Tema 4

Ecuaciones de Nudos y Mallas para Circuitos Resistivos

Teoría de Circuitos

Dpto. Ingeniería Eléctrica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Índice

Índice

Balance de incógnitas y ecuaciones

Dado un circuito eléctrico formado por n nudos y c elementos de una puerta:

- **Número de incógnitas**: $2c$ (tensión e intensidad en cada elemento)
- Número de ecuaciones linealmente independientes:
  - **Definición de los elementos**: c
  - **Ley de Kirchhoff de intensidad**: $n-1$
  - **Ley de Kirchhoff de tensión**: $c-n+1$ (Nº de mallas)

Por tanto:

Nº Incognitas $=$ Nº Ecuaciones

pero...

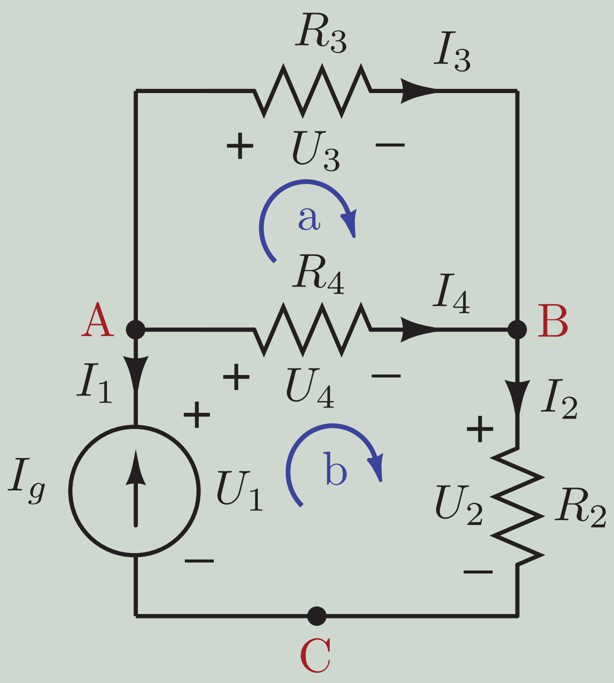
¿Es necesario plantear $2c$ ecuaciones?

$\Downarrow$

Análisis de Nudos y Mallas

Balance de incógnitas y ecuaciones

Ejemplo



$$n = 3\ ;\ c = 4$$

Incógnitas $= 8$

$\{U_1,\ I_1,\ U_2,\ I_2,\ U_3,\ I_3,\ U_4,\ I_4\}$

Ecs. de los elementos $= 4$

$I_1 = -I_g;\ U_2 = R_2 I_2$

$U_3 = R_3 I_3;\ U_4 = R_4 I_4$

LK de Intensidades

A: $-I_1 - I_3 - I_4 = 0$
B: $I_3 + I_4 - I_2 = 0$
C: $I_1 + I_2 = 0$

2 ecuaciones independientes

LK de Tensiones

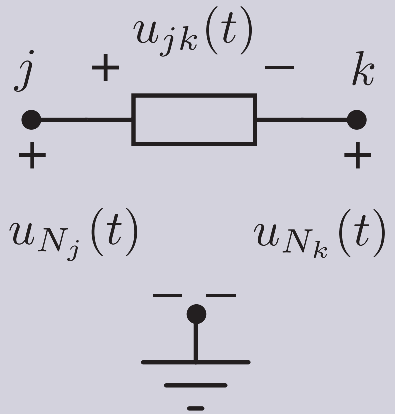
a: $U_3 - U_4 = 0$
b: $U_4 + U_2 - U_1 = 0$

2 ecuaciones independientes

Índice

Ecuaciones de nudos

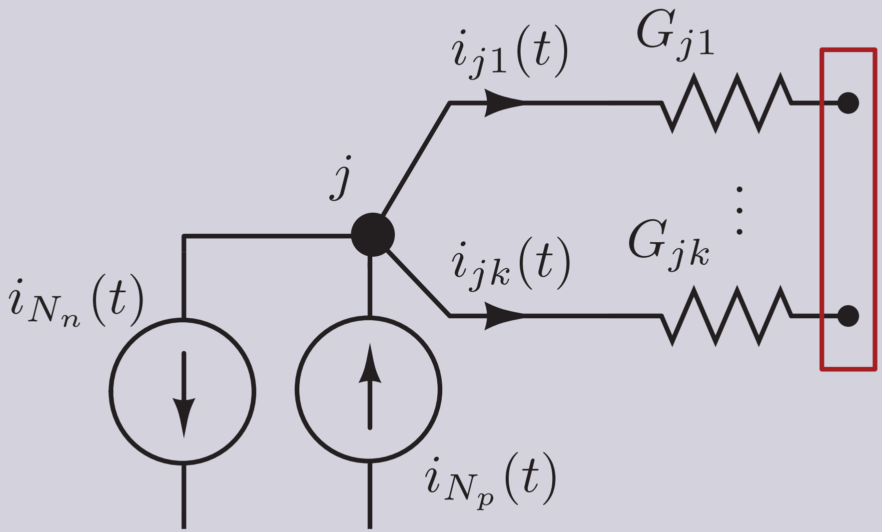
Tensiones de nudos como variables básicas



