1η Υποχρεωτική Εργασία
Στο Μάθημα της Αριθμητικής Ανάλυσης

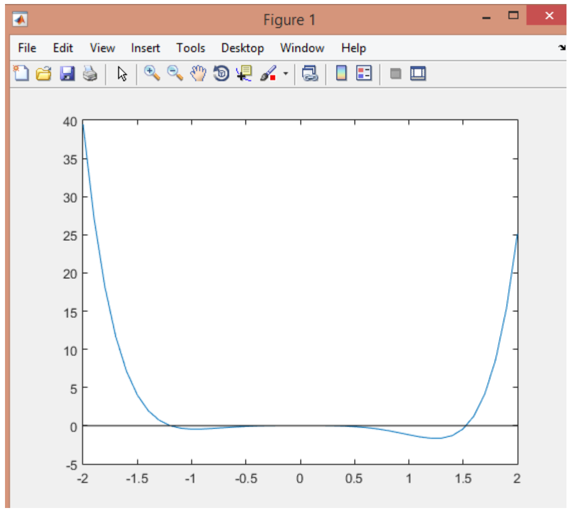
Ονοματεπώνυμο:Μάριος Χίρτογλου
ΑΕΜ: 2426

22 Ιανουαρίου 2016

Περιεχόμενα

1 Πρώτη Ασκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{cos^3 x} + x^6 - 2x^4 - x^3 - 1$ στο διάστημα $[-2, 2]$,
Στο matlab δημιουργούμε για την f μια function ως εξής:
$function[f] = fx(x);$
$f = exp(sin(x)^3) + x^6 - 2 * (x^4) - x^3 - 1;$
και η γραφική της παράσταση ειναι:



Υπάρχουν 3 τρόποι-μέθοδοι με τις οποίες μπορούμε να βρούμε τις ρίζες της συνάρτησης $f(x)$

1.1 Μέθοδος της Διχοτόμησης

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

$clear;$
$clc;$
$closeall;$
$epsilon = 1e-6;$
$a = -2;$
$b = 0;$
$sum = 0;$
$while(abs(b-a) > epsilon)$
$sum = sum + 1;$
$fa = fx(a);$
$fb = fx(b);$
$c = (a+b)/2;$
$fc = fx(c);$
$if(fa * fc < 0)$
$b = c;$
$else$
$a = c;$

end
end
fprintf('Για την ρίζα: %.6f χρειάστηκαν %d επαναλήψεισ΄,b,sum);

- για $a = -2$ και $b = 2$, η ρίζα είναι το 1.530133 και χρειάστηκαν 22 επαναλήψεις

- για $a = -2$ και $b = 0$, η ρίζα είναι το -1.197623 και χρειάστηκαν 21 επαναλήψεις

- για $a = -1$ και $b = 0$, η ρίζα είναι το -0.000001 και χρειάστηκαν 20 επαναλήψεις

1.2 Μέθοδος Newton-Raphson

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

$clear$;
clc;
$closeall$;
$sum = 0$;
$xprev = -1$;
$x = 1$;
$whileabs(x - xprev) > eps * abs(x)$
$xprev = x$;
$x = x - (fx(x))/(dfx(x))$;
$sum = sum + 1$;
end
fprintf('Για την ρίζα: %.6f χρειάστηκαν %d επαναλήψεισ΄,b,sum);

- για $xprev = -2$ και $x = 2$, η ρίζα είναι το 1.530133 και χρειάστηκαν 8 επαναλήψεις

- για $xprev = 0$ και $x = -2$, η ρίζα είναι το -1.197624 και χρειάστηκαν 10 επαναλήψεις

- για $xprev = -1$ και $x = 1$, η ρίζα είναι το 0.000061 και χρειάστηκαν 33 επαναλήψεις

Μόνο η τελευταία ρίζα συγκλίνει τετραγωνικά
Για να συγκλίνει τετραγωνικά μια ρίζα πρέπει να ισχύει:
$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$
Στο matlab δημιουργούμε για την f' μια function ως εξής:
$function[f] = dfx(x); f = -3*x^2 - 8*x^3 + 6*x^5 + 3*exp(sin(x)^3)*cos(x)*sin(x)^2;$

1.3 Μέθοδος Τέμνουσας

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

$clear;$
$clc;$
$closeall;$
$sum = 0;$
$a = -2;$
$b = 2;$
$whileabs(b - a) > eps * abs(b)$
$c = a;$
$a = b;$
$b = b + (b - c)/(fx(c)/fx(b) - 1);$
$sum = sum + 1;$
end
fprintf('Για την ρίζα: %.6f χρειάστηκαν %d επαναλήψεισ',b,sum);

- για $a = -2$ και $b = 2$, η ρίζα είναι το 1.530133 και χρειάστηκαν 14 επαναλήψεις

- για $a = -1$ και $b = 1$, η ρίζα είναι το 0.000084 και χρειάστηκαν 50 επαναλήψεις

- για $a = -2$ και $b = -1$, η ρίζα είναι το -1.197624 και χρειάστηκαν 17 επαναλήψεις

2 Δεύτερη Ασκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 54x^6 + 45x^5 - 102x^4 - 69x^3 + 35x^2 + 16x - 4$ στο διάστημα $[-2, 2]$
Στο matlab δημιουργούμε για την f μια function ως εξής:
$function[f] = y(x)$
$f = 54 * x^6 + 45 * x^5 - 102 * x^4 - 69 * x^3 + 35 * x.^2 + 16 * x - 4;$
end

για την y':
$function[f] = dy(x)$
$f = 324 * x^5 + 225 * x^4 - 408 * x^3 - 207 * x^2 + 70 * x + 16;$
end

και για την y":
$function[f] = ddy(x)$
$f = 1620 * x^4 + 900 * x^3 - 1224 * x^2 - 414 * x + 70;$
end

2.1 Τροποποιημένη μέθοδο Newton-Raphson

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

$clear;$
$clc;$
$closeall;$
$sum = 0;$
$xprev = -2;$

$x = 0;$
$whileabs(x - xprev) > eps * abs(x)$
$xprev = x;$
$x = x - 1/((dy(x)/y(x)) - ddy(x)/(2 * dy(x)));$
$sum = sum + 1;$
end
fprintf('Για την ρίζα: %.6f χρειάστηκαν %d επαναλήψεισ΄,b,sum);

- για $xprev = -2$ και $x = 1.5$, η ρίζα είναι το -1.381298 και χρειάστηκαν 5 επαναλήψεις

- για $xprev = -2$ και $x = -1$, η ρίζα είναι το -0.666667 και χρειάστηκαν 20 επαναλήψεις

- για $xprev = -2$ και $x = 0$, η ρίζα είναι το 0.205183 και χρειάστηκαν 5 επαναλήψεις

- για $xprev = -1$ και $x = 0.7$, η ρίζα είναι το 0.500000 και χρειάστηκαν 6 επαναλήψεις

- για $a = 1$ και $b = 2$, η ρίζα είναι το 1.176116 και χρειάστηκαν 6 επαναλήψεις

η τροποποιημένη μέθοδος απαιτεί λιγότερες επαναλήψεις από την κλασσική.

2.2 Τροποποιημένη μέθοδο Διχοτόμησης

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

$clc;$
$closeall;$
$epsilon = 1e - 6;$
$a = 1;$
$b = 2;$
$sum = 0;$
$while(abs(b - a) > epsilon)$
$sum = sum + 1;$
$ya = y(a);$
$yb = y(b);$
$c = a + (b - a). * rand(1, 1);$
$yc = y(c);$
$if(ya * yc < 0)$
$b = c;$
$else$
$a = c;$
end
end
fprintf('Για την ρίζα: %.6f χρειάστηκαν %d επαναλήψεισ',b,sum);

- για $a = -2$ και $b = -1$, η ρίζα είναι το -1.381298
- για $a = -1$ και $b = -0.7$, η ρίζα είναι το -0.666667
- για $a = -1$ και $b = 0.7$, η ρίζα είναι το 0.205183
- για $a = 0.3$ και $b = 0.7$, η ρίζα είναι το 0.500000
- για $a = 1$ και $b = 2$, η ρίζα είναι το 1.176116

ο αριθμός των επαναλήψεων είναι κάθε φορά διαφορετικός και αυτό ωφείλεται στην τυχαία επιλογή αριθμού ως εκτίμηση ρίζας οπότε άλλοτε είναι πιο γρήγορη η τροποιημενη μέθοδος και άλλοτε πιο αργή σε σχέση με την αντίστοιχη κλασσική.

2.3 Τροποποιημένη μέθοδο Τέμνουσας

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

$clear;$
$clc;$
$closeall;$
$a = 0;$
$b = 1;$
$c = a + (b - a). * rand(1, 1);$
$sum = 0;$
$d = 0;$
$whileabs(b - a) > eps * abs(b)$
$d = c - ((y(c)/y(b)) * (y(c)/y(b) - y(a)/y(b)) * (c - b) + (1 - y(c)/y(b)) * (y(c)/y(a)) * (c - a))/((y(a)/y(b) - 1) * (y(c)/y(b) - 1) * (y(c)/y(a) - 1));$
$a = d;$
$sum = sum + 1;$
end
fprintf('Για την ρίζα: %.6f χρειάστηκαν %d επαναλήψεισ',b,sum);

- για $a = -2$ και $b = -1$, η ρίζα είναι το -1.381298 και χρειάστηκαν πάρα πολλες επαναλήψεις με αποτέλεσμα να σταματήσω το πρόγραμμα χειροκίνητα

- για $a = -1$ και $b = 0$, η ρίζα είναι το -0.666667 και χρειάστηκαν πάρα πολλες επαναλήψεις με αποτέλεσμα να σταματήσω το πρόγραμμα χειροκίνητα

- για $a = 2$ και $b = 1$, η ρίζα είναι το 0.205183 και χρειάστηκαν 6 επαναλήψεις

- για $a = 0$ και $b = 0.7$, η ρίζα είναι το 0.500000 και χρειάστηκαν 11 επαναλήψεις

- για $a = 1$ και $b = 2$, η ρίζα είναι το 1.176116 και χρειάστηκαν πάρα πολλες επαναλήψεις με αποτέλεσμα να σταματήσω το πρόγραμμα χειροκίνητα

Η τροποιημένη αυτή μέθοδος είναι πολύ πιο χρονοβόρα από την κλασσική μέθοδο διχοτόμησης

3 Τρίτη Ασκηση

Λύση της εξίωσης Ax=b

3.1 Μέθοδος επίλυσης γραμμικών συστημάτων PU=LA

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

$clear;$
$clc;$
$closeall;$
$m = randi([3, 5]);$
$A = magic(m)$
$B = rand(m, 1)$
$L = zeros(m, m);$
$U = zeros(m, m);$
$fori = 1 : m$
$fork = 1 : i - 1$
$L(i, k) = A(i, k);$
$forj = 1 : k - 1$
$L(i, k) = L(i, k) - L(i, j) * U(j, k);$
end
$L(i, k) = L(i, k)/U(k, k);$
end
$fork = i : m$
$U(i, k) = A(i, k);$
$forj = 1 : i - 1$
$U(i, k) = U(i, k) - L(i, j) * U(j, k);$
end
end

end
$for i = 1 : m$
$L(i, i) = 1;$
end
$y = zeros(m, 1);$
$for j = 1 : m$
$y(j) = B(j)/L(j, j);$
$B(j + 1 : m) = B(j + 1 : m) - L(j + 1 : m, j) * y(j);$
end
$x = zeros(m, 1);$
$for j = m : -1 : 1$
$x(j) = B(j)/U(j, j);$
$B(1 : j - 1) = B(1 : j - 1) - U(1 : j - 1, j) * x(j);$
end
x

3.2 Μέθοδος επίλυσης γραμμικών συστημάτων Gauss-Seidel

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

$clear;$
$clc;$
$closeall;$
$n = 10;$
$for i = 1 : n$
$for j = 1 : n$
$if i == j$
$A(i, j) = 5;$
end
$if j == i + 1$
$A(i, j) = -2;$
end
$if i == j + 1$
$A(i, j) = -2;$
end

end
end
$for i = 1 : n$
$if i ==$
$b(i) = 3;$
$elseif i == n$
$b(i) = 3;$
$else$
$b(i) = 1;$
end
end