Lección 1: Escuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Mario Rodríguez

Feb 2023

1 Definición

Llamamos ecuación diferencial de primer orden a una igualdad de la forma:

$$F(y'(x), y(x), x) \equiv y'(x) = f(y(x), x)$$

Resolverla es determinar las funciones $y(x)$ que la cumplan para todo $x \in I$.

1.1 Ejemplo: La descarga de un condensador

$q(t)$ es la carga en el instante t.
$i(t)$ es la intensidad de corriente en el instante t.
Sabiendo que $i(t) = q'(t)$ y que Q_0

1.2 Resolucion de la ecuacion diferencial:

$$R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot q(t) = R \cdot q'(t) + \frac{1}{C} \cdot q(t) \equiv q'(t) + \frac{1}{R \cdot C} \cdot q(t) = 0$$

$$R \cdot q'(t) + \frac{1}{C} \cdot q(t) \equiv q'(t) + \frac{1}{R \cdot C} \cdot q(t) = 0$$

$$\frac{q'(t)}{q(t)} = -\frac{1}{R \cdot C} \rightarrow \int \frac{q'(t)}{q(t)} = \int -\frac{1}{R \cdot C}$$

$$\ln(|q(t)|) = \frac{-1}{R \cdot C} \cdot t + C_1$$

Tomando exponenciales y teniendo en cuanta que $e^{C_1} = C > 0$:

$$q(t) = C \cdot e^{\frac{-1}{RC} \cdot t}$$

Obtenemos asi una familia uniparamétrica de soluciones, o tambien conocida como solución general. Sin embargo sabemos que $Q_0 = q(0) = C$, obtenemos la solución particular:

$$q(t) = Q_0 \cdot e^{\frac{-t}{C \cdot R}}$$

Problema de valor inicial

1.3 Teorema de existencia y unicidad de soluciones

Suponemos:

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x), x) & x \in I \\ y(x_0) = y_0 & x \in I \end{cases} \tag{1}$$

Si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son contínuos en R, entonces el problema de valor inicial tiene solución y es única.

1.4 Ecuaciones separables

$$y' = f(x) \cdot g(y) \to \frac{y'}{g(y)} = f(x) \to \int \frac{y'}{g(y)} \cdot dx = \int f(x) \cdot dx + C$$

Nótese que: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{y'}{g(y)(x)}$ sabiendo que $y = y(x)$ y $dy = y'(x) \cdot dx$.
Volviendo a las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \cdot g(y) \\ \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \to \frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx \end{cases} \tag{2}$$

Y la familia uniparamétrica de curvas queda tal que:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx + C$$

2 Ecuación lineal no homogénea: $y' + p(x) \cdot y = r(x)$

Llamaremos ecuacion homogénea asociada a la misma ecución solo que $r(x) = 0$. A la ecuación no homogénea la llamaremos ecuación completa. Vamos a ver que la solución general de la ecuación completa es de la forma:

$$y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x)$$

Donde $y_{\mathrm{h}}(x)$ es la solución general de la ecuación homogenea asociada y $y_{\mathrm{p}}(x)$ es la solución particular de la ecuación completa.
En efecto, sea $y(x)$ la solución cualquiera de la ecuación completa y sea $y_{\mathrm{p}}(x)$ una solución cualquiera fijada de dicha ecuación. Entonces $y(x) - y_{\mathrm{p}}(x)$ es solución de la ecuación homogénea asociada, pues:

$$(y - y_{\mathrm{p}})' + p(x) \cdot (y - y_{\mathrm{p}}) = y' - {y_{\mathrm{p}}}' + p(x) \cdot y - p(x) \cdot y_{\mathrm{p}} = (y' + p(x) \cdot y) - ({y_{\mathrm{p}}}' + p(x) \cdot y_{\mathrm{p}}) = r(x) - r(x)$$

Así pues, $y - y_{\mathrm{p}} = y_0$ será solución de la ecuación homogénea asociada y por tanto:

$$y = y_0 + y_{\mathrm{p}}$$

2.1 Cálculo de y_{p}: método de variación de las constantes

$$y' + p(x) \cdot y = r(x)$$

$$y' + p(x) \cdot y = 0 \to y_{\mathrm{h}} = c \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx}$$

Ensayamos con $y_{\mathrm{p}}(x) = v(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx}$ y vamos a determinar $v(x)$

$$y_{\mathrm{p}}{}'(x) = v'(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} + v(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} \cdot -p(x)$$

Sustituyendo en la ecuación completa:

$$[v'(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx - v(x) \cdot p(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx}}] + p(x) \cdot v(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} = r(x)$$

$$v(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} = r(x)$$

$$v' = \frac{r(x)}{e^{-\int p(x) \cdot dx}} = r(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx}$$

Y por tanto:

$$v(x) = \int r(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx}$$

Es el resultado final de $y(x)$ queda tal que asi:

$$y(x) = y_{\mathrm{p}} + y_{\mathrm{h}} = c \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} + [\int r(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx}] \cdot e^{\int p(x) \cdot dx}$$

problema de