Teoria bàsica de conjunts

1 Conjunts

Un conjunt és una col·lecció d'objectes abstractes (alguns dels quals o tots podrien ser també conjunts).
Escrivim $a \in A$ (a pertany a A) per indicar que a és un element de A.
El conjunt que té per elements $a_1, a_2, \ldots, a_n$ s'escriu per $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Aquesta manera de descriure el conjunt es diu *per extensió*.

Definició 1.1 (Principi d'extensionalitat)**.** Dos conjunts són iguals si i només si tenen els mateixos elements.

$$A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Aquesta és una condició suficient i necessària per a dir que són iguals.

L'ordre de la llista no canvia el conjunt. Les repeticions tampoc. Per exemple:

$$\{1, 2, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2\}$$

1.1 Conjunt unitari (singleton)

És la llista que té un sol element $\{a\}$. Cal tenir en compte però que $a \neq \{a\}$.
Per exemple, $\{1\}$ no és un nombre. És un conjunt que conté el nombre 1. De la mateixa manera, $\{\{1\}\} \neq \{1\}$ ja que el segon conjunt no conté el nombre 1.

1.2 Conjunt parell desordenat

És un conjunt que té dos elements, $\{a, b\}$. (Tot i que pot ser que $a = b$). Es compleix que

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

1.3 Notació abstractor (set-builder)

Els conjunts finits es poden definir sovint per extensió. Els infinits es solen definir amb una notació que especifica quina condició compleixen els elements del conjunt.

$$\{x \mid P(x)\}$$

Per exemple, el conjunt dels nombres parells pot ser descrit per $\{x \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = 2n\}$.

1.4 El conjunt buit ($\varnothing$)

És un conjunt sense elements. Per el principi d'extensionalitat és únic. Es representa amb el símbol $\varnothing$. Ens el podem imaginar com una capsa buida.

$$\varnothing = \{\} = \{n \in \mathbb{N} \ \mid \ n < 0\}$$

Es pot representar amb qualsevol conjunt els elements del qual hagin de complir una condició impossible.

1.4.1 Exercicis

Exercici 1: Considera els següents conjunts. Són iguals entre ells:

$$\varnothing \qquad \{\varnothing\} \qquad \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \qquad \{\{\{\varnothing\}\}, \varnothing\} \qquad \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$$

No són iguals cap entre ells. Es comprova fent servir el principi d'extensionalitat.

1.5 Paradoxes de la teoria de conjunts

Pot ser un conjunt $X = \{X\}$, és a dir, un conjunt que es tingui a si mateix com a element? Es pot fer teoria de conjunts amb i sense aquesta propietat. L'axiomàtica de la teoria de conjunts que fem servir (ZF) estableix que no pot existir un conjunt amb aquesta propietat.

1.5.1 La paradoxa de Russell

Es considera un conjunt $u = \{x \mid x \in x\}$. Es planteja si $u \in u$. Ens trobem llavors amb una contradicció. Si $u \in u$ llavors $u \notin u$, i si $u \notin u$ llavors $u \in u$. Per a eliminar aquesta paradoxa es fa ús del fet que un conjunt no pot contenir-se a si mateix, per tant no pot existir un conjunt u amb aquesta propietat.

Zermelo i Fraenkel són els autors de l'axiomàtica de la teoria de conjunts (ZF). Aquesta axiomàtica estableix que no hi ha conjunts tals que $x \in x$.
Donat un conjunt construït lícitament, qualsevol $\{x \in A \mid P(x)\}$ és un conjunt.

2 Inclusió

La inclusió ($\subseteq$) és una relació purament entre conjunts.

$$A \subseteq B \quad \leftrightarrow \quad \forall x \, (x \in A \rightarrow x \in B)$$

És llegeix "A és un subconjunt de B"o "A està inclòs en B".
Exemple:

- $\{1, 2\} \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$. (Tots els elements del primer conjunt es troben en el segon.
- $\{0, 4\} \not\subseteq \{0, 1, 2, 3\}$. (El número 4 no es troba en el segon conjunt).

Per a demostrar la no inclusió cal trobar un element que estigui en el primer conjunt i no en el segon.

$$A \not\subseteq B \ \leftrightarrow \ \exists x \, (x \in A \wedge x \notin B)$$

2.0.1 Propietats de la inclusió

1. $A \subseteq A$. (Propietat reflexiva).
2. Si $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, llavors $A \subseteq C$. (Propietat transitiva).
3. Si $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, llavors $A = B$. (Propietat antisimètrica).
   El principi d'extensionalitat pot ser reescrit en termes d'aquesta propietat.
   $$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$
4. $\varnothing \subseteq A$ per qualsevol A. ($\varnothing \nsubseteq A$ implcaria que hi ha un element de $\varnothing$ que no és a A, però $\varnothing$ està buit, per tant no hi pot haver tal element i com a conseqüència $\varnothing \subseteq A$.

2.0.2 Exemples

- $\{\varnothing\} \nsubseteq \{\{\varnothing\}\}$. (En el primer conjunt hi ha l'element $\varnothing$ que no és al segon.
- $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$. ($\varnothing$ si que es troba al segon conjunt).
- $\{\{\varnothing\}\} \nsubseteq \{\varnothing\}$. (L'element $\{\varnothing\}$ no és al segon conjunt).
- $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. (L'element $\{\varnothing\}$ si que és al segon conjunt).

En el cas que un subconjunt de A sigui estrictament diferent a A, és a dir, és un subconjunt propi, s'utilitza el símbol $\subsetneq$.

3 Unió, intersecció i diferència de conjunts

- La **unió de conjunts** ($\cup$) s'obté afegint a A els elements de B.
  $$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$
  Per exemple, $\{0, 1, 2\} \cup \{1, 3, 5\} = \{0, 1, 2, 3, 5\}$.
- La **intersecció de conjunts** ($\cap$) s'obté prenent els elements conjunts dels dos conjunts.
  $$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge \in B\}$$
  Per exemple, $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 5, 7\} = \{1\}$.
- La **diferència de conjunts** ($\smallsetminus$) s'obté traient de A els elements de B. Per exemple, $\{0, 1, 2\} \smallsetminus \{1, 3, 5\} = \{0, 2\}$.

Aquestes operacions verifiquen les següents igualtats:

$$A = (A \smallsetminus B) \cup (A \cap B)$$

$$A \smallsetminus B = A \smallsetminus (A \cap B)$$

4 Propietats de les operacions amb conjunts

4.1 Propietats de la unió i la intersecció

Siguin A, B i C conjunts.

- Associativitat:
  - $A \cap (B \cap C) = (A\cap)B \cap C$.
  - $A \cup (B \cup C) = (A\cup)B \cup C$.
- Commutativitat:
  - $A \cap B = B \cap A$.
  - $A \cup B = B \cup A$.
- Distributivitat:
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Idempotència:
  - $A \cap A = A$.
  - $A \cup A = A$.
- Unió amb el buit:
  - $A \cap \varnothing = \varnothing$.
  - $A \cup \varnothing = A$.

4.2 Propietats de la diferència

La diferència de conjunts no és commutativa.

Proposició 4.1. $A \setminus B = B \setminus A$ si i només si $A = B$

Demostració. Suposem que $A \setminus B = B \setminus A$. Es vol veure que $A = B$. Cal veure que $A \subseteq B$ i que $B \subseteq A$. Comencem per demostrar que $A \subseteq B$. Sigui $x \in A$. Es suposa que $x \notin B$, llavors $x \in A \setminus B$. Per tant $x \in B \setminus A$, que vol dir que $x \in B$ i $x \notin A$, cosa que contradiu la hipòtesi inicial. Per tant tota $x \in A$ llavors $x \in B$, és a dir $A \subseteq B$. Per demostrar l'altre sentit es fa el mateix procediment canviant A per B. Per tant $A = B$. $\square$

- $A \setminus A = \varnothing$ i $A \setminus \varnothing = A$.
- $\varnothing \setminus A = \varnothing$

4.2.1 Lleis de DeMorgan

- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

La diferència es distribueix per l'esquerra però canvia la intersecció per unió i viceversa. Això es deu a que la diferència actua com una negació.

