T1. INTRODUCCIÓN A LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

1.1.1. Exp. Aleatorio, esp. muestral y suceso.

Def: Se llama experimento aleatorio a aquel que realizado bajo ciertas condiciones previamente fijadas puede dar lugar a más de un resultado diferente, todos conocidos, sin que se pueda decir, a priori, el resultado en cada realización del experimento.

A cada resultado del exp. se le llama suceso elemental: ω_i

Se llama espacio muestral, de los resultados, al conjunto Ω, formado por todos los resultados posibles del exp.

Ejemplo: 1) Lanz. moneda : $\Omega = \{C, +\}$

2) " dado : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3) Nº mensajes en un móvil en 1 día : $\Omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

4) Tiempo de vida de una bombilla : $\Omega = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$

Def: Se llama espacio muestral de los sucesos al conjunto E, formado por la colección de todos los subconjuntos de Ω, esto es, $E = \mathcal{P}(\Omega)$, se dice que E es el "conjunto de partes del conjunto Ω";

Cada elemento de E se llama suceso

Ejemplo: 1) $\Omega = \{+, c\} \Rightarrow E = \{\emptyset, \{c\}, \{+\}, \{c, +\}\}$.

2) $\Omega = \{1, \dots, 6\} \Rightarrow E = \{\emptyset, \{1\}, \dots, \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \dots, \{5,6\}, \dots, \{1,2,3,4,5,6\}\}$

. . . . .

Obs: Destacan con nombre propio 2 sucesos:

$\emptyset \equiv$ suceso imposible (No contiene ningún resultado)

$\Omega \equiv$ " seguro; (Contiene todos los " posibles)

Def: Un espacio muestral se dice discreto, si es numerable a lo más. Esto es, si es finito ó infinito pero numerable.

Obs: Un conjunto se dice numerable si dado un elemento cualquiera, se sabe qué elemento le precede y cuál le sucede.

1.1.2. Operaciones con sucesos.

Recordar que un suceso es un conjunto (con ninguno, alguno ó todos) formado con elementos de Ω; entonces cualquier suceso $A \subseteq \Omega$; Además $A \in E$;

En el ejemplo del lanz. de un dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

definimos: $\begin{cases} S_1 = \text{"sacar par"} = \{2, 4, 6\} \\ S_2 = \text{" } \dot{3} \text{ "} = \{3, 6\} \end{cases}$

Como se ve, cada suceso es un conjunto, por tanto, podemos realizar con los sucesos las mismas operaciones que entre conjuntos:

$\cup$: unión : $S_1 \cup S_2 = \{2,4,3,6\} \equiv$ los elementos comunes y no comunes de cada suceso;

$\cap$: intersección : $S_1 \cap S_2 = \{6\} \equiv$ de los dos sucesos

$-$: complementación: $\overline{S_1} = \{1,3,5\}$ (suc. contrario de S_1)
$\overline{S_2} = \{1,2,4,5\}$ (" " " S_2)
$\equiv$ los elementos que no están en el suceso;
$\overline{\emptyset} = \Omega$; $\overline{\Omega} = \emptyset$;

$-$: diferencia de sucesos: $S_1 - S_2 = \{2,4\}$; $S_2 - S_1 = \{3\}$
$\equiv$ los elementos que están en el 1º y no están en el 2º

Δ : diferencia hemisimétrica : $S_1 \Delta S_2 = S_2 \Delta S_1 = \{2,3,4\}$
$\equiv$ los elementos que están en uno, y sólo uno, de los sucesos

<u>Obs</u>: $S_1 - S_2 = S_1 \cap \overline{S_2}$; $S_2 - S_1 = S_2 \cap \overline{S_1}$

$$S_1 \Delta S_2 = S_2 \Delta S_1 = (S_1 - S_2) \cup (S_2 - S_1) = (S_1 \cap \overline{S_2}) \cup (S_2 \cap \overline{S_1})$$

Leyes de Morgan: 1) $\overline{S_1 \cup S_2} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2}$
2) $\overline{S_1 \cap S_2} = \overline{S_1} \cup \overline{S_2}$

1.1.3. Relaciones entre sucesos

1) Def: Se dice que S_1 y S_2 son sucesos exhaustivos, ó completos si $S_1 \cup S_2 = \Omega$

(1)): Se dice que S_1 y S_2 son sucesos disjuntos, ó mutuamente excluyentes si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ($\nexists$ elementos comunes)

Def: Sea $\{S_k\}_{k\in K}$ una colección numerable de sucesos de Ω, se dice que son mutuamente excluyentes, ó disjuntos 2 a 2, si $S_i \cap S_j = \emptyset$, $\forall\, i,j \in K$, $i \neq j$

Sea . . . .

. . . . son exhaustivos si $\bigcup_{k\in K} S_k = \Omega$

Def: Se llama partición, ó sistema completo de sucesos (s.c.s.) de Ω, a toda familia numerable de sucesos no vacíos, exhaustivos y mutuamente excluyentes.

$s.c.s = \{S_k\}_{k\in K} \;/\; S_k \neq \emptyset \;\forall k\in K;\; \bigcup_{k\in K} S_k = \Omega;\; S_i \cap S_j = \emptyset,\; \forall i\neq j$

Obs. 1) $\forall A \subseteq \Omega \;/\; A \neq \emptyset, \Omega \Rightarrow \{A, \overline{A}\}$ s.c.s.

2) Implicación de sucesos: Se dice que S_1 implica S_2, si $S_1 \subseteq S_2$

3) Dado un Exp. Aleatorio $\Rightarrow \Omega$, $E = \mathcal{P}(\Omega)$; asociados

1.2. PROBABILIDAD

Recordar que, dado un exp. aleatorio : Ω, $E=\mathcal{P}(\Omega)$

<u>Def</u>: Se llama función de probabilidad, sobre el espacio muestral E, a toda función $P: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ /

1) $P(\Omega)=1$ (fijar una medida)

2) Sea $\{S_k\}_{k\in K}$ una familia numerable de sucesos de Ω mutuamente excluyentes, entonces: $(S_i \cap S_j = \emptyset, \forall i\neq j)$

$$P\left(\bigcup_{k\in K} S_k\right) = \sum_{k\in K} P(S_k) \quad \text{(numerablemente aditiva)}$$

A la pareja (E,P) (ó (Ω, P)), formada por un espacio muestral y una probabilidad se le llama <u>espacio probabilístico</u>.

<u>Obs</u>: $\forall S \subseteq \Omega \Rightarrow 0 \leq P(S) \leq 1$.

1.2.1. <u>Propiedades</u>

Sea (Ω, P) un espacio probabilístico, entonces se $\exists$:

1) $\forall S \in E : P(\overline{S}) = 1 - P(S)$ (fórmula del contrario)

2) $P(\emptyset) = 0$ (nulidad)

3) $\forall S \in E : P(S) \leq 1$ (acotada)

4) $S_1, S_2 \in E \ / \ S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow P(S_1) \leq P(S_2)$ (conserva el orden)

5) $\forall S_1, S_2 \in E : P(S_1 - S_2) = P(S_1) - P(S_1 \cap S_2)$

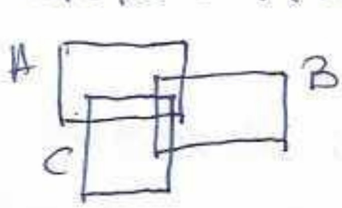
6) $\forall S_1, S_2 \in E : P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)$

(fórmula de la unión)

Obs: 1ª) $P(S_1 \cup S_2) \leq P(S_1) + P(S_2)$ (desigualdad de Boole)

2) La fórmula de la $\cup$, admite generalización:

A, B, C: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$



$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$S_1, \ldots, S_n \in E$, entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(S_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(S_i \cap S_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(S_i \cap S_j \cap S_k) - \cdots$$

$$\cdots - (-1)^n \cdot P\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right)$$ (fórmula de POINCARÉ)

1.2.2. Asignación de Probabilidades

a) Asignación clásica ó Laplaciana; (Ω es finito)

Basada en la regla de Laplace $\equiv P(\text{suceso}) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$;

así, $\forall\, \omega \in \Omega$, siendo $n = |\Omega| \equiv$ nº de elementos de Ω

entonces: $P(\{\omega\}) = \dfrac{\text{c. fav}}{\text{c. pos.}} = \dfrac{1}{n}$;

Sea $S \subseteq \Omega$ un suceso con k-elementos: $|S| = k$, $(k \leq n)$

$$P(S) = \frac{\text{c. fav}}{\text{c. pos.}} = \frac{|S|}{|\Omega|} = \frac{k}{n}$$

Obs: 1) Sólo sirve cuando Ω es finito.

2) Suponemos equiprobabilidad para todos los sucesos elementales. (sucesos equiprobables)

b) Asignación frecuencial u objetiva.

Para asignar la probabilidad a un suceso $S \subseteq \Omega$, se realizan "n" pruebas del experimento aleatorio y se cuenta el nº de veces "k" que ocurre el suceso S, entonces: $P(S) = \frac{\text{nº ocurrencias}}{\text{nº realizaciones}} = \frac{k}{n}$.

Obs: 1) El nº n debe ser suficientemente grande;

2) Sirve $\forall \Omega$;

3) No es útil en experimentos asociados con tiempo futuro ó " destructivos.

c) Asignación personal o subjetiva.

La probabilidad de un suceso se define como el grado de confianza que un individuo tiene respecto de la ocurrencia de dicho suceso.

Obs: 1) Muchos modelos probabilísticos se construyen con esta asignación, se puede comprobar su veracidad usando métodos de inferencia estadística.

2) Se pueden comparar sobre un mismo experimento
a) Lanzamiento de un dado (trucado ó no)
b) Euromillón.

1.2.3. Probabilidad Condicionada

Def: Sean (E, P) un espacio probabilístico y A, B dos sucesos de E con $P(B) > 0$. Se define la probabilidad de A condicionada por B, como: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$;

Obs: 1) $P(A/B) \equiv P($de que ocurra A, sabiendo que ha ocurrido $B)$

2) $P(A/B) = \frac{P(\text{intersección})}{P(\text{condición})}$

3) Si $P(A) > 0$, podemos definirla ¿$P(B/A)$?

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)};$$

Teorema del producto (ó Regla de la multiplicación):

Si $P(B) > 0$, entonces: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$

Obs: 1) Si $P(A) > 0 \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$;
En general se debe tomar el desarrollo del que se tengan datos.

2) Se puede generalizar: $S_1, \dots, S_n \,/\, P(\bigcap_{i=1}^{n} S_i) > 0$,

entonces: $P(S_1 \cap \dots \cap S_n) = P(S_1) \cdot P(S_2/S_1) \cdot P(S_3/S_1 \cap S_2) \cdots P(S_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} S_i)$

Ej: $P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = P(S_1) \cdot P(S_2/S_1) \cdot P(S_3/S_1 \cap S_2)$

(fórmula de la $\cap$)

Propiedades, siendo $P(A), P(B) > 0$, entonces:

1) En general $P(A/B) \neq P(B/A)$

2) Si $P(B) = 1 \Rightarrow P(A/B) = P(A \cap B)$

3) $P(A \cap B) \leq P(A/B)$; $P(A \cap B) \leq P(B/A)$

4) $\overline{(A/B)} = \overline{A}/B \Rightarrow P(A/B) + P(\overline{A}/B) = 1$

5) Si $A \subseteq B \Rightarrow P(B/A) = 1$
   Si $B \subseteq A \Rightarrow P(A/B) = 1$

1.3 FÓRMULA DE LA PROBABILIDAD TOTAL. TH DE BAYES

Teorema (Prob. Total): Sean (Ω, P) un esp. probabilístico y $\{S_k\}_{k\in K}$ un s.c.s. de Ω. Entonces $\forall A \subseteq \Omega$ se " : $\boxed{P(A) = \sum_{k \in K} P(A/S_k) \cdot P(S_k)}$;

— D —

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_{k\in K} S_k)) = P(\bigcup_{k \in K} (A \cap S_k))$$
$$= \sum_{k \in K} P(A \cap S_k) = \sum_{k \in K} P(A/S_k) \cdot P(S_k).$$

Obs: Si s.c.s $\equiv \{B, \overline{B}\}$: $P(A) = P(A/B) \cdot P(B) + P(A/\overline{B}) P(\overline{B})$

Teorema (Bayes): Sean $\{S_k\}_{k\in K}$ un s.c.s. de Ω y $B \subseteq \Omega$ un suceso de prob. no nula $(P(B) > 0)$, entonces $\forall i \in K$:

$$\boxed{P(S_i/B) = \frac{P(B/S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{k \in K} P(B/S_k) \cdot P(S_k)}} \; ;$$

$$P(S_i/B) = \frac{P(S_i\cap B)}{P(B)} \overset{\text{fórmula }\cap}{\underset{\text{Prob. Total}}{=}} \frac{P(B/S_i)\cdot P(S_i)}{\sum_{k\in K} P(B/S_k)\cdot P(S_k)};$$

1.4. INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Def: Sean A y B sucesos de Ω de probabilidad no nula, $(P(A), P(B) > 0)$, se dice que A y B son independientes si $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

Obs: 1) Independencia $\Rightarrow$ Compatibilidad

A, B son independientes $\Rightarrow$ A, B son compatibles

Indep: $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) > 0 \Rightarrow A, B$ compatibles.

2) Independencia es reflexiva, pero en general No simétrica ni ~~reflexiva~~ Transitiva:

a) $A \hookrightarrow B \iff B \hookrightarrow A$; b) $A \not\hookrightarrow A$

$$P(A) = P(A\cap A) = P(A)\cdot P(A) \overset{}{=} P(A)^2$$

si y sólo si $P(A) = 1$

c) $\begin{matrix} A \hookrightarrow B \\ B \hookrightarrow C \end{matrix} \not\Rightarrow A \hookrightarrow C$

3) A y B independientes $\Rightarrow$ $P(A/B) = P(A)$

$P(B/A) = P(B)$

4) La independencia la heredan los contrarios:

$A \hookrightarrow B$ indep. $\iff$ $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son indep.

$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$

$\overline{A}$ y B indep. $\iff$ A y $\overline{B}$ son indep.

5) Si A, B indep. $\Rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B)$

6) Se dice que $A_1, \dots, A_n$ son independientes si

$$P(A_1\cap\dots\cap A_n) = P(A_1)\cdots P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$