Solucions comentades (de la part de problemes)

3. $\boxed{\text{Sigui } g \text{ la funció de } \mathbb{N}\times\mathbb{N} \text{ en } \mathbb{N} \text{ determinada per la fórmula } g(x,y) = \dfrac{x+y}{2}.}$

(a) $\boxed{\text{Calcula el domini de } g.}$

Observem que

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(g) &= \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{x+y}{2} \text{ és un nombre natural}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x+y \text{ és parell}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x,y \text{ són parells}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x,y \text{ són senars}\}. \end{aligned}$$

La darrera igualtat es pot justificar perquè que (i) la suma de dos parells és un nombre parell, (ii) la suma de dos senars és un nombre parell, i (iii) la suma d'un parell i un senar és un nombre senar.

(b) $\boxed{\text{Calcula el recorregut (o imatge) de } g \text{ i digues si és exhaustiva.}}$

Per definició de g, $\operatorname{rec}(g)$ està contingut en $\mathbb{N}$. Ara observem que

$$\begin{aligned} \operatorname{rec}(g) &= \{z \in \mathbb{N} : z = \frac{x+y}{2} \text{ per alguns } x,y \in \mathbb{N}\} \\ &= \{z \in \mathbb{N} : 2z = x+y \text{ per alguns } x,y \in \mathbb{N}\} \\ &= \mathbb{N}. \end{aligned}$$

La inclusió no trivial de la darrera igualtat es pot justificar (no és la única forma) comprovant que per tot nombre natural z, si agafem x com $2z$ i y com 0, resulta que $2z = x+y$. Com que acabem de veure que $\operatorname{rec}(g) = \mathbb{N}$, sabem que la funció g sí es exhaustiva.

(c) $\boxed{\text{Digues si } g \text{ és injectiva.}}$

La funció g no es injectiva perquè podem trobar 2 parells (x,y) i (x',y') diferents que compleixen que $g(x,y) = g(x',y')$. Una possibilitat (no la única) d'exhibir parells amb aquesta propietat és agafar (x,y) com el parell $(0,2)$ i agafar (x',y') com el parell $(2,0)$.

(d) $\boxed{\text{Calcula } g^{-1}(\{0,2\}).}$

Observem que

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{0,2\}) &= \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : g(x,y) \in \{0,2\}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{x+y}{2} \in \{0,2\}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x+y \in \{0,4\}\} \\ &= \{(0,0),(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}. \end{aligned}$$

4. $\boxed{\begin{array}{l}\text{Sigui } f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ una aplicació, i } S \text{ una relació binària en } \mathbb{R}. \text{ Definim la relació binària } T \text{ en } \mathbb{R} \text{ així:} \\ \text{Si } a,b \in \mathbb{R},\ a\ T\ b \iff f(a)\ S\ f(b).\end{array}}$

(a) $\boxed{\text{Demostra que si la relació } S \text{ és d'equivalència, aleshores la relació } T \text{ és d'equivalència.}}$

Per hipòtesis sabem que la relació S és d'equivalència en $\mathbb{R}$, és a dir, sabem que

- per tot $a \in \mathbb{R}$, $a\ S\ a$ (reflexiva de S),
- per tot $a,b \in \mathbb{R}$, si $a\ S\ b$, aleshores $b\ S\ a$ (simètrica de S),
- per tot $a,b,c \in \mathbb{R}$, si $a\ S\ b$ i $b\ S\ c$, aleshores $a\ S\ c$ (transitiva de S).

Per justificar que T és d'equivalència hem de veure les tres propietats següents:

Reflexiva de T: Sigui $a \in \mathbb{R}$. Pel fet que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una aplicació, sabem que existeix $f(a)$ i que és un nombre real (i.e., $f(a) \in \mathbb{R}$). Utilitzant la reflexiva de S obtenim que $f(a)\ S\ f(a)$. Per tant, per la definició de T, concloem que $a\ T\ a$.

Simètrica de T: Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $a\ T\ b$. Aleshores, $f(a)\ S\ f(b)$ per la definició de T. Utilitzant la simètrica de S obtenim que $f(b)\ S\ f(a)$. I tornant a utilitzar la definició de T concloem que $b\ T\ a$.

Transitiva de T: Siguin $a, b, c \in \mathbb{R}$ tals que $a\ T\ b$ i $b\ T\ c$. Aleshores, per la definició de T, sabem que $f(a)\ S\ f(b)$ i $f(b)\ S\ f(c)$. Utilitzant la transitiva de S obtenim que $f(a)\ S\ f(c)$. I tornant a utilitzar la definició de T concloem que $a\ T\ c$.

(b) Demostra que si la relació S és d'ordre i f és injectiva, aleshores la relació T és d'ordre.

Per hipòtesis sabem que la relació S és d'ordre en $\mathbb{R}$, és a dir, sabem que[1]

- per tot $a \in \mathbb{R}$, $a\ S\ a$ (reflexiva de S),
- per tot $a, b \in \mathbb{R}$, si $a\ S\ b$ i $b\ S\ a$, aleshores $a = b$ (antisimètrica de S),
- per tot $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a\ S\ b$ i $b\ S\ c$, aleshores $a\ S\ c$ (transitiva de S).

I l'altre hipòtesis, la injectivitat de f, ens diu que

- per tot $a, b \in \mathbb{R}$, si $f(a) = f(b)$, aleshores $a = b$.

Per justificar que T és d'ordre hem de veure les tres propietats següents:

Reflexiva de T: Serveix el mateix argument que en l'apartat anterior (si us hi fixeu abans només hem utilitzat la reflexiva de S).

Antisimètrica de T: Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $a\ T\ b$ i $b\ T\ a$. Aleshores, per la definició de T, sabem que $f(a)\ S\ f(b)$ i $f(b)\ S\ f(a)$. Utilitzant l'antisimètrica de S obtenim que $f(a) = f(b)$. I ara, per la injectivitat de f, podem concloure que $a = b$.

Transitiva de T: Serveix el mateix argument que en l'apartat anterior (si us hi fixeu abans només hem utilitzat la transitiva de S).

(c) En el cas concret on $f(x) = x^2$ i S és la relació d'igualtat, determina la relació T, la classe d'equivalència d'un $a \in \mathbb{R}$ arbitrari, i el conjunt quocient $\mathbb{R}/T$.

- En primer lloc anem a determinar la relació T. És obvi que per tot $a, b \in \mathbb{R}$ tenim la cadena d'equivalències
  $$a\ T\ b \iff f(a)\ S\ f(b) \iff a^2 = b^2 \iff |a| = |b| \iff b = a \text{ o } b = -a.$$
  És a dir, en aquest cas T relaciona un nombre real només amb ell mateix i amb el seu oposat.
- A continuació determinem la classe d'equivalència d'un $a \in \mathbb{R}$ arbitrari. Sigui a un nombre real. Aleshores,
  $$\overline{a} = \{x \in \mathbb{R} : a\ T\ x\} = \{x \in \mathbb{R} : |a| = |x|\} = \{a, -a\}$$
  Observem que totes aquestes classes d'equivalència, excepte la classe d'equivalència del 0 (noteu que $\overline{0} = \{0\}$), tenen exactament 2 elements.
- Per últim trobem el conjunt quocient $\mathbb{R}/T$. Per definició el conjunt quocient d'una relació d'equivalència és el conjunt de les seves classes d'equivalència, és a dir, $\mathbb{R}/T = \{\overline{a} : a \in \mathbb{R}\}$. Per l'apartat anterior sabem que $\overline{a} = \{a, -a\} = \overline{-a}$ per tot $a \in \mathbb{R}$. En conseqüència,[2]
  $$\mathbb{R}/T = \{\overline{a} : a \in \mathbb{R}\} = \{\overline{a} : a \in \mathbb{R} \text{ i } a \geqslant 0\} = \{\{a, -a\} : a \in \mathbb{R} \text{ i } a \geqslant 0\}.$$

[1] Destaquem que la definició de *relació d'ordre* no requereix ser total; en la definició només es demana complir les propietats reflexiva, antisimètrica i transitiva.

[2] Destaquem que no es diu que $\mathbb{R}/T$ sigui igual a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; de fet aquests dos conjunts són clarament diferents (els elements del primer conjunt són classes d'equivalència, mentre que els elements del segon conjunt són nombres reals).