<u>Αριθμητική Ολοκλήρωση</u>
<u>Προσαρμογή Καμπύλης – Παρεμβολή</u>

Τα προβλήματα της παρούσας εργασίας αφορούν στην αριθμητική ολοκλήρωση, την προσαρμογή καμπύλης σε δεδομένα καθώς και την παρεμβολή. Ο σχετικός κώδικας θα πρέπει να υλοποιηθεί σε γλώσσα προγραμματισμού C.

Αφού υλοποιήσετε τις μεθόδους που σας ζητούνται και επιλύσετε τα σχετικά προβλήματα, θα δημιουργήσετε ένα αρχείο Word το οποίο θα περιέχει τη συνολική σας αναφορά για όλα τα προβλήματα, ξεκινώντας από το πρώτο και συνεχίζοντας μέχρι και το τελευταίο.

Κατ’ ελάχιστον, η αναφορά σας, για κάθε πρόβλημα, θα περιέχει τα ακόλουθα:

1. Ανάλυση του προβλήματος και περιγραφή του τρόπου επίλυσής του.
2. Απαντήσεις στις ερωτήσεις που εμπλέκονται.
3. Τον κώδικα C έχοντας υποχρεωτικά ενσωματωμένα σχετικά σχόλια.
4. Τα αποτελέσματα της εκτέλεσης του κώδικα σε μορφή εικόνας.
5. Επεξήγηση των αποτελεσμάτων.

Το αρχείο Word της αναφοράς σας θα το μετατρέψετε σε pdf και θα το μεταφορτώσετε στην e-class μαζί με τα αρχεία που περιέχουν τον πηγαίο κώδικα C (.c ή .cpp) για κάθε πρόβλημα. Συνολικά λοιπόν στην e-class θα πρέπει να υπάρχουν: 1 αρχείο pdf και 7 το πολύ αρχεία κώδικα C (να συμπιέσετε όλα τα αρχεία αυτού του τύπου και να τα υποβάλλετε ως ένα αρχείο μορφής .zip ή .rar), σε περίπτωση που λύσετε όλες τις ασκήσεις και τα επιμέρους προβλήματα (4 αρχεία κώδικα C για την πρώτη άσκηση, 2 για τη δεύτερη και 1 για την τρίτη).

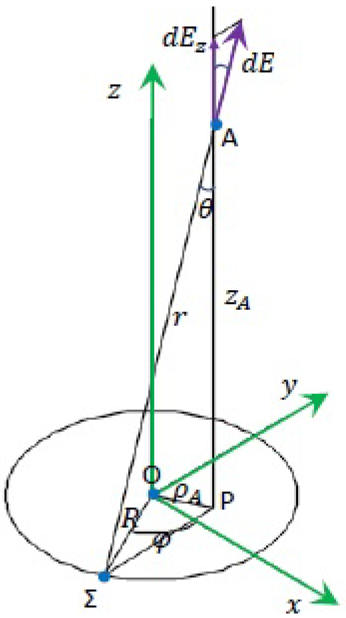
Προσοχή: *Σε περίπτωση εντοπισμού ίδιων αναφορών, προγραμμάτων ή μέρους αυτών, τότε θα μηδενίζονται <u>για όλα τα εργαστήρια</u> όσοι και όσες εμπλέκονται.*

Άσκηση 1: Θεωρούμε ένα λεπτό δακτύλιο αμελητέου πάχους του επιπέδου Oxy με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και ακτίνα R, ο οποίος φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο Q κατά μήκος της περιφέρειάς του. Ζητείται να προσδιορίσετε:

Α. τη $z-$συνιστώσα E_z του ηλεκτρικού πεδίου E σε τυχαίο σημείο $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$ και

Β. την πολική συνιστώσα $E_\perp$ του ηλεκτρικού πεδίου E στο ίδιο σημείο Α (κάθετη στον Οz).

