

1. (a) [15 punts] Trobeu tots els nombres $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ que satisfan la desigualtat

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{4 - x^2} - 1 \geq 0.$$

- (b) [5 punts] Sigui A el conjunt de nombres irracionals que compleixen la desigualtat anterior. És A acotat superiorment? En cas que ho sigui, trobeu el seu suprem i dieu si és o no un màxim del conjunt.

2. (a) [12 punts] Definiu el concepte de successió convergent de nombres reals. Definiu també, de manera rigorosa, què vol dir que una successió $\{a_n\}$ tendeixi a $-\infty$.

- (b) [14 punts] Calculeu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{3n^3 + 1} + \frac{n^2 + 2}{3n^3 + 2} + \cdots + \frac{n^2 + n}{3n^3 + n} \right).$$

- (c) [14 punts] Demostreu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n^2} = 1.$$

3. (a) [12 punts] Definiu el concepte de funció contínua en un punt x_0 . Enuncieu el teorema de Weierstrass i el teorema de Bolzano.

- (b) [16 punts] Sigui $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln(2x - x^2)}{x - 1} & \text{si } x \notin \{0, 1, 2\} \\ 0 & \text{si } x \in \{0, 1, 2\}. \end{cases}$$

En quins punts és f contínua?

- (c) [12 punts] Sigui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua de manera que $f(x) \neq x^2$ per a tot $x \in [a, b]$. Demostreu que existeixen dos nombres reals $m, M > 0$ tals que, per a tot $x \in [a, b]$, es compleix $m < (f(x) - x^2)^2 < M$.

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT
JUSTIFIQUEU DETALLADAMENT LES RESPOSTES
POSEU EL VOSTRE NOM I COGNOM EN CADA FULL