

Module: Electronique

L'algèbre de Boole et les fonctions logiques

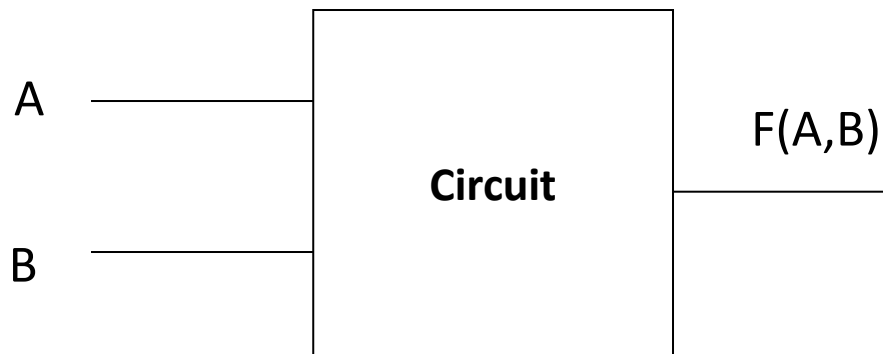
2021-2022

UP systèmes embarquées



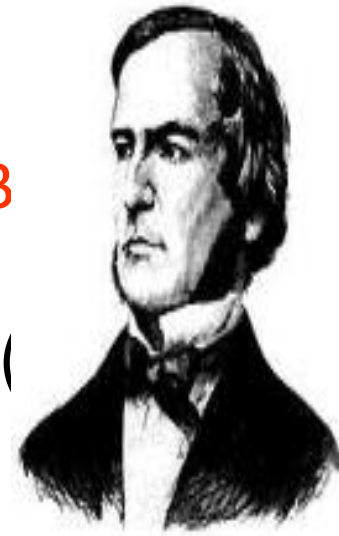
- ☐ Introduction
- ☐ Les Opérateurs logiques
- ☐ Lois fondamentales de l'algèbre de Boole
- ☐ Les fonctions logiques

- Les machines numériques sont constituées d'un ensemble de **circuits** électroniques.
- Chaque circuit fournit une **fonction logique** bien déterminée (addition, comparaison ,....).



La fonction $F(A,B)$ peut être : la somme de A et B , ou le résultat de la comparaison de A et B ou une autre fonction

- Pour **concevoir et réaliser** ce circuit on doit avoir un modèle **mathématique de la fonction** réalisée par ce circuit .
- Ce modèle doit prendre en considération le **système binaire**.
- Le modèle mathématique utilisé est celui de **B**
- George Boole est un mathématicien anglais (1864).



- Une variable logique (**booléenne**) est une variable qui peut prendre soit la valeur **0** ou **1** .
- Algèbre de BOOLE : ensemble de variables à 2 états, de valeurs « 1 » (Vrai) ou « 0 » (Faux) et muni d'un petit nombre d'opérateurs fondamentaux: ET, OU et NON.

❑ Exemple de systèmes à deux états

- Un interrupteur est ouvert ou non ouvert (fermé)
- Une lampe est allumée ou non allumée (éteinte)
- Une porte est ouverte ou non ouverte (fermée)
- **Remarque :**

On peut utiliser les conventions suivantes :

OUI → VRAI (**True**)
NON → FAUX (**False**)

OUI → 1 (**Niveau Haut**)
NON → 0 (**Niveau Bas**)

□ Table de vérité

- Est une représentation graphique (tableau) faisant connaître la réaction du circuit logique, c'est-à-dire l'état de la sortie S en fonction de toutes les combinaisons de valeurs que peuvent prendre les variables binaires d'entrées : E_1, E_2, \dots, E_n
- Exemple d'une table de vérité d'une fonction logique à deux entrées E_1 et E_2 et une sortie S

E_1	E_2	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Nombre de variables d'entrées : 2
- Nombre de combinaisons de valeurs possibles pour les variables d'entrées : $2^2 = 4$

❑ Opération suiveuse (OUI)

- « inutile » du point de vue de la logique mais importante du point de vue de l'électronique pour adapter les impédances.
- Distribuer un signal vers de nombreuses portes
- Fournir de la puissance

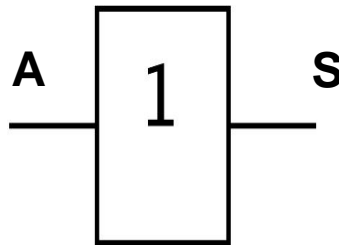
Table de vérité

A	S
0	0
1	1

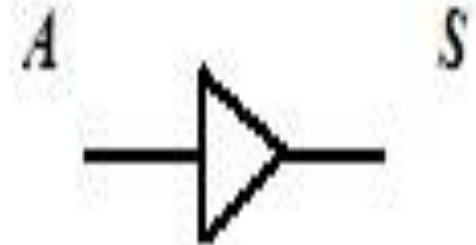
Équation

$$S = A$$

Symbole européen



Symbole américain



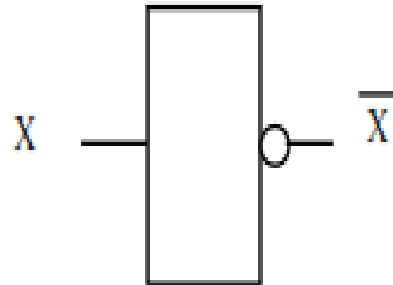
❑ Opération inverseuse (NON)

- inverseur logique avec une entrée et une sortie
- notée $R = \overline{X}$

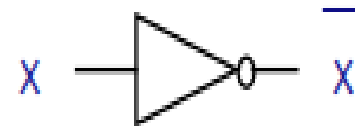
Table de vérité

X	R
0	1
1	0

Symbole européen



Symbole américain

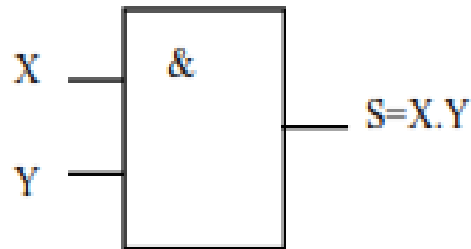


❑ Opération (ET)

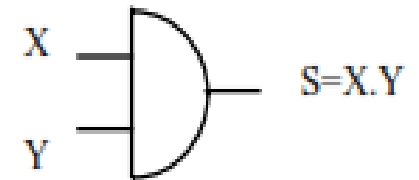
- produit logique, ou intersection, d'au moins 2 entrées
- notée .
- vaut 1 ssi toutes les entrées valent 1
- table de vérité

X	Y	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Symbole européen



Symbole américain

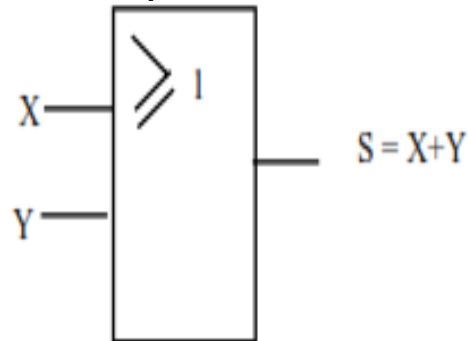


□ Opération (OU)

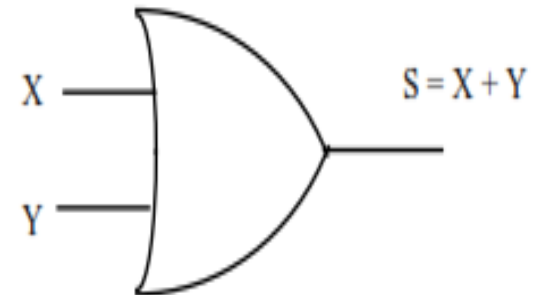
- addition de au moins 2 variables logiques
- notée : +
- vaut 1 si au moins une des variables en entrée vaut 1
- table de vérité

X	Y	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Symbole européen

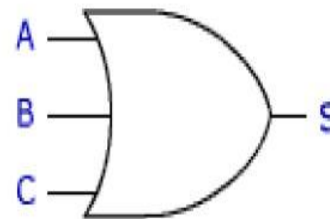
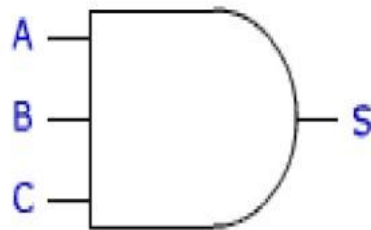


Symbole américain



❑ Remarque s 1

- Dans la définition des opérateurs ET , OU , nous avons juste donner la définition de base avec deux variables logiques.
- L'opérateur ET peut réaliser le produit de plusieurs variables logique(ex : $A . B . C . D$).
- L'opérateur OU peut aussi réaliser la somme logique de plusieurs variables logiques (ex : $A + B + C + D$).



