Solucions comentades

P1) Demostra per contrarecíproc que per tot real x diferent de zero:

"si $x + \dfrac{1}{x} < 2$, aleshores $x \leqslant 0$".

En general una proposició de la forma $p \longrightarrow q$ es pot demostrar provant la proposició equivalent $\neg q \longrightarrow \neg p$. Això és el que es diu mètode de demostració pel contrarecíproc. En aquest cas, tindrem que provar

Per a tot real x diferent de zero, $x > 0$ implica $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$. Vegem-ho:

Sigui $x > 0$ un nombre real. La inequació $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ és equivalent a $x^2 + 1 \geqslant 2x$, cosa que és certa perquè passem d'una a l'altra multiplicant ambdós termes pels mateixos elements positius, $x > 0$ d'esquerra a dreta i $\frac{1}{x} > 0$ de dreta a esquerra. És clar que aquesta inequació és equivalent a $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$. Ens adonem que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Per tant la inequació anterior és equivalent a $(x-1)^2 \geqslant 0$ cosa que és sempre certa per ser el quadrat d'un nombre real. Com que aquesta darrera inequació és certa, per les equivalències, també ho es $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ com volíem demostrar.

P2) Siguin A, B i X conjunts.

(a) Demostra que si $A \subseteq X$ i $B \subseteq X$, aleshores $(X \smallsetminus A) \smallsetminus (X \smallsetminus B) = B \smallsetminus A$.

(b) Investiga si la igualtat anterior es compleix encara que no es compleixi la hipòtesi.

(a) Per demostrar que $(X \smallsetminus A) \smallsetminus (X \smallsetminus B) = B \smallsetminus A$, provarem que $(X \smallsetminus A) \smallsetminus (X \smallsetminus B) \subseteq B \smallsetminus A$ i $B \smallsetminus A \subseteq (X \smallsetminus A) \smallsetminus (X \smallsetminus B)$.

Per demostrar que $(X \smallsetminus A) \smallsetminus (X \smallsetminus B) \subseteq B \smallsetminus A$, considerem un element arbitrari $x \in (X \smallsetminus A) \smallsetminus (X \smallsetminus B)$. Per tant, $x \in X \smallsetminus A$ i $x \notin X \setminus B$. Com que $x \in X \smallsetminus A$, inferim que $x \in X$ i $x \notin A$. I com que $x \notin X \setminus B$, inferim que $x \notin X$ o $x \in B$. Així doncs, tenim que $x \in X \wedge x \notin A \wedge (x \notin X \vee x \in B)$. Ara, com que $x \in X \wedge (x \notin X \vee x \in B)$, deduïm que $x \in B$. Així doncs, tenim que $x \in B$ i $x \notin A$, i per tant $x \in B \setminus A$.

Demostrem ara que $B \smallsetminus A \subseteq (X \smallsetminus A) \smallsetminus (X \smallsetminus B)$. Considerem un element arbitrari $x \in B \setminus A$. Per tant, $x \in B$ i $x \notin A$. Com que $x \in B$ i $B \subseteq X$, inferim que $x \in X$. Ara de $x \in X$ i $x \notin A$, inferim que $x \in X \setminus A$. I com que $x \in B$, deduïm que $x \notin X \setminus B$, ja que $x \notin X \setminus B$ si i només si $(x \notin X \vee x \in B)$. Així doncs, tenim que $x \in X \setminus A$ i $x \notin X \setminus B$, i per tant $x \in (X \smallsetminus A) \smallsetminus (X \smallsetminus B)$.

(b) Si no es compleix la hipòtesi, la igualtat anterior no es compleix necessàriament. Ho demostrem mitjançant el següent contraexemple. Siguin $X = \{0\}, A = \{1\}$ i $B = \{2\}$. Aleshores, tenim que $X \setminus A = \{0\}$ i $X \setminus B = \{0\}$, i per tant $(X \smallsetminus A) \smallsetminus (X \smallsetminus B) = \varnothing$. D'altra banda, tenim que $B \setminus A = \{2\}$. Així doncs, $(X \smallsetminus A) \smallsetminus (X \smallsetminus B) \neq B \setminus A$.

P3) Considera $A = \{z \in \mathbb{Z} : |z| < |x|$, per tot $x \geqslant 3\}$. Determina el conjunt A per extensió. Raona si són certes o falses les següents afirmacions

(a)	$\varnothing \in \mathcal{P}(A)$,	**(d)**	$\{(2, \{2\})\} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$,
(b)	$\{-1\} \subseteq \mathcal{P}(A)$,	**(e)**	$\varnothing \in \mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))$,
(c)	$\{(2, \{2\})\} \in \mathcal{P}(A \times A)$,	**(f)**	$(-2, \varnothing) \in A \times \mathcal{P}(A)$.

Observa que $A = \{z \in \mathbb{Z} : |z| < |x|, \text{ per tot } x \geqslant 3\} = \{z \in \mathbb{Z} : |z| < 3\}$. Per tant, $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$.

(a) $\boxed{\emptyset \in \mathcal{P}(A)}$

La condició és certa, perquè el conjunt buit $\emptyset$ és un subconjunt de qualsevol conjunt.

(b) $\boxed{\{-1\} \subseteq \mathcal{P}(A)}$

Tenim que

$$\{-1\} \subseteq \mathcal{P}(A) \iff -1 \in \mathcal{P}(A) \iff -1 \subseteq A.$$

Ara, com que -1 no és un conjunt, és impossible que $-1 \subseteq A$. Per tant, la condició és falsa.

(c) $\boxed{\{(2, \{2\})\} \in \mathcal{P}(A \times A)}$

Tenim que

$$\{(2, \{2\})\} \in \mathcal{P}(A \times A) \iff \{(2, \{2\})\} \subseteq A \times A \iff (2, \{2\}) \in A \times A \iff 2 \in A \wedge \{2\} \in A.$$

Aleshores, com que $\{2\}$ no és a la llista d'elements d'A, deduïm que la condició és falsa.

(d) $\boxed{\{(2, \{2\})\} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)}$

Tenim que

$$\{(2, \{2\})\} \subseteq \mathcal{P}(A \times A) \iff (2, \{2\}) \in \mathcal{P}(A \times A) \iff (2, \{2\}) \subseteq A \times A.$$

Ara, com que $(2, \{2\})$ no és un conjunt de parells ordenats, és impossible que $(2, \{2\}) \subseteq A \times A$. Per tant, la condició és falsa.

(e) $\boxed{\emptyset \in \mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))}$

Com que $A \times \mathcal{P}(A)$ és un conjunt i el conjunt buit $\emptyset$ és un subconjunt de qualsevol conjunt, tenim que $\emptyset \subseteq A \times \mathcal{P}(A)$, i per tant $\emptyset \in \mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))$. Així doncs, la condició és certa.

(f) $\boxed{(-2, \emptyset) \in A \times \mathcal{P}(A).}$

Clarament,

$$(-2, \emptyset) \in A \times \mathcal{P}(A) \iff -2 \in A \wedge \emptyset \in \mathcal{P}(A).$$

Aleshores, com que -2 es troba en la llista d'elements d'A i el conjunt buit és un subconjunt de qualsevol conjunt, tenim que la condició és certa.

P4) En el conjunt $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definim la relació,

$$(n,m) \equiv (p,q) \iff \text{existeixen } k,k' \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n-p=2k \text{ i } m-q=3k'.$$

(a) Demostra que $\equiv$ és d'equivalència.
(b) Troba les classes d'equivalència $\overline{(1,2)}$, $\overline{(1,-2)}$, $\overline{(-1,2)}$.
(c) Descriu, justificadament, el conjunt quocient i digues quants elements té.

a) Donat un conjunt A, una relació $R \subseteq A \times A$ s'anomena d'equivalència si les següents propietats són certes per a R:

- **R és reflexiva:** $\forall a \in A\,(aRa)$.
- **R és simètrica:** $\forall a,b \in A\,(aRb \longrightarrow bRa)$.
- **R és transitiva:** $\forall a,b,c \in A\,(aRb \wedge bRc \longrightarrow aRc)$

Recordem que fem servir la notació aRb com a abreviatura de $(a,b) \in R$.

Al nostre cas la relació $\equiv$ és una relació sobre el conjunt $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Veiem que efectivament és una relació d'equivalència.

(a) $\equiv$ **és reflexiva:** En efecte, donat $(n,m) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, notem que $(n,m) \equiv (n,m)$ atès que $n-n = 2 \cdot 0$ i $m-m = 3 \cdot 0$.

(b) $\equiv$ **és simètrica:** En efecte, donats $(n,m),(p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ tals que $(n,m) \equiv (p,q)$. Notem que per definició, existeixen $k,k' \in \mathbb{Z}$ tals que $n-p=2k$ i $m-q=3k'$. Això implica que existeixen $\ell,\ell' \in \mathbb{Z}$ tals que $p-n=2\ell$ i $q-m=3\ell'$, simplement considerant $\ell=-k$ i $\ell'=-k'$. Tot plegat, $(p,q) \equiv (n,m)$. Com que $(n,m),(p,q)$ eren arbitraris es conclou que la relació $\equiv$ és simètrica.

(c) $\equiv$ **és transitiva:** En efecte, fixem $(n,m),(p,q),(r,s) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ arbitraris tals que $(n,m) \equiv (p,q)$ i $(p,q) \equiv (r,s)$. Per definició,

$$(n,m) \equiv (p,q) \longleftrightarrow \exists k,k' \in \mathbb{Z}\,(n-p=2k \wedge m-q=3k')$$

$$(p,q) \equiv (r,s) \longleftrightarrow \exists \ell,\ell' \in \mathbb{Z}\,(p-r=2\ell \wedge q-s=3\ell')$$

Sumant ambdues expressions de la dreta tenim que

$$n-r = 2(k+\ell)$$

$$m-s = 3(k'+\ell')$$

Llavors concloem que $(n,m) \equiv (r,s)$. Com que $(n,m),(p,q)$ i (r,s) eren arbitraris es té que $\equiv$ és transitiva.

b) Donada una relació d'equivalència $R \subseteq A$ i $a \in A$, definim $\bar{a}$ la classe de a com el conjunt

$$\bar{a} = \{b \in A : aRb\}.$$

Passem ara a calcular les respectives classes d'equivalència.

$$\overline{(1,2)} = \{(n,m) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : (1,2) \equiv (n,m)\} =$$
$$\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : \exists k,k' \in \mathbb{Z}\,(n-1=2k,\, m-2=3k')\} =$$
$$\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : \exists k,k' \in \mathbb{Z}\,(n=2k+1,\, m=3k'+2)\}$$

$$\overline{(1,-2)} = \{(n,m) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : (1,-2) \equiv (n,m)\} =$$
$$\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : \exists k, k' \in \mathbb{Z}\ (n-1 = 2k,\ m+2 = 3k')\} =$$
$$\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : \exists k, k' \in \mathbb{Z}\ (n = 2k+1,\ m = 3k'-2)\}$$

Finalment, notem que $1-(-1) = 2 \cdot 1$ i que $2-2 = 3 \cdot 0$. Llavors $(1,2) \equiv (-1,2)$, i per tant $\overline{(1,2)} = \overline{(-1,2)}$.

c) Donada $R \subseteq A \times A$ una relació d'equivalència, definim el conjunt quocient de A per R, com el conjunt

$$A/R = \{\bar{a} : a \in A\}.$$

A aquest respecte, sabem que qualsevol bona representació del conjunt quocient ens dóna una partició sobre el conjunt A. Seguint aquesta idea passem a raonar quina seria una bona representació del conjunt quocient.

Donat $(n,m) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ anem a veure quines condicions determinen a una classe $\overline{(p,q)}$ perquè $(n,m) \in \overline{(p,q)}$. Sabem que qualsevol número enter és senar o parell (mòdul signe) i per tant, $n = 2k$ o be $n = 2k+1$, per a cert $k \in \mathbb{Z}$. Del mateix mode, tot nombre enter m pot ser escrit de la forma $m = 3k$, $m = 3k+1$ o bé $m = 3k+2$, per a cert $k \in \mathbb{Z}$. Tot plegat, tenim la següent casuística perquè $(n,m) \equiv (p,q)$:

- **n=2k**: En aquest cas, si p és qualsevol nombre parell tindrem que $n - p = 2k'$ per a cert $k' \in \mathbb{Z}$.
  (a) **m=3k**: En aquest cas, si q és qualsevol múltiple de 3 tindrem que $n - p = 3k'$ per a cert $k' \in \mathbb{Z}$. Llavors, $(n,m) \in \overline{(0,3)}$
  (b) **m=3k+1**: En aquest cas, si $q = 3\ell + 1$ per a qualsevol $\ell \in \mathbb{Z}$ tindrem que $n - p = 3k'$ per a cert $k' \in \mathbb{Z}$. Llavors, $(n,m) \in \overline{(0,1)}$
  (c) **m=3k+2**: En aquest cas, si $q = 3\ell + 2$ per a qualsevol $\ell \in \mathbb{Z}$ tindrem que $n - p = 3k'$ per a cert $k' \in \mathbb{Z}$. Llavors, $(n,m) \in \overline{(0,2)}$
- **n=2k+1**: En aquest cas, si p és qualsevol nombre senar tindrem que $n - p = 2k'$ per a cert $k' \in \mathbb{Z}$.
  (a) **m=3k**: En aquest cas, si q és qualsevol múltiple de 3 tindrem que $n - p = 3k'$ per a cert $k' \in \mathbb{Z}$. Llavors, $(n,m) \in \overline{(1,3)}$
  (b) **m=3k+1**: En aquest cas, si $q = 3\ell + 1$ per a qualsevol $\ell \in \mathbb{Z}$ tindrem que $n - p = 3k'$ per a cert $k' \in \mathbb{Z}$. Llavors, $(n,m) \in \overline{(1,1)}$
  (c) **m=3k+2**: En aquest cas, si $q = 3\ell + 2$ per a qualsevol $\ell \in \mathbb{Z}$ tindrem que $n - p = 3k'$ per a cert $k' \in \mathbb{Z}$. Llavors, $(n,m) \in \overline{(1,2)}$

Tot plegat tenim que una bona representació del conjunt quocient serà

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \equiv = \{\overline{(0,1)}, \overline{(0,2)}, \overline{(0,3)}, \overline{(1,1)}, \overline{(1,2)}, \overline{(1,3)}\}$$

que té 6 elements.