3. FUNCIONS: LÍMIT i CONTINUÏTAT

En aquest capítol parlarem de dos conceptes lligats a les funcions molt importants pel càlcul en general, el límit i la continuïtat.

3.1 LÍMIT D'UNA FUNCIÓ A UN PUNT

Sigui $D \subseteq \mathbb{R}$ i $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Donat $a \in D$ direm que el límit de f quan x tendeix a a és l si a mesura que x es va apropant a a el valor de $f(x)$ es va apropant a l.

Definició. El límit de f quan x tendeix a a és $l \in \mathbb{R}$, i ho escriurem $\lim_{x \to a} f(x) = l$, si per tot $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta,\ x \in D \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

En termes d'intervals ho podem escriure com

$$x \in D \cap (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \Longrightarrow f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon).$$

Direm que el límit de f quan x tendeix a a per la dreta és $l \in \mathbb{R}$, i ho escriurem $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$, si per a tot $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$x \in (a, a+\delta),\ x \in D \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Ho podríem definir anàlogament per l'esquerra.

Exemples.

1) Provem que $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$. Farem el cas $a > 0$.

Fixem $\varepsilon > 0$ i veurem que $\exists \delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon.$$

Si $|x-a| < \delta$ tenim que per la desigualtat triangular

$$|x^2 - a^2| = |x-a| \cdot |x+a| < \delta(|x| + |a|) < 2a + \delta,$$

on hem emprat que

$$|x+a| \leq |x| + |a| \leq |x-a| + 2|a| < \delta + 2a.$$

Llavors n'hi ha prou triant $\delta < a$ i $\delta < \varepsilon/3a$ per obtenir el resultat.

2) Veiem que $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no existeix.

Efectivament, pels punts $x_k = \frac{1}{\pi k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\sin\left(\frac{1}{x_k}\right) = 0$, i per tant

$$\lim_{k\in\mathbb{N}, k\to+\infty} \sin \frac{1}{x_k} = 0;$$

en canvi, si agafem $y_k = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\sin\left(\frac{1}{y_k}\right) = 1$, i llavors

$$\lim_{k\in\mathbb{N}, k\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{y_k}\right) = 1.$$

Així, no és cert que quan x convergeix a 0, la funció tendeixi a un valor $l \in \mathbb{R}$.

Definició. Diem que una funció $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ és acotada superiorment si $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq C$, $\forall x \in D$. Definim el concepte d'acotada inferiorment de forma anàloga. Diem que f és acotada si a la vegada és acotada superiorment i inferiorment, i això vol dir que existeix $C>0$ tal que $|f(x)| \leq C$, $\forall x \in D$.

Teorema 3.1 Si $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ existeix un entorn d'a on la funció $f(x)$ és acotada.

Prova. Fixem $\varepsilon = 1 > 0$. Sabem que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in I(a,\delta) \setminus \{a\}$, aleshores

$$l - 1 \leq f(x) \leq l + 1.$$

■

Teorema 3.2 Sigui $D \subseteq \mathbb{R}$ i $f, g: D \longrightarrow \mathbb{R}$. Sigui $a \in D$ per que existeixen els límits:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_f \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a} g(x) = l_g.$$

Aleshores:

a) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = l_f + l_g$,

b) $\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = l_f \cdot l_g$,

c) Si $g(x) \neq 0$ en un entorn d'a també tenim $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g}$,

d) Si $f(x) \leq g(x)$ en un entorn d'a, $l_f \leq l_g$.

Observacions: Les proves són similars a les de les successions. A l'apartat d) si són estrictes les desigualtats no és cert, agafem per exemple $f(x) = x$ i $g(x) = x + x^2$, i $x \to 0$

Teorema 3.3 (Teorema del sandwich)

Siguin $f, h, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \forall x \in D \quad \text{(o en un entorn d'a)}$$

Sigui $a \in D$ pel qual $\exists$ els límits de f i h al punt d'a, i a més coincideixen

$$l = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

Aleshores, $$\lim_{x \to a} h(x) = l.$$

Exemples:

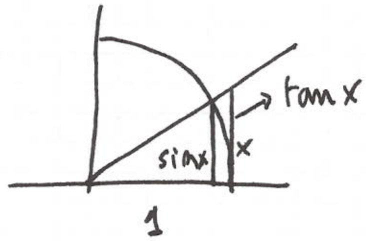
1. En un entorn del zero

$$-x \leq \sin x \leq x,$$

i com que $\lim_{x \to 0} x = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$, tenim que

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

2. Per a $x \in (0, \pi/2)$ tenim que



$$\sin x \leq x \leq \tan x,$$

això implica que

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1,$$

i per tant

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

3.2 LÍMITS INFINITS I LÍMITS A L'INFINIT

Sigui $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Direm que el límit de f quan x tendeix a és $+\infty$, i ho escriurem $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, si per a tot $M > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$x \in (a, a + \delta) \Longrightarrow f(x) > M.$$

Anàlogament, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, si per tot $M > 0$, $\exists \delta > 0$ tal q

$$x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) < -M.$$

Els límits a b es defineixen de manera similar.

Sigui $f: (a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Direm que el límit de f quan x tendeix a $+\infty$ és $l \in \mathbb{R}$, i ho escriurem $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, si per a tot $\varepsilon > 0$, $\exists k > 0$ tal que

$$x > k \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Anàlogament, si $f: (-\infty, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, direm que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$, si per a tot $\varepsilon > 0$, $\exists k > 0$ tal que

$$x < -k \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Podem parlar també de límits infinits a l'infinit. Per exemple, donada $f: (a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, diem que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si per a tot $M>0$, $\exists k>0$ tal que

$$x > k \Longrightarrow f(x) > M.$$

Anàlogament es defineixen $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

<u>Exemple</u>. Considerem

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$q(x) = b_m x^m + \cdots\cdots\cdots + b_1 x + b_0$$

polinomis de graus n i m amb $a_n, b_m > 0$. Aleshores

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} +\infty, & n > m, \\ a_n/b_m, & n = m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

Per veure això hem emprat

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}\right)},$$

i el fet que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad \text{per qualsevol } n \in \mathbb{N}.$$

Una puntualització important és que els infinits no són nombres i, per tant, cal justificar les operacions entre ells.

Proposició 3.4. Sigui f i g funcions amb $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ i $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Aleshores

a) $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$,

b) $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$,

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$,

d) Si $l > 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = +\infty$,

si $l < 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = -\infty$.

Prova. a) Fixant $M > 0$, $\exists k_f, k_g > 0$ tal que

$$|f(x) - l| < 1, \ \forall x > k_f,$$
$$g(x) > M - l + 1, \ \forall x > k_g.$$

Llavors, si $x > \max(k_f, k_g)$,

$$f(x) + g(x) > l - 1 + M - l + 1 = M.$$

b) Es pot demostrar de manera similar.

c) Fixem $\varepsilon > 0$, volem veure que $\exists k > 0$ tal que

$$x > k \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

Prenem $M = (l+1)/\varepsilon$ i considerem $k > 0$ tal que $|f(x) - l| < 1$ i $g(x) > M$, si $x > k$. Aleshores, si $x > k$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \frac{l+1}{M} = \varepsilon.$$

d) Suposem $l > 0$. Volem veure que fixat $M > 0$, $\exists k > 0$ tal que

$$x > k \Rightarrow f(x)\cdot g(x) > M.$$

Elegim $\varepsilon > 0$ prou petit tal que $l - \varepsilon > 0$. Existeix $k_f > 0$ tal que si $x > k_f$, aleshores $f(x) > l - \varepsilon$. També existeix $k_g > 0$ tal que, si $x > k_g$, aleshores

$$g(x) > M/_{l-\varepsilon}.$$

Per tant, si $x > \max(k_f, k_g)$, tenim que

$$f(x)\cdot g(x) > (l - \varepsilon)\cdot\frac{M}{l-\varepsilon} = M. \qquad \blacksquare$$

