Introducció al Càlcul Diferencial **Matemàtiques**

Examen de reavaluació. Semestre de Tardor 2018-2019

JUSTIFIQUEU DETALLADAMENT LES VOSTRES RESPOSTES

1. (a) Doneu les definicions següents, éssent a un nombre real:
   (a.1) Successió de Cauchy,
   (a,2) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$,
   (a.3) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = a$,
   (a.4) $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.
   (b) Demostreu que si $\lim_{x\to a} f(x) = l_f \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x\to a} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$, aleshores
   $$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = l_f\, l_g.$$

2. Donat $a > 0$, definim recursivament una successió $(x_n)_{n\geq 1}$ com $x_1 = \sqrt{a}$ i $x_{n+1} = \sqrt{a x_n}$, per $n \geq 1$.
   (a) Estudieu-ne la monotonia en funció del paràmetre a.
   (b) Demostreu que és una successió acotada.
   (c) Demostreu que és una successió convergent i calculeu-ne el límit.

3. Sigui f la funció definida a $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ per
   $$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}\ \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0, \\ (x-a)\cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & \text{si } x \in (0,1), \\ \frac{1}{\pi}\frac{\sin(bx)}{(x-1)}, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$
   (a) Determineu, si existeixen, els valors $a, b \in \mathbb{R}$ que permeten definir $f(0)$ i $f(1)$ de manera que f sigui contínua a tot $\mathbb{R}$.
   (b) Determineu, si existeixen, els valors $a, b \in \mathbb{R}$ pels quals f és derivable als punts $x = 0$ i $x = 1$.

4. Calculeu, per als diferents valors de $n, m \in \mathbb{N}$,
   $$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^n}{\left((1+x)^{\frac{3}{2}} - 1 - \frac{3x}{2}\right)^m}.$$

TOTS ELS EXERCICIS VALEN EL MATEIX

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT

POSEU EL VOSTRE NOM I COGNOM EN CADA FULL EN MAJÚSCULES