Primer Parcial Matemáticas III

Mario López Sáez

Noviembre de 2020

Problema I.

Se consideran tres números reales A, B y C y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} A, & x = -3 \\ 0, & -3 < x < 0 \\ B, & x = 0 \\ 8x, & 0 < x < 3 \\ C, & x = 3 \end{cases} \quad , \quad f(x+6) = f(x) \text{ en el resto.}$$

a) (2.5p) Calcular los coeficientes de la serie de Fourier de f y escribir dicha serie.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx, \ n = 0, 1, 2, ...$$

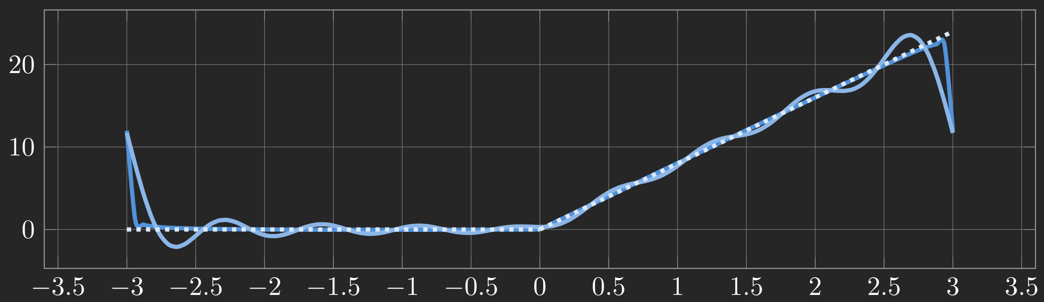
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx, \ n = 1, 2, ...$$

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} 8x\ dx = \frac{1}{3}\frac{8\cdot 3^2}{2} = 12$$

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos(\frac{n\pi}{3}x)dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} 8x\cdot\cos(\frac{n\pi}{3}x)dx = \frac{24\cdot[\cos(n\pi)-1]}{n^2\pi^2} = \frac{24\cdot[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} 8x\sin(\frac{n\pi}{3}x)dx = \left.\frac{-8x\cdot\cos(\frac{n\pi}{3}x)}{n\pi}\right|_0^3 = \frac{24(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$f(x) \approx 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24\cdot[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) + \frac{24(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$



b) (1p) Encontrar los valores de A, B y C para que la serie de Fourier de f converja puntualmente a f(x) para todo $x \in \mathbb{R}$. Justificar todas las afirmaciones.