8. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

8.1. PROCESOS ESTOCÁSTICOS GENERALES.

Def: Sean (Ω, P) un esp. probabilístico y $T \subseteq \mathbb{R}$ una parte de la recta real. Para cada $t \in T$ se define la V.A. $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$, a la familia $\{X_t\}_{t\in T}$ se le llama proceso estocástico (ó aleatorio), de parámetro t.

Al conjunto $\bigcup_{t\in T} \mathrm{Im}(X_t)$ se le llama espacio de los estados (ó comportamiento) del p.e.

Al conjunto $T \subseteq \mathbb{R}$ se le llama espacio de los tiempos

A cada elemento t de T se le llama tiempo ó instante

" " " de $\bigcup_{t\in T} \mathrm{Im}(X_t)$ se le llama estado del p.e.

Obs: 1) Todas las V.A. del p.e. están definidas en el mismo espacio muestral (Ω)

2) En ocasiones se identifican : $\bigcup_{t\in T} \mathrm{Im}(X_t) \equiv \Omega$

3) Nos interesan los p.e. cuyo espacio de los estados son finitos.

Def: Si todas las V.A. X_t del p.e. son V.A.D (ó VAC), se dice que el p.e. es discreto (ó continuo)
Si el espacio de los tiempos, T, es numerable se dice que el p.e. es de parámetro discreto. Si T es un intervalo (ó $\cup$ de intervalos) se dice que el p.e. es de parámetro cont.

Obs: Si Ω es numerable el p.e. será discreto.

Def: Para cada $e \in \Omega$, se define la función $\varphi_e : T \to \mathbb{R}$ / $\varphi_e(t) = X_t(e)$, que se llama trayectoria del p.e.

Def: Sean $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$, se llama f. de distribución n-dimensional (finitodimensional) a la f. de " $F_{t_1, \ldots, t_n}$ de la V.A. $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. ($n=1$: unidim.; $n=2$: bidim.; ...)
Se dice que un p.e. está determinado en el sentido de Slutsky si se conocen todas sus funciones finitodimensi-

Propiedades: Las f. de distribución finitodimensionales ":
1) Acotadas; 2) Monótonas crecientes; 3) $\exists$ lim. x la dcha.
4) Simetría: Son invariantes frente las permutaciones de los pares (t_i, x_i); $r: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$; $F_{t_1 \ldots t_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_{r(1)} \ldots t_{r(n)}}(x_{r(1)} \ldots x_{r(n)})$
5) Consistencia $\equiv F_{t_1, \ldots, t_n}(+\infty, x_2, \ldots, x_n) = P(X_{t_1} \leq +\infty, \ldots, X_{t_n} \leq x_n) =$

$$= P(X_{t_2} \leq x_2, \ldots, X_{t_n} \leq x_n) = F_{t_2 \ldots t_n}(x_2, \ldots, x_n)$$

Def: Sean (Ω, P) un esp. probabilístico, $T \subseteq \mathbb{R}$, $X_t: \Omega \to \mathbb{R}$;
Para el p.e. $\{X_t\}_{t \in T}$, de parámetro "t", se definen las funciones
$\mu: T \to \mathbb{R} \,/\, \mu(t) = E(X_t)$, llamada f. de medias del p.e.
$\sigma^2: T \to \mathbb{R}_+ \,/\, \sigma^2(t) = V(X_t)$, . . . varianzas . .
$\sigma: T \to \mathbb{R}_+ \,/\, \sigma(t) = D(X_t)$, . . . desv. típicas . . .
$\sigma: T \times T \to \mathbb{R} \,/\, \sigma(t,s) = Cov(X_t, X_s)$, . . . covarianzas . . .
$\rho: T \times T \to \mathbb{R} \,/\, \rho(t,s) = \sigma(t,s)/\sigma(t)\cdot\sigma(s)$ . . . correlaciones . . .

Obs: Fijados los tiempos se " lo visto en temas anteriores:
König: $\sigma^2(t) = E(X_t^2) - \mu^2(t)$; Schwarz: $\sigma^2(t,s) \le \sigma^2(t)\cdot\sigma^2(s)$, . . .

