## 0.1. Ecuación de la onda armónica

Para llegar a la ecuación **??** tenemos que primero encontrar la ecuación del punto $x = 0$. Como es la ecuación de un MAS, es

$$y(0, t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

donde $A$, $\omega$ y $\varphi_0$ son, respectivamente, la amplitud, la frecuencia angular y el desfase del MAS en $x = 0$ y, por tanto, la amplitud, la frecuencia angular y el desfase de la onda.

Ahora, introducimos la variable $x$ en la ecuación. Por ahora vamos a suponer que la onda se propaga en el sentido positivo. Como sabemos que la velocidad viene dada por

$$v = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}},$$

tenemos que la onda tarda

$$\frac{x}{v}$$

en recorrer el espacio entre el origen y un punto a distancia $x$. Por tanto, tenemos que

$$y(0, t) = y\left(x, t + \frac{x}{v}\right).$$

Poniendo esto en la ecuación nos queda

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y\left(0, t - \frac{x}{v}\right) \\ &= A \operatorname{sen}\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right) \\ &= A \operatorname{sen}\left(\omega(tv - x) + \varphi_0\right) \\ &= A \operatorname{sen}\left(\omega t - x + \varphi_0\right) \end{aligned}$$

## 0.2. Convergencia de la serie de Fourier

En esta sección derivamos la expresión de los coeficientes de la serie de Fourier. Suponemos que el periodo de $f$ es $2\pi$.

Empezamos con la siguiente igualdad:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right). \tag{1}$$

Nos gustaría conseguir aislar un solo coeficiente, para eso usamos las fórmulas de ortogonalidad del seno y el coseno.

**Lema** (Fórmulas de ortogonalidad del seno y coseno)**.** Para números enteros $n$, $m \geq 0$ se cumple que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \neq 0 \\ 2\pi & n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx) \cos(mx)\, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, n, m.$$

*Demostración.* Recordemos primero las siguientes identidades (fórmulas producto-suma):

$$
\begin{aligned}
2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\
2 \cos x \cos y &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \\
2 \operatorname{sen} x \cos y &= \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y).
\end{aligned}
$$

Empezamos con la primera de las anteriores igualdades

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\left((n-m)x\right) + \cos\left((n+m)x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{2\pi} \cos((n-m)x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} \cos((n+m)x)\,\mathrm{d}x\right] \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Por un momento, supongamos que $n \neq m$.

Es fácil ver que para cualquier $n \neq 0$ se cumple que

$$
\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0.
$$

Esto se puede ver visualmente en la figura 1: las áreas naranjas y las verdes se cancelan. Lo mismo pasa con el coseno, solo que con cierto desfase.

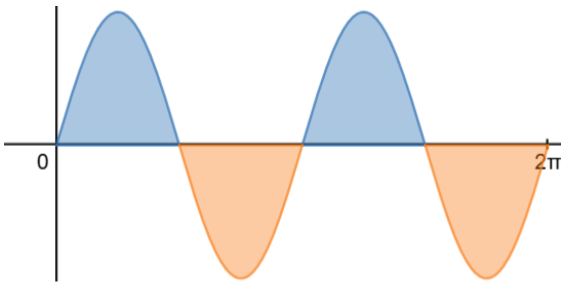


Figura 1: Integral entre 0 y $2\pi$ de $\operatorname{sen}(2x)$. Elaboración propia.

En el caso $n \neq m$, queda claro que la integral es 0. En el caso $n = m$ nos queda que es 1.

Se pueden demostrar las otras dos relaciones de ortogonalidad de manera similar. ■

Ahora, fijamos $k \geq 0$ y multiplicamos ambos lados de la ecuación 1 por $\cos(kx)$ e integramos:

$$
\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = a_k\pi
$$

$$
a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x.
$$

Multiplicando por $\operatorname{sen}(kx)$ e integrando nos queda que

$$
b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,\mathrm{d}x.
$$

Por último, si el periodo no es $2\pi$, definimos una nueva función

$$
f_0(x) = f\left(\frac{2\pi}{P}x\right).
$$

Podemos hacer la serie de Fourier de esta nueva función, y es fácil comprobar que al volver a la función inicial, los coeficientes serían

$$a_n = \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{P}x\right)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n}{P}x\right)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

## 0.3. Equivalencia de la forma compleja de la serie de Fourier

Para demostrar que la forma compleja y la trigonométrica de la serie de Fourier son equivalentes, nos basamos en la fórmula de Euler, presentamos sin demostración:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$$

para cualquier número real $x$.

Suponemos otra vez que $P = 2\pi$, por comodidad. Recordemos la definición de los coeficientes complejos de Fourier $c_n$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{para } n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

La clave está en que $c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} = a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)$: