Solucions comentades

1. Sigui a un nombre real. Demostra per inducció que si $1+a>0$ aleshores

$$(1+a)^n \geqslant 1+na$$

per tot nombre natural

Sigui a un nombre real tal que $(1+a)>0$. Demostrem per inducció sobre n (n natural) que per tot $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
Primer provarem la base de la inducció, (la propietat pel cas inicial) és a dir, demostrarem la propietat pel primer natural que verifica la propietat. En aquest cas com que es verifica per a tots el naturals, el primer serà $n=0$. I podem veure que en efecte, per a $n=0$ tenim

$$(1+a)^n = (1+a)^0 = 1 \geqslant 1 = 1+0\cdot a = 1+na.$$

Ara farem el pas d'inducció. Suposem que la propietat és certa per algun nombre natural $n=k$, $k\in\mathbb{N}$ (hipotesi d'inducció), es a dir $(1+a)^k \geqslant 1+ka$ i demostrem que aleshores la propietat és certa per al successor, $k+1$:
Per hipòtesi d'inducció tenim que $(1+a)^k \geqslant 1+ka$, com que $(1+a)>0$, podem multiplicar cada terme de la desigualtat anterior, obtenint $(1+a)^k\cdot(1+a) \geqslant (1+ka)\cdot(1+a)$. Operant, això es el mateix que $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+a+ka+ka^2$. Ara, com $a^2\geqslant 0$ i $k\geqslant 0$ tenim que $ka^2 \geqslant 0$ i per tant $1+a+ka+ka^2 \geqslant 1+a+ka$. Finalment, reescrivint la cadena de desigualtats obtenim $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+a+ka+ka^2 \geqslant 1+a+ka = 1+(k+1)a$, és a dir, hem provat que la desigualtat es verifica per a $n=k+1$.

2. Sigui X un conjunt, i $A,B,C \subseteq X$. Suposa que $(X\smallsetminus A)\cap B = (X\smallsetminus A)\cap C$ i que $A\cap B = A\cap C$. Demostra que $B=C$.

Per demostrar $B=C$, n'hi ha prou en demostrar les dues inclusions $B\subseteq C$ i $C\subseteq B$.

Per demostrar $B\subseteq C$. Sigui $b\in B$ arbitrari. Com que b pot pertànyer a A o no pertànyer a A, farem la demostració per casos ($b\in A$ o $b\notin A$).

- Si $b\in A$, com que $b\in B$, aleshores $b\in A\cap B = A\cap C$ i per tant $b\in C$.
- Si $b\notin A$, com que $b\in B\subseteq X$, aleshores $b\in (X\smallsetminus A)\cap B = (X\smallsetminus A)\cap C$ i per tant $b\in C$.

Com que en tots dos casos $b\in C$, hem demostrat que per tot b, si $b\in B$, aleshores $b\in C$, és a dir $B\subseteq C$.

Anàlogament demostrarem $C\subseteq B$. Sigui $c\in C$ arbitrari.

- Si $c\in A$, com que $c\in B$, aleshores $c\in A\cap C = A\cap B$ i per tant $c\in B$.
- Si $c\notin A$, com que $c\in C\subseteq X$, aleshores $c\in (X\smallsetminus A)\cap C = (X\smallsetminus A)\cap B$ i per tant $c\in B$.

Com que en tots dos casos $c\in B$, hem demostrat $C\subseteq B$.

3. Considera els següents conjunts:

$$A = \{x\in\mathbb{Q} : \exists y\in\mathbb{Z}(x=3^y)\},$$
$$B = \{x\in\mathbb{R} : |x-5| \leqslant \frac{19}{4}\},$$
$$C = \Big\{0, \frac{1}{4}, 9, \{\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\}, \frac{1}{3}, \{\frac{1}{4}\}, 1, \{\frac{1}{3}\}\Big\}.$$

(a) Expressa B com un interval.

Distinguim els dos següents casos:

(1) Si $x < 5$, tenim que

$$x \in B \iff |x-5| = 5 - x \leqslant \frac{19}{4} \iff x \geqslant \frac{1}{4}.$$

(2) Si $x \geqslant 5$, tenim que

$$x \in B \iff |x-5| = x - 5 \leqslant \frac{19}{4} \iff x \leqslant \frac{39}{4}.$$

Per tant,

$$B = \{x \in B : x < 5\} \cup \{x \in B : x \geqslant 5\} = [\frac{1}{4}, 5) \cup [5, \frac{39}{4}] = [\frac{1}{4}, \frac{39}{4}].$$

(b) Troba $A \cap B$, $C \smallsetminus A$ i $C \smallsetminus B$.

$$A \cap B = \{\frac{1}{3}, 1, 3, 9\}.$$

$$C \setminus A = \{0, \frac{1}{4}, \{\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\}, \{\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{3}\}\Big\}.$$

$$C \setminus B = \{0, \{\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\}, \{\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{3}\}\Big\}.$$

(c) Expressa $B \smallsetminus A$ com una unió d'intervals.

Tenim que

$$B \setminus A = [\frac{1}{4}, \frac{39}{4}] \setminus \{\frac{1}{3}, 1, 3, 9\}.$$

Per tant,

$$B \setminus A = [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 1) \cup (1, 3) \cup (3, 9) \cup (9, \frac{39}{4}].$$

Digues raonadament si són certes o falses les següents afirmacions:

(d) $\{\frac{1}{3}\} \subseteq C$.

La propietat és certa, perquè $\frac{1}{3}$ és a la llista de elements que apareixen al conjunt C.

(e) $\{\{\frac{1}{3}\}\} \subseteq C$.

La propietat és certa, perquè $\{\frac{1}{3}\}$ és a la llista de elements que apareixen al conjunt C

(f) $\{\{\frac{1}{3}\}\} \subseteq A$.

Com que A és un conjunt de nombres racionals, $\{\frac{1}{3}\}$ no pertany al conjunt A, i per tant la propietat és falsa.

(g) $\forall x \in A\, \exists y \in A\, (y < x \wedge 0 < y)$.

La propietat és certa. Per demostrar-ho, suposem que $x \in A$. Per definició del conjunt A, existeix un nombre enter p tal que $x = 3^p$. Aleshores, $y = 3^{p-1}$ és un element del conjunt A tal que $0 < y$ i $y < x$. Per tant, és cert que per tot $x \in A$ hi ha un $y \in A$ tal que $y < x$ i $0 < y$.

(h) $\frac{39}{4} \in C$.

La propietat és falsa, perquè $\frac{39}{4}$ no apareix a la llista dels elements del conjunt C.