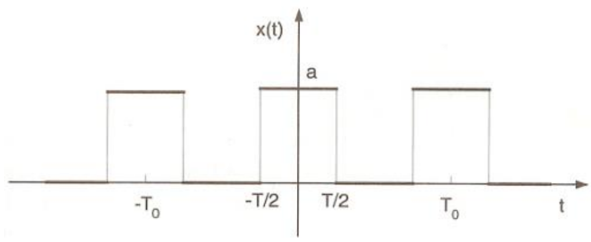
Tesina Teoria dei Segnali

Guerrera Mario Anthony

2022/23

Segnale *Treno di impulsi rettangolare*



Per rappresentare il segnale prendiamo in considerazione l' armonica con $k = 0$

$$a \cdot rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} a & \forall t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Essendo il segnale periodico, di periodo T_0, possiamo rappresentarlo tramite serie di Fourier come:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a \cdot \pi\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$

Per poter rappresentare lo spettro di ampiezza si calcolano i coefficienti di Fourier X_k secondo la formula ricavata:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} \; dt$$

Essendo il segnale pari

$$= \frac{1}{T_0} \cdot 2 \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot cos(2\pi k f_0 t) dt$$

$$= \frac{2a}{T_0} \left[\frac{sin(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0}\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= a \frac{sin\left(\pi k \frac{T}{T_0}\right)}{\pi k} \qquad (1)$$

Calcolando la fase avremo: $\begin{cases} 0 \; se \; Re > 0 \\ \pi \; se \; Re \; < 0 \end{cases}$

Assegnati:

$$\begin{cases} \dfrac{T}{T_0} = \dfrac{1}{6} \rightarrow T_0 = 6T \\ f_0 = 1000 \; Hz \rightarrow T_0 = 1 \cdot 10^{-3} \; s \\ a = \; 3 \; V \end{cases}$$

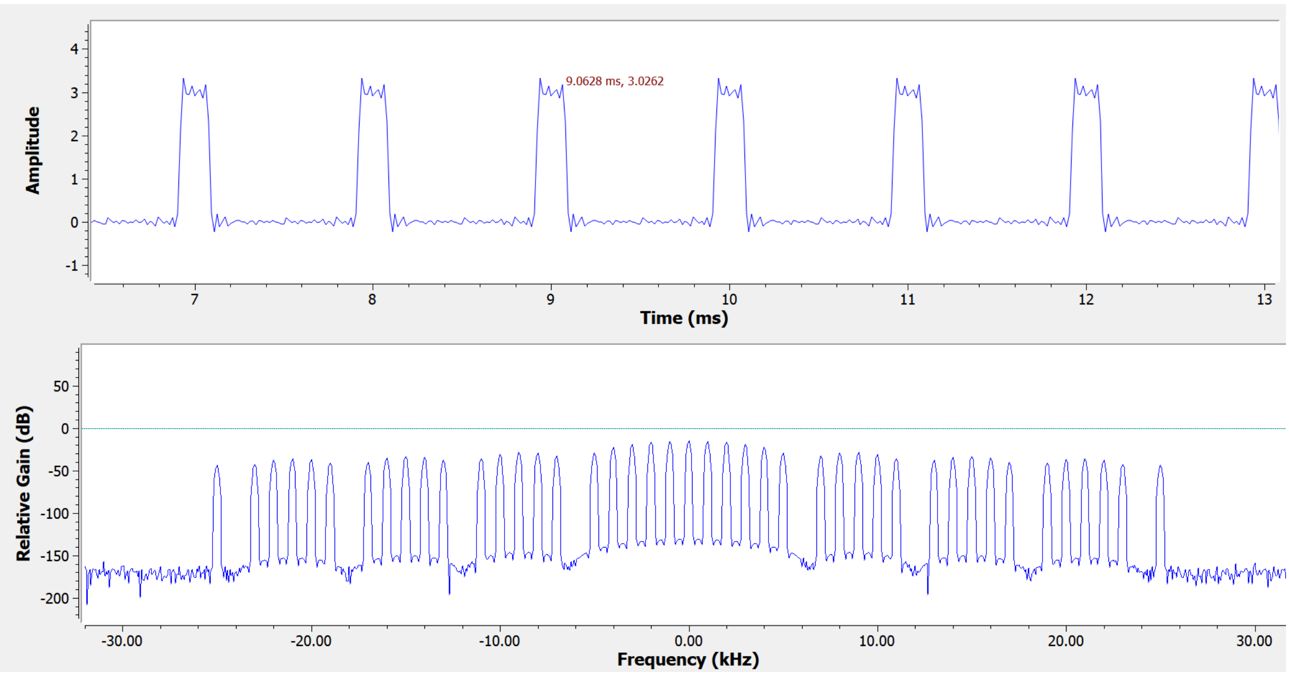
Dalla formula (1) si ha quindi:

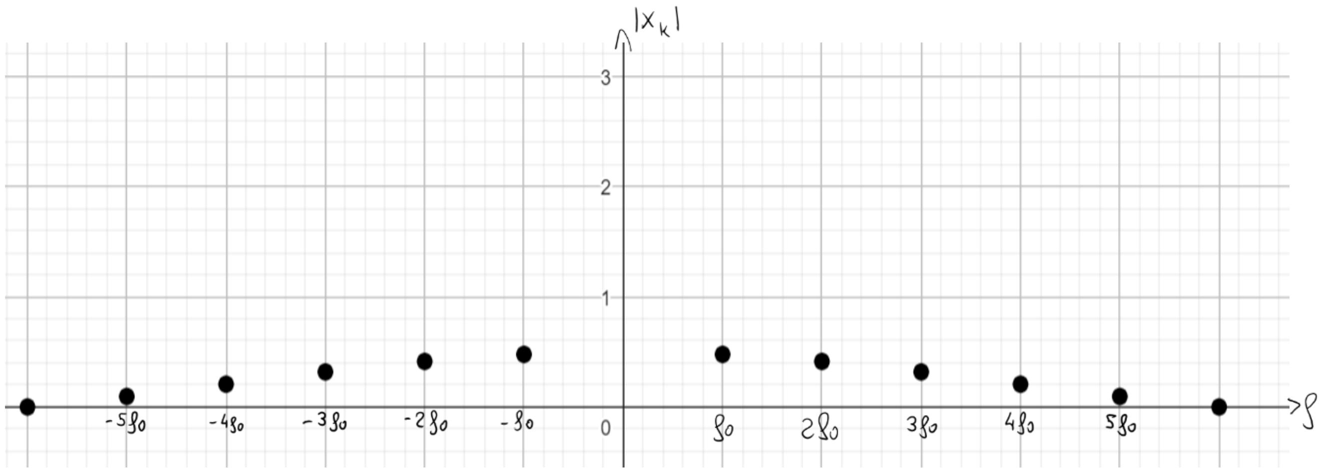
$$X_k = 3 \cdot \frac{sin\left(\frac{\pi}{6}k\right)}{\pi k}$$

