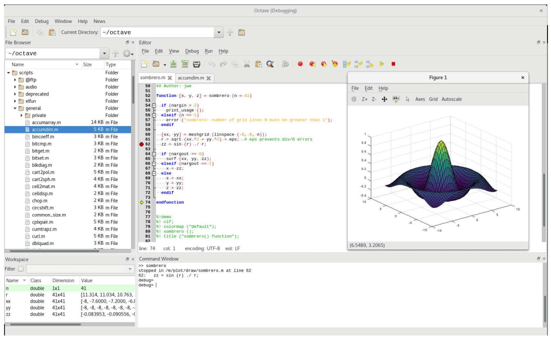
Travaux Pratiques MATLAB : La transformée de Fourier

<u>CONTENU</u> :

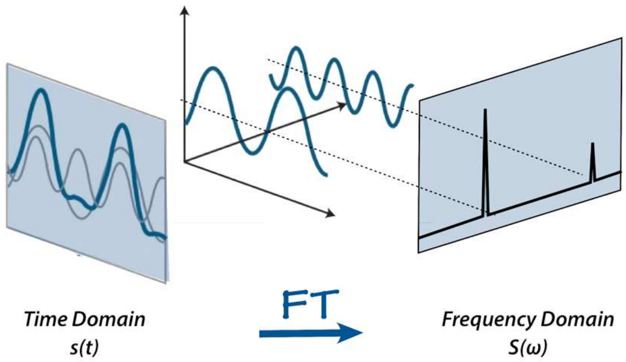
- **Génération de signaux**
- **Echantillonnage et théorème de Shannon**
- **Algorithme de Fourier rapide (FFT)**
- **Notion de fenêtrage**



Introduction à la transformée de Fourier

Un signal peut soit être représenté en temps ou en fréquence. La représentation en fréquentielle s'obtient en utilisant l'outil mathématique de transformée de Fourier.

La transformée de Fourier revient à comparer notre signal à différentes sinusoides (chaque sinusoide est à une fréquence différente). Ainsi, la transformée de Fourier fournit l'ensemble des fréquences présentes dans notre signal.

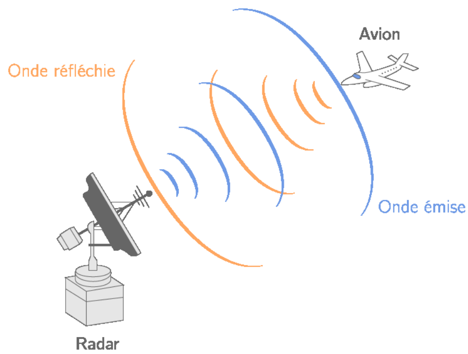


Exemple d'application de la transformée de Fourier en radar

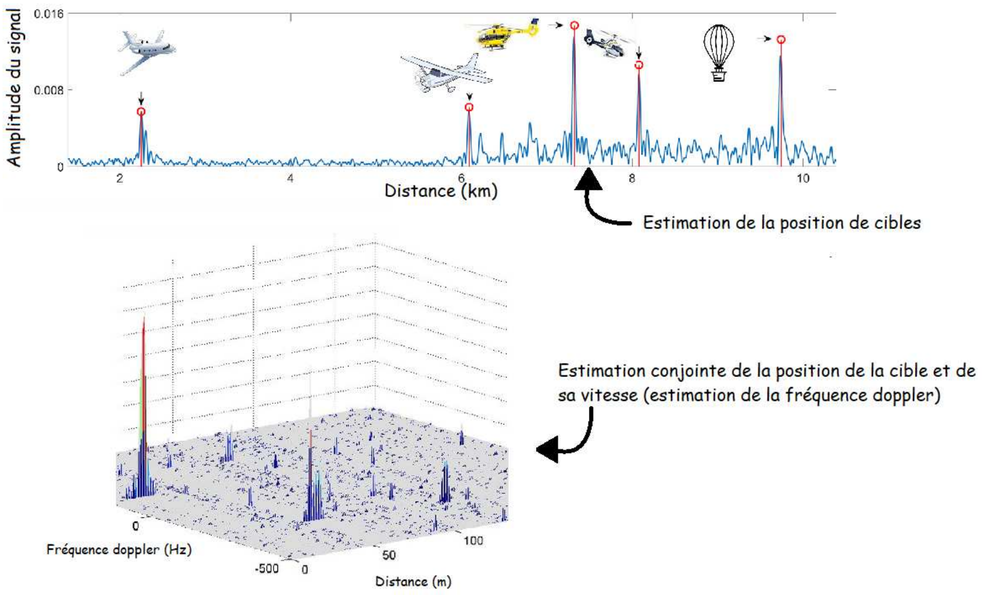
La transformée de Fourier est souvent utilisée en détection radar de cibles pour :

— **localiser la cible**

— **estimer la vitesse** de la cible par fréquence doppler



La figure illustre l'intêret de l'outil de transformée de Fourier dans le cas d'applications radar et notamment dans la localisation et l'estimation de la vitesse de cibles.



EXERCICE 1 - *Analyse du signal et de ses paramétres*

1. Exécuter le script fourni nommé TP3_script1.m

1.1 Commenter le résultat obtenu en exécutant le script précédent.

1.2 Lire la durée du signal en secondes sur la figure.

- Durée du signal (s) =

1.3 Lire la période du signal en secondes sur la figure. En déduire la fréquence en Hz du signal.

- Période du signal (s) =
- Fréquence du signal (Hz) =

2. Analyser le signal

2.1 Dans le script, retrouver les paramètres du signal :

- Fréquence du signal (Hz) =
- Nombre d'échantillons du signal =

2.2 Dans le script, retrouver la fréquence d'échantillonnage F_e, et trouver par calcul le nombre d'échantillons à partir de F_e et de la durée du signal :

- Fréquence d'échantillonnage (Hz) =
- Nombre d'échantillons (par calcul) =

Le théorème de Shannon indique que la fréquence d'échantillonnage doit être au moins 2 fois supérieure à la fréquence du signal : vérifier que c'est bien le cas :

$\boxed{\text{EXERCICE 2}}$ - *Utilisation de l'algorithme Fourier Rapide (FFT)*

Q1. Compléter le script nommé TP3_script2.m pour construire la FFT et afficher le spectre du signal

Q2. Quelle conclusion tirez-vous sur la valeur des fréquences des raies observées ?

Explication

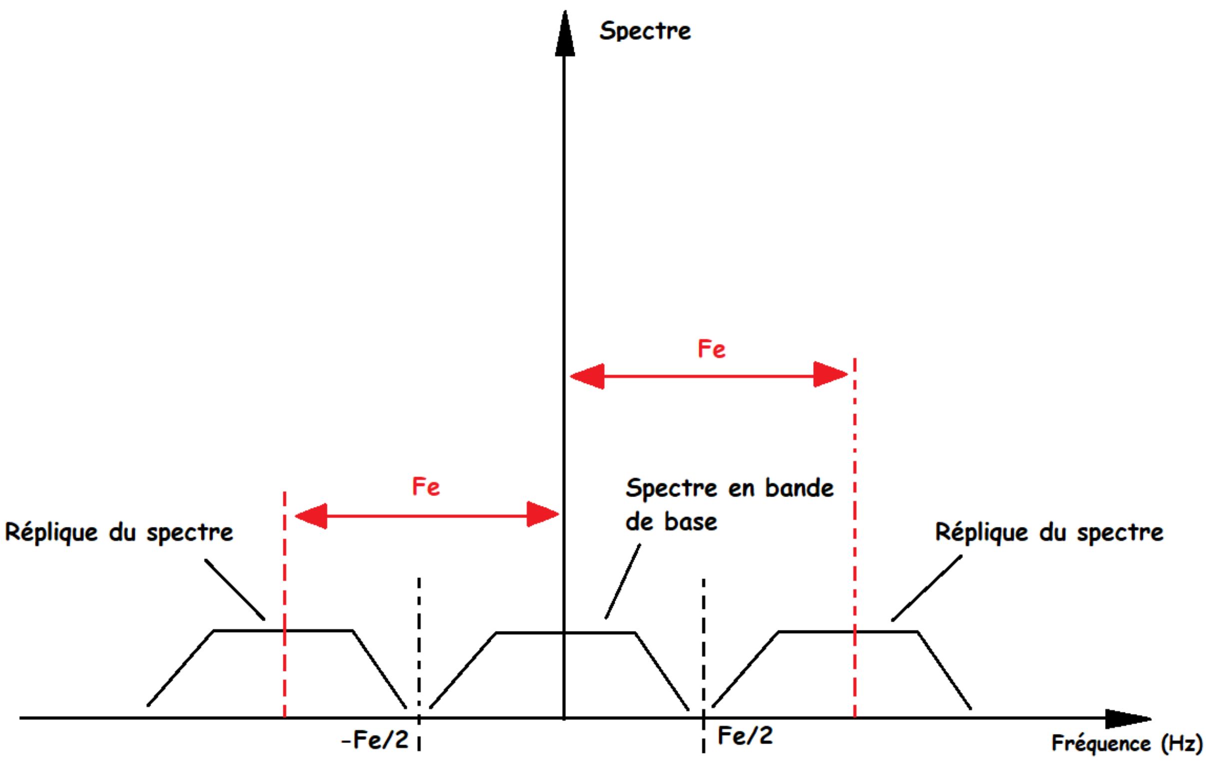
La transformée de Fourier (discrète) s'exprime à partir des échantillons du signal $x(nT_e)$ (signal $x(t)$ échantillonné à la période T_e) :

$$X(f_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e). \exp\left(-j2\pi f_k.t_n\right)$$

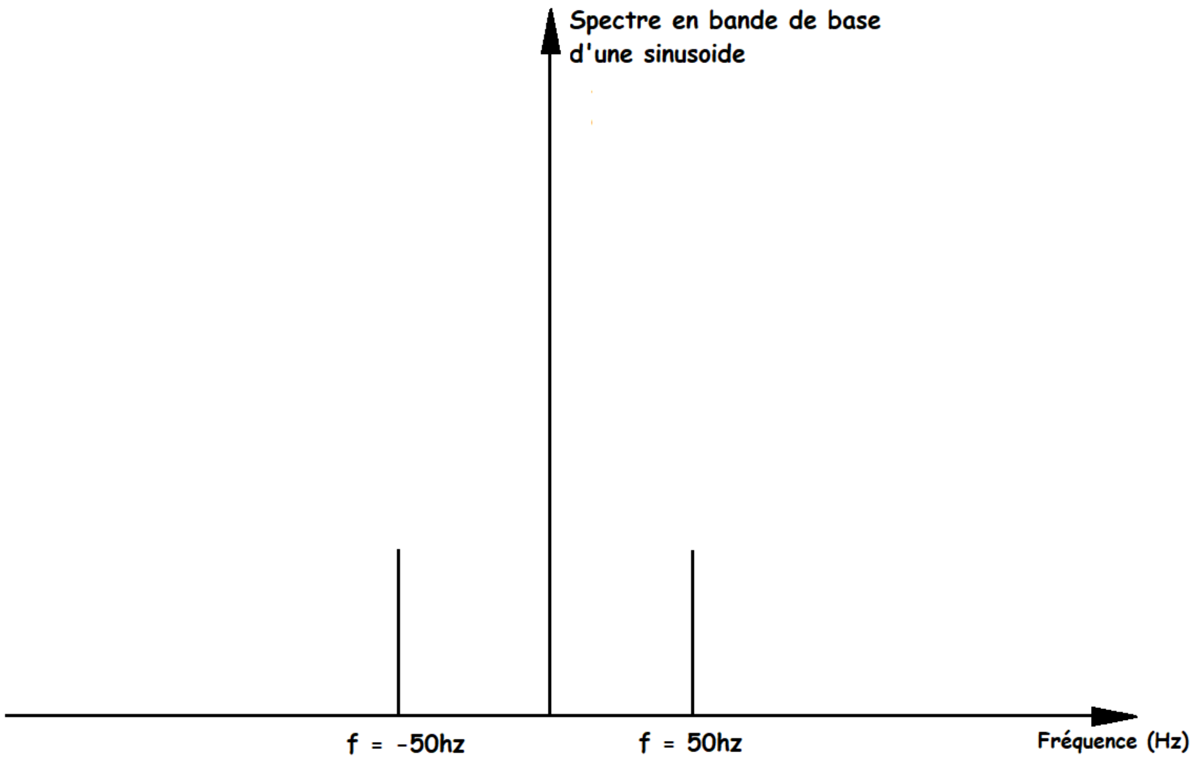
avec $f_k = k.F_e/N$ (où $k \in [0, ..., N-1]$) et $t_n = nT_e$ avec f_k, F_e et N respectivement l'échantillon fréquence, la fréquence d'échantillonnage et le nombre d'échantillons en temps et en fréquence.

Or on peut facilement démontrer que la transformée de Fourier est périodique de période F_e :

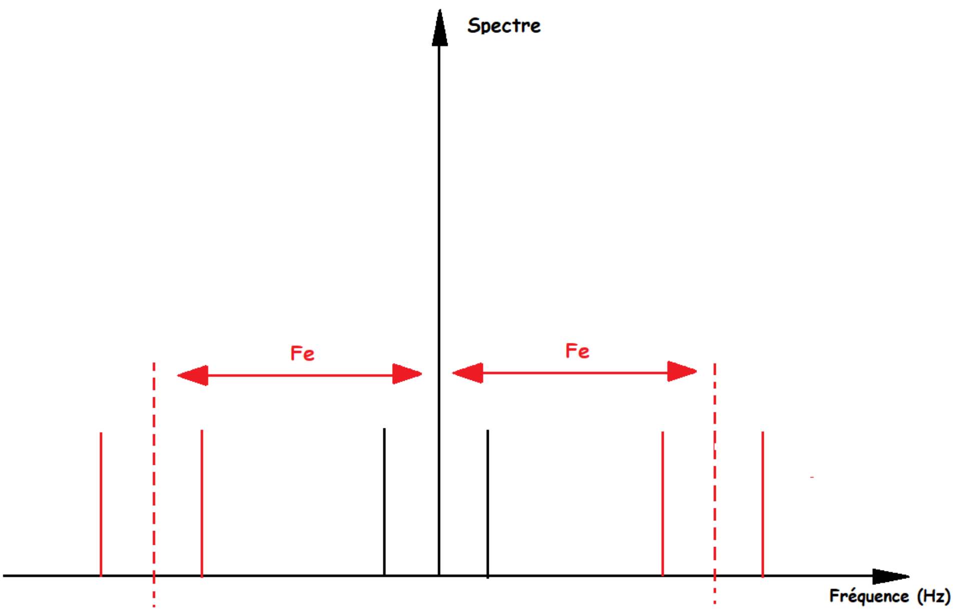
$$X(f_k + F_e) = X(f_k)$$



Dans notre cas, une sinusoide de 50 Hz a par nature 2 raies : une à $f = 50$ Hz et une à $f = -50hz$



Avec la périodicité de la transformée de Fourier, voilà ce que l'on en pratique :



Q3. Sachant que la FFT fournit le spectre pour $f \in \left[0, ...\frac{N-1}{N}F_e\right]$**, identifier sur le graphe ci-dessus les raies mises en évidence par Matlab ainsi que la valeur des fréquences de ces raies** :

- $f_{\text{raie1}} =$
- $f_{\text{raie2}} =$

Q4. Confrontez ces résultats avec les observations que vous avez faites à la question Q2. ci-dessus :

$\boxed{\text{EXERCICE 3}}$ - *Centrage du spectre autour de f = 0 Hz*

L'utilisation de la commande *fftshift* de matlab permet d'intervertir les 2 cadrans du spectre respectivement dans les intervalles $\left[0 \ldots F_e/2\right[$ et $\left[F_e/2 \ldots \frac{N-1}{N} F_e\right]$ de sorte de reconstituer le spectre dans l'intervalle $\left[-F_e/2 \ldots F_e/2\right]$

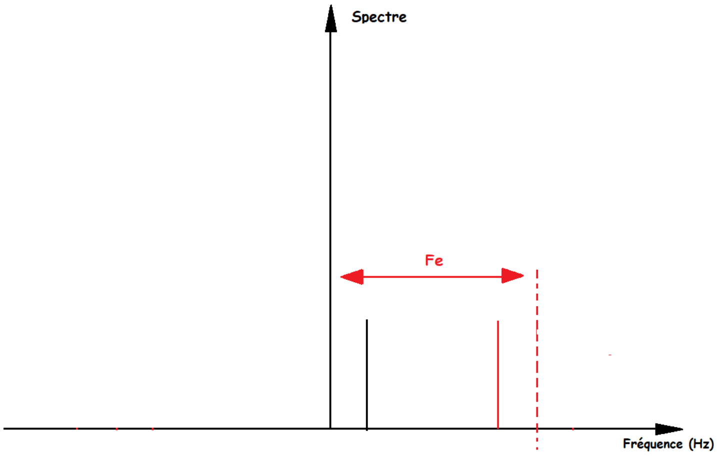


FIGURE 1 – Spectre avec FFT

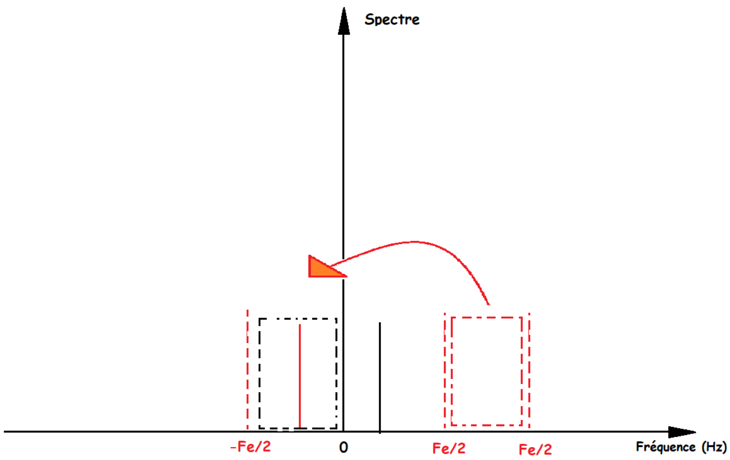


FIGURE 2 – Spectre avec FFT et FFTSHIFT : centrage du spectre autour de f = 0hz

Q1. A partir du script TP3_script3.m, afficher le spectre du signal centré autour de la fréquence f = 0 hz.

$\boxed{\text{EXERCICE 4}}$ - *Signal exponentiel complexe et son spectre*

Q1. A partir du script TP3_script4.m, construisez le signal $y_e(t) = exp(j2\pi f_o t)$

Q2. Visualisez la partie réelle d'un tel signal en respectant le cahier des charges mentionné dans le script, concernant l'affichage et les limites de l'axe des ordonnées

Q3. Construire et visualiser le spectre centré du signal

Q4. Comparer le spectre de l'exponentielle complexe avec le spectre de la sinusoide vu a l'exercice 2

Q5. Exprimer $sin(2\pi f_o t)$ **en fonction de** $exp(j2\pi f_o t)$ **et** $exp(-j2\pi f_o t)$

Q6. De la question Q5., tenter de donner une explication à la réponse donnée en Q4.

$\boxed{\text{EXERCICE 5}}$ - *Notion de fenêtrage*

On s'intéresse maintenant à la notion de fenêtrage que l'on trouve notamment dans les applications radar. Le fait d'appliquer judicieusement au signal, une fonction dite de fenêtrage permet de réduire certains effets indésirables comme les lobes secondaires du spectre.

Q1. A partir du script TP3_script5.m, modifier le signal sinusoidale $y(t) = sin(2\pi f_o t)$ **de sorte d'obtenir le signal** $y_r = \mathbf{rect}_T(t).sin(2\pi f_o t)$ **où** $\mathbf{rect}_T(t)$ **est la fonction rectangle.**

<u>Rappel</u> :

$$\text{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

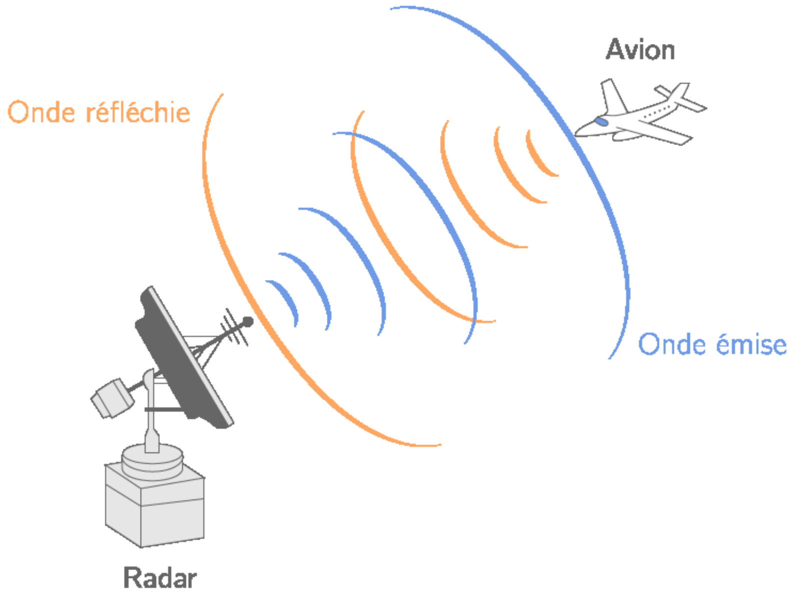
Q2. Une fois complété et exécuté le script précédent, tracer sur le compte-rendu le spectre d'un tel signal : on mentionnera où se situe le lobe principal et les lobes secondaires.

La fonction rectangle ayant des bords "abrupts", ceci crée des lobes secondaires sur le spectre du signal. Pour remédier à ce problème, on applique au signal, des fenêtres qui évitent d'avoir des transitions du signal trop brutales : ceci aura pour effet de réduire les lobes secondaires dans le domaine spectral.

Une fois complété et exécuté le script TP3_script5.m, conclure sur l'effet des fenêtres de Hamming, Hanning et Blackman sur le spectre du signal.

$\boxed{\text{EXERCICE 6}}$ - *Notion de localisation de cibles radar*

En réalisant l'intercorrélation entre le signal réfléchi en radar avec le signal émis, on peut déterminer la position de la cible ayant réfléchi le signal émis.



L'intercorrélation entre le signal réfléchi $r(t)$ et le signal émis $e(t)$ s'exprime par :

$$C_{r,e}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} r(t)e^*(t-\tau)dt$$

où $*$ désigne le conjugué. Le maximum du module $|C_{r,e}(\tau)|$ est obtenu en $\tau = \tau_o$ où τ_o est le temps aller retour du signal. Pour trouver la distance de la cible, il nous faut simplement faire l'opération $d_{\text{cible}} = \frac{c\tau_0}{2}$ où c désigne la vitesse de l'onde en m/s.

La fonction d'intercorrélation peut également s'obtenir avec la FFT et la IFFT (FFT inverse) par :

$$C_{r,e}(\tau) = IFFT\Big[FFT\big[r(t)\big].\big(FFT\big[e(t)\big]\big)^*\Big]$$

PARTIE 1

Q1./Q2. Dans le script TP3_script6.m, on a nos signaux émis et réfléchi : implémentez la fonction d'intercorrélation et estimez la distance de la cible.

PARTIE 2

Q1./Q2./Q3./Q4. Dans le script TP3_script7.m, on a nos signaux émis et réfléchi : implémentez la fonction d'intercorrélation, évaluez l'effet du fenêtrage en fréquence, sur la fonction d'intercorrélation.