4.1 Trobeu sistemes d'equacions dels subespais de $\mathbb{R}^4$

$$F = < (1,2,3,4), (1,3,1,2) >$$
$$H = < (1,2,3,4), (1,2,1,2) > .$$

4.2 Representats els vectors d'un espai vectorial E per les seves components relatives a una base e_1, e_2, e_3, e_4,

(i) Trobeu valors de a i b per tal que el subespai $F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, generat per

$$v_1 = (1,2,3,4),\ v_2 = (1,2,1,1),\ v_3 = (a,b,2,3)$$

tingui dimensió 2.

(ii) Escolliu una base de F i amplieu-la a una base $\mathfrak{B}$ de E.

(iii) Determineu les components dels vectors e_1, e_2, e_3, e_4 en la base $\mathfrak{B}$ de l'apartat anterior.

4.3 Determineu la dimensió, una base i equacions dels subespais generats per les següents famílies de vectors de $\mathbb{R}^n$:

$$A = \{(1,3,2),\ (1,0,-1)\ (2,-3,5)\} \subset \mathbb{R}^3,$$
$$B = \{(0,2,-1),(4,3,-2),(4,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^3,$$
$$C = \{(1,2,1,3),(2,1,4,3),(1,3,2,1)\} \subset \mathbb{R}^4,$$

4.4 Doneu una base del subespai de $\mathbb{R}^4$ que té equacions

$$x - 2y + z - t = 0$$
$$2x - 5y - z - t = 0.$$

El mateix pel subespai d'equacions

$$x - 2y + z - t = 0$$
$$2x - 4y - z - t = 0$$

.

4.5 Calculeu la dimensió del subespai de $\mathbb{R}^n$ generat pels vectors $u_1 = (1,1,0,\dots,0)$, $u_2 = (0,1,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $u_{n-1} = (0,0,\dots,1,1)$, $u_n = (1,0,\dots,0,1)$.

4.6 Fixada una base $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ d'un espai vectorial E

(i) Demostreu que $G = \{(x,y,z,t)_{\mathfrak{B}} \in E \mid x+y = z+t = 0\}$ és un subespai vectorial de E; calculeu-ne la dimensió i una base.

(ii) Sigui F el subespai vectorial de E generat per $v_1 = (1,1,0,0)_{\mathfrak{B}}$, $v_2 = (1,0,1,0)_{\mathfrak{B}}$ i $v_3 = (1,0,0,1)_{\mathfrak{B}}$; trobeu-ne equacions i una base.

4.7 Calculeu les dimensions i bases de $G + F$ i de $G \cap F$, on F i G són els subespais de l'exercici 4.6.

Scanned by CamScanner

4.8 Considerem el subespai F de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $(1,2,3,4)$, $(2,2,2,6)$, $(0,2,4,4)$ i el subespai G generat per $(1,0,-1,2)$, $(2,3,0,1)$. Determineu les dimensions, una base i equacions dels subespais F, G, $F+G$, $F\cap G$.

4.9 Considereu els següents subespais de $\mathbb{R}^4$:

$$F := \langle (1,0,1,0),\ (0,2,1,0) \rangle, \quad G = \{(x,y,z,t)\,;\, x-z=y=0\}.$$

Trobeu dimensions, bases i equacions implícites dels subespais F, G, $F\cap G$ i $F+G$.

4.10 Considerem el següents vectors de $\mathbb{R}^6$:

$$\begin{array}{lll} u_1 := (1,1,0,0,0,0), & u_2 := (1,0,1,0,0,0), & u_3 := (1,0,0,1,0,0), \\ v_1 := (0,1,1,0,0,0), & v_2 := (0,1,0,1,0,0), & v_3 := (0,1,0,0,1,0), \\ w_1 := (0,0,1,1,0,0), & w_2 := (0,0,1,0,1,0), & w_3 := (0,0,1,0,0,1). \end{array}$$

Siguin

$$F := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \quad G := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \quad H := \langle w_1, w_2, w_3 \rangle.$$

Trobeu bases de $(F\cap G)+H$, de $(F\cap H)+G$ i de $(H\cap G)+F$.

4.11 Considerem a $\mathbb{R}^4$ els subespais vectorials donats per

$$\begin{aligned} H &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y+z=0,\ y+z+t=0,\ x+2z+t=0\}, \\ F_a &= \langle (1,1,2,1),\ (0,2,0,1),\ (-1,3,a,1) \rangle. \end{aligned}$$

(i) Trobeu bases de cada un d'ells, segons els valors del paràmetre a.

(ii) Trobeu equacions per F_a, segons els valors de a.

(iii) Trobeu els subespais $H\cap F_a$ i $H+F_a$ en cada cas. Doneu-los per equacions implícites i determineu bases de cada un d'ells.

4.12 En un espai vectorial de dimensió quatre, representats els seus vectors per les seves components en una base prèviament fixada, es consideren els subespais:

$$\begin{aligned} F &=< (1,-3,2,4),(2,0,1,2) > \\ G &=< (3,1,1,2),(1,-1,1,2),(1,3,-1,2) > \\ H &=< (2,0,1,2),(1,-1,1,2),(1,3,0,2) > \end{aligned}$$

i el subespai T d'equacions

$$\begin{aligned} 2x-2y-2z-t &= 0 \\ x-y-t &= 0. \end{aligned}$$

Determineu quines inclusions hi ha entre ells.

4.13 Trobeu quines condicions ha de complir un vector $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ per tal que

$$\mathbb{R}^3 = \langle (1,2,0),\ (1,0,-1) \rangle \oplus \langle (a,b,c) \rangle.$$

Scanned by CamScanner

4.1. $\mathbb{R}^4$ → trobar els sistemes d'equacions

$F = \langle (1,2,3,4), (1,3,1,2) \rangle$ dim $\mathbb{R}^4 \to 2$
$H = \langle (1,2,3,4), (1,2,1,2) \rangle$ hay 2 vectores } debemos encontrar 2 ecuaciones

$(1,2,3,4)$, $(1,3,1,2)$ no son proporcionales, son independientes y forman base
$(1,2,3,4)$, $(1,2,1,2)$ no son proporcionales, son independientes y forman base

· Ecuaciones de F

metodo 1

$a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 t = 0$ para que los vectores de F sean solución, los coeficientes de la base de F son solución

$$\begin{cases} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 + a_4 \cdot 4 = 0 \\ a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 3 + a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 2 = 0 \end{cases}$$
$\downarrow$
$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0 \\ a_1 + 3a_2 + a_3 + 2a_4 = 0 \end{cases}$$
$\downarrow$
$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + \boxed{3a_3 + 4a_4} = 0 \\ a_2 \boxed{- 2a_3 - 2a_4} = 0 \end{cases}$$

a_3 i a_4 son las variables libres

si $a_4 = 0$; $a_3 = 1$
$(-7, 2, \boxed{1, 0})$

tanto para que las ecuaciones sean independientes

si $a_4 = 1$; $a_3 = 0$
$(-8, 2, \boxed{0, 1})$

ecuaciones de F
$$\begin{cases} -7x + 2y + z = 0 \\ -8x + 2y + t = 0 \end{cases}$$
dim 2 dim 2

Todos los vectores de F son solución del sistema.

metodo 2

vector que pertenece al subespacio → combinación lineal de la base

buscar un tercer vector que de un sistema de vectores dep

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ x & y & z & t \end{matrix} \xrightarrow{(-x)} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & y-2x & z-3x & t-4x \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & z-3x+2(y-2x) & t-4x+2(y-2x) \end{matrix}$$
$(-y+2x)$

$\boxed{z-3x+2(y-2x) = 0 \qquad t-4x+2(y-2x) = 0}$ → ecuaciones del subespacio

ecuaciones de F =
$$\begin{cases} -7x + 2y + z = 0 \\ -8x + 2y + t = 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

• Equacions de H $\quad H = \langle (1,2,3,4),(1,2,1,2) \rangle$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ x & y & z & t \end{matrix} \xrightarrow{(-x)} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & \underset{0}{y-2x} & z-3x & t-4x \end{matrix} \xrightarrow{\left(\frac{z-3x}{2}\right)} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2z-3x}{2}+t-4x \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -z-x+t \end{matrix} = 0$$

$$H = \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -x - z + t = 0 \end{cases}$$

4.4. Base del subespai definit per $\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 2x - 5y - z - t = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 2x - 5y - z - t = 0 \end{cases} \quad (\cdot 2) \begin{cases} x - 2y + \boxed{z - t} = 0 \\ 0 - y + \boxed{z + t} = 0 \end{cases}$$

variables libres

$z = 1 \quad t = 0$

$(1, 1, 1, 0)$

$z = 0 \quad t = 1$

$(3, 1, 0, 1)$

$B = \langle (1,1,1,0),(3,1,0,1) \rangle$

4.9. $F = \langle (1,0,1,0), (0,2,1,0) \rangle$
$G = \{(x,y,z,t) ; x - z = y = 0\}$
Trobar dimensions, bases i equacions implícites de F, G, $F \cap G$ i $F + G$

$\boxed{F}$ dimensió 2

base $(1,0,1,0), (0,2,1,0)$ linealment independents i generadors
base $= \{(1,0,1,0), (0,2,1,0)\}$

equacions
$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ x & y & z-x & t \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z-x-\frac{1}{2}y & t \end{matrix}$$
"0" "0"

$$F = \begin{cases} z - x - \frac{1}{2} y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$\boxed{G}$ equacions $G = \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

base cogemos como variables libres z, t

x	y	z	t
1	0	1	0
0	1	0	1

$\rightarrow$ base $= \{(1,0,1,0), (0,1,0,1)\}$

dimensió 2

$\boxed{F+G}$ generadores de $F+G$ $= \langle (1,0,1,0), (0,2,1,0), (1,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$

base
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
base $= \{(1,0,1,0), (0,2,1,0), (0,0,0,$

dimensió 3

equacions $ax + by + cz + dt = 0$

prenc com a variable lliure $c = 1$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 2b + c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$
$\rightarrow$ solució $(-1, -\frac{1}{2}, 1, 0)$

$-x - \frac{1}{2} y + z = 0$

$\boxed{F \cap G}$ dimensió 1 (per Grassmann)

equacions
$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} G \qquad \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ t = 0 \end{cases} F$$
$$\rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \\ \cancel{y = 0} \\ t = 0 \end{cases} \rightarrow F \cap G = \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

base cojo como variable $t = 1$

$(1, 0, 1, 0)$ base de $F \cap G$

Scanned by CamScanner

4.6. Fixada una base $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

a) Demostreu que G és subespai vectorial, calculeu-ne la dimensió i una base

$$G = \{(x,y,z,t)_B \in E \mid x+y = z+t = 0\}$$

- és subespai vectorial:

a) el 0 està inclòs

$(0,0,0,0) \rightarrow 0+0 = 0+0 = 0$ cert

b) suma: $(x,y,z,t) \rightarrow x+y = z+t = 0$

$(x',y',z',t') \rightarrow x'+y' = z'+t' = 0$

$(x,y,z,t) + (x',y',z',t') = x+x'+y+y'+z+z'+t+t' \rightarrow x+y+x'+y' = z+t+z'+t' = 0$

c) producte per escalar:

$\left.\begin{matrix} x+y=0 \\ z+t=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} ax+ay=0 \\ az+at=0 \end{matrix}\right\} (ax, ay, az, at) \in G$

per tant, G és subespai

- dimensió 2.
- base

$\left\{\begin{matrix} x+y & & =0 \\ & z+t & =0 \end{matrix}\right. \rightarrow G = \{(1,-1,0,0), (0,0,-1,1)\}$

b) Sigui F subespai vectorial de E trobeu-ne les equacions i una base

$F = \langle(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1)\rangle$

- base

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 1&0&1&0 \\ 1&0&0&1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&-1&1&0 \\ 0&-1&0&1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&-1&1&0 \\ 0&0&-1&1 \end{pmatrix}$$

són linealment independents i generadors, per tant formen base

$B = \{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1)\} \rightarrow$ dimensió 3 (amb una equació definireu F)

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 1&0&1&0 \\ 1&0&0&1 \\ x&y&z&t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&-1&1&0 \\ 0&-1&0&1 \\ 0&y-x&z&t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&-1&1&0 \\ 0&-1&0&1 \\ 0&0&z+y-x&t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&-1&1&0 \\ 0&-1&0&1 \\ 0&0&0&\underset{=0}{-x+y+z+t} \end{pmatrix}$$

$-x+y+z+t = 0$

Scanned by CamScanner

4.2. Representats els vectors d'un espai vectorial E per les seves components relatives a una base e_1, e_2, e_3, e_4

a) Trobeu els valors de a, b perquè $F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ tingui dimensió 3

$v_1 = (1,2,3,4) \rightarrow v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$
$v_2 = (1,2,1,1) \rightarrow v_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$
$v_3 = (a,b,2,3) \rightarrow v_3 = ae_1 + be_2 + 2e_3 + 3e_4$

v_3 ha de ser combinació lineal de v_1, v_2

$(a,b,2,3) = \lambda(1,2,3,4) + \mu(1,2,1,1)$

$$\begin{cases} a = \lambda + \mu \\ b = 2\lambda + 2\mu \\ c = 3\lambda + \mu \\ d = 4\lambda + \mu \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 1 = \lambda \\ -1 = \mu \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a = 1-1=0 \\ b = 2-2=0 \end{matrix}$$

b) Escolliu una base de F i amplieu-la a B base de E

base de $F = \{(1,2,3,4), (1,2,1,1)\} = \{(1,2,3,4), (0,0,2,3)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ampliar a base de E ($\mathbb{R}^4$)

$B = \{(1,2,3,4), (0,0,2,3), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$e_1 = (1,0,0,0) = a(1,2,3,4) + b(0,0,2,3) + c(0,1,0,0) + d(0,0,0,1)$
$a = 1,\ b = -\frac{3}{2},\ c = -2,\ d = \frac{1}{2} \rightarrow e_1 = (1, -\frac{3}{2}, -2, \frac{1}{2})_B$

$e_2 = (0,1,0,0) = a(1,2,3,4) + b(0,0,2,3) + c(0,1,0,0) + d(0,0,0,1)$
$a=0,\ b=1,\ c=0,\ d=0 \rightarrow e_2 = (0,1,0,0)_B$

$e_3 = (0,0,1,0) = a(1,2,3,4) + b(0,0,2,3) + c(0,1,0,0) + d(0,0,0,1)$
$a=0,\ b=0,\ c=\frac{1}{2},\ d=\frac{-3}{2} \rightarrow e_3 = (0,0,\frac{1}{2},\frac{-3}{2})_B$

$e_4 = (0,0,0,1) = a(1,2,3,4) + b(0,0,2,3) + c(0,1,0,0) + d(0,0,0,1)$
$a=0,\ b=0\ c=0,\ d=1 \rightarrow e_4 = (0,0,0,1)_B$

Scanned by CamScanner

4.12. $F = \langle (1,-3,2,4),\ (2,0,1,2) \rangle$
$G = \langle (3,1,1,2),\ (1,-1,1,2),\ (1,3,-1,2) \rangle$
$H = \langle (2,0,1,2),\ (1,-1,1,2),\ (1,3,0,2) \rangle$
$T \begin{cases} 2x - 2y - 2t - t = 0 \\ x - y - t = 0 \end{cases}$

Determinar les inclusions que hi ha entre ells.

- Si $F \subset G \rightarrow \dim F \leq G$
- Si $F \subset G$, $\dim F = \dim G$ $\}$ $F = G$, F y G son el mismo espacio vectorial

- para determinar si un subespacio está incluido en otro: $A \subseteq B$
  - $\dim A+B = \dim B$
  - $\dim A \cap B = \dim A$
  - los vectores de A cumplan las ecuaciones de B

1) Calcularemos las dimensiones de los subespacios, para poder determinar las posibles inclusiones

$F = \langle (1,-3,2,4),\ (2,0,1,2) \rangle$ dim 2
vectores linealmente independientes

G.
$$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{matrix}$$

dim 3 $G = \langle (0,4,-2,4),\ (1,-1,1,2),\ (0,0,0,4) \rangle$

H.
$$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{matrix}$$

dim 3 $H = \langle (1,-1,1,2),\ (0,2,-1,2),\ (0,0,1,4) \rangle$

$T: \begin{cases} 2x - 2y - 2t - t = 0 \\ x - y - t = 0 \end{cases}$ dim 2 (eq indep)

2) Posibles inclusiones
$F \subseteq T \rightarrow$ entonces $F = T$

$F \subset G$ $\quad T \subset G$
$F \subset H$ $\quad F \subset G$

$G \subseteq H \rightarrow$ entonces $G = H$

* Las demás inclusiones no son posibles por las dimensiones

Scanned by CamScanner

3) $F \subseteq T$ generadores de F cumplen las ecuaciones de $T \rightarrow F \subset T \rightarrow F = T$

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2z - t = 0 \\ x - y \quad\quad - t = 0 \end{cases}$$

- $(1, -3, 2, 4)$
  $2 \cdot 1 - 2(-3) - 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$
  $2 + 6 - 4 - 4 = 0$

- $(2, 0, 1, 2)$
  $2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 2 = 0$
  $4 - 4 = 0$

$F \subseteq T \rightarrow F = T$

$F \subset G$ $\quad F \subset G \rightarrow \dim F + G = \dim G \leftrightarrow F + G = G \leftrightarrow F \subset G$

aplicar reducción de todos los vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim F + G = 3$

$F \subset G$

$F \subset H$ $\quad F \subset H \rightarrow \dim F + H = \dim H \rightarrow F + H = H \rightarrow F \subset H$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim F + H = 3$

$F \subset H$

$G = H$ expresaremos G como ecuaciones y comprovaremos si los vectores la cumplen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & y+x & z-x & t-2x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & z - x + \frac{y+x}{2} & t - 2x + y + x \end{pmatrix}$$

$z - x + \frac{y+x}{2} = 0$

$$-x + y + 2z = 0$$

- $(2, 0, 1, 2)$
  $-2 + 0 + 2 = 0$
- $(1, -1, 1, 2)$
  $-1 - 1 + 2 = 0$
- $(1, 3, 0, 2)$
  $-1 + 3 = 0$ $\boxed{\text{no}}$

$G \neq H$

Scanned by CamScanner

4.11. Considerem a $\mathbb{R}^4$ els subespais donats per

$$H = \begin{cases} x - y + t = 0 \\ y + z + t = 0 \\ x + 2z + t = 0 \end{cases}$$

$$F_a = \langle (1,1,2,1),\ (0,2,0,1),\ (-1,3,a,1) \rangle$$

a) Trobeu les bases de cadascun d'ells, en funció del paràmetre a

$$F_a = \langle (1,1,2,1),\ (0,2,0,1),\ (-1,3,a,1) \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2+a & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2+a & 0 \end{pmatrix}$$

- El subespai generat pel conjunt dels primers vectors és el mateix que el subespai generat pel conjunt dels últims vectors

base de F_a → si $a = -2$ → $\{(1,1,2,1), (0,2,0,1)\}$
→ si $a \neq -2$ → $\{(1,1,2,1), (0,2,0,1), (0,0,2+a,0)\} =$
$= \{(1,1,2,1), (0,2,0,1), (0,0,1,0)\}$

$$H = \begin{cases} x - y + t = 0 \\ y + z + t = 0 \\ x + 2z + t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + t + t = 0 \\ \cancel{y + z + t = 0} \end{cases}$$

graus de llibertat = nº incògnites - nº equacions independents
Tindrem dos graus de llibertat
Siguin les nostres variables lliures z i t
- $t = 1,\ z = 0$
  $(-1, -1, 0, 1)$
- $t = 0,\ z = 1$
  $(-2, -1, 1, 0)$

Base de H $= \{(-2,-1,1,0), (-1,-1,0,1)\}$

b) Trobeu equacions per F_a, segons els valors de F_a
- $F_a\ (a = -2)$
  $F_a = \langle (1,1,2,1),\ (0,2,0,1) \rangle$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & y-x & z-2x & t-x \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z-2x & t - \frac{y+x}{2} \end{matrix}$$

Equacions $F_a\ (a = -2)$ $\begin{cases} z - 2x = 0 \\ t - \frac{y+x}{2} = 0 \end{cases}$

→ comprovar que els vectors les compleixen

Scanned by CamScanner

• $F_a \; (a \neq -2)$

$F_a = \langle (1,1,2,1),\ (0,2,0,1),\ (0,0,1,0) \rangle$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y-x & z-2x & t-x \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z-2x & t-\frac{y+x}{2} \end{matrix}$$

Eq. de $F_a \; (a \neq -2) = t - \frac{y+x}{2} = 0$

c) Trobeu $H \cap F_a$ i $H + F_a$. Doneu-los per equacions implícites i determineu base de cadascun d'ells

$\boxed{F_{-2}}$ • $H \cap F_{-2}$

$$\left.\begin{matrix} x - y + z = 0 \\ y + z + t = 0 \\ \cancel{x + 2z + t = 0} \end{matrix}\right\} H \qquad \left.\begin{matrix} -x - y - 2t = 0 \\ -2x + z = 0 \end{matrix}\right\} F_{-2}$$

Solució $x = y = z = t = 0$

$H \cap F_{-2} = \{(0,0,0,0)\} \rightarrow \dim 0$

• $H + F_{-2}$ Tenim que, per grassmann

$\dim (H + F_{-2}) = \dim H + \dim F_2 - \dim H \cap F_2$

$\dim (H + F_{-2}) = 4 + 0 = 4$

$\rightarrow$ estem en $\mathbb{R}^4$

$H + F_{-2} = \mathbb{R}^4$ $\rightarrow$ base canònica

$\rightarrow$ no tinc equacions

• si el subespai té la mateixa dimensió que l'espai $\rightarrow$ necessàriament és l'espai (base canònica) (no tinc equacions)

$\boxed{F_a}$ · $H \cap F_a$

$$\left.\begin{matrix} x - y + z = 0 \\ y + z + t = 0 \\ \cancel{x + 2z + t = 0} \end{matrix}\right\} H \quad -x - y - 2t = 0 \; \} F_a \rightarrow \left\{\begin{matrix} x - y + z = 0 \\ y + z + t = 0 \\ -2y + z - 2t = 0 \end{matrix}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left|\begin{matrix} x - y + z = 0 \\ y + z + t = 0 \\ 3z = 0 \end{matrix}\right.$$

· sigui $t = 1$

$(-1, -1, 0, 1)$

$H \cap F_a = (-1, -1, 0, 1)$

Scanned by CamScanner

$\dim(F+H) = \dim F + \dim H - \dim F \cap H$

$\dim(F+H) = 3 + 2 - 1 = 4$

↳ estem en $\mathbb{R}^4$

$F + H = \mathbb{R}^4$

Scanned by CamScanner

$\mathbb{R}^4$

4.8. $F = \langle (1,2,3,4),\ (2,2,2,6),\ (0,2,4,4) \rangle$
$G = \langle (1,0,-1,2),\ (2,3,0,1) \rangle$

Determinar les dimensions, una base i equacions dels subespais F, G, $F+G$, $F \cap G$

- F

$F = \langle (1,2,3,4),\ (2,2,2,6),\ (0,2,4,4) \rangle = \langle (1,2,3,4),\ (1,1,1,3),\ (0,1,2,2) \rangle =$
$= \langle (1,2,3,4),\ (0,1,2,1),\ (0,0,0,1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$ Són linealment independents

- dimensió del subespai F : 3
- base F $\{(1,2,3,4),\ (0,1,2,1),\ (0,0,0,1)\}$
- equacions del subespai

$a_1x + a_2y + a_3z + a_4t = 0$

$$\begin{cases} 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0 \\ 1a_2 + 2a_3 + 1a_4 = 0 \\ 1a_4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases}$$

- $a_4 = 0$
- a_3 variable lliure $\to$ prenc $a_3 = 1$
- $a_2 = -2a_3 \Rightarrow a_2 = -2$ $\qquad (1,-2,1,0)$
- $a_1 \to a_1 - 4a_3 + 3a_3 = 0 \to a_1 = a_3 \to a_1 = 1$

equació del subespai F $\to x - 2y + z = 0$

- G

$G = \langle (1,0,-1,2),\ (2,3,0,1) \rangle = \langle (1,0,-1,2),\ (0,3,2,-3) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to$$ linealment independents

- dim subespai G $\to 2$
- base G $\{(1,0,-1,2),\ (0,3,2,-3)\}$
- equacions del subespai

$a_1x + a_2y + a_3z + a_4t = 0$

$$\begin{cases} a_1 - a_3 + 2a_4 = 0 \\ 3a_2 + 2a_3 - 3a_4 = 0 \end{cases}$$

prenc a_3 i a_4 com a variables lliures

$a_3 = 1 \quad a_4 = 0 \qquad\qquad a_3 = 0, \quad a_4 = 1$

$\left(1, \frac{2}{3}, 1, 0\right) \qquad\qquad (-2, 1, 0, 1)$

- equacions del subespai G $\quad \begin{cases} x - \frac{2}{3}y + t = 0 \to 3x - 2y + 3z = 0 \\ -2x + y + t = 0 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

• F + G

F + G = < (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 1), (0, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 2), (0, 3, 2, -3) >

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F + G = < (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 1), (0, 0, 1, -2), (0, 0, 0, 1) >

- <u>dim F + G</u> = 4
- <u>base F + G</u> = { (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 1), (0, 0, 1, -2), (0, 0, 0, 1) }

- <u>equacions del subespai</u>

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 t = 0$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0 \\ a_2 + 2a_3 + a_4 = 0 \\ a_3 - 2a_4 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

Com que el subespai F + G en $\mathbb{R}^4$ té dimensió 4, genera tot $\mathbb{R}^4$ per tant, no hi ha cap equació que restringeixi l'espai vectorial

• F ∩ G · <u>equacions del subespai</u>

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \\ -2x + y + t = 0 \end{cases}$$

→ són equacions independents

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

vigila amb els signes

y → y = 0
t → t = t (variable lliure)
z → 2z = t → z = t/2
x → x = −t/2

per a t = 2
x = −1
y = 0
z = 1
t = 2

F ∩ G = < (−1, 0, 1, 2) >
<u>dim F∩G</u> = 1
<u>base F∩G</u> = { (−1, 0, 1, 2) }

Hi ha un problema amb els signes que ve del Gauss

FÓRMULA DE GRASSMANN

dim F + dim G = dim (F+G) + dim F∩G
2 + 3 = 4 + 1

Molt bé! Recorda d'escriure les combinacions que fas amb Gauss.

Scanned by CamScanner

Matrius i Vectors.

Ejercicio. $\mathbb{R}^4$

$F = \langle (1,1,1,0), (0,1,1,1) \rangle$

$G = \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ x - y - t = 0 \end{cases}$

$H = \begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 2x - y - 2z - t = 0 \end{cases}$

- ecuaciones independientes de F
- dim $F \cap (G+H)$
  - calcular base de G y la base de H
  - calcular la base de G+H
  - calcular dim $F + (G+H)$ y aplicar grassmann
    dim $F + (G+H) \rightarrow$ dim $F \cap (G+H)$

- ecuaciones independientes de F

$ax + by + cz + dt = 0$

$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases} \rightarrow$ variables libres c, d

$(0, -1, 1, 0)$

$(1, -1, 0, 1)$

↳ coeficientes de las ecuaciones que estoy buscando

$F = \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases}$

- dim $F \cap (G+H)$

base de G $\begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ x - y - t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ -2y - z - 3t = 0 \end{cases} \rightarrow$ variables libres z, t

$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)$

$(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1)$

base de G $= \{(-1, -1, 2, 0), (-1, -3, 0, 2)\}$

base de H $\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 2x - y - 2z - t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \rightarrow$ variables libres z, t

$(1, 0, 1, 0)$

$(0, -1, 0, 1)$

base de H $\{(1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$

base de H+G $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

dim $F + (G+H) = 4$

dim $F \cap (G+H) = 2$ (Grassman)

Scanned by CamScanner