Lógica Modal

Mario R. F. Benevides

21 de setembro de 2007

Resumo

Neste texto apresentamos um resumo dos conceitos básicos de uma lógica modal

1 Linguagem

1.1 Alfabeto modal sobre Φ

Dado um conjunto Φ de símbolos proposicionais, $\Phi = \{p, q, ...\}$, o *alfabeto modal* sobre Φ é constituído por: cada um dos elementos de Φ; o símbolo $\perp$ (absurdo); os conectivos lógicos $\rightarrow$ (implicação), $\wedge$ (conjunção) e $\vee$ (disjunção); os operadores modais $\Box$ (necessidade) e $\Diamond$ (possibilidade); e os parênteses, como símbolos auxiliares.

1.2 Linguagem modal induzida pelo alfabeto modal sobre Φ

A *linguagem modal induzida pelo alfabeto modal sobre* Φ é definida indutivamente da seguinte forma:

$$\varphi ::= p \mid \perp \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \mid \neg\varphi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi$$

2 Semântica

2.1 *Frames*

Um *frame* é um par $F = (W, R)$ onde W é um conjunto não-vazio de *estados* e R é uma relação binária em W dita *relação de acessibilidade*. Diz-se que $w_2 \in W$ é *acessível* a partir de $w_1 \in W$ se, e somente se, $(w_1, w_2) \in R$.

$\Longrightarrow$: *Inserir figura de um frame/grafo*

2.2 Modelos

Um *modelo* sobre o conjunto Φ é um par $M = (F, V)$ onde $F = (W, R)$ é um *frame* e V é uma função de Φ no conjunto das partes de W, que faz corresponder a todo símbolo proposicional $p \in \Phi$ o conjunto de estados nos quais p é satisfeito, i.e., $V : \Phi \longmapsto Pow(W)$.

$\Longrightarrow$: *Inserir exemplo*

2.3 Satisfação

Seja $M = (F, V)$ um modelo e $w \in W$ um estado. A notação $M, w \models \varphi$ indica que a fórmula φ é *satisfeita* pelo modelo M no estado w, o que é definido indutivamente como:

- $M, w \models p$ sse $w \in V(p)(\forall p \in \Phi)$
- $M, w \not\models \bot$
- $M, v \models \neg\varphi$ iff $M, v \not\models \varphi$,
- $M, w \models \varphi \Rightarrow \varphi'$ sse $M, w \not\models \varphi$ ou $M, w \models \varphi'$
- $M, w \models \varphi \wedge \varphi'$ sse $M, w \models \varphi$ e $M, w \models \varphi'$
- $M, w \models \varphi \vee \varphi'$ sse $M, w \models \varphi$ ou $M, w \models \varphi'$
- $M, w \models \Box\varphi$ sse $M, w' \models \varphi, \forall w' \in W|(w, w') \in R$

- $M, w \models \Diamond\varphi$ sse $\exists w' \in W | (w, w') \in R$ and $M, w' \models \varphi$

$\Longrightarrow$: *Inserir exemplo*

2.4 Validade

1. φ é **verdadeira em um modelo** M, $M \models \varphi$, sse φ é verdadeira em todos os estados de M;

2. φ é **válida em um frame** F, $F \models \varphi$, sse φ é verdadeira em todos os modelos M baseados em F;

3. φ é **válida numa clásse de frames** $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \models \varphi$, sse φ válida em todos os frames $F \in \mathcal{F}$.

Lema 1. *: $\mathcal{F} \models \Box(\varphi \to \psi) \to \Box\varphi \to \Box\psi$, onde $\mathcal{F}$ é a classe de todos os frames.*

Prova. 1. Suponha, por contradição, que existe um modelo $\mathcal{M}$= $(\mathcal{F}, V)$ com um mundo possível $w \in W$ tal que

$$(\mathcal{M}, w) \not\models \Box(\varphi \to \psi) \to \Box\varphi \to \Box\psi$$

Então,

(1) $\mathcal{M}, w \models \Box(\varphi \to \psi)$ e
(2) $\mathcal{M}, w \not\models \Box\varphi \to \Box\psi$

(1) se e somente se $\forall w^{'} \in W$, se $wR_{\alpha}w^{'}$ então (3) $\mathcal{M}, w^{'} \models (\varphi \to \psi)$.
(2) se e somente se (4) $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ e (5) $\mathcal{M}, w \not\models \Box\psi$.
(4) se e somente se $\forall w^{'} \in W$, se $wR_{\alpha}w^{'}$ então (6) $\mathcal{M}, w^{'} \models \varphi$.
De (3) e (6) e pela definição de satisfação, $\forall w^{'} \in W$, se $wR_{\alpha}w^{'}$ então $\mathcal{M}, w^{'} \models \psi$, mas isto é se e somente se $\mathcal{M}, w \models \Box\psi$. O que contraria (5).

$\Box$