A partir de las tensiones de nudos se puede obtener cualquier magnitud de dicho circuito.

$$\boxed{u_{jk}(t) = u_{N_j}(t) - u_{N_k}(t)}$$

Ecuación de un nudo genérico



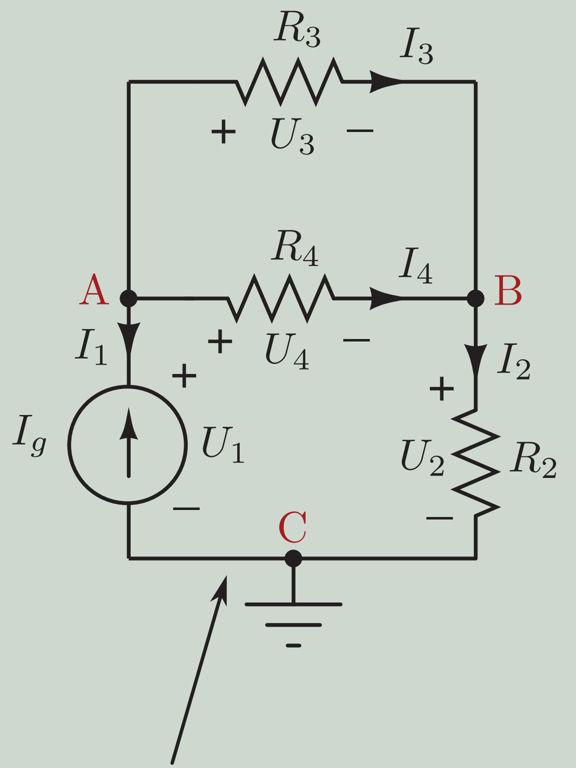
$$i_{N_p}(t) - i_{N_n}(t) = i_{N_j}(t)$$

$$i_{jk}(t) = G_{jk} u_{jk}(t)$$

$$u_{jk}(t) = u_{N_j}(t) - u_{N_k}(t)$$

$$\boxed{i_{N_j}(t) = \sum_k G_{jk}[u_{N_j}(t) - u_{N_k}(t)]}$$

Ejemplo



Se elige el nudo C como referencia

Tensiones de nudos: U_A, U_B

LK de Intensidades	**Ecs. de los elementos**
Nudo A: $I_1 + I_3 + I_4 = 0$	$I_1 = -I_g;\ I_2 = G_2U_2$
Nudo B: $-I_3 - I_4 + I_2 = 0$	$I_3 = G_3U_3;\ I_4 = G_4U_4$

Relación entre tensiones de los elementos y tensiones de nudos

$$U_1 = U_A$$
$$U_2 = U_B$$
$$U_3 = U_A - U_B$$
$$U_4 = U_A - U_B$$

Reordenando

Nudo A: $(G_3 + G_4)U_A - (G_3 + G_4)U_B = I_g$

Nudo B: $-(G_3 + G_4)U_A + (G_2 + G_3 + G_4)U_B = 0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} (G_3 + G_4) & -(G_3 + G_4) \\ -(G_3 + G_4) & (G_2 + G_3 + G_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones de nudos

Sistema de ecuaciones

Extendiendo a todos los nudos del circuito (excepto el de referencia):

$$\begin{pmatrix} G_{N_{(1,1)}} & \cdots & G_{N_{(1,n-1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N_{(n-1,1)}} & \cdots & G_{N_{(n-1,n-1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{N_1}(t) \\ \vdots \\ u_{N_{n-1}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{N_1}(t) \\ \vdots \\ i_{N_{n-1}}(t) \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{G}_N \mathbf{U}_N = \mathbf{I}_N}$$

- $\mathbf{G}_N$ Matriz de conductancias nodales.
- $\mathbf{U}_N$ Vector de tensiones de nudos.
- $\mathbf{I}_N$ Vector de intensidades inyectadas en los nudos.

Ecuaciones de nudos

Formulación por inspección

$$\begin{pmatrix} G_{N_{(1,1)}} & \cdots & G_{N_{(1,n-1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N_{(n-1,1)}} & \cdots & G_{N_{(n-1,n-1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{N_1}(t) \\ \vdots \\ u_{N_{n-1}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{N_1}(t) \\ \vdots \\ i_{N_{n-1}}(t) \end{pmatrix}$$

1. Elementos de la matriz $\mathbf{G}_N$

$$G_{N_{(j,j)}} = \sum_k G_{jk} \quad \text{(sumatorio de conductancias conectadas al nudo } j\text{)}$$

$$G_{N_{(j,k)}} = -G_{jk} \quad \text{(conductancia total entre el nudo } j \text{ y el nudo } k\text{)}$$

2. Elementos del vector $\mathbf{I}_N$

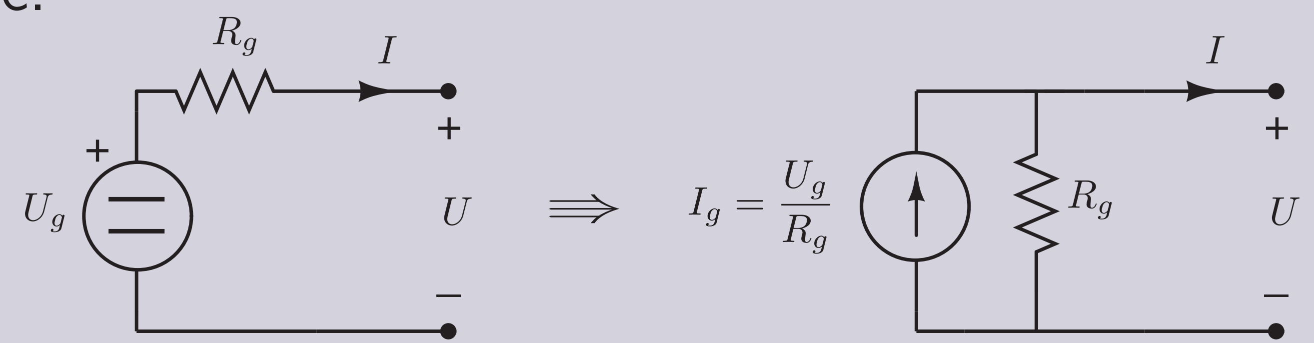
$$i_{N_j} = \sum_j i_{N_{pj}} - i_{N_{nj}}$$

(sumatorio de las fuentes de intensidad que inciden en el nudo j, positivas si entran en el nudo y negativas si salen)

Ecuaciones de nudos. Casos particulares

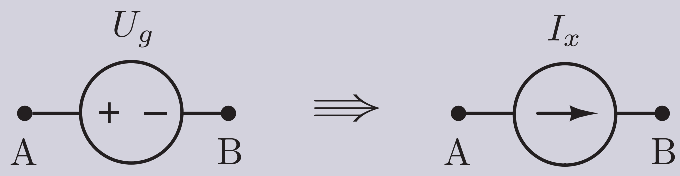
Circuitos con fuentes **reales** de tensión

- Se sustituye cada fuente de tensión por su fuente de intensidad equivalente.



Circuitos con fuentes **ideales** de tensión

1. Sustituir cada fuente de tensión por una fuente de intensidad de valor I_x desconocido:



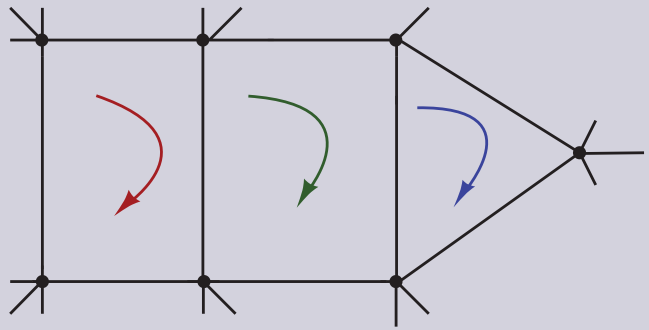
2. Plantear las ecuaciones de nudos.
3. Por cada fuente de tensión ideal, añadir al sistema de ecuaciones anterior una ecuación que relacione la tensión de la fuente (U_g) con las tensiones de los nudos.

Índice

Ecuaciones de mallas

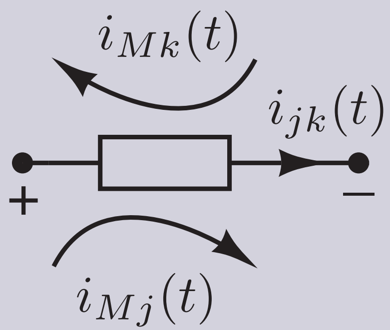
Intensidad de malla

- Recorre todos los elementos del circuito que conforma dicha malla.
- Son magnitudes indivisibles, que no se corresponden necesariamente con ninguna corriente eléctrica real.
- Se representa habitualmente mediante una flecha, ubicada en el interior de la malla respectiva, que indica el sentido que arbitrariamente se le asigna a dicha intensidad.
- Por conveniencia, todas las intensidades de mallas se orientan en el mismo sentido.



Ecuaciones de mallas

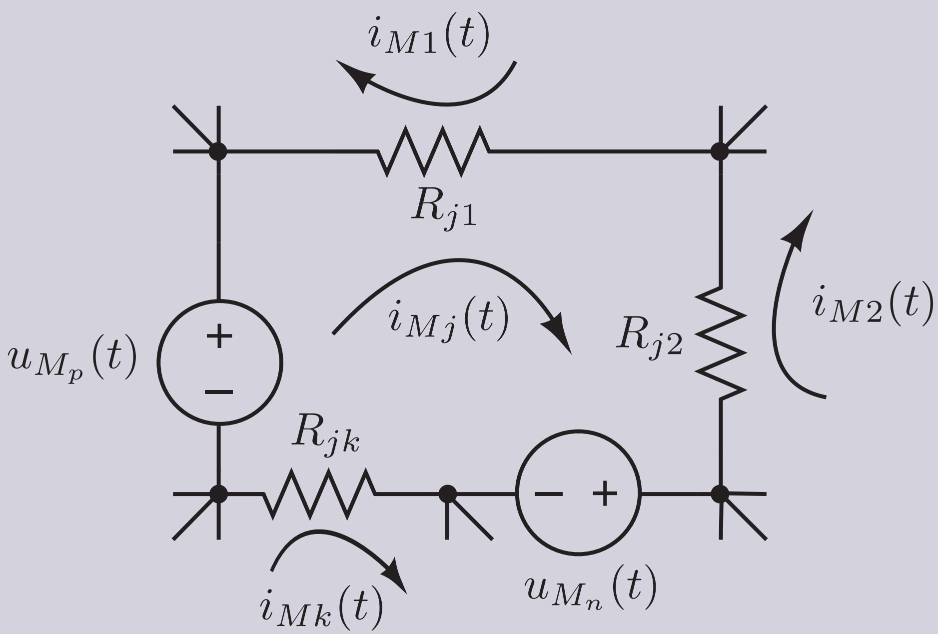
Intensidades de malla como variables básicas



A partir de las intensidades de malla se puede obtener cualquier magnitud de dicho circuito.

$$\boxed{i_{jk}(t) = i_{M_j}(t) - i_{M_k}(t)}$$

Ecuación de una malla genérica



$$u_{M_p}(t) - u_{M_n}(t) = u_{M_j}(t)$$

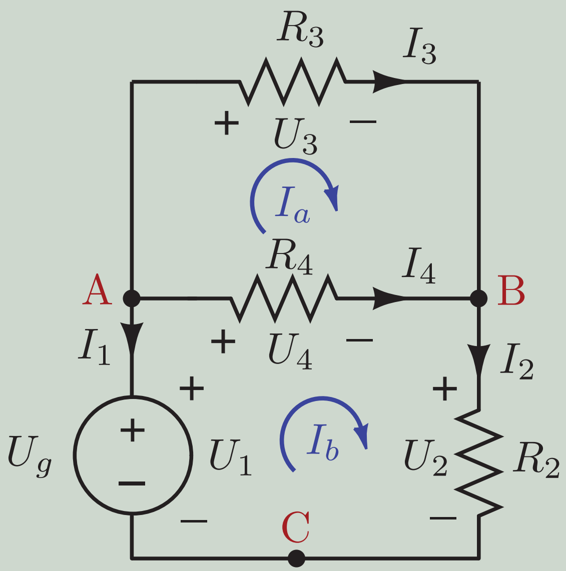
$$u_{jk}(t) = R_{jk} i_{jk}(t)$$

$$i_{jk}(t) = i_{M_j}(t) - i_{M_k}(t)$$

$$\boxed{u_{M_j}(t) = \sum_k R_{jk}[i_{M_j}(t) - i_{M_k}(t)]}$$

Ecuaciones de mallas

Ejemplo



Intesidades de malla: I_a, I_b

LK de Tensiones

Malla a: $U_3 - U_4 = 0$

Malla b: $U_4 + U_2 - U_1 = 0$

Ecs. de los elementos

$U_1 = U_g$; $U_2 = R_2 I_2$

$U_3 = R_3 I_3$; $U_4 = R_4 I_4$

Relación entre la intensidad de cada elemento y las intensidades de malla

$$I_1 = -I_b$$
$$I_2 = I_b$$
$$I_3 = I_a$$
$$I_4 = I_b - I_a$$

Reordenando

Malla a: $(R_3 + R_4)I_a - R_4 I_b = 0$

Malla b: $-R_4 I_a + (R_2 + R_4)I_b = U_g$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} (R_3+R_4) & -R_4 \\ -R_4 & (R_2+R_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_g \end{bmatrix}$$

Ecuaciones de mallas

Sistema de ecuaciones

Extendiendo a todas las mallas del circuito:

$$\begin{pmatrix} R_{M(1,1)} & \cdots & R_{M(1,c-n+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M(c-n+1,1)} & \cdots & R_{M(c-n+1,c-n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{M_1}(t) \\ \vdots \\ i_{M_{c-n+1}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{M_1}(t) \\ \vdots \\ u_{M_{c-n+1}}(t) \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{R}_M \mathbf{I}_M = \mathbf{U}_M}$$

$\mathbf{R}_M$ Matriz de resistencias de mallas.

$\mathbf{I}_M$ Vector de intensidades de mallas.

$\mathbf{U}_M$ Vector de tensiones aplicadas a las mallas.

Ecuaciones de mallas

Formulación por inspección

$$\begin{pmatrix} R_{M_{(1,1)}} & \cdots & R_{M_{(1,c-n+1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M_{(c-n+1,1)}} & \cdots & R_{M_{(c-n+1,c-n+1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{M_1}(t) \\ \vdots \\ i_{M_{c-n+1}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{M_1}(t) \\ \vdots \\ u_{M_{c-n+1}}(t) \end{pmatrix}$$

1. Elementos de la matriz $\mathbf{R}_M$

$$R_{M_{(j,j)}} = \sum_k R_{jk} \quad \text{(sumatorio de resistencias pertenecientes a la malla } j\text{)}$$

$$R_{M_{(j,k)}} = -R_{jk} \quad \text{(resistencia total común de la malla } j \text{ y la malla } k\text{)}$$

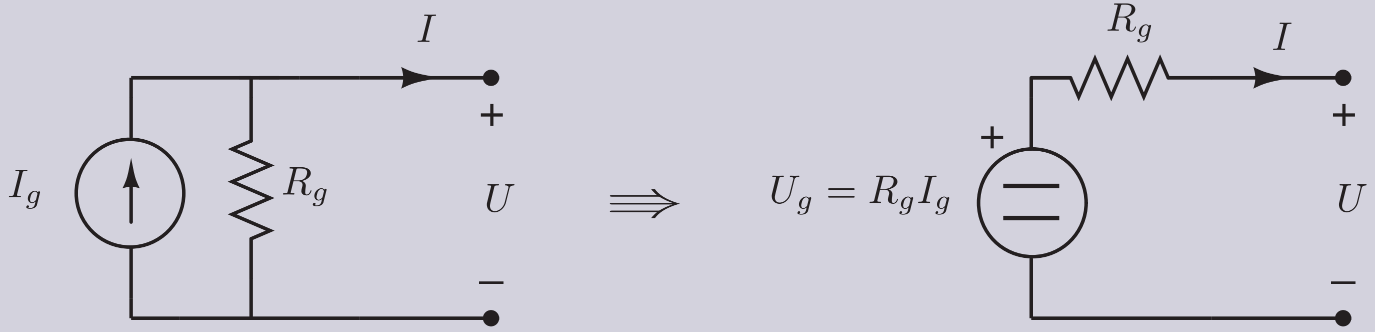
2. Elementos del vector $\mathbf{U}_M$

$U_{M_j} = \sum_j u_{M_{pj}} - u_{M_{nj}}$ (sumatorio de las fuentes de tensión que pertenecen a la malla j. Con signo positivo si la intensidad de malla sale por el terminal positivo de la fuente, y negativo si entra)

Ecuaciones de mallas. Casos particulares

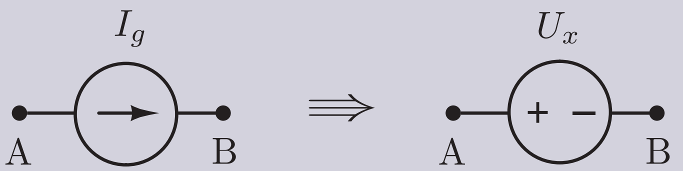
Circuitos con fuentes **reales** de intensidad

- Se sustituye cada fuente de intensidad por su fuente de tensión equivalente.



Circuitos con fuentes **ideales** de intensidad

1. Sustituir cada fuente de intensidad por una fuente de tensión de valor U_x desconocido:

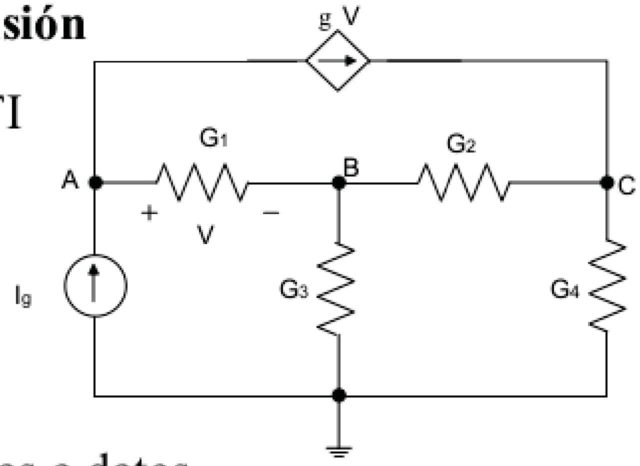


2. Plantear las ecuaciones de mallas.
3. Por cada fuente de intensidad ideal, añadir al sistema de ecuaciones anterior una ecuación que relacione la intensidad de la fuente (I_g) con las intensidades de malla.

Índice

Nudos: FDI controlada por tensión

Método: Fuente dependiente de intensidad controlada por tensión



1. Formular las ecuaciones de nudos considerando la FD como FI

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2+G_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g - gV \\ 0 \\ gV \end{bmatrix}$$

2. Expresar las magnitudes controladoras en función de incógnitas o datos.

$$V = V_A - V_B$$

3. Sustituir y reescribir

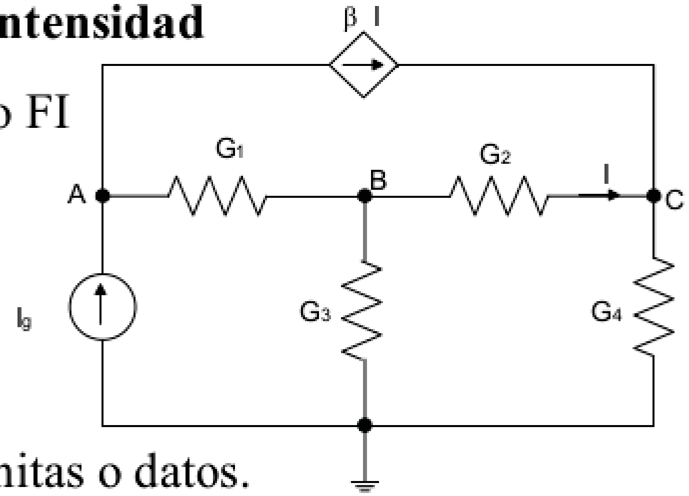
$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2+G_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g - g(V_A - V_B) \\ 0 \\ g(V_A - V_B) \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} G_1+g & -G_1-g & 0 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ -g & -G_2+g & G_2+G_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nota: Introducen asimetría en la matriz

Nudos: FDI controlada por intensidad

Método: Fuente dependiente de intensidad controlada por intensidad



1. Formular las ecuaciones de nudos considerando la FD como FI

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2+G_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_g-\beta I \\ 0 \\ \beta I \end{bmatrix}$$

2. Expresar las magnitudes controladoras en función de incógnitas o datos.

$$\boxed{I=G_2(V_B-V_C)}$$ o, alternativamente $$I=G_4V_C-\beta I \rightarrow I=\frac{G_4V_C}{1+\beta}$$

3. Sustituir y reescribir

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2+G_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_g-\beta G_2(V_B-V_C) \\ 0 \\ \beta G_2(V_B-V_C) \end{bmatrix}$$

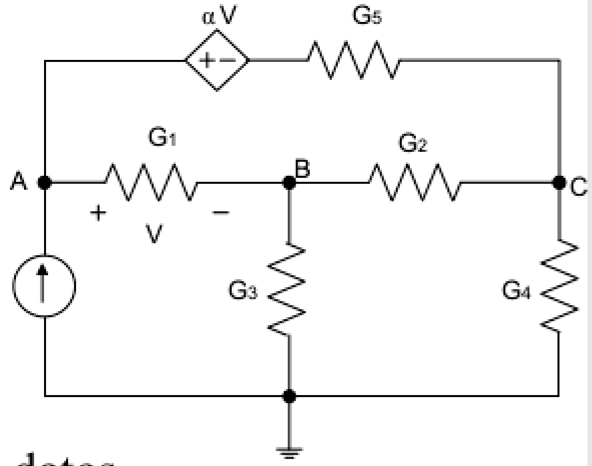
$$\boxed{\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} G_1 & -G_1+\beta G_2 & -\beta G_2 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_2-\beta G_2 & (1+\beta)G_2+G_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Nudos: FDT controlada por tensión

Método: Fuente dependiente de tensión controlada por tensión

1. Formular las ecuaciones de nudos considerando la FD como FI

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} G_1+G_5 & -G_1 & -G_5 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ -G_5 & -G_2 & G_2+G_4+G_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_g+\alpha G_5 V \\ 0 \\ -\alpha G_5 V \end{bmatrix}$$



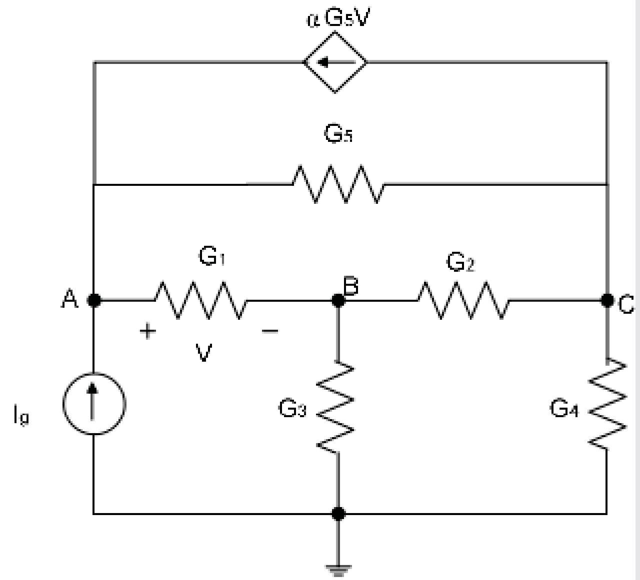
2. Expresar las magnitudes controladoras en función de incógnitas o datos.

$$V = V_A - V_B$$

3. Sustituir y reescribir

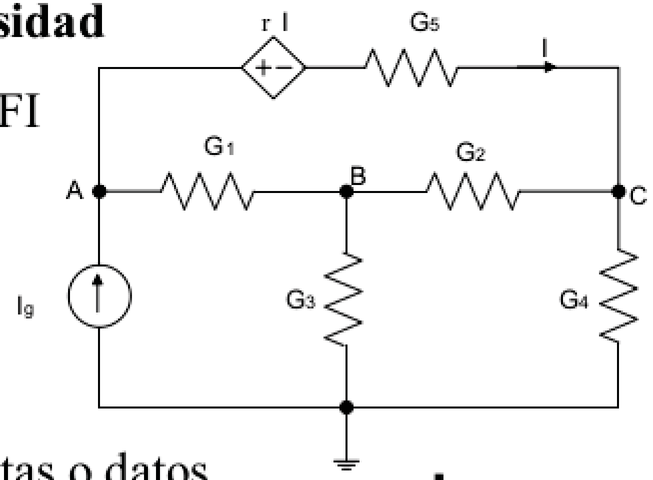
$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} G_1+G_5 & -G_1 & -G_5 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ -G_5 & -G_2 & G_2+G_4+G_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_g+\alpha G_5 (V_A-V_B) \\ 0 \\ -\alpha G_5 (V_A-V_B) \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} G_1+(1-\alpha)G_5 & -G_1+\alpha G_5 & -G_5 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ (\alpha-1)G_5 & -G_2-\alpha G_5 & G_2+G_4+G_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Nudos: FDT controlada por intensidad

Método: Fuente dependiente de tensión controlada por intensidad



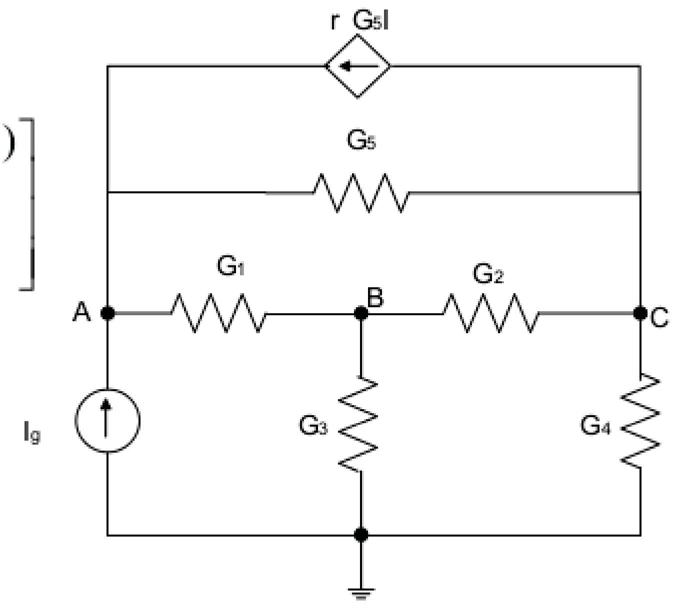
1. Formular las ecuaciones de nudos considerando la FD como FI

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} G_1+G_5 & -G_1 & -G_5 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ -G_5 & -G_2 & G_2+G_4+G_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_g+rG_5I \\ 0 \\ -rG_5I \end{bmatrix}$$

2. Expresar las magnitudes controladoras en función de incógnitas o datos.

$$I=G_2(V_C-V_B)+G_4V_C \;\longrightarrow\; I=(G_2+G_4)V_C-G_2V_B$$

3. Sustituir y reescribir

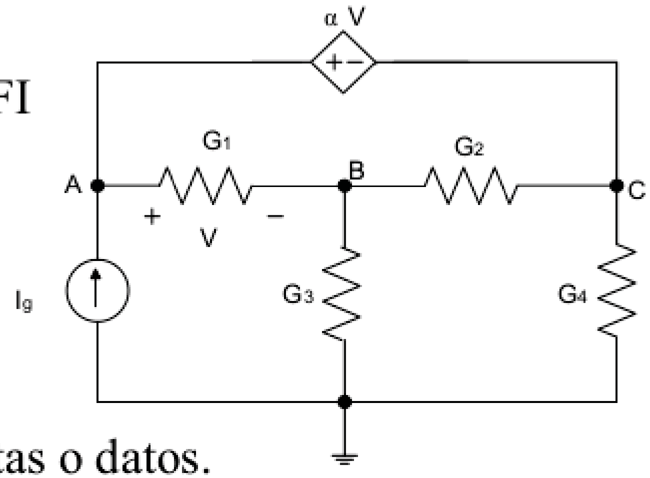


$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} G_1+G_5 & -G_1 & -G_5 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ -G_5 & -G_2 & G_2+G_4+G_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_g+rG_5((G_2+G_4)V_C-G_2V_B) \\ 0 \\ -rG_5((G_2+G_4)V_C-G_2V_B) \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} G_1+G_5 & -G_1+rG_5G_2 & -G_5(1+r(G_2+G_4)) \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ -G_5 & -G_2-rG_5G_2 & G_2+G_4+G_5(1+r(G_2+G_4)) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nudos: FDT sin acompañar

Método: Fuente dependiente de tensión sin acompañar



1. Formular las ecuaciones de nudos considerando la FD como FI

$$\begin{array}{l} A-C \\ B \\ restric \end{array} \begin{bmatrix} G_1 & -G_1-G_2 & G_2+G_4 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ \alpha V \end{bmatrix}$$

2. Expresar las magnitudes controladoras en función de incógnitas o datos.

$$V = V_A - V_B$$

3. Sustituir y reescribir

$$\begin{array}{l} A-C \\ B \\ restric \end{array} \begin{bmatrix} G_1 & -G_1-G_2 & G_2+G_4 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ \alpha(V_A - V_B) \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} A-C \\ B \\ restric \end{array} \begin{bmatrix} G_1 & -G_1-G_2 & G_2+G_4 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ 1-\alpha & \alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$