T2. VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL

2.1. VARIABLES ALEATORIAS REALES
2.2. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN
  2.2.1. Propiedades
  2.2.2. Cálculo de probabilidades a partir de F.
2.3. CLASIFICACIÓN DE LAS V. A.
  2.3.1. V. A. Discreta
  2.3.2. V. A. Continua
2.4. CARACTERÍSTICAS DE UNA V.A.
  2.4.1. Esperanza Matemática
  2.4.2. Varianza
  2.4.3. Momentos y función generatriz de momentos

2.1. VARIABLES ALEATORIAS REALES (V.A.R.)

Def: Dado un esp. probabilístico (Ω, P), una variable aleatoria (V.A.) es una función: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
El conjunto de valores que toma la V.A. se llama conjunto fundamental de X: $Im(X) = \{X(\{w\}) : w \in \Omega\}$

Obs: 1) Se puede interpretar como una representación numérica de los resultados del experimento aleatorio.
Exp. Aleat: Lanzar moneda: $\Omega = \{C, +\}$, entonces:
$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \; / \; X(\{C\}) = 0 \, ; \; X(\{+\}) = 1 \, ; \; Im(X) = \{0, 1\}$
$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \; / \; Y(\{C\}) = \pi \, ; \; Y(\{+\}) = e \, ; \; Im(X) = \{\pi, e\}$

Def: Sea X una V.A. definida sobre Ω $(X:\Omega \to \mathbb{R})$, y g una función real de variable real $(g:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$. Entonces $g(X)$ es una V.A. sobre Ω, llamada la transformada por g de X.

$$g(X):\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Obs: Sea $g(x)=2x$; $g(X)(\{c\})=0$; $g(X)(\{+\})=2$;

$Im(g(X))=\{0,2\}$; $P(g(X)=0)=P(X=0)=P(\{c\})$
$P(g(X)=2)=P(X=1)=P(\{+\})$

Definición: (probabilidad inducida). Sea X una V.A. sobre Ω, con $(\mathcal{P}(\Omega),P)$ un esp. probabilístico, se llama probabilidad sobre $\mathbb{R}$ inducida por X, a la función

$P_X:\mathbb{R}\to[0,1]\ /\ \forall I\subseteq\mathbb{R}: P_X(I)=P(X^{-1}(I))$; Al par $(\mathbb{R},P_X)$ se le llama esp. probabilístico inducido.

$$X^{-1}(I)=\{w\in\Omega\ /\ X(w)\in I\}$$

Obs: 1) En el ejemplo anterior ; $X(\{c\})=0$; $X(\{+\})=1$

$$P_X([-1/2,1/2])=P(X^{-1}([-1/2,1/2]))=P(X^{-1}(\{0\}))=$$

$$=P(\{c\})=1/2 \quad ;$$

2) Notación: $\forall x\in\mathbb{R}$: $\cancel{P(x)=P(\{x\})}=P(X=x)$

$a,b\in\mathbb{R}$: $P([a,b])=P(X\in[a,b])=P(a\leq X\leq b)$

$P([a,+\infty[)=P(X\in[a,+\infty[)=P(X\geq a)$

2.2. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

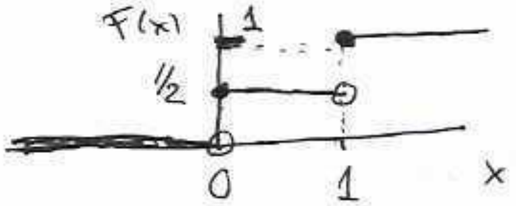
Def: Se define la función de distribución de una V.A. X, como $F:\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$ / $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$F(x)=P(X\le x)=P(X\in\,]-\infty,x])$$

Ejemplo: lanz. moneda; $\Omega=\{c,+\}$; $X(\{c\})=0$; $X(\{+\})=1$

$P(X=0)=P(X=1)=1/2$

$$¿F(x)? = P(X\le x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1/2, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$



2.2.1. Propiedades

1) F es una función acotada; $0\le F\le 1$;

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1;\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$$

2) F es monótona creciente; $\forall\, x\le y$: $F(x)\le F(y)$

3) F es continua por la derecha: $\forall x\in\mathbb{R}$: $F(x)=F(x^+)=\lim\limits_{\substack{t\to x\\ t>x}}F(t)$

4) Siempre existe el límite por la izquierda

$$\forall x\in\mathbb{R}\ \ \exists\ F(x^-)=\lim_{\substack{t\to x\\ t<x}}F(t)$$

Obs: Esta última propiedad significa que F es continua, o de no serlo sólo tendrá discontinuidades de salto.

Def: Se dice que las V.A. X e Y son equidistribuidas, ó están idénticamente distribuidas si coinciden sus funciones de distribución: $\forall x \in \mathbb{R}: F_X(x) = F_Y(x)$

2.2.2. Cálculo de probabilidades

Sean X V.A, $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ su función de distrib.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, se ,, :

1) $P(X \leq x) = F(x)$

2) $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$

3) $P(X < x) = \lim_{t \to x^-} P(X \leq t) = \lim_{t \to x^-} F(t) = F(x^-)$

4) $P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(x) - F(x^-)$

5) $P(x < X \leq y) = P(X \leq y) - P(X \leq x) = F(y) - F(x)$

Obs $P(x \leq X \leq y) = F(y) - F(x^-)$

$P(x \leq X < y) = F(y^-) - F(x^-)$

$P(x < X < y) = F(y^-) - F(x)$

$P(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$

2.3 CLASIFICACIÓN DE LAS V.A.

2.3.1. V.A. Discretas

Def: Una v.a. se dice discreta si su conjunto fundamental es numerable a lo más.

Obs: Si X v.a.d. $\Rightarrow Im(X) = \begin{cases} \text{finito} \equiv \begin{cases} \{0,1\} \\ \{1,2,\dots n\} \end{cases} \\ \infty \text{ numerab} \equiv \mathbb{N} \end{cases}$

Def: Se llama función de probabilidad (puntual), ó de cuantía, de la v.a. X, a la función $f: \mathbb{R} \to [0,1] /$

$f(x) = P(X = x)$;

Obs: $\forall x \notin Im(X) : f(x) = P(X=x) = 0$, Así:

$f(x) = \underbrace{\text{lo que vale}}$; $x \in \underbrace{\text{donde lo vale}}$ (ó $x \in Im(X)$)

Propiedades: Sean X una v.a.d., F su f. de distribución y f su función de probabilidad, se verifica:

1) $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\substack{t \leq x \\ (t \in Im(X))}} P(X = t) = \sum_{t \leq x} f(t)$

2) $f(x) = P(X = x) = F(x) - F(x^-)$

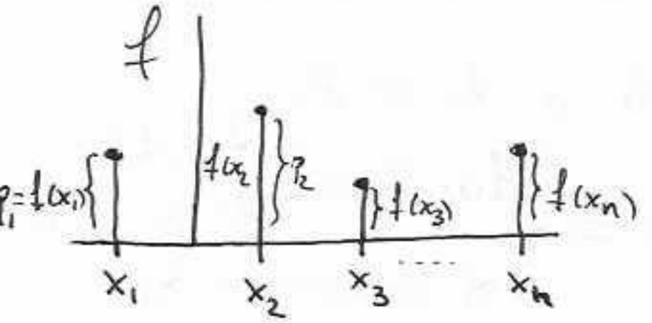
→3) $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sum_{x \in Im(X)} f(x) = 1$

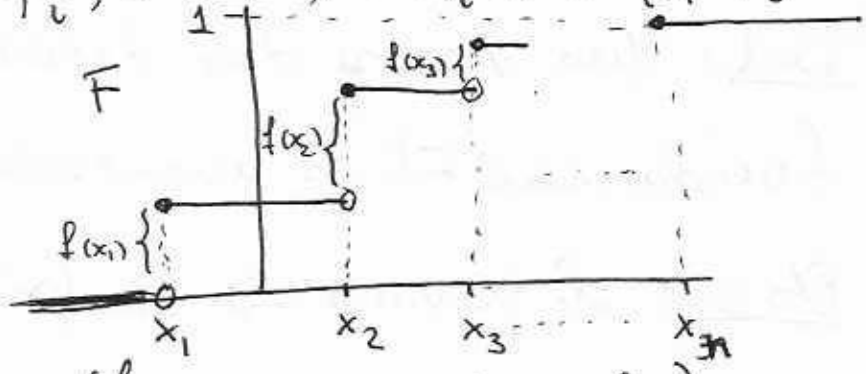
4) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$: $P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x \leq b} P(X=x) = \sum_{\substack{a \leq x \leq b \\ (x \in Im(X))}} f(x)$

5) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$: $P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x) = \sum_{x \in A \cap Im(X)} f(x)$

Obs: X V.A.D. $\mathrm{Im}(X) = \{x_1, .., x_n\}$;

$f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$; $i = 1, .., n$; $0 < p_i < 1$ / $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$





(función escalonada)

2.3.2. V.A. Continua

Def: Se dice que X es una V.A. Continua si su función de distribución es absolutamente continua. Esto es, existe una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ / $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$;

a "f" se le llama función de densidad de probabilidad, de X.

Obs: 1) F es absolutamente continua $\Rightarrow$ F es continua $\Rightarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $F(x) = F(x^+) = F(x^-) \Rightarrow P(X = x) = F(x) - F(x^-) = 0$
$\quad \neq f(x)$

2) Si X VAC $\Rightarrow P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$

3) Si X V.A.C. $\Rightarrow \mathrm{Im}(X)$ será un intervalo de $\mathbb{R}$;

4) Si X V.A.C $\Rightarrow f(x)$ No es una probabilidad, de hecho, No está acotada superiormente.

Propiedades: Sean X V.A.C, F su f. distribución y f su f. ~~dens~~ de densidad de probabilidad, entonces se cumple:

1) En los puntos de continuidad de f, se cumple: $\underline{f(x) = F'(x)}$; $\forall x \in \mathbb{R}$ donde f sea continua.

→2) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{Im(X)} f(x)\,dx = 1$ (El área bajo su gráfica debe valer 1 (no acotada))

3) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ $(a<b)$: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b] \cap Im(X)} f(x)\,dx$;

4) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$: $P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx = \int_{A \cap Im(X)} f(x)\,dx$;

Obs: X V.A.D $\Rightarrow f(x) = P(X=x)$; $f: Im(X) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

X V.A.C $\Rightarrow f(x) = F'(x)$; $f: Im(X) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

2.4. CARACTERÍSTICAS DE UNA V.A.

2.4.1. Esperanza Matemática

Def: Se llama esperanza de la V.A. X, al número siguiente (si existe):

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot f(x) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot f(x) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X=x), \text{ si } X \text{ V.A.D} \\ \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_{Im(X)} x \cdot f(x)\,dx, \text{ si } X \text{ V.A.C.} \end{cases}$$

$E(X) \approx \mu \equiv$ esperanza $\equiv$ media $\equiv$ Valor medio.

Ejemplo: lanz. dado : $Im(X) = \{1, 2, \dots, 6\}$.

$f(x) = P(X=x) = 1/6, \ x \in Im(X)$; ¿$E(X)$?

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot f(x) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot f(x) = \sum_{x=1}^{6} x \cdot \frac{1}{6} = 3.5 \notin Im(X)$$

Obs: 1) Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define la esperanza de $g(x)$ como el nº:

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} g(x) f(x) = \sum_{x \in Im(X)} g(x) \cdot f(x) \ ; X \text{ V.A.D} \\ \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx = \int_{Im(X)} g(x) f(x) dx \ ; X \text{ V.A.C} \end{cases}$$

Si X V.A.D. $\Rightarrow g(X)$ V.A.D

Si X V.A.C. $\Rightarrow g(X)$ V.A.C.

2) La esperanza de una constante es ella misma.

$\forall c \in \mathbb{R} : E(c) = c$;

3) La esperanza es una medida de centralización, sólo nos da el promedio, pero NO cómo se distribuyen los valores.

Propiedades: 1) Linealidad: Sean $a, b \in \mathbb{R}$; $g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$E(a g(X) + b \cdot h(X)) = a E(g(X)) + b E(h(X))$; $\underline{E(aX+b) = aE(X)+b}$.

2) Conserva el orden: si $g(x) \leq h(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow E(g(X)) \leq E(h(X))$

3) $\forall g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : |E(g(X))| \leq E(|g(X)|)$

2.4.2. Varianza Matemática

<u>Def</u>: Se define la varianza de la V.A. X como el nº (si existe)

$$V(X) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} (x - E(X))^2 \cdot f(x), & \text{si } X \text{ V.A.D} \\ \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\, dx, & \text{si } X \text{ V.A.C} \end{cases}$$

$$\sigma^2 = E((X - E(X))^2)$$

$$= \mathrm{Var}(X)$$

Se llama desviación típica de X a la raíz cuadrada positiva de la varianza: $\sigma = D(X) = |\sqrt{V(X)}|$;

<u>Obs</u>: 1) $V(X) = E((X - E(X))^2) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} (x-\mu)^2 \cdot f(x) & ; \\ \int_{\mathrm{Im}(X)} (x-\mu)^2 f(x)\, dx & ; \end{cases}$

2) Se llama coeficiente de variación de X, al nº:

$$CV(X) = \frac{\sigma}{|\mu|} = \frac{D(X)}{|E(X)|}$$

3) La varianza es una medida de dispersión de la V.A. X;

$V(X) \ggg \Rightarrow$ Valores de X más dispersos;

$V(X) \lll \Rightarrow$ " X menos " ;

4) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $V(aX+b) = a^2 V(X)$; $D(aX+b) = |a| D(X)$

$\rightarrow$ La varianza es invariante frente a las Traslaciones;

5) <u>Teorema de König</u>: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

6) $E(X^k)$, $k=1,2$;

2.4.3. Momentos y función generatriz de momentos

<u>Def</u>: Sean $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, se define el momento de "orden n" de la V.A. X respecto de "c", como el número: $E\left((X-c)^n\right)$;

Si $c = 0 \Rightarrow E(X^n) = \alpha_n \equiv$ momento en el origen de orden n

$$n=1 \Rightarrow \alpha_1 = E(X) = \mu \ ;$$

Si $c = \mu \Rightarrow E\left((X-\mu)^n\right) = \mu_n \equiv$ momento central de orden n.

$$n=2 \Rightarrow \mu_2 = E\left((X-\mu)^2\right) = V(X) = \sigma^2$$

<u>Obs</u>: La varianza es el mínimo momento de orden 2 de una VA ; $\forall c \in \mathbb{R}$: $E\left((X-c)^2\right) \geq V(X)$;

<u>Def</u>: Sea X V.A, se define la función generatriz de momentos de X, como: $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \ / \ \varphi(t) = E\left(e^{tX}\right)$ (si $\exists$)

<u>Obs</u>: 1) Si φ es "n" veces derivable en $t=0$, entonces se, :

$$\varphi^{(n)}(0) = \alpha_n = E(X^n) \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi'(0) = E(X) \\ V(X) = \varphi''(0) - \left(\varphi'(0)\right)^2 \end{array}$$

2) Dos V.A. se dicen idénticamente distribuidas $\Longleftrightarrow$ Tienen la misma f. generatriz de momentos.