Tema 7

Circuitos de Corriente Alterna (Circuitos con fuentes sinusoidales)

Teoría de Circuitos

Dpto. Ingeniería Eléctrica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

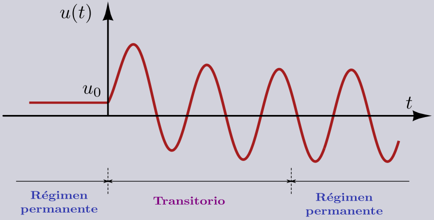
Índice

Índice

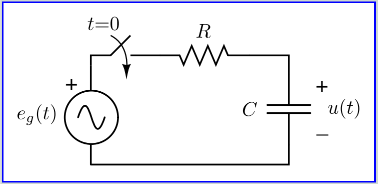
Regímenes transitorio y permanente

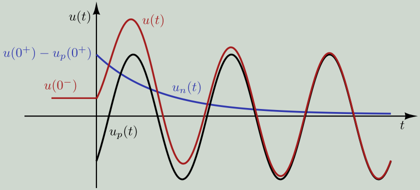
Circuito dinámico en corriente alterna

Aparece una evolución que adapta las condiciones iniciales a la respuesta sinusoidal impuesta por las fuentes.



Conexión de un circuito RC a una fuente de corriente alterna



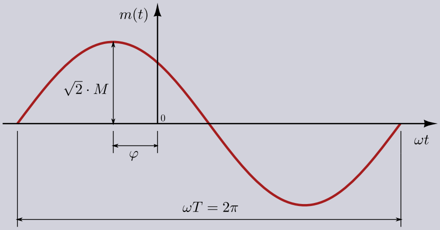


Índice

Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

Parámetros de ondas sinusoidales

$$\boxed{m(t) = \sqrt{2} \cdot M \cdot \cos(\omega t + \varphi)}$$



1. $M \equiv$ Valor eficaz o RMS.
2. $M\,\sqrt{2} \equiv$ Valor máximo o de pico.
3. $\omega \equiv$ Frecuencia angular [rad/s].
4. $\varphi \equiv$ Fase inicial (rad. o grados).

- $\omega = 2\,\pi\,f = \frac{2\,\pi}{T}$

  $f \equiv$ Frecuencia [Hz].

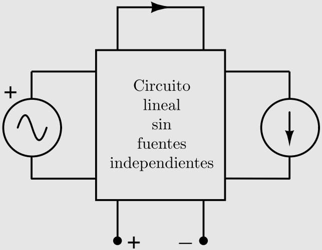
  $T \equiv$ Periodo [s].

- $M = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T m^2(t)\,dt} = \frac{M_{max}}{\sqrt{2}}$

Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$u_g(t) = \sqrt{2} \cdot U_g \cdot \cos(\omega t + \varphi_{ug})$$



$$i_g(t) = \sqrt{2} \cdot I_g \cdot \cos(\omega t + \varphi_{ig})$$

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

1. En régimen permanente de alterna todas las tensiones e intensidades son ondas sinusoidales (**coseno**) de la misma frecuencia que la de las fuentes de excitación (frecuencia única en el circuito).
2. En caso de existir fuentes de distintas frecuencias (incluida corriente continua), será necesario aplicar superposición para obtener la respuesta a cada frecuencia.

Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

Ejemplo de tensión sinusoidal

Determinar la frecuencia angular, fase inicial, frecuencia, valor de pico y valor eficaz de la siguiente tensión sinusoidal:

$$u(t) = 70\sqrt{2}\cos(50\,t + 60^\circ)\,\text{V}$$

Solución: $\omega = 50$ rad/s; $\varphi = 60^\circ$; $f = \frac{50}{2\pi}$ Hz; $U_p = 70\sqrt{2}$ V; $U = 70$ V

Ejemplo de intensidad sinusoidal

Determinar la frecuencia angular, fase inicial, frecuencia, valor de pico y valor eficaz de la siguiente intensidad sinusoidal:

$$i(t) = 20\sin(\pi\,1000\,t + 30^\circ)\,\text{A}$$

Solución: $\omega = 3141{,}6$ rad/s; $\varphi =$ +30º ; $f = 500$ Hz; $I_p = 20$ A; $I = \frac{20}{\sqrt{2}}$ A

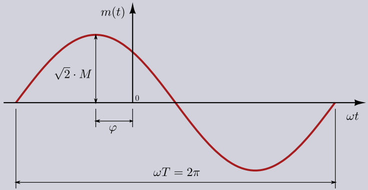
Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

Concepto de Fasor

El “fasor” es un número complejo asociado a una señal sinusoidal, cuyo módulo es el valor eficaz y su fase la fase inicial de la señal.