Def: Un p.e. $\{X_t\}_{t \in T}$ se dice centrado si su f. de medias es nula
" " " " " normalizado . . . varianzas es la unidad
" " " " " tipificado si es centrado y normalizado

$$\{X_t\}_{t \in T} \longrightarrow \left| \begin{array}{ll} \text{Centrado} & \{X_t - \mu(t)\}_{t\in T} \\ \text{Normalizado} & \{X_t/\sigma(t)\}_{t\in T} \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{\frac{X_t - \mu(t)}{\sigma(t)}\right\}_{t\in T}$$

Tipificado.

§ 2. P.E. ESTACIONARIO

Def: Un p.e. $\{X_t\}_{t \in T}$ se dice "estacionario" (en sentido estricto) si sus f. de distribución finito dimensionales son invariantes frente a las traslaciones en el tiempo.

Propiedades: En un p.e. estacionario se ":
1) Las funciones unidimensionales son constantes.
2) " " bidimensionales sólo dependen de la diferencia entre los tiempos.

- II - 1) $\forall\, t, u \in T: F_t(x) = F_{t+u}(x)$, llamando $t+u = t_0$:

$F_t(x) = F_{t_0}(x), \ \forall t \in T$

2) $\forall\, t, u, s \in T: F_{ts}(x, y) = F_{t+u, s+u}(x, y), \ldots$ - - - - -

$F_{t,s}(x,y) = F_{t_0, t_0 + \underbrace{(s-t)}_{(*)}}(x, y), \ \forall\, t, s \in T$ (*) sólo depende de $s-t$;

<u>Obs</u>: En un p.e. estacionario las f. de medias y varianzas son cte y la de covarianzas sólo depende de la diferencia entre los tiempos.

Si $\{X_t\}_{t\in T}$ p.e. estacionario $\Rightarrow \begin{cases} \mu(t) = \mu;\ \sigma^2(t) = \sigma^2;\ \forall t \in T \\ \sigma(t,s) = \lambda(s-t) \Rightarrow \sigma^2(t) = \lambda(0) \end{cases}$

<u>Def</u>: Se dice que un p.e. es estacionario en covarianzas si su f. de medias es cte y la f. de covarianzas sólo depende de la diferencia entre los tiempos.

<u>Obs</u>: 1) p.e. estacionario $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ p.e. estacionario en covarianzas

2) Si las V.A. del p.e. son Normales, entonces los dos tipos de estacionariedad son equivalentes

$$\{X_t\}_{t\in T} \equiv \{N(\mu(t), \sigma^2(t))\}_{t\in T} = \{N(\mu, \lambda(0))\}_{t\in T}$$

<u>Ejemplo</u>: Sean $X = Y = N(0,1)$ V.A.I.; $w \in \mathbb{R}$, $T = \mathbb{R}$.

Para cada $t \in T$: $X_t = X \cdot \cos wt + Y \operatorname{sen} wt$; ¿$\{X_t\}_{t\in T}$ es estacionario?

$X_t = N(0, \cos^2 wt + \operatorname{sen}^2 wt) = N(0,1) \Rightarrow$ Basta ver estacionariedad en covarianzas.

$\mu(t) = E(X_t) = 0 \Rightarrow$ p.e. centrado (o tipificado).

$\sigma(t,s) = \operatorname{cov}(X \cos wt + Y \operatorname{sen} wt, X \cos ws + Y \operatorname{sen} ws) =$

$= \cos wt \cdot \cos ws + \operatorname{sen} wt \cdot \operatorname{sen} ws = \cos(ws - wt) = \cos(w(s-t)) = \lambda(s-t)$

c.q.d.

