<u>Εύρεση ριζών μη-γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων</u>

Τα προβλήματα της παρούσας εργασίας αφορούν στην αριθμητική επίλυση μη–γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων και ο σχετικός κώδικας θα πρέπει να υλοποιηθεί σε γλώσσα προγραμματισμού C.

Αφού υλοποιήσετε τις μεθόδους που σας ζητούνται και επιλύσετε τα σχετικά προβλήματα, θα δημιουργήσετε ένα αρχείο Word το οποίο θα περιέχει τη συνολική σας αναφορά για όλα τα προβλήματα, ξεκινώντας από το πρώτο και συνεχίζοντας μέχρι και το τελευταίο.

Κατ' ελάχιστον, η αναφορά σας για κάθε πρόβλημα θα περιέχει τα ακόλουθα:

1. Ανάλυση του προβλήματος (ή της εφαρμογής) και περιγραφή του στόχου κάθε άσκησης.
2. Απαντήσεις στις ερωτήσεις που εμπλέκονται.
3. Τον κώδικα C έχοντας υποχρεωτικά ενσωματωμένα σχετικά σχόλια.
4. Τα αποτελέσματα της εκτέλεσης του κώδικα (σε κάθε βήμα–επανάληψη της μεθόδου) σε μορφή εικόνας, όπως ακριβώς απεικονίζεται στην άσκηση 1. Αυτά θα περιλαμβάνουν: (α) το πλήθος των επαναλήψεων, (β) την τρέχουσα προσέγγιση της ρίζας, (γ) το σφάλμα, (δ) την τιμή της συνάρτησης στην προσέγγιση της ρίζας.
5. Επεξήγηση των αποτελεσμάτων, κυρίως σχετικά με τις ιδιότητες της μεθόδου.
6. Γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων, οι οποίες μπορούν να δημιουργηθούν σε οποιοδήποτε λογισμικό πακέτο της επιλογής σας, που θα ενσωματωθούν ως εικόνες στην αναφορά σας.

Το αρχείο Word της αναφοράς σας θα το μετατρέψετε σε pdf και θα το μεταφορτώσετε στην e-class μαζί με τα αρχεία που περιέχουν τον πηγαίο κώδικα C για κάθε πρόβλημα. Συνολικά λοιπόν στην e-class θα πρέπει να υπάρχουν: 1 αρχείο pdf και το πολύ 5 αρχεία κώδικα C, σε περίπτωση που λύσετε και τα πέντε προβλήματα.

Προσοχή: *Σε περίπτωση εντοπισμού ίδιων αναφορών, προγραμμάτων ή μέρους αυτών, τότε θα μηδενίζονται <u>για όλα τα εργαστήρια</u> όσοι και όσες εμπλέκονται.*

Άσκηση 1: Να εφαρμόσετε τη μέθοδο της Γενικής Επαναληπτικής Μεθόδου (General Successive Approximation Method):

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

για την επίλυση της εξίσωσης:

$$x^3 - x^2 + 1 = 0,$$

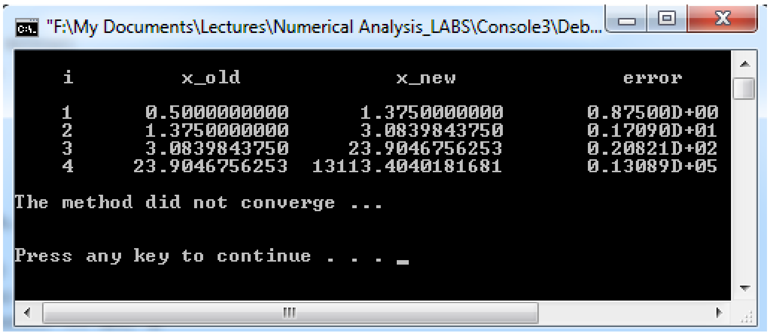
η οποία έχει μια πραγματική ρίζα ($x \cong -0.75487766625$). Η εφαρμογή της μεθόδου να γίνει θέτοντας την εξίσωση στις παρακάτω δύο μορφές:

$$\textbf{(α)} \quad x = x^3 - x^2 + x + 1, \qquad \textbf{(β)} \quad x = x - \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 4}.$$

Ως αρχική συνθήκη και για τις δύο περιπτώσεις να χρησιμοποιηθεί η τιμή $x_0 = 0.5$, ενώ η ακρίβεια των αποτελεσμάτων σας να είναι στα 5 δεκαδικά ψηφία, κάνοντας χρήση του κριτηρίου $|x_{n+1} - x_n| < 0.5 \times 10^{-5}$.

Ερώτηση: Γιατί στην περίπτωση της μορφής (α) η γενική επαναληπτική μέθοδος δε συγκλίνει, ενώ στην περίπτωση της μορφής (β) συγκλίνει;

(Τα αποτελέσματα των δύο προγραμμάτων φαίνονται παρακάτω)



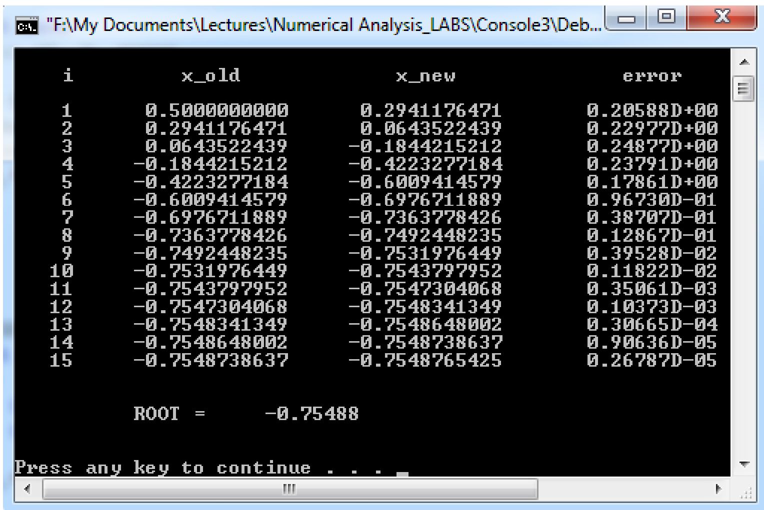
```
"F:\My Documents\Lectures\Numerical Analysis_LABS\Console3\Deb...

   i         x_old              x_new              error

   1      0.5000000000       1.3750000000       0.87500D+00
   2      1.3750000000       3.0839843750       0.17090D+01
   3      3.0839843750      23.9046756253       0.20821D+02
   4     23.9046756253   13113.4040181681       0.13089D+05

The method did not converge ...

Press any key to continue . . .
```



```
"F:\My Documents\Lectures\Numerical Analysis_LABS\Console3\Deb...

   i         x_old              x_new              error

   1      0.5000000000       0.2941176471       0.20588D+00
   2      0.2941176471       0.0643522439       0.22977D+00
   3      0.0643522439      -0.1844215212       0.24877D+00
   4     -0.1844215212      -0.4223277184       0.23791D+00
   5     -0.4223277184      -0.6009414579       0.17861D+00
   6     -0.6009414579      -0.6976711889       0.96730D-01
   7     -0.6976711889      -0.7363778426       0.38707D-01
   8     -0.7363778426      -0.7492448235       0.12867D-01
   9     -0.7492448235      -0.7531976449       0.39528D-02
  10     -0.7531976449      -0.7543797952       0.11822D-02
  11     -0.7543797952      -0.7547304068       0.35061D-03
  12     -0.7547304068      -0.7548341349       0.10373D-03
  13     -0.7548341349      -0.7548648002       0.30665D-04
  14     -0.7548648002      -0.7548738637       0.90636D-05
  15     -0.7548738637      -0.7548765425       0.26787D-05


         ROOT =      -0.75488

Press any key to continue . . .
```

<u>Άσκηση 2</u>: Α. Να επιλύσετε αριθμητικά την εξίσωση:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 12x + 20 = 0,$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

και χρησιμοποιώντας ως αρχική συνθήκη την $x_0 = 1$. Ως κριτήριο τερματισμού να χρησιμοποιήσετε τον συνδυασμό: $|x_{n+1} - x_n| < 0.5\times10^{-8}$ και $|f(x_n)| < 0.5\times10^{-8}$. Σημειώνεται ότι, η δοθείσα εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική ρίζα $(\rho_{1,2} = -2)$ και δυο συζυγείς μιγαδικές.

<u>Ερώτηση 1η</u>: Γιατί κατά την εφαρμογή της μεθόδου Newton-Raphson για την επίλυση της συγκεκριμένης εξίσωσης έχει "χαθεί" η τετραγωνική σύγκλιση;

Β. Για την επίλυση του ίδιου προβλήματος, αντί της $f(x)$ να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)},$$

η οποία έχει "προφανώς" την ίδια πραγματική ρίζα με την $f(x)$. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton-Raphson για τη νέα συνάρτηση $g(x)$, η μέθοδος λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)\,f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)\,f''(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Να εφαρμόσετε τον επαναληπτικό τύπο που έλαβε η μέθοδος Newton-Raphson, χρησιμοποιώντας την ίδια αρχική συνθήκη και τα ίδια κριτήρια τερματισμού με τα προηγούμενα, ώστε να βρείτε την πραγματική ρίζα της αρχικής εξίσωσης $f(x) = 0$ με την ίδια ακρίβεια.

<u>Ερώτηση 2η</u>: Τι παρατηρείτε κατά την εφαρμογή της μεθόδου Newton-Raphson με τη νέα συνάρτηση και σε τι οφείλεται αυτή η αλλαγή; Ποια είναι τα μειονεκτήματα κατά την εφαρμογή αυτής της τεχνικής;

<u>Άσκηση 3</u>: Να επιλύσετε αριθμητικά την εξίσωση:

$$\cos x = x,$$

με τη μέθοδο της εσφαλμένης θέσης (regula falsi), για να βρείτε τη ρίζα της $(\rho = 0.7390851332\ldots)$ με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων.

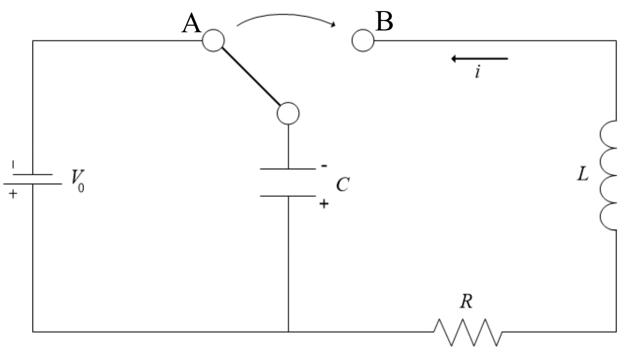
<u>Ανάλυση της μεθόδου</u>: Η μέθοδος της εσφαλμένης θέσης είναι όμοια με τη μέθοδο της μεταβλητής χορδής, δηλαδή για την εφαρμογή της χρησιμοποιείται ο τύπος:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\, f(x_n), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Η διαφορά ανάμεσα στις δύο μεθόδους είναι ότι στη μέθοδο της εσφαλμένης θέσης τα δύο σημεία από τα οποία περνάει η χορδή είναι πάντοτε το ένα αριστερά και το άλλο δεξιά της ρίζας της εξίσωσης, δηλαδή ισχύει $f(x_{n-1})\, f(x_n) < 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος εκκινεί από τα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x_1, f(x_1))$ για τα οποία ισχύει $f(x_0)\, f(x_1) < 0$ και στη συνέχεια χρησιμοποιείται ο παραπάνω τύπος (αντιστοιχεί στη μέθοδο της τέμνουσας) για την προσέγγιση του x_2. Για να δούμε ποια τέμνουσα θα πάρουμε για τον υπολογισμό του x_3, ελέγχουμε το γινόμενο $f(x_1)\, f(x_2)$. Αν αυτό είναι αρνητικό, τότε επιλέγουμε ως x_3 το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ με τον Ox–άξονα. Αν αυτό είναι θετικό, τότε επιλέγουμε ως x_3 το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x_2, f(x_2))$ με τον Ox–άξονα. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται ακολουθώντας αντίστοιχους ελέγχους και για τις επόμενες προσεγγίσεις.