Calcolati gli X_k e X_0 immettiamo su GnuRadio il segnale scomposto in serie di Fourier secondo la formula:

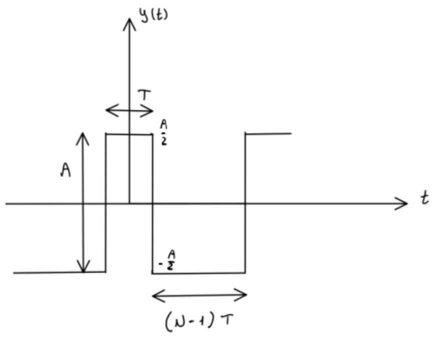
$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k) \qquad (2)$$

Create la sorgente costante di ampiezza $\frac{1}{2}$ e le k armoniche con $k = 25$, modificando rispettivamente la frequenza di campionamento a 64kHz, creiamo il segnale treno di impulsi della forma

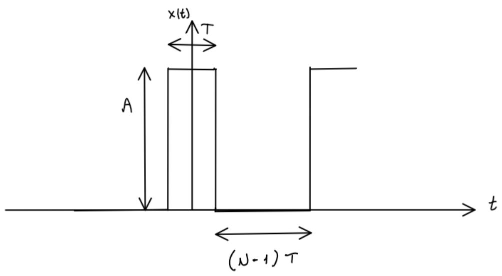




Segnale *Onda Quadra*



Il segnale onda quadra di periodo T_0 è pari, pertanto, il segnale può essere rappresentato in funzione di un treno di impulsi rettangolari di ampiezza A, sommando un segnale costante di ampiezza $\frac{A}{2}$



Essendo il segnale x(t) pari possiamo rappresentarlo in serie di Fourier come:

$$X_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot \pi\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$

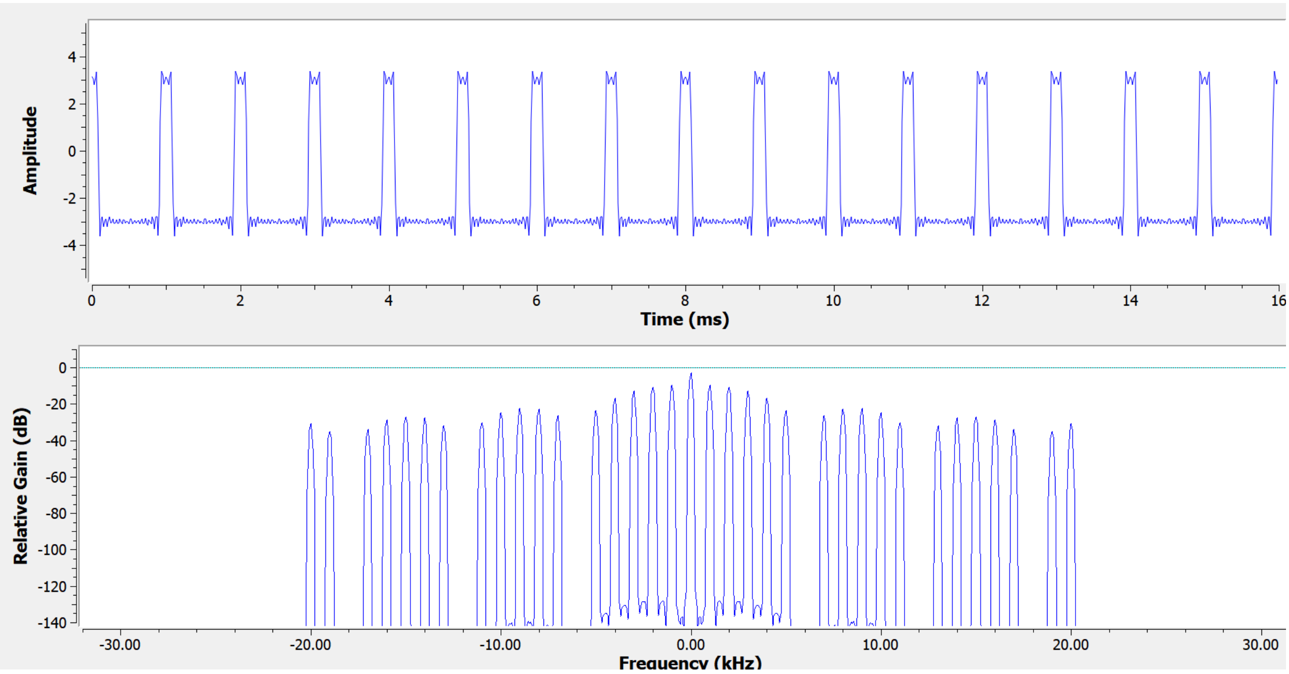
Possiamo dunque definire il segnale originale y(t) come $y(t) = x(t) - \frac{A}{2}$

Sapendo che $X_k = A\frac{sin\left(\pi k\frac{T}{T_0}\right)}{\pi k}$ dal treno di impulsi

