Tema 8

Potencia en régimen permanente de corriente alterna

Teoría de Circuitos

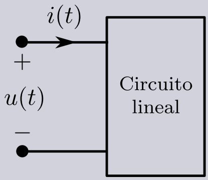
Dpto. Ingeniería Eléctrica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Índice

Índice

Potencia instantánea en corriente alterna

Potencia consumida por un circuito sometido a tensión e intensidad sinusoidales de la misma frecuencia:



$$u(t) = \sqrt{2}\,U\ \cos(\omega t + \varphi_u)$$
$$i(t) = \sqrt{2}\,I\ \cos(\omega t + \varphi_i)$$

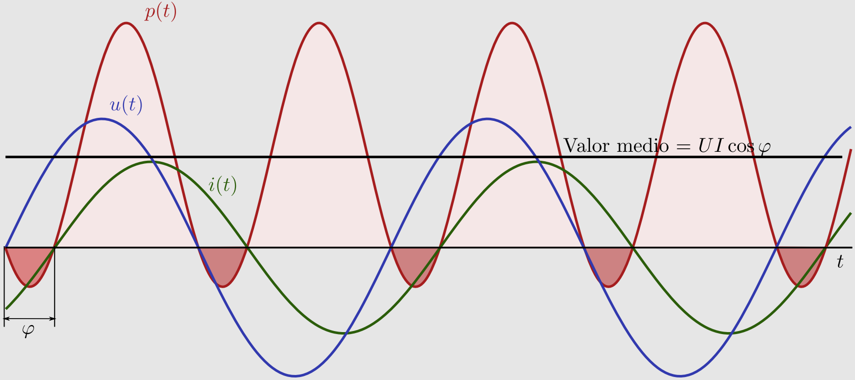
$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = 2\,U\,I\ \cos(\omega t + \varphi_u)\ \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Teniendo en cuenta que $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$,

$$\boxed{p(t) = U\,I\ \cos\varphi + U\,I\ \cos\left(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i\right)}$$

Potencia instantánea en corriente alterna

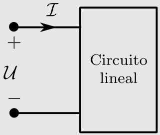


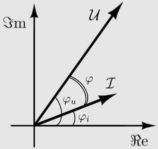
$$\boxed{p(t) = U\ I\ \cos\varphi + U\ I\ \cos\left(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i\right)}$$

- Término constante (potencia media): $U\,I\cos\varphi$
- Término fluctuante de frecuencia doble: $U\ I\ \cos\left(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i\right)$

Potencia instantánea en corriente alterna

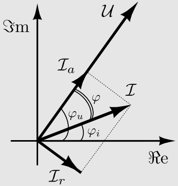
Trabajando con los fasores de tensión e intensidad,





$$\mathcal{U} = U_{\angle \varphi_u}$$
$$\mathcal{I} = I_{\angle \varphi_i}$$

y descomponiendo la intensidad en dos componentes, una en fase con la tensión (activa), y otra en cuadratura con la tensión (reactiva),



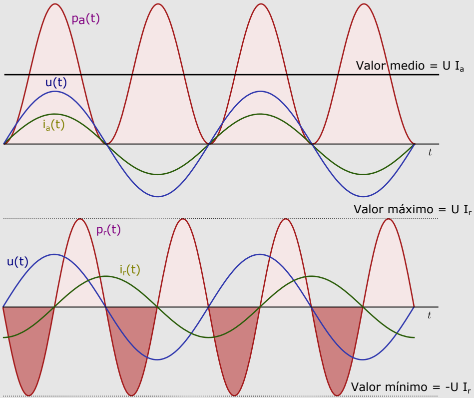
$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_a + \mathcal{I}_r$$
$$\mathcal{I}_a = I \cos\varphi_{\angle \varphi_u} = I_{a\angle \varphi_u}$$
$$\mathcal{I}_r = I \operatorname{sen}\varphi_{\angle(\varphi_u - 90^\circ)} = I_{r\angle(\varphi_u - 90^\circ)}$$

$$\boxed{p(t) = U\, I_a\, [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)] + U\, I_r\, \operatorname{sen}(2\omega t + 2\varphi_u)}$$

Potencia instantánea en corriente alterna

La intensidad en fase con la tensión da lugar a un consumo de energía neto (potencia siempre positiva), mientras que la intensidad en cuadratura con la tensión no supone un consumo energético a lo largo del tiempo.

$$p(t) = U\, I_a\, [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)] + U\, I_r\, \operatorname{sen}(2\omega t + 2\varphi_u)$$



Potencia instantánea en corriente alterna

$$p(t) = U\,I_a\,[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)] + U\,I_r\,\operatorname{sen}(2\omega t + 2\varphi_u)$$

- Componente activa de la potencia: varía entre cero y dos veces la potencia media, siendo ésta $U\,I_a = U\,I\,\cos\varphi$.
- Componente reactiva de la potencia: varía entre $U\,I_r$ y $-U\,I_r$, siendo sucesivamente consumida y cedida.

Para diferenciar ambos efectos, se definen dos potencias: potencia activa (P) y potencia reactiva (Q):

$$P = U\,I_a = U\,I\,\cos\varphi$$
$$Q = U\,I_r = U\,I\,\operatorname{sen}\varphi$$

Conocidas P y Q, la potencia instantánea queda definida:

$$p(t) = P\,[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)] + Q\,\operatorname{sen}(2\omega t + 2\varphi_u)$$

Índice

Potencias activa, reactiva, aparente y compleja

- Potencia activa: valor medio de la potencia instantánea

$$P = U\,I_a = U\,I\,\cos\varphi \qquad \text{Unidad: Vatio [W]}$$

- Potencia reactiva: valor máximo de la potencia asociada a la carga y descarga de elementos almacenadores

$$Q = U\,I_r = U\,I\,\operatorname{sen}\varphi \qquad \text{Unidad: Voltio-amperio reactivo [var]}$$

- Potencia aparente: producto de los valores eficaces de tensión e intensidad

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U\,I \qquad \text{Unidad: Voltio-amperio [VA]}$$

La potencia instantánea se puede expresar, en función de P, Q y S, como

$$\begin{aligned} p(t) &= P + S\,\cos\left(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i\right) \\ &= P\,\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)\right] + Q\,\operatorname{sen}(2\omega t + 2\varphi_u) \end{aligned}$$

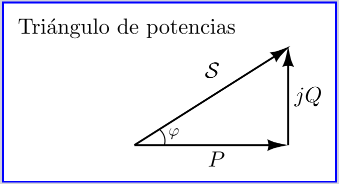
Potencias activa, reactiva, aparente y compleja

Potencia Compleja

Potencia cuya parte real es la potencia activa y la parte imaginaria es la potencia reactiva. Su módulo es la potencia aparente, y su fase es $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.

$$\mathcal{S} = P + jQ = S_{\angle\varphi}$$

Unidad: Voltio-amperio [VA]



En función de los fasores tensión e intensidad:

$$\mathcal{S} = S_{\angle\varphi} = \mathcal{U} \cdot \mathcal{I}^{*} = U_{\angle\varphi_u} \left(I_{\angle\varphi_i}\right)^{*} = U\, I_{\angle\varphi_u - \varphi_i}$$

Permite calcular las potencias activa y reactiva a partir de los fasores de tensión e intensidad.

Potencias activa, reactiva, aparente y compleja

Teorema de Boucherot

En un circuito en régimen permanente de alterna, el balance de potencia se expresa como balance de potencias complejas:

$$\sum_k p_k(t) = \sum_k v_k(t)\, i_k(t) \quad \Longrightarrow \quad \sum_k \mathcal{S}_k = \sum_k \mathcal{U}_k \, \mathcal{I}_k{}^*$$

Por tanto, se deben cumplir tanto el balance en potencias activas como el balance en potencias reactivas por separado (Teorema de Boucherot):

$$\sum_k \mathcal{S}_k = \sum_k (P_k + jQ_k) = 0 \;\Longrightarrow\; \begin{cases} \sum_k P_k = 0 \\ \sum_k Q_k = 0 \end{cases}$$

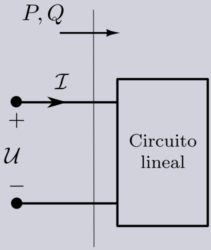
Potencias activa, reactiva, aparente y compleja

Signos de la potencia activa y reactiva

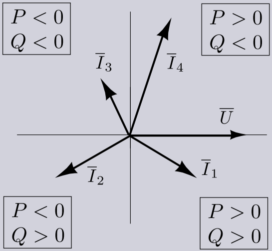
El signo tanto la potencia activa como de la reactiva depende del desfase entre tensión e intensidad:

$$P = U\,I\,\cos\varphi \qquad Q = U\,I\,\operatorname{sen}\varphi \qquad \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

Tomando como referencia la tensión:



(Referencias pasivas)

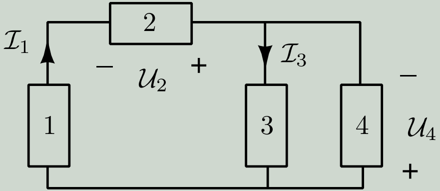


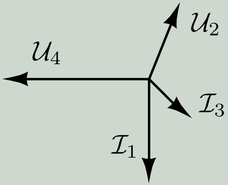
Potencias activa, reactiva, aparente y compleja

Ejemplo

Para el circuito eléctrico y el diagrama fasorial de la figura, se pide:

1. Determinar el carácter generador o consumidor de cada elemento en cuanto a la potencia media.
2. Para cada elemento, indicar si consume o cede potencia reactiva.

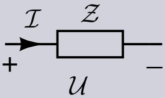




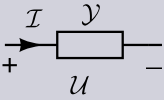
Solución: E1: Genera P y cede Q; E2: Consume P y cede Q; E3: Consume P y Q; E4: Genera P y consume Q

Potencias activa, reactiva, aparente y compleja

Potencias consumidas por una impedancia (admitancia)



$$\mathcal{U} = \mathcal{Z} \cdot \mathcal{I}$$



$$\mathcal{I} = \mathcal{Y} \cdot \mathcal{U}$$

- Potencia compleja:

$$\mathcal{S} = (\mathcal{Z} \cdot \mathcal{I}) \cdot \mathcal{I}^* = \mathcal{Z} \cdot I^2 \qquad \mathcal{S} = \mathcal{U} \cdot (\mathcal{Y}^* \cdot \mathcal{U}^*) = \mathcal{Y}^* \cdot U^2$$

- Potencia aparente:

$$S = Z \cdot I^2 \qquad S = Y \cdot U^2$$

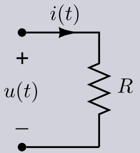
- Potencias activa y reactiva:

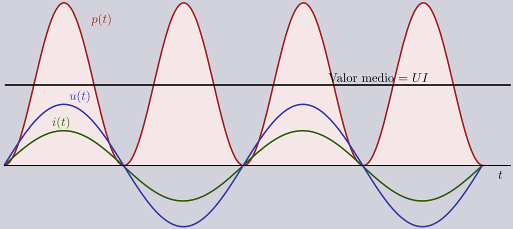
$$P = R \cdot I^2 \qquad P = G \cdot U^2$$
$$Q = X \cdot I^2 \qquad Q = -B \cdot U^2$$

Índice

Potencia y energía de resistencias, bobinas y condensadores

Resistencia





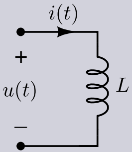
$$\left.\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{2}\,U\ \cos(\omega t) \\ i(t) &= \sqrt{2}\,I\ \cos(\omega t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad p_R(t) = u(t)\cdot i(t) = U I \cdot [1 + \cos(2\omega t)]$$

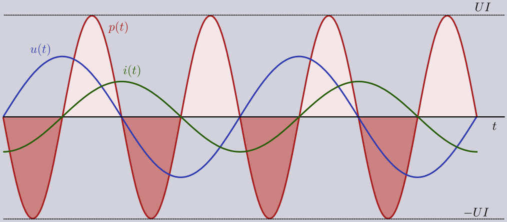
$$P = U\,I = R\,I^2 = G\,U^2 \qquad\qquad Q = 0$$

$$w_R(t) = \int R\,i^2(t)\,dt = P\left[t + \frac{1}{2\omega}\,\mathrm{sen}(2\omega t + 2\varphi_i)\right]$$

Potencia y energía de resistencias, bobinas y condensadores

Bobina





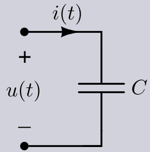
$$\left.\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{2}\,U\ \cos(\omega t) \\ i(t) &= \sqrt{2}\,I\ \cos(\omega t - 90^\circ) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad p_L(t) = u(t)\cdot i(t) = U\,I \cdot \mathrm{sen}\,(2\omega t)$$

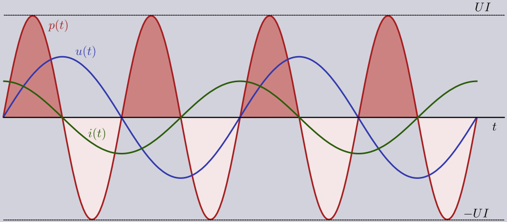
$$P = 0 \qquad\qquad Q = U\,I = L\omega\, I^2 = \frac{U^2}{L\omega}$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2}\,L\,i^2(t) = \frac{1}{2}\,L\,I^2\,[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)]$$

Potencia y energía de resistencias, bobinas y condensadores

Condensador





$$\left.\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{2}\,U\,\cos(\omega t) \\ i(t) &= \sqrt{2}\,I\,\cos(\omega t + 90^\circ) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad p_C(t) = u(t)\cdot i(t) = -U\,I\,\mathrm{sen}\,(2\omega t)$$

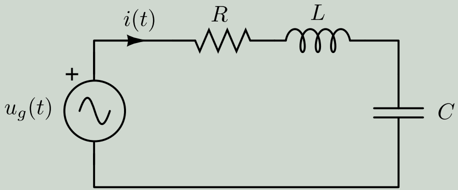
$$P = 0 \qquad Q = -U\,I = \frac{-I^2}{C\,\omega} = -C\omega\,U^2$$

$$w_C(t) = \frac{1}{2}\,C\,u^2(t) = \frac{1}{2}\,C\,U^2\,\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)\right]$$

Ejemplo

En el circuito de la figura, $u_g(t) = \sqrt{2}\,750\ \cos(5000t + 30°)$ V, $R = 90\,\Omega$, $L = 32$ mH, y $C = 5\,\mu$F.

1. Calcular las potencias activa y reactiva que consume cada uno de los elementos del circuito, y la potencia compleja que cede la fuente.
2. Comprobar que se cumplen los balances de potencia activa y reactiva.



Solución: $P_R = 2250$ W; $Q_L = 4000$ var; $Q_C = -1000$ var; $\mathcal{S}_g = 2250 + j3000$ VA

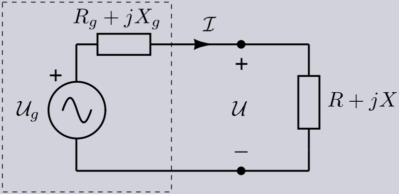
Índice

Aspectos prácticos de la potencia en corriente alterna

Máxima transferencia de potencia

Se trata de maximizar la potencia media que consume una impedancia $\mathcal{Z}$ conectada a una fuente real de alterna (con impedancia interna $\mathcal{Z}_g$):

$$P = R{\cdot}I^2 = \frac{R \cdot U_g^2}{(R+R_g)^2 + (X+X_g)^2}$$



Fuente real de tensión

El caso más favorable es cuando R y X se pueden elegir libremente:

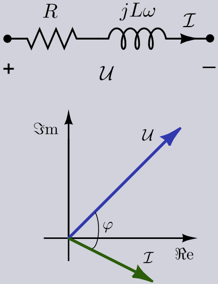
$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial P}{\partial X} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{R = R_g \;\; ; \;\; X = -X_g} \;\; \Longrightarrow \;\; P_{max} = \frac{U_g^2}{4 \cdot R_g}$$

Aspectos prácticos de la potencia en corriente alterna

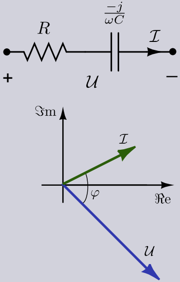
Mejora del factor de potencia

- El factor de potencia se define como el cociente entre la potencia activa y la potencia aparente: factor de potencia $= P/S = \cos\varphi$
- Para que esté completamente determinado, es necesario indicar su carácter: inductivo (en retraso), o capacitivo (en adelanto).

Carácter inductivo (retraso)

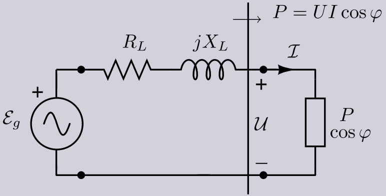


Carácter capacitivo (adelanto)



Aspectos prácticos de la potencia en corriente alterna

Mejora del factor de potencia



Para $\{P, U\}$ fijas:

- Si $\cos\varphi$ aumenta $\Rightarrow$ I disminuye
- Si $\cos\varphi$ disminuye $\Rightarrow$ I aumenta

Si la intensidad consumida aumenta:

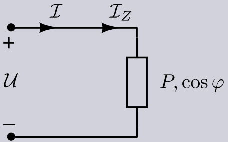
1. Aumentan las pérdidas en la alimentación: $R_L\, I^2$
2. Aumenta la caída de tensión: $\Delta U = E_g - U$
3. Mayor intensidad en las líneas al transportar I_r (no realiza trabajo útil) en lugar de solamente I_a (da lugar a la potencia media).

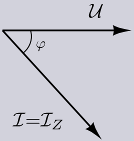
$\Rightarrow$ Es importante mantener factores de potencia próximos a 1.

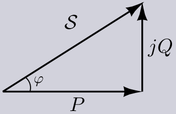
Aspectos prácticos de la potencia en corriente alterna

Mejora del factor de potencia

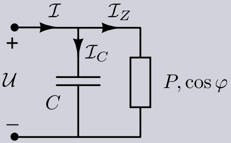
Carga inductiva
SIN compensar

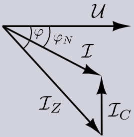


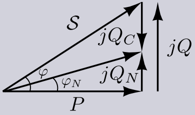




Carga inductiva
compensada







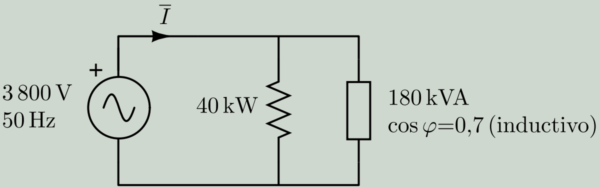
$$\left.\begin{array}{l} Q_C = Q_N - Q = P\tan\varphi_N - P\tan\varphi \\ Q_C = -\omega\, C\, U^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{C = \frac{P(\tan\varphi - \tan\varphi_N)}{\omega\, U^2}}$$

Aspectos prácticos de la potencia en corriente alterna

Ejemplo: Mejora del factor de potencia

El circuito de la figura muestra una fuente de $3\,800$ V y 50 Hz que alimenta a una instalación que consume 40 kW para calefacción y 180 kVA para motores de inducción que operan con un $\cos\varphi = 0{,}7$. Determinar:

1. La intensidad total I y el factor de potencia total de la instalación.
2. Determinar la capacidad del condensador a conectar en paralelo con la carga para mejorar el factor de potencia total de la instalación a $\cos\varphi = 0{,}9$ inductivo.

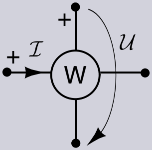


Solución: $I = 55{,}26$ A; $\cos\varphi_T = 0{,}79$ inductivo; $C = 10{,}6\,\mu$F

Aspectos prácticos de la potencia en corriente alterna

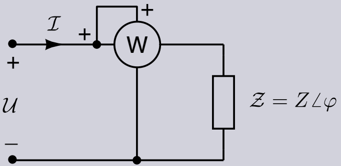
Medida de la potencia activa: Vatímetro

El vatímetro es un elemento de cuatro terminales, midiendo la tensión, la intensidad, y el desfase entre ambas:



$$\boxed{W = U \cdot I \cdot \cos\left(\widehat{\mathcal{U},\mathcal{I}}\right)}$$

Para medir la potencia media consumida por un elemento, se conecta el vatímetro en la forma indicada:

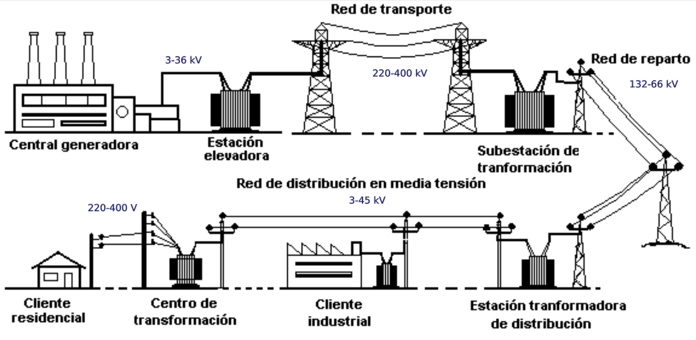


$$\begin{aligned} W &= U \cdot I \cdot \cos\left(\widehat{\mathcal{U},\mathcal{I}}\right) \\ &= U \cdot I \cdot \cos\varphi = P \end{aligned}$$

Índice

Transformador

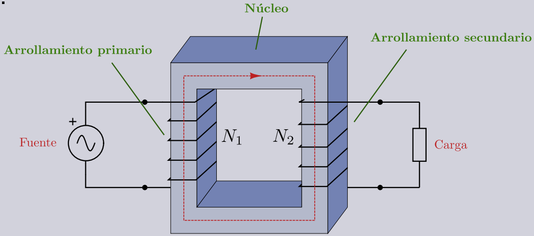
- Función: Máquina eléctrica estática que funciona en corriente alterna, cuya función es transmitir una potencia eléctrica cambiando el nivel de tensión.
- Importancia: Permiten el transporte y la distribución eficiente de energía eléctrica (con reducidas pérdidas) a grandes distancias.



Transformador

Constitución

- Bobinas con resistencia reducida y perfectamente acopladas.
- El acoplamiento de dichas bobinas se realiza mediante núcleo ferromagnético de baja reluctancia.
- La bobina o arrollamiento que se conecta a la fuente de alimentación se denomina **primario**.
- La bobina o arrollamiento que se conecta a la carga eléctrica se denomina **secundario**.

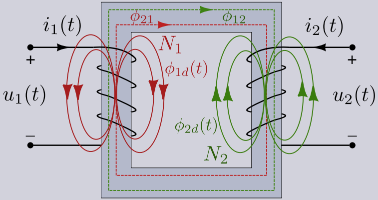


Transformador

Acoplamiento magnético en el transformador (acoplamiento positivo)

ϕ_{ij}: Flujo enlazado por cada espira de la bobina i como consecuencia de la intensidad que circula por la bobina j

ϕ_{id}: Flujo de dispersión de la bobina i



El flujo enlazado por cada espira:

$$\phi_1(t) = \phi_{21} + \phi_{1d} + \phi_{12} = \phi_{11} + \phi_{12}$$

$$\phi_2(t) = \phi_{21} + \phi_{12} + \phi_{2d} = \phi_{21} + \phi_{22}$$

Observése que el flujo mutuo es:

$$\phi_m(t) = \phi_{21} + \phi_{12}$$

Según la ley de Faraday:

$$u_1(t) = N_1 \cdot \frac{d\phi_1}{dt} = N_1 \cdot \frac{d\phi_{11}}{dt} + N_1 \cdot \frac{d\phi_{12}}{dt}$$

$$u_2(t) = N_2 \cdot \frac{d\phi_2}{dt} = N_2 \cdot \frac{d\phi_{21}}{dt} + N_2 \cdot \frac{d\phi_{22}}{dt}$$

Suponiendo que el medio donde se propaga el flujo magnético es lineal:

$$N_i\phi_{ii} = L_i i_i \quad ; \quad N_i\phi_{ij} = M i_j$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_1(t) &= L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \\ u_2(t) &= M \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \end{aligned}}$$

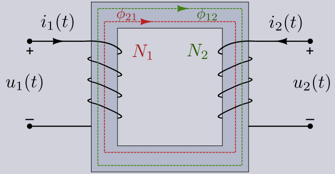
M: Coeficiente de inducción mutua [H]

L_i: Coeficientes de autoinducción [H]

Transformador

Acoplamiento perfecto (acoplamiento positivo)

El acoplamiento perfecto implica que los flujos de dispersión son nulos.



$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi_{12}(t) + \phi_{21}(t)$$

$$u_1(t) = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = M \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}$$

Por tanto, $u_1(t) = n \cdot u_2(t)$, y en consecuencia:

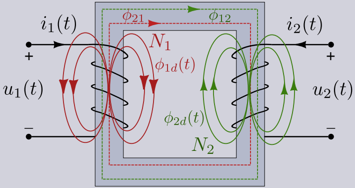
$$\frac{L_1}{N_1} \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{N_1} \cdot \frac{di_2}{dt} = \frac{M}{N_2} \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{L_2}{N_2} \cdot \frac{di_2}{dt} \implies \begin{cases} L_1 = n^2 L_2 \\ M = \dfrac{L_1}{n} = nL_2 = \sqrt{L_1 L_2} \end{cases}$$

siendo $n = N_1/N_2$.

Transformador

Coeficiente de acoplamiento de bobinas acopladas, k

El coeficiente de acoplamiento mide el grado de acoplamiento de dos bobinas.



El **coeficiente de acoplamiento** de dos bobinas se define como:

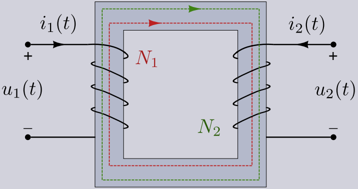
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \leq 1$$

- Si $k = 1$ el **acoplamiento es perfecto** (no existen flujos de dispersión).
- Si $k = 0$ el **acoplamiento es nulo** (no existen flujos compartidos).

Transformador

Fuerza magnetomotriz en un transformador:

La Ley de Ampère aplicada al material ferromagnético proporciona la relación entre la intensidad aplicada y el flujo magnético resultante, a través de la reluctancia del núcleo magnético ($\mathcal{R}$).



$$\mathcal{F} = N_1 \cdot i_1(t) + N_2 \cdot i_2(t) = \mathcal{R} \cdot \phi(t)$$

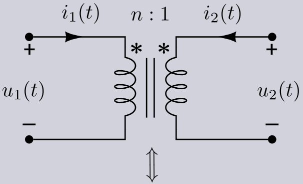
siendo ϕ el flujo magnético (en Weber).

Si la reluctancia del núcleo es muy reducida, $\mathcal{R} \simeq 0$,

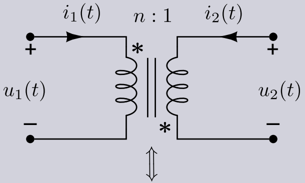
$$N_1 \cdot i_1(t) + N_2 \cdot i_2(t) = 0 \implies i_1(t) = -\frac{1}{n} i_2(t)$$

Transformador ideal

Ecuaciones tensión-intensidad en el transformador ideal



$$\boxed{\begin{aligned} u_1(t) &= n \cdot u_2(t) \\ i_2(t) &= -n \cdot i_1(t) \end{aligned}}$$



$$\boxed{\begin{aligned} u_1(t) &= -n \cdot u_2(t) \\ i_2(t) &= n \cdot i_1(t) \end{aligned}}$$

Potencia

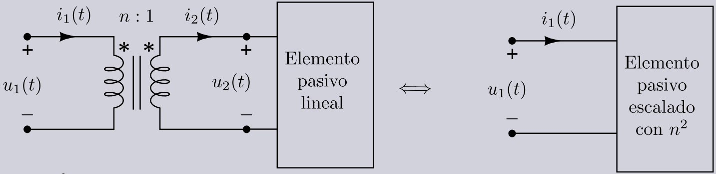
$$p(t) = u_1(t) \cdot i_1(t) + u_2(t) \cdot i_2(t) = 0$$

El transformador transfiere en todo instante la potencia que entra por un devanado (primario), al otro devanado (secundario), cambiando tensiones e intensidades según la relación de transformación.


10
KVA

Transformador ideal

Adaptación de impedancias



En corriente alterna:

$$\mathcal{U}_1 = n \cdot \mathcal{U}_2 \qquad \mathcal{I}_1 = \frac{1}{n} \cdot \mathcal{I}_2 \qquad \mathcal{U}_2 = \mathcal{Z} \cdot \mathcal{I}_2$$

donde $\mathcal{Z}$ es la impedancia del elemento conectado en el secundario del transformador. En consecuencia, $\mathcal{U}_1 = n^2 \cdot \mathcal{Z} \cdot \mathcal{I}_1$ y $\mathcal{Z}_e = n^2 \cdot \mathcal{Z}$

El conjunto formado por un transformador ideal y un elemento pasivo conectado en su secundario equivale desde el primario a un elemento de la misma naturaleza escalado con n^2. $R_e = n^2\, R_2$; $L_e = n^2\, L_2$; $C_e = \frac{1}{n^2}\, C_2$