Άσκηση 4: Θεωρούμε το κύκλωμα RLC του διπλανού σχήματος. Κατά την αλλαγή θέσης του διακόπτη από το σημείο Α στο σημείο Β, θα υπάρξει μια περίοδος μετάβασης σε μια νέα μόνιμη κατάσταση. Με βάση το δεύτερο νόμο του Kirchhoff, το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων σε ένα κλειστό κύκλωμα είναι μηδέν, δηλαδή για το νέο κύκλωμα θα έχουμε:



$$V_L + V_R + V_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0.$$

Επειδή όμως $i = dq/dt,$ λαμβάνουμε τελικά την ακόλουθη γραμμική ομογενή Σ.Δ.Ε. δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0,$$

με αναλυτική λύση:

$$q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right)\cos\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\; t\right], \tag{1}$$

η οποία περιγράφει τη χρονική μεταβολή του φορτίου του πυκνωτή, ενώ τη χρονική στιγμή $t = 0$ η τάση της μπαταρίας είναι V_0 και $q = q_0 = V_0 C,$ $i = dq/dt = 0$ (χάριν απλότητας και χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι δεν υπάρχει μετατόπιση φάσης στο ρεύμα).

Αν $L = 10\,\mathrm{H},$ $C = 5\times10^{-5}\,\mathrm{F},$ ενώ το φορτίο έχει απώλειες στο 2% της αρχικής του τιμής σε 0.04sec, να υπολογίσετε προσεγγιστικά την αντίσταση R για την εξισορρόπηση της ενέργειας του συστήματος, χρησιμοποιώντας την (1).

Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος μπορείτε να εφαρμόσετε οποιαδήποτε από τις μεθόδους των ασκήσεων 1, 2 και 3 (η ακρίβεια των αποτελεσμάτων θα είναι στα 6 δεκαδικά ψηφία). Να αιτιολογήσετε επαρκώς την επιλογή της μεθόδου.

Άσκηση 5: Θεωρούμε ένα λεπτό αγωγό σχήματος δακτυλίου ακτίνας *R*, ο οποίος φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο *Q*. Σημειακό φορτίο *q* τοποθετείται σε απόσταση *r* από το κέντρο του δακτυλίου (το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το κέντρο του αγωγού με το σημειακό φορτίο είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού). Στην περίπτωση αυτή, η δύναμη που ασκείται στο σημειακό φορτίο *q* δίνεται από τη σχέση:

$$F(r) = \frac{1}{4\pi e_0} \frac{q\,Q\,r}{(R^2 + r^2)^{3/2}},$$

όπου $e_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}}$ είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού. Να προσδιορίσετε αριθμητικά την απόσταση *r*, για την οποία όταν τα φορτία είναι $Q = 2\times10^{-5}\ \mathrm{C}$ και $q = 9\times10^{-7}\ \mathrm{C}$ η δύναμη F είναι $2\,\mathrm{N}$, για αγωγό ακτίνας $R = 0.1\mathrm{m}$.

Η ζητούμενη απόσταση (υπάρχουν δύο λύσεις, τις οποίες θα προσδιορίσετε) να υπολογιστεί με τη μέθοδο Newton-Raphson με ακρίβεια 10 δεκαδικών ψηφίων.