Representación temporal

$$\begin{aligned} m(t) &= \sqrt{2}\cdot M\cdot\cos(\omega t+\varphi) \\ &= \Re e\{\sqrt{2}\cdot M e^{j(\omega t+\varphi)}\} \\ &= \Re e\{\sqrt{2}\cdot e^{j\omega t}\cdot \underbrace{M e^{j\varphi}}_{Fasor}\} \end{aligned}$$

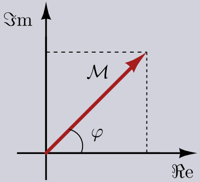


Representación Fasorial

$$\underbrace{\mathcal{M} \triangleq M e^{j\varphi} = M\angle\varphi}$$

$$\Downarrow$$

Fasor asociado a $m(t)$



Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

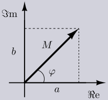
Representación de números complejos

F. Rectangular	**F. Polar**	**F. Exponencial**
$\mathcal{M} = a + bj$	$\mathcal{M} = M\angle\varphi$	$\mathcal{M} = Me^{j\varphi}$
$\mathcal{M}^* = a - bj$	$\mathcal{M}^* = M\angle-\varphi$	$\mathcal{M}^* = Me^{-j\varphi}$

($* \equiv$ conjugado)

$M = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad a = M\cos\varphi$

$\varphi = \arctan\frac{b}{a}$ $\quad b = M\,\mathrm{sen}\,\varphi$



Fórmula de Euler

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\cdot\mathrm{sen}\,\varphi}$$

$$\cos\varphi = \Re e\left\{e^{j\varphi}\right\}$$

$$\mathrm{sen}\,\varphi = \Im m\left\{e^{j\varphi}\right\}$$

Multiplicación y división de números complejos

		$\mathcal{M}_1\cdot\mathcal{M}_2$	$\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_2$
$M_1\angle\varphi_1,\ M_2\angle\varphi_2$	$\longrightarrow$	$M_1M_2\angle(\varphi_1+\varphi_2)$	$\frac{M_1}{M_2}\angle(\varphi_1-\varphi_2)$
$(a_1+jb_1),\ (a_2+jb_2)$	$\longrightarrow$	$(a_1a_2-b_1b_2)+j(a_1b_2+b_1a_2)$	$\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+j(b_1a_2-b_2a_1)}{a_2^2+b_2^2}$

Suma de números complejos

		$\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$
$M_1\angle\varphi_1,\ M_2\angle\varphi_2$	$\longrightarrow$	$(M_1\cos\varphi_1+M_2\cos\varphi_2)+j(M_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_1+M_2\,\mathrm{sen}\,\varphi_2)$
$(a_1+jb_1),\ (a_2+jb_2)$	$\longrightarrow$	$(a_1+a_2)+j(b_1+b_2)$

Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

Ejemplos de fasores

Obtener los fasores asociados a las siguientes funciones sinusoidales:

$$u_1(t) = 150\sqrt{2}\,cos(\omega\,t + 60^\circ)$$

$$u_2(t) = 55\,\cos(\omega\,t - 90^\circ)$$

Solución: $\mathcal{U}_1 = 150\angle 60^\circ$; $\mathcal{U}_2 = \frac{55}{\sqrt{2}}\angle -90^\circ$

Ejemplos de operaciones con fasores

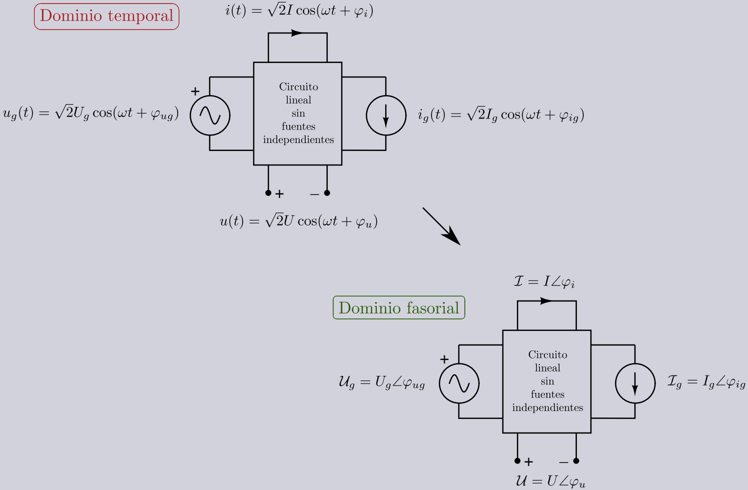
Aplicando el análisis fasorial, calcular la siguiente suma:

$$u(t) = 150\sqrt{2}\,\cos(\omega\,t + 60^\circ) + 55\sqrt{2}\,\cos(\omega\,t - 90^\circ)$$

Solución: $u(t) = 106\sqrt{2}\,\cos(\omega\,t + 44{,}96^\circ)$

Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

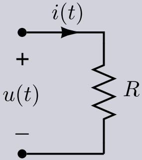
Fasores asociados a las tensiones e intensidades del circuito



Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

Tensión e intensidad en los componentes básicos: Resistencias

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \varphi_u) = \Re e[\sqrt{2}e^{j\omega t}\mathcal{U}]$$
$$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi_i) = \Re e[\sqrt{2}e^{j\omega t}\mathcal{I}]$$



