Introdução a Teoria dos Jogos

Tópicos Especiais em IA

Mario Benevides
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Instituto de Matemática
Departamento de Ciência da Computação

19 Março de 2014

Curso

- Mario Benevides - mario@cos.ufrj.br
- Local: H-310 A
- Website:
  http://www.cos.ufrj.br/ mario/teia/teia.html

Objetivo do Curso

- Introduzir os conceitos básicos de teoria dos jogos
- O objetivo é analisar jogos estratégicos!
- Ferramentas p/ analisar situções onde ocorrem conflitos de interesse.

O Que o Curso Não É...

- Jogos para entertenimento
- Jogos em computadores, ou jogos em redes
- Não iremos desenvolver/programar qualquer tipo de jogo

Ementa

1. Motivação, Introdução e Exemplos de Jogos
2. Jogos em Forma Normal
3. Equilibrio de Nash
4. Jogos em Forma Extensiva
5. Jogos Repetidos
6. Jogos Evolucionários
7. Jogos com Mais de 2 Jogadores

Bibliografia

1. Game Theory and Strategy, P. Straffin, 1993
2. A Prime in Game Theory, R. Gibbons, 1992
3. Game Theory for Applied Economists, Gibbons, 1992
4. A Course in Game Theory, Osborne e Rubinstein, 1994
5. Game Theory Evolving, H. Gintis, 2000
6. Uma Breve Intr. a Teoria de Jogos c/ Aplicações a Redes de Computadores, E. S. Silva e D. R. Figueiredo, 2007
7. An Introduction to Game Theory, M. J. Osborne, 2004

Outros Cursos

1. Theory.net, http://www.gametheory.net
   (a) Cursos,
   (b) Softwares,
   (c) Artigos
2. Daniel e Edmundo
   (a) DCC 2007
   (b) JAI - SBC
3. Notas do Curso do John Liu
   http://www.cse.cuhk.edu.hk/∼cslui
4. Notas do Curso do Markus M. Möbius em Harvard

Motivação

1. **Problema 1**:

   (a) Cada um na sala tem que escolher um número entre 0 e 100;

   (b) Eu calculo a média;

   (c) Ganha que tem o número mais perto (menor) que 2/3 da média;

2. Como se joga este jogo?

Motivação

1. **Como se joga este jogo?**
   (a) A média é 50, 2/3 da média é 33;
   (b) Mas se todos pensarem assim a média será 33 e 2/3 da média será 21;
   (c) Mas se todos pensarem dessa forma ....;
   (d) O equilíbrio vi tender a zero.
2. Esta é uma forma de se pensar estrategicamente;
   (a) pensar no que os outros estão pensando;
   (b) conhecimento comum;;
   (c) racional: eu e meus parceiros;
   (d) antecipar a melhor jogada.
3. Teoria dos Jogos: Modelos “Racionar Estrategicamente”

Motivação

1. **Problema 2**:

   (a) **Leilão**: temos barra de cereal para leiloar. Ganha quem der o maior lance;

   (b) Lances são feitos sem conhecimento dos outros;

   (c) A melhor oferta ganha. Geralmente esta é acima da mádia;

   (d) A média tende a se aproximar do preço real.

Motivação

1. **Problema 3**:

    (a) Voce vai a um restaurante com amigos;
    (b) A conta vai ser dividida igualmente;
    (c) 3 partos:
    (d) Peixe = R$ 30,00
    (e) Camarão = R$ 50,00
    (f) Lagosta =R$ 70,00
    (g) Qual prato você pediria?

O que é Teoria dos Jogos?

1. Uma maneira formal de se analisar interações entre grupos de agentes racionais que agem estrategicamente.

   (a) Grupo;
   (b) Interações;
   (c) Estratégias:
   (d) Racional;
   (e) Conhecimento Comum.

Tipos de Jogos

1. Não-Cooperativos
   (a) Decisões em Individuais;
   (b) Sem Coalisões ou Acordos;

2. Cooperativos
   (a) Decisões em Grupos;
   (b) Coalisões;

3. Repetidos e Evolucionários

Jogo Estratégico

Definção (Forma Normal): Um jogo *estratégico em forma normal* consiste:

- um conjunto de jogadores $J = \{1, ..., I\}$;
- conjuntos de estratégias (ações) $S_1, S_2, ...S_I$, um para cada jogador;
- uma função de recompensa $u_i : S_1 \times S_2 \times ... \times S_I \mapsto \Re$, uma para cada jogador.

Um *perfil de estratégias* é uma tupla $s = s_1, s_2, ..., s_I$ tal que $s \in \mathcal{S}$, onde $\mathcal{S} = S_1 \times S_2 \times ... \times S_I$. Nós definimos s_{-i} com o perfil obtido de s removendo s_i, i.e.,

$s_{-i} = s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_I$

Exemplo de Jogo Estratégico

- Jogo: Zerinho ou Um;
- Jagadores: Luisa (linha) e Carlos (coluna);
- Número iguais Luisa ganha;
- números diferentes Carlos ganha;

	0	**1**
0	1,-1	-1,1
1	-1,1	1,-1

Exemplo de Jogo Estratégico

- Jogo: Pedra, Papel e Tesoura;
- Jagadores: Luisa (linha) e Carlos (coluna);

	Pr	Pa	T
Pr	0,0	-1,1	1,-1
Pa	1,-1	0,0	-1,1
T	-1,1	1,-1	0,0

Exemplo de Jogo Estratégico

- Jogo: Batalha dos Sexos;
- Jagadores: Luisa (linha) e Carlos (coluna);
- Luísa quer ir ao Ballet;
- Carlos ao Futebol;

	F	**B**
F	1,2	0,0
B	0,0	2,1

Exemplo de Jogo Estratégico

- Jogo: Valente contra Medroso;
- Jagadores: Luis (linha) e Carlos (coluna);
- Numa ciclovia em direção oposta;
- D = Durão;
- M = Medroso;

	D	**M**
D	-1,-1	2,0
M	0,2	1,1

Exemplo de Jogo Estratégico

- Jogo: Dilema do Prisioneiro
- C = Cooperar
- D = Delatar

	C	D
C	5,5	20,2
D	2,20	10,10

Dominância

- Como Resolver um Jogo Estratégico?
- **Dominância**: Quando uma estratégia é sempre melhor que uma outra;

  “S domina T se S é sempre melhor que T”
- Jogadores racionais **nunca** escolhem uma estratégia que é sempre pior;
- Podemos eliminar estratégias dominadas;
- A eliminação é feita Iterativamente, i.e, um jogador de cada vez.

Dominância

Defineção: Uma de estratégia s_i é *estritamente dominada para o jogador* i por uma estratégia s'_i se para toda s_{-i}

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

Uma de estratégia s_i é *fracamente dominada para o jogador* i se substituimos o $>$ por um $\geq$, mas para pelo menos um s_{-i} ela continua estrita.

Dominância

- Exemplos: resolver usando elim. de estrat. fortemente dominada.

	A	B	C
A	2,2	1,1	4,0
B	1,2	4,1	3,5

	A	B	C	D
A	5,2	2,6	1,4	0,4
B	0,0	3,2	2,1	1,1
C	7,0	2,2	1,5	5,1
D	9,5	1,3	0,2	4,8

Dominância

- Exemplo de Jogo que não possui estratégia dominada mas possui solução

	E	C	D
T	0,4	4,0	5,3
M	4,0	0,4	5,3
F	3,5	3,5	6,6

- Eliminar estratégias fortemente dominadas pode não não ser aplicável

- Mas sempre que é **dá certo**.

Dominância

- Exemplo de Jogo que pode não funcionar eliminar estratégias fracamente dominadas

	E	D
T	4,4	2,3
F	4,5	5,5

- dependendo da ordem da eliminação: TE ou FD

	L	R
T	1,1	0,0
M	1,1	2,1
F	0,0	2,1

- dependendo da ordem da eliminação: TL ou FR

Ponto de Sela

- Curso Edmundo e Daniel DCC 2007
  - Transparências de 17– 20
  - Nem todo jogo estratégico tem ponto de sela

Equilibrio de Nash Puro

Definção: Um perfil de estratégia s^* é um *equilibrio puro de Nash* se e somente se

$$u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

para todo jogador i e toda estratégia $s_i \in S_i$.

Exemplo Jogo c. Único E. N.

- Jogo: Dilema do Prisioneiro

	C	D
C	5,5	20,2
D	2,20	10,10

- Jogo

	E	C	D
T	2,2	1,1	4,0
M	1,2	4,1	3,5

Exem. Jogo c. Mais de um E. N.

- Linha: Luisa
- Coluna: Carlos

	1	2
1	3,3	2,5
2	5,2	1,1

- O que fazer?

Ótimo de Pareto

“Um resultado de um jogo **não** é um ótimo de Pareto se existe um outro que dê a todos os jogadores um resultdo melhor (pelo menos para um tem que ser estritamente melhor). Caso contrário, dizemos que o resultado é um Ótimo de Pareto.”

Ótimo de Pareto

- Exemplo de Jogo que pode não funcionar eliminar estratégias dominadas

	E	D
T	7,7	2,8
F	8,2	5,5

- FF é um E.N. e TT, FT e TF são ótimos de Pareto

	C	D
A	3,3	-1,3
B	3,-1	0,0

- AA é um E.N. e ótimo de Pareto

Estratégias Mistas

- Jogo: Pedra, Papel e Tesoura;
- Jagadores: Luisa (linha) e Carlos (coluna);

	Pr	Pa	T
Pr	0,0	-1,1	1,-1
Pa	1,-1	0,0	-1,1
T	-1,1	1,-1	0,0

- Este jogo não tem um EN puro.

Estratégias Mistas

- Jogo: Zerinho ou Um;
- Jagadores: Luisa (linha) e Carlos (coluna);
- Número iguais Luisa ganha;
- números diferentes Carlos ganha;

	0	**1**
0	1,-1	-1,1
1	-1,1	1,-1

- Este jogo não tem um EN puro.

Estratégias Mistas

- Jogo: Zerinho ou Um;
- Suponha que Luisa tem uma informação (Conhecimento) previlegiado que Carlos gosta mais de **1** do que **0**;
- Carlos joga $3/4$ das vezes **1** e $1/4$ **0**;
- r_c: **0** $\mapsto 1/4$ e **1** $\mapsto 3/4$
- O que Luisa deve fazer?
- Qual seu ganho? **Ganho Médio**
- Ganho médio de Luisa se ela joga **0** = $1/4 \times 1 + 3/4 \times -1 = -1/2$
- Ganho médio de Luisa se ela joga **1** = $1/4 \times -1 + 3/4 \times 1 = 1/2$

Estratégias Mistas

- Jogo: Zerinho ou Um;
- Suponha que Luisa tem 4 estartégias;
- Notação: $G_{Luisa}(s, r) \;\equiv$ ganho de Luisa quando ela usa estratégia s e Carlos r;
- Estratégia $s_1,\ s_2,\ s_3$ e s_4:
- Qual a melhor estratégia para Luisa?

