Tema 6

Circuitos de Corriente Continua
(Circuitos con fuentes constantes en el tiempo)

Teoría de Circuitos

Dpto. Ingeniería Eléctrica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

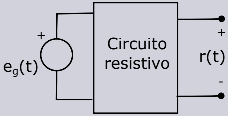
Índice

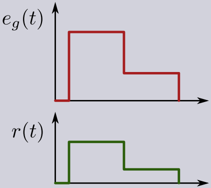
Índice

Regímenes transitorio y permanente

Circuito **estático** (no contiene elementos almacenadores de energía)

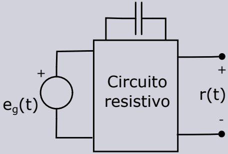
Respuesta instantánea ante cambios en la excitación.

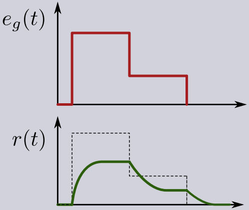




Circuito **dinámico** (contiene elementos almacenadores de energía)

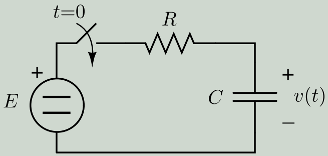
Aparece una evolución en la respuesta ante cambios en la excitación debido a que la energía almacenada no puede cambiar bruscamente.

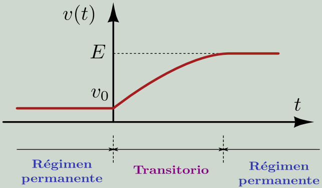




Regímenes transitorio y permanente

Conexión de un condensador a una fuente de corriente continua





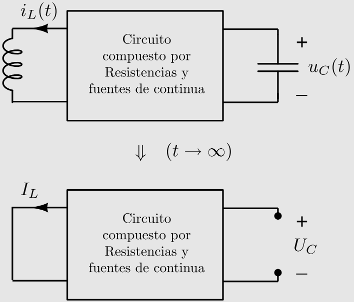
- La transición de un régimen permanente a otro diferente involucra en general un periodo transitorio, si existen bobinas y/o condensadores.
- Durante el régimen transitorio se produce una redistribución de la energía almacenada en bobinas y condensadores.
- El régimen transitorio puede estar provocado por:
  - Apertura-cierre de interruptores.
  - Cortocircuitos.
  - Cambios bruscos en los valores de las fuentes aplicadas.

Índice

Análisis de circuitos en régimen permanente de continua

En régimen permanente de continua todas las magnitudes tienen un valor constante:

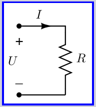
- Las **bobinas** se comportan como cortocircuitos ($U = 0$).
- Los **condensadores** se comportan como circuitos abiertos ($I = 0$).



A diferencia de un circuito estático, hay energía almacenada en bobinas y condensadores. Dicha energía dará origen a futuros transitorios cuando se produzca un cambio en el circuito.

Análisis de circuitos en régimen permanente de continua

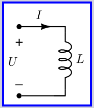
Resistencia



Comportamiento: $\boxed{U = R \cdot I}$ $\boxed{I = G \cdot U}$

Potencia: $p_R(t) = U \cdot I = R \cdot I^2 = G \cdot U^2 \geq 0$

Bobina

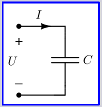


Comportamiento: $\boxed{U = L \cdot \frac{dI}{dt} = 0}$, I=cte

Potencia: $p_L(t) = U \cdot I = 0$

Energía: $w_L(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \text{cte} \geq 0$

Condensador

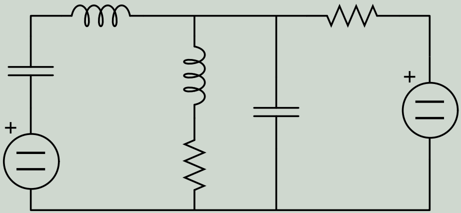


Comportamiento: $\boxed{I = C \cdot \frac{dU}{dt} = 0}$, U=cte

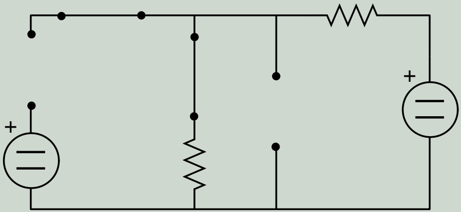
Potencia: $p_C(t) = U \cdot I = 0$

Energía: $w_C(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \text{cte} \geq 0$

Ejemplo



$$\Downarrow \quad (t \to \infty)$$



Índice

Análisis de circuitos dinámicos en un instante determinado

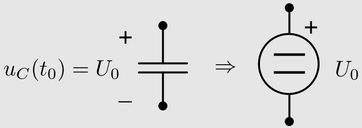
Se trata de determinar las magnitudes de un circuito en un instante concreto t_0 (por ejemplo, las condiciones iniciales de un transitorio).

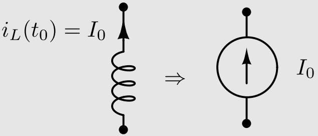
1. Las fuentes, $e_g(t)$ e $i_g(t)$, se sustituyen por fuentes de valor fijado en dicho instante:

$$E_g = e_g(t_0) \quad ; \quad I_g = i_g(t_0)$$

2. Condensadores e inductancias se sustituyen por fuentes de tensión e intensidad según la tensión y la intensidad en dicho instante, respectivamente:

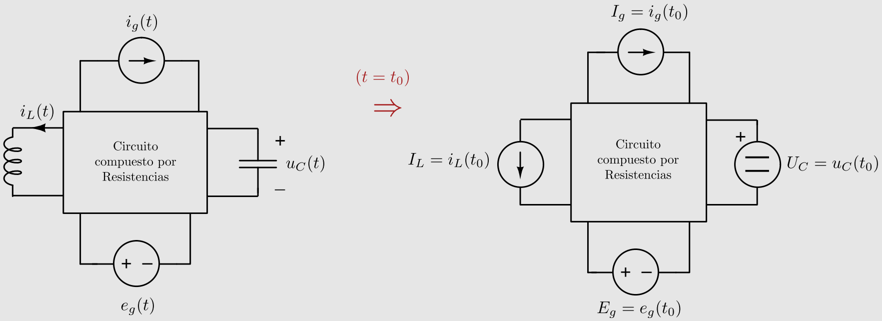
$$U_0 = u_C(t_0) \qquad I_0 = i_L(t_0)$$





Análisis de circuitos dinámicos en un instante determinado

Analizar un circuito dinámico en un instante cualquiera, conocidas las energías almacenadas en dicho instante, se reduce a resolver un circuito resistivo con fuentes constantes, válido únicamente en dicho instante.



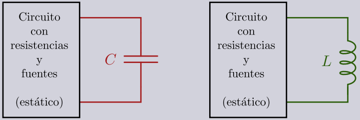
Índice

Régimen transitorio en circuitos de corriente continua

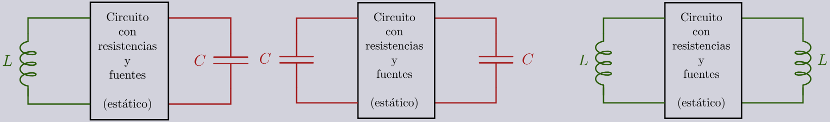
Orden del circuito: número de elementos almacenadores

El orden del circuito coincide con el orden de las ecuaciones diferenciales que definen su dinámica.

- Circuitos de primer orden: un único elemento almacenador de energía.



- Circuitos de segundo orden: dos elementos almacenadores de energía.

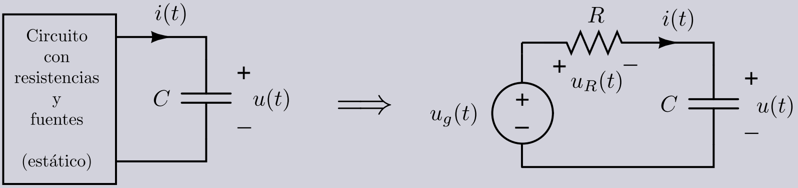


- Circuitos de orden superior a dos: el transitorio es una composición de transitorios de primer y segundo orden.

Transitorios de primer orden

Transitorio debido a un condensador (Circuito RC)

Utilizando el Equivalente Thévenin en bornas del condensador:



$$u(t) + R\,i(t) = u_g(t) = V_g \qquad i(t) = C\,\frac{du(t)}{dt}$$

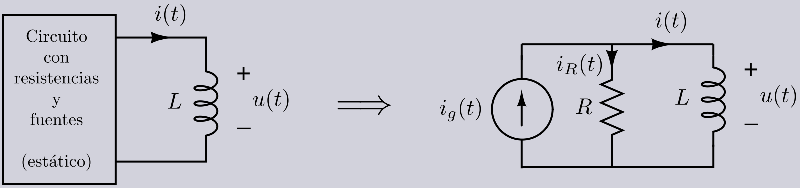
Ecuación diferencial de primer orden que gobierna la evolución de la tensión en el condensador:

$$\boxed{\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\,u(t) = \frac{V_g}{RC}}$$

Transitorios de primer orden

Transitorio debido a una bobina (Circuito RL)

Utilizando el Equivalente Norton en bornas de la bobina:



$$i(t) + \frac{u(t)}{R} = i_g(t) = I_g \qquad u(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

Ecuación diferencial de primer orden que gobierna la evolución de la intensidad en la bobina:

$$\boxed{\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}\,i(t) = \frac{R}{L}\,I_g}$$

Transitorios de primer orden

Solución de la ecuación diferencial

$$\mathrm{RC}: \boxed{\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u(t) = \frac{V_g}{RC}} \qquad \mathrm{RL}: \boxed{\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{R}{L}I_g}$$

La solución se compone de dos términos:

$$\mathrm{RC}: \quad u(t) = u_n(t) + U_\infty \qquad \mathrm{RL}: \quad i(t) = i_n(t) + I_\infty$$

1. **Respuesta natural:** $u_n(t)$ e $i_n(t)$, solución de la ecuación diferencial homogénea.
    - Incluye una constante de integración que habrá que determinar con las condiciones iniciales del circuito.
    - El tipo de evolución coincide con la que tendría el circuito si se anulan las fuentes (debida sólo a la energía almacenada).
2. **Respuesta forzada:** U_∞ e I_∞, solución particular de la ecuación diferencial completa.
    - Depende únicamente de las fuentes del circuito.

Transitorios de primer orden

Respuesta natural

La respuesta natural se obtiene resolviendo la ecuación diferencial de primer orden homogénea:

$$\mathrm{RC}: \boxed{\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}\,u(t) = 0} \qquad \mathrm{RL}: \boxed{\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}\,i(t) = 0}$$

cuya solución, para $t \geq 0$ es

$$\mathrm{RC}: \boxed{u_n(t) = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}} \qquad \mathrm{RL}: \boxed{i_n(t) = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

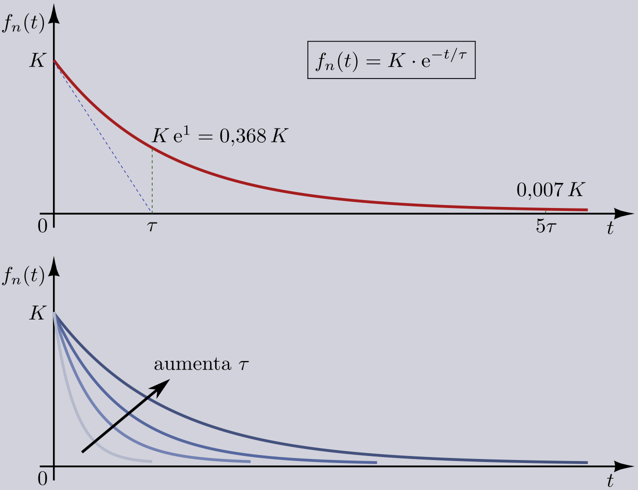
- τ es la constante de tiempo característica del circuito:

  $$\text{Circuito RC}: \;\; \tau = RC \qquad \text{Circuito RL}: \;\; \tau = L/R$$

  donde R es la resistencia equivalente que ve L o C.
- K se determina a partir de las condiciones iniciales, $u(0)$ e $i(0)$

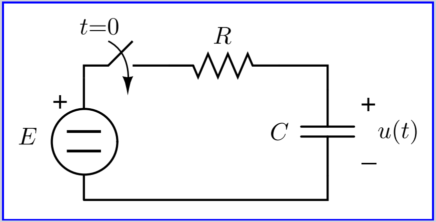
Transitorios de primer orden

Significado de la constante de tiempo



Transitorios de primer orden

Respuesta completa debida a un condensador (Circuito RC)

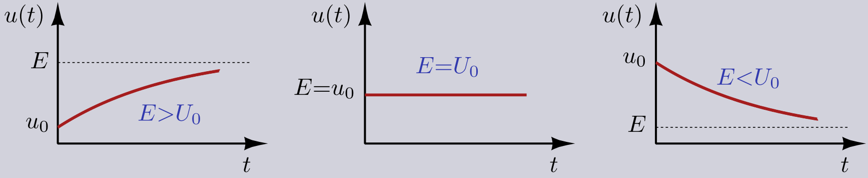


$$u(t) = V_\infty + [V_0 - V_\infty]\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$V_\infty = E \quad ; \quad \tau = RC$$

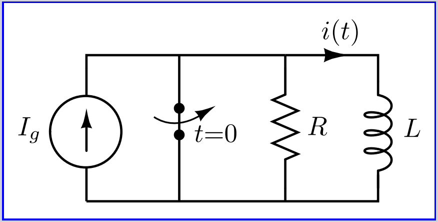
$$u(0^-) = u(0^+) = V_0$$

Tipo de evolución dependiendo del valor inicial y el valor final:



Transitorios de primer orden

Respuesta completa debida a una bobina (Circuito RL)

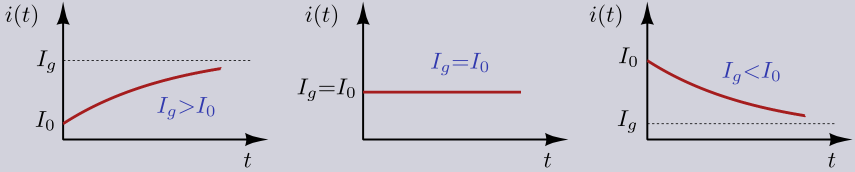


$$i(t) = I_\infty + [I_0 - I_\infty]\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$I_\infty = I_g \quad ; \quad \tau = L/R$$

$$i(0^-) = i(0^+) = I_0$$

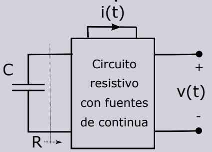
Tipo de evolución dependiendo del valor inicial y el valor final:



Transitorios de primer orden

Cálculo de otras variables del circuito

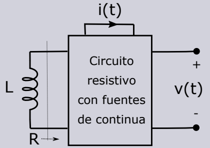
- El circuito evoluciona desde su estado inicial al régimen permanente de forma exponencial, con la constante de tiempo determinada por el condensador o la bobina.
- Circuito de primer orden con condensador (RC):



$$i(t) = I_\infty + [I_0 - I_\infty]\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}$$

$$v(t) = V_\infty + [V_0 - V_\infty]\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}$$

- Circuito de primer orden con bobina (RL):

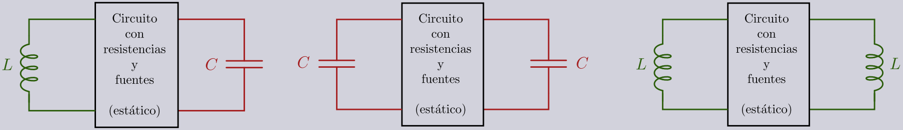


$$i(t) = I_\infty + [I_0 - I_\infty]\,\mathrm{e}^{-t/(L/R)}$$

$$v(t) = V_\infty + [V_0 - V_\infty]\,\mathrm{e}^{-t/(L/R)}$$

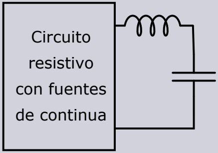
Transitorios de segundo orden

Circuitos de segundo orden



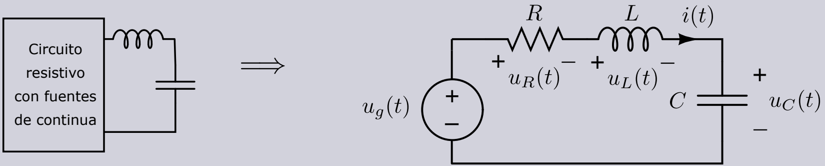
Circuito RLC serie

Se estudiará el circuito RLC serie, de interés práctico:



Transitorios de segundo orden

Circuito de segundo orden RLC serie



$$R\,i(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_g(t) = V_g$$

$$i(t) = C\,\frac{du_C(t)}{dt} \quad ; \quad u_L(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\,\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\,i(t) = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\,\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\,u_C(t) = \frac{V_g}{LC}}$$

Transitorios de segundo orden

Respuesta natural en transitorios de segundo orden

La respuesta natural se obtiene resolviendo la ecuación diferencial de segundo orden homogénea:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2\,\alpha\,\frac{df(t)}{dt} + \omega_o^2\, f(t) = 0 \quad \begin{cases} \alpha \equiv \text{Coef. de amortiguamiento.} \\ \omega_o \equiv \text{Frecuencia de resonancia.} \end{cases}$$

Polinomio característico: $s^2 + 2\,\alpha\,s + \omega_o^2 = 0$

Raíces del polinomio característico: $s_1, s_2 \;=\; -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$

Para el RLC serie: $s^2 + \frac{R}{L}\,s + \frac{1}{LC} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{R}{2\,L},\ \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

En función de los valores de α y ω_o se obtienen respuestas naturales con distinta evolución temporal.

Transitorios de segundo orden

Respuesta natural en transitorios de segundo orden

Tipos de respuesta natural que se pueden presentar:

- **Sobreamortiguada** ($\alpha > \omega_o$): $s_1, s_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$

$$f_n(t) = K_1\, \mathrm{e}^{s_1\, t} + K_2\, \mathrm{e}^{s_2\, t} \qquad \tau_1 = -1/s_1\ ;\ \tau_2 = -1/s_2$$

- **Críticamente amortiguada** ($\alpha = \omega_o$): $s_1 = s_2 = -\alpha$

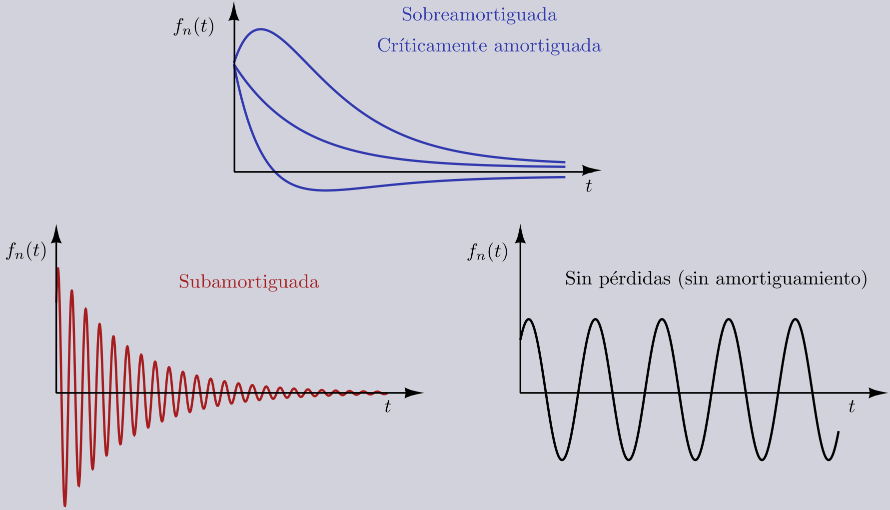
$$f_n(t) = (K_1\, t + K_2) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha\, t} \qquad \tau = 1/\alpha$$

- **Subamortiguada** ($\alpha < \omega_o$): $s_1, s_2 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d$

$$f_n(t) = K_1\, \mathrm{e}^{-\alpha\, t} \cdot \cos(\omega_d\, t + K_2) \qquad \tau = 1/\alpha$$

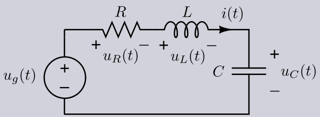
siendo $\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}$ la frecuencia natural del circuito.

Respuesta natural en transitorios de segundo orden



Transitorios de segundo orden

Respuesta completa en el circuito RLC serie



$$u_C(t) = \begin{cases} V_\infty + K_1\,\mathrm{e}^{s_1\,t} + K_2\,\mathrm{e}^{s_2\,t} \\ V_\infty + (K_1\,t + K_2)\cdot\mathrm{e}^{-\alpha\,t} \\ V_\infty + K_1\,\mathrm{e}^{-\alpha\,t}\cdot\cos(\omega_d\,t + K_2) \end{cases}$$

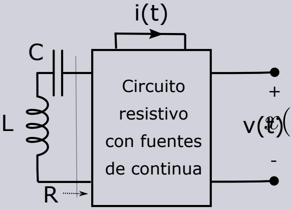
- La respuesta forzada, $V\infty$, es el estado final impuesto por las fuentes.
- La respuesta natural está impuesta por L y C.
- Las constantes de integración se calculan en base a los valores iniciales de la tensión en el condensador y la intensidad en la bobina, $u_C(0)$ e $i_L(0)$.

En muchas aplicaciones, basta con saber el tipo de transitorio, las condiciones iniciales y finales, y su duración (constantes de tiempo).

Transitorios de segundo orden

Cálculo de otras variables en un transitorio RLC serie

- Cualquier tensión o intensidad del circuito, $x(t)$, evoluciona desde su valor inicial a su valor final según la respuesta natural del circuito.
- Circuito de segundo orden RLC serie:



$$x(t) = \begin{cases} X_\infty + K_1\,\mathrm{e}^{s_1\,t} + K_2\,\mathrm{e}^{s_2\,t} \\ X_\infty + (K_1\,t + K_2)\cdot\mathrm{e}^{-\alpha\,t} \\ X_\infty + K_1\,\mathrm{e}^{-\alpha\,t}\cdot\cos(\omega_d\,t + K_2) \end{cases}$$

Las constantes de integración se calculan, en caso de ser necesario su cálculo, en base a los valores iniciales de la variable de interés, $x(0)$ y $\dot{x}(0)$, obtenidas a partir de la tensión en el consensador y la intensidad en la bobina en el instante inicial, $u_C(0)$ e $i_L(0)$.

Transitorios de segundo orden

Ejemplos de transitorios de segundo orden