Introducció al Càlcul Diferencial **Matemàtiques**

Examen Final. Part 1. Semestre de Tardor 2018-2019

JUSTIFIQUEU DETALLADAMENT LES VOSTRES RESPOSTES

1. Donat $a \geq 0$, definim recursivament una successió $(x_n)_{n\geq 1}$ com $x_1 = a$ i $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 2}$, per $n \geq 1$.
   (a) Estudieu-ne la monotonia en funció del paràmetre a.
   (b) Demostreu que és una successió acotada.
   (c) Demostreu que és una successió convergent i calculeu-ne el límit.

2. Resoleu els exercicis següents:
   (a) Considerem la funció $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per l'expressió
   $$F(x) = \arctan(x+1) - x^3.$$
   Demostreu que existeix un valor real x_0 tal que $F(x_0) = 0$.
   (b) Sigui $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua tal que
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} < 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} > 1.$$
   Demostreu que existeix un valor real $x_0 > 0$ tal que $f(x_0) = x_0$.

3. Sigui $(a_n)_{n\geq 1}$ una successió convergent de nombres reals, amb $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Demostreu que si existeixen constants $c, d \in \mathbb{R}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que per a tot $n \geq n_0$,
   $$c \leq a_n \leq d,$$
   aleshores $c \leq a \leq d$.

TOTS ELS EXERCICIS VALEN EL MATEIX

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT

POSEU EL VOSTRE NOM I COGNOM EN CADA FULL EN MAJÚSCULES