

0.1. Ecuación de la onda armónica

Para llegar a la ecuación ?? tenemos que primero encontrar la ecuación del punto $x = 0$. Como es la ecuación de un MAS, es

$$y(0, t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

donde A , ω y φ_0 son, respectivamente, la amplitud, la frecuencia angular y el desfase del MAS en $x = 0$ y, por tanto, la amplitud, la frecuencia angular y el desfase de la onda.

Ahora, introducimos la variable x en la ecuación. Por ahora vamos a suponer que la onda se propaga en el sentido positivo. Como sabemos que la velocidad viene dada por

$$v = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}},$$

tenemos que la onda tarda

$$\frac{x}{v}$$

en recorrer el espacio entre el origen y un punto a distancia x . Por tanto, tenemos que

$$y(0, t) = y\left(x, t + \frac{x}{v}\right).$$

Poniendo esto en la ecuación nos queda

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y\left(0, t - \frac{x}{v}\right) \\ &= A \operatorname{sen}\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right) \\ &= A \operatorname{sen}(\omega(tv - x) + \varphi_0) \\ &= A \operatorname{sen}(\omega t - x + \varphi_0) \end{aligned}$$

0.2. Convergencia de la serie de Fourier

En esta sección derivamos la expresión de los coeficientes de la serie de Fourier. Suponemos que el periodo de f es 2π .

Empezamos con la siguiente igualdad:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)). \quad (1)$$

Nos gustaría conseguir aislar un solo coeficiente, para eso usamos las fórmulas de ortogonalidad del seno y el coseno.

Lema (Fórmulas de ortogonalidad del seno y coseno). Para números enteros $n, m \geq 0$ se cumple que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx) \, dx &= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) \, dx &= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \neq 0 \\ 2\pi & n = m = 0 \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx) \cos(mx) \, dx &= 0 \quad \forall n, m. \end{aligned}$$

Demostración. Recordemos primero las siguientes identidades (fórmulas producto-suma):

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y &= \cos(x - y) - \cos(x + y) \\ 2 \cos x \cos y &= \cos(x - y) + \cos(x + y) \\ 2 \operatorname{sen} x \cos y &= \operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y). \end{aligned}$$

Empezamos con la primera de las anteriores igualdades

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx) \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((n - m)x) + \cos((n + m)x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} \cos((n - m)x) \, dx + \int_0^{2\pi} \cos((n + m)x) \, dx \right] \quad (2) \end{aligned}$$

Por un momento, supongamos que $n \neq m$.

Es fácil ver que para cualquier $n \neq 0$ se cumple que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx) \, dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx) \, dx = 0.$$

Esto se puede ver visualmente en la figura 1: las áreas naranjas y las verdes se cancelan. Lo mismo pasa con el coseno, solo que con cierto desfase.

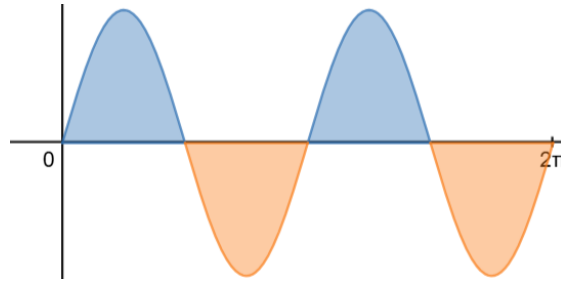


Figura 1: Integral entre 0 y 2π de $\operatorname{sen}(2x)$. Elaboración propia.

En el caso $n \neq m$, queda claro que la integral es 0. En el caso $n = m$ nos queda que es 1.

Se pueden demostrar las otras dos relaciones de ortogonalidad de manera similar. ■

Ahora, fijamos $k \geq 0$ y multiplicamos ambos lados de la ecuación 1 por $\cos(kx)$ e integramos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx &= a_k \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx. \end{aligned}$$

Multiplicando por $\operatorname{sen}(kx)$ e integrando nos queda que

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx.$$

Por último, si el periodo no es 2π , definimos una nueva función

$$f_0(x) = f\left(\frac{2\pi}{P}x\right).$$

Podemos hacer la serie de Fourier de esta nueva función, y es fácil comprobar que al volver a la función inicial, los coeficientes serían

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{P}x\right) dx, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{P}x\right) dx, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

0.3. Equivalencia de la forma compleja de la serie de Fourier

Para demostrar que la forma compleja y la trigonométrica de la serie de Fourier son equivalentes, nos basamos en la fórmula de Euler, presentamos sin demostración:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

para cualquier número real x .

Suponemos otra vez que $P = 2\pi$, por comodidad. Recordemos la definición de los coeficientes complejos de Fourier c_n :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad \text{para } n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

La clave está en que $c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$: