Matrius i vectors (grup de matí)

Curs 2018–2019

5.1 Rang per files d'una matriu

Una matriu amb m files i n columnes es pot pensar com un conjunt de m vectors de $\mathbb{R}^n$ ordenats per files i també com un conjunt de n vectors de $\mathbb{R}^m$ ordenats per columnes. En cada moment del curs farem servir una interpretació o l'altra segons convingui pel context.

El *rang per files* d'una matriu és la dimensió del subespai generat per les seves files:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} = \dim\langle (a_1^1,\dots,a_1^n),\dots,(a_m^1,\dots,a_m^n)\rangle.$$

5.2 Teorema de Rouché–Frobenius

Donat un sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} a_1^1 x_1 + \cdots + a_1^n x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_m^1 x_1 + \cdots + a_m^n x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

les matrius

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n & b_m \end{pmatrix}$$

es diuen, respectivament, la *matriu de coeficients* i la *matriu ampliada* del sistema. És important observar que

$$\operatorname{rang} A \le \operatorname{rang} \bar{A},$$

ja que una relació de dependència entre un conjunt de files de $\bar{A}$ dona una relació de dependència entre les mateixes files de A (però no recíprocament).

L'enunciat següent es coneix com *teorema de Rouché–Frobenius:*

Teorema 5.1. *Suposem donat un sistema d'equacions lineals amb m equacions i n incògnites, amb matriu de coeficients A i matriu ampliada $\bar{A}$. Llavors el sistema és compatible si i només si $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$. En cas que sigui compatible, el nombre de graus de llibertat del sistema és igual a $n - \operatorname{rang} A$.*

Demostració. Apliquem el mètode de reducció a les files de $\bar{A}$ pensades com vectors de $\mathbb{R}^{n+1}$. Això conduirà a un sistema d'equacions de la forma

$$\left.\begin{array}{r}
c_1^{i_1}x_{i_1} + \quad \cdots \quad + c_1^n x_n = d_1 \\
c_2^{i_2}x_{i_2} + \quad \cdots \quad + c_2^n x_n = d_2 \\
\vdots \\
c_r^{i_r}x_{i_r} + \cdots + c_r^n x_n = d_r \\
0 = d_{r+1} \\
\vdots \\
0 = d_m
\end{array}\right\}$$

amb les mateixes solucions que el sistema inicial i amb $i_1 < i_2 < \ldots$ i on $c_k^{i_k} \neq 0$ per a tot $k \in \{1, \ldots, r\}$. Aquest sistema és compatible si i només si $d_{r+1} = 0, \ldots, d_m = 0$. En aquest cas, l'última equació no trivial dona

$$x_{i_r} = \frac{1}{c_r^{i_r}}(d_r - c_r^{i_r+1}x_{i_r+1} - \cdots - c_r^n x_n)$$

i a partir d'aquí podem anar aïllant recursivament les variables $x_{i_{r-1}}, \ldots, x_{i_1}$ en funció de $x_{i_r+1}, \ldots, x_n$, que queden com a variables lliures juntament amb $x_1, \ldots, x_{i_1-1}$. Com que han quedat r variables determinades (que són $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$), hi ha d'haver $n - r$ variables lliures en total, on $r = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$. □

Un sistema d'equacions lineals amb n equacions i n incògnites tal que la seva matriu de coeficients tingui rang n es diu *sistema de Cramer*.

Corol·lari 5.2. *Tot sistema de Cramer és compatible i té solució única.*

Demostració. El rang de la matriu ampliada no pot ser superior a n perquè té n files, i tampoc no pot ser inferior a n perquè $\operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} \bar{A}$. Per tant, es compleix que $\operatorname{rang} \bar{A} = n = \operatorname{rang} A$ (d'on el sistema és compatible) i el nombre de graus de llibertat del sistema és $n - \operatorname{rang} A = 0$, que vol dir que la solució és única. □