Introducción

En la clase de hoy, estudiaremos el método de inducción, el cual se utiliza en muchas demostraciones para demostrar propiedades de los números naturales.

El método de inducción es un método de demostración específico de las Matemáticas.

El método de demostración conocido como inducción (o inducción simple) se suele utilizar para demostrar que una cierta proposición $P(n)$, que se refiere a los números naturales n, es cierta para todo n. Este método procede de la siguiente manera:

Si:

(1) $P(0)$ es cierta

(2) Para todo $k \in \mathbb{N}$, si $P(k)$ es cierta entonces $P(k+1)$ es cierta,

entonces $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Formalmente, podemos describir el método de inducción por la proposición:

$$(P(0) \wedge \forall k \in \mathbb{N}(P(k) \to P(k+1)) \to \forall n \in \mathbb{N} P(n).$$

El método de inducción

Por tanto, si queremos demostrar por inducción que una propiedad $P(n)$ es cierta para todo número natural n, deberemos demostrar (1) y (2).

A la condición (1) se la llama caso inicial.

Y a la condición (2) se la llama paso de inducción.

Observamos que el paso de inducción tiene la forma "para todo $k \in \mathbb{N}$, $P(k) \to P(k+1)$". A la proposición $P(k)$ se la denomina entonces hipótesis de inducción.

Veamos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplos

Proposición 1

Sea n un número natural mayor que 0. Entonces:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Demostramos la Proposición 1 por inducción.

Caso inicial: $n = 1$.

Es obvio, ya que $(1 \cdot 2)/2 = 1$.

Paso de inducción. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 0$. Supongamos por la hipótesis de inducción que $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$. Tenemos que demostrar que

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Demostración de la Proposición 1

Tenemos entonces por la hipótesis de inducción:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1.$$

Por tanto,

$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2 + n + 1 =$
$(n+1) \cdot (n/2 + 1) = (n+1) \cdot (n+2)/2 = ((n+1) \cdot (n+2))/2.$

Así pues, como hemos demostrado el caso inicial y el paso de inducción, hemos demostrado la proposición por inducción. $\square$

Proposición 2

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 5n + 6$ es par.

Demostramos la Proposición 2 por inducción.

Caso inicial: $n = 0$.

Es obvio, ya que $0^2 + 5 \cdot 0 + 6 = 6$.

Paso de inducción. Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos por la hipótesis de inducción que $n^2 + 5n + 6$ es par. Tenemos que demostrar que

$$(n+1)^2 + 5(n+1) + 6 \text{ es par }.$$

Demostración de la Proposición 2

Tenemos que

$$(n+1)^2+5(n+1)+6 = n^2+2n+1+5n+5+6 = (n^2+5n+6)+(2n+6).$$

Ahora, por la hipótesis de inducción, tenemos que $n^2 + 5n + 6$ es par. Y claramente, $2n + 6$ es par, ya que $2n + 6 = 2(n + 3)$. Por consiguiente, $(n + 1)^2 + 5(n + 1) + 6$ es suma de dos números pares, y por tanto $(n + 1)^2 + 5(n + 1) + 6$ es par.

Así pues, como hemos demostrado el caso inicial y el paso de inducción, hemos demostrado la proposición por inducción. $\square$

Proposición 3

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 3^n$ es múltiplo de 4.

Demostramos la Proposición 3 por inducción.

Caso inicial: $n = 0$.

Es obvio, ya que en este caso tenemos que $7^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$.

Paso de inducción. Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos por la hipótesis de inducción que $7^n - 3^n$ es múltiplo de 4. Tenemos que demostrar que

$$7^{n+1} - 3^{n+1} \text{es múltiplo de } 4.$$

Demostración de la Proposición 3

Tenemos que

$$7^{n+1} - 3^{n+1} = 7 \cdot 7^n - 3 \cdot 3^n = (4+3) \cdot 7^n - 3 \cdot 3^n =$$
$$4 \cdot 7^n + 3 \cdot 7^n - 3 \cdot 3^n = 4 \cdot 7^n + 3(7^n - 3^n).$$

Ahora, por la hipótesis de inducción, tenemos que $7^n - 3^n$ es un múltiplo de 4, y por tanto $3(7^n - 3^n)$ es también un múltiplo de 4. Y por otra parte, es claro que $4 \cdot 7^n$ es un múltiplo de 4. Por consiguiente, $7^{n+1} - 3^{n+1}$ es suma de dos múltiplos de 4, y por tanto es también un múltiplo de 4.

Así pues, como hemos demostrado el caso inicial y el paso de inducción, hemos demostrado la proposición por inducción. $\square$

Teorema de Bernoulli

Para todo número real $a > -1$ y para todo número natural n, se tiene que

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Demostramos el Teorema de Bernoulli por inducción.

Caso inicial: $n = 0$.

Es obvio, ya que en este caso tenemos que $(1+a)^0 = 1 = 1 + 0$.

Paso de inducción. Sea n un número natural. Supongamos por la hipótesis de inducción que $(1+a)^n \geq 1 + na$. Tenemos que demostrar que

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a.$$

Tenemos que $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a)$. Por la hipótesis de inducción, tenemos que $(1+a)^n \geq 1+na$. Por otra parte, como $a > -1$, tenemos que $1+a > 0$. Por tanto, $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a)$. Entonces, tenemos:

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = \\ 1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a.$$

Obsérvese que la última desigüaldad se cumple, porque $na^2 \geq 0$. Por tanto, se cumple el paso de inducción.

Así pues, como hemos demostrado el caso inicial y el paso de inducción, hemos demostrado el Teorema de Bernoulli por inducción. $\square$

El método de inducción generalizada

En ocasiones, hay propiedades $P(n)$ para los números naturales que no son ciertas para todo número natural, pero sí lo son para todo número natural mayor igual que un cierto n_0. Entonces, para demostrar que $P(n)$ es cierta para todo número natural $n \geq n_0$, procedemos como hicimos en el método de inducción, con la única diferencia de que en el caso inicial se demuestra que $P(n_0)$ es cierta, en lugar de demostrar que $P(0)$ es cierta.

Definimos entonces formalmente el método de inducción generalizada.

El método de inducción generalizada

Sea $P(n)$ una proposición para los números naturales. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si:

(1) $P(n_0)$ es cierta

(2) Para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$, si $P(k)$ es cierta entonces $P(k+1)$ es cierta,

entonces $P(n)$ es cierta para todo $n \geq n_0$.

Formalmente, podemos describir el método de inducción generalizada por la proposición:

$$(P(n_0) \wedge \forall k \geq n_0 (P(k) \rightarrow P(k+1)) \rightarrow \forall n \geq n_0 P(n).$$

Veamos a continuación algunos ejemplos.

Teorema 1

Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$, $2^n < n!$.

Demostramos el Teorema 1 por inducción generalizada.

Caso inicial: $n = 4$.

Es obvio, ya que se tiene que $2^4 = 16 < 24 = 4!$.

Paso de inducción. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$. Supongamos por la hipótesis de inducción que $2^n < n!$. Tenemos que demostrar que

$$2^{n+1} < (n+1)!.$$

Demostración del Teorema 1

Como, por la hipótesis de inducción, tenemos que $2^n < n!$, deducimos que $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n!$

Por otra parte, como $n \geq 4$, tenemos que $2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!$.

Así pues, tenemos:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!.$$

Así pues, como hemos demostrado el caso inicial y el paso de inducción, hemos demostrado la proposición por inducción generalizada. □

Ejemplos

Teorema 2

Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

Para demostrar el Teorema 2, utilizaremos el siguiente lema.

Lema 1

Para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 4$, $2^k > 2k + 2$.

Demostramos el Lema 1 por inducción generalizada.

Demostración del Lema 1

Caso inicial: $k = 4$.

El caso es claro, ya que $2^4 = 16 > 2 \cdot 4 + 2 = 10.$.

Paso de inducción. Sea $k \geq 4$. Supongamos por la hipótesis de inducción que $2^k > 2k + 2$. Tenemos que demostrar que

$$2^{k+1} > 2(k+1) + 2.$$

Tenemos entonces que $2^{k+1} = 2^k + 2^k$. Por la hipótesis de inducción, $2^k > 2k + 2$. Por tanto:

$$2^{k+1} = 2^k + 2^k > 2k + 2 + 2k + 2 = 4k + 4 > 2(k+1) + 2.$$

Así pues, como hemos demostrado el caso inicial y el paso de inducción, hemos demostrado el lema por inducción generalizada.
$\square$

Demostración del Teorema 2

Caso inicial: $n = 5$.

El caso es claro, ya que $2^5 = 32$ y $5^2 = 25$.

Paso de inducción. Sea $n \geq 5$. Supongamos por la hipótesis de inducción que $2^n > n^2$. Tenemos que demostrar que $2^{n+1} > (n+1)^2$.

Tenemos que $2^{n+1} = 2^n + 2^n$. Por la hipótesis de inducción, deducimos que $2^n + 2^n > n^2 + 2^n$. Ahora, por el Lema 1, inferimos que $n^2 + 2^n > n^2 + 2n + 2$. Por tanto, tenemos:

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n^2 + 2^n > n^2 + 2n + 2 > (n+1)^2.$$

Así pues, como hemos demostrado el caso inicial y el paso de inducción, hemos demostrado el teorema por inducción generalizada. $\square$

A continuación, vamos a demostrar por inducción generalizada el siguiente teorema de geometría en el plano.

Teorema 3

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. El número máximo de puntos de intersección entre n rectas del plano es $n(n-1)/2$.

Demostramos el Teorema 3 por inducción generalizada

Caso inicial: $n = 2$.

El caso es claro, ya que dos rectas se cortan como máximo en un punto, y tenemos que $n(n-1)/2 = 2 \cdot 1/2 = 1$.

Paso de inducción. Sea $n \geq 2$. Supongamos por la hipótesis de inducción que n rectas del plano se cortan como máximo en $n(n-1)/2$ puntos. Tenemos que demostrar que $n+1$ rectas del plano se cortan como máximo en $(n+1)n/2$ puntos.

Demostración del Teorema 3

Sean $l_1, \ldots, l_n, l_{n+1}$ rectas del plano. Consideramos las primeras n rectas $l_1, \ldots, l_n$. Por la hipótesis de inducción, las rectas $l_1, \ldots, l_n$ se cortan como máximo en $n(n-1)/2$ puntos. Y la recta l_{n+1} corta a cada una de las otras n rectas en a lo sumo un punto. Por tanto, las rectas $l_1, \ldots, l_n, l_{n+1}$ se cortan como máximo en

$$\frac{n(n-1)}{2} + n \text{ puntos.}$$

Tenemos entonces:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1) + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Así pues, como hemos demostrado el caso inicial y el paso de inducción, hemos demostrado el teorema por inducción generalizada. □