# Raciocinando sobre conhecimento e probabilidade

Isaque Macalam Saab Lima

October 26, 2015

# Outline

O conteúdo destes slides foi baseado no artigo Reasoning about Knowledge and Probability (Ronald Fagin e Joseph Y. Halpern) e nas notas do professor Mario Benevides.

# O que é Lógica Epistêmica Probabilística?

É a lógica epistêmica acrescida do operador de probabilidade ($w_i$), que permite representar expressões do tipo: "de acordo com o agente $i$, a fórmula $\varphi$ é verdadeira com probabilidade maior ou igual a $b$" ($w_i(\varphi) >= b$).

# Lógica Epistêmica

Lógica epistêmica é a lógica modal utilizada para raciocinar sobre conhecimento ($K_i$). Normalmente representa o que o agente considera possível diante das informações que ele possui. Como cada agente pode ter um conhecimento diferente sobre os possíveis mundos.

Permite representar expressões do tipo:

- O agente i sabe que $\varphi$ é verdadeiro ($K_1\varphi$).
- Se o agente i sabe $\varphi$ então $\phi$ é verdadeiro. ($K_i\varphi \rightarrow \phi$)
- O agente i não sabe $\varphi$. ($\neg K_i\varphi$)

Podemos também representar informações de alta ordem("high order information"), exemplos:

- O agente $a$ sabe que o agente $b$ sabe que o agente $c$ sabe $\varphi$ ($K_a K_b K_c \varphi$).
- O agente $a$ sabe que o agente $b$ não sabe a carta de $c$ ($K_a \neg K_b c$)

# Adicionando o operador de probabilidade

A fórmula $K_i\varphi$ afirma que $\varphi$ é verdadeiro em todos os mundos que o agente $i$ considera possível. Queremos estender a nossa linguagem para permitir fórmulas do tipo: "de acordo com o agente $i$ o agente $j$ sabe $\varphi$ com probabilidade maior ou igual a $b$" ($w_i(K_j\varphi) \geq b$).

Aplicando esse conceito podemos montar expressões do tipo: $a_1 w_i(\psi_1) + ... + a_k w_i(\psi_k) \geq c$ ("i-probability formula"), onde $\psi_1, ..., \psi_k$ são fórmulas, $a_q, ...a_k$ são números racionais e a expressão $a_1 w_i(\psi_1) + ... + a_k w_i(\psi_k)$ é chamada de termo.

Diferente da lógica probabilística, que só permite que $\varphi$ seja booleano, a lógica epistêmica probabilística permite termos arbitrários na "i-probabilistic formula", dando uma maior flexibilidade para expressar relações entre probabilidade e eventos.

Podemos representar fórmulas probabilísticas de alta ordem ("high order probability formula"): $w_i(w_j(\varphi) \geq b) \geq c$.

Fórmulas misturadas, como $w_i(\varphi) + w_j(\psi) \geq c$, não são permitidas.

## Linguagem

A linguagem consiste em um conjunto $\Phi$ de símbolos proposicionais contáveis, um conjunto de agentes $\{1, ..., n\}$, os conectivos booleanos $\neg$ e $\wedge$ e as probabilidades $w_i(\varphi)$, uma para cada agente.

**Formulas:**

$$\varphi ::= p \mid \top \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid K_i\varphi \mid a_1 w_i(\varphi) + ... + a_k w_i(\varphi) \geq c$$

where $p \in \Phi$ (primitive prepositions).

**Abreviações:**

- $w_i(\varphi) \geq w_i(\psi) \equiv w_i(\varphi) - w_i(\psi) \geq 0$;
- $w_i(\varphi) \leq b \equiv -w_i(\varphi) \geq -b$;
- $w_i(\varphi) < b \equiv \neg(w_i(\varphi) \geq b)$;
- $w_i(\varphi) = b \equiv (w_i(\varphi) \geq b) \wedge (w_i(\varphi) \leq b)$;
- $K_i^c(\varphi) \equiv K_i(w_i(\varphi) \geq c)$.

"o agente $i$ sabe que a probabilidade de $\varphi$ é $\geq c$".

Pode parecer que a fórmula $w_i(\varphi) \geq c$, mesmo sem o operador $K_i$, afirma que: "o agente $i$ sabe que a probabilidade de $\varphi$ é maior ou igual a $b$".

**Isso não é correto!**

Dado um estado $s$, as expressões $K_i^c(\varphi)$ e $w_i(\varphi) \geq c$ têm os seguintes significados:

- $K_i^c(\varphi)$: "o agente $i$ sabe que a probabilidade de $\varphi$ é $\geq c$".
- $w_i(\varphi) \geq c$: "a probabilidade do agente $i$ atribuir $\varphi$ ao estado $s$ é $\geq c$".

# Semântica

## Modelo

Dado um conjunto contável de proposições atômicas $P$ e um conjunto finito de agentes $A$, um modelo de Probabilidade e Conhecimento é uma estrutura $M = (S, \pi, \kappa_1, ..., \kappa_n, \mathcal{P})$, onde:

- $S$ é um conjunto de estados;
- $\pi$ é a função de valoração: $\pi : \Phi \mapsto 2^S$;
- $\kappa_i(s)$ é a função, que produz, para cada agente $i$, uma relação de acessibilidade, onde $\kappa_i$ está contido em $S$ x $S$. Dizemos que $(s, t) \in \kappa_i(s)$ se no estado $s$ o agente $i$ considera o estado $t$ possível.

- $\mathcal{P}$ é a atribuição de probabilidade, que atribui para cada agente $i$ e estado $s$ um espaço de probabilidade $P(i,s) = (S_{i,s}, \mathcal{X}_{i,s}, \mu_{i,s})$, onde:
  - $S_{i,s} \subseteq S$, geralmente é o conjunto de estados que o agente $i$ considera possível;
  - $\mathcal{X}_{i,s}$ são subconjuntos de $S_{i,s}$ fechados sob complemento e união, esses elementos são chamados de conjuntos mensuráveis;
  - $\mu_{i,s}$ é a medida de probabilidade definida nos elementos de $\mathcal{X}_{i,s}$.

## Satisfação

- $(M, s) \models \neg\varphi$ sse $(M, s) \not\models \varphi$
- $(M, s) \models \varphi \wedge \psi$ sse $(M, s) \models \varphi$ e $(M, s) \models \psi$
- $(M, s) \models K_i\varphi$ sse $(M, t) \models \varphi$ para todo $t \in \kappa_i(s)$
- $(M, s) \models a_1 w_i(\varphi_1) + \ldots + a_k w_i(\varphi_k) \geq b$ sse $a_1(\mu_{i,s})_*(S_{i,s}(\varphi_1)) + \ldots + a_k(\mu_{i,s})_*(S_{i,s}(\varphi_k)) \geq b$

# Exemplos

## "Input and Coin"

Considere um jogo com dois agentes, onde o Agente2 recebe um bit de entrada (1 ou 0). Ele joga uma moeda, não viciada, e realiza uma ação $a$ se a moeda for igual ao bit de entrada (cara=1, coroa=0).

Assumi-se que o Agente1 não sabe o bit de entrada e nem o resultado da moeda.

Podemos notar que de acordo com o Agente2,que sabe o valor do bit de entrada, a probabilidade (depois da moeda ser lançada) de realizar a ação $a$ é de $1/2$. Podemos notar também que de acordo com o Agente1, que não sabe o valor do bit de entrada, a probabilidade do Agente2 realizar a ação é de $1/2$.

Isso porque o Agente1 considera 4 estados possíveis, onde apenas em 2 a ação é realizada(destacados em azul).

**Estados:**

- s1 - (0,cara)
- **s2 - (0,coroa)**
- **s3 - (1,cara)**
- s4 - (1,coroa)

**Proposições:**

- $A$ - eventos onde a ação $a$ é realizada;
- $H$ - moeda dando cara;
- $T$ - moeda dando coroa;
- $B_0$ - Bit de entrada do Agente2 é 0;
- $B_1$ - Bit de entrada do Agente2 é 1;

## Porta dos desesperados

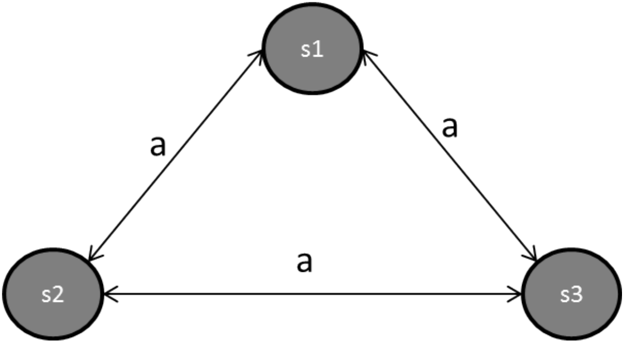
O jogo consiste em 3 portas fechadas e atrás de apenas uma delas tem um premio. O jogador pode escolher uma das portas, das duas portas que restaram, a que não tem premio é aberta. O jogador agora tem que escolher se é melhor ficar com a porta escolhida ou trocar para a outra porta que restou.

**O que você faria?**

Podemos modelar esse jogo com a estrutura da lógica epistêmica probabilística, onde:

- O conjunto $P$ de proposições é: p1(premio na porta1), p2(premio na porta2), p3(premio na porta3), onde $(p1 \wedge \neg p2 \wedge \neg p3) \vee (\neg p1 \wedge p2 \wedge \neg p3) \vee (\neg p1 \wedge \neg p2 \wedge p3)$ é verdadeiro. Ou seja, o premio não pode estar ao mesmo tempo em duas portas diferentes.
- O conjunto $S$ de possíveis mundos consiste em 3 estados: s1 (p1 verdadeiro) , s2 (p2 verdadeiro) , s3 (p3 verdadeiro).
- Computamos a probabilidade de cada proposição em cada estado dado os estados que o agente considera possível.

Modelo do jogo "porta dos desesperados":



Como todos os estados estão ligados (o agente a não consegue diferenciar), as probabilidades das proposições serão iguais em todos os estados. Logo:

- $\mu_a(p1) = 1/3$
- $\mu_a(p2) = 1/3$
- $\mu_a(p3) = 1/3$
- $\mu_a(p1 \vee p2) = 2/3$
- $\mu_a(p1 \vee p3) = 2/3$
- $\mu_a(p2 \vee p3) = 2/3$
- $\mu_a(p1 \vee p2 \vee p3) = 1$

# Fim