Matrius i vectors (grup de matí)

Curs 2018–2019

10.1 Existència de matrius inverses

En aquesta secció només considerarem matrius *quadrades*, és a dir, matrius $n \times n$ on $n \geq 1$. La matriu *identitat* $n \times n$ és la matriu

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

que denotarem només per I quan no calgui especificar n. Aquesta matriu té la propietat que $AI = A$ i $IA = A$ per a tota matriu A quadrada $n \times n$.

Definició 10.1. Una matriu quadrada A es diu *invertible* o *regular* si existeix una matriu B tal que $AB = I$ i $BA = I$.

Si A és invertible, aleshores la matriu B que satisfà $AB = BA = I$ és única. Aquest fet es demostra suposant que $AC = CA = I$ i escrivint

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B.$$

Aquesta única matriu B tal que $AB = BA = I$ (si existeix) s'anomena *inversa* de A i es denota per A^{-1}. Observem que $(A^{-1})^{-1} = A$ i que, si A i B són dues matrius invertibles, llavors

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

ja que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Si A és invertible i es compleix $AB = AC$, llavors $B = C$. Es demostra així:

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow B = C.$$

Anàlogament, si A és invertible i es compleix $BA = CA$, llavors $B = C$.

Proposició 10.2. *Si una matriu quadrada A és invertible, llavors la seva transposada A^{t} també és invertible i es compleix $(A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}$.*

Demostració. $A^{\mathrm{t}}(A^{-1})^{\mathrm{t}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{t}} = I^{\mathrm{t}} = I$ i també $(A^{-1})^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}} = (AA^{-1})^{\mathrm{t}} = I$. $\square$

Proposició 10.3. *Sigui A una matriu quadrada per a la qual existeixen matrius B i C tals que $AB = I$ i $CA = I$. Llavors A és invertible i $B = C = A^{-1}$.*

Demostració. Tenim que

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B,$$

i per tant es compleix $BA = CA = I$. Aleshores, com que $AB = I$ i $BA = I$, podem concloure que A es invertible i que $A^{-1} = B$ i $A^{-1} = C$. $\square$

A continuació demostrarem el teorema principal sobre l'existència d'inverses, que afirma que una matriu quadrada A és invertible si i només si $\operatorname{rang} A = n$.

Lema 10.4. *Si A és quadrada $n \times n$ i es compleix $AB = I$ per a alguna matriu B o bé $CA = I$ per a alguna matriu C, llavors* $\operatorname{rang} A = n$.

Demostració. la igualtat $AB = I$ s'escriu com

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \cdots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n^1 & b_n^2 & \cdots & b_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

D'aquí deduïm que

$$\begin{aligned} b_1^1 A_1 + b_2^1 A_2 + \cdots + b_n^1 A_n &= e_1 \\ &\vdots \\ b_1^n A_1 + b_2^n A_2 + \cdots + b_n^n A_n &= e_n \end{aligned}$$

on $A_1, \ldots, A_n$ són les columnes de la matriu A i $e_1, \ldots, e_n$ són les columnes de I, que són exactament la base canònica de $\mathbb{R}^n$. Aquest fet implica que $A_1, \ldots, A_n$ generen $\mathbb{R}^n$ i per tant $\operatorname{rang} A = n$.

D'altra banda, si $CA = I$, llavors $A^{\mathrm{t}} C^{\mathrm{t}} = I^{\mathrm{t}} = I$ i per tant $\operatorname{rang}(A^{\mathrm{t}}) = n$ pel que acabem de demostrar. Aleshores també $\operatorname{rang} A = n$. □

Teorema 10.5. *Una matriu A quadrada $n \times n$ té inversa si i només si* $\operatorname{rang} A = n$.

Demostració. Si A és invertible, llavors $\operatorname{rang} A = n$ pel lema 10.4. Recíprocament, suposem que $\operatorname{rang} A = n$. Llavors tot sistema d'equacions lineals amb matriu A és de Cramer i per tant té solució única. Siguin $B_1, \ldots, B_n$ les solucions respectives dels sistemes

$$AX = e_1, \qquad \ldots, \qquad AX = e_n \tag{10.1}$$

on $e_1, \ldots, e_n$ és la base canònica de $\mathbb{R}^n$. Si diem B a la matriu que té per columnes $B_1, \ldots, B_n$, aleshores (10.1) ens diu que $AB = I$.

D'altra banda, si $\operatorname{rang} A = n$ aleshores també $\operatorname{rang}(A^{\mathrm{t}}) = n$. Per tant, tot sistema d'equacions lineals amb matriu A^{t} també té solució única. Si $C_1, \ldots, C_n$ són les solucions de

$$A^{\mathrm{t}} X = e_1, \qquad \ldots, \qquad A^{\mathrm{t}} X = e_n$$

i diem C a la matriu que té per *files* els vectors $C_1, \ldots, C_n$, llavors $A^{\mathrm{t}} C^{\mathrm{t}} = I$ i per tant $CA = I^{\mathrm{t}} = I$. Aleshores, com que $AB = I$ i $CA = I$, la proposició 10.3 implica que A és invertible. □

Corol·lari 10.6. *Si A és una matriu quadrada i existeix una matriu B tal que $AB = I$, llavors A és invertible i $B = A^{-1}$.*

Demostració. Si $AB = I$, el lema 10.4 ens diu que $\operatorname{rang} A = n$ i aleshores el teorema 10.5 implica que A és invertible. A més, $A^{-1} = B$ ja que $AB = I$. □

Anàlogament, si A és quadrada i existeix una matriu C tal que $CA = I$, llavors A és invertible i $C = A^{-1}$.