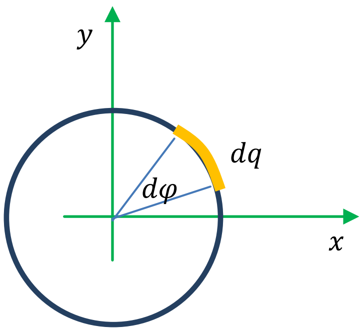
ΛΥΣΗ



Α. Για τον προσδιορισμό του ηλεκτρικού πεδίου στον άξονα Οz μπορούμε να εργαστούμε ως εξής: Φέρουμε την προβολή Ρ του Α στο επίπεδο Oxy και έστω $z_\mathrm{A} = \mathrm{AP}$ το ύψος, ενώ $\rho_\mathrm{A} = \mathrm{OP}$ η σχετική πολική ακτίνα του Α, όπου $\rho_\mathrm{A} = \sqrt{x_\mathrm{A}^2 + y_\mathrm{A}^2}$. Αν διαμερίσουμε το δακτύλιο σε στοιχειώδη τμήματα μικρής γωνίας $d\varphi$, τότε το καθένα θα περιέχει αναλογικά ένα στοιχειώδες φορτίο:

$$dq = \frac{d\varphi}{2\pi} Q.$$

Έστω τώρα τυχαίο σημείο Σ στην περιφέρεια του δακτυλίου σε πολική γωνία φ, το οποίο περιέχει ένα τέτοιο φορτίο dq, ενώ η απόσταση του Σ από το υπό εξέταση σημείο Α είναι ίση με r. Το φορτίο αυτό δημιουργεί ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο dE στο σημείο Α με μέτρο:



$$dE = k\frac{dq}{r^2},$$

και φορά της τα έξω κατά την κατεύθυνση από το σημείο Σ στο Α. Η προβολή του στοιχειώδους ηλεκτρικού πεδίου dE πάνω στον άξονα z θα ισούται με:

$$dE_z = dE\cos\theta,$$

όπου θ είναι η γωνία του τριγώνου ΣΑΡ στην κορυφή Α. Της, από το ίδιο τρίγωνο είναι:

$$\cos\theta = \frac{z_\mathrm{A}}{r} \quad \text{και} \quad r^2 = (\Sigma\mathrm{P})^2 + z_\mathrm{A}^2,$$

ενώ από το νόμο των συνημιτόνων λαμβάνουμε:

$$(\Sigma\mathrm{P})^2 = \rho_\mathrm{A}^2 + R^2 - 2\rho_\mathrm{A} R\cos(\varphi - \varphi_\mathrm{A}),$$

όπου φ_A είναι η πολική γωνία της ακτίνας ρ_A. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, προκύπτει ότι:

$$dE_z = \frac{kQz_\mathrm{A}}{2\pi}\frac{d\varphi}{[\rho_\mathrm{A}^2 + R^2 + z_\mathrm{A}^2 - 2\rho_\mathrm{A} R\cos(\varphi - \varphi_\mathrm{A})]^{3/2}},$$

και ολοκληρώνοντας στο δακτύλιο βρίσκουμε τη $z-$συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου:

$$\boxed{E_z = \frac{kQz_\mathrm{A}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{[a^2 - 2\rho_\mathrm{A} R\cos(\varphi - \varphi_\mathrm{A})]^{3/2}}\,d\varphi,} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $a^2 = \rho_\mathrm{A}^2 + R^2 + z_\mathrm{A}^2$.

Β. Για τον προσδιορισμό της συνιστώσας $E_\perp$ του ηλεκτρικού πεδίου εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο. Όμως τώρα είναι:

$$dE_\perp = dE \sin\theta,$$

όπου

$$\sin\theta = \frac{(\Sigma\mathrm{P})}{r}, \quad r^2 = (\Sigma\mathrm{P})^2 + z_\mathrm{A}^2 \quad \text{και} \quad (\Sigma\mathrm{P})^2 = \rho_\mathrm{A}^2 + R^2 - 2\rho_\mathrm{A} R\cos(\varphi - \varphi_\mathrm{A}),$$

