Matrius i vectors (grup de matí)

Curs 2018–2019

1.1 Combinacions lineals

Sigui E un espai vectorial sobre els nombres reals i sigui $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunt de vectors de E. S'anomena *combinació lineal* de $v_1, \ldots, v_n$ qualsevol vector que s'expressi com

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$$

on $a_1, \ldots, a_n$ són nombres reals, que es diuen *coeficients* de la combinació lineal.

Definició 1.1. Direm que els vectors $v_1, \ldots, v_n$ són *linealment independents* si l'única combinació lineal seva que satisfà $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$ és la que té tots els coeficients nuls: $a_i = 0$ per a tot i.

En cas contrari, es diu que els vectors $v_1, \ldots, v_n$ són *linealment dependents*. Qualsevol expressió de la forma $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$ on algun coeficient a_i és diferent de zero s'anomena una *relació de dependència* entre els vectors $v_1, \ldots, v_n$.

Qualsevol subconjunt d'un conjunt de vectors linealment independents és un conjunt de vectors linealment independents. Un únic vector v és linealment independent si i només si $v \neq 0$. Per conveni, el conjunt buit $\emptyset$ es considera un conjunt de vectors linealment independents.

Proposició 1.2. *Donat un conjunt de vectors $\{v_1, \ldots, v_n\}$ amb $n \geq 2$, es compleix que $v_1, \ldots, v_n$ són linealment dependents si i només si algun d'ells és combinació lineal dels altres.*

Demostració. Suposem primer que els vectors $v_1, \ldots, v_n$ són linealment dependents. Sigui $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$ una relació de dependència. Canviant l'ordre, si cal, dels sumands, podem suposar que $a_1 \neq 0$. Aleshores, multiplicant els dos membres per $1/a_1$, obtenim

$$v_1 + (a_2/a_1)v_2 + \cdots + (a_n/a_1)v_n = 0$$

i per tant

$$v_1 = -(a_2/a_1)v_2 - \cdots - (a_n/a_1)v_n,$$

d'on v_1 és combinació lineal de $v_2, \ldots, v_n$.

Recíprocament, suposem que v_1 és combinació lineal de $v_2, \ldots, v_n$. Això vol dir que $v_1 = b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$ per a alguns nombres reals $b_1, \ldots, b_n$, i d'aquí resulta

$$-v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n = 0,$$

que és una relació de dependència, ja que el coeficient de v_1 no és zero. □

Observem que si un conjunt de vectors $\{v_1, \ldots, v_n\}$ conté el vector 0, llavors $v_1, \ldots, v_n$ són linealment dependents. Per demostrar aquesta afirmació, suposem que $v_1 = 0$. Llavors

$$1v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n = 0$$

és una relació de dependència entre $v_1, \ldots, v_n$.

Definició 1.3. Un conjunt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de vectors d'un espai vectorial E és un *conjunt de generadors* de E si tot vector de E és combinació lineal de $v_1, \ldots, v_n$.

Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ és un conjunt de generadors de E, també direm que els vectors $v_1, \ldots, v_n$ *generen* E.

Proposició 1.4. *Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ és un conjunt de generadors de E on v_1 és combinació lineal de $v_2, \ldots, v_n$, llavors $\{v_2, \ldots, v_n\}$ també són generadors de E.*

Demostració. Per demostrar aquest fet, sigui w un vector qualsevol de E. Com que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ és un conjunt de generadors de E, podem escriure

$$w = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

per a alguns nombres reals $a_1, \ldots, a_n$. Com que v_1 és combinació lineal de $v_2, \ldots, v_n$, podem escriure

$$v_1 = b_2v_2 + \cdots + b_nv_n.$$

Aleshores

$$\begin{aligned} w &= a_1(b_2v_2 + \cdots + b_nv_n) + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \\ &= (a_1b_2 + a_2)v_2 + \cdots + (a_1b_n + a_n)v_n \end{aligned}$$

i per tant w és combinació lineal de $v_2, \ldots, v_n$. □

Definició 1.5. Un conjunt ordenat $v_1, \ldots, v_n$ de vectors linealment independents que són generadors de E s'anomena una *base* de E.

Si $v_1, \ldots, v_n$ és una base de E i w és un vector qualsevol de E, llavors, com que $v_1, \ldots, v_n$ generen E, podem escriure

$$w = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$$

per a alguns nombres reals $a_1, \ldots, a_n$. És important observar que aquests nombres reals $a_1, \ldots, a_n$ són *únics*, ja que si

$$w = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$$

llavors

$$0 = (a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n$$

i, com que $v_1, \ldots, v_n$ són linealment independents, resulta que $a_i - b_i = 0$ per a tot i; és a dir, $a_i = b_i$ per a tot i.

Els coeficients $a_1, \ldots, a_n$ s'anomenen *components* de w en la base $v_1, \ldots, v_n$.

Hem imposat que una base sigui un conjunt *ordenat* de vectors per poder dir que les components d'un vector w en una base $v_1, \ldots, v_n$ són un element $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ben definit. Si canviem l'ordre de $v_1, \ldots, v_n$, llavors s'obté una altra base diferent i les components dels vectors també queden permutades.

El conjunt buit és, per conveni, una base de l'espai vectorial $E = \{0\}$.