Estratégias Mistas

- Estratégia s_1: **0** $\mapsto$ 1/2 e **1** $\mapsto$ 1/2
- $G_{Luisa}(s_1, r_c) = 1/2 \times -1/2 + 1/2 \times 1/2 = 0$
- Estratégia s_2: **0** $\mapsto$ 1/3 e **1** $\mapsto$ 2/3
- $G_{Luisa}(s_2, r_c) =$
  $1/3 \times -1/2 + 2/3 \times 1/2 = 1/6 \approx 0, 16$
- Estratégia s_3: **0** $\mapsto$ 1/5 e **1** $\mapsto$ 4/5
- $G_{Luisa}(s_3, r_c) =$
  $1/5 \times -1/2 + 4/5 \times 1/2 = 3/10 = 0, 30$
- Estratégia s_4: **0** $\mapsto$ 0 e **1** $\mapsto$ 1
- $G_{Luisa}(s_4, r_c) =$
  $0 \times -1/2 + 1 \times 1/2 = 1/2 = 0, 50$

Estratégias Mistas

- Qual o ganho médio de Carlos;
- $G_{Carlos}(s_1, r_c) = 1/4 \times (-1 \times 1/2 + 1 \times 1/2) + 3/4 \times (1 \times 1/2 + -1 \times 1/2) = 0$
- $G_{Carlos}(s_2, r_c) = 1/4 \times (-1 \times 1/3 + 1 \times 2/3) + 3/4 \times (1 \times 1/3 + -1 \times 2/3) = -1/6$
- $G_{Carlos}(s_3, r_c) = 1/4 \times (-1 \times 1/5 + 1 \times 4/5) + 3/4 \times (1 \times 1/5 + -1 \times 4/5) = -3/10$
- $G_{Carlos}(s_4, r_c) = 1/4 \times (-1 \times 0 + 1 \times 1) + 3/4 \times (1 \times 0 + -1 \times 1) = -1/2$
- Qual a melhor estratégia possível p/ Luisa?
- Qual a melhor estratégia possível p/ Carlos?

Exercício

- Linha: Luisa
- Coluna: Carlos

	1	2
1	3,3	2,5
2	5,2	1,1

- Estratégia Carlos: Joga 1 com $q = 1/2$
- Calcule o Ganho de Luisa e Carlos para $p = 0,\ p = 1/3,\ p = 2/3$ e $p = 1$

Estratégias Mistas

- Jogo: Zerinho ou Um;
- Estratégia Luisa, s^* **0** $\mapsto$ p e **1** $\mapsto$ (1-p)
- Estratégia Carlos, r^* **0** $\mapsto$ q e **1** $\mapsto$ (1-q)
- Ganho médio Luisa, escolhe **0** = $G^0_{Luisa}(s^*, r^*)$
- $G^0_{Luisa}(s^*, r^*)$ = $1 \times q + -1 \times (1 - q) = 2q - 1$
- Ganho médio Luisa, escolhe **1** = $G^1_{Luisa}(s^*, r^*)$
- $G^1_{Luisa}(s^*, r^*)$ = $-1 \times q + 1 \times (1 - q) = -2q + 1$
- Ganho Médio de Luisa é
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) \;=\; p \times G^0_{Luisa}(s^*, r^*) + (1 - p) \times G^1_{Luisa}(s^*, r^*)$

Estratégias Mistas

- Ganho Médio de Luisa é
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) \ = \ p \times G^0_{Luisa}(s^*, r^*) + (1-p) \times G^1_{Luisa}(s^*, r^*)$
- Se o ganho de Luisa for igual nas duas escolhas
- $G^0_{Luisa}(s^*, r^*) \ = \ G^1_{Luisa}(s^*, r^*)$
- O ganho médio de Luisa fica independente de sua estratégia s^*
- $2q - 1 \ = \ -2q + 1 \ \therefore \ 4q \ = \ 2 \ \therefore \ q \ = \ 1/2$
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) \ = \ G^0_{Luisa}(s^*, r^*) \ = \ G^1_{Luisa}(s^*, r^*)$
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) \ = \ = \ 2q - 1 \ = \ -2q + 1 \ = 0$

Estratégias Mistas

- Ganho Médio para Carlos
- $G^0_{Carlos}(s^*, r^*) = -1 \times p + 1 \times (1 - p) = 1 - 2p$
- $G^1_{Carlos}(s^*, r^*) = 1 \times p + -1 \times (1 - p) = 2p - 1$
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) = q \times G^0_{Carlos}(s^*, r^*) + (1 - q) \times G^1_{Carlos}(s^*, r^*)$
- Se o ganho de Carlos for igual nas duas escolhas
- $G^0_{Carlos}(s^*, r^*) = G^1_{Carlos}(s^*, r^*)$
- O ganho Carlos fica independente da estratégia r^*
- $2p - 1 = 1 - 2p \therefore 4p = 2 \therefore p = 1/2$

Estratégias Mistas

- Ganho Médio para Carlos
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) = G^0_{Carlos}(s^*, r^*) = G^1_{Carlos}(s^*, r^*)$
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) \; = \; = \; 2p - 1 \; = \; -2p + 1 \; = 0$

Estratégias Mistas

- Este é o Eq. Nash Misto:

  - Luisa: **0** $\mapsto$ p= 1/2 e **1** $\mapsto$ (1-p)=1/2
  - Carlos: **0** $\mapsto$ q=1/2 e **1** $\mapsto$ (1-q)=1/2

- Ganho médio de cada no Eq. de Nash
  - Luisa:
    $G_{Luisa}(s^*, r^*) \;=\; = \; 2q - 1 \;=\; -2q + 1 \;= 0$
  - Carlos:
    $G_{Carlos}(s^*, r^*) \;=\; = \; 2p - 1 \;=\; -2p + 1 \;= 0$
- Desenho das Retas
- Discutir porque é Eq. Nash.

Função de Melhor Resposta

- Ganho Médio para Carlos
- $G^0_{Carlos}(s^*, r^*) = 1 - 2p$
- $G^1_{Carlos}(s^*, r^*) = 2p - 1$
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) = q \times G^0_{Carlos}(s^*, r^*) + (1 - q) \times G^1_{Carlos}(s^*, r^*)$
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) = q \times (1 - 2p) + (1 - q) \times (2p - 1)$
- Ganho Médio de Luisa é
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) = p \times G^0_{Luisa}(s^*, r^*) + (1 - p) \times G^1_{Luisa}(s^*, r^*)$
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) = p \times (2q + 1) + (1 - p) \times (1 - 2q)$

Função de Melhor Resposta

- Qual a melhor estratégia para Luisa dado a estratégia escolhida Carlos?
- Carlos escolhe q, qual a melhor resposta de Luisa?
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) \; = \; 2 \times (2q - 1)p + (1 - 2q)$
- desenhar p/ $q = 0$; calcular a melhor resposta
- desenhar p/ $q = 1$ calcular a melhor resposta
- desenhar p/ $q = 1/2$ calcular a melhor resposta

Função de Melhor Resposta

- Qual a melhor estratégia para Carlos dado a estratégia escolhida Luisa?
- Luisa escolhe p, qual a melhor resposta de Carlos?
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) \ = \ 2 \times (1 - 2p)q + (2q - 1)$
- desenhar p/ $p = 0$; calcular a melhor resposta
- desenhar p/ $p = 1$ calcular a melhor resposta
- desenhar p/ $p = 1/2$ calcular a melhor resposta

Eq. Nash Misto

- Luisa: **0** $\mapsto$ p= 1/2 e **1** $\mapsto$ (1-p)=1/2
- Carlos: **0** $\mapsto$ q=1/2 e **1** $\mapsto$ (1-q)=1/2

- Suponha Carlos sai do EN com $q = 1/4$
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) \ = \ 2 \times (2p - 1)q + (1 - 2p)$
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) \ = \ 2 \times (2p - 1)1/4 + (1 - 2p) = 1/2 - p$
- Máximo $p = 0 \ \therefore \ G_{Luisa}(s^*, r^*) \ = \ 1/2$
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) \ = \ 2 \times (1 - 2q)p + (2q - 1) = -1/2$

Eq. Nash Misto

- Suponha Carlos sai do EN com $q = 3/4$
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) \ = \ 2 \times (2p - 1)3/4 + (1 - 2p) = p - 1/2$
- Máximo $p = 1 \ \therefore \ G_{Luisa}(s^*, r^*) \ = \ 1/2$
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) \ = \ 2{\times}(1{-}2q)p{+}(2q{-}1) = -1/2$

Qq tentativa de desviar **unilateralmente** do EN pode levar a um ganho pior.

Estratégias Mistas

- Jagadores: Luisa (linha) e Carlos (coluna);
- Este jogo não tem Eq. Nash Puro;

	E	D
T	1,1	0,4
F	0,2	2,1

  - Luisa: **T** $\mapsto$ p e **F** $\mapsto$ (1-p)
  - Carlos: **E** $\mapsto$ q e **D** $\mapsto$ (1-q)
- Calcular o Eq. Nash Misto
- Função de Ganho de Luisa e Carlos
- Desenhar as funções
- Variar a estratégia de Carlos acima e abaixo do equilibrio e cálcular os ganhos dos dois maximizando para Luisa.

Eq. Nash Misto

- Jogadores: Luisa (linha) e Carlos (coluna);
- Luisa: T $\mapsto$ p e F $\mapsto$ (1-p)
- Carlos: E $\mapsto$ q e R $\mapsto$ (1-q)

	E	D
T	a_1, a_2	b_1, b_2
F	c_1, c_2	d_1, d_2

- $G^T_{Luisa} = a_1.q + b_1.(1 - q)$
- $G^F_{Luisa} = c_1.q + b_1.(1 - q)$
- $G^E_{Carlos} = a_2.p + c_2.(1 - p)$
- $G^D_{Carlos} = b_2.p + d_2.(1 - p)$

Eq. Nash Misto

- No Equlibrio: $G^T_{Luisa} = G^F_{Luisa}$
- $a_1.q + b_1.(1-q) = c_1.q + b_1.(1-q)$
- $q = (d_1 - b_1)/(d_1 - b_1 + a_1 - c_1)$
- No Equlibrio: $G^T_{Carlos} = G^F_{Carlos}$
- $a_2.p + c_2.(1-p) = b_2.p + d_2.(1-p)$
- $p = (d_2 - c_2)/(d_2 - c_2 + a_2 - b_2)$
- É possível ter p e q negativos? Desenhe um jogo em que isto ocorre;
- Explique qual é o equilibrio neste caso;
- Lembrar são probabilidades: $0 \leq p,\ q \leq 1$.

Teorema de Equilibrio de Nash

Todo Jogo Estratégico Finito tem pelo menos um Equilibrio de Nash Puro ou Misto.