οπότε λαμβάνουμε τελικά:

$$dE_\perp = \frac{kQ}{2\pi} \frac{\sqrt{\rho_\mathrm{A}^2 + R^2 - 2\rho_\mathrm{A} R\cos(\varphi-\varphi_\mathrm{A})}}{[\rho_\mathrm{A}^2 + R^2 + z_\mathrm{A}^2 - 2\rho_\mathrm{A} R\cos(\varphi-\varphi_\mathrm{A})]^{3/2}}\, d\varphi,$$

και ολοκληρώνοντας στο δακτύλιο βρίσκουμε τη συνιστώσα $E_\perp$ του ηλεκτρικού πεδίου:

$$\boxed{E_\perp = \frac{kQ}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\rho_\mathrm{A}^2 + R^2 - 2\rho_\mathrm{A} R\cos(\varphi-\varphi_\mathrm{A})}}{[\alpha^2 - 2\rho_\mathrm{A} R\cos(\varphi-\varphi_\mathrm{A})]^{3/2}}\, d\varphi,} \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $a^2 = \rho_\mathrm{A}^2 + R^2 + z_\mathrm{A}^2$.

■ Αν για τις παραμέτρους του προβλήματος έχουμε $\rho_\mathrm{A} = 0.1\mathrm{m}$, $\varphi_\mathrm{A} = 35^\circ$, $R = 0.05\mathrm{m}$, $z_\mathrm{A} = 0.4\mathrm{m}$, $Q = 10^{-6}\,\mathrm{C}$ και $k = 9\times10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$, να υπολογίσετε τις ζητούμενες συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου (σε kN/C) με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων, υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα (1) και (2) με βάση:

(α) Τον κανόνα του τραπεζίου:

$$\int_a^b f(x)\, dx \cong h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right],$$

(β) Τον κανόνα του Simpson:

$$\int_a^b f(x)\, dx \cong \frac{h}{3}\big[f(x_0) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})] + 2[f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2})] + f(x_n)\big]$$

όπου $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, με $x_0 = a$ και $x_n = b$.

***Σημείωση*:** Για το έλεγχο του σφάλματος θα εργαστείτε ως εξής: Θα εκτελείται ο αλγόριθμος που υλοποιεί τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης (Τραπεζίου ή Simpson) με βήμα h και βήμα $h/2$ και θα πραγματοποιείται ο έλεγχος:

$$|\, I_h - I_{h/2} \,| < 0.5\times10^{-8}.$$

Αν η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται, τότε θα υποδιπλασιάζεται το βήμα και θα πραγματοποιείται ο νέος έλεγχος:

$$|\, I_{h/2} - I_{h/4} \,| < 0.5\times10^{-8}.$$

Η διαδικασία του υποδιπλασιασμού του βήματος και ο υπολογισμός της τιμής του ολοκληρώματος με κάθε τέτοιο βήμα θα επαναλαμβάνεται, έως ότου το ολοκλήρωμα υπολογιστεί με τη ζητούμενη ακρίβεια των οχτώ δεκαδικών ψηφίων.

<u>Άσκηση 2</u>: Η ωριαία κατανάλωση θερμότητας H που δίνεται από την καύση του μαζούτ, για συγκεκριμένες τιμές ισχύος εξόδου, στη μονάδα του Λαυρίου δίνεται στον Πίνακα 1, ενώ η αντίστοιχη ωριαία κατανάλωση θερμότητας που δίνεται από την καύση του λιγνίτη στη μονάδα της Μεγαλόπολης δίνεται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 1: Λαύριο – Καύσιμο: μαζούτ – Ονομαστική ισχύς: 300 MW

Ηλεκτρική ισχύς εξόδου P (MW)	120	180	270	300
Ωριαία κατανάλωση θερμότητας H (Gcal/h)	246	351	514	572

Πίνακας 2: Μεγαλόπολη – Καύσιμο: λιγνίτης – Ονομαστική ισχύς: 300 MW

Ηλεκτρική ισχύς εξόδου P (MW)	150	215	285	300
Ωριαία κατανάλωση θερμότητας H (Gcal/h)	307	427	563	594

Με βάση τα στοιχεία των δύο παραπάνω πινάκων:

(Α) Να προσεγγίσετε <u>για κάθε μονάδα</u> τη συνάρτηση κατανάλωσης θερμότητας H(P) μέσω ενός πολυωνύμου τρίτου βαθμού, εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε το σφάλμα της προσέγγισης.

(Β) Να σχεδιάσετε την καμπύλη κατανάλωσης θερμότητας H(P) ως προς την ισχύ εξόδου P και στις δύο μονάδες παραγωγής.

(Γ) Να σχεδιάσετε την καμπύλη του ωριαίου κόστους λειτουργίας F ως προς την ισχύ εξόδου P και στις δύο μονάδες παραγωγής.

<u>Σημείωση</u> 1: Αν έχουμε την καμπύλη μεταβολής της ωριαίας κατανάλωσης θερμότητας H (Gcal/h) συναρτήσει της ισχύος εξόδου P (MW), μπορούμε να υπολογίσουμε το ωριαίο κόστος λειτουργίας F διαιρώντας την ωριαία κατανάλωσης θερμότητας H (Gcal/h) με τη θερμογόνο δύναμη του καυσίμου Q (kcal/kg) και πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα με τη τιμή του καυσίμου ανά τόνο T (το αποτέλεσμα του κόστους λειτουργίας F είναι €/h). Στους υπολογισμούς σας να θεωρήσετε τα ακόλουθα:
Λιγνίτης: Κόστος 16.5 €/T, Θερμογόνος δύναμη 1000 kcal/kg
Μαζούτ: Κόστος 500 €/T, Θερμογόνος δύναμη 9600 kcal/kg

(Δ) Να σχεδιάσετε την καμπύλη του ειδικού κόστους λειτουργίας F/P ως προς την ισχύ εξόδου P και στις δύο μονάδες παραγωγής.

<u>Σημείωση</u> 2: Το ειδικό κόστος λειτουργίας είναι ο λόγος του ωριαίου κόστους λειτουργίας F προς την ισχύ εξόδου P και εκφράζει την τιμή παραγωγής της MWh από τη μονάδα σε €/MWh.

***Ερώτηση* 1:** Τι παρατηρείτε για τη συμπεριφορά της ωριαίας κατανάλωσης θερμότητας H, του ωριαίου κόστους λειτουργίας F και του ειδικού κόστους λειτουργίας F/P σε σχέση με την αύξηση ισχύος εξόδου;

***Ερώτηση* 2:** Ποια είναι τα συμπεράσματά σας για το ειδικό κόστος λειτουργίας F/P μεταξύ της λιγνιτικής μονάδας Μεγαλόπολης και της μονάδας μαζούτ του Λαυρίου;

***Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων*:** Με βάση τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, για την προσαρμογή ενός πολυωνύμου m βαθμού $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ σε n σημεία δεδομένων, οι συντελεστές a_m, a_{m-1}, …, a_2, a_1 και a_0 του πολυωνύμου υπολογίζονται από τη λύση του ακόλουθου γραμμικού συστήματος:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i \end{bmatrix},$$

ενώ ο έλεγχος των αποτελεσμάτων μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση:

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \cdots + a_1 x_i + a_0)]^2,$$

η οποία εκφράζει το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων.

<u>Άσκηση 3</u>: Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της παρεμβολής Lagrange και με βάση τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα, να προσεγγίσετε τις τιμές της συνάρτησης του ημιτόνου για τις γωνίες $0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, \ldots, 180^\circ$.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

***Μέθοδος παρεμβολής Lagrange*:** Η μέθοδος της παρεμβολής Lagrange έχει ως εξής. Έστω ότι στα $n+1$ σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n$ είναι γνωστές οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$. Τότε, υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $P_n(x)$ το πολύ n βαθμού, το οποίο παίρνει τις ίδιες τιμές με τη συνάρτηση $f(x)$ στα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n$, και το οποίο δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$P_n(x) = l_0(x)\, f(x_0) + l_1(x)\, f(x_1) + \cdots + l_n(x)\, f(x_n),$$

όπου:

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}.$$

Οι παραπάνω συντελεστές $l_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, ονομάζονται συντελεστές Lagrange, ενώ το πολυώνυμο $P_n(x)$ λέγεται πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange.