Parells ordenats, productes cartesians i relacions

1 Parells ordenats

Definició 1.1 (Parell ordenat)**.** (a, b) és el parell ordenat de a i b. Compleix la propietat característica

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si i només si} \quad a = c \text{ i } b = d$$

En teoria de conjunts més avançada es defineix el parell ordenat com a

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

A partir de la propietat característica veiem que $(a, b) = (b, a)$ només quan $a = b$. És a dir, l'ordre és important.

Els parells ordenats es fan servir per relacions i productes cartesians.

1.0.1 Observacions

Té sentit plantejar-se si un element forma part d'un conjunt, però no té sentit (no es fa servir) plantejar-se si un element forma part d'un parell ordenat, $a \in (a, b)$.

2 Producte cartesià

Definició 2.1 (Producte cartesià)**.** El producte cartesià de dos conjunts, A i B és el conjunt de tots els parells ordenats amb el primer element a A i el segon element en B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ i } b \in B\}$$

$$A \times B = \{x \mid \exists a \in A \text{ i } b \in B \text{ tals que } x = (a, b)\}$$

Les dues definicions són equivalents

Exemple 2.0.1. Sigui $A = \{0, 1\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$. Llavors

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$$

2.1 Propietats del producte cartesià

- $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$. (No hi ha cap parell ordenat amb component en $\varnothing$).
- Si A té n elements i B té m elements, llavors $A \times B$ té $n \cdot m$ elements.
- Propietats distributibes (Es compleixen pels dos costats):

  - $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
  - $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
  - $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

- $A \times B = B \times A \leftrightarrow A = B \text{ o } A = \varnothing \text{ o } B = \varnothing$. (No és commutativa quasi mai).
- $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ (No és associatiu).

2.2 Generalització dels parells ordenats

Definició 2.2 (Terna)**.** Una terna és una generalització dels parells ordenats amb tres elements.

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

Definició 2.3 (n-tupla)**.** Una n-tupla és la generalització per n elements.

$$(a_1, \ldots, a_{n+1}) = ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})$$

Definició 2.4 (Producte cartesià iterat)**.** Per qualsevol conjunt A.

$$\begin{cases} A^1 = A \\ A^{n+1} = A^n \times A \end{cases}$$

A^n és el conjunt de totes les n-tuples que es poden formar amb els elements de A

Exemple 2.2.1. Per $n \geq 2$,

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

Exercici 2.2.1. Demostrar $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Demostració. ($\subseteq$) Sigui $(a, b) \in A \times (B \setminus C)$. Llavors $a \in A$ i $b \in (B \setminus C)$. Si $b \in B \setminus C$, llavors $b \in B$ i $b \notin C$. Per tant, $(a, b) \in (A \times B)$ i $(a, b) \notin (A \times C)$ ja que $b \notin C$. Per tant $(a, b) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$.
($\supseteq$). Sigui $(a, b) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$. Llavors $a \in A$ i $b \in B$ però $b \notin C$. Per tant $b \in B \setminus C$. Per tant, $(a, b) \in A \times (B \setminus C$. □

3 Relacions

Definició 3.1 (Relació)**.** Hi ha tres definicions que s'utilitzen:

- Una relació és un conjunt qualsevol de parells ordenats.
- Una relació entre A i B és un conjunt de parells ordenats amb la primera component en A i la segona component en B.
- Una relació en A és un conjunt de parells ordenats en que les components són elements de A.

Observació 3.1. R és una relació entre A i B si $R \subseteq A \times B$.

Observació 3.2. R és una relació en A si $R \subseteq A \times A$.

Exemple 3.0.1. $\varnothing$ és una relació entre A i B ja que $\varnothing \subseteq A \times B$. (Cas mínim)

Exemple 3.0.2. $A \times B$ és una relació entre A i B. (Cas màxim).

Exemple 3.0.3 (Relació d'identitat en A)**.** És la relació d'igualtat en A.

$$\Delta_A = I_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Exemple 3.0.4 (Relació entre A i $\mathcal{P}(A)$)**.**

$$R = \{(a, X) \mid a \in A \wedge X \in \mathcal{P}(A) \wedge a \in X\}$$

Exemple 3.0.5 (Relació d'inclusió en $\mathcal{P}(A)$)**.**

$$R = \{(x, y) \mid x \in \mathcal{P}(A) \wedge y \in \mathcal{P}(A) \wedge x \subseteq y\}$$

Exemple 3.0.6 (Relació d'ordre de $\mathbb{N}$)**.**

$$R = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}(n < m)\}$$

Exemple 3.0.7 (Relació de divisibilitat en $\mathbb{Z}$)**.**

$$R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\ (a|b)\}$$

Definició 3.2 (Domini d'una relació)**.** El domini d'una relació, **dom**(R), és el conjunt format pels primers components de R.

Definició 3.3 (Recorregut d'una relació)**.** El recorregut d'una relació, **rec**(R), és el conjunt format pels segons components de R.

Observació 3.3. Si R és una relació entre A i B, **dom**$(R) \subseteq A$ i **rec**$(R) \subseteq B$.

Observació 3.4. Si R és una relació en A, **dom**$(R) \subseteq A$ i **rec**$(R) \subseteq B$.

Notació 3.1. $xRy \leftrightarrow (x, y) \in R$.

3.1 Inversió i composició de relacions

Definició 3.4 (Inversa de R)**.** . La relació inversa de R, R^{-1} es construeix girant els parells ordenats.

Definició 3.5 (Composició de relacions)**.** La composició de R i S, $R \circ S$ és

$$R \circ S = \{(a, b) \mid \exists c \text{ tal que } (a, c) \in R \text{ i } (c, b) \in S\}$$