3.2.1 LÍMITS INDETERMINATS

Hi haurà molts límits que dependran de cada cas que estudiem o analitzem. Exemples n'hi ha molts:

1) $(\pm\infty)-(\pm\infty)$. Si agafem $f(x)=2x$ i $g(x)=3x^2$, tenim que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty,$$

i

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-g(x)) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} (g(x)-f(x)) = +\infty.$$

2) $0\cdot(\pm\infty)$

3) $0/0$

4) $\pm\infty/\pm\infty$

5) $1^{\pm\infty}$, 0^0, $(\pm\infty)^0$. D'aquests molts poden resoldre's posant

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Observació. Una altra opció de resoldre algunes d'aquestes indeterminacions és utilitzant el nombre e. La funció $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ és monòtona creixent i acotada superiorment i, per tant,

$$e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

i si $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$, veurem més endavant (l'Hôpital) que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} = e.$$

3.2.2 COMPARACIÓ DE FUNCIONS

Si $a>1$, sabem que $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$; i per les propietats de logaritmes també podem deduir que

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty.$$

Però quina va més de pressa a l'infinit?

Una manera de respondre és estudiant els quocients següents.

Proposició 3.5 Sigui $a>1$ i $c>0$. Aleshores

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^c} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^c}{a^x} = 0 .$$

Observació. A vegades escrivim $\log_a x \precsim x^c \precsim a^x$ $(x\to+\infty)$ o bé $\log_a x = o(x^c)$ i $x^c = o(a^x)$.

Prova. Fixem-nos que agafant $y = x^c$ obtenim que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^c} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\log_a y^{1/c}}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\frac{1}{c}\log_a y}{y} = 0 .$$

Aquest límit és zero perquè si y és prou gran,

$$\frac{\log_a [y]}{[y]+1} \leq \frac{\log_a y}{y} \leq \frac{\log_a([y]+1)}{[y]},$$

on $[\cdot]$ és la part entera. L'estudi de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a(n+1)}{n} = 0$$

és similar a veure un resultat que ja hem vist

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0 .$$

Per l'altre resultat, emprant $y = a^x$, tenim que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^c}{a^x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\log y}{y} \cdot \frac{1}{\log a} = 0 .$$

$\blacksquare$

Les comparacions d'aquest tipus també es poden fer a l'entorn de punts $a\in\mathbb{R}$.

Definició.
- Direm que f és un infinitèssim quan x tendeix a $a\in\mathbb{R}$ si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
- Si f i g són dos infinitèssims quan x tendeix a $a\in\mathbb{R}$, direm que f és d'ordre superior a g si
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$
és a dir, si f es fa petit més ràpidament que g quan x tendeix a a, s'escriu $f(x) = o(g(x)),\ x\to a$.

- Direm que f i g són infinitèssims equivalents si
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$
i ho escriurem $f(x) \simeq g(x)$, $x \to a$.

Exemples:

1) $\sin x \simeq x$, $x \to 0$

b) $1 - \cos x \simeq o(x)$, $x \to 0$. Com que $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ tenim que
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 0.$$

3.3 FUNCIONS CONTÍNUES. TIPUS DE CONTINUÏTAT (Dobat)

Definició. Sigui $f: D \to \mathbb{R}$ i $a \in D$. Direm que f és contínua en el punt $a \in D$ si $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ i aquest val $f(a)$.

De manera equivalent, f és contínua al punt a si per a tot $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que
$$x \in D \cap I(a, \delta) \Longrightarrow f(x) \in I(f(a), \varepsilon)$$
Quan f diem que és contínua a D entendrem que és contínua a tots els $a \in D$, i això ho denotarem per $f \in \mathcal{C}(D)$.

Exemple:

a) La funció $f(x) = [x]$ és contínua a tot $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ i discontínua a $\mathbb{Z}$.

b) La funció $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$

és discontínua a tot arreu per la propietat de densitat de $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

c) La funció $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$

és contínua a tot arreu.

d) La funció $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$

és discontínua al punt $a = 0$.

Les propietats vistes al Teorema 3.2 donen lloc al resultat següent:

Teorema 3.6 Sigui $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ contínues al punt $a \in D$. Aleshores, les funcions $f+g$, $f \cdot g$ són contínues al punt $a \in D$. Si a més, $g(x) \neq 0$ per a tot $x \in D$ (o en un entorn de a), aleshores f/g també és contínua al punt $a \in D$.

La continuïtat es conserva per la composició de funcions.

Teorema 3.7 Siguin $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $f(D) \subseteq E$. Si f és contínua al punt $a \in D$ i g és contínua al punt $f(a) \in E$, aleshores la funció composta $g \circ f$ també és contínua al punt $a \in D$.

Prova: Com g és contínua al punt $f(a)$, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$y \in E \cap I(f(a), \delta) \Rightarrow g(y) \in I(g(f(a)), \varepsilon).$$

Per la continuïtat de f al punt a, fixat $\delta > 0$ existeix $\beta > 0$ tal que

$$x \in D \cap I(a, \beta) \Rightarrow f(x) \in I(f(a), \delta).$$

Aleshores, si $x \in D \cap I(a, \beta)$ podem prendre $y = f(x)$ a la primera implicació i deduïm $g(f(x)) \in I(g(f(a)), \varepsilon)$ com volíem. ∎

Exemple. La funció

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\sin x}\right), & \text{si } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

és contínua al punt $a = 0$.

Aplicació. Podem utilitzar aquests resultats i el fet que les exponencials i logaritmes són contínues per mirar si són contínues d'altres funcions. Un cas clàssic és el de les funcions tipus $f(x)^{g(x)}$ que es poden escriure com

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Si $f(x) > 0$ i $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \neq 0$ i $\lim_{x \to a} g(x) = t$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{t \ln \ell}$$

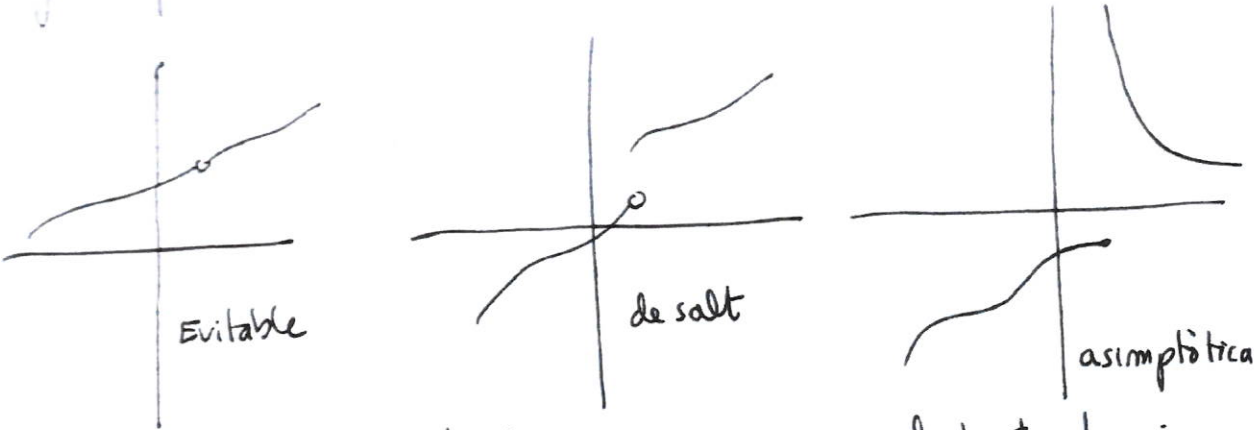
3.3.1 TIPUS DE DISCONTINUÏTAT

El tipus més senzill és quan existeix el $\lim_{x\to a} f(x)$ però no coincideix amb $f(a)$ i s'anomena discontinuïtat evitable.

Quan existeix els límits laterals $\begin{cases} f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x) \\ f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x) \end{cases}$

però no coincideixen. S'anomena discontinuïtat de salt i el salt és la diferència entre els dos límits laterals.

Quan almenys un dels límits laterals és infinit es diu a vegades que la discontinuïtat és asimptòtica.



No totes són així, també hi ha funcions com $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ i s'anomenen essencial.

Observació: Les discontinuïtats de funcions monòtones són de salt.

Suposem que f es creixent. Fixat $a \in D$ tenim que $f(x) \leq f(a)$ si $x \leq a$, i així $f(x)$ és acotada superiorment (per $f(a)$) quan $x \leq a$. Com que f és creixent i acotada superiorment, $\exists \lim_{x\to a^-} f(x)$. De manera anàloga es pot veure el límit per la dreta.

3.4 TEOREMES DE WEIERSTRASS, BOLZANO i DEL VALOR INTERMIG

Aquests tres teoremes són propietats fonamentals de les funcions contínues.

Diem que $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ assoleix un màxim absolut al punt $a \in D$. Si $f(x) \leq f(a)$ per a tots els $x \in D$. Diem que a és un màxim absolut de f. Anàlogament diem que $a \in D$ és un mínim absolut de f si $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in D$.

TEOREMA 3.8 (TEOREMA DE WEIERSTRASS)

Sigui $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Aleshores f és acotada i assoleix un màxim i un mínim absolut.

Prova.

Només demostrarem que f és acotada a mode d'exemple.

Suposem que f no és acotada. Fem el cas de suposar que no està acotada superiorment, així

$$f([a,b]) \text{ no acotada superiorment} \Longleftrightarrow \forall m \geq 1 \; \exists x_m \in [a,b] \text{ tal que } f(x_m) \geq m,$$

i aleshores

$$f(x_m) \xrightarrow[m \nearrow +\infty]{} +\infty \qquad (1)$$

Per altra banda, com $\{x_m, m \in \mathbb{N}\} \subseteq [a,b]$ pel teorema de Bolzano-Weierstrass podem assegurar que $\exists \{x_{m_k}, k \geq 1\}$ parcial convergent

$$x_{m_k} \xrightarrow[k \nearrow +\infty]{} x \in [a,b],$$

i per continuïtat

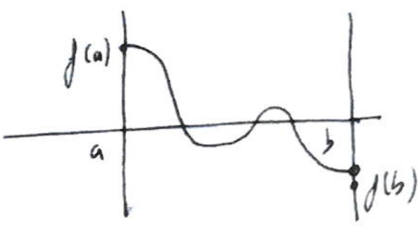
$$f(x_{m_k}) \xrightarrow[k \nearrow +\infty]{} f(x) \; !!!!$$

Això és contradictori amb (1). $\blacksquare$

Observació. Aquest teorema és fals si parlem de (a,b) en lloc de $[a,b]$.

TEOREMA 3.9 (TEOREMA DE BOLZANO)

Sigui $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(a) f(b) < 0$. Aleshores, existeix $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.



Prova. Dividim $I = [a,b]$ en dues meitats d'igual longitud. A un dels dos intervals la funció compleix una propietat anàloga a l'interval inicial, sempre que el punt central no valgui zero. Aquest procés es va repetint i convergeix a un punt $c \in (a,b)$ on f s'anul·li.

$\blacksquare$

Observació: Tot polinomi de grau senar té almenys una arrel real.

TEOREMA 3.10 (TEOREMA DEL VALOR MIG)

Sigui $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i sigui z un valor entre $f(a)$ i $f(b)$. Aleshores existeix $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = z$.

Prova.

Notem $g(x) = f(x) - z$. Si $g(a) = 0$ o $g(b) = 0$ ja hem acabat la demostració. Altrament $g(a)$ i $g(b)$ tenen signe diferent i podem aplicar el teorema anterior

$\blacksquare$