Portes logiques

❑ Opération NON-ET (NAND)

- NON ET est constituée d'un inverseur en sortie d'une porte ET

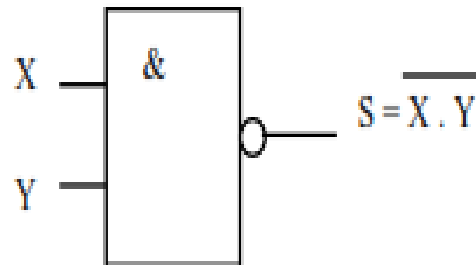
Table de vérité

X	Y	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

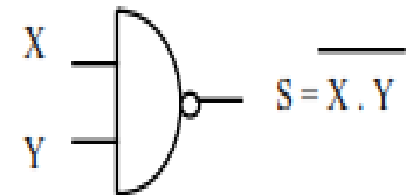
$$S = \overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$$

Symboles graphiques

Symbole européen



Symbole américain



❑ Opération NON-OU (NOR)

- NON OU est constituée d'un inverseur en sortie d'une porte OU

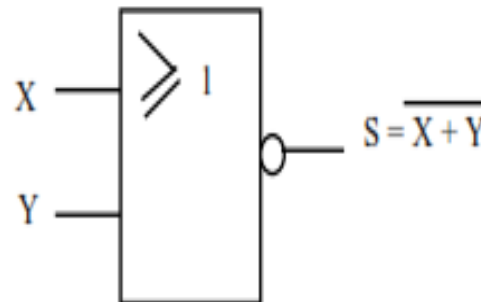
Table de vérité

X	Y	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

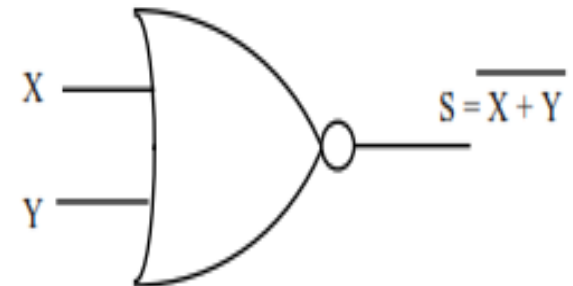
$$S = \overline{X + Y} = \overline{X} \downarrow \overline{Y}$$

Symboles graphiques

Symbole européen



Symbole américain



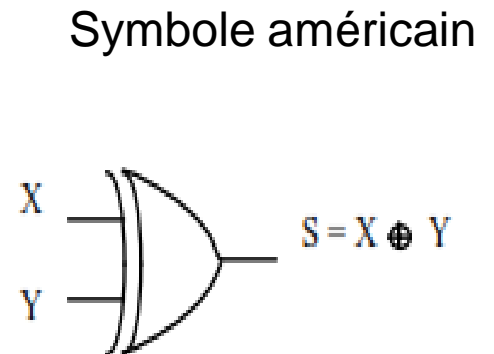
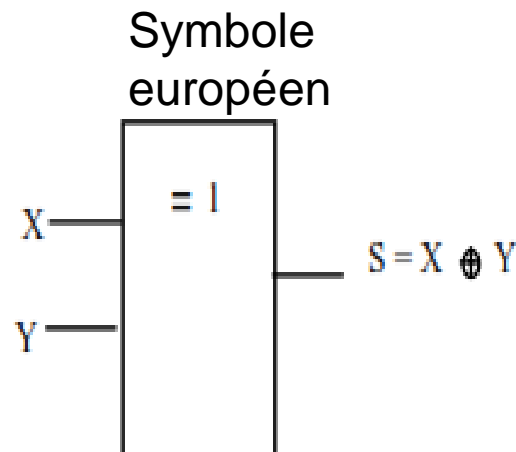
❑ Opération OU exclusif (XOR)

- vaut 1 si une entrée et une seule est à 1
- notée \oplus

Symboles graphiques

Table de vérité

X	Y	R
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



❑ Remarques 2

- NAND et NOR sont des opérateurs universels
- En utilisant les NAND et les NOR, on peut exprimer n'importe quelle expression (fonction) logique.
- Pour cela , Il suffit d'exprimer les opérateurs de base (NON , ET , OU) avec des NAND et des NOR.

□ L'opérateur NON

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{A} + A = 1$$

$$A.A = 0$$

□ Résumé: Propriétés algébriques

Lois	ET	OU	Lois	ET	OU
Identité	$1.A = A$	$0+A = A$	Nullité	$0.A = 0$	$1+A = 1$
Associativité	$(A.B).C = A.(B.C)$	$(A+B)+C = A+(B+C)$	Commutativité	$A.B = B.A$	$A+B = B+A$
Distributivité	$A.(B+C) = A.B + A.C$		Idempotence	$A.A = A$	$A+A = A$
Inversion	$A.\bar{A} = 0$	$A+\bar{A} = 1$	Absorption (1)	$A.(A+B) = A$	$A+A.B = A$
Absorption (2)	$A + \bar{A}B = A + B$		Loi de De Morgan	$\overline{A.B} = \bar{A} + \bar{B}$ $\bar{A} + \bar{B} = \overline{A.B}$	