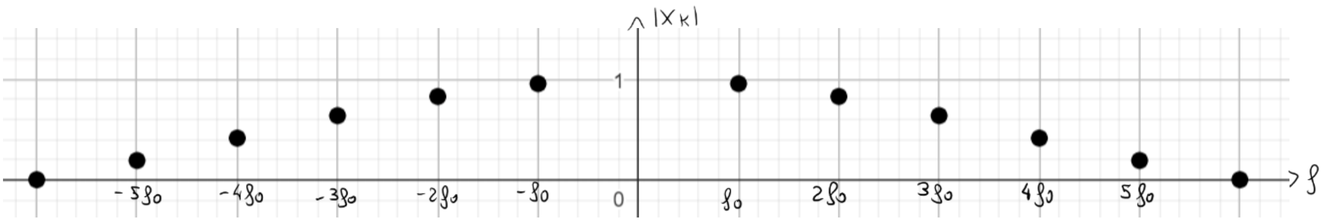
Assegnati $\begin{cases} A = 6\ V \\ T = \frac{T_0}{6} \rightarrow T_0 = 6T \end{cases}$ $\quad avremo \quad X_k = 6\frac{sin\left(\frac{\pi}{6}k\right)}{\pi k}$

$$X_0 = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T}{2}} A\ dt = \frac{T}{T_0}A = 1$$

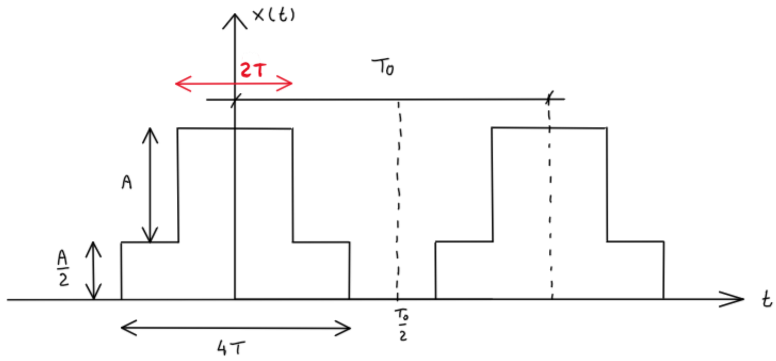
Otteniamo dunque tramite GnuRadio il segnale



Tramite la somma di un segnale costante di ampiezza 1 e fase π e k armoniche con $k = 20$ meno il segnale costante di ampiezza $\frac{A}{2} = 3$



Segnale *Treno di impulsi poligonale*



Per analizzare il segnale prendiamo in riferimento un impulso centrato in 0: $x'(t)$

Esso è definito dalla somma di due impulsi: il primo di durata 4T ed ampiezza $\frac{A}{2}$, il secondo di durata 2T ed ampiezza A; se sommati i due impulsi formeranno il segnale di cui sopra.

$$x'(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}A & se|t| \leq T \\ \frac{A}{2} & se\ t \in [T, 2T] \cup [-2T, -T] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Possiamo definire quindi $x(t)$ come

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\pi\left(\frac{t-nT_0}{2T}\right) + \frac{A}{2}\pi\left(\frac{t-nT_0}{4T}\right)$$

Assegnato $T_0 = 6T \rightarrow \frac{T}{T_0} = \frac{1}{6}$ ed $A = 6\ V$, essendo il segnale pari calcoliamo i coefficienti di Fourier secondo la formula:

$$X_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot cos(2\pi k f_0 t)\ dt$$

$$= \frac{2}{T_0}\left[\int_0^T \frac{3}{2}A \cdot cos(2\pi k f_0 t)dt + \int_T^{2T} \frac{A}{2} \cdot cos(2\pi k f_0 t)dt\right]$$

$$= \frac{2}{T_0}\frac{3}{2}A\left[\frac{sin(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0}\right]_0^{T} + \frac{2}{T_0}\frac{A}{2}\left[\frac{sin(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0}\right]_T^{2T}$$

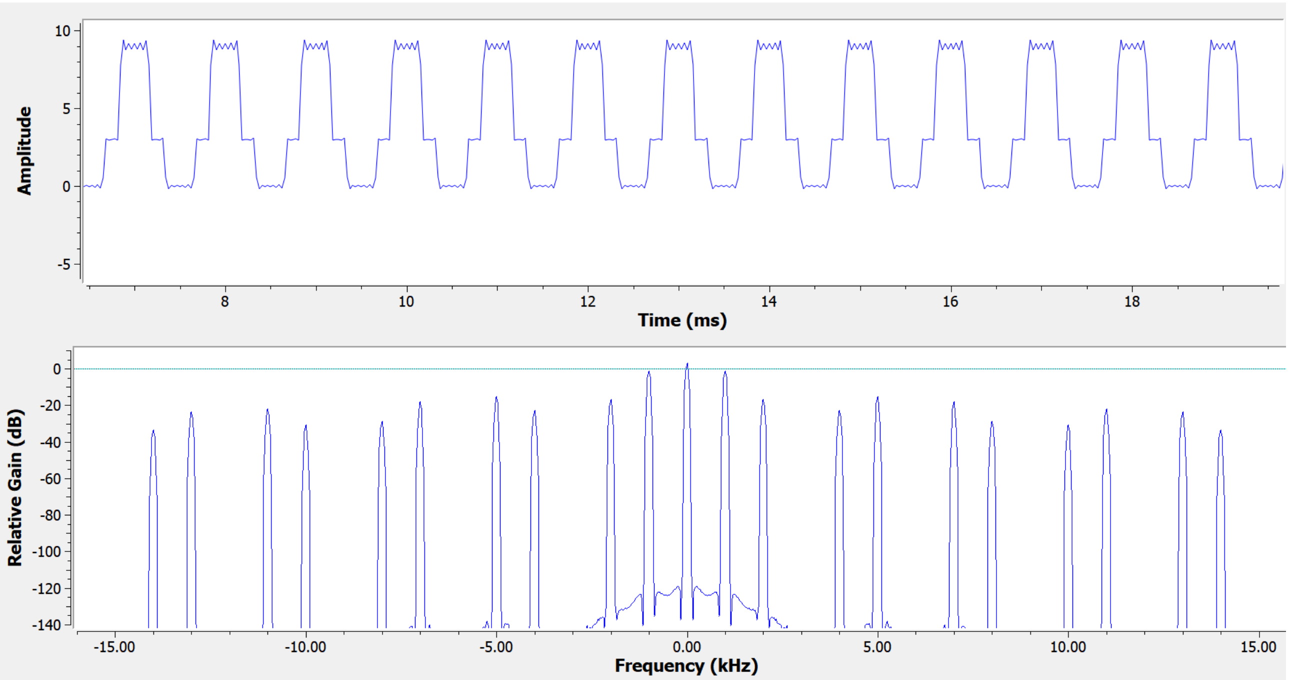
$$= A\frac{\sin\left(2\pi k\frac{T}{T_0}\right)}{\pi k} + A\frac{\sin\left(4\pi k\frac{T}{T_0}\right)}{2\pi k}$$

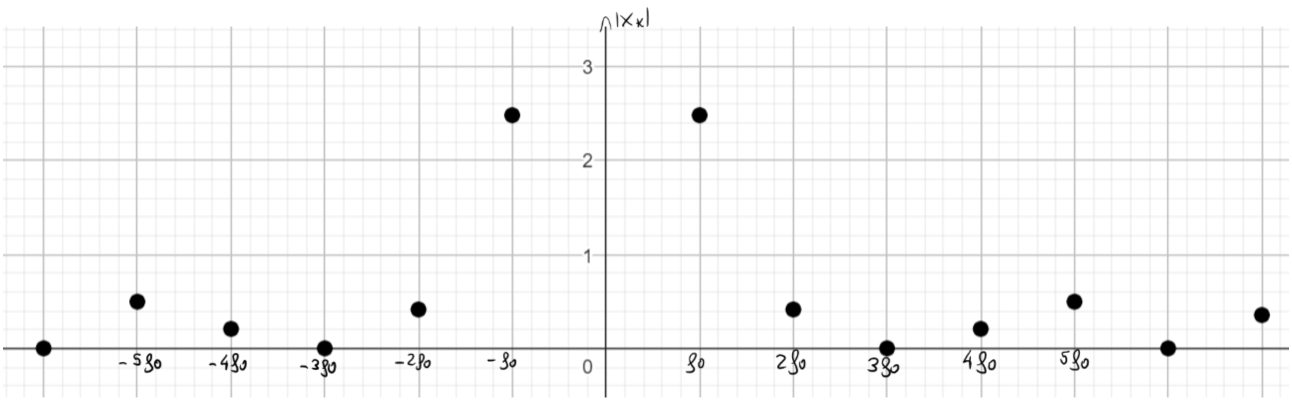
$$= 6\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}k\right)}{\pi k} + 6\frac{\sin\left(\frac{2}{3}\pi k\right)}{2\pi k}$$

Calcoliamo X_0 dall' integrale

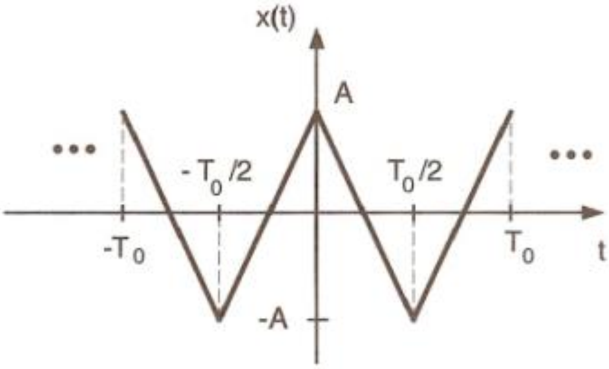
$$X_0 = \frac{2}{T_0}\left[\int_0^T \frac{3}{2}A\,dt + \int_T^{2T}\frac{A}{2}\,dt\right] = \frac{2}{T_0}\frac{3}{2}AT + \frac{2}{T_0}\frac{A}{2}(2T - T) = 4$$

Otteniamo così, sommando 9 armoniche, fino a $k = 14$ il segnale risultante:





Segnale *Onda triangolare*



Per definire il segnale pari e alternativo prendiamo in riferimento il segnale nel semiperiodo positivo $\frac{T_0}{2}$.

Troviamo dunque una retta che va dal punto $(0, A)$ al punto $\left(\frac{T_0}{2}, -A\right)$, calcolata la retta passante per i due punti $x(t) = A - \frac{4At}{T_0}$ ricaviamo dalla formula semplificata per i segnali pari i coefficienti di Fourier X_k

$$X_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, cos(2\pi k f_0 t)\, dt$$

$$= \frac{2A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} cos(2\pi k f_0 t)\, dt + \frac{8A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} \frac{t}{T_0} cos(2\pi k f_0 t)\, dt.$$

$$\int_0^{\frac{T_0}{2}} cos(2\pi k f_0 t) dt = \frac{sin(\pi k)}{2\pi k f_0} = 0$$

$$\int_0^{\frac{T_0}{2}} \overset{f}{\frac{t}{T_0}}\, \overset{g'}{\cos(2\pi k f_0 t)}\, dt \qquad \int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

$$= \left[\frac{t}{T_0}\,\frac{\sin(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0}\right]_0^{\frac{T_0}{2}} - \int_0^{\frac{T_0}{2}} \frac{1}{T_0}\,\frac{\sin(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0}\, dt = \left[t\,\frac{\sin(2\pi k f_0 t)}{2\pi k}\right]_0^{\frac{T_0}{2}} - \frac{1}{2\pi k}\left[\frac{\cos(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0}\right]_0^{\frac{T_0}{2}}$$

$$= \left[\frac{T_0}{2}\,\frac{1}{2\pi k}\,\overset{=0}{\sin\left(2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}\right)} - 0 \cdot \frac{\sin(0)}{2\pi k}\right] - \left[\frac{1}{4\pi^2 k^2 f_0}\cos\left(2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}\right) - \frac{1}{4\pi^2 k^2 f_0}\cos(0)\right]$$

$$= 0 - \frac{\cos(\pi k)\, T_0}{4\pi^2 k^2} + \frac{T_0}{4\pi^2 k^2} = \frac{T_0}{4\pi^2 k^2}\left[1 - \cos(\pi k)\right]$$

Risolti i due integrali ricaviamo X_k

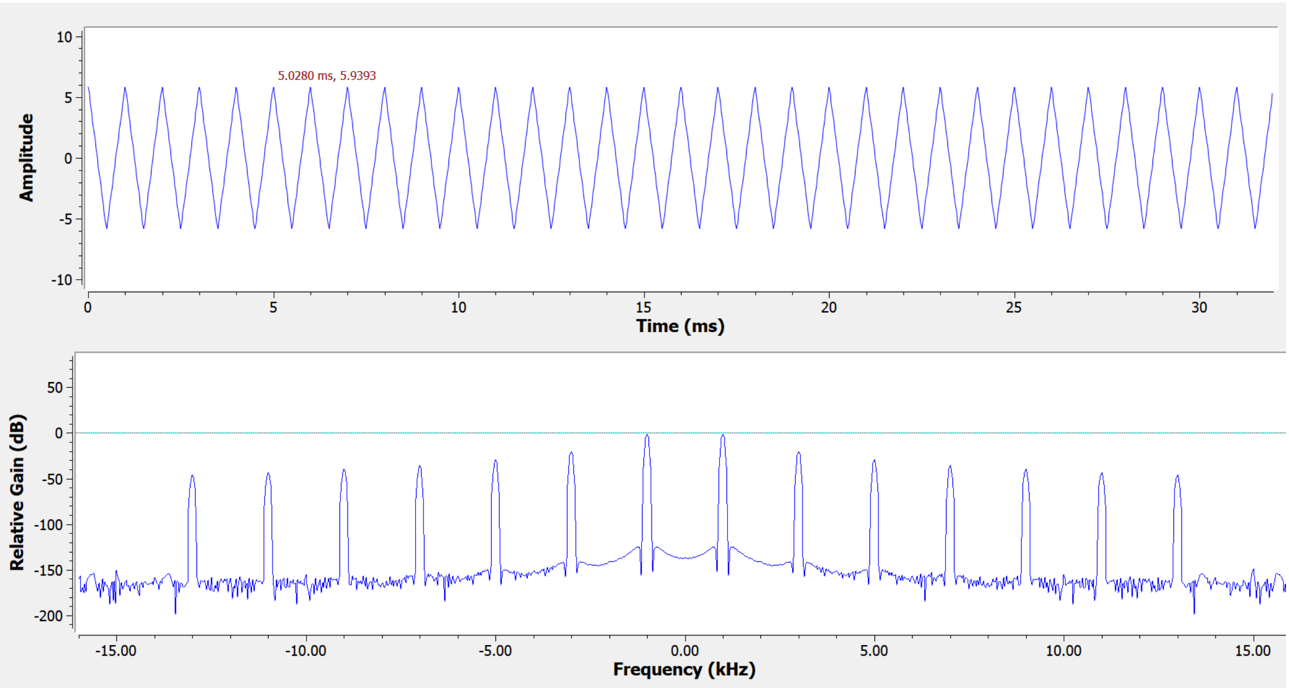
$$X_k = \frac{2A}{T_0} \cdot 0 + \frac{8A}{T_0} \cdot \frac{T_0}{4\pi^2 k^2}[1 - cos(\pi k)]$$
$$= \frac{2A}{\pi^2 k^2}[1 - cos(\pi k)]$$

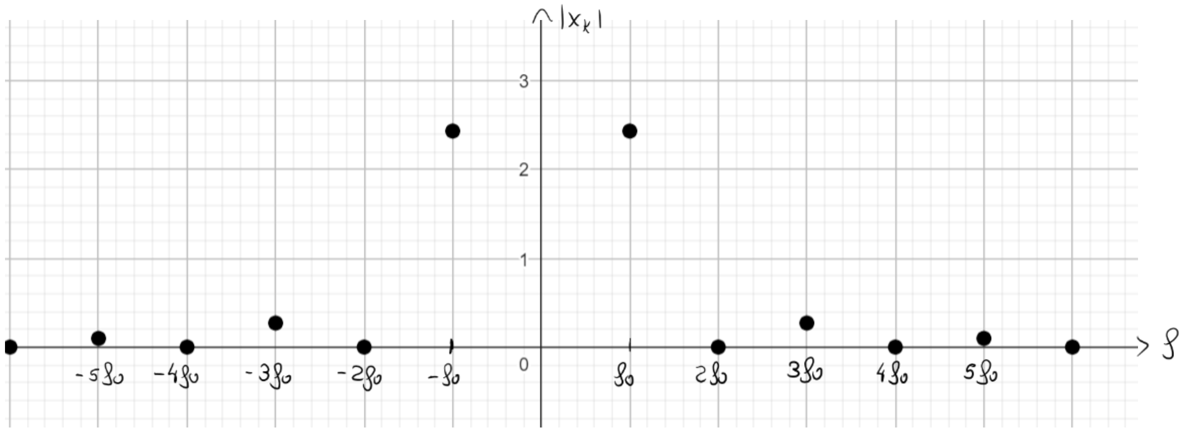
Assegnata l' ampiezza $A = 6$

$$X_k = \frac{12}{\pi^2 k^2}[1 - cos(\pi k)]$$

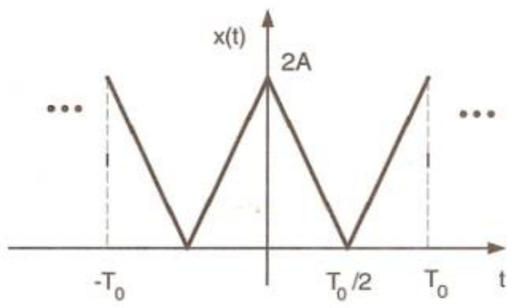
$$X_0 = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} \left(A - \frac{4At}{T_0}\right) dt = \frac{2}{T_0}\left[A[t]_0^{\frac{T_0}{2}} - \frac{4A}{T_0}\frac{1}{2}[t^2]_0^{\frac{T_0}{2}}\right] = A - A = 0$$

Otteniamo il segnale, tramite la somma di 12 armoniche, fino a $k = 25$:





Segnale *Onda Triangolare positiva*



Ricaviamo x(t) nel semiperiodo positivo $\frac{T_0}{2}$ tramite retta passante per due punti:

$$\frac{t}{\frac{T_0}{2}} = \frac{x(t) - 2A}{-2A} \rightarrow x(t) = 2A\left(1 - \frac{2t}{T_0}\right)$$

Dalla formula semplificata per i coefficienti di Fourier, essendo il segnale pari ed alternativo, ricaviamo

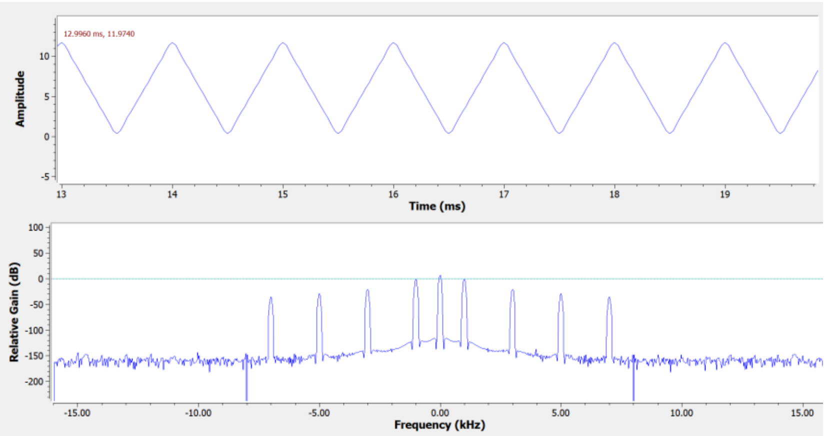
$$X_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, cos(2\pi k f_0 t)\, dt$$

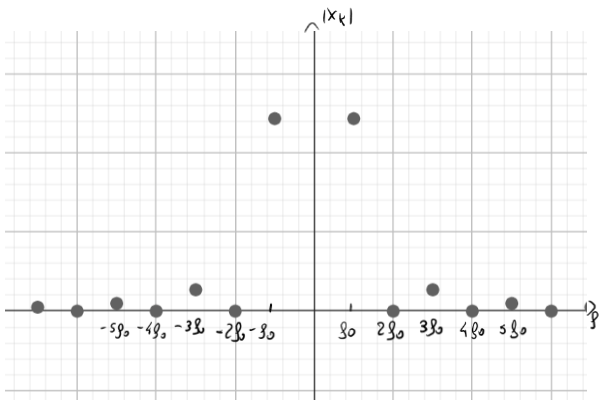
Sostituendo x(t) con gli stessi calcolati del caso precedente otteniamo:

$$X_k = \frac{2A}{\pi^2 k^2}[1 - cos(\pi k)]$$

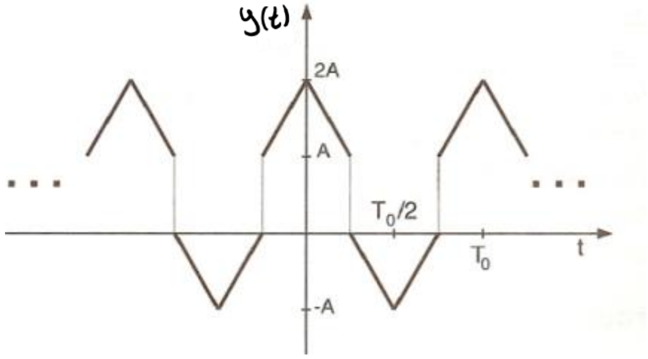
$$X_0 = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} 2A dt - \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} \frac{4At}{T_0} dt = A$$

Assegnata l' ampiezza $A = 6$ otteniamo sommando 4 armoniche con k fino a 7

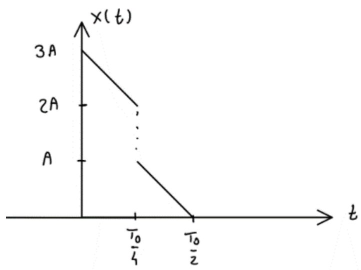




Segnale *Onda triangolare positiva-negativa*



Possiamo decomporre il segnale nel semiperiodo $\frac{T_0}{2}$ come segnale triangolare fra 3A e 2A e fra A e 0. Rifacendoci allo stesso ragionamento per il segnale dell' onda quadra, sommando un segnale costante di ampiezza A, otteniamo:



La retta passante per i punti $(0,3A)$ e $\left(\frac{T_0}{4}, 2A\right)$ è $x(t) = A\left(3 - \frac{4t}{T_0}\right)$

La retta passante per i punti $\left(\frac{T_0}{4}, A\right)$ e $\left(\frac{T_0}{2}, 0\right)$ è $x(t) = A\left(2 - \frac{4t}{T_0}\right)$

Applichiamo la formula per i coefficienti di Fourier semplificata per i segnali pari e troviamo:

$$X_k = \frac{2}{T_0}\left[\int_0^{\frac{T_0}{4}} A\left(3-\frac{4t}{T_0}\right)\cos(2\pi k f_0 t)\,dt + \int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}} A\left(2-\frac{4t}{T_0}\right)\cos(2\pi k f_0 t)\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{T_0}\left[3A\int_0^{\frac{T_0}{4}}\cos(2\pi k f_0 t)\,dt - 4A\int_0^{\frac{T_0}{4}}\frac{t}{T_0}\cos(2\pi k f_0 t)\,dt + 2A\int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}}\cos(2\pi k f_0 t)\,dt - 4A\int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}}\frac{t}{T_0}\cos(2\pi k f_0 t)\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{T_0}\left\{3A\,\frac{\sin\left(2\pi k \frac{1}{T_0}\frac{T_0}{4}\right)}{2\pi k f_0} - 4A\left[t\,\frac{\sin(2\pi k f_0 t)}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi k}\,\frac{\cos(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0}\right]_0^{\frac{T_0}{4}} + 2A\left[\frac{\sin(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0}\right]_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}} - 4A\left[t\,\frac{\sin(2\pi k f_0 t)}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi k}\,\frac{\cos(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0}\right]_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}}\right\}$$

$$= \frac{2}{T_0}\left\{3A\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{2\pi k f_0} - 4A\left(\frac{T_0}{4}\,\frac{\sin\left(2\pi k\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{4}\right)}{2\pi k} + \frac{T_0}{2\pi k}\,\frac{\cos\left(2\pi k\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{4}\right)}{2\pi k} - \frac{T_0}{4\pi^2 k^2}\right) + 2A\left(\frac{\sin\left(2\pi k\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{2}\right)}{2\pi k f_0} - \frac{\sin\left(2\pi k\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{4}\right)}{2\pi k f_0}\right) - 4A\left(\frac{T_0}{2}\,\frac{\sin\left(2\pi k\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{2}\right)}{2\pi k} + \frac{T_0}{2\pi k}\,\frac{\cos\left(2\pi k\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{2}\right)}{2\pi k} - \frac{T_0}{4}\,\frac{\sin\left(2\pi k\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{4}\right)}{2\pi k} - \frac{T_0}{2\pi k}\,\frac{\cos\left(2\pi k\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{4}\right)}{2\pi k}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{T_0}\left\{3A\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{2\pi k f_0} - AT_0\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{2\pi k} - \frac{AT_0\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi^2 k^2} + \frac{AT_0}{\pi^2 k^2} + A\,\frac{\sin(\pi k)}{\pi k f_0} - \frac{A\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi k f_0} - AT_0\,\frac{\sin(\pi k)}{\pi k} - \frac{AT_0}{\pi k}\,\frac{\cos(\pi k)}{\pi k} + AT_0\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{2\pi k} + \frac{AT_0}{\pi k}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi k}\right\}$$

$$= \frac{3A\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi k} - \frac{A\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi k} - \frac{2A\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi^2 k^2} + \frac{2A}{\pi^2 k^2} + \frac{2A\sin(\pi k)}{\pi k} - \frac{2A\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi k} - \frac{2A\sin(\pi k)}{\pi k} - \frac{2A\cos(\pi k)}{\pi^2 k^2} + \frac{A\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi k} + \frac{2A\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi^2 k^2} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi k}\left(3A - A - 2A + A\right) - \frac{2A\cos(\pi k)}{\pi^2 k^2} + \frac{2A}{\pi^2 k^2}$$

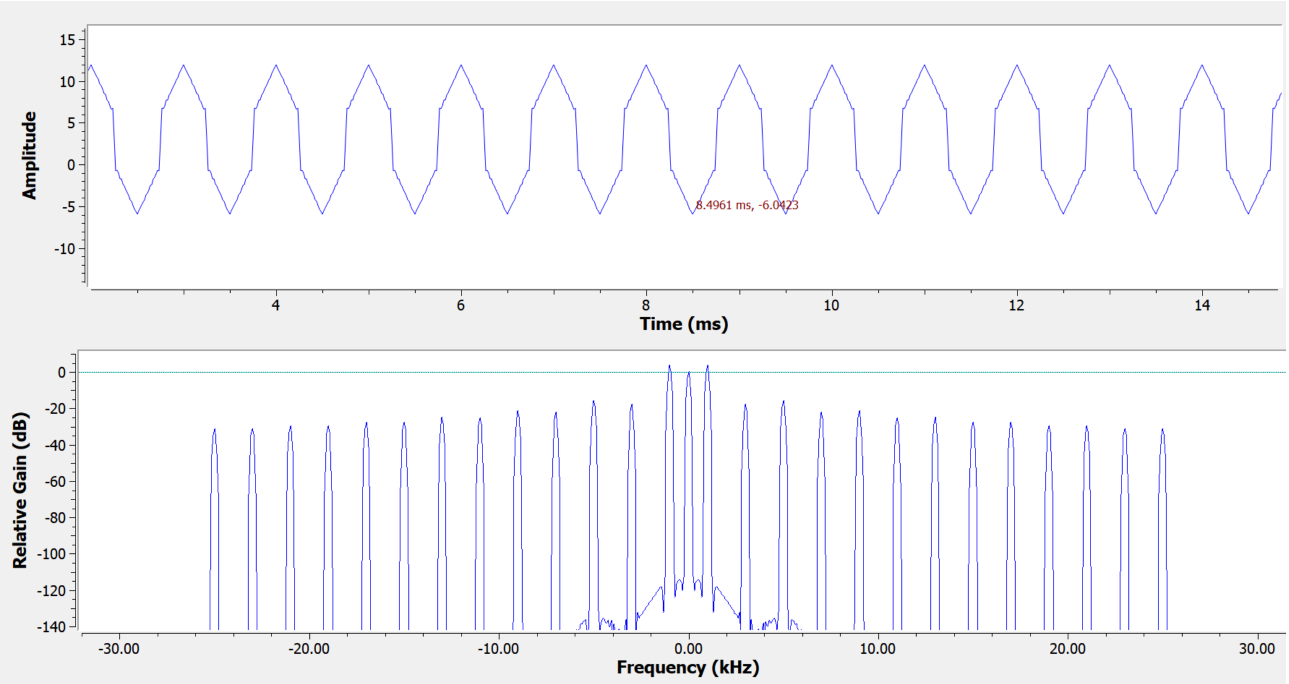
$$= \frac{A\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi k} - \frac{2A\cos(\pi k)}{\pi^2 k^2} + \frac{2A}{\pi^2 k^2}$$

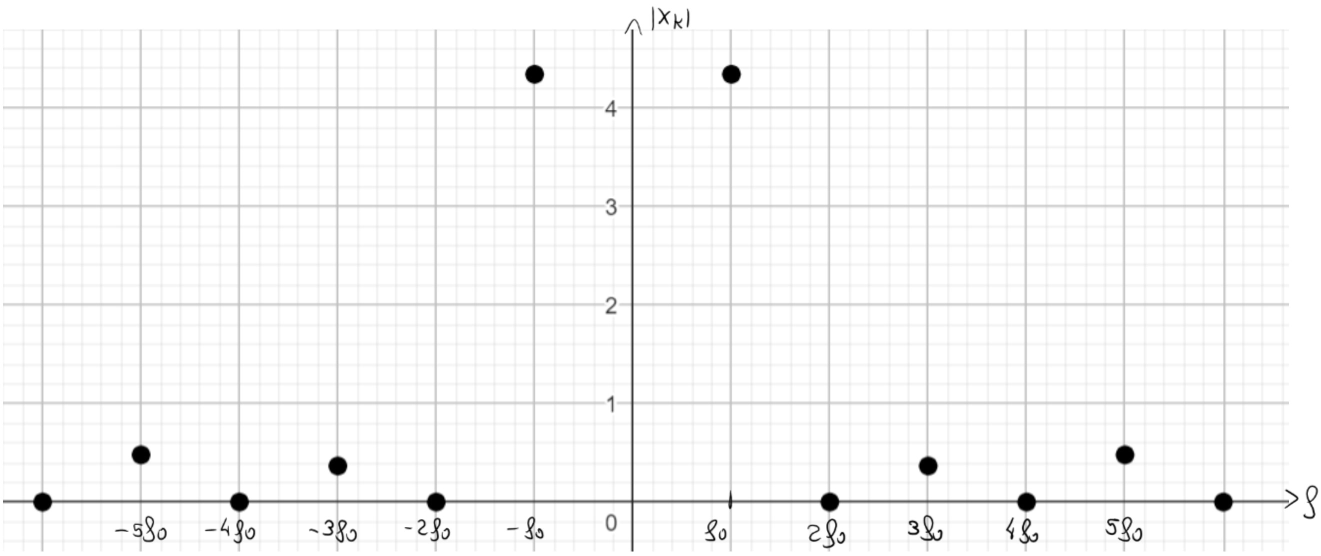
Per trovare quindi la funzione y(t) calcoliamo le $Y_k = X_k$ e $Y_0 = X_0 - A = -\frac{1}{2}A$

E ricaviamo il segnale, con $A = 6$, sommando 12 armoniche con k fino a 25

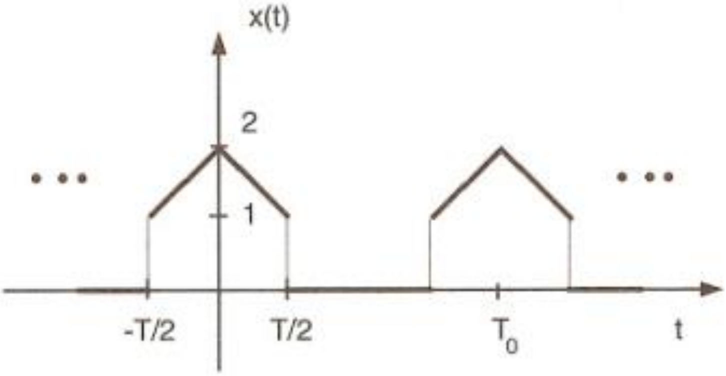
$$X_k = 6\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi k} - \frac{2 \cdot 6 \cdot cos(\pi k)}{\pi^2 k^2} + \frac{2 \cdot 6}{\pi^2 k^2}$$

$$X_0 = -3$$





Segnale *Onda triangolare 4*



Trasformiamo il segnale pari in serie di Fourier tramite la formula semplificata per i segnali pari e troviamo:

$$X_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) cos(2\pi k f_0 t)\, dt$$

$x(t)$ fra 0 e $\frac{T}{2}$ varrà la retta passante fra i punti $(0{,}2)$ e $\left(\frac{T}{2}, 1\right) \rightarrow x(t) = 2 - \frac{2t}{T}$

$$X_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T}{2}} 2 \cos(2\pi k f_0 t)\, dt - \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2t}{T} \cos(2\pi k f_0 t)\, dt$$

$$= \frac{4}{T_0}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi k f_0 t)\, dt - \frac{4}{T_0}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{t}{T} \cos(2\pi k f_0 t)\, dt$$

$$= \frac{4}{T_0}\left[\frac{\sin(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{4}{T_0}\left\{\left[\frac{t}{T}\frac{\sin(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T}\frac{\sin(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0}\, dt\right\}$$

$$= \frac{2\sin\left(\pi k \frac{T}{T_0}\right)}{\pi k} - 0 - \frac{4}{T_0}\left[\frac{T}{2}\frac{1}{T}\frac{\sin\left(\pi k \frac{T}{T_0}\right)}{2\pi k} T_0 - 0\right] - \frac{4}{T_0}\frac{1}{T 2\pi k f_0}\left[\frac{\cos(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0}\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\left(\pi k \frac{T}{T_0}\right)}{\pi k} - \frac{\sin\left(\pi k \frac{T}{T_0}\right)}{\pi k} - \frac{2}{\pi k T}\left(\frac{\cos\left(\pi k \frac{T}{T_0}\right)}{2\pi k f_0} - \frac{T_0}{2\pi k}\right)$$

$$= \frac{\sin\left(\pi k \frac{T}{T_0}\right)}{\pi k} - \frac{T_0}{T}\frac{\cos\left(\pi k \frac{T}{T_0}\right)}{\pi^2 k^2} + \frac{T_0}{T}\frac{1}{\pi^2 k^2}$$

Assegnato $\frac{T}{T_0} = \frac{1}{2}$

$$X_k = \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi k} - 2\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi^2 k^2} + \frac{2}{\pi^2 k^2}$$

$$X_0 = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(2-\frac{2t}{T}\right)dt = \frac{2}{T_0}\,2\left[t\right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T_0}\frac{2}{T}\frac{1}{2}\left[t^2\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{4}{T_0}\frac{T}{2} - 2\frac{1}{T\,T_0}\frac{T^2}{4} = 2\frac{T}{T_0} - \frac{1}{2}\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Otteniamo infine sommando 18 armoniche con k fino a 25: