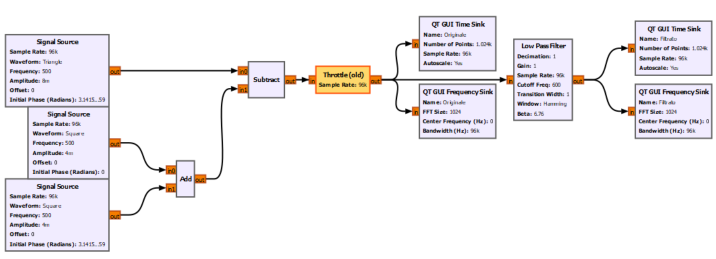
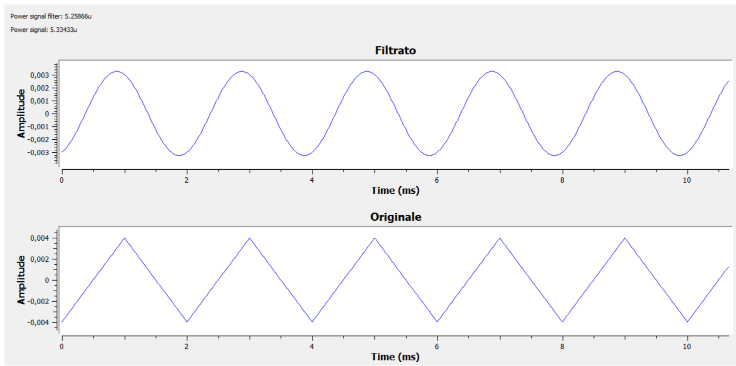


Figure 5: Filtro passa basso

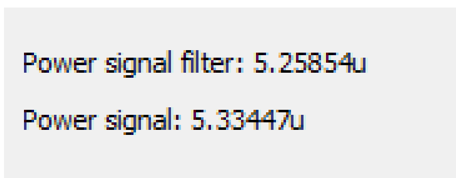
Tramite Gnu Radio applichiamo al segnale originario un filtro passa basso a frequenza 500 Hz che fa passare solamente le armoniche a frequenza f_0 e $-f_0$



Nota: Ho applicato un filtro di banda 600 Hz perchè non includeva le due armoniche a 500 e -500 Hz



Verificando infine che le potenze calcolate in precedenza di $P_{in} = 5.33$ e $P_{out} = 5.25$ siano corrette



1.4 Guadagno in decibel del filtraggio con potenza 98%

Calcoliamo il guadagno in db

$$G_{db} = 10 \cdot log_{10}(\frac{|P_{out}|}{|P_{in}|}) \tag{12}$$

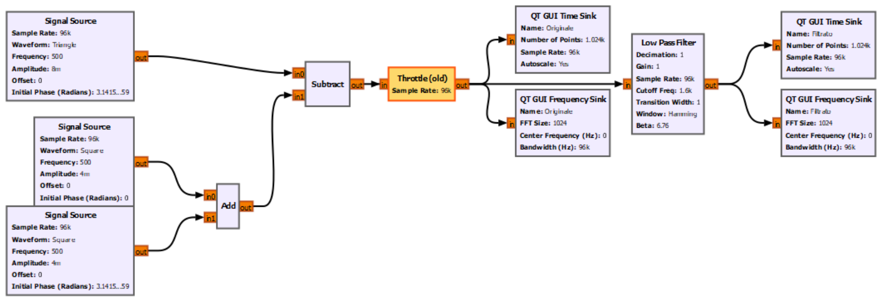
$$10 \cdot log_{10}(\frac{5.25}{5.33}) = -0.065 \ db \tag{13}$$

1.5 Filtro passa basso con P_{out} almeno $0.99P_{in}$

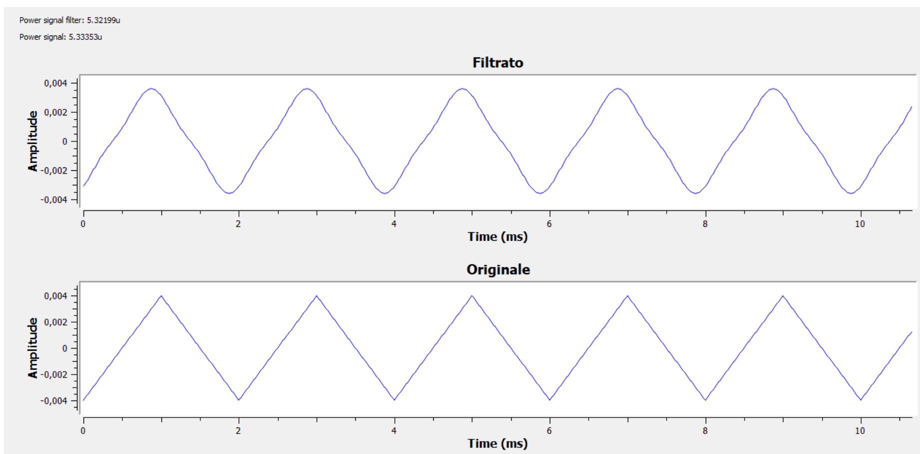
Come fatto precedentemente ricaviamo la banda del filtro passa basso tale che P_{out} sia almeno $0.99P_{in} = 5.28$
Includiamo questa volta le armoniche fino a $3f_0$ così da avere

$$\begin{aligned} P_{out} &= \sum_{n=-3}^{3} |c_n|^2 = |c_{-3}|^2 + |c_{-2}|^2 + |c_{-1}|^2 + |c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 \\ &= 2|c_1|^2 + 2|c_3|^2 = 5.32 \end{aligned} \tag{14}$$

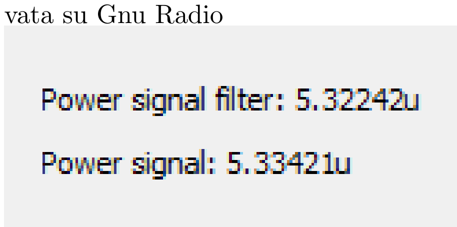
Creiamo un filtro passa basso su Gnu Radio che filtra le armoniche al di fuori di $3f_0$ in modo da avere la potenza del segnale in uscita almeno 5.28



Nota: Ho applicato un filtro di banda 1600 Hz perchè non includeva le due armoniche a frequenza -1500 e 15000 Hz



La potenza calcolata nel segnale filtrato, 5.32, corrisponde alla frequenza ricavata su Gnu Radio



1.6 Guadagno in decibel del filtraggio con potenza 99%

Calcoliamo il guadagno in db secondo la formula (12)

$$10 \cdot log_{10}(\frac{5.32}{5.33}) = -0.00815 \tag{15}$$

2 Segnale triangolare spezzato

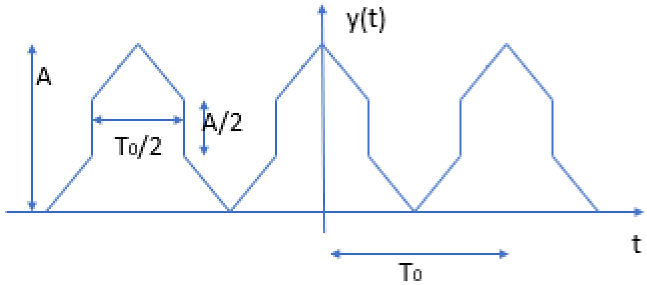


Figure 6: Segnale triangolare spezzato

$$A = 8milliVolt$$
$$T_0 = 2millisecondi$$
$$f_0 = 500Hz$$

2.1 Potenza

Calcoliamo la potenza tramite la formula

$$P_x = \frac{E_{T_0}}{T_0} \tag{16}$$

Da cui

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt \tag{17}$$

Si noti che il segnale è pari per cui

$$
\begin{aligned}
P_x &= \frac{1}{T_0} \cdot 2 \int_0^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{T_0} \cdot 2 \int_0^{\frac{T_0}{4}} \left[A \left(1 - \frac{t}{T_0} \right) \right]^2 dt + \frac{1}{T_0} \cdot 2 \int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}} \left[A \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T_0} \right) \right]^2 dt \\
&= \int_0^{\frac{T_0}{4}} \left[\frac{2A^2}{T_0} + \frac{2A^2}{T_0^3} t^2 - \frac{4A^2}{T_0^2} t \right] dt + \int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}} \left[\frac{2A^2}{4T_0} + \frac{2A^2}{T_0^3} t^2 - \frac{2A^2}{T_0^2} t \right] dt \\
&= \left[\frac{2A^2}{T_0} t + \frac{2A^2}{3T_0^3} t^3 - \frac{4A^2}{2T_0^2} t^2 \right]_0^{\frac{T_0}{4}} + \left[\frac{A^2}{2T_0} t + \frac{2A^2}{3T_0^3} t^3 - \frac{2A^2}{2T_0^2} t^2 \right]_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \left[\frac{2A^2}{T_0} \frac{T_0}{4} + \frac{2A^2}{3T_0^3} \frac{T_0^3}{64} - \frac{4A^2}{2T_0^2} \frac{T_0^2}{16} \right] + \left[\left(\frac{A^2}{2T_0} \frac{T_0}{2} + \frac{2A^2}{3T_0^3} \frac{T_0^3}{8} - \frac{2A^2}{2T_0^2} \frac{T_0^2}{4} \right) - \left(\frac{A^2}{2T_0} \frac{T_0}{4} + \frac{2A^2}{3T_0^3} \frac{T_0^3}{64} - \frac{2A^2}{2T_0^2} \frac{T_0^2}{16} \right) \right] \\
&= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{96} - \frac{A^2}{8} + \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{12} - \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{8} - \frac{A^2}{96} + \frac{A^2}{16} \\
&= \frac{19}{48} A^2 = \frac{76}{3} = 25.33
\end{aligned}
\tag{18}
$$

2.2 Grafico nel tempo

Si grafichi, tramite Gnu Radio, il segnale originario sommando un segnale triangolare di ampiezza $\frac{A}{2}$ e fase 0 ed un treno di rect di ampiezza $\frac{A}{2}$ e fase $\frac{3}{2}\pi$

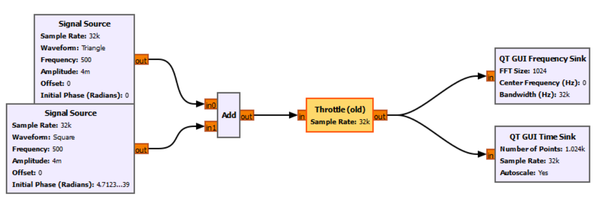


Figure 7: Costrutto Gnu Radio del segnale triangolo spezzato

2.3 Filtro passa basso con P_{out} almeno $0.61 P_{in}$

Per poter rappresentare il segnale consideriamo innanzitutto il segnale troncato in un periodo T_0 per poi periodicizzarlo di periodo T_0

$$x(t) = \frac{A}{2} \Delta\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right) + \frac{A}{2} \pi\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right) \tag{19}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0) \tag{20}$$

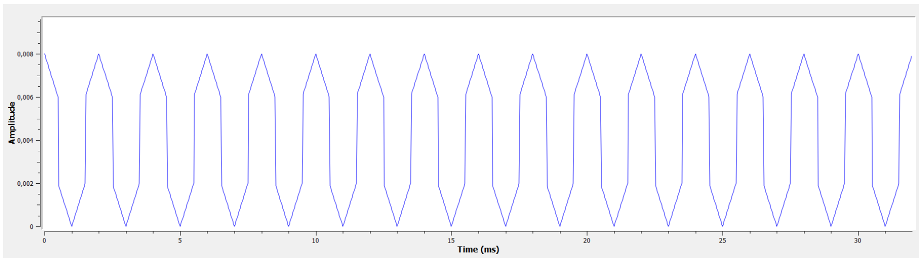


Figure 8: Risultato

Per ricavare la banda del nostro filtro calcoliamo lo spettro di $y(t)$ con la prima formula di somma di Poisson (5)

$$X(f) = \frac{A}{2}\frac{T_0}{2}sinc^2(f\frac{T_0}{2}) + \frac{A}{2}\frac{T_0}{2}sinc(f\frac{T_0}{2}) \tag{21}$$

$$Y(f) = \sum_{n=\infty}^{+\infty} c_n \delta(f - nf_0) \tag{22}$$

$$\begin{aligned} c_n = \frac{1}{T_0}X(nf_0) &= \frac{1}{T_0}\frac{A}{2}\frac{T_0}{2}sinc^2(\frac{n}{T_0}\frac{T_0}{2}) + \frac{1}{T_0}\frac{A}{2}\frac{T_0}{2}sinc(\frac{n}{T_0}\frac{T_0}{2}) \\ &= \frac{A}{4}\left[\frac{sin(\frac{\pi}{2}n)}{\frac{\pi}{2}n}\right]^2 + \frac{A}{4}\left[\frac{sin(\frac{\pi}{2}n)}{\frac{\pi}{2}n}\right] \end{aligned} \tag{23}$$

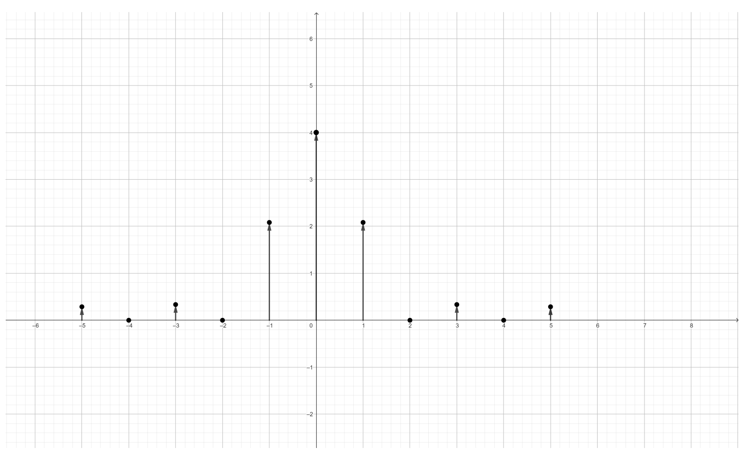


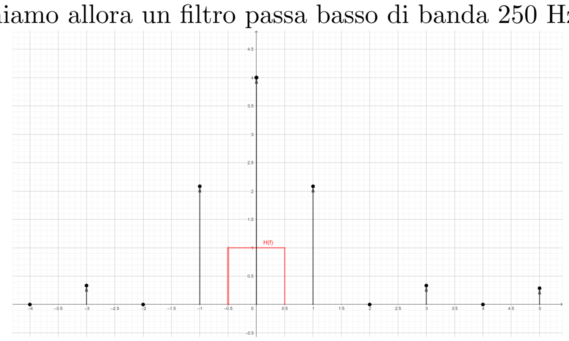
Figure 9: Spettro di $Y(f)$

$$
\begin{aligned}
|c_0| &= 4 \\
|c_1| &= |c_{-1}| = 2.08 \\
|c_2| &= |c_{-2}| = 0 \\
|c_3| &= |c_{-3}| = 0.33 \\
|c_4| &= |c_{-4}| = 0 \\
|c_5| &= |c_{-5}| = 0.28
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Per ricavare dunque la banda del filtro passa basso tale che la potenza in uscita sia almeno $0.61 \cdot P_{in} = 15.45$ basta far passare l' armonica a frequenza 0 ottenendo una potenza di

$$P_{out} = |c_0|^2 = 16 \tag{25}$$

Applichiamo allora un filtro passa basso di banda 250 Hz



Tramite Gnu Radio applichiamo un filtro di banda 250 Hz in modo da fare passare l' armonica a frequenza 0 Hz

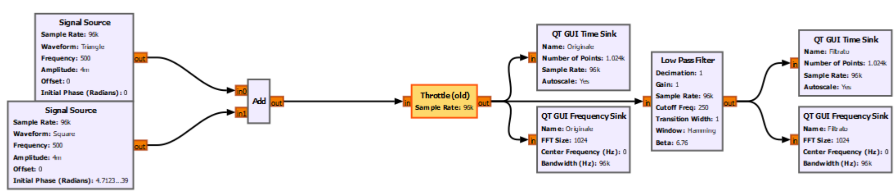


Figure 10: Costrutto del segnale filtrato

Si noti che filtriamo solo l' armonica a frequenza 0 quindi nel tempo equivale ad un segnale costante di ampiezza l' area dell' impulso cioè $\frac{A}{2}$
Si verificano inoltre le potenze calcolate in precedenza $P_{in} = 25.33$ e $P_{out} = 16$

2.4 Guadagno in decibel del filtraggio con potenza 61%

Calcoliamo il guadagno in db secondo la formula (12)

$$10 \cdot log_{10}(\frac{16}{25.33}) = -1.99 \tag{26}$$

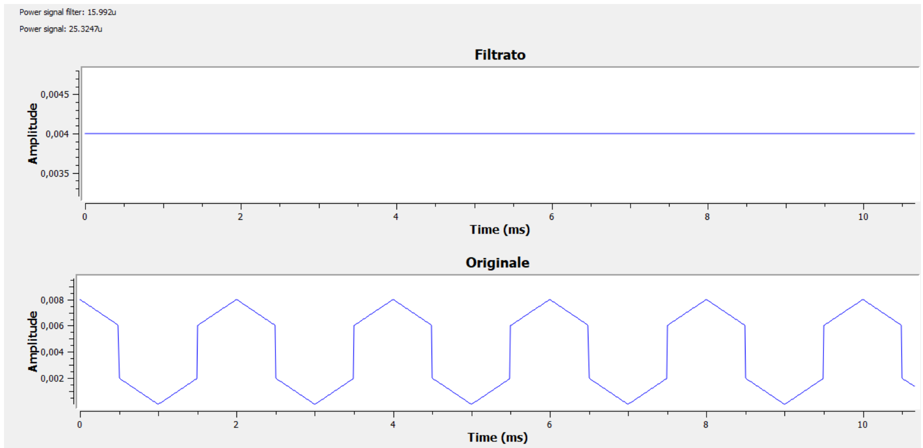


Figure 11: Risultato del filtraggio

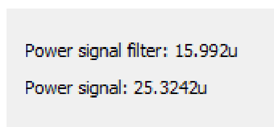


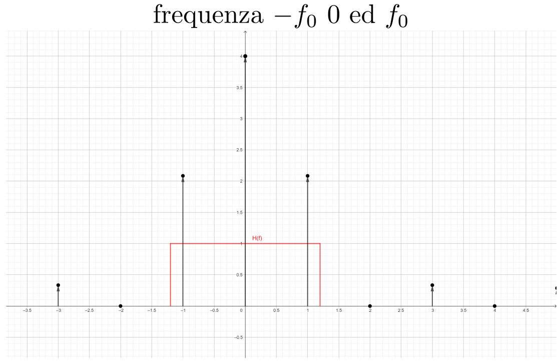
Figure 12: Potenza del segnale filtrato e originale

2.5 Filtro passa basso con P_{out} almeno $0.68P_{in}$

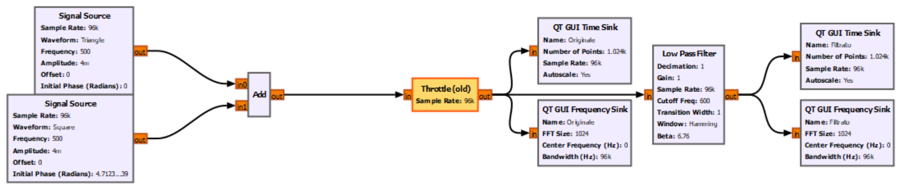
Ricaviamo la banda del filtro passa basso tale che la potenza in uscita sia almeno $0.68 \cdot P_{in} = 17.22$
Facendo passare le armoniche a frequenza -500 0 e 500 Hz otteniamo una potenza di

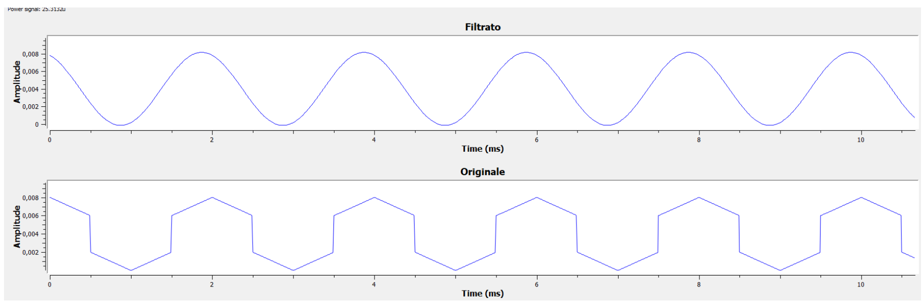
$$P_{out} = |c_0|^2 + 2|c_1| = 24.65 \tag{27}$$

Applichiamo quindi un filtro di banda 600 Hz che fa passare le armoniche a frequenza $-f_0$ 0 ed f_0

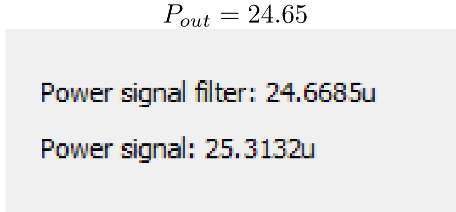


Tramite Gnu Radio applichiamo il filtro





Vengono verificate anche le potenze calcolate precedentemente di $P_{in} = 25.33$ e $P_{out} = 24.65$



2.6 Guadagno in decibel del filtraggio con potenza 68%

Calcoliamo il guadagno in db secondo la formula (12)

$$10 \cdot log_{10}(\frac{24.64}{25.33}) = -0.11 \tag{28}$$