Modelo de Duopólio de Cournot

- Duas Empresas: 1 e 2
- produzem o mesmo produto;
- q_i quantidade de produto produzido pela empresa i, $i \in \{1, 2\}$;
- $C_i(q_i)$ custo da firma i produzir a quantidade q_i;
- $Q = q_1 + q_2$ quantidade produto no mercado;
- $P(Q)$ é o preço que o mercado paga pelo produto. Só depende de Q.
- Lucro da empresa i,

$$U_i(q_i, Q) = q_i.P(Q) - C_i(q_i);$$

Modelo de Duopólio de Cournot

- Custo fixo por unidade: $C_i(q_i) = c.q_i$
- Seja D a demanda do mercado;
- $P(Q) = (D - Q)$, modelo simples;
  - $P(Q) = 0$, se $D \leq Q)$
  - $c < D$ e $q_i \geq 0$ e $q_i \leq D$
- Lucro da empresa i,

  $U_i(q_i, Q) = q_i.(D - Q) - c.q_i$;
- $U_i(q_i, Q) = q_i.(D - (q_1 + q_2) - c)$;
- $U_1(q_1, Q) = -q_1^2 + (D - q_2 - c)q_1$;

Modelo de Duopólio de Cournot

- $U_1(q_1, Q) = -q_1^2 + (D - q_2 - c)q_1;$
- $U_2(q_2, Q) = -q_2^2 + (D - q_1 - c)q_2;$
- derivando e igualando a 0:
- $-2q_1 + (D - q_2 - c) = 0;$
- $-2q_2 + (D - q_1 - c) = 0;$

$$q_1 = \frac{D - q_2 - c}{2} \qquad q_2 = \frac{D - q_1 - c}{2}$$

Modelo de Duopólio de Cournot

- Substituindo

$$q_1 = \frac{D - c}{3} \qquad q_2 = \frac{D - c}{3}$$

- Este é um **Eq. de Nash**.
- Porque este valor maximiza os ganhos da empresa 1 e 2.

Modelo de Duopólio de Cournot

- Substituindo q_1 e q_2 na quantidade e no preço

$$Q = \frac{2.(D-c)}{3} \qquad P(Q) = \frac{D + 2.c}{3}$$

- Suponha que só temos uma empresa $q_2 = 0$
  $q_1 = \frac{D-c}{2}$
- recalculando a quantidade e o preço

$$Q = \frac{(D-c)}{2} \qquad P(Q) = \frac{D+c}{2}$$

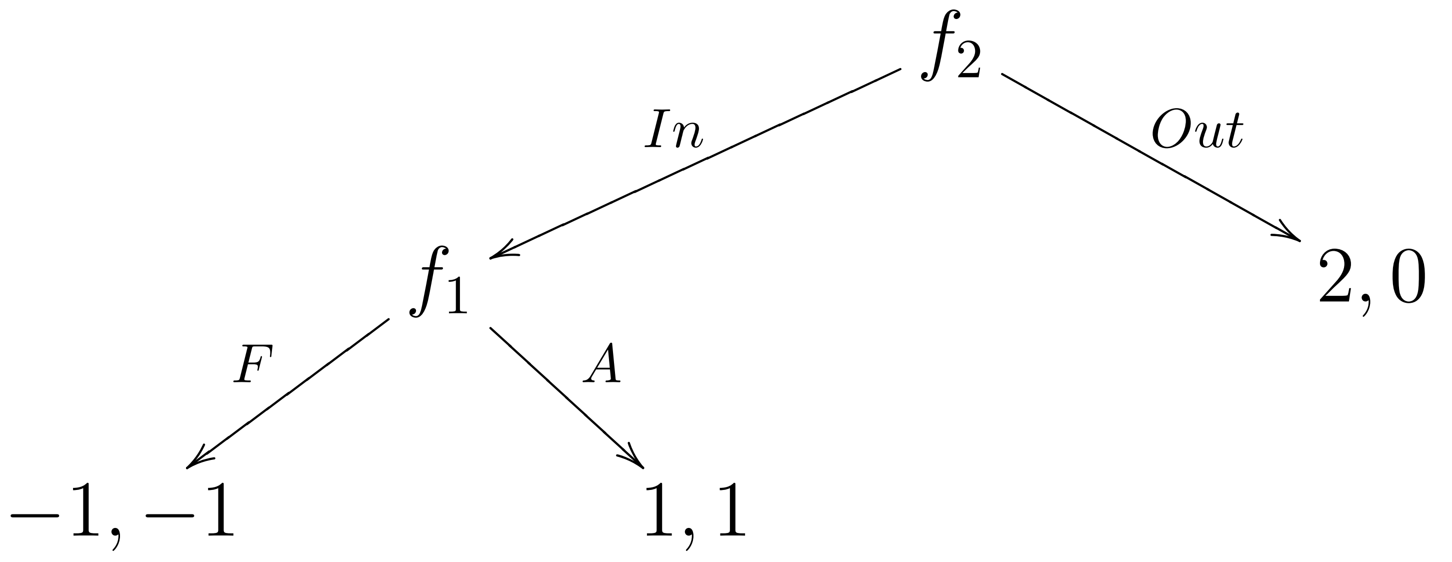
- **Quantidade menor e Preço maior**.

Jogos Extensivos

- Jogos em Seguência;
- Cada jogador joga no seu turno;
- Normalmente representado em forma de **Árvore**;
- Cada nó da árvore representa as escolhas do jogador que tem a vez;
- folhas temos as recompensas de cada jogador se o jogo tivesse seguido por aquele ramo.

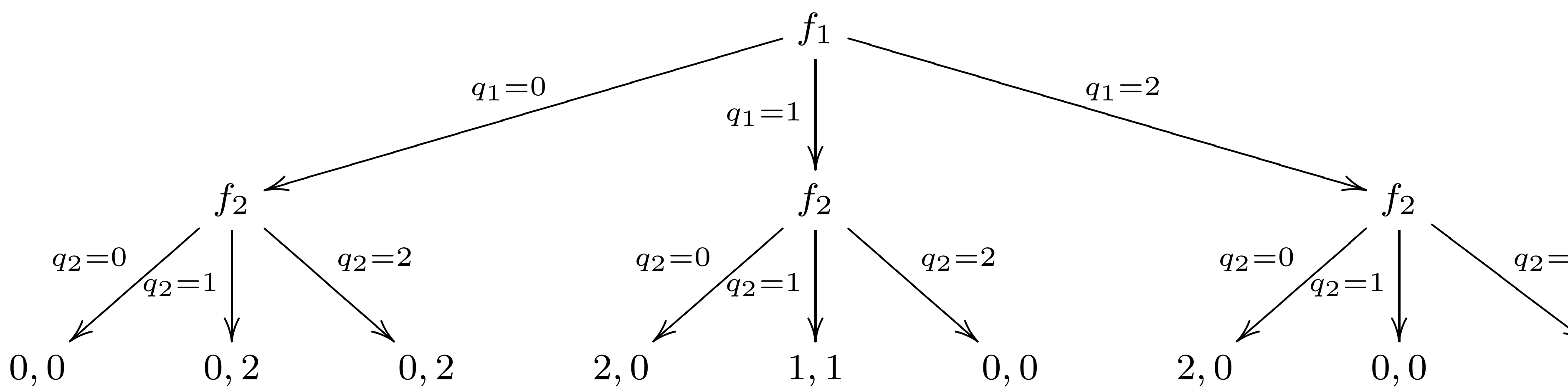
Exemplo de Jogo Extensivo

- Duas firmas f_1 e f_2 produzem o mesmo produto;
- A firma f_1 já lançou o produto no mercado;
- A firma f_2 tem a escolha de entrar no mercado ou sair;
- A firma f_1 pode comprar a briga ou acomodar com f_2;



Ex.: Competição de Stackelberg

- Duas firmas f_1 e f_2 produzem o mesmo produto;
- A firma f_1 pode lançar o produto antes de f_2;
- $q_i \in \{0, 1, 2\}$, quantidade que a firma f_i pode produzir;
- $P(Q) = 3 - Q$;



Jogos Extensivos

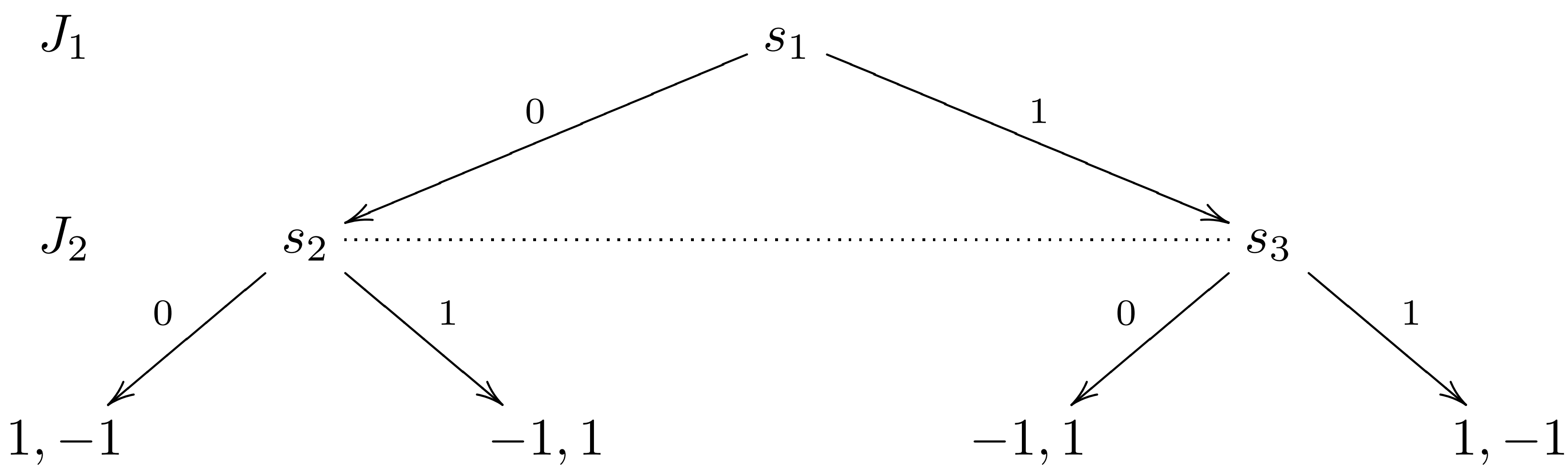
Definição: Um *jogo extensivo finito* consiste:

- Conj. finito de jogadores $i \in \{1, , , , , n\}$;
- Uma ávore finita com um conjunto T de nós, sendo $Z \subseteq T$ o conjunto das folhas e para todo nó $t \notin Z$:
    - $i(t)$ é o jogador que tem a vez em t;
    - $A(t)$ é o conjunto as possíveis ações em t;
    - $N(t, a)$ é o nó sucessor de t após a execução de a em t;
- Função de recompensa $u_i : Z \mapsto \Re$;
- $h(t)$ é conjunto de nós que o jogador $i(t)$ não distingui de t dado o que ele sabe até o momento. h deve satisfazer:

  $t' \in h(t) \Rightarrow i(t) = i(t'),\ A(t) = A(t')\ and\ h(t) = h(t')$

Jogos Extensivos

- Zero/Um



- Linha **pontilhada** = jogador 2 não sabe a jogada anterior do jogador 2
- 2 não distingui estes dois estados do jogo
- 2 sabe que 1 jogou mas não sabe qual ação ele escolheu

