

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра общей физики

СБОРНИК
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ
ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ
КВАНТОВАЯ МИКРО-
И МАКРОФИЗИКА

© МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
МОСКВА 2003
© Учебно-методическое издание
© Учебно-методическое издание

УДК 537

Составители: Раевский А.О., Ципенюк Ю.М.

Сборник экзаменационных задач по курсу
Общей физики. Квантовая микро- и макрофизика /
Сост. А.О. Раевский, Ю.М. Ципенюк. — М.: МФТИ,
2003. — 35 с.

Сборник содержит варианты экзаменационных контрольных работ по курсу Общей физики для пятого и шестого семестра за 2001–2002 годы.

Задачи по материалу пятого семестра посвящены вопросам физики атома, ядра и элементарных частиц. Письменные контрольные работы шестого семестра являются частью Государственного экзамена по всему курсу Общей физики и поэтому, кроме задач по квантовой макрофизике, содержат и задачи по другим разделам. К большинству задач приведены подробные решения.

В условиях и решениях задач исправлены замеченные неточности и опечатки. Информация об оставшихся и внесенных неточностях с благодарностью будет принята на feedback@study.com.ru.

© Московский физико-технический институт
(государственный университет), 2003

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Осенний семестр 2001 года. Вариант А

1А. Длина волны, соответствующая переходу между двумя соседними состояниями вращательного спектра молекулы HBr, равна $\lambda = 202$ мкм. Определите вращательные квантовые числа состояний, между которыми происходит переход. Межъядерное расстояние $d = 1,41$ Å.

2А. Возбужденное ядро с $A = 100$ движется с кинетической энергией $T = 100$ эВ и испускает гамма-квант с энергией $E = 1$ МэВ. Под каким углом к направлению движения ядра сдвиг γ -кванта по энергии будет равен нулю?

3А. Сечение деления ядер ^{238}U γ -квантами с энергией 3 МэВ составляет $\sigma = 0,1$ нбн (10^{-34} см 2). Каков должен быть поток j [1/см 2 с] падающих на мишень γ -квантов, чтобы можно было заметить вынужденное деление в $m = 1$ мг урана на фоне спонтанного деления ($T_{1/2} = 10^{15}$ лет) при продолжительности эксперимента $t_0 = 100$ часов?

4А. Из-за нецентрального характера ядерных сил основное состояние дейтрона представляет собой суперпозицию состояний 3S_1 и 3D_1 . Каков был бы магнитный момент дейтрона, если бы он находился в «чистом» состоянии 3D_1 ? Спиновые g -факторы протона и нейтрона равны соответственно $g_{sp} = 5,58$, $g_{sn} = -3,82$. Разницу масс нуклонов не учитывать. Рассмотреть два случая — LS-связи и jj-связи.

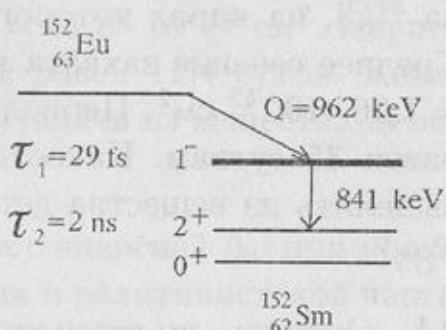
5А. Тяжелая вода D_2O используется для регистрации нейтрино с энергиями, меньшими 15 МэВ, в реакции, обратной K -захвату. Детектор регистрирует образующиеся заряженные лептоны. Какой тип нейтрино регистрируется и какие ядра захватывают нейтрино? Найти пороговую энергию регистрируемых нейтрино. Массы ядер: p — 938,23 МэВ, d — 1875,6 МэВ, ${}^8_8\text{O}$ — 14895 МэВ, ${}^{16}_9\text{F}$ — 14910 МэВ.

Осенний семестр 2001 года. Вариант Б

1Б. Оценить, при какой температуре отношение числа молекул NO, находящихся в чисто вращательных состояниях с квантовыми числами $l_1 = 1$ и $l_2 = 0$, равно $\alpha = 0,1$. Межъядерное расстояние в молекуле NO равно $d = 1,15 \text{ \AA}$.

2Б. В 1998 г. Джоли с сотрудниками был предложен и осуществлен метод измерения уширения γ -линии, обусловленного вылетающим при К-захвате нейтрино. Измерялась ширина линии с энергией $E_\gamma = 841 \text{ кэВ}$, возникающая при переходе $1^- \rightarrow 2^+$ возбужденного ядра $^{152}_{62}\text{Sm}$. Схема распада $^{152}\text{Eu} + e^- \rightarrow ^{152}\text{Sm} + \nu_e$ показана на рисунке.

Каково уширение линии E_γ , возникающее в результате вылета нейтрино движущимся ядром? На сколько смещается линия в результате отдачи излучающего ядра? Оценить вклад в уширение линии, обусловленный временем жизни возбужденных состояний. Q — выделяемая энергия.



3Б. Коллимированный пучок монохроматических нейтронов проходит через пластинку из железа толщиной $d = 5 \text{ мм}$, для которого эффективные сечения поглощения и рассеяния нейтронов данной энергии равны соответственно $\sigma_a = 2,5 \text{ бн}$ и $\sigma_s = 11 \text{ бн}$. Определить относительные доли падающего потока нейтронов, выбывших из пучка в результате поглощения и рассеяния. Плотность железа $\rho = 7,9 \text{ г}/\text{см}^3$.

4Б. В силу нецентрального характера ядерных сил основное состояние дейтрана представляет собой суперпозицию состояний 3S_1 и 3D_1 . Экспериментальное значение магнитного момента основного состояния дейтрана равно $0,86 \mu_{\text{ЯБ}}$. Используя тот факт, что магнитный момент состояния 3D_1 равен $0,31 \mu_{\text{ЯБ}}$, определить вероятность нахождения дейтрана в этом состоянии. Спиновые g -факторы протона и нейтрона равны соответственно $g_{sp} = 5,58$, $g_{sn} = -3,82$.

5Б. Обыкновенная вода H_2O используется для регистрации нейтрино по обратной реакции К-захвата. Регистрируются вторичные заряженные лептоны. Какова пороговая энергия регистрируемых таким детектором нейтрино? При какой энергии нейтрино возможна регистрация как электронных, так и мюонных нейтрино? Массы ядер: ${}^8_{\text{O}} = 14895 \text{ МэВ}$, ${}^9_{\text{F}} = 14910 \text{ МэВ}$.

Осенний семестр 2002 года. Вариант А

1А. По современным расчетам поток высокоэнергетичных солнечных нейтрино на Земле должен быть равен $j = 5,6 \cdot 10^6 \text{ л/(см}^2\text{с)}$. Нейтрино регистрируются детектором, содержащим $M = 615$ тонн перхлорэтилена C_2Cl_4 . В естественной смеси изотопов хлора содержится 25% изотопа ^{37}Cl , на ядрах которого происходит реакция, обратная К-захвату. Среднее сечение захвата ядрами ^{37}Cl таких нейтрино составляет $\sigma = 1,06 \cdot 10^{-42} \text{ см}^2$. Период полураспада $T_{1/2}$ образующегося ядра ^{37}Ar равен 35 суткам. Какое максимальное количество ядер ^{37}Ar можно выделить из вещества детектора после экспозиции в течение времени $T_{1/2}$?

2А. Оценить, во сколько раз сечение поглощения атомом натрия резонансной линии, соответствующей его $(3S - 3P)$ -переходу, отличается от геометрического поперечного сечения атома.

3А. Мюон захватывается ядром свинца $^{208}_{82}\text{Pb}$. Оценить энергию основного состояния мюона.

4А. Нуклон из незаполненной оболочки ядра углерода $^{13}_6\text{C}$, поглощает Е1 фотон и переходит в возбужденное состояние с наименьшей энергией. Найти спин ядра в конечном состоянии и указать его спектроскопическое обозначение.

Указание: Последовательность расположения одонуклонных ядерных уровней:

$$\begin{aligned} N = 0: & (1s_{1/2}); \quad N = 1: (1p_{3/2}, 1p_{1/2}); \quad N = 2: (1d_{5/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}); \\ & N = 3: (1f_{7/2}, \dots). \end{aligned}$$

5А. Одномерный осциллятор находится в состоянии с главным квантовым числом $n = 10$. Оценить, какова вероятность обнаружить частицу вблизи положения равновесия в области размером порядка плюс-минус амплитуда его нулевых колебаний.

Указание: при больших квантовых числах движение частицы можно рассматривать как классическое.

Осенний семестр 2002 года. Вариант Б

1Б. По современным расчетам поток низкоэнергетических солнечных нейтрино на Земле должен быть равен $j = 6,07 \cdot 10^{10} \text{ 1}/(\text{см}^2\text{с})$. Нейтрино регистрируются детектором, содержащим $M = 75,5$ тонн хлорида галлия GaCl_3 . В естественной смеси изотопов галлия содержится 40% изотопа ^{71}Ga , на ядрах которого происходит реакция, обратная К-захвату. Среднее сечение этой реакции составляет $\sigma = 11,8 \cdot 10^{-46} \text{ см}^2$. Период полураспада $T_{1/2}$ образующегося ядра ^{71}Ge равен 11,4 суток. Какое максимальное количество ядер ^{71}Ge можно извлечь из вещества детектора через время экспозиции, равное $T_{1/2}$?

2Б. Рассматривая процесс рождения фотона с энергией $\hbar\omega$ при прохождении в веществе с показателем преломления n релятивистской частицы массы m со скоростью V (эффект Вавилова–Черенкова), показать, что обычно приводимое условие возможности этого процесса $V > v_\phi = c/n$ справедливо только при определенном ограничении на отношение Λ_C/λ (Λ_C – комптоновская длина волны частицы, λ – длина волны фотона). Найти явное выражение этого ограничения в зависимости от γ и n .

3Б. Мюон захватывается ядром свинца $^{208}_{82}\text{Pb}$. Оценить область локализации мюона в основном состоянии.

4Б. Нуклон из незаполненной оболочки ядра кислорода $^{17}_{8}\text{O}$, поглощает $M1$ фотон и переходит в возбужденное состояние с наименьшей энергией. Найти спин ядра в конечном состоянии и указать его спектроскопическое обозначение.

Указание: Последовательность расположения однонуклонных ядерных уровней:

$$\begin{aligned} N = 0: (1s_{1/2}); \quad N = 1: (1p_{3/2}, 1p_{1/2}); \quad N = 2: (1d_{5/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}); \\ N = 3: (1f_{7/2}, \dots). \end{aligned}$$

5Б. Одномерный осциллятор находится в основном состоянии. Оценить вероятность нахождения частицы в классически разрешенной области. Волновая функция основного состояния $\psi = A \exp(-x^2/2a_0^2)$, где $a_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$.

Указание: для оценки получающегося интеграла использовать разложение подынтегральной функции в ряд.

ГОС-2001. Вариант А

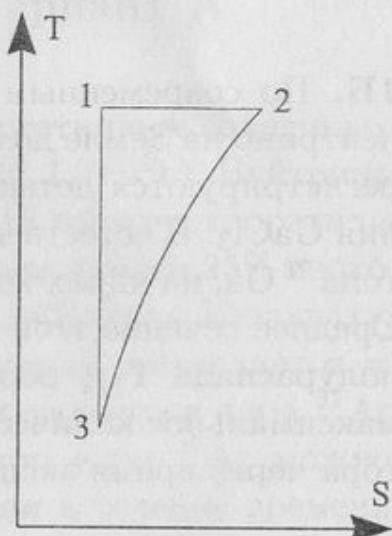
1А. Измерение теплоемкости серебра осуществляется путем проведения показанного на рисунке термодинамического цикла. Какова величина удельной теплоемкости при температуре $T_0 = 15$ К, если к образцу массой $m = 0,1$ г на изотермическом участке подводится тепловая энергия $Q_{12} = 4,75$ мДж, $T_1 = 24$ К, а температура в конце второго участка $T_3 = 11$ К?

2А. Полый резонатор электромагнитных волн изготовлен из меди и имеет форму куба со стороной $a = 1$ см. Оценить, на каких частотах пропадут его резонансные свойства, т. е. в спектре колебаний уже нельзя будет различить отдельные пики. Добротность резонатора $Q = a/2l_{\text{ск}}$, где $l_{\text{ск}}$ — склоновая глубина проникновения. Проводимость меди во всем диапазоне частот считать постоянной и равной $\sigma = 5 \cdot 10^{17}$ с⁻¹.

3А. В магнитных компьютерных дисках запись информации происходит за счет намагничивания мелких ферромагнитных частиц. Для поворота вектора магнитного момента такой частицы необходимо преодолеть энергетический барьер $\simeq KV$, где $K = 10^7$ эрг/см³ — постоянная анизотропии, V — объем частицы. Оценить предельное значение поверхностной плотности записи информации (в бит/см²), которое ограничивается тепловыми флуктуациями ориентации магнитного момента.

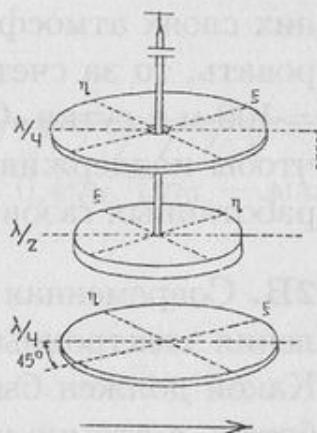
4А. Согласно А.Ф. Иоффе и А.Р. Регелю (1960 г.) кристалл сохраняет металлические свойства до тех пор, пока длина свободного пробега электронов превышает их дебройлевскую длину волны. Исходя из этого, оценить максимальную величину сопротивления разупорядоченного металла (в Омах). Эффективную массу электрона считать равной массе свободного электрона, плотность электронов $n = 10^{22}$ см⁻³.

5А. Для получения свободных молекул при низкой температуре широко применяется их охлаждение при адиабатическом истечении газа через небольшое отверстие в вакуум. Оценить конечную температуру струи молекулярного водорода, если газ первоначально находился при нормальных условиях. Диаметр отверстия $d = 0,3$ мм, сечение столкновения молекул водорода друг с другом $\sigma = 2,4 \cdot 10^{-15}$ см². Для оценки принять, что на расстоянии x от отверстия диаметр струи $d \sim x$, скорость струи считать постоянной.



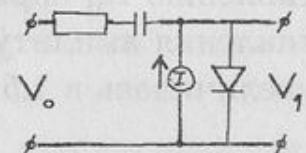
ГОС-2001. Вариант Б

1Б. В опытах Р. Бета (R. Beth, 1936) впервые был измерен угловой момент фотона. В этих экспериментах (см. рис.) поляризованный свет, направление поляризации которого показано стрелкой, интенсивностью $I_0 = 1 \text{ Вт}/\text{см}^2$ и длиной волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ проходил через пластинку $\lambda/4$, затем через подвешенную на торсионном маятнике пластинку $\lambda/2$, у которой оси повернуты на 90° , попадал на пластинку $\lambda/4$ с посеребренным верхом, отражался и проходил в обратном направлении. Какой вращательный момент передавался пластинке $\lambda/2$ площадью $S = 5 \text{ см}^2$? Поглощением света пренебречь.



2Б. Полупроводниковый лазер на длину волны $\lambda = 1 \text{ мкм}$ представляет собой кристалл полупроводника, на грани которого нанесены зеркала, образующие резонатор Фабри-Перо. Определить расстояние между модами колебаний лазера $\Delta\lambda$. Длина резонатора $L = 6 \cdot 10^{-2} \text{ см}$, показатель преломления полупроводника в рабочей области длин волн $n = 3,1$, а дисперсия $dn/d\lambda = -1,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$.

3Б. Полупроводниковый диод используется в качестве переменного резистора в аттенюаторе. Смещение на диоде задается источником постоянного тока I , а связь между сигналами осуществляется через конденсатор, реактивное сопротивление которого пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением резистора $R = 10 \text{ кОм}$. Ток насыщения диода $I_0 = 1 \text{ мА}$, $T = 300 \text{ К}$. Каково ослабление входного сигнала по напряжению при $I = 1 \text{ мА}$ в децибеллах ($P(\text{дБ}) = 20 \lg(V_1/V_0)$)?



4Б. В сверхпроводниках II рода, находящихся во внешнем магнитном поле $H_{c2} > H > H_{c1}$, электроны в коре вихрей находятся в нормальном состоянии. Как зависит вклад этих электронов в теплоемкость сверхпроводника от величины внешнего поля и температуры? Считать корреляционную длину не зависящей от температуры.

