Matrius i vectors (grup de matí)

Curs 2018–2019

6.1 Representació de subespais amb sistemes homogenis

Un sistema d'equacions lineals es diu *homogeni* si els seus termes independents són tots iguals a zero. El conjunt de solucions $(x_1, \dots, x_n)$ d'un sistema homogeni amb m equacions i n incògnites

$$\left.\begin{aligned} a_1^1 x_1 + \cdots + a_1^n x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_m^1 x_1 + \cdots + a_m^n x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

sempre és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$, ja que si $(x_1, \dots, x_n)$ i $(x_1', \dots, x_n')$ són dues solucions del sistema (6.1) llavors $(x_1 + x_1', \dots, x_n + x_n')$ també és una solució, i si $(x_1, \dots, x_n)$ és una solució aleshores $(cx_1, \dots, cx_n)$ també ho és per a tot $c \in \mathbb{R}$.

Proposició 6.1. *Si la matriu de coeficients del sistema* (6.1) *té rang r, llavors el subespai de $\mathbb{R}^n$ format per les solucions de* (6.1) *té dimensió $n - r$.*

Demostració. És segur que el sistema (6.1) és compatible, ja que té almenys la solució trivial $(0, \dots, 0)$. Per tant, si la matriu del sistema (6.1) té rang r, llavors, pel teorema de Rouché–Frobenius, el sistema té $n - r$ graus de llibertat.

Reordenant, si cal, les variables, podem suposar que $x_{r+1}, \dots, x_n$ són les variables lliures i que les altres incògnites $x_1, \dots, x_r$ s'expressen en funció d'elles. En altres paraules, el sistema (6.1) és equivalent a

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1^{r+1} x_{r+1} + \cdots + c_1^n x_n \\ &\vdots \\ x_r &= c_r^{r+1} x_{r+1} + \cdots + c_r^n x_n. \end{aligned}$$

Llavors el subespai $F \subseteq \mathbb{R}^n$ format per les solucions de (6.1) és igual a

$$\begin{aligned} F &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = c_1^{r+1} x_{r+1} + \cdots + c_1^n x_n, \dots, x_r = c_r^{r+1} x_{r+1} + \cdots + c_r^n x_n\} \\ &= \{(c_1^{r+1} x_{r+1} + \cdots + c_1^n x_n, \dots, c_r^{r+1} x_{r+1} + \cdots + c_r^n x_n,\, x_{r+1}, \dots, x_n)\}, \end{aligned}$$

on $x_{r+1}, \dots, x_n$ poden prendre qualsevol valor de $\mathbb{R}$, ja que són variables lliures. Aquesta expressió de F es pot reescriure com

$$F = \{x_{r+1}(c_1^{r+1}, \dots, c_r^{r+1}, 1, 0, \dots, 0) + \cdots + x_n(c_1^n, \dots, c_r^n, 0, 0, \dots, 1)\}$$

i aquesta nova expressió mostra que els $n - r$ vectors

$$(c_1^{r+1}, \dots, c_r^{r+1}, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad (c_1^n, \dots, c_r^n, 0, 0, \dots, 1) \tag{6.2}$$

formen un conjunt de generadors de F, ja que qualsevol vector de F és combinació lineal d'ells. A més, les $n - r$ darreres components evidencien que els vectors de (6.2) són linealment independents, amb la qual cosa podem concloure que formen una base de F. Per tant, $\dim F = n - r$. $\square$

En aquesta demostració hem vist que una base del subespai de solucions de (6.1) es pot construir explícitament donant successivament el valor 1 a cadascuna de les $n-r$ variables lliures i el valor 0 a les altres variables lliures.

Ara anem a descriure el procés recíproc, és a dir, donat un subespai $F \subseteq \mathbb{R}^n$, volem trobar un sistema homogeni que tingui F com a subespai de solucions.

Teorema 6.2. *Donat qualsevol subespai F de $\mathbb{R}^n$, existeix algun sistema homogeni d'equacions lineals amb n incògnites tal que el seu conjunt de solucions és F. Si* $\dim F = m$ *llavors es pot escollir aquest sistema de manera que consti de $n-m$ equacions linealment independents.*

Demostració. Suposem que $\dim F = m$ i escollim una base qualsevol de F:

$$v_1 = (b_1^1, \dots, b_1^n),\ v_2 = (b_2^1, \dots, b_2^n), \quad \dots, \quad v_m = (b_m^1, \dots, b_m^n).$$

Considerem el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} b_1^1 x_1 + \cdots + b_1^n x_n &= 0 \\ &\vdots \\ b_m^1 x_1 + \cdots + b_m^n x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Com que les files d'aquest sistema tenen per coeficients les components de $v_1, \dots, v_m$, que són linealment independents, la matriu del sistema té rang m. Aleshores, per la proposició 6.1, el conjunt de solucions d'aquest sistema és un subespai de $\mathbb{R}^n$ de dimensió $n-m$, que denotarem per $F^\perp$. Donant successivament el valor 1 a cadascuna de les variables lliures i el valor 0 a la resta de variables lliures, obtindrem una base de $F^\perp$:

$$w_1 = (a_1^1, \dots, a_1^n),\ w_2 = (a_2^1, \dots, a_2^n), \quad \dots, \quad w_{n-m} = (a_{n-m}^1, \dots, a_{n-m}^n).$$

Com que cadascun dels vectors w_i és solució de (6.3), es compleix

$$a_i^1 b_j^1 + \cdots + a_i^n b_j^n = 0 \tag{6.4}$$

per a tot $i \in \{1, \dots, n-m\}$ i tot $j \in \{1, \dots, m\}$.

Anem a comprovar que el conjunt de solucions del sistema

$$\left.\begin{aligned} a_1^1 x_1 + \cdots + a_1^n x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n-m}^1 x_1 + \cdots + a_{n-m}^n x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

és exactament F. L'expressió (6.4) ens assegura que els vectors $v_1, \dots, v_m$ de la base de F són solucions d'aquest sistema (6.5). Així doncs, tenim m vectors linealment independents que són solucions de (6.5). Com que (6.5) té rang $n-m$, el subespai format per les seves solucions té dimensió $n-(n-m) = m$. Per tant, el conjunt de les solucions de (6.5) és un subespai de dimensió m que conté F. Com que $\dim F = m$, aquest conjunt de solucions ha de ser igual a F, tal com volíem demostrar. □