Zero/Um

Exercício: Preencher a definição para o exemplo

- Jogadores $i \in \{1, 2\}$;
- T e $Z \subseteq T$:
  - $i(t)$:
  - $A(t)$:
  - $N(t, a)$:
- Função de recompensa $u_i : Z \mapsto \Re$:
- $h(t)$:

Jogos Extensivos

- **Informação Perfeita**:

  $h(t)$ é sempre um cojunto unitário

  O jogador sabe exatamente o nó em que está

- **Informação Imperfeita**:

  $|h(t)| > 1$ é sempre um cojunto com mais de um elemento

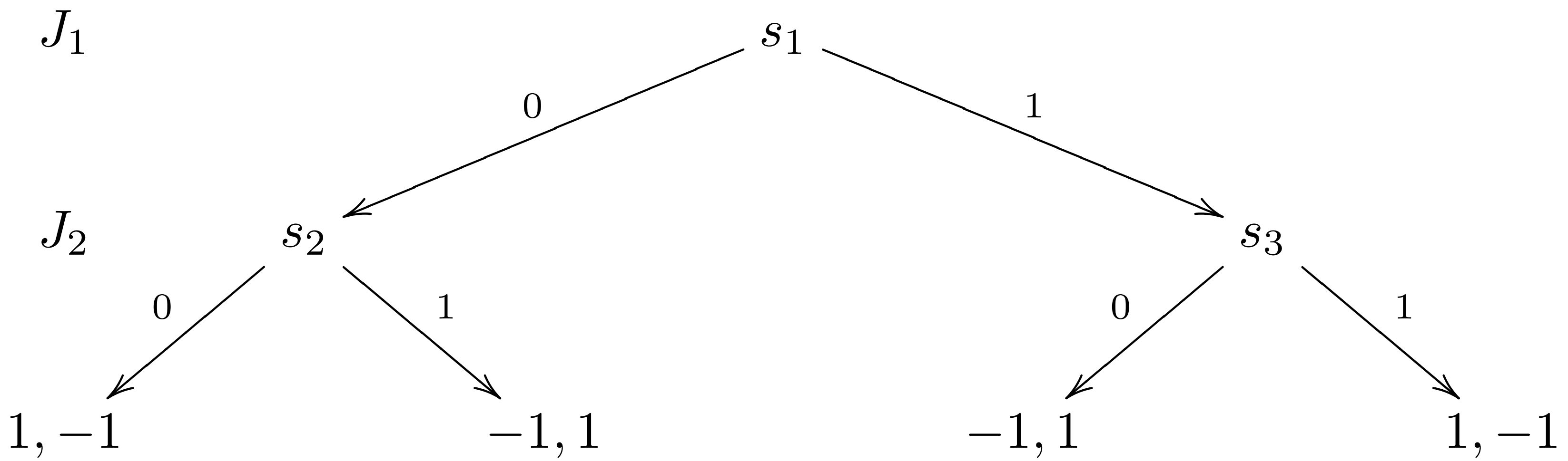
  O jogador não sabe exatamente o nó em que está

Análise de Jogos Extensivos

- **Transformando em Jogo Estratégico**:
- Todo Jogo Extensivo pode ser transformado num jogo Estratégico
- Curso Daniel Edmundo DCC 2007
  Transparência de 38-44
- Curso do MM
  Aula 10: pagina 4-10

Exemplo: Zero/Um

- J_1 joga primeiro
- J_2 sabe a jogada de J_1



- Estratégias do J_1: $S_1 = \{0, 1\}$
- Estratégias do J_2: $S_2 = \{00, 01, 10, 11\}$

Exemplo: Zero/Um

- Estratégias do J_1: $S_1 = \{0, 1\}$
- Estratégias do J_2: $S_2 = \{00, 01, 10, 11\}$
- 00: em s_2 ele escolhe 0 e em s_3 ele escolhe 0
- 01: em s_2 ele escolhe 0 e em s_3 ele escolhe 1 ...

- 10 **é uma estratégia vencedora para** J_2

- **Transformando em Jogo Estratégico**:

Exemplo: Zero/Um

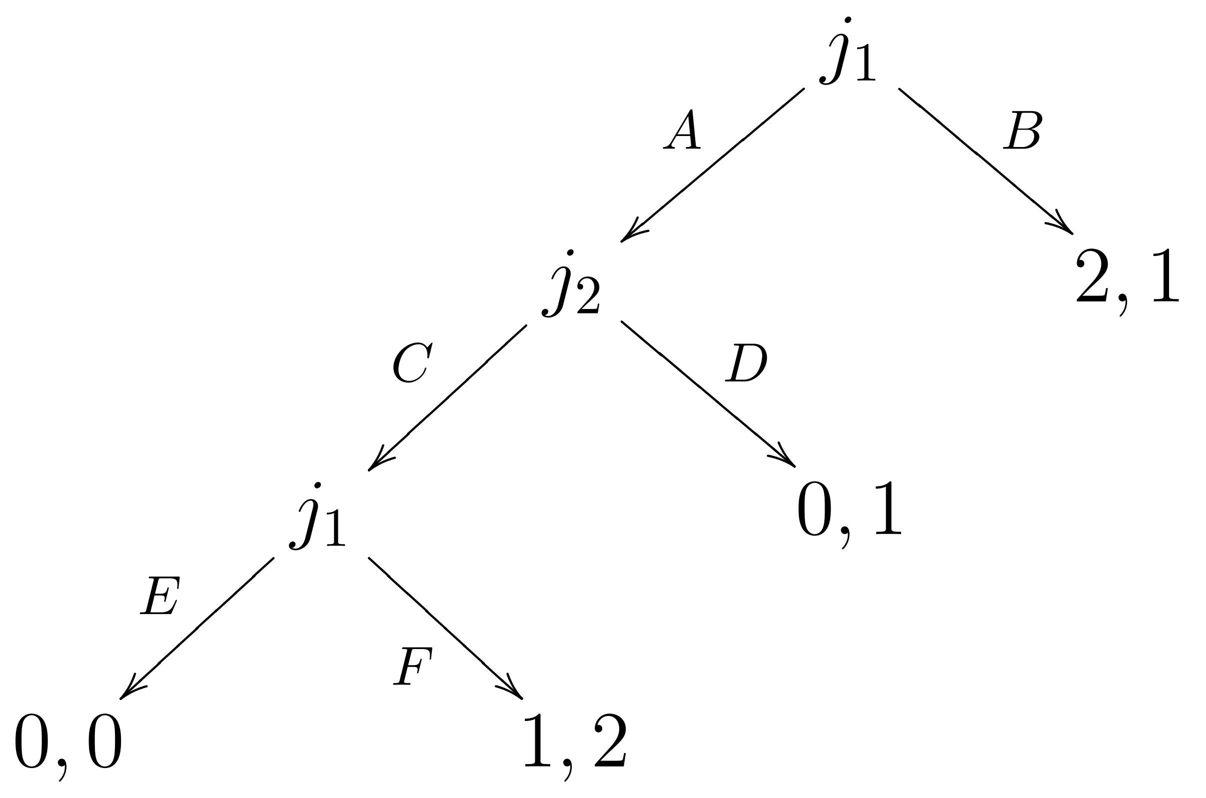
- **Transformando em Jogo Estratégico**:
- Estratégias do J_1: $S_1 = \{0, 1\}$
- Estratégias do J_2: $S_2 = \{00, 01, 10, 11\}$

	00	01	10	11
0	$1, -1$	$1, -1$	$-1, 1$	$-1, 1$
1	$-1, 1$	$1, -1$	$-1, 1$	$1, -1$

- 10 é um EN no jogo estratégico
- 10 é a solução do jogo extensivo

Exercício Jogos Extensivos

- **Transformando em Jogo Estratégico**:
- Exercício: jogo página 104 do Osborne



Análise de Jogos Extensivos

- **Sub-Jogo**:
- Um jogo G' é um sub-jogo de um jogo G se
  1. $T' \subseteq T$, ie, T' é uma sub árvore de T e para

     todo $t \in T'$, se $t' \in h(t)$ então $t' \in T'$.

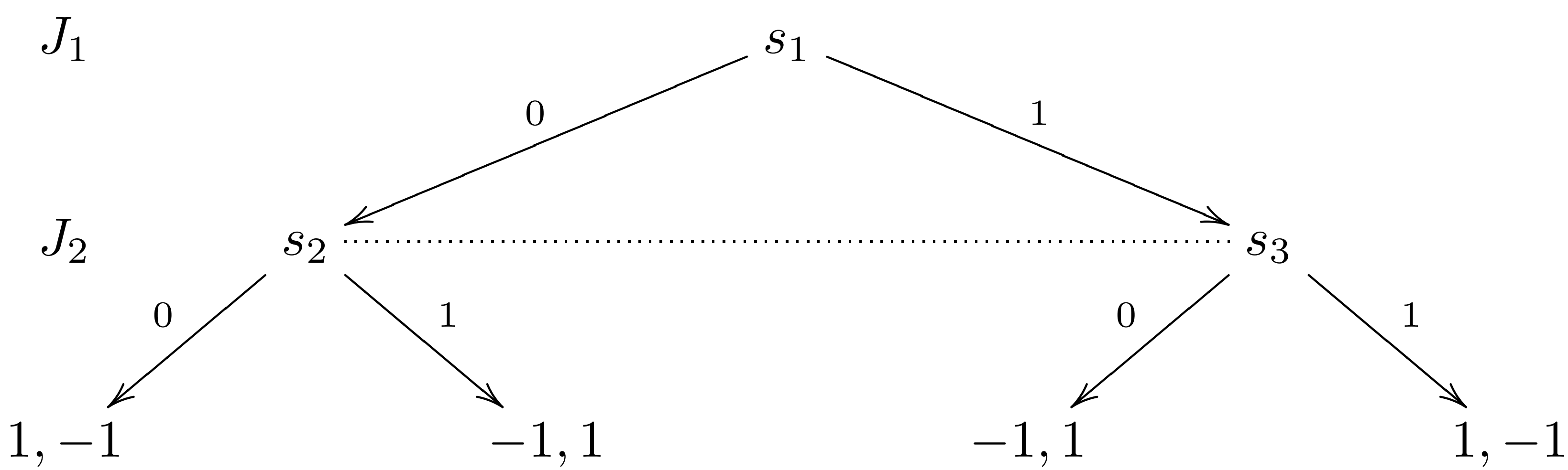
  2. todos os outros conjuntos, $h(t),\ i(t)$, $A(t)$, $N(t,a)$, as funções de recompensa $u_i(t)$ permanecem iguais só que restritas aos nós em T'.

Análise de Jogos Extensivos

- **Indução as Traz-para-Frente**:
- Curso do MM
  Aula 11: pagina 1-7

Exemplo 2: Zero/Um

- J_1 joga primeiro
- J_2 **NÃO** sabe a jogada de J_1



- Linha **pontilhada** = jogador 2 não sabe a jogada anterior do jogador 2
- 2 não distingui estes dois estados do jogo

Exemplo 2: Zero/Um

- **Transformando em Jogo Estratégico**:
- Estratégias do J_1: $S_1 = \{0, 1\}$
- Estratégias do J_2: $S_2 = \{0, 1\}$

	0	0
0	$1, -1$	$1, -1$
1	$-1, 1$	$1, -1$

- Nós sabemos resolver este Jogo
- Achar o EN Misto

Exemplo 2: Zero/Um

- Este é o Eq. Nash Misto:

  - Luisa: **0** $\mapsto$ p= 1/2 e **1** $\mapsto$ (1-p)=1/2
  - Carlos: **0** $\mapsto$ q=1/2 e **1** $\mapsto$ (1-q)=1/2

- Ganho médio de cada no Eq. de Nash
  - Luisa:
    $G_{Luisa}(s^*, r^*) \; = \; = \; 2q - 1 \; = \; -2q + 1 \; = 0$
  - Carlos:
    $G_{Carlos}(s^*, r^*) \; = \; = \; 2p - 1 \; = \; -2p + 1 \; = 0$

- Esta é a solução deste jogo.

Análise de Jogos Extensivos

- Fazer exercício com a turma com um jogo com dois sub-jogos imperfeitos: sl5 e sl37

Palestra: Logic Puzzles

Hans van Ditmarsch:

Since the 1940s various so-called epistemic puzzles have become known, wherein typically announcements of ignorance surprisingly lead to knowledge, or employing other puzzling ways to make individual knowledge into common knowledge. A well-known example is the Muddy Children Problem. Far too well-known, so this talk will NOT be about the Muddy Children Problem. Instead, we will present and analyze some other, possibly less well- known puzzles. Two examples are given below.

Palestra: Logic Puzzles

What is my number?:

Each of agents Anne, Bill, and Cath has a positive integer on its forehead. They can only see the foreheads of others. One of the numbers is the sum of the other two. All the previous is common knowledge. The agents now successively make the truthful announcements:

- Anne: I do not know my number. - Bill: I do not know my number. - Cath: I do not know my number. - Anne: I know my number. It is 50.

What are the other numbers?

Palestra: Logic Puzzles

One hundred prisoners and a lightbulb:

A group of 100 prisoners, all together in the prison dining area, are told that they will be all put in isolation cells and then will be interrogated one by one in a room containing a light with an on/off switch. The prisoners may communicate with one another by toggling the light-switch (and that is the only way in which they can communicate). The light is initially switched off. There is no fixed order of interrogation, or interval between interrogations, and the same prisoner may be interrogated again at any stage. When interrogated, a prisoner can either do nothing, or toggle the light-switch, or announce that all prisoners have been interrogated. If that announcement is true, the prisoners will (all) be set free, but if it is false, they will all be executed. While still in the dining room, and before the prisoners go to their isolation cells (forever), can the prisoners agree on a protocol that will set them free (assuming that at any stage every prisoner will be interrogated again sometime)?

Jogos Repetidos Fintamente

- Curso Daniel e Edmundo DCC 2007 (Intro_TJ_2)
    - Transparência de 01-04

Jogos Repetidos Fintamente

- Dilema do Prisioneiro

- C = Cooperar
- D = Delatar

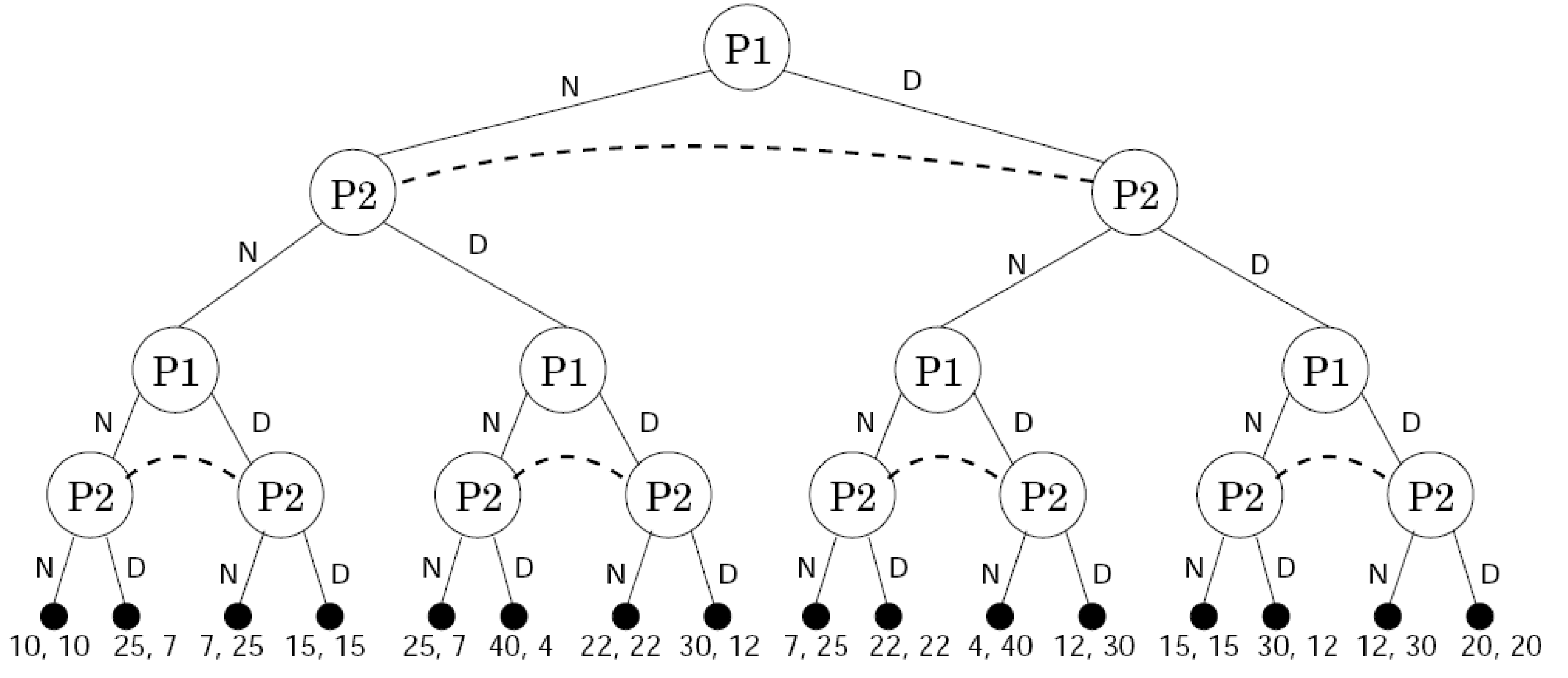
	C	D
C	5,5	20,2
D	2,20	10,10

Jogos Repetidos Fintamente

- Dilema do Prisioneiro
- O jogo é repetido um número finito de vezes
- Modelado como jogo Extensivo
- A cada iteração somam-se as recompensas
- Jogo com ou sem Informação Perfeita
  - A cada iteração o jogador pode ou não saber as jogadas anteriores
- Solução: Indução de Traz p/ Frente

Jogos Repetidos Fintamente

- Dilema do Prisioneiro jogado 2 vezes



Jogos Repetidos Fintamente

Teorema (Gibbons pg. 84): Se um jogo estratégico G tem um único EN, então seu jogo repetido n vezes tem um único Eq. de Subjogo, que é o nó correspondente a se jogar o EN do jogo original n vezes.

- Resolver o exemplo a cima com Informação Imperfeita
- Resolver o exemplo a cima com Informação Perfeita

Jogos Repetidos Infintamente

- Curso Daniel e Edmundo DCC 2007 (Intro_TJ_2)
    - Transparência de 05-16

Jogos Repetidos Infintamente

- O jogo é repetido um número infinito de vezes
- Modelado como jogo Extensivo
- Como resolver?
- Não dá para usar Indução de Traz p/ Frente

Jogos Repetidos Infintamente

- Motivação:
  - A cada iteração o jogador pode continuar ou “parar”
  - Se continuar tem sua recompensa reduzida por um fator δ, onde $0 \leq \delta \leq 1$
- fazer com a turma o Dilema do Prisioneiro

	C	D
C	5,5	20,2
D	2,20	10,10

Jogos Repetidos Infintamente

- Fator de desconto δ
- Recompensas no futuro valem menos
- Dada uma estratégia cuja recompensa é c,
- Se ela for repetida k vezes, a recompensa na fase k será $c.\delta_k$
- Se esta estratégia for repetida para sempre (infinitamente)

$$\sum_{k=0}^{\infty} c.\delta^k$$

Jogos Repetidos Infintamente

- Este somatório sempre converge:
- $\sum_{k=0}^{\infty} c.\delta^k < \infty$
- Recompensa c do jogo base é limitada superiormente

  Máximo que pode ganhar no jogo base

- $0 \leq \delta \leq 1$

Teoria dos Jogos Evolucionários

- Jogos Evolutivos
- Dinâmica do Replicador
- Estratégias Evolucionariamente Estáveis (ESS)

Teoria dos Jogos Evolucionários

- Curso Daniel e Edmundo DCC 2007
  - Intro_TJ_evol.pdf
  - Transparência de 01-19
- Curso do John Liu
  - http://www.cse.cuhk.edu.hk/ cs-lui/csc6480.html
  - Population Games
  - Replicator Dynamics

Teoria dos Jogos Evolucionários

- Curso Daniel e Edmundo DCC 2007 (Intro_TJ_evol)
  - Transparência de 01-08
  - Desenhar com a turma ex. transp. 08
- Curso do John Liu
  - http://www.cse.cuhk.edu.hk/ cs-lui/csc6480.html
  - Replicator Dynamics

Dinâmica do Replicador

- É um tipo específico de Jogo Evolucionário
- População de jogadores muito grande (infinita)
- Indivíduos usam um conjunto fixo de estraégias $S = \{s_1, ..., s_k\}$
- Estado do jogo é proporção de indivíduos usando cada estatégia
- $\mathbf{X} = \langle x_1, x_2, ..., x_k \rangle$
- Uma matrix de pagamentos: $\pi(s_i, s_j)$
  - $\pi(s_i, s_j)$: recompensa de cada jogador que escolhe e s_i contra s_j
  - Jogo Simétrico

Dinâmica do Replicador

- Exemplo: Dilema do Prisioneiro

	C	D
C	3,3	0,5
D	5,0	1,1

- $S = \{C, D\}$
- $\pi(C, C) = 3,\ \pi(C, D) = 0,\ \pi(D, C) = 5$ e $\pi(D, D) = 1$
- $\mathbf{X} = \langle 0.6, 0.4 \rangle$

Recompensa

- Recompensa média de um jogador que escolhe a estratégia s_i

$$\pi(s_i, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{k} x_j \times \pi(s_i, s_j)$$

- Média das recompensas de s_i ponderada pelo $\mathbf{X}$

Recompensa

- $\pi(s_i, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{k} x_j \times \pi(s_i, s_j)$
- Exemplo; Dilema do Prisioneiro
  - $\pi(C, C) = 3,\ \pi(C, D) = 0,\ \pi(D, C) = 5$ e $\pi(D, D) = 1$
  - $\mathbf{X} = \langle 0.6, 0.4 \rangle$
  - $\pi(C, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{2} x_j \times \pi(s_i, s_j) =$
    $x_1 \times \pi(s_1, s_1) + x_2 \times \pi(s_1, s_2) =$
    $0.6 \times \pi(C, C) + 0.4 \times \pi(C, D) = 0.6 \times 3 + 0.4 \times 0 = 1,8$
  - $\pi(D, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{2} x_j \times \pi(s_i, s_j) =$
    $x_1 \times \pi(s_2, s_1) + x_2 \times \pi(s_2, s_2) =$
    $0.6 \times \pi(D, C) + 0.4 \times \pi(D, D) = 0.6 \times 5 + 0.4 \times 1 = 3,4$

Recompensa do Jogo

- Recompensa média do jogo
- Média das recompensas dos jogadores que escolheram de s_i ponderada pelo $\mathbf{X}$

$$\overline{\pi}(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{k} x_j \times \pi(s_j, \mathbf{X})$$

- Exemplo; Dilema do Prisioneiro
  - $\pi(C, \mathbf{X}) = 1,8 \quad \pi(D, \mathbf{X}) = 3,4$
  - $\overline{\pi}(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{k} x_j \times \pi(s_j, \mathbf{X}) =$
    $x_1 \times \pi(C, \mathbf{X}) + x_2 \times \pi(D, \mathbf{X}) = 0.6 \times 1.8 + 0.4 \times 3.4 =$
    $1.08 + 1.36 = 2.44$

Transições

- Mudanças de estado
- Re-Calcular $\mathbf{X}$
- Quanto da população que está jogando s_i vai mudar de estado no próximo instante de tempo x'_i

$$x'_i = (\pi(s_i, \mathbf{X}) - \overline{\pi}(\mathbf{X})) \times x_i$$

- Quanto mais a recompensa de uma estratégia está acima da média mais atraente ela é, mais indivíduos de outras estratégias vão querer mudar para ela.
  - $x'_1 = (\pi(C, \mathbf{X}) - \overline{\pi}(\mathbf{X})) \times x_1 = (1.8 - 2.44) \times 0.6 = -0.384$
  - $x'_2 = (\pi(D, \mathbf{X}) - \overline{\pi}(\mathbf{X})) \times x_2 = (3.4 - 2.44) \times 0.4 = 0.384$
  - Novo: $\mathbf{X} = \langle 0.6 - 0.384, 0.4 + 0.384 \rangle = \langle 0.216, 0.784 \rangle$

Exercícios:

- Faça mais 2 rodadas no Dil. do Prisioneiro
- está convergindo para o EN? Coincidência?
- Faça 3 rodadas para o seguinte jogo:

	A	B	C
A	4,4	2,6	0,8
B	6,2	10,10	6,2
C	8,0	2,6	4,4

- $\mathbf{X} = \langle 0.4, 0.1, 0.5 \rangle$
- Está convergindo?

Ponto Fixo

- Quando a recompensa fica igual a média temos um equilíbrio
- $x_i' = 0$, para todas as estratégias s_i
- Este é um ponto fixo do jogo
- Exemplo: Dilema do Prisioneiro

	C	D
C	3,3	0,5
D	5,0	1,1

  - $\mathbf{X} = \langle x, 1 - x \rangle$
- Quais os pontos fixos?

Ponto Fixo

- E se o jogo tiver mais de um E. Nash, para onde ele converge?
- Exemplo: Maracanã $\times$ Ballet

	M	B
M	3,3	0,1
B	1,0	2,2

1. $\mathbf{X} = \langle 0.2, 0.8 \rangle$, simule 3 roddas
2. $\mathbf{X} = \langle 0.8, 0.2 \rangle$, simule 3 roddas
3. $\mathbf{X} = \langle x, 1 - x \rangle$, Quais os pontos fixos?

- Existe alguma relação entre P. F. e E. N?

Relação PF e EN

Teorema: Seja J um jogo simétrico, $S = \{s_1, s_2\}$ e $\sigma^* = \langle p^*, 1 - p^* \rangle$ um **EN**. Então a população $\mathbf{X}^* = \langle x^*, 1 - x^* \rangle$, com $x^* = p^*$ é um **Ponto Fixo**.
Prova:

- Como σ é NE $\pi(s_1, \sigma^*) = \pi(s_2, \sigma^*)$
- $\pi(s_1, \mathbf{X}^*) = x.\pi(s_1, s_1) + (1 - x).\pi(s_1, s_2)$
- $\pi(s_1, \mathbf{X}^*) = \pi(s_1, \sigma^*)$, por hipótese $x = p$
- $\overline{\pi}(\mathbf{X}^*) = x^*\pi(s_1, \mathbf{X}^*) + (1 - x^*)\pi(s_2, \mathbf{X}^*)$
- $x'^* = x^*(\pi(s_1, \mathbf{X}^*) - \overline{\pi}(\mathbf{X}^*))$
- $x'^* = x^*(1 - x^*)(\pi(s_1, \mathbf{X}^*) - \pi(s_2, \mathbf{X}^*))$
- Logo, $x'^* = 0$

Jogos Evolucionários

- População de jogadores muito grande (infinita)
- Indíduos usam um conjunto fixo de estrégias $S = \{s_1, ..., s_k\}$
- Estado do jogo é proporção de indivíduos usando cada estatégia
- $\mathbf{X} = \langle x_1, x_2, ..., x_k \rangle$
- Uma matrix de pagamentos: $\pi(s_i, s_j)$
  - $\pi(s_i, s_j)$: recompensa de cada jogador que escolhe e s_i contra s_j
  - Jogo Simétrico

Recompensa do jogador

- $\pi(s_i, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{k} x_j \times \pi(s_i, s_j)$
- Exemplo; Dilema do Prisioneiro
  - $\pi(C, C) = 3,\ \pi(C, D) = 0,\ \pi(D, C) = 5$ e $\pi(D, D) = 1$
  - $\mathbf{X} = \langle 0.6, 0.4 \rangle$
  - $\pi(C, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{2} x_j \times \pi(s_i, s_j) =$
    $x_1 \times \pi(s_1, s_1) + x_2 \times \pi(s_1, s_2) =$
    $0.6 \times \pi(C, C) + 0.4 \times \pi(C, D) = 0.6 \times 3 + 0.4 \times 0 = 1,8$
  - $\pi(D, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{2} x_j \times \pi(s_i, s_j) =$
    $x_1 \times \pi(s_2, s_1) + x_2 \times \pi(s_2, s_2) =$
    $0.6 \times \pi(D, C) + 0.4 \times \pi(D, D) = 0.6 \times 5 + 0.4 \times 1 = 3,4$

Jogos Evolucionários

- Indivíduos usam um conjunto fixo de estratégias **mistas** σ sobre $S = \{s_1, ..., s_k\}$
- Estado do jogo é proporção de indivíduos usando cada estratégia
- $\mathbf{X} = \langle x_1, x_2, ..., x_k \rangle$
- $\sigma = \langle p_1, ..., p_k \rangle$
  p_i é a probabilidade do jogador escolher s_i
- Uma matrix de pagamentos: $\pi(s_i, s_j)$
  - $\pi(s_i, s_j)$: recompensa de cada jogador que escolhe e s_i contra s_j
  - Jogo Simétrico

Jogos Evolucionários

Definição: Dado um indivíduo que está utilizando uma estratégia σ numa distribuição da população $\mathbf{X}$. A recompensa deste indivíduo é dada por

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}) = \sum_{s \in S} p(s) \times \pi(s, \mathbf{X})$$

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}) = \sum_{s \in S} \sum_{s' \in S} p(s) \times x(s') \times \pi(s, s')$$

Jogos Evolucionários

- Exemplo; Dilema do Prisioneiro
- $\pi(C,C) = 3,\ \pi(C,D) = 0,\ \pi(D,C) = 5$ e $\pi(D,D) = 1$
- $\mathbf{X} = \langle 0.6, 0.4 \rangle$ e
- $\sigma = \langle 1/4, 3/4 \rangle$

$$\pi(C,\mathbf{X}) = 0.6 \times 3 + 0.4 \times 0 = 1,8$$
$$\pi(D,\mathbf{X}) = 0.6 \times 5 + 0.4 \times 1 = 3,4$$

- $\pi(\sigma,\mathbf{X}) = \sum_{s \in S} p(s) \times \pi(s,\mathbf{X}) = 1,8 \times 1/4 + 3,4 \times 3,4 = 0,45 + 2,55 = 3$

Jogos Evolucionários

Definição: Dada uma população $\mathbf{X}$ que está utilizando uma estratégia σ^*. Suponha que uma pequena parte desta população ϵ decida utilizar uma nova estratégia σ, **mutantes**. Denotaremos esta nova população por $\mathbf{X}_\epsilon$.

exemplo: População $\mathbf{X} = \sigma^*$ (estável) com estratégias $S = \{s_1, s_2\}$ e $\sigma^* = \langle 1/2, 1/2 \rangle$ e mutantes com estratégia $\sigma^* = \langle 3/4, 1/4 \rangle$

$$\mathbf{X}_\epsilon = (1-\epsilon)\sigma^* + \epsilon\sigma = (1-\epsilon)\langle 1/2, 1/2 \rangle + \epsilon\langle 3/4, 1/4 \rangle$$

$$= \langle 1/2 - \epsilon/4, 1/2 + \epsilon/4 \rangle$$

Estratégias EEE

Definição: Uma estratégia σ^* é uma **E**stratégia **E**volucionáriamente **E**stável **EEE** se existe um ϵ', tal que, para todo ϵ, $0 < \epsilon < \epsilon'$, e para toda estratégia $\sigma \neq \sigma^*$

$$\pi(\sigma^*, \mathbf{X}_\epsilon) > \pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon)$$

- Uma EEE é robusta a atque de mutações
- A população não cresce o suficiente mediante mutações
- Não compensa mutar

Exemplo de EEE

- População: com μ machos e $1-\mu$ femeas
- $\mathbf{X} = \langle \mu, 1-\mu \rangle$
- Femeas acasalam uma vez e geram n crias
- Machos acasalam, em média, $(1-\mu)/\mu$ vezes
- O sexo das crias é determinado somente pelas femeas
- Estratégias $\sigma = \langle p, 1-p \rangle$:

  s_1 gerar crias machos com probabilidade p

  s_2 gerar crias femeas com probabilidade $1-p$

Exemplo de EEE Cont 1

- Como recompensa para filhos é n, vamos trabalhar com netos
- Recompensa é dada pelo número de acasalamentos
- $\pi(s_1, \mathbf{X}) = n \times (n \times \frac{1-\mu}{\mu}) = n^2 \times \frac{1-\mu}{\mu})$
- São n filhos machos que podem acasalar com $(n \times \frac{1-\mu}{\mu})$ femeas
- $\pi(s_2, \mathbf{X}) = n^2$
- Femeas só acasalam uma vez

Exemplo de EEE Cont 2

- Recompensa de $\sigma = \langle p, 1-p \rangle$ é

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}) = n^2 \times \left(\frac{1-\mu}{\mu}\right) \times p + n^2 \times (1-p)$$

- Como estamos interessados somente na proporção de machos e femeas $\Longrightarrow \ n = 1$
- Curso John Liu “Population Games”
  Transp.: 22,23/54

Exemplo de EEE Cont 3

- Um bom candidato para EEE é $\sigma^* = \langle 1/2, 1/2 \rangle$
  - se $\mu < 1/2$ e adotando s_1 o número de netos vai crescer aumentando o μ, s_1 não é EEE;
  - se $\mu > 1/2$ e adotando s_2 o número de netos vai decrescer diminuindo o μ; s_2 não é EEE;
- Se $\mathbf{X}^* = \langle 1/2, 1/2 \rangle$, então $\sigma^* = \langle 1/2, 1/2 \rangle$ é EEE?

  Transp.: 22,23/54

Exemplo2 de EEE: $L \times W$

- Curso John Liu “Population Games”
  Transp.: 24,25,26/54
- 2 SO’s: $L \times W$
- Satisfação Inicial de Usuários de $L = 2$
- Satisfação Inicial de Usuários de $W = 1$
- 2 comp. mesmo SO podem se comunicar
- Satisfação aumenta linearmente com o a proporção de usuários que ele se comunica

Exemplo2 de EEE: $L \times W$

- x - proporção usuários que usam W
- $1 - x$ - proporção usuários que usam L
- $\pi(W, x) = 1 + 2x$
- $\pi(L, x) = 2 + 2(1 - x)$

- Existem EEE? Candidatos?

$$
\begin{aligned}
&\sigma_W\colon x = 1 \;\Rightarrow \pi(W, 1) > \pi(L, 1) \\
&\sigma_L\colon x = 0 \;\Rightarrow\; \pi(L, 0) > \pi(W, 0) \\
&\sigma_{mix}\colon 1 + 2x = 2 + 2(1 - x) \;\Rightarrow\; x = 3/4 \\
&\sigma_{mix}\colon x = 3/4 \;\Rightarrow\; \pi(W, 3/4) = \pi(L, 3/4)
\end{aligned}
$$

Exemplo2 de EEE: $L \times W$

- Est. Candidata a EEE; $\sigma^* = \langle p^*, 1 - p^* \rangle$
- Est. Mutantes: $\sigma = \langle p, 1 - p \rangle$
- Calculado X_ϵ

$$
\begin{aligned}
X_\epsilon &= (1-\epsilon).\sigma^* + \epsilon.\sigma \\
&= (1-\epsilon)\langle p^*, 1-p^* \rangle + \epsilon \langle p, 1-p \rangle \\
&= \langle (1-\epsilon)p^* + \epsilon p, (1-\epsilon)(1-p^*) + \epsilon(1-p) \rangle \\
&= \langle p^* + \epsilon(p - p^*), (1-p^*) - \epsilon(p - p^*) \rangle
\end{aligned}
$$

Exemplo2 de EEE: $L \times W$

- Calculando o $\pi(W, X_\epsilon)$ e $\pi(L, X_\epsilon)$

$$
\begin{aligned}
\pi(W, X_\epsilon) &= 1 + 2x_\epsilon \\
&= 1 + 2((1 - p^*) - \epsilon(p - p^*)) \\
&= 1 + 2p^* + 2\epsilon(p - p^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi(L, X_\epsilon) &= 2 + 2(1 - x_\epsilon) \\
&= 2 + 2(p^* + \epsilon(p - p^*)) \\
&= 4 - 2p^* - 2\epsilon(p - p^*)
\end{aligned}
$$

Exemplo2 de EEE: $L \times W$

- Calculando $\delta_\pi = \pi(\sigma^*, X_\epsilon) - \pi(\sigma, X_\epsilon)$
- $\delta_\pi = [p^*\pi(W, X_\epsilon) + (1 - p^*)\pi(L, X_\epsilon)] - [p\pi(W, X_\epsilon) + (1 - p)\pi(L, X_\epsilon)]$
- $\delta_\pi = (p^* - p)\pi(W, X_\epsilon) - (L, X_\epsilon))$
- $\pi(W, X_\epsilon) = 1 + 2p^* + 2\epsilon(p - p^*)$
- $\pi(L, X_\epsilon) = 4 - 2p^* - 2\epsilon(p - p^*)$
- $\pi(W, X_\epsilon) - (L, X_\epsilon)) = -3 + 4p^* + 4\epsilon(p - p^*)$
- $\delta_\pi = (p^* - p)(4p^* - 3 - 4\epsilon(p^* - p)$

Exemplo2 de EEE: $L \times W$

Analisando os Candidatos

- σ_W: $p^* = 1$
  $\delta_\pi = (1-p)(1-4\epsilon(1-p) > 0,$
  se $p \neq 1$ e $\epsilon < \epsilon' = 1/4$,
  Logo σ_W é EEE;
- σ_L: $p^* = 0$
  $\delta_\pi = p(3-4\epsilon p) > 0,$
  se $p \neq 0$ e $\epsilon < \epsilon' = 3/4$,
  Logo σ_L é EEE;
- σ_{mix}: $p^* = 3/4$
  $\delta_\pi = -3/4\epsilon(3/4-p)^2 < 0,$
  se $p \neq 3/4$ e $\epsilon > 0$,
  Logo σ_W não é EEE;

Exem. 3 EEE: Falcão$\times$Pombo

- Curso John Liu “Population Games”
  Transp.: 27,28,29,30,31,32/54
- Falcão: Agressivo
- Pombo: Pacifico
- Falcão ganha de Pombo = v
- Falcão versus Falcão = (v-c)/2
- Pombo versus Pombo = v/2
- Jogo simétrico

Exem. 3 EEE: Falcão$\times$Pombo

	H	D
H	(v-c)/2	v
D	0	v/2

- x - proporção usuários que usam H
- $1 - x$ - proporção usuários que usam D
- Estratégia: $\sigma = \langle p, 1 - p \rangle$

Exem. 3 EEE: Falcão×Pombo

- $\pi(\sigma, \mathbf{X}) = p.\pi(H, \mathbf{X}) + (1-p).\pi(D, \mathbf{X})$
- $\pi(H, \mathbf{X}) = x.\pi(H, H) + (1-x)\pi(H, D) =$
  $x(v-c)/2 + (1-x)v$
- $\pi(D, \mathbf{X}) = x.\pi(D, H) + (1-x)\pi(D, D) =$
  $0 + (1-x)v/2$

- $\pi(\sigma, \mathbf{X}) =$
  $px(v-c)/2 + p(1-x)v + (1-p)(1-x)v/2$

Exem. 3 EEE: Falcão$\times$Pombo

- $\pi(\sigma, \mathbf{X}) =$
  $px(v-c)/2 + p(1-x)v + (1-p)(1-x)v/2$
- Analisando: $v < c$
- $x = 0$: só pombos
  $\pi(\sigma, \mathbf{X}) = pv + (1-p)v/2 = (1+p)v/2$
  Maior ganho: $p = 1$, população falcão cresce
- $x = 1$: só falcões
  $\pi(\sigma, \mathbf{X}) = p(v-c)/2$
  Maior ganho: $p = 0$, população pombo cresce
- $x = 0$ e $x = 1$ não são EEE

Exem. 3 EEE: Falcão$\times$Pombo

- Est. Candidata a EEE; $\sigma^* = \langle p^*, 1 - p^* \rangle$
- Est. Mutantes: $\sigma = \langle p, 1 - p \rangle$
- Calculado X_ϵ

$$\begin{aligned}
X_\epsilon &= (1-\epsilon).\sigma^* + \epsilon.\sigma \\
&= (1-\epsilon)\langle p^*, 1-p^* \rangle + \epsilon \langle p, 1-p \rangle \\
&= \langle (1-\epsilon)p^* + \epsilon p, (1-\epsilon)(1-p^*) + \epsilon(1-p) \rangle \\
&= \langle p^* + \epsilon(p - p^*), (1-p^*) - \epsilon(p - p^*) \rangle
\end{aligned}$$

Exem. 3 EEE: Falcão$\times$Pombo

- Como σ^* é EEE; $X^* = \langle p^*, 1 - p^* \rangle$

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}) = pp^* \frac{(v-c)}{2} + p(1-p^*)v + (1-p)(1-p^*)\frac{v}{2}$$

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}) = (1-p^*)\frac{v}{2} + \frac{pc}{2}(\frac{v}{c} - p^*)$$

- se $p^* < v/c \;\Rightarrow\; p = 1$ é melhor resp.
- se $p^* > v/c \;\Rightarrow\; p = 1$ é melhor resp.
- se $p^* = v/c \;\Rightarrow\;$ melhor resp. não depende de p
    - $p^* = v/c$ é Bom Candidato a EEE

Exem. 3 EEE: Falcão$\times$Pombo

- Candidato a EEE: $\sigma^* = \langle v/c, 1 - v/c\rangle$, $v < c$
- Mostrar: $\pi(\sigma^*, \mathbf{X}_\epsilon) > \pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon)$
- $X_\epsilon = \langle p^* + \epsilon(p - p^*), (1 - p^*) - \epsilon(p - p^*)\rangle$

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) = px_\epsilon \frac{(v-c)}{2} + p(1-x_\epsilon)v + (1-p)(1-x_\epsilon)\frac{v}{2}$$

$$= p(p^*+\epsilon(p-p^*))\frac{(v-c)}{2} + p(1-(p^*+\epsilon(p-p^*)))v +$$

$$(1-p)(1-(p^*+\epsilon(p-p^*)))\frac{v}{2}$$

Exem. 3 EEE: Falcão×Pombo

$$\pi(\sigma^*, \mathbf{X}_\epsilon) = p^*(p^* + \epsilon(p - p^*))\frac{(v-c)}{2} + p^*(1 - (p^* + \epsilon(p - p^*)))v +$$

$$(1 - p^*)(1 - (p^* + \epsilon(p - p^*)))\frac{v}{2}$$

Substituindo p^* por v/c

$$\pi(\sigma^*, \mathbf{X}_\epsilon) - \pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) = \frac{\epsilon c}{2}(p^* - p)^2 > 0$$

Logo, $\sigma^* = \langle \frac{v}{c}, 1 - \frac{v}{c} \rangle$, $v < c$ é EEE.

Exem. 3 EEE: Falcão$\times$Pombo

- Exercício:

Mostre que se $c \leq v$ então H é um EEE.

Exem. 3 EEE: Falcão×Pombo

$$\pi(\sigma^*, \mathbf{X}_\epsilon) = p^*(p^* + \epsilon(p - p^*))\frac{(v-c)}{2} + p^*(1 - (p^* + \epsilon(p - p^*)))v +$$

$$(1 - p^*)(1 - (p^* + \epsilon(p - p^*)))\frac{v}{2}$$

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) = p(p^* + \epsilon(p - p^*))\frac{(v-c)}{2} + p(1 - (p^* + \epsilon(p - p^*)))v +$$

$$(1 - p)(1 - (p^* + \epsilon(p - p^*)))\frac{v}{2}$$

Substituindo p^* por 1

Exem. 3 EEE: Falcão×Pombo

Substituindo p^* por 1

$$\pi(\sigma^*, \mathbf{X}_\epsilon) = (1 + \epsilon(p-1))\frac{(v-c)}{2} - \epsilon(p-1)v$$

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) = p(1 + \epsilon(p-1))\frac{(v-c)}{2} - p\epsilon(p-1)v +$$
$$\epsilon(p-1)^2\frac{v}{2}$$

$$\pi(\sigma^*, \mathbf{X}_\epsilon) - \pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) = (1-p)[1 + \epsilon(p-1))\frac{(v-c)}{2} +$$
$$(1-p)\epsilon v - (1-p)^2\frac{v}{2}\epsilon]$$

Exem. 3 EEE: Falcão×Pombo

$$\pi(\sigma^*, \mathbf{X}_\epsilon) - \pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) = (1-p)\Big[(1+\epsilon(p-1))\frac{(v-c)}{2} +$$

$$(1-p)\epsilon v - (1-p)^2\frac{v}{2}\epsilon\Big]$$

$$= (1-p)\Big[(1+\epsilon(p-1))\frac{(v-c)}{2} + \epsilon v(1-p)(1-\frac{1-p}{2})\Big]$$

$$= (1-p)\Big[(1+\epsilon(p-1))\frac{(v-c)}{2} + \epsilon v(1-p)\frac{1+p}{2}\Big]$$

$$= (1-p)\Big[\frac{(v-c)}{2} + \epsilon(1-p)(v\frac{1+p}{2} - \frac{(v-c)}{2})\Big]$$

$$= (1-p)\Big[\frac{(v-c)}{2} + \epsilon(1-p)\frac{vp+c}{2}\Big] > 0$$

Exem. 4 EEE: Contas$\times$Conchas

- Numa Ilha distante a população usa duas moedas no comércio: conchas CH e contas CT;
- Transações só podem ser efetuadas mesma moeda;
- O comerciante ganha 1 se a transação é concretizada e 0 caso contrário;
    - x - proporção usuários que usam CT
    - $1 - x$ - proporção usuários que usam CH
    - Estratégia: $\sigma = \langle p, 1 - p \rangle$
      p - probabilidade de indivíduo usar CT

Exem. 4 EEE: Contas$\times$Conchas

- $\pi(\sigma, \mathbf{X}) = p.\pi(CT, \mathbf{X}) + (1-p).\pi(CH, \mathbf{X})$
- $\pi(CT, \mathbf{X}) = x.\pi(CT, CT) + (1 - x).\pi(CT, CH) = x.1 + (1-x).0 = x$
- $\pi(CH, \mathbf{X}) = (1-x).\pi(CH, CH) + x\pi(CH, CT) = (1-x).1 + x.0 = (1-x)$
- $\pi(\sigma, \mathbf{X}) = px + (1-p)(1-x) = (1-x) + p(2x-1)$

Exem. 4 EEE: Contas$\times$Conchas

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}) = (1 - x) + p(2x - 1)$$

- $\sigma^*_{CT} = \langle 1, 0 \rangle$ é Candidato EEE

  $$x > \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; melhor\ resp.\ p = 1 \;\Rightarrow\; x = 1$$

- $X_\epsilon = \langle p^* + \epsilon(p - p^*), (1 - p^*) - \epsilon(p - p^*) \rangle$
- Fazendo $p^* = 1$

$$X_\epsilon = \langle 1 - \epsilon(1 - p), \epsilon(1 - p) \rangle$$

Exem. 4 EEE: Contas×Conchas

- $\pi(\sigma, \mathbf{X}) = (1-x) + p(2x-1)$
- $X_\epsilon = \langle 1-\epsilon(1-p), \epsilon(1-p) \rangle$

- $\pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) = \epsilon(1-p) + p(1-2\epsilon(1-p))$
- $\pi(\sigma^*_{CT}, \mathbf{X}_\epsilon) = \epsilon(1-p) + p^*(1-2\epsilon(1-p))$
- $p^* = 1$

- $\pi(\sigma^*_{CT}, \mathbf{X}_\epsilon) = (1-\epsilon(1-p))$

Exem. 4 EEE: Contas$\times$Conchas

- $\pi(\sigma^*_{CT}, \mathbf{X}_\epsilon) = (1 - \epsilon(1-p))$
- $\pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) = \epsilon(1-p) + p(1 - 2\epsilon(1-p))$

$$\pi(\sigma^*_{CT}, \mathbf{X}_\epsilon) - \pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) =$$

$$= (1 - \epsilon(1-p)) - \epsilon(1-p) - p(1 - 2\epsilon(1-p))$$

$$= (1 - 2\epsilon(1-p)) - p(1 - 2\epsilon(1-p))$$

$$= (1-p)(1 - 2\epsilon(1-p))$$

Exem. 4 EEE: Contas$\times$Conchas

$$\pi(\sigma^*_{CT}, \mathbf{X}_\epsilon) - \pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) > 0$$

$$= (1-p)(1-2\epsilon(1-p)) > 0$$

- Como $(1-p) > 0$
- $(1-2\epsilon(1-p)) > 0 \Leftrightarrow \epsilon < \frac{1}{2}$
- $\sigma^*_{CT} = \langle 1, 0\rangle$ é EEE

Exem. 4 EEE: Contas×Conchas

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}) = px + (p-1)(1-x) = (1-x) + p(2x-1)$$

- $\sigma^*_{CH} = \langle 0, 1 \rangle$ é Candidato EEE

$$x < \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; melhor\ resp.\ p = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

- $X_\epsilon = \langle p^* + \epsilon(p - p^*), (1 - p^*) - \epsilon(p - p^*) \rangle$
- Fazendo $p^* = 0$

$$X_\epsilon = \langle \epsilon p, (1 - \epsilon p) \rangle$$

Exem. 4 EEE: Contas×Conchas

- $\pi(\sigma, \mathbf{X}) = (1 - x) + p(2x - 1)$
- $X_\epsilon = \langle \epsilon p, (1 - \epsilon p) \rangle$
- $\pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) = (1 - \epsilon p) - p(1 - 2\epsilon p)$
- $\pi(\sigma^*_{CH}, \mathbf{X}_\epsilon) = (1 - \epsilon p) - p^*(1 - 2\epsilon p)$
- $p^* = 0$
- $\pi(\sigma^*_{CH}, \mathbf{X}_\epsilon) = (1 - \epsilon p)$

Exem. 4 EEE: Contas×Conchas

- $\pi(\sigma^*_{CH}, \mathbf{X}_\epsilon) = (1 - \epsilon p)$
- $\pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) = (1 - \epsilon p) - p(1 - 2\epsilon p)$

$$\pi(\sigma^*_{CH}, \mathbf{X}_\epsilon) - \pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) =$$

$$= (1 - \epsilon p) - ((1 - \epsilon p) - p(1 - 2\epsilon p))$$

$$= p(1 - 2\epsilon p)$$

Exem. 4 EEE: Contas×Conchas

$$\pi(\sigma^*_{CH}, \mathbf{X}_\epsilon) - \pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) > 0$$

$$= p(1 - 2\epsilon p) > 0$$

- Como $p > 0$
- $p(1 - 2\epsilon p) > 0 \iff \epsilon < \frac{1}{2}$
- $\sigma^*_{CH} = \langle 0, 1 \rangle$ é EEE

Exem. 4 EEE: Contas$\times$Conchas

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}) = (1 - x) + p(2x - 1)$$

- $\sigma^*_{mix} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ é Candidato EEE

  $$x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; melhor\ resp.\ independe\ p$$

- Fazendo $p^* = \frac{1}{2}$
- $X_\epsilon = \langle \frac{1}{2} + \epsilon(p - \frac{1}{2}), \frac{1}{2} - \epsilon(p - \frac{1}{2}) \rangle$

Exem. 4 EEE: Contas$\times$Conchas

- $\pi(\sigma, \mathbf{X}) = (1 - x) + p(2x - 1)$
- $X_\epsilon = \langle \frac{1}{2} + \epsilon(p - \frac{1}{2}), \frac{1}{2} - \epsilon(p - \frac{1}{2}) \rangle$

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) = (\frac{1}{2} - \epsilon(p - \frac{1}{2})) + p(2(\frac{1}{2} + \epsilon(p - \frac{1}{2})) - 1)$$

$$= (\frac{1}{2} - \epsilon(p - \frac{1}{2})) + 2p\epsilon(p - \frac{1}{2})$$

- Fazendo $p^* = \frac{1}{2}$

$$\pi(\sigma^*, \mathbf{X}_\epsilon) = (\frac{1}{2} - \epsilon(p - \frac{1}{2})) + \epsilon(p - \frac{1}{2})) = \frac{1}{2}$$

Exem. 4 EEE: Contas$\times$Conchas

- $\pi(\sigma^*, \mathbf{X}_\epsilon) - \pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon) =$
- $\frac{1}{2} - ((\frac{1}{2} - \epsilon(p - \frac{1}{2})) + 2p\epsilon(p - \frac{1}{2})) =$
- $\epsilon(p - \frac{1}{2}))(1 - 2p) =$
- $\frac{\epsilon}{2}(2p - 1)(1 - 2p) =$
- $-\frac{\epsilon}{2}(1 - 2p)(1 - 2p) =$
- $-\frac{\epsilon}{2}(1 - 2p)^2 < 0$, para todo $\epsilon > 0$

- Logo $\sigma^*_{mix} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ **Não** é EEE

Exemplos de EEE

- Curso John Liu “Population Games”
  1. Linux $\times$ Windows
     Transp.: 24,25,26/54
  2. Hawk-Dove Game
     Transp.: 27,28,29,30,31,32/54
  3. The evolution of money Game
     Transp.: 33,34,35,36,37,38/54
- Dividir a turma em grupos
  - ler e entender
  - apresentar
- Fazer Exercício transp. 39/54

Jogos com $N > 2$ Jogadores

- Game Theory and Strategy, P. Straffin, 1993
- Capítulos: 19, 20, 21 e 22
    - Coalizões
    - Votação
    - Escolhas em Seguência

Motivação

- A maior parte dos jogos de interesse no mundo real envolvem mais de dois jogadores.
- Novas possibilidades de ação e situações adicionam dificuldade à essa categoria de problemas.
- Salvo raríssimas exceções, jogos com três ou mais jogadores são manipuláveis, e a estratégia pode não ser sincera.

Coalizão

- É a formação de um grupo de jogadores buscando melhores recompensas
- Quando possível, todo jogador gostaria de estar em uma coalizão, ser deixado de fora é custoso.
- A estratégia em que um jogador se prejudica menos quando defrontando uma coalizão é chamada de estratégia prudente.
- É interessante tentar prever quais coalizões provavelmente se formarão.

Dilema Prisioniero 3 Jogadores

- Jogador possui 2 ações:
  Cooperar C
  Delatar D

- Jogo é simétrico

1. $\pi(C, C, C) = 1, 1, 1$
2. $\pi(C, C, D) = 7, 7, 0$
3. $\pi(C, D, D) = 7, 0, 0$
4. $\pi(D, D, D) = 5, 5, 5$
5. Os outros são permutações.

- Com analisar este jogo?
- Como desenhar a matrix?

Dilema Prisioniero 3 Jogadores