Th (Teorema Ergódico):

Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un p.e. estacionario, se tiene que para cualquier $e\in\Omega$

1) Si es de parámetro discreto, se tomará $T=\mathbb{N}$:

$$\mu=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{t=0}^{n}\varphi_e(t);\ \lambda(u)=-\mu^2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{t=0}^{n}\varphi_e(t)\cdot\varphi_e(t+u)$$

2) Si es de parámetro continuo, se tomará $T=[0,+\infty[$

$$\mu=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h\varphi_e(t)\,dt;\ \lambda(u)=-\mu^2+\lim_{h\to+\infty}\frac{1}{h}\int_0^h\varphi_e(t)\cdot\varphi_e(t+u)\,dt$$

Obs: Mejor cuantas más V.A. se consideren, porque se tendrán más puntos; $(\varphi_e(t)=X_t(e))$

8.3. CADENAS DE MARKOFF

Sean (Ω,P), $T\subseteq\mathbb{R}$ / $X_t:\Omega\to\mathbb{R}$; $\{X_t\}_{t\in T}$ p.e. de par. "t".

Def: Un p.e se dice de Markoff, si para cualesquiera $t_1<t_2<\dots<t_n$ se $_{||}$: $F_{t_n/t_1\dots t_{n-1}}(x_n/x_1,\dots,x_{n-1})=F_{t_n/t_{n-1}}(x_n/x_{n-1})$.

Esto es: $P(X_{t_n}\le x_n/X_{t_1}=x_1,\dots,X_{t_{n-1}}=x_{n-1})=P(X_{t_n}\le x_n/X_{t_{n-1}}=x_{n-1})$

Obs: 1) (PARZEN): Conocido el presente, el futuro es independiente del pasado,

2) La probabilidad anterior es la característica de un p.e. Mar.

Def: Se llama Cadena de Markoff (CM) a todo p.e. de Markoff discreto. En una CM:

$$P(X_{t_n}=x_n/X_{t_1}=x_1,\dots,X_{t_{n-1}}=x_{n-1})=P(X_{t_n}=x_n/X_{t_{n-1}}=x_{n-1})$$

Def: Se dice que una matriz es estocástica si sus elementos son NO negativos y cada fila suma uno.

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \;/\; a_{ij} \geq 0 \;;\; \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1, \quad i=1,\dots,n$$

Se dice que un vector es de probabilidad, si como matriz fila es estocástica: $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$; $p_i \geq 0$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Obs: En adelante consideramos CM finitas $\Rightarrow \bigcup_{t\in T} \operatorname{Im}(X_t) = \{1,2,\dots,N\}$

Def: Para cada $i \in \{1,\dots,N\}$, se llama probabilidad de estado en el instante "t": $p_i(t) = P(X_t = i)$. Se llama matriz de estado, en el instante "t", a la matriz columna: $P(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_N(t) \end{pmatrix}$

Su traspuesta ${}^{t}p(t) = (p_1(t), \dots, p_N(t))$, es estocástica.

Def: Sean $(i,j) \in \{1,\dots,N\}$, $t<s$; se llama probabilidad de transición, del instante "t" al "s", del estado "i" al "j", a:

$$p_{ij}(t,s) = P(X_s = j / X_t = i)$$

Se llama matriz de transición, del instante "t" al "s", a: $P(t,s) = \left(p_{ij}(t,s)\right)_{i,j=1,\dots,N}$, que resulta ser cuadrada y estocástica.

8.3.1. ECUACIONES DE CHAPMAN-KOLMOGOROFF

Th 1: En una Cadena de Markoff (CM) finita, se ,,:

1) $\forall\ t<r<s : P(t,s) = P(t,r)\cdot P(r,s)$

2) $\forall\ t<s : {}^{t}p(s) = {}^{t}p(t)\cdot P(t,s)$

Def: Se dice que una CM es homogénea si

$$\forall t<s, u\in T \text{ se }_{,,}: (X_s / X_t) = (X_{s+u} / X_{t+u})$$

Obs: En una CM homogénea las probabilidades de transición sólo dependen de la diferencia entre los tiempos.

$$p_{ij}(t,s) = P(X_s = j / X_t = i) = P(X_{s+u} = j / X_{t+u} = i) \overset{t+u=t_0}{=} P\left(X_{t_0+(s-t)} = j \middle| X_{t_0} = i\right) =$$

$$= p_{ij}(t_0, t_0+(s-t)) = p_{ij}(s-t)$$

Th2: En una CM finita y homogénea, se ,,:

1) $\forall\ t,s\in T : P(t+s) = P(t)\cdot P(s)$

2) $\forall\ t,s\in T : {}^{t}p(t+s) = {}^{t}p(t)\cdot P(s)$

Obs: En una CM homogénea las probabilidades de transición del instante "t" al "s", sólo dependen del número s−t. En una CM finita y homogénea, de parámetro discreto, se puede tomar $T=\mathbb{N}$, entonces las probabilidades de transición sólo dependen del nº natural s−t, que se llama "orden" de la matriz de transición.

Así, para $n, m \in \mathbb{N}$, $(n>m)$: $P(m,n) = P(\overbrace{n-m}^{k}) = P(k)$

$k \equiv$ Orden de la matriz de transición; $\underline{P(1) \equiv P}$

<u>Th3</u>: En una CM, finita y homogénea, de parámetro discreto, se $\|$: 1) $P(n) = P^{n}$, $P = P(1) \equiv$ matriz de transición de orden 1

2) ${}^{t}p(n) = {}^{t}p(0) \cdot P^{n}$;

<u>Obs</u>: En general: $\forall\, m<n$: ${}^{t}p(n) = {}^{t}p(m) \cdot P^{n-m}$;

<u>Ejemplos</u>

1) Un jugador, que tiene 2 €, apuesta 1 € en cada partida; Gana o pierde con la misma probabilidad. Abandona el juego si gana 4 € ó si lo pierde Todo.

1) ¿P(perder el dinero tras 5 partidas)?

2) ¿P(Juego dure más de 7 partidas)?

– S –

1º) Definición y estudio del p.e.;

2º) Cálculo de la matriz de Transición;

3º) Resolver;

$X_n = $ Nº de € tras la n-ésima partida $\underline{+1} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}(X_n) = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$T = \mathbb{N} \equiv$ nº de partida; $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ p.e. discreto (finito) de parámetro discreto

(*) Es fácil comprobar que es un p.e. de Markoff pues:

$P(X_{t_n} \leq x_n / X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = P(X_{t_n} \leq x_n / X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$

Además la CM es homogénea, pues cumple

$\forall\, t<s, n$: $(X_s / X_t) = (X_{s+n} / X_{t+n})$.

Así, se trata de una CM, finita y homogénea de parámetro discreto.

$P(1) = P = (p_{ij})_{i,j=1,\dots,7}$; $p_{ij} = P(X_{n+1}=j / X_n = i)$;

Como gana, ó pierde, 1 € por partida $\Rightarrow i \xrightarrow{1/2} i+1$ (gana), $i \xrightarrow{1/2} i-1$ (pierde)

Pero si $i = 1, 7$, ahí se queda porque deja el juego.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) P (perder el dinero tras 5 partidas) $= p_1(5) = P(X_5 = 1)$

$^t p(0) = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$;

Como tenemos una CM finita y homogénea de par. discreto:

$^t p(5) = {}^t p(0) \cdot P^5 = ¿?$; se hace paso a paso:

$^t p(1) = {}^t p(0) \cdot P = (0, 1/2, 0, 1/2, 0, 0, 0)$

$^t p(2) = {}^t p(1) \cdot P = \dots$; $^t p(3) = {}^t p(2) \cdot P = \dots$; $\dots$;

$^t p(5) = {}^t p(4) \cdot P = (3/8, 0, 7/8 \dots\dots) = (\underline{3/8}, 5/32, 0, \dots\dots)$

2) P (dure más de 7 partidas) $= \sum_{i=2}^{6} p_i(7) = 1 - p_1(7) - p_7(7)$

$^t p(7) = {}^t p(5) \cdot \underline{P^2} = \underbrace{{}^t p(5) \cdot P}_{{}^t p(6)} \cdot P = \left(\frac{29}{64}, 0, \frac{7}{32}, 0, \frac{13}{64}, \dots\right)$

2) Grammark renueva alcalde anualmente.

Hokes y Dokes ; $H \xrightarrow[3/5]{} H$; $D \xrightarrow{1/2} D$

Si en 1965 el alcalde era Hoke: 1°) $P(1968\ H)$

2°) $P(1967\ D)$

— S —

1°) Def y estudio

$$X_n \equiv \text{alcalde } n\text{-ésimo año} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } n\text{-ésimo año } H \\ 2 & \text{- - - - - - - } D \end{cases}$$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}(X_n) = \{1, 2\}$; $T = \mathbb{N}$

(*) Es fácil ver que se trata de una CM finita y homogénea de parámetro discreto.

2°) P

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$P_{11} = P(X_{n+1}=1 / X_n=1) = 3/5$

$P_{22} = P(X_{n+1}=2 / X_n=2) = 1/2$

3°) Resolver

1°) y 2°)

$$t_p(1965) = (1, 0)$$
$$t_p(1966) = t_p(1965) \cdot P = (3/5, 2/5)$$
$$t_p(1967) = t_p(1966) \cdot P = (14/25, \underbrace{\boxed{11/25}}_{2^o})$$
$$t_p(1968) = t_p(1967) \cdot P = (\underbrace{\boxed{139/250}}_{1^o}, 111/250)$$

8.3.2. DISTRIBUCIÓN ASINTÓTICA

Def: Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una CM finita $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Im(X_n)=\{1,\dots,N\}\right)$:

Un estado "i" es "absorbente" si $\forall t,s\in T: P_{ij}(t,s)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

Un estado "j" se dice accesible desde el estado "i" si

$$\exists\, t,s\in T \,/\, P_{ij}(t,s)>0 \qquad j\leftarrow i$$

Se dice q "i" y "j" se comunican $(i\leftrightarrow j) \Leftrightarrow \begin{cases} i\leftarrow j\\ j\leftarrow i\end{cases}$

La CM se dice irreducible si todos sus estados se comunican.

Obs: Sea una CM finita y homogénea, de parámetro discreto, si la CM es irreducible, entonces se ":

$$\lim_{n\to+\infty} P^n=\begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_N\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ p_1 & \cdots & p_N\end{pmatrix} \quad \text{entonces:}$$

$$\lim_n {}^t p(n)=\lim_n {}^t p(0)\cdot P^n=(p_1(0),\dots,p_N(0))\lim_n P^n=(p_1,\dots,p_N)=\vec{p}$$

Al vector de probabilidad $\vec{p}=(p_1,\dots,p_N)$, se le llama distribución asintótica de la CM.

Def: Se dice que una matriz cuadrada, A, es estocástica regular si es estocástica y $\exists\, n\in\mathbb{N}\,/$ A^n tiene todos sus elementos estrictamente positivos.

Obs: 1) Si P es estocástica regular la CM es irreducible

2) Si la CM es irreducible, entonces:

$p_1, \dots, p_N$ son estrictamente positivos y $\vec{p}$ es un vector de probabilidad fijo de P;

Así ¿$\vec{p}$? $\left.\begin{array}{l} \vec{p}\cdot P = \vec{p} \\ \rightarrow p_1 + \dots + p_N = 1 \end{array}\right\}$

Ejemplo: ¿Distribución asintótica del ejemplo anterior?

1) Se observa que P es estocástica regular (Bastaría comprobar que todos los estados se comunican)

2) $\left.\begin{array}{l} \vec{p}\cdot P = \vec{p} \\ p_1 + p_2 = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \frac{3}{5}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = p_1 \\ \frac{2}{5}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = p_2 \\ \rightarrow p_1 + p_2 = 1 \end{array}\right\}$ 3 ecs. para 2 incóg.

$P = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 4p_1 + 5p_2 = 10p_2 \\ -4p_1 - 4p_2 = -4 \end{array}\right\}$ $p_2 = 10p_2 - 4 \Rightarrow p_2 = 4/9$; $p_1 = 5/9$

$\vec{p} = (5/9, 4/9)$