<u>Συστήματα μη – γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων</u>

Τα προβλήματα της παρούσας εργασίας αφορούν στην αριθμητική επίλυση συστημάτων μη – γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων και ο σχετικός κώδικας θα πρέπει να υλοποιηθεί σε γλώσσα προγραμματισμού C.

Αφού υλοποιήσετε τις μεθόδους που σας ζητούνται και επιλύσετε τα σχετικά προβλήματα, θα δημιουργήσετε ένα αρχείο Word το οποίο θα περιέχει τη συνολική σας αναφορά για όλα τα προβλήματα, ξεκινώντας από το πρώτο και συνεχίζοντας μέχρι και το τελευταίο.

Κατ' ελάχιστον, η αναφορά σας για κάθε πρόβλημα θα περιέχει τα ακόλουθα:

1. Ανάλυση του προβλήματος και περιγραφή του τρόπου επίλυσής του.
2. Απαντήσεις στις ερωτήσεις που εμπλέκονται.
3. Τον κώδικα C έχοντας υποχρεωτικά ενσωματωμένα σχετικά σχόλια.
4. Τα αποτελέσματα της εκτέλεσης του κώδικα (σε κάθε βήμα – επανάληψη της μεθόδου) σε μορφή εικόνας. Αυτά θα περιλαμβάνουν τουλάχιστον τα εξής: (α) το πλήθος των επαναλήψεων, (β) την τρέχουσα προσέγγιση της λύσης, (γ) το σφάλμα, (δ) τις τιμές των συναρτήσεων στην προσεγγιστική λύση. Αν σε κάποια προβλήματα απαιτούνται πολλές επαναλήψεις, μπορείτε να ενσωματώσετε (πάντα ως εικόνα) στην αναφορά σας μόνο τα τελευταία βήματα – επαναλήψεις της μεθόδου.
5. Επεξήγηση των αποτελεσμάτων.

Το αρχείο Word της αναφοράς σας θα το μετατρέψετε σε pdf και θα το μεταφορτώσετε στην e-class μαζί με τα αρχεία που περιέχουν τον πηγαίο κώδικα C για κάθε πρόβλημα. Συνολικά λοιπόν στην e-class θα πρέπει να υπάρχουν: 1 αρχείο pdf και 4 το πολύ αρχεία κώδικα C (μπορείτε να συμπιέσετε τα αρχεία αυτού του τύπου), σε περίπτωση που λύσετε και τα τρία προβλήματα (1 αρχείο κώδικα C για το πρώτο πρόβλημα, 2 για το δεύτερο και ένα για το τρίτο).

Προσοχή: *Σε περίπτωση εντοπισμού ίδιων αναφορών, προγραμμάτων ή μέρους αυτών, τότε θα μηδενίζονται <u>για όλα τα εργαστήρια</u> όσοι και όσες εμπλέκονται.*

__Άσκηση 1:__ Να εφαρμόσετε τη μέθοδο Newton για να επιλύσετε αριθμητικά το ακόλουθο σύστημα μη – γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= 3x_2 + x_3x_4 = 7.9,\\
f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 20.7,\\
f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1^3 + x_3^3 + x_4 = 21.218,\\
f_4(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_4^3 = 15.88.
\end{aligned}
$$

Ως αρχική συνθήκη να χρησιμοποιήσετε την $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) = (1, 1, 1, 1)$, ενώ για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων σας να θεωρήσετε το κριτήριο $|\boldsymbol{x}^{n+1} - \boldsymbol{x}^n| < 0.5\times 10^{-5}$, όπου $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, δηλαδή η αριθμητική λύση να υπολογισθεί με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων. Σε κάθε βήμα της μεθόδου, τα αποτελέσματά σας θα περιέχουν τα εξής:
(α) το πλήθος των επαναλήψεων, **(β)** την προσεγγιστική λύση, **(γ)** τις τιμές των f_1, f_2, f_3 και f_4 στην προσεγγιστική λύση και **(δ)** το σφάλμα που γίνεται.

Περιγραφή της μεθόδου Newton: Η προσεγγιστική λύση $\boldsymbol{x}^{n+1} = (x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, x_3^{n+1}, x_4^{n+1})$, στην $n+1$ επανάληψη της μεθόδου, είναι:

$$\boldsymbol{x}^{n+1} = \boldsymbol{x}^n + \boldsymbol{s}^n, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

όπου οι διορθώσεις $\boldsymbol{s}^n$, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4)$, υπολογίζονται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{s}^n = -\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{x}^n)\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^n),$$

με $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ και $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, ενώ $\boldsymbol{J}^{-1}$ είναι ο αντίστροφος του Ιακωβιανού πίνακα. Αντί να αντιστρέψετε τον Ιακωβιανό πίνακα για να υπολογίσετε τις διορθώσεις (s_1, s_2, s_3, s_4), μπορείτε ισοδύναμα να τις προσδιορίσετε επιλύοντας το ακόλουθο γραμμικό, ως προς τις διορθώσεις, σύστημα:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}s_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}s_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}s_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_4}s_4 &= -f_1,\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}s_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}s_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}s_3 + \frac{\partial f_2}{\partial x_4}s_4 &= -f_2,\\
\frac{\partial f_3}{\partial x_1}s_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}s_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}s_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_4}s_4 &= -f_3,\\
\frac{\partial f_4}{\partial x_1}s_1 + \frac{\partial f_4}{\partial x_2}s_2 + \frac{\partial f_4}{\partial x_3}s_3 + \frac{\partial f_4}{\partial x_4}s_4 &= -f_4,
\end{aligned}
$$

εφαρμόζοντας κάποια άλλη αριθμητική τεχνική επίλυσης γραμμικών συστημάτων, όπως για παράδειγμα η απαλοιφή Gauss ή η μέθοδος των οριζουσών (κανόνας Cramer).

<u>**Άσκηση 2**</u>**:** Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα μη – γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1^3 + 4x_1x_2^2 + 3x_3^3 - 10 = 0,\\
f_2(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 + 5x_1^2x_2^2 - 3x_3^2 + 5 = 0,\\
f_3(x_1,x_2,x_3) &= x_1^4 + 5x_1x_2 + 2x_3 - 2 = 0.
\end{aligned}
$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton με μεταβολή (πάρελξη) των παραμέτρων, να επιλύσετε το παραπάνω σύστημα χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες:

(α) $(x_{01}, x_{02}, x_{30}) = (1.0,\ 1.0,\ 1.0)$,

(β) $(x_{01}, x_{02}, x_{30}) = (-0.2,\ 7.0, -2.0)$,

για $N = 100$ συστήματα της μεθόδου Newton.

Σύμφωνα με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων θα πρέπει, για κάθε συγκεκριμένη αρχική συνθήκη, να κατασκευάσετε ένα επαναληπτικό σύστημα μη – γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με παράμετρο το k, όπου για $k = N$ θα προκύπτει το αρχικό σύστημα. Αφού λοιπόν δημιουργήσετε, με βάση τη θεωρία, τα δύο συστήματα που αφορούν τις δοθείσες αρχικές συνθήκες, θα γράψετε σε κώδικα C δύο προγράμματα, στα οποία θα υλοποιείται ο σχετικός αλγόριθμος. Τα αποτελέσματά σας θα περιέχουν τα ακόλουθα:

(α) Το σύστημα το οποίο επιλύετε (δηλαδή την τιμή του k),

(β) Το πλήθος των επαναλήψεων της μεθόδου Newton, για κάθε k σύστημα,

(γ) Τις προσεγγίσεις της λύσης σε κάθε βήμα της μεθόδου Newton, για κάθε k σύστημα,

(δ) Το σφάλμα των προσεγγιστικών λύσεων σε κάθε βήμα της μεθόδου Newton, για κάθε k σύστημα.

(ε) Τις συναρτησιακές τιμές υπολογισμένες στις προσεγγιστικές λύσεις, σε κάθε βήμα της μεθόδου Newton και για κάθε k σύστημα.

***Σημείωση*:** Στην αναφορά σας θα φαίνεται αναλυτικά ο τρόπος κατασκευής των δύο επαναληπτικών συστημάτων της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων, με βάση τις δύο αρχικές συνθήκες, αλλά και τα σχετικά τελικά προς επίλυση συστήματα.

<u>Άσκηση 3</u>: Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα μη – γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων:

$$f_1(x_1,x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 1 = 0,$$
$$f_2(x_1,x_2) = 3x_1^2x_2 - x_2^3 = 0,$$

το οποίο έχει τις ακόλουθες τρεις λύσεις:

$$(x_1,x_2) = (1,0), \quad (x_1,x_2) = (-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad (x_1,x_2) = (-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Να δημιουργήσετε τις περιοχές σύγκλισης της μεθόδου Newton, επιλέγοντας ως αρχικές συνθήκες (x_{10},x_{20}) όλες εκείνες που καλύπτουν την τετραγωνική περιοχή $[-1,1]\times[-1,1]$.

***Παρατήρηση* 1:** Ως περιοχή σύγκλισης μιας αριθμητικής μεθόδου επίλυσης μη – γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων, που συγκλίνει σε μια λύση του συστήματος, καλούμε το σύνολο των αρχικών συνθηκών για τις οποίες η μέθοδος συγκλίνει στη συγκεκριμένη λύση.

***Παρατήρηση* 2:** Για να κατασκευάσετε τις ζητούμενες περιοχές σύγκλισης μπορείτε να εργαστείτε ως εξής:

(α) Υλοποιείστε τη μέθοδο Newton για το παραπάνω μη – γραμμικό σύστημα

(β) Δημιουργήστε ένα πλέγμα για την αρχικές συνθήκες, δηλαδή ένα διπλό επαναληπτικό βρόγχο που θα σαρώνει το επίπεδο των αρχικών συνθηκών, με $x_{10}\in[-1,1]$ και $x_{20}\in[-1,1]$, ενώ το βήμα για κάθε βρόγχο θα πρέπει είναι επαρκώς μικρό, ώστε να γίνεται καλή σάρωση του επιπέδου (x_{10},x_{20}) των αρχικών συνθηκών.

(γ) Για κάθε αρχική συνθήκη θα εφαρμόζετε τη μέθοδο Newton και θα ελέγχετε σε ποια από τις τρεις λύσεις συγκλίνει η μέθοδος. Το σύνολο των αρχικών συνθηκών που οδηγούν τη μέθοδο Newton να συγκλίνει σε συγκεκριμένη λύση θα το εξάγετε σε ένα αρχείο δεδομένων (.dat file). Έτσι, για την τετραγωνική περιοχή που σας έχει δοθεί, θα δημιουργήσετε τρία dat files, των οποίων τα δεδομένα θα πρέπει να απεικονίσετε (σε οποιοδήποτε λογισμικό πακέτο θέλετε) στο επίπεδο (x_{10},x_{20}) με διαφορετικό χρώμα. Για το σχεδιασμό των περιοχών σύγκλισης μπορείτε, για παράδειγμα, να χρησιμοποιήσετε το Matlab ή το Origin.

***Ερώτηση* 1:** Μπορείτε μέσα από το σχήμα των περιοχών σύγκλισης να εξάγετε κάποια συμπεράσματα για τη μέθοδο Newton;

***Ερώτηση* 2:** Σε τι πιστεύετε ότι οφείλετε αυτή η εικόνα των περιοχών σύγκλισης;