Solucions comentades

1. Considera els següents conjunts:

$$A = \{a, b, \{c\}, d\},\ \ B = \{a, \{b\}, c, d\},\ \ C = \{\varnothing, a, b, c\}$$

(a) Troba $(A \setminus B) \times C$

(b) Troba $A \setminus \mathcal{P}(B)$

Digues raonadament si són certes o falses les següents afirmacions:

(c) $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$

(d) $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(C)$

(e) $\{(a,c),(a,b)\} \in \mathcal{P}((A \times B) \cap (B \times A))$

(f) $\{(a,c),(a,b)\} \in \mathcal{P}((A \times B) \cup (B \times A))$

(g) $\{\{(\{c\},\varnothing),(a,b)\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times C))$

(a) Per calcular $(A \setminus B) \times C$ primer tobarem $A \setminus B$ que no és altra cosa que $\{\ x \in A\ :\ x \notin B\ \}$. Mirant en les definicions per extensió dels conjunts A i B veiem que $a \in A$ i $a \in B$; $b \in A$ i $b \notin B$; $\{c\} \in A$ i $\{c\} \notin B$; $d \in A$ i $d \in B$ tenim que $A \setminus B = \{\ b, \{c\}\ \}$. Ara recordem la definició de producte cartesià,
$(A \setminus B) \times C = \{\ (x,y)\ :\ x \in (A \setminus B)\ y \in C\ \}$.
Per tant $(A \setminus B) \times C = \{\ (b,\varnothing),(b,a),(b,b),(b,c),(\{c\},\varnothing),(\{c\},a),(\{c\},b),(\{c\},c)\ \}$.

(b) Partim de nou de la definició $A \setminus \mathcal{P}(B) = \{\ x \in A\ :\ x \notin \mathcal{P}(B)\ \}$, a més recordem que $\mathcal{P}(B) = \{\ D\ : D \subseteq B\ \}$. Ara raonem i no farà falta que calculem tot $\mathcal{P}(B)$. Observem que $\{c\} \in A$ i $\{c\} \subseteq B$ ja que tots el elements que pertanyen a $\{c\}$, és a dir c pertany també a B. Els altres elements d' A no són subconjunts de B, ja que no són conjunts formats per elements de B. Així $A \setminus \mathcal{P}(B) = \{a, b, d\}$.

(c) $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$ si i només si $\{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(C)$ per la definició de conjunt de les parts. $\{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(C)$ sii $\varnothing \in \mathcal{P}(C)$ per la definició de subconjunt. I això és el mateix que dir que $\varnothing \subseteq C$. Aquesta última expressió és certa, ja que per tot conjunt X, $\varnothing \subseteq X$, per tant la primera expressió és també certa.

(d) $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(C)$ si i només si $\{\varnothing\} \subseteq C$ per la definició de conjunt de les parts. $\{\varnothing\} \subseteq C$ sii $\varnothing \in C$ per la definició de subconjunt. Ara bé, aquesta expressió és certa, ja que $\varnothing$ apareix explícitament a la llista que defineix C per extensió.

(e) $\{(a,c),(a,b)\} \in \mathcal{P}((A \times B) \cap (B \times A))$ sii $\{(a,c),(a,b)\} \subseteq (A \times B) \cap (B \times A)$ per definició de conjunt de les parts. $\{(a,c),(a,b)\} \subseteq (A \times B) \cap (B \times A)$ sii $(a,c),(a,b) \in (A \times B) \cap (B \times A)$ per la definició de subconjunt. Però això és el mateix que dir $(a,c) \in (A \times B) \cap (B \times A)$ i $(a,b) \in (A \times B) \cap (B \times A)$. Aquesta expressió és equivalent a $(a,c) \in (A \times B)$ i $(a,c) \in (B \times A)$ i $(a,b) \in (A \times B)$ i $(a,b) \in (B \times A)$ per la definició de intersecció de conjunts. Ara bé, aquesta expressió és falsa ja que $(a,b) \notin A \times B$ per la definició de producte cartesià, perquè $b \notin B$ ja que no el trobem a la llista de la definició per extensió. (Nota: $b \neq \{b\}$). Com aquesta expressió és falsa, també ho és la primera.

(f) $\{(a,c),(a,b)\} \in \mathcal{P}((A \times B) \cup (B \times A))$ sii $\{(a,c),(a,b)\} \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$ per definició de conjunt de les parts. $\{(a,c),(a,b)\} \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$ sii $(a,c),(a,b) \in (A \times B) \cup (B \times A)$ per la definició de subconjunt. Però això es el mateix que dir $(a,c) \in (A \times B) \cup (B \times A)$ i $(a,b) \in (A \times B) \cup (B \times A)$. Aquesta expressió és equivalent a $\Big(\ (a,c) \in (A \times B)$ o $(a,c) \in (B \times A)\ \Big)$ i $\Big(\ (a,b) \in (A \times B)$ o $(a,b) \in (B \times A)\ \Big)$ per la definició de unió de conjunts. Ara observem que aquesta expressió és certa ja que ambdues disjuncions son certes: $(a,c) \in A \times B$ per la definició de producte cartesià, perquè $a \in A$ i $c \in B$ -els trobem a la llista de la definició per extensió- i $(a,b) \in B \times A$ per la definició de producte cartesià, perquè $a \in B$ i $b \in A$. Per tant la primera expressió és també certa.

(g) $\{\{(c,\{\varnothing\}),(a,b)\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times C))$ sii $\{\{(\{c\},\varnothing),(a,b)\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \times C)$ per definició de conjunt de les parts.
$\{\{(\{c\},\varnothing),(a,b)\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \times C)$ sii $\{(\{c\},\varnothing),(a,b)\} \in \mathcal{P}(A \times C)$ per definició de subconjunt.
$\{(\{c\},\varnothing),(a,b)\} \in \mathcal{P}(A \times C)$ sii $\{(\{c\},\varnothing),(a,b)\} \subseteq A \times C$ altra vegada per definició de les parts d'un conjunt.

$\{(\{c\},\emptyset),(a,b)\} \subseteq A \times C$ sii $(\{c\},\emptyset),(a,b) \in A \times C$ és a dir $(\{c\},\emptyset) \in A \times C$ i $(a,b) \in A \times C$. Així veiem que és certa, perquè els dos parells ordenats pertanyen a $A \times C$ ja que $\{c\}, a \in A$ i $\emptyset, b \in C$. Com aquesta expressió és certa i equivalent a la primera, tenim que aquella també ho és.

2. En el conjunt dels nombres reals $\mathbb{R}$ definim les relacions E i G de la forma següent:

Per tot $x, y \in \mathbb{R}$, xEy si i només si $y - x$ és racional.

Per tot $x, y \in \mathbb{R}$, xGy si i només si $y - x$ és enter parell.

Es demana

(a) Demostra $G \subseteq E$.

Per demostrar $G \subseteq E$, hem de veure que per tot $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si $(a,b) \in G$, aleshores $(a,b) \in E$.
Sigui $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ arbitrari. Si $(a,b) \in G$, aleshores $b - a$ és un enter parell, en particular $b - a \in \mathbb{Z}$. Com que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, aleshores $b - a \in \mathbb{Q}$ i per tant $(a,b) \in E$ com volíem demostrar.

(b) Demostra que G és relació d'equivalència.

Recordem que una relació és d'equivalència si i només si és reflexiva, transitiva i simètrica.

Reflexiva Sigui $a \in \mathbb{R}$ arbitrari. Com que $a - a = 0 = 2 \cdot 0$ i $0 \in \mathbb{Z}$ tenim que $a - a$ és enter parell i per tant aGa. Com que a és un real arbitrari, hem demostrat que per tot $x \in \mathbb{R}$, xGx, és a dir que G és reflexiva.

Transitiva Siguin $a, b, c \in \mathbb{R}$ tals que aGb i bGc. Com que aGb, aleshores hi ha $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b - a = 2k$, anàlogament de bGc obtenim que hi ha $s \in \mathbb{Z}$ tal que $c - b = 2s$. Observem doncs que $c - a = c - b + b - d = 2s + 2k = 2(s + k)$ i com que $s + k \in \mathbb{Z}$ ja que $s, k \in \mathbb{Z}$, aleshores $c - a$ és un enter parell i per tant aGc. Com que a, b, c són reals arbitraris, hem demostrat que per tot $x, y, z \in \mathbb{R}$, si xGy i yGz, aleshores xGz; és a dir que G és transitiva.

Simètrica Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ tals que aGb. Com que aGb, aleshores hi ha $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b - a = 2k$, Observem doncs que $a - b = -(b - a) = -2k = 2(-k)$ i com que $-k \in \mathbb{Z}$ ja que $k \in \mathbb{Z}$, aleshores $a - b$ és un enter parell i per tant bGa. Com que a, b són reals arbitraris, hem demostrat que per tot $x, y \in \mathbb{R}$, si xGy aleshores yGx; és a dir que G és simètrica.

(c) Calcula les classes d'equivalència respecte G: $\overline{-1}$, $\overline{\frac{1}{3}}$, $\overline{1}$ i $\overline{\pi}$.

$\overline{-1} = \{x \in \mathbb{R} : xG-1\} = \{x \in \mathbb{R} : -1Gx\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}(x - (-1) = 2k)\} =$
$\{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 2k - 1)\} = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ és senar}\}$.

$\overline{\frac{1}{3}} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3}Gx\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}(x - \frac{1}{3} = 2k)\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 2k + \frac{1}{3})\} = \{2k + \frac{1}{3} : k \in \mathbb{Z}\}$.

$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ és senar}\} = \overline{-1}$ ja que $-1G1$ perquè $1 - (-1) = 2 = 2 \cdot 1$ i $1 \in \mathbb{Z}$.

$\overline{\pi} = \{x \in \mathbb{R} : \pi Gx\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}(x - \pi = 2k)\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 2k + \pi)\} = \{2k + \pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) Calcula la classe d'equivalència respecte a G d'un element arbitrari $a \in \mathbb{R}$.

$\overline{a} = \{x \in \mathbb{R} : aGx\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}(x - a = 2k)\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}(x = 2k + a)\} = \{2k + a : k \in \mathbb{Z}\}$.

(e) Dóna la partició associada a G, és a dir, el conjunt quocient $\mathbb{R}/G$.

$\mathbb{R}/G =_{\text{def}} \{\overline{a} \subseteq \mathbb{R} : a \in \mathbb{R}\} = \{\overline{a} \subseteq \mathbb{R} : a \in [0,2)\}$.
Per demostrar la igualtat cal demostrar les dues inclusions.
Com que $[0,2) \subseteq \mathbb{R}$, trivialment $\{\overline{a} \subseteq \mathbb{R} : a \in [0,2)\} \subseteq \{\overline{a} \subseteq \mathbb{R} : a \in \mathbb{R}\}$.

Per veure l'altra inclusió hem de veure que per tot $b \in \mathbb{R}$, $\bar{b} \in \{\bar{a} \subseteq \mathbb{R} : a \in [0,2)\}$.
Sigui $b \in \mathbb{R}$, denotem per $[b]$ la part entera d'b, és a dir $[b] = \max\{n \in \mathbb{Z} n \leqslant b\}$. Observem que $0 \leqslant b - [b] < 1$.
Si $[b]$ és enter parell aleshores $b - (b - [b]) = [b]$ és un enter parell i per tant $\bar{b} = \overline{b - [b]}$ i com que $b - [b] \in [0,1) \subseteq [0,2)$, $\bar{b} \in \{\bar{a} \subseteq \mathbb{R} : a \in [0,2)\}$.
Si $[b]$ és un enter senar aleshores $b - (b - [b] + 1) = [b] - 1$ és un enter parell i per tant $\bar{b} = \overline{b - [b] + 1}$ i com que $b - [b] + 1 \in [1,2) \subseteq [0,2)$, $\bar{b} \in \{\bar{a} \subseteq \mathbb{R} : a \in [0,2)\}$.

Observem també que $\{\bar{a} \subseteq \mathbb{R} : a \in [0,2)\}$ és una bona representació de $\mathbb{R}/G$, és a dir que per qualssevol $x, y \in [0,2)$, $\bar{x} = \bar{y}$ implica $x = y$.
Siguin $a, b \in [0,2)$ tals que $\bar{a} = \bar{b}$. Com que $a, b \in [0,2)$, aleshores $|a - b| < 2$. Si suposem que $\bar{a} = \bar{b}$, aleshores $b - a$ i $a - b$ són enters parells que és equivalent a dir que $|a - b|$ és natural parell. Ara bé si $|a - b| < 2$ i $|a - b|$ és natural parell, aleshores $|a - b| = 0$ i per tant $a = b$.

3. Examina les següents relacions entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$:

(a) $S_1 = \Big\{ \big((1,2), \frac{1}{2}\big), \big((0,5), 0\big), \big((10^9, 10^{10}), 0.1\big), \big((2,4), \frac{2}{4}\big), \big((1,0), 1\big), \big((2,20), \frac{1}{10}\big),$
$\big((3,7), 3\big), \big((7,3), 7\big) \Big\}$.

(b) $S_2 = \big\{ \big((n,m), \frac{n}{m}\big) : n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \big\}$.

(c) $S_3 = \big\{ \big((n,m), n+m\big) : n, m \in \mathbb{N} \big\}$.

Calcula el seu domini i la seva imatge. Digues quines són funcions. De les que ho siguin digues si són injectives i si són exhaustives.

(a) $\mathrm{dom}(S_1) = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :$ existeix $z \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ tal que$((x,y),z) \in S_1\} = \{(1,2), (0,5), (10^9, 10^{10}), (2,4)$, (1,0), $(2,20), (3,7), (7,3)\}$,

$\mathrm{rec}(S_1) = \{z \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} :$ existeix $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que$((x,y),z) \in S_1\} = \{0.5, 0, 0.1, 1, 3, 7\}$.

S_1 és funció, doncs cada element del domini de $S1$ és relaciona amb un únic element del recorregut de $S1$.

S_1 no és injectiva, perquè hi ha elements diferents del domini de S_1 que tenen la mateixa imatge. Per exemple: $(1,2) \neq (2,4)$ i $((1,2), 0.5)$ i $((2,4), 0.5)$ són elements de S_1.

S_1 no és exhaustiva, perquè el recorregut de P_1 és un conjunt finit i el conjunt final $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ és infinit.

(b) $\mathrm{dom}(S_2) = \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$,

$\mathrm{rec}(S_2) = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$.

S_2 és funció, perquè per cada parell $(n,m) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ el quocient n/m està unívocament determinat.

S_2 no és injectiva, perquè per tot n, m, k nombres naturals amb $n, m, k > 1$, els parells (n,m)i $(n \cdot k, m \cdot k)$ són diferents i tenen la mateixa imatge.

S_2 és exhaustiva, perquè $\mathrm{rec}(S_2) = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$.

(c) $\mathrm{dom}(S_3) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$\mathrm{rec}(S_3) = \mathbb{N}$.

S_3 és funció, perquè per cada parell $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la suma $n + m$ està unívocament determinada.

S_3 no és injectiva, perquè per tot $n, m \in \mathbb{N}$ tals que $n \neq m$, els parells (n,m) i (m,n) són diferents i tenen la mateixa imatge.

S_3 no és exhaustiva, perquè $\mathrm{rec}(S_3) = \mathbb{N}$ està estrictament contingut en el conjunt final $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$.