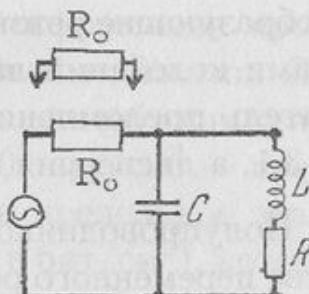
5Б. Найти в дебаевском приближении среднеквадратичную амплитуду нулевых колебаний атома в кристалле вольфрама. Плотность вольфрама $\rho = 19,2 \text{ г}/\text{см}^3$, дебаевская температура $\Theta = 383 \text{ К}$, усредненная скорость звука $s = 3,13 \cdot 10^5 \text{ см}/\text{с}$.

ГОС-2001. Вариант В

1В. Орбита космической станции массой $m = 100$ т расположена в верхних слоях атмосферы на высоте $h = 250$ км. Если орбиту не корректировать, то за счет торможения станция снижается на величину $\Delta h = 100$ м в сутки. Оценить, какой требуется расход топлива (кг/сутки), чтобы поддерживать высоту орбиты станции. Скорость истечения отработанных газов при работе двигателей $u_0 = 3$ км/с.

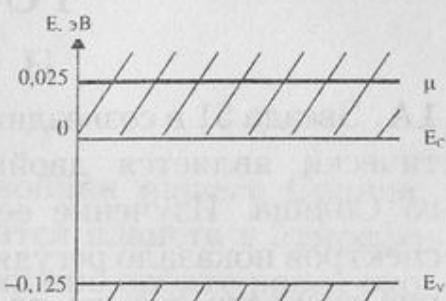
2В. Современная полупроводниковая технология требует для изготовления электронных микросхем очень чистых поверхностей кристаллов. Какой должен быть создан вакуум в системе, чтобы можно было работать с атомно-чистыми поверхностями, т. е. за время изготовления микросхемы $t = 1$ час на поверхности «нарастет» лишь моноатомный слой газа? Считать, что все молекулы газа, достигающие поверхности, прилипают к ней в виде отдельных атомов, $T = 300$ К.

3В. Параллельный колебательный контур подключен, как показано на рисунке, через сопротивление $R_0 = 10$ кОм к источнику напряжения. Активное сопротивление контура $R = 5$ Ом. При подключении к сопротивлению R_0 параллельно такого же сопротивления амплитуда колебаний в резонансе увеличилась в 1,5 раза. Какова добротность контура?



4В. Оценить радиус эффективного взаимодействия сверхпроводящих электронов, исходя из следующих соображений: проходящий около иона электрон «толкает» его, создавая тем самым поляризацию решетки; радиус взаимодействия соответствует расстоянию, на которое успел уйти этот электрон за время, равное полупериоду колебания иона. Оценку провести для типичных параметров металла: скорость звука $s = 3 \cdot 10^5$ см/с, постоянная решетки $a = 3$ Å, концентрация электронов $n = 10^{22}$ см $^{-3}$, эффективную массу электрона считать равной массе свободного электрона.

5B. На рисунке изображены положения уровня Ферми, дна зоны проводимости и потолка валентной зоны, в собственном полупроводнике InSb при температуре $T = 600$ К. Используя данные рисунка, найти концентрации электронов и дырок при данной температуре. Эффективные массы электронов и дырок в InSb: $m_n^* = 0,013m_0$, $m_p^* = 0,4m_0$ (m_0 — масса свободного электрона).



и потому $\delta\sigma = \sigma_{\text{макс}} \exp(-E_F/kT)$

представляет собой экспоненциальную зависимость от температуры. Для полупроводников с шириной запрещенной зоны $E_g = 0,01$ – $0,02$ еВ концентрация носителей зарядов определяется формулой $N = N_0 \exp(E_F/E_g) = N_0 \exp(0,013E_F/0,01) = 10^{13} \exp(1,3E_F)$. Для кремния с шириной запрещенной зоны $E_g = 0,1$ еВ формула имеет вид $N = N_0 \exp(0,4E_F/0,1) = 10^{13} \exp(4E_F)$.

Следует отметить, что для полупроводников с шириной запрещенной зоны $E_g > 0,1$ еВ формула имеет вид $N = N_0 \exp(0,013E_F/0,1) = 10^{13} \exp(0,13E_F)$. Для герmania с шириной запрещенной зоны $E_g = 0,06$ еВ формула имеет вид $N = N_0 \exp(0,4E_F/0,06) = 10^{13} \exp(6,67E_F)$.

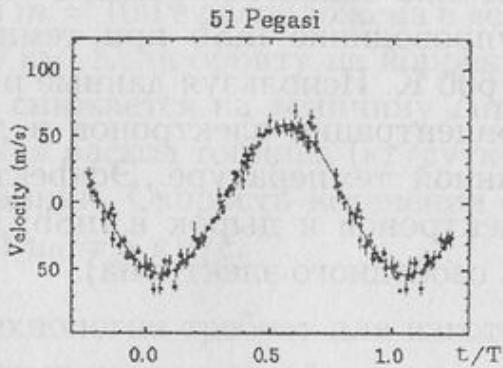
Удельная проводимость полупроводника определяется выражением $\sigma = Nq^2/m^* \exp(-E_F/kT)$, где N — концентрация носителей зарядов, q — величина единичного заряда, m^* — эффективная масса носителя зарядов, E_F — энергия Ферми, k — постоянная Больцмана, T — температура. Для герmania с шириной запрещенной зоны $E_g = 0,06$ еВ формула имеет вид $\sigma = 10^{13} \exp(6,67E_F) q^2 / (m^* k T) = 10^{13} \exp(6,67E_F) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}^2 / (0,4 \cdot 10^{-30} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300) = 10^{13} \exp(6,67E_F) \cdot 10^{-10} \Omega^{-1}$.

56. Для описания звуковых волн частотой $f = 10^3$ Гц и выше используется модель хвостовикоманьета, в которой волна представляется в виде волны, движущейся со скоростью v и имеющей впереди себя волны, движущиеся со скоростью v в противоположную сторону. Показатель преломления материала, из которого сделан хвостовикоманьет, равен $n = 1,5$.

Найдите максимальную частоту звука, который может быть излучен хвостовикоманьетом, если его длина $L = 10$ см. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

ГОС-2002. Вариант А

1А. Звезда 51 в созвездии Пегас практически является двойником нашего Солнца. Изучение ее оптических спектров показало регулярное изменение скорости звезды по закону $u = u_0 \sin(2\pi t/T)$ (сплошная линия на рисунке) с периодом $T = 4,23$ суток и амплитудой $u_0 = 56$ м/с. Предполагается, что эти временные вариации излучения обусловлены вращением вокруг нее намного более легкой планеты. По какой траектории движется планета и какова должна быть ее масса?



2А. По оси длинного короткозамкнутого сверхпроводящего соленоида с током $I_0 = 3 \cdot 10^3$ А пролетает медный цилиндр с постоянной скоростью $v = 10^5$ см/с. Оценить максимальную силу тока I_m в соленоиде. Внутренний диаметр соленоида $D_c = 10,4$ см, его длина $l_c = 50$ см, число витков $N = 100$. Диаметр медного цилиндра $D_u = 10$ см, длина $l_u = 60$ см, проводимость меди $\sigma = 5,1 \cdot 10^{17} \text{ c}^{-1}$.

3А. Оцените объем когерентности видимой части солнечного света вблизи поверхности Земли. Угловой диаметр Солнца $\psi = 10^{-2}$ рад.

4А. Найти отношение ширины зоны проводимости к ширине валентной зоны в кристалле Ge, у которого отношение подвижностей электронов и дырок при низких температурах равно $\mu_n/\mu_p = 2$. Считать закон дисперсии электронов и дырок одномерным типа

$$E(k) = E_0 - 2A \cos ka$$

и что проводимость определяется рассеянием на нейтральных примесях, причем сечение рассеяния подчиняется закону Бете.

5А. Продольные колебания одномерной одноатомной цепочки длиной $L = 100$ межатомных расстояний возбуждаются на одном конце внешним источником с частотой $f = 1,001 f_0$, где f_0 — максимальная частота колебаний цепочки. Найти отношение амплитуд колебаний на концах цепочки.

ГОС-2002. Вариант Б

- 1Б.** Звезда 51 в созвездии Пегас — почти двойник нашего Солнца. Предполагается, что около этой звезды находится планета с атмосферой типа атмосферы Земли. Ее период обращения по орбите равен около 4 суток. Оценить, какая должна быть температура на поверхности такой планеты.
- 2Б.** По оси длинного короткозамкнутого сверхпроводящего соленоида пролетает с постоянной скоростью $v = 10^5$ см/с намагниченный ($M = 800$ Гс) стальной цилиндр. Определить максимальную силу тока I_m в соленоиде. Внутренний диаметр соленоида $D_c = 10,4$ см, его длина $l_c = 50$ см, число витков $N = 100$. Диаметр стального цилиндра $D_{\text{ц}} = 10$ см, длина $l_{\text{ц}} = 60$ см, проводимость стали $\sigma = 0,8 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$. Учесть, что на частотах более 10^3 Гц магнитная проницаемость железа в полях, больших 10^4 Э, практически равна 1.
- 3Б.** Для записи голограммы Френеля предмета используется плоская монохроматическая волна с $\lambda = 7000$ Å. Восстановление изображения производится вначале той же волной, а затем волной с $\lambda = 3500$ Å. Как изменится при этом минимально разрешимый поперечный размер деталей изображения?
- Указание:* Масштабные изменения удобно анализировать на примере голограммы точечного источника.
- 4Б.** Оценить расстояние от наблюдателя до источника первичных космических лучей (протонов) с энергией $E = 10^{22}$ эВ, считая, что оно определяется пробегом частиц до взаимодействия с фотонами реликтового излучения с $T = 2,7$ К. Сечение рассеяния $\sigma = 10^{-4}$ барн.
- 5Б.** Для описания свойств металлов часто используется так называемая модель «желе», в которой считается, что точечные ионы погружены в электронную жидкость. Найти на основе этой модели скорость звука в металлическом калии, у которого постоянная ОЦК решетки равна $a = 5,23$ Å. Считать, что упругие свойства калия обусловлены только электронами, которые можно рассматривать как свободный электронный газ. Эффективную массу электронов считать равной массе свободных электронов.

ГОС-2002. Вариант В

1В. На поверхности Земли производится измерение ускорения свободного падения с точностью 10^{-8} м/с². Оценить, на сколько должно измениться атмосферное давление (по сравнению с обычным), чтобы это сказалось на точности измерений. Атмосферу считать изотермической, кривизну земной поверхности и изменение ускорения свободного падения с высотой не учитывать. Изменение давления происходит только за счет изменения локальной плотности атмосферы на поверхности Земли.

2В. Определить максимальную работу, которую можно получить от двух находящихся в адиабатической оболочке сосудов с одинаковыми одноатомными идеальными газами. Начальные давление и числа частиц N в сосудах одинаковы, но у них разные объемы и температуры T_1 и T_2 .

3В. Для увеличения производительности установки для лазерной резки, в которой излучение фокусируется линзой на поверхность металла, используются лазерные сборки — устройства, объединяющие группу лазерных трубок, излучающих синхронизированные (когерентные) между собой световые пучки. Оценить, во сколько раз изменится производительность установки при переходе от одной лазерной трубы диаметром d к сборке с общим диаметром $D = 10d$. Коэффициент заполнения (отношение суммарной площади лазерных трубок к общей площади сборки) $k = 0,8$, распределение интенсивности в поперечном сечении лазерных пучков считать однородным. Считать, что все падающее на металл излучение поглощается.

4В. В тонких металлических пленках поперечное движение электрона ограничено, т. е. его волновая функция на граничных поверхностях должна обращаться в нуль, и появляется квантование поперечного импульса. Оценить, какова должна быть длина свободного пробега электрона l , чтобы можно было экспериментально наблюдать все дискретные уровни энергии в пленке висмута толщиной $d = 1,3 \cdot 10^{-5}$ см, у которого масса электрона $m^* = 10^{-2}m_e$, а энергия $E = 10^{-2}$ эВ.

5В. Для металла, описываемого моделью свободных электронов, найти отношение предельной длины прозрачности для электромагнитных волн в нормальном состоянии к лондоновской глубине проникновения в сверхпроводящем состоянии.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Осенний семестр 2001 года. Вариант А

1А. (А.О. Раевский). $\Delta E = E(l) - E(l-1) = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} [l(l+1) - (l-1)l] = \frac{\hbar^2 l}{\mathcal{J}}$. Так как $M_H \ll M_{Br}$, то $\mu \simeq M_H$, и

$$\Delta E = \frac{\hbar^2 l}{M_H d^2} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} \rightarrow l = \frac{2\pi c M_H d^2}{\hbar \lambda} \simeq 3.$$

Значит, переход происходит из состояния с $l = 3$ в состояние с $l = 2$.

2А. (Ю.М. Ципенюк). Так как $T \ll Am_p c^2$, то ядро движется со скоростью $v = \sqrt{2T/Am_p}$. В системе покоя ядра за счет отдачи частота (энергия) γ -кванта есть

$$\omega_0 = \frac{Q}{\hbar} \left(1 - \frac{Q}{2Am_p c^2} \right).$$

Соответственно в лабораторной системе отсчета за счет эффекта Доплера его частота, наблюдаемая под углом θ , будет равна

$$\begin{aligned} \omega(\theta) &= \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right) = \frac{Q}{\hbar} \left(1 - \frac{Q}{2Am_p c^2} \right) \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right) \simeq \\ &\simeq \frac{Q}{\hbar} \left[1 + \frac{v}{c} \cos \theta - \frac{Q}{2Am_p c^2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, сдвиг будет равен нулю при наблюдении под углом

$$\theta = \arccos \frac{Q}{2Am_p v c} = \arccos \left[\frac{Q}{2\sqrt{2Am_p c^2 T}} \right] = \arccos 0,116 = 83,3^\circ.$$

3А. (Ю.М. Ципенюк). $j \geq 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2} \text{с}^{-1}$.

4А. (А.О. Раевский). Поскольку нейтрон не заряжен, он обладает только спиновым магнитным моментом, а протон — и спиновым и орбитальным. Поэтому имеем $\vec{\mu}_d = (g_{lp}\vec{l}_p + g_{sp}\vec{s}_p + g_{sn}\vec{s}_n)\mu_{\text{яБ}}$. Орбитальный момент нуклонов $\vec{l}_p = \vec{l}_n = \vec{L}/2$, где $L = 2$ — орбитальный момент дейтрана, а спиновый момент нуклонов $\vec{s}_p = \vec{s}_n = \vec{S}/2$, где $S = 1$ —

спиновый момент дейтрона в состоянии 3D_1 . Так как $g_{lp} = 1$, то $\vec{\mu}_d = [\vec{L} + (g_{sp} + g_{sn})\vec{S}]\mu_{\text{яБ}}/2$. Проектируя $\vec{\mu}_d$ на направление \vec{J} и усредняя, получим

$$\mu_d = \frac{\mu_{\text{яБ}}}{2} \left[L \cos(\vec{L}\vec{J}) + (g_{sp} + G_{sn}) S \cos(\vec{S}\vec{J}) \right].$$

$$\overline{L \cos(\vec{L}\vec{J})} = \overline{\frac{J(\vec{L}\vec{J})}{J^2}} = J \frac{J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)}{2J(J+1)} = \frac{3}{2};$$

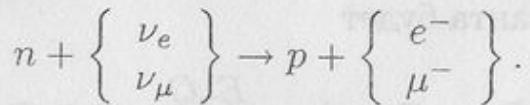
$$\overline{S \cos(\vec{S}\vec{J})} = \overline{\frac{J(\vec{S}\vec{J})}{J^2}} = J \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\mu_d = (\mu_{\text{яБ}}/2) \left[\frac{3}{2} - \frac{5,58 - 3,82}{2} \right] = 0,31\mu_{\text{яБ}}.$$

В случае jj-связи $\mu_d = 0,37\mu_{\text{яБ}}$.

5А. (А.Б. Струминский). Обратная реакция K -захвата



С протоном могут взаимодействовать только антинейтрино, а с нейтрино возможно только рассеяние.

Так как $E_\nu \ll m_\mu c^2 = 106$ МэВ, то детектируются только электронные нейтрино. Ядра кислорода не могут захватывать нейтрино в силу энергетических соображений — $M_F - M_O = 15$ МэВ $> E_\nu$. Нейтрино таких энергий взаимодействуют лишь с дейтронами (ядрами дейтерия): $d + \nu_e = p + p + e^-$. Порог реакции

$$E_{\text{пор}} = \frac{(2m_p + m_e)^2 - m_d^2}{2m_d} = 1,37 \text{ МэВ.}$$

Осенний семестр 2001 года. Вариант Б

1Б. (Ю.М. Ципенюк). Энергия молекулы с заданным l равна

$$E_l^{\text{вр}} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mathcal{J}},$$

где $\mathcal{J} = \mu d^2$ — момент инерции молекулы, μ — приведенная масса. Согласно распределению Больцмана (с учетом фактора вырождения уровней)

$$\alpha = \frac{N(l=1)}{N(l=0)} = \frac{2l_1 + 1}{2l_2 + 1} \exp \left[-\frac{E(1) - E(0)}{k_B T} \right] = 3 \exp \left[-\frac{\hbar^2}{k_B T \mathcal{J}} \right].$$

$$T = -\frac{\hbar^2}{k_B \mathcal{J} \ln \alpha} = -\frac{\hbar^2}{k_B \mu d^2 \ln(\alpha/3)} \simeq 2,5 \text{ K}.$$

2Б. (Ю.М. Ципенюк). Из законов сохранения энергии и импульса при вылете монохроматического нейтрино (K -захват, вся выделяющаяся энергия переходит в энергию нейтрино) легко получить, что скорость ядра ^{152}Sm $v_\nu = Q/Mc \ll c$, M — масса ядра. За счет эффекта Доплера уширение линии γ -кванта будет

$$\Delta E_\nu = E_\gamma v_\nu / c = \frac{E_\gamma Q}{Mc^2} = 5,7 \text{ эВ}.$$

Сдвиг энергии излучения из-за отдачи γ -кванта

$$\Delta E_\gamma = E_\gamma \frac{E_\gamma}{2Mc^2} = 2,5 \text{ эВ}.$$

Собственная ширина линии

$$\Delta E_0 = \hbar \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \simeq \frac{\hbar}{\tau_1} = 0,02 \text{ эВ}.$$

3Б. (Ю.М. Ципенюк). Поглощение — $\alpha_a(d) = 0,08$; рассеяние — $\alpha_s(d) = 0,35$.

4Б. (Ю.М. Ципенюк). Пусть w — искомая вероятность. Средний момент дейтрона (который измеряется в эксперименте) равен

$$\bar{\mu} = (1-w)\mu(^3S_1) + w\mu(^3D_1).$$

Так как в 3S_1 -состоянии $L = 0$ и, следовательно, $\vec{J} = \vec{S}$, то магнитный момент имеет чисто спиновую природу (см. решение 4А):

$$\vec{\mu}({}^3S_1) = (g_{sp}\vec{s}_p + g_{sn}\vec{s}_n)\mu_{\text{яБ}} = \frac{(g_{sp} + g_{sn})\vec{S}}{2}\mu_{\text{яБ}} = \frac{(g_{sp} + g_{sn})\vec{J}}{2}\mu_{\text{яБ}}.$$

Таким образом,

$$\mu({}^3S_1) = \frac{g_{sp} + g_{sn}}{2}\mu_{\text{яБ}} = \frac{5,58 - 3,82}{2}\mu_{\text{яБ}} = 0,88\mu_{\text{яБ}},$$

и мы получаем уравнение $0,86 = (1 - w)0,88 + w0,31$, откуда $w = 3,63 \cdot 10^{-3}$ (3,63%).

5Б. (А.Б. Струминский) $E_{\nu e} = \frac{(M_F + m_e)^2 - M_O^2}{2M_O} = 16 \text{ МэВ},$

$$E_{\nu \mu} = \frac{(M_F + m_\mu)^2 - M_O^2}{2M_O} = 121,4 \text{ МэВ}.$$

Поскольку $E = h\nu$ и $\nu = c/\lambda$, то можно пренебречь под формой (5Б). Тогда

Альгебра выражения для суммы квадратов магнитных моментов ядра и остатка ядра с учетом нормирований (решение ЧО А) дает выражение для момента импульса отдельного нейтрино \vec{J}_{ν} в единицах ядерной физики. В частности, для ядра из двух нейтронов и одного протона

штора, состоящая из ядра и протона, $J_{\nu} = 0,3$ эта величина определяется выражением $J_{\nu} = \sqrt{1 + 2\cos(\theta_{\nu})}$, где θ_{ν} — угол между векторами момента импульса нейтрино и ядра. Для ядра из трех нейтронов и одного протона, состоящего из ядра из двух нейтронов и одного протона и протона, $J_{\nu} = 0,3$.

Осенний семестр 2002 года. Вариант А

1А. (А.Б. Струминский). $M = [2M_{12} + 4(0,75M_{35} + 0,25M_{37})]N = M_N[2 \cdot 12 + 4(0,25 \cdot 37 + 0,75 \cdot 35)]N$, где M_N — масса нуклона, N — число молекул C_2Cl_4 . Отсюда число ядер ^{37}Cl равно $N_{Cl} = 4 \cdot 0,25N = 2,3 \cdot 10^{30}$. Количество ядер аргона подчиняется уравнению:

$$\frac{dN_{Ar}}{dt} = jN_{Cl}\sigma - \lambda N_{Ar}, \quad \text{откуда} \quad N_{Ar} = \frac{jN_{Cl}\sigma}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}).$$

Так как $\lambda = \ln 2/T_{1/2} = 2,3 \cdot 10^{-7}$, а $1 - e^{-\lambda t} = 1/2$, то $N_{Ar} = 30$.

2А. (А.П. Канавин). Размер атома натрия можно считать равным примерно боровскому радиусу $\sim a_B$ (радиус орбиты его $3s$ -электрона равен 2\AA), его геометрическое поперечное сечение $\sigma_0 \sim \pi a_B^2$. Сечение поглощения света в центре резонансной линии определяется формулой Брейта–Вигнера $\sigma_{pes} = \pi/k^2$. Таким образом,

$$\frac{\sigma_{pes}}{\sigma_0} \simeq \frac{1}{(ka_B)^2}$$

и для натрия получаем ($a_B \sim 1\text{\AA}$, $\lambda \simeq 6000\text{\AA}$)

$$\frac{\sigma_{pes}}{\sigma_0} \simeq \left(\frac{\lambda}{2\pi a_B}\right)^2 \simeq 10^6.$$

3А. (А.О. Раевский). Мюон взаимодействует с ядром только за счет кулоновских сил. В предположении, что ядро — равномерно заряженный шар радиуса R , потенциальная энергия мюона в ядре

$$U = -e \left(\frac{3}{2} \frac{Ze}{R} - \frac{Ze}{2R^3} r^2 \right) = -U_0 + \frac{Ze^2}{2R^3} r^2,$$

где $U_0 = 3Ze^2/2R$. Это потенциал трехмерного изотропного гармонического осциллятора с $\omega^2 = Ze^2/m_\mu R^3$. Энергия основного состояния

$$E_0 = -U_0 + \frac{3}{2}\hbar\omega; \quad U_0 = \frac{3 \cdot 82 \cdot (4,8)^2 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 1,3 \cdot (208)^{1/3} \cdot 10^{-13} \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}} \simeq 23 \text{ МэВ};$$

$$\hbar\omega = \sqrt{\frac{\hbar^2 Ze^2}{m_\mu R^3}} = 9,7 \text{ МэВ}; \quad E_0 = -23 + 1,4 \cdot 9,7 = -8,45 \text{ МэВ}.$$

4А. (А.О. Раевский). Условию задачи удовлетворяет уровень $2s_{1/2}$. Спин ядра $I_f = 1/2$.

5А. (А.П. Канавин). Так как $n \gg 1$, то можно считать движение осциллятора классическим. Вероятность обнаружить осциллятор в области размером $dx = v(x)dt$ определяется временем, в течение которого классический осциллятор будет находиться в этом промежутке, т. е.

$$dw = \frac{dt}{T/2}, \quad \text{где} \quad T = 2\pi/\omega.$$

Скорость движения осциллятора в точке x равна

$$v(x) = \frac{2}{m} \left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right).$$

Таким образом,

$$w(0) = \int_{-a_0}^{a_0} dw(x) = 2 \frac{\omega}{2\pi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}}}.$$

Поскольку $E = \hbar\omega(n + 1/2) \gg m\omega^2 a_0^2 / 2 = \hbar\omega/2$, то можно при оценке пренебречь под корнем членом с x^2 , т. е. считать скорость постоянной. Тогда

$$w \simeq 2 \frac{\omega}{2\pi} \frac{2a_0}{\sqrt{2/m} \sqrt{n\hbar\omega}}.$$

Амплитуда нулевых колебаний определяется из соотношения

$$\overline{E} = 2 \frac{m\omega^2 \overline{x^2}}{2} = \frac{1}{2} m\omega^2 a_0^2 = \frac{1}{2} \hbar\omega, \quad \text{откуда} \quad a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Таким образом, искомая вероятность

$$w \simeq \frac{\omega}{\pi} \frac{2\sqrt{\hbar\omega}}{\sqrt{2nm\omega}} \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}} = \frac{2}{\pi\sqrt{2n}} = 0,142.$$

Результат точного интегрирования — $w = 0,145$.

Оценку для амплитуды нулевых колебаний можно также получить, приравняв энергию основного состояния потенциальной энергии, соответствующей максимальному размаху колебаний a_0 :

$$\frac{1}{2} \hbar\omega = \frac{m\omega^2 \overline{x^2}}{2}.$$

Осенний семестр 2002 года. Вариант Б

1Б. (А.Б. Струминский). $N_{Ge} = 5$.

2Б. (Ю.М. Ципенюк, А.П. Канавин). При рождении фотонов выполняются законы сохранения энергии и импульса: $E_1 = E_2 + \hbar\omega$, $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \hbar\vec{k}$, где

$$E_1 = \sqrt{m^2c^4 + p_1^2c^2}, \quad E_2 = \sqrt{m^2c^4 + p_2^2c^2} \quad \text{и} \quad k = \frac{\omega n}{c},$$

откуда получаем

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{m^2c^2 + p_1^2} + \hbar\omega(n^2 - 1)/2c}{np_1}.$$

С учетом параметра $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, где $\beta = V/c$, запишем выражения для импульса, энергии и угла рождения фотона:

$$p_1 = \gamma mV, \quad E_1 = \gamma mc^2, \quad \cos \theta = \frac{c}{nV} \left[1 + \frac{\hbar\omega(n^2 - 1)}{2\gamma mc^2} \right] \leq 1.$$

Отсюда получаем необходимое условие

$$\frac{\hbar\omega}{mc^2} = \frac{\hbar}{mc} \frac{\omega}{c} = \frac{\Lambda_C}{\lambda_\Phi} \ll \frac{2\gamma}{n^2 - 1}.$$

3Б. (А.О. Раевский).

$$\sqrt{\overline{r^2}} = \sqrt{3} \sqrt{\hbar/m_\mu \omega} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{\hbar}{m_\mu} \sqrt{\frac{m_\mu R^3}{Ze^2}}} = 10,6 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

4Б. (А.О. Раевский). Для MJ фотона

$$|I_f - I_i| \leq J \leq I_f + I_i, \quad P_i P_f = (-1)^{j+1}.$$

$$|I_f - 5/2| \leq 1 \leq I_f + 5/2, \quad (-1)^2 \cdot (-1)^{l_f} = 1,$$

откуда l_f — четное число. Подходит только уровень $1d_{3/2}$ ($1 \leq l \leq 4$). Спин ядра $I_f = 3/2$.

5Б. (А.О. Раевский). $w = 0,86$.

ГОС-2001. Вариант А

1А. (А.В. Францессон). В рассматриваемом интервале температур решеточная теплоемкость пропорциональна кубу температуры: $C = \alpha T^3$, электронной теплоемкостью можно пренебречь.

$$\Delta S_{12} = \frac{Q_{12}}{T_1} = -\Delta S_{23} = - \int_{T_1}^{T_3} \frac{dQ}{T} = -\alpha \int_{T_1}^{T_3} T^2 dT = \frac{\alpha(T_1^3 - T_3^3)}{3}.$$

$$\alpha = \frac{3Q_{12}}{T_1(T_1^3 - T_3^3)}, \quad C_{уд}(T_0) = \frac{3Q_{12}T_0^3}{mT_1(T_1^3 - T_3^3)} = 1,6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

2А. (А.О. Раевский). Резонансные свойства пропадут, когда расстояние между пиками сравняется с шириной самого пика (аналог критерия Рэлея). Расстояние между пиками $\Delta\omega = 1/g(\omega)$, где $g(\omega) = V\omega^2/\pi^2 c^3$ — плотность мод. Ширина пика $\delta\omega \simeq \omega/Q$, откуда

$$\frac{\pi^2 c^3}{a^3 \omega^2} \leq \frac{2\omega}{a} \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\sigma\omega}} \quad \text{или} \quad \omega \geq \pi \left(\frac{\sigma c^4}{2a^4} \right)^{1/5} = 2,3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}.$$

Предельная частота $\nu = 0,363 \cdot 10^{12}$ Гц = 363 ГГц. Минимальная резонансная частота $\nu = c/2a = 1,5 \cdot 10^{10}$ Гц = 15 ГГц. В диапазоне частот (15–363) ГГц дисперсию проводимости можно не учитывать ($\omega\tau \ll 1$ $\tau \simeq 10^{-14}$ с).

3А. (Ю.М. Ципенюк). $kT \sim KV$, $\rightarrow V = 4 \cdot 10^{-21}$ см³. Площадь на одну частицу $S \simeq V^{2/3} = 2,5 \cdot 10^{-14}$ см². Плотность записи $\rho \sim 1/S = 4 \cdot 10^{13}$ бит/см².

4А. (Ю.М. Ципенюк).

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau} = \frac{m}{ne^2} \frac{v_F}{\lambda_{dB}} = \frac{p_F}{ne^2\lambda_{dB}};$$

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p_F}, p_F \simeq \pi\hbar n^{1/3};$$

$$\rho = \frac{p_F^2}{2\pi ne^2\hbar} = \frac{h}{4e^2} n^{-1/3} = \frac{25,86 \text{ кОм}}{4} \cdot 4,65 \cdot 10^{-8} \simeq 3 \cdot 10^{-4} \text{ Ом} \cdot \text{см}.$$

5А. (В.А. Петухов). Из уравнения адиабаты

$$\frac{P_0^{\gamma-1}}{T_0^\gamma} = \frac{P^{\gamma-1}}{T^\gamma}.$$

Учитывая, что $P = nkT$, получим $T = (n/n_0)^{\gamma-1}T_0$, где n – концентрация молекул. Из условия сохранения вещества $nx^2v_0 \sim n_0d^2v_0$, поэтому концентрация молекул в струе убывает как $n = n_0(d/x)^2$. Охлаждение прекратится, когда длина свободного пробега молекул станет больше диаметра струи и прекратятся столкновения молекул друг с другом, т. е. $\sigma nx \simeq 1$. Отсюда получим

$$x_{\text{пред}} = \frac{1}{\sigma n} = \frac{x_{\text{пред}}^2}{\sigma n_0 d^2} \Rightarrow x_{\text{пред}} = \sigma n_0 d^2,$$

$$n_{\text{пред}} = \frac{1}{n_0 \sigma^2 d^2}, T_{\text{пред}} = T_0 \left(\frac{1}{n_0 \sigma d} \right)^{2(\gamma-1)} = T_0 \left(\frac{k T_0}{P_0 \sigma d} \right)^{2(\gamma-1)}.$$

Для водорода $\gamma = 7/5$ и $T_{\text{пред}} \simeq 0,7$ К.

ГОС-2001. Вариант Б

1Б. (Ю.М. Ципенюк). После пластиинки $\lambda/4$ получается круговая поляризация, пластиинке $\lambda/2$ передается одним фотоном момент $2\hbar$. После прохождения второй пластиинки $\lambda/4$, отражения от зеркала и опять пластиинки $\lambda/4$ направление круговой поляризации меняется, и пластиинке $\lambda/2$ еще раз передается момент $2\hbar$. Полный передаваемый вращательный момент равен

$$M = \frac{dL}{dt} = 4\hbar \frac{dE/dt}{\hbar\omega} = 4 \frac{IS}{\omega} = \frac{2\lambda IS}{\pi c} = 5,3 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см}.$$

2Б. (А.П. Канавин). Длины волн собственных колебаний резонатора Фабри–Перо определяются из условия $2kL = 2 \cdot 2\pi nL/\lambda = 2\pi t$. Отсюда для соседних мод имеем

$$2nL \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} - 2\Delta\lambda \frac{dn}{d\lambda} \frac{L}{\lambda} = 1, \quad \text{или} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L(n - \lambda dn/d\lambda)} = 2 \text{ \AA}.$$

3Б. (Ю.М. Ципенюк). Уравнение диода $I = I_0[e^{eV/kT} - 1]$ или

$$I + I_0 = I_0 e^{eV/kT}, \quad \frac{dI}{dV} = \frac{I_0 e}{kT} e^{eV/kT}.$$

Поэтому $dI/dV = (I + I_0)e/kT$ и дифференциальное сопротивление

$$R = \frac{dV}{dI} = \frac{kT}{e(I + I_0)} \simeq \frac{kT}{eI} = 25 \text{ Ом}, \quad \frac{V_1}{V_0} = 0,0025, \quad P = -52 \text{ дБ}.$$

4Б. (Ю.М. Ципенюк). В сверхпроводнике в данном диапазоне полей можно считать, что $B = H$. Доля нормального металла составляет примерно $\xi^2 B / \Phi_0$, но $\Phi_0 / \xi^2 = H_{c2}$. Вклад этих электронов в теплоемкость $\Delta C(B,T) = C_n(T)B/H_{c2}$ пропорционален температуре, т. к. теплоемкость нормальных электронов $C_n \propto T$.

5Б. (А.О. Раевский). $\langle A^2 \rangle = \frac{3(k_B\Theta)^2}{4\hbar\rho s^3}$.

ГОС-2001. Вариант В

1В. (А.П. Канавин). Полная энергия станции на круговой орбите

$$E = -\gamma \frac{mM}{2R}.$$

Учитывая, что $R_3 \gg h \gg \Delta h$, изменение энергии станции за счет трения об атмосферу можно считать равным

$$\Delta E = \gamma \frac{mM}{2R_3^2} \Delta h \simeq mg\Delta h/2.$$

Оно должна за время T компенсироваться работой реактивных двигателей на длине vT . Работа

$$A = FvT = vT \frac{dp}{dt} = vu_0 T \frac{dm}{dt},$$

где v — скорость станции. Итак,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{mg\Delta h}{2Tvu_0} = 2 \text{ кг/сутки.}$$

2В. (Ю.М. Ципенюк). Атмосферу считаем азотной, число ударов молекул $Z = \frac{1}{4}n\bar{v} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Считая, что постоянная решетки $a \sim 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, число атомов на 1 см^2 , равное $2Zt$, должно быть порядка

$$N \sim \frac{1}{a^2} \simeq 10^{15} \text{ ат/см}^2. \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 475 \text{ м/с,}$$

$$p = nkT = \frac{N}{t} \sqrt{\frac{\pi}{2} mkT} \simeq 5,3 \cdot 10^{-7} \text{ дин/см}^2.$$

Таким образом, давление в камере должно быть $p \simeq 4 \cdot 10^{-10} \text{ мм рт. ст.}$

3В. (Ю.М. Ципенюк). Пусть напряжение источника U_0 . Обозначим через $R_{\text{волн}}$ волновое сопротивление контура — активное сопротивление контура в резонансе. Напряжение на контуре

$$U_1 = U_0 \frac{R_{\text{волн}}}{R_{\text{волн}} + R_0},$$

при подключении сопротивления

$$U_2 = U_0 \frac{R_{\text{волн}}}{R_0/2 + R_{\text{волн}}}.$$

Поэтому

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_0 + R_{\text{волн}}}{R_0/2 + R_{\text{волн}}} = \frac{3}{2}, \quad \text{откуда} \quad R_{\text{волн}} = \frac{R_0}{2}.$$

Добротность контура

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R_{\text{волн}}}{R} = \frac{5000}{5} = 1000.$$

4В. (Ю.М. Ципенюк). Частота колебаний $\nu = s/\lambda_D = s/2a = 5 \cdot 10^{12}$ Гц, период колебаний $T = 1/\nu = 2 \cdot 10^{-13}$ с, фермиевская скорость

$$v_F = \frac{\pi \hbar n^{1/3}}{m} = 0,8 \cdot 10^8 \text{ см/с},$$

радиус эффективного взаимодействия $\xi = v_F T / 2 = 800 \text{ \AA}$.

5В. (А.О. Раевский).

$$N_n = N_p = N_v e^{-\frac{\mu - E_v}{kT}} = 2,5 \cdot 10^{19} \left(\frac{m_p^*}{m_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{T}{300} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-3} = 8,9 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}.$$

ГОС-2002. Вариант А

1А. (А.П. Канавин). В системе звезда-планета оба небесных тела движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс, это следует из того, что доплеровское смещение спектра излучения точно описывается синусоидальным законом. Расстояние от центра звезды и планеты до центра масс и абсолютные скорости их орбитального движения относятся как m/M (это следует из определения центра масс $mr + MR = 0$ и закона сохранения момента импульса $mv + Mu = 0$). По III закону Кеплера

$$\frac{R^3}{T^2} = \gamma \frac{m+M}{4\pi^2},$$

т. е. $(2\pi/T)^2 R^3 \simeq \gamma M$. Скорость движения планеты по орбите

$$v^2 = \gamma \frac{M}{R} = \left(\frac{2\pi\gamma M}{T} \right)^{2/3}.$$

Таким образом, скорость движения звезды вокруг центра масс

$$u = \frac{m}{M} \sqrt[3]{\frac{2\pi\gamma M}{T}}.$$

Откуда

$$\frac{m}{M} = \sqrt[3]{\frac{T}{2\pi\gamma M}} \cdot u = 0,42 \cdot 10^{-3}.$$

Т. е. масса планеты должна составлять примерно половину массы Юпитера.

2А. (С.В. Гуденко). Магнитный поток $\Phi = LI/c$ сохраняется. Максимальный ток достигается, когда минимальна индуктивность соленоида $L = 4\pi\mu N^2 S/l_c$, т. е. весь цилиндр внутри соленоида. Здесь μ — магнитная восприимчивость, для меди она равна 1, S — площадь, в которую проникает магнитное поле. Характерное время изменения потока

$$\tau = \frac{l_c + l_{\text{ц}}}{2v} = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ с},$$

за это время поле проникнет (продиффундирует) на глубину $\delta \simeq \sqrt{D\tau}$, где $D = c^2/4\pi\mu\sigma$. Таким образом, $\delta \simeq c\sqrt{\tau/4\pi\sigma} = 0,3$ см и

$$I_m = \frac{L_0 I_0}{L_1} = I_0 \frac{S_0}{S_1} = I_0 \frac{D_c^2}{D_c^2 - (D_{\text{ц}} - 2\delta)^2} \simeq 1,7 \cdot 10^4 \text{ A}.$$

3А. (О.А. Судаков). $l_{\text{кор}} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \simeq \lambda$, $\rho_{\text{кор}} \simeq \frac{\lambda}{\psi}$, $V_{\text{кор}} \simeq \pi\rho^2 l \simeq \frac{\pi\lambda^3}{\psi^2}$,

$$\psi \sim 10^{-2}, \quad \lambda \simeq 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ см}, \quad V_{\text{кор}} \simeq 5 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3.$$

4А. (Ю.М. Ципенюк). Ширина зоны $\Delta E = 4A$. Вблизи экстремума

$$E(k) \simeq E_0 - 2A + \frac{2Ak^2a^2}{2}, \quad \frac{\hbar^2k^2}{2m^*} = A^2a^2k^2, \quad \text{т. е.} \quad \frac{m_n^*}{m_p^*} = \frac{A_p}{A_n}.$$

Подвижность $\mu = e\tau/m^*$, $\tau = \lambda/v$, по закону Бете $\lambda = 1/n\sigma \propto v$, поэтому $\tau = \text{const}$ и

$$\frac{A_n}{A_p} = \frac{\mu_n}{\mu_p} = \frac{m_p^*}{m_n^*} = 2.$$

5А. (Ю.М. Ципенюк, А.О. Раевский). $\alpha = e^{-8,94} = 1,3 \cdot 10^{-4}$.

ГОС-2002. Вариант Б

1Б. (А.П. Канавин). В условиях теплового равновесия температура поверхности определяется балансом энергии, поглощаемой от звезды и теряемой за счет теплового излучения. Поглощаемая энергия $E_a \propto 1/R^2$, где R — расстояние до звезды. Следовательно, учитывая закон Кеплера $R^3 \propto \tau^2$, τ — период обращения, получаем по аналогии с системой Земля–Солнце

$$T_{\text{пл}} = T_{\text{Земли}} \sqrt{\frac{R_{\text{Земли}}}{R_{\text{пл}}}} = T_{\text{Земли}} \sqrt[3]{\frac{\tau_{\text{Земли}}}{\tau_{\text{пл}}}} = 300 \sqrt[3]{\frac{365}{4}} K \simeq 1300 K.$$

2Б. (С.В. Гуденко). Из сохранения магнитного потока ($\Phi = 0$):

$$4\pi M \frac{\pi D_{\text{u}}^2}{4} = -B \frac{\pi [D_{\text{c}}^2 - (D_{\text{u}} - 2\delta)^2]}{4}$$

Таким образом, магнитное поле, создаваемое током, равно (см. 2А)

$$\delta \simeq c \sqrt{\frac{\tau}{4\pi\mu\sigma}} = 0,75 \text{ см}, |B| = 4\pi M \frac{D_{\text{u}}^2}{D_{\text{c}}^2 - (D_{\text{u}} - 2\delta)^2} = 2,8 \cdot 10^4 \text{ Гс.}$$

Поле соленоида $B = \frac{4\pi}{c} \frac{NI}{l_c}$, ток $I = \frac{Bcl_c}{4\pi N} = 1,1 \cdot 10^4 \text{ А.}$

3Б. (О.А. Судаков). Не изменится. Предел разрешения $\delta \sim \frac{\lambda}{D} L$, D — размер голограммы и он постоянен, L — расстояние от голограммы до действительного изображения предмета. Поэтому $\delta \propto \lambda L$. При записи голограммы пропускание фотопластиинки пропорционально

$$\left| 1 + \text{const} \cdot \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda_0 L_0} \cdot r^2 \right] \right|^2,$$

где λ_0 — длина световой волны при записи, L_0 — расстояние от голограммы до предмета при записи (или до изображения при восстановлении изображения). При восстановлении плоской волной с длиной волны λ действительному изображению, т. е. сходящейся волне, соответствует граничное условие

$$\exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda_0 L_0} \cdot r^2 \right] = \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda L} r^2 \frac{\lambda L}{\lambda_0 L_0} \right],$$

откуда $\delta = \lambda_0 L_0 = \lambda L = \text{const.}$

4Б. (А.Б. Струминский). Концентрация реликтовых фотонов

$$n = 2 \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} = \frac{k^3 T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \cdot 2,4 \simeq 420 \text{ см}^{-3}.$$

Поэтому протоны проходят расстояние $R \simeq \lambda = 1/n\sigma = 2,4 \cdot 10^{25}$ см.

5Б. (А.О. Раевский). Скорость звука

$$s^2 = \frac{\partial P_{\text{эл}}}{\partial \rho} = \frac{\partial P_{\text{эл}}}{M \partial n_{\text{ат}}} = \frac{Z}{M} \frac{\partial P_{\text{эл}}}{\partial n_{\text{эл}}},$$

где $P_{\text{эл}}$ — давление электронов, ρ — плотность металла, Z — валентность, $n_{\text{эл}} = Z n_{\text{ат}}$.

$$P_{\text{эл}} = \frac{2}{5} n \varepsilon_F = \frac{2}{5} \frac{\hbar^2}{2m^*} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} n^{\frac{5}{3}}, s^2 = \frac{2Z}{3M} \frac{\hbar^2}{2m^*} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} n^{\frac{5}{3}} = Z \frac{m^* v_F^2}{3M}.$$

Для калия (ОЦК-решетка) $n_{\text{эл}} = 2Z/a^3$, и мы имеем ($Z_{\text{эфф}} = 1$)

$$s = \sqrt{\frac{Z m^*}{3 A M_N}} (6\pi^2 Z)^{1/3} \frac{\hbar}{m^* a} = 1,85 \cdot 10^5 \text{ см/с.}$$

Заметим, что экспериментальное среднее значение скорости звука в направлении [100] равно 1,82.

ГОС-2002. Вариант В

1В. (Ю.М. Ципенюк). При изменении давления меняется локальная плотность на величину $\delta\rho_0$, а значит, сила притяжения. Для плоского слоя толщиной dh по теореме Гаусса

$$2dg = 4\pi\gamma\rho(h)dh, \quad \rho(h) = \delta\rho_0 e^{-\frac{mg^h}{kT}}.$$

Дополнительные Δg и ΔP равны

$$\Delta g = 2\pi\gamma \int_0^\infty \rho(h)g_0 dh, \quad \Delta P = g_0 \int_0^\infty \rho(h)dh = \frac{\Delta g \cdot g_0}{2\pi\gamma} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ Торр.}$$

2В. (С.Ю. Савинов). Для адиабатически изолированной системы энтропия остается постоянной, если процесс обратимый, и при этом максимальная работа равна разности внутренних энергий системы до и после завершения процесса.

Начальные энтропии газов (P_0 — начальное давление):

$$S_{1,2} = \nu(C_p \ln T_{1,2} - R \ln P_0).$$

После процесса это газ из $2N$ частиц с температурой T и давлением

$$P = 2\nu \frac{RT}{V_1 + V_2} = \frac{2T}{T_1 + T_2} P_0.$$

Его энтропия

$$S = 2\nu(C_p \ln T - R \ln P).$$

Из условия $S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 = S$ следует

$$T = \sqrt{T_1 T_2} \left[\frac{4T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} \right]^{1/3}.$$

Внутренние энергии до (E_0) и после (E) процесса

$$E_0 = \frac{3}{2}kT_1N + \frac{3}{2}kT_2N = \frac{3}{2}kN(T_1 + T_2),$$

$$E = 3kNT = 3kN\sqrt{T_1 T_2} \left[\frac{4T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} \right]^{1/3}.$$

$$A_{\max} = E_0 - E = \frac{3}{2} k N \left[T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2} \left[\frac{4T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} \right]^{1/3} \right].$$

3В. (С.Ю. Савинов). Скорость резки пропорциональна удельной мощности P сфокусированного излучения, равной I/S , где I — мощность лазера, а $S = \pi r^2$ — площадь пятна. Радиус пятна r в фокусе линзы f определяется расходимостью излучения и равен $f\lambda/d$ (или D). Поэтому отношение скоростей резки от одиночного лазера и сборки равно

$$\alpha = \frac{I_{\text{сб}} S_1}{S_{\text{сб}} I_1} = \frac{k(D/d)^2}{\pi f^2 \lambda^2 / D^2} \cdot \frac{\pi f^2 \lambda^2}{d^2} = k(D/d)^4 = 8 \cdot 10^3.$$

4В. (Ю.М. Ципенюк). Для наблюдения уровней надо, чтобы, по крайней мере, расстояние между ними было порядка ширины уровней, т. е. $\Delta E = E_{n+1} - E_n \geq \hbar/\tau$, где время релаксации $\tau = l/v$, v — скорость электрона. Так как $d = n\lambda_{\text{дБр}}/2$, то $n_{\max} = 2d/\lambda_{\text{дБ}}$, $\lambda = \hbar/\sqrt{2m^*E}$ и $n = 2$.

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* d^2} n^2, \quad v = \sqrt{\frac{2E}{m^*}}, \quad l \simeq \frac{\hbar v}{\Delta E_{2-1}} = \frac{2m^* v d^2}{3\pi^2 \hbar} = 530 \text{ \AA}.$$

5В. (Ю.М. Ципенюк, А.О. Раевский).

Металл прозрачен, если $\omega \geq \omega_{\text{плазм}}$:

$$\lambda \leq \lambda_{\text{плазм}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{плазм}}} = 2\pi \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi ne^2}} = 2\pi \lambda_L.$$

Содержание

Условия задач	3
Осенний семестр 2001 года. Вариант А	4
Осенний семестр 2001 года. Вариант Б	5
Осенний семестр 2002 года. Вариант А	6
Осенний семестр 2002 года. Вариант Б	7
ГОС-2001. Вариант А	8
ГОС-2001. Вариант Б	9
ГОС-2001. Вариант В	10
ГОС-2002. Вариант А	12
ГОС-2002. Вариант Б	13
ГОС-2002. Вариант В	14
Решения задач	15
Осенний семестр 2001 года. Вариант А	16
Осенний семестр 2001 года. Вариант Б	18
Осенний семестр 2002 года. Вариант А	20
Осенний семестр 2002 года. Вариант Б	22
ГОС-2001. Вариант А	23
ГОС-2001. Вариант Б	25
ГОС-2001. Вариант В	26
ГОС-2002. Вариант А	28
ГОС-2002. Вариант Б	30
ГОС-2002. Вариант В	32

СБОРНИК
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ
ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ
КВАНТОВАЯ МИКРО-
И МАКРОФИЗИКА

Составители: Раевский Александр Осипович
Ципенюк Юрий Михайлович

Редактор *И.А. Волкова*
Корректор *О.П. Котова*

Подписано в печать 07.05.2003. Формат 60 × 84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,19. Уч.- изд. л. 2,19. Тираж 300 экз.
Заказ № ф-30.

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Отдел автоматизированных издательских систем
“ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ”
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9