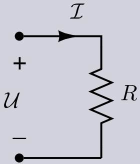
$$\boxed{u(t) = R\cdot i(t)}$$

$$\searrow$$

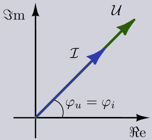
$$\Re e[\sqrt{2}e^{j\omega t}\mathcal{U}] = \Re e[\sqrt{2}e^{j\omega t}R\mathcal{I}]$$

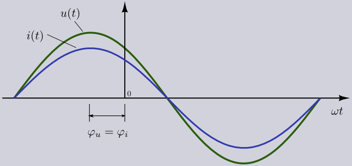
$$\Downarrow$$

$$\Re e[\sqrt{2}e^{j\omega t}\{\mathcal{U} - R\cdot\mathcal{I}\}] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathcal{U} = R\cdot\mathcal{I}}$$



$$\mathcal{U} = R\cdot\mathcal{I} \quad \begin{cases} U = R\cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i \end{cases}$$

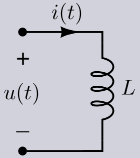




Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

Tensión e intensidad en los componentes básicos: Inductancias

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \varphi_u) = \Re e[\sqrt{2}e^{j\omega t}\mathcal{U}]$$
$$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi_i) = \Re e[\sqrt{2}e^{j\omega t}\mathcal{I}]$$



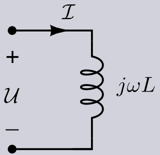
$$\boxed{u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}}$$

$$\Rightarrow$$

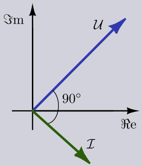
$$\Re e[\sqrt{2}e^{j\omega t}\mathcal{U}] = \Re e[\sqrt{2}\cdot j\omega e^{j\omega t}L\mathcal{I}]$$

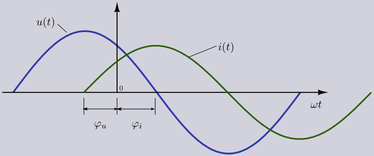
$$\Downarrow$$

$$\Re e[\sqrt{2}e^{j\omega t}\{\mathcal{U} - j\omega L\cdot\mathcal{I}\}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{U} = j\omega L\cdot\mathcal{I}}$$



$$\mathcal{U} = j\omega L\cdot\mathcal{I} \begin{cases} U = \omega L\cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i + 90^\circ \end{cases}$$

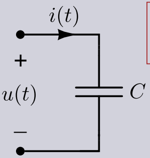




Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

Tensión e intensidad en los componentes básicos: Condensadores

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \varphi_u) = \Re e[\sqrt{2}e^{j\omega t}\mathcal{U}]$$
$$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi_i) = \Re e[\sqrt{2}e^{j\omega t}\mathcal{I}]$$



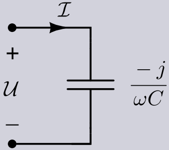
$$\boxed{i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}}$$

$$\Downarrow$$

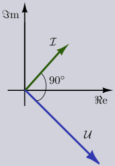
$$\Re e[\sqrt{2}e^{j\omega t}\mathcal{I}] = \Re e[\sqrt{2} \cdot j\omega e^{j\omega t} C\mathcal{U}]$$

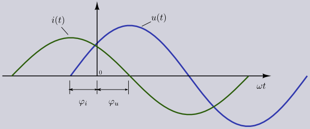
$$\Downarrow$$

$$\Re e[\sqrt{2}e^{j\omega t}\{\mathcal{I} - j\omega C \cdot \mathcal{U}\}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{U} = \frac{-j}{\omega C} \cdot \mathcal{I}}$$



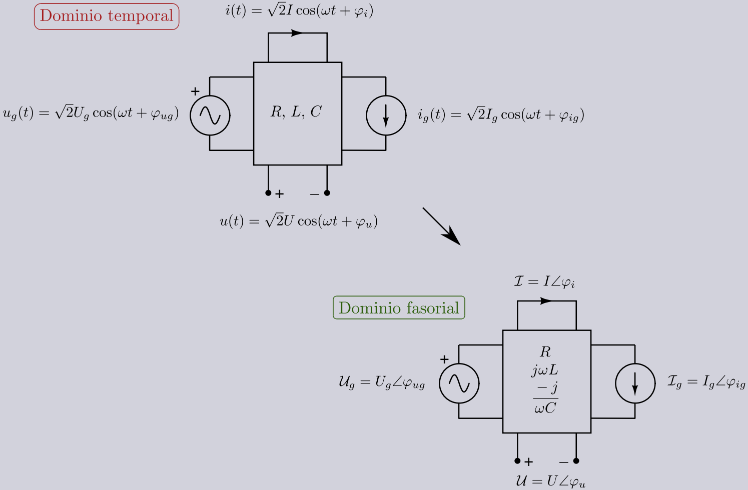
$$\mathcal{U} = \frac{-j}{\omega C} \cdot \mathcal{I} \quad \begin{cases} U = \dfrac{1}{\omega C} \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i - 90^\circ \end{cases}$$





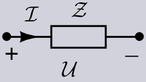
Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

Análisis del circuito en el dominio fasorial



Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

Relación entre tensión e intensidad en fasores



$$\mathcal{Z} = Z\angle\varphi = R + jX$$

$$U\angle\varphi_u = Z\angle\varphi \cdot I\angle\varphi_i \quad \begin{cases} U = Z \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i + \varphi \end{cases}$$

Impedancia compleja (Ohmio [Ω])

$$\mathcal{Z} = \frac{U\angle\varphi_u}{I\angle\varphi_i} = Z\angle\varphi = R + jX$$

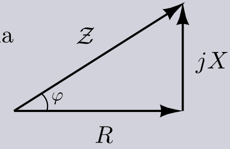
$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$R \equiv \text{Resistencia}$$

$$X > 0 \equiv \text{Reactancia inductiva}$$

$$X < 0 \equiv \text{Reactancia capacitiva}$$

Triángulo de impedancia



Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

Admitancia compleja (Siemens [S])

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{\mathcal{Z}} = \frac{I\angle\varphi_i}{U\angle\varphi_u} = Y\angle\varphi' = G+jB$$

$$\varphi' = -\varphi = \varphi_i - \varphi_u$$

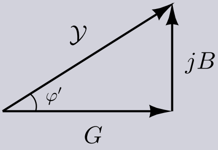
$G \equiv$ Conductancia

$B > 0 \equiv$ Susceptancia capacitiva

$B < 0 \equiv$ Susceptancia inductiva

Triángulo de admitancia

($\varphi' = -\varphi$)



$\mathcal{Z}$ e $\mathcal{Y}$ son números complejos pero no son fasores.
(los fasores están siempre asociados a señales sinusoidales)
Impedancia y admitancia juegan el papel de resistencia y conductancia, cuando tensiones e intensidades son fasores.

Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

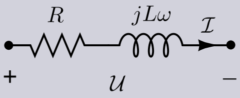
Impedancia y admitancia de resistencia, bobina y condensador

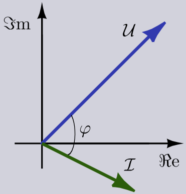
Elemento	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Y}$
Resistencia	R	$\dfrac{1}{R}$
Bobina	$j\,\omega\,L = j\,X_L$	$\dfrac{-\,j}{\omega\,L} = j\,B_L$
Condensador	$\dfrac{-\,j}{\omega\,C} = j\,X_C$	$j\,\omega\,C = j\,B_C$

Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

Impedancia de carácter inductivo ($\mathcal{Z} = R + jX$)

Carácter inductivo $\rightarrow$ $X > 0$; $\varphi > 0$

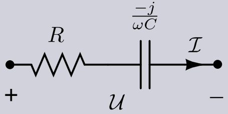


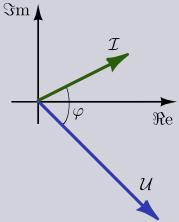


La intensidad está retrasada respecto a la tensión

Impedancia de carácter capacitivo

Carácter capacitivo $\rightarrow$ $X < 0$; $\varphi < 0$



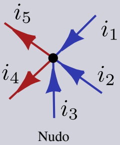


La intensidad está adelantada respecto a la tensión

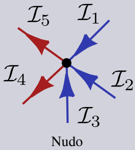
Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

Leyes de Kirchhoff en corriente alterna: Intensidades

$$\begin{aligned}\sum_k i_k(t) &= \sum_k \sqrt{2} I_k \cos(\omega t + \varphi_k) \\ &= \sum_k \Re e[\sqrt{2} e^{j\omega t} I_k e^{j\varphi_k}] \\ &= \sum_k \Re e[\sqrt{2} e^{j\omega t} \mathcal{I}_k] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\sum_k \mathcal{I}_k = 0}\end{aligned}$$



$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

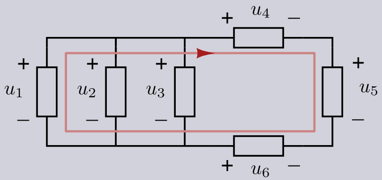


$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 - \mathcal{I}_4 - \mathcal{I}_5 = 0$$

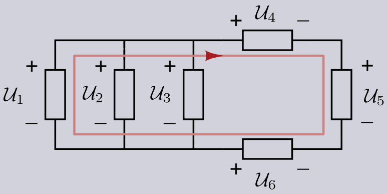
Régimen permanente en circuitos de corriente alterna

Leyes de Kirchhoff en corriente alterna: Tensiones

$$\begin{aligned}\sum_k u_k(t) &= \sum_k \sqrt{2} U_k \cos(\omega t + \varphi_k) \\ &= \sum_k \Re e[\sqrt{2} e^{j\omega t} U_k e^{j\varphi_k}] \\ &= \sum_k \Re e[\sqrt{2} e^{j\omega t} \mathcal{U}_k] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\sum_k \mathcal{U}_k = 0}\end{aligned}$$



$\Leftrightarrow$

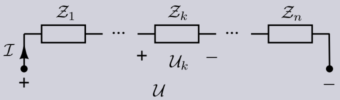


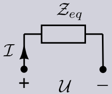
$$-u_1 + u_4 + u_5 - u_6 = 0 \qquad -\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_4 + \mathcal{U}_5 - \mathcal{U}_6 = 0$$

Índice

Análisis de circuitos en régimen permanente de alterna

Asociación de impedancias: asociación en serie

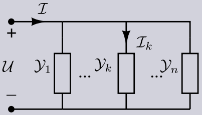


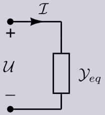


$$\boxed{\mathcal{Z}_{eq} = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{Z}_j}$$

Divisor de tensión: $$\mathcal{U}_k = \mathcal{Z}_k \cdot \mathcal{I} = \mathcal{Z}_k \cdot \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{Z}_{eq}} \rightsquigarrow \boxed{\mathcal{U}_k = \frac{\mathcal{Z}_k}{\sum_{j=1}^{n} \mathcal{Z}_j} \cdot \mathcal{U}}$$

Asociación de impedancias: asociación en paralelo





$$\boxed{\mathcal{Y}_{eq} = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{Y}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\mathcal{Z}_j}}$$

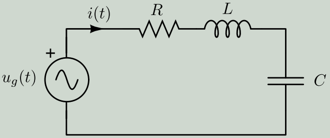
Divisor de intensidad: $$\mathcal{I}_k = \mathcal{Y}_k \cdot \mathcal{U} = \mathcal{Y}_k \cdot \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{Y}_{eq}} \rightsquigarrow \boxed{\mathcal{I}_k = \frac{\mathcal{Y}_k}{\sum_{j=1}^{n} \mathcal{Y}_j} \cdot \mathcal{I}}$$

Análisis de circuitos en régimen permanente de alterna

- Todas las fuentes del circuito de la misma frecuencia (aplicar superposición si es necesario).
- Aplicar las técnicas de análisis de circuitos trabajando con fasores e impedancias/admitancias.
- En caso necesario, transformar los fasores obtenidos al dominio temporal.

Ejemplo de resolución de circuitos en alterna

Calcular la intensidad $i(t)$ en el circuito de la figura sabiendo que $R = 90\,\Omega$, $L = 32$ mH, $C = 5$ μF y $u_g(t) = 750\sqrt{2}\,\cos(5000\,t + 30°)$ V.



Solución: $i(t) = 5\sqrt{2}\,\cos(5000\,t - 23{,}13°)$ A

Análisis de circuitos en régimen permanente de alterna

Ecuaciones de nudos

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{N_{(1,1)}} & \cdots & \mathcal{Y}_{N_{(1,n-1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{Y}_{N_{(n-1,1)}} & \cdots & \mathcal{Y}_{N_{(n-1,n-1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{N_1} \\ \vdots \\ \mathcal{U}_{N_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{N_1} \\ \vdots \\ \mathcal{I}_{N_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{Y}_N \cdot \mathbf{U}_N = \mathbf{I}_N}$$

$\mathbf{Y}_N$ Matriz de admitancias nodales.

$\mathbf{U}_N$ Vector de tensiones de nudos.

$\mathbf{I}_N$ Vector de intensidades inyectadas en los nudos.

Análisis de circuitos en régimen permanente de alterna

Ecuaciones de nudos

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{N_{(1,1)}} & \cdots & \mathcal{Y}_{N_{(1,n-1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{Y}_{N_{(n-1,1)}} & \cdots & \mathcal{Y}_{N_{(n-1,n-1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{N_1} \\ \vdots \\ \mathcal{U}_{N_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{N_1} \\ \vdots \\ \mathcal{I}_{N_{n-1}} \end{pmatrix}$$

1. Elementos de la matriz $\mathbf{Y}_N$

$$\mathcal{Y}_{N_{(j,j)}} = \sum_k \mathcal{Y}_{jk} \quad \text{(sumatorio de admitancias conectadas al nudo } j\text{)}$$

$$\mathcal{Y}_{N_{(j,k)}} = -\mathcal{Y}_{jk} \quad \text{(admitancia total entre el nudo } j \text{ y el nudo } k\text{)}$$

2. Elementos del vector $\mathbf{I}_N$

$\mathcal{I}_{N_j} = \sum_j \mathcal{I}_{N_{pj}} - \mathcal{I}_{N_{nj}}$ (sumatorio de las fuentes de intensidad que inciden en el nudo j, positivas si entran en el nudo y negativas si salen)

Análisis de circuitos en régimen permanente de alterna

Ecuaciones de mallas

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{M_{(1,1)}} & \cdots & \mathcal{Z}_{M_{(1,c-n+1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{Z}_{M_{(c-n+1,1)}} & \cdots & \mathcal{Z}_{M_{(c-n+1,c-n+1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{M_1} \\ \vdots \\ \mathcal{I}_{M_{c-n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{M_1} \\ \vdots \\ \mathcal{U}_{M_{c-n+1}} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{Z}_M \cdot \mathbf{I}_M = \mathbf{U}_M}$$

$\mathbf{Z}_M$ Matriz de impedancias de mallas.

$\mathbf{I}_M$ Vector de intensidades de mallas.

$\mathbf{U}_M$ Vector de tensiones aplicadas a las mallas.

Análisis de circuitos en régimen permanente de alterna

Ecuaciones de mallas

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{M_{(1,1)}} & \cdots & \mathcal{Z}_{M_{(1,c-n+1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{Z}_{M_{(c-n+1,1)}} & \cdots & \mathcal{Z}_{M_{(c-n+1,c-n+1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{M_1} \\ \vdots \\ \mathcal{I}_{M_{c-n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{M_1} \\ \vdots \\ \mathcal{U}_{M_{c-n+1}} \end{pmatrix}$$

1. Elementos de la matriz $\mathbf{Z}_M$

$$\mathcal{Z}_{M_{(j,j)}} = \sum_k \mathcal{Z}_{jk} \quad \text{(sumatorio de impedancias pertenecientes a la malla } j\text{)}$$

$$\mathcal{Z}_{M_{(j,k)}} = -\mathcal{Z}_{jk} \quad \text{(impedancia total común de la malla } j \text{ y la malla } k\text{)}$$

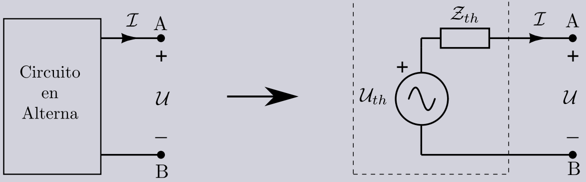
2. Elementos del vector $\mathbf{U}_M$

$$\mathcal{U}_{M_j} = \textstyle\sum_j \mathcal{U}_{M_{pj}} - \mathcal{U}_{M_{nj}}$$

(sumatorio de las fuentes de tensión que pertenecen a la malla j, con signo positivo si la intensidad de malla sale por el terminal positivo de la fuente, y negativo si entra)

Análisis de circuitos en régimen permanente de alterna

Equivalente Thévenin

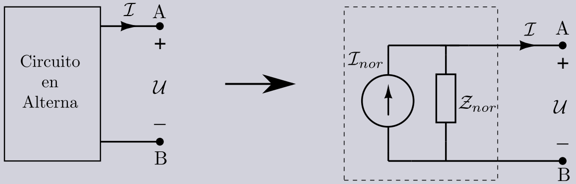


Equivalente Thevenin

$$\boxed{\mathcal{U}_{th} = \mathcal{U}_{ca}\big|_{AB}}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}_{th} = \mathcal{Z}_{eq}\big|_{AB}}$$

Equivalente Norton



Equivalente Norton

$$\boxed{\mathcal{I}_{nor} = \mathcal{I}_{cc}\big|_{AB}}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}_{nor} = \mathcal{Z}_{eq}\big|_{AB}}$$

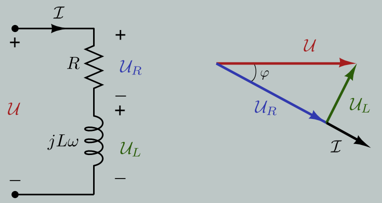
Análisis de circuitos en régimen permanente de alterna

Diagramas fasoriales

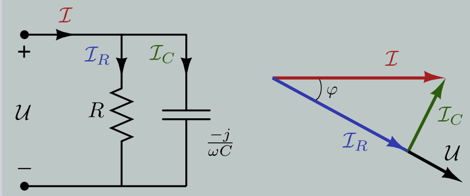
Un diagrama fasorial es una representación, en el plano complejo, de los fasores asociados a las tensiones e intensidades de un circuito.

- Sirve de ayuda para la resolución de problemas en corriente alterna.
- La solución geométrica puede ser más rápida e intuitiva que la analítica.
- Puede ayudar a identificar un error cometido durante el proceso de cálculo.

Divisor de tensión inductivo



Divisor de intensidad capacitivo

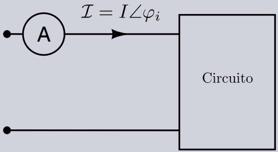


Índice

Medidas de tensión e intensidad en corriente alterna

Amperímetro

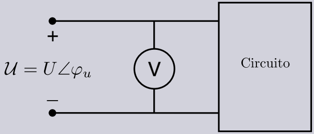
Mide el valor eficaz de la onda de intensidad.



A $= I$

Voltímetro

Mide el valor eficaz de la onda de tensión.

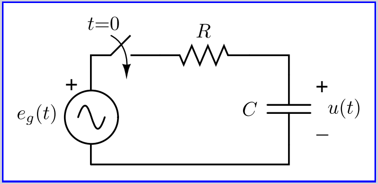


V $= U$

Índice

Régimen transitorio en circuitos de corriente alterna

Transitorios de primer orden en circuito RC

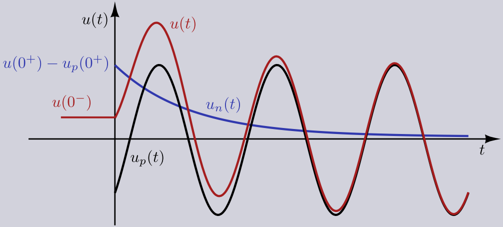


$$u(t) = u_p(t) + \left[u(0^+) - u_p(0^+)\right] \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$u_p(t) = \sqrt{2}\,U\ \cos(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \tau = RC$$

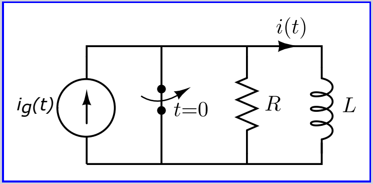
$$u(0^-) = u(0^+) = U_0$$

$$\boxed{u(t) = \sqrt{2}\,U\ \cos(\omega t + \varphi) + (U_0 - \sqrt{2}\,U\ \cos\varphi) \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}}$$



Régimen transitorio en circuitos de corriente alterna

Transitorios de primer orden en circuito RL

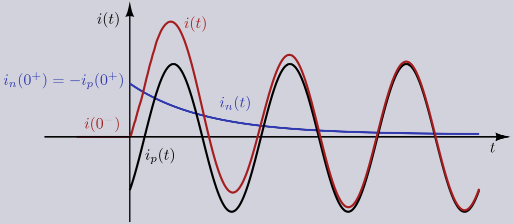


$$i(t) = i_p(t) + \left[i(0^+) - i_p(0^+)\right] \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$i_p(t) = \sqrt{2}\, I \cos(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \tau = L/R$$

$$i(0^-) = i(0^+) = I_0$$

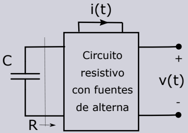
$$\boxed{i(t) = \sqrt{2}\, I \cos(\omega t + \varphi) + (I_0 - \sqrt{2}\, I \cos\varphi) \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}}$$



Régimen transitorio en circuitos de corriente alterna

Transitorios de primer orden: Cálculo de otras variables del circuito

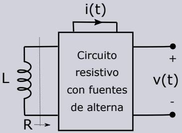
- Cualquier tensión o intensidad del circuito evoluciona desde su valor inicial a su valor final exponencialmente con la constante de tiempo determinada por el condensador o la bobina.
- Circuito de primer orden con condensador (RC):



$$i(t) = \sqrt{2}\, I\, \cos(\omega t + \varphi_i) + \left[I_0 - \sqrt{2}\, I\, \cos\varphi_i \right] \mathrm{e}^{-t/(RC)}$$

$$v(t) = \sqrt{2}\, V\, \cos(\omega t + \varphi_v) + \left[V_0 - \sqrt{2}\, V\, \cos\varphi_v \right] \mathrm{e}^{-t/(RC)}$$

- Circuito de primer orden con bobina (RL):



$$i(t) = \sqrt{2}\, I\, \cos(\omega t + \varphi_i) + \left[I_0 - \sqrt{2}\, I\, \cos\varphi_i \right] \mathrm{e}^{-t/(L/R)}$$

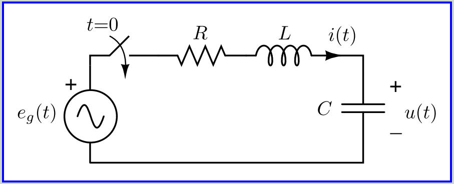
$$v(t) = \sqrt{2}\, V\, \cos(\omega t + \varphi_v) + \left[V_0 - \sqrt{2}\, V\, \cos\varphi_v \right] \mathrm{e}^{-t/(L/R)}$$

Régimen transitorio en circuitos de corriente alterna

Transitorios de segundo orden

- Se estudiará, a modo de ejemplo, el circuito RLC Serie.
- Para cualquier otro circuito, habrá que identificar la constante de amortiguamiento y la frecuencia de resonancia del transitorio.

Transitorios de segundo orden en circuito RLC Serie

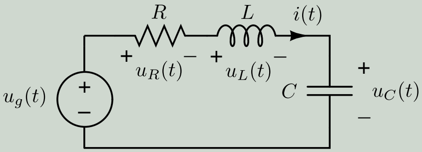


$$u(0^-) = U_0 \quad ; \quad i(0^-) = I_0$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad ; \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Régimen transitorio en circuitos de corriente alterna

Transitorios de segundo orden en circuito RLC Serie



$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L}\frac{du_g(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = \frac{u_g(t)}{LC}$$

Condiciones iniciales:

$$u_C(0) = U_0 \qquad i(0) = C \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = I_0$$

Régimen transitorio en circuitos de corriente alterna

Transitorios de segundo orden en circuito RLC Serie

Polinomio característico: $s^2 + 2\alpha \cdot s + \omega_o^2 = 0$, con $\alpha = \frac{R}{2L}$ y $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Tipos de respuesta natural:

- **Sobreamortiguada** ($\alpha > \omega_o$): $s_1, s_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$, $s_1, s_2 < 0$

$$u_n(t) = K_1 \, \mathrm{e}^{s_1 t} + K_2 \, \mathrm{e}^{s_2 t}$$

- **Críticamente amortiguada** ($\alpha = \omega_o$): $s_1 = s_2 = -\alpha < 0$

$$u_n(t) = (K_1 \, t + K_2) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

- **Subamortiguada** ($\alpha < \omega_o$): $s_1, s_2 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_n$

$$u_n(t) = K_1 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d t + K_2) \quad ; \quad \omega_n \equiv \text{frecuencia natural}$$

Régimen transitorio en circuitos de corriente alterna

Transitorios de segundo orden en circuito RLC Serie

- La respuesta en régimen permanente se obtiene usando técnicas de ánalisis de circuitos en alterna, $u_{\mathsf{rp}}(t) = \sqrt{2}\,V\ \cos(\omega t + \varphi_v)$.
- Las constantes de integración, K_1 y K_2, se obtienen imponiendo las condiciones iniciales:

$$u_C(0) = U_0 \qquad i(0) = C\ \left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0} = I_0$$

- La respuesta completa se obtiene como suma de las respuesta natural y en régimen permanente:

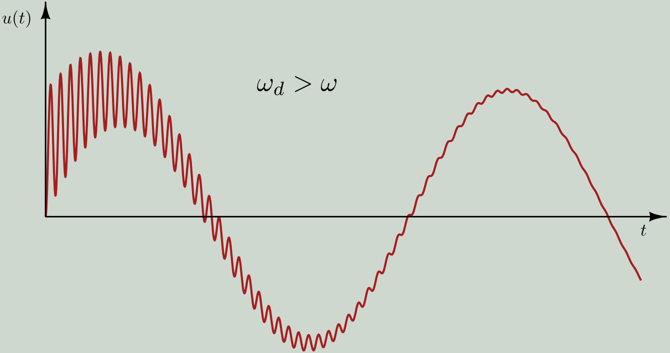
$$v(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\,V\ \cos(\omega t + \varphi_v) + K_1\,\mathsf{e}^{s_1\,t} + K_2\,\mathsf{e}^{s_2\,t} \\ \sqrt{2}\,V\ \cos(\omega t + \varphi_v) + (K_1\,t + K_2)\cdot\mathsf{e}^{-\alpha\,t} \\ \sqrt{2}\,V\ \cos(\omega t + \varphi_v) + K_1\,\mathsf{e}^{-\alpha\,t}\cdot\cos(\omega_d\,t + K_2) \end{cases}$$

Régimen transitorio en circuitos de corriente alterna

Transitorios de segundo orden en circuito RLC Serie

Ejemplo de respuesta subamortiguada:

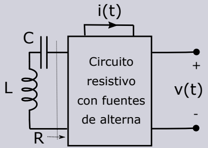
$$\boxed{u(t) = \sqrt{2}\,V\ \cos(\omega t + \varphi_v) + K_1\,\mathrm{e}^{-\alpha\,t}\cdot\cos(\omega_d\,t + K_2)}$$



Régimen transitorio en circuitos de corriente alterna

Transitorios de segundo orden: Cálculo de otras variables del circuito

- Cualquier tensión o intensidad del circuito, $x(t)$, evoluciona desde su valor inicial a su evolución sinusoidal en régimen permanente según sea la respuesta natural del circuito.
- Circuito de segundo orden RLC serie:



$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\,X\ \cos(\omega t + \varphi_v) + K_1\,\mathrm{e}^{s_1\,t} + K_2\,\mathrm{e}^{s_2\,t} \\ \sqrt{2}\,X\ \cos(\omega t + \varphi_v) + (K_1\,t + K_2)\cdot\mathrm{e}^{-\alpha\,t} \\ \sqrt{2}\,X\ \cos(\omega t + \varphi_v) + K_1\,\mathrm{e}^{-\alpha\,t}\cdot\cos(\omega_d\,t + K_2) \end{cases}$$

Las constantes de integración se calculan, en caso de ser necesario su cálculo, en base a los valores iniciales de la variable de interés, $x(0)$ y $\dot{x}(0)$, obtenidas a partir de la tensión en el consensador y la intensidad en la bobina en el instante inicial, $u_C(0)$ e $i_L(0)$.

Régimen transitorio en circuitos de corriente alterna

Transitorios de segundo orden en corriente alterna: