Introducción

En la clase de hoy, introduciremos el concepto de buena representación de un conjunto cociente y mostraremos más ejemplos sobre relaciones de equivalencia y conjuntos cociente.

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es una relación de equivalencia en A, si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Sea $x \in A$. Definimos la clase de equivalencia de x con respecto a R por

$$\overline{x} = \{y \in A : xRy\}.$$

Como R es simétrica, tenemos que

$$\overline{x} = \{y \in A : yRx\}.$$

Obsérvese que para todo $x \in A$ tenemos:

(1) $\overline{x} \subseteq A$.

(2) $x \in \overline{x}$, ya que por la propiedad reflexiva tenemos que xRx.

Conjuntos cociente

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, definimos el conjunto cociente de A respecto de R por

$$A/R = \{\overline{a} : a \in A\}.$$

Es decir, el conjunto cociente A/R es el conjunto de las clases de equivalencia de los elementos de A.

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, $X \in A/R$ y $a \in X$, diremos que a es un representante de X.

Buenas representaciones de conjuntos cociente

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Sea $B \subseteq A$. Decimos que $\{\overline{a} : a \in B\}$ es una buena representación de A/R si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- $A/R = \{\overline{a} : a \in B\}$.
- Para todo $a, b \in B$, si $a \neq b$ entonces $\overline{a} \neq \overline{b}$.

Por lo general, tendremos diversas representaciones de un conjunto cociente. Entonces, siempre que sea posible, nos interesa tener representaciones que sean buenas, es decir, que no sean redundantes, en el sentido de que para cada clase hay un único representante.

Ejemplo

Consideremos el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Sea

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Demostramos en la última clase que R es una relación de equivalencia. Tenemos entonces que
$\overline{1} = \{1, 2\}$, $\overline{2} = \{1, 2\}$, $\overline{3} = \{3, 4\}$, $\overline{4} = \{3, 4\}$.

Entonces, $A/R = \{\overline{1}, \overline{3}\} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ es una buena representación de A/R.

Sin embargo, $A/R = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ no es una buena representación de A/R, ya que $\overline{2} = \overline{1}$.

Asimismo, en el resto de ejemplos que vimos en la última clase, dimos buenas representaciones de los conjuntos cociente.

A continuación, vamos a ver más ejemplos de relaciones de equivalencia y conjuntos cociente.

Ejemplo 1

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación $\equiv$:

$$(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

En primer lugar, comprobamos que $\equiv$ es una relación de equivalencia. En este caso, es fácil hacerlo, debido a que $\equiv$ está definida por una igualdad.

Tenemos que $\equiv$ es reflexiva, ya que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que $x = x$, y por tanto $(x, y) \equiv (x, y)$.

Tenemos que $\equiv$ es simétrica, ya que para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow x_2 = x_1 \Leftrightarrow (x_2, y_2) \equiv (x_1, y_1).$$

Y $\equiv$ es transitiva, ya que para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$:

$(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) \equiv (x_3, y_3) \Rightarrow x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3 \Rightarrow (x_1, y_1) \equiv (x_3, y_3)$.

Así pues, $\equiv$ es relación de equivalencia. Para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tenemos:

$$\overline{(a,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \equiv (a, b)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\}.$$

Por tanto, la clase de equivalencia de un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ es el conjunto formado por todos los puntos del plano cuya primera componente es a, es decir, es la recta $x = a$, la cual es paralela al eje de ordenadas.

Por tanto,

$$(\mathbb{R}^2/\equiv) = \{x = a : a \in \mathbb{R}\}.$$

Es decir, el plano euclídeo queda partido en rectas paralelas al eje de ordenadas. Y observamos que

$$\{\overline{(a,0)} : a \in \mathbb{R}\}$$

es una buena representación de $\mathbb{R}^2/\equiv$.

Ejemplo 2

Consideremos el conjunto $A = \{12, 52, 16, 17, 26, 29, 47, 35, 53\}$.
Definimos la relación R sobre A por:

$aRb \Leftrightarrow$ la suma de las cifras de a es igual a la suma de las cifras de b.

Como R está definida por una igualdad, es fácil comprobar que R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo 2

Los resultados que dan la suma de las diferentes cifras de los números de A son:

$$1 + 2 = 3$$
$$5 + 2 = 7$$
$$1 + 6 = 7$$
$$1 + 7 = 8$$
$$2 + 6 = 8$$
$$2 + 9 = 11$$
$$4 + 7 = 11$$
$$3 + 5 = 8$$
$$5 + 3 = 8$$

Ejemplo 2

Por tanto, tenemos las siguientes 4 clases de equivalencia:

$$\begin{aligned}&\overline{12}\\&\overline{16}=\overline{52}\\&\overline{17}=\overline{26}=\overline{35}=\overline{53}\\&\overline{29}=\overline{47}\end{aligned}$$

El conjunto cociente es entonces

$A/R=\{\overline{12},\overline{16},\overline{17},\overline{29}\}=$
$\{\{12\},\{16,52\},\{17.26,35,53\},\{29,47\}\}$.

Y la representación dada del conjunto cociente es una buena representación.

Ejemplo 3

Consideremos en $\mathbb{R}$ la siguiente relación $\equiv$:

$$x \equiv y \Leftrightarrow (x = y \vee x + y = 3).$$

Demostramos que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

(1) $\equiv$ es reflexiva, ya que para todo número real x tenemos que $x = x$, y por tanto $x \equiv x$.

(2) $\equiv$ es simétrica, ya que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$x \equiv y \Leftrightarrow x = y \vee x + y = 3 \Leftrightarrow y = x \vee y + x = 3 \Leftrightarrow y \equiv x.$$

Ejemplo 3

(3) $\equiv$ es transitiva. Supongamos que $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x \equiv y$ e $y \equiv z$. Tenemos que demostrar que $x \equiv z$. Es decir, tenemos que probar que $x = z \vee x + z = 3$.
Tenemos entonces:

$$x \equiv y \Rightarrow x = y \vee x + y = 3,$$

$$y \equiv z \Rightarrow y = z \vee y + z = 3.$$

Por tanto, tenemos que $(x = y \wedge y = z) \vee (x = y \wedge y + z = 3) \vee (x + y = 3 \wedge y = z) \vee (x + y = 3 \wedge y + z = 3)$.

Entonces, si $x = y \wedge y = z$, tenemos que $x = z$, y por tanto $x \equiv z$.

Si $x = y \wedge y + z = 3$, tenemos que $x + z = 3$, y por tanto $x \equiv z$.

Ejemplo 3

Si $x + y = 3 \wedge y = z$, tenemos que $x + z = 3$, y por tanto $x \equiv z$.

Supongamos por último que $x + y = 3 \wedge y + z = 3$. Tenemos entonces $y = 3 - x = 3 - z$, con lo cual $3 + x = 3 + z$, y por tanto $x = z$. Luego, $x \equiv z$.

Por tanto, $\equiv$ es una relación de equivalencia. Para todo $a \in \mathbb{R}$ tenemos:

$\overline{a} = \{x \in \mathbb{R} : x \equiv a\} = \{x \in \mathbb{R} : x = a \vee x + a = 3\} = \{x \in \mathbb{R} : x = a \vee x = 3 - a\} = \{a, 3 - a\}$.

Por ejemplo, $\overline{2} = \{1, 2\}$, $\overline{10} = \{-7, 10\}$, $\overline{113} = \{-110, 113\}$.

Entonces,

$$(A/\equiv) = \{\{a, 3 - a\} : a \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 4

En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definimos la relación $\sim$ por:

$$a \sim b \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}.$$

Como la relación $\sim$ está definida a través de una igualdad, es fácil comprobar que $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Determinamos entonces las clases de equivalencia de esta relación. Para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\overline{a} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \sim a\}.$$

Tenemos entonces:

$x \in \overline{a} \Leftrightarrow x \sim a \Leftrightarrow x + 1/x = a + 1/a \Leftrightarrow x - a + 1/x - 1/a = 0 \Leftrightarrow$
$x - a - (x-a)/ax = 0 \Leftrightarrow (x-a)(1 - 1/ax) = 0$

Ejemplo 4

Por tanto,

$$x \in \overline{a} \Leftrightarrow (x-a)(1-\frac{1}{ax}) = 0 \Leftrightarrow (x-a=0) \vee (1-\frac{1}{ax}) = 0).$$

Y tenemos que

$$1-\frac{1}{ax} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{ax} \Leftrightarrow ax = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}.$$

Así pues:

$$x \in \overline{a} \Leftrightarrow (x-a=0) \vee (1-\frac{1}{ax}) = 0) \Leftrightarrow (x=a) \vee x = \frac{1}{a}.$$

Por tanto,

$$\overline{a} = \{a, \frac{1}{a}\}.$$

Ejemplo 4

Observamos que, para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si $a \notin [-1, 0) \cup (0, 1]$ entonces $1/a \in [-1, 0) \cup (0, 1]$. Es decir, $a \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ o $1/a \in [-1, 0) \cup (0, 1]$.

Por tanto, en el conjunto $[-1, 0) \cup (0, 1]$ hay un representante de cada clase de equivalencia.

Así pues,

$$\{\overline{a} : a \in [-1, 0) \cup (0, 1]\}$$

es una buena representación de $(\mathbb{R} \setminus \{0\})/\sim$.

Ejemplo 5

Si x es un número real, representamos por $[x]$ a la parte entera de x.

Definimos entonces en $\mathbb{N}$ la relación R por:

$$xRy \Leftrightarrow [\sqrt{x}] = [\sqrt{y}].$$

Como la relación R está definida por una igualdad, es fácil comprobar que R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Hallamos entonces las clases de equivalencia de R. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\overline{n} = \{x \in \mathbb{N} : xRn\}.$$

Y tenemos que para todo $x \in \mathbb{N}$:

Ejemplo 5

$x \in \overline{n} \Leftrightarrow xRn \Leftrightarrow [\sqrt{x}] = [\sqrt{n}] \Leftrightarrow$
$[\sqrt{n}] \leq \sqrt{x} < [\sqrt{n}] + 1 \Leftrightarrow [\sqrt{n}]^2 \leq x < ([\sqrt{n}] + 1)^2.$

Luego,

$$\overline{n} = \{x \in \mathbb{N} : [\sqrt{n}]^2 \leq x < ([\sqrt{n}] + 1)^2\}.$$

Por ejemplo,

$\overline{1} = \{x \in \mathbb{N} : [\sqrt{1}]^2 \leq x < ([\sqrt{1}] + 1)^2\} =$
$\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x < 4\} = \{1, 2, 3\},$

$\overline{4} = \{x \in \mathbb{N} : [\sqrt{4}]^2 \leq x < ([\sqrt{4}] + 1)^2\} =$
$\{x \in \mathbb{N} : 4 \leq x < 9\} = \{4, 5, 6, 7, 8\},$

Ejemplo 5

Observamos lo siguiente:

$[\sqrt{0}] = 0$.

Para $i = 1, 2, 3$, $[\sqrt{i}] = 1$.

Para $i = 4, 5, 6, 7, 8$, $[\sqrt{i}] = 2$.

Para $i = 9, \ldots, 15$, $[\sqrt{i}] = 3$.

Para $i = 16, \ldots, 24$, $[\sqrt{i}] = 4$.

$$\vdots$$

Ejemplo 5

Por tanto,

$(\mathbb{N}/R) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{16}, \overline{25}, \dots\} = \{\overline{n^2} : n \in \mathbb{N}\} =$
$\{\{x \in \mathbb{N} : n^2 \leq x < (n+1)^2\} : n \in \mathbb{N}\} =$
$\{\{0\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7, 8\}, \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}, \dots\}.$