- $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
- $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

La diferència també es pot distribuir per la dreta però en aquest cas no canvien les operacions ja que la diferència no està negant les operacions.

4.3 Demostració de propietats de les operacions

Per a demostrar que dos conjunts A i B són els mateixos cal demostrar que $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

Proposició 4.2 (Propietat distributiva)**.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap C)$

Demostració. Cal demostrar que $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap C) \cup (A \cap C)$ i que $(A \cap C) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

- **Cas** $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap C) \cup (A \cap C)$: Sigui $x \in A \cap (B \cup C)$, llavors $x \in A$ i $x \in B \cup C$. Aquí apareixen dos casos.
  - **Cas 1:** $x \in B$. Llavors $x \in A \cap B$ i per tant $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  - **Cas 2:** $x \in C$. Llavors $x \in A \cap C$ i per tant $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

  Per tant es compleix la inclusió.
- **Cas** $(A \cap C) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$**:** Sigui $x \in (A \cap C) \cup (A \cap C)$. Llavors apareixen dos casos.
  - **Cas 1:** $x \in (A \cap B)$. Llavors $x \in A$ i $x \in B$, per tant $x \in B \cup C$ i per tant $x \in A \cap (B \cup C)$.
  - **Cas 2:** $x \in (A \cap C)$. Llavors $x \in A$ i $x \in C$, per tant $x \in B \cup C$ i per tant $x \in A \cap (B \cup C)$

Per tant els conjunts dels dos costats de l'equació s'inclouen mútuament i per tant són iguals. $\square$

4.4 Exemples

Definim els intervals reals com

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{Interval obert}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{Interval tancat}$$

- $(0, 2) \cap (1, 3) = (1, 2)$
- $(0, 2) \cap [1, 3) = [1, 2)$
- $(0, 2) \cup (1, 3) = (0, 3)$
- $(0, 2) \cup [2, 3) = (0, 3)$
- $(0, 2) \cup (2, 3) = (0, 3) \setminus \{2\}$
- $(0, 2) \setminus (1, 3) = (0, 1]$

- $(0,4) \setminus (1,2) = (0,1] \cup [2,4)$
- $(0,2) \setminus [1,3] = (0,1)$
- $(0,2] \cap [2,3] = \{2\}$
- $(0,2] \setminus [2,3] = (0,2)$
- $(1,2) \setminus (0,3) = \varnothing$
- $(1,3) \cap (5,6) = \varnothing$

5 Complementari

Quan es té un conjunt U (univers) tal que tots els conjunts que es discuteixen són subconjunts de U, es pot definit el conjunt complementari de A.

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

És a dir $A^c = U \setminus A$ per $A \subseteq U$.

5.0.1 Propietats dels complementaris

1. $(A^c)^c = A$.
2. $\varnothing^c = U$.
3. $U^c = \varnothing$.
4. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
5. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
6. $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$.
7. $A \subseteq B \leftrightarrow B^c \subseteq A^c$.
8. $A \subseteq B^c \leftrightarrow A \cap B = \varnothing$. ($A$ i B són disjunts).
9. $A^c \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = U$.
10. $A^c = B \leftrightarrow (A \cup B = U) \wedge (A \cap B = \varnothing)$.

6 Unions i interseccions en famílies de conjunts

Es pot generalitzar la unió i la intersecció de conjunts.

$$\bigcup_{i \in I} A_i \ \text{(Unió)} \qquad \bigcap_{i \in I} A_i \ \text{(Intersecció)}$$

On el conjunt I és una conjunt d'índexs. Es defineixen les operacions de la següent manera.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \ \ x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

En el cas de la intersecció cal tenir en compte que I no pot ser $\varnothing$ ja que el conjunt resultant no existeix.

6.0.1 Exemples

- Sigui $A_n = (\frac{1}{n}, n+1) \subseteq \mathbb{R}$. Considerem $n \in \mathbb{N}$.

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = (0,\infty) \quad \text{i} \quad \bigcap_{n\geq 1} A_n = (1,2)$$

- Sigui $A_n\{n, 2n\}$ i $n \in \mathbb{N}$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N} \quad \text{i} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$$

- Sigui $A_n = \{n, -n\}$ i $n \in \mathbb{N}$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{Z} \quad \text{i} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$$

6.1 Propietats

1. Distributivitat
   - $A \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (A \cap A_i)$.
   - $A \cup \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (A \cup A_i)$, sempre i quan $I \neq \varnothing$.
2. Distribució de la negació:
   - $A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (A \setminus A_i)$
   - $A \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (A \setminus A_i)$
3. Lleis de DeMorgan
   - $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$.
   - $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$

Llavors es poden fer les següents observacions:

1. $\bigcup_{i\in I} A_i$ és el conjunt més petit possible que inclou a cada A_i. Ja que cada A_i està inclòs en la unió de tots, i si cada A_i és subconjunt d'un conjunt més gran B, llavors la unió també és subconjunt de B.

2. Per $i \neq \varnothing$, $\bigcap_{i\in I} A_i$ és el conjunt més gran inclòs en cada A_i. Ja que el conjunt intersecció és subconjunt de qualsevol A_i, i si hi ha un subconjunt B inclòs en cada A_i, llavors també ho està en la intersecció.

6.1.1 Exemple de demostració

Proposició 6.1. $A \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$.

Demostració. Cal demostrar que el conjunt de cada costat de la igualtat està inclòs en l'altre.

($\subseteq$) Sigui $x \in A \cap \bigcup_{i \in I} A_i$. Això vol dir que $x \in A$ i $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Per tant hi ha un i_0 tal que $x \in A_{i_0}$. Per tant $x \in A \cap A_{i_0}$. Per tant x pertany a algun element de la família $A \cap A_i$, i si pertany a algun llavors també pertany a la unió.

($\supseteq$) Sigui $x \in \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$. Per tant hi ha un $i_0 \in I$ tal que $x \in A \cap A_{i_0}$. Aleshores $x \in A$ i $x \in A_{i_0}$. Llavors $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Com que $x \in A$ i $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, llavors es compleix que $x \in A \cap \bigcup_{i \in I} A_i$.

Com que la inclusió és compleix en els dos sentits, llavors els dos conjunts són iguals. □

7 Conjunt potència

Sigui A un conjunt. El conjunt potència de A, $\mathcal{P}(A)$, és el conjunt dels subconjunts de A.

$$\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

Per exemple, sigui $A = \{0, 1, 2\}$, llavors

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

7.0.1 Observacions

1. $\{a\} \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow a \in A$.
2. $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow a \in A \wedge b \in A$.

Aquestes dues observacions es poden fer servir per comprovar si un subconjunt forma part del conjunt potència d'un altre sense haver de construir-lo.

Proposició 7.1. Si A té n elements, llavors $\mathcal{P}(A)$ en té 2^n.

Demostració. Per inducció. Es pren com a cas base $A = \varnothing$, que té 0 elements, llavors $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$, té un sol element per tant té 2^0 elements.
Per hipòtesi inductiva es pren que si A té n elements, llavors el seu conjunt potència en té 2^n. Es vol veure que per A amb $n + 1$ elements, el conjunt potència té 2^{n+1} elements.
Si A té $n + 1$ elements se li'n pot treure un, a. Si es construeix el conjunt potència de A' (A sense a), té 2^n elements. Per tant

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A') \cup \{x \cup \{a\} \mid x \in \mathcal{P}(A')\}$$

Els dos conjunts són disjunts, a més, es forma un nou subconjunt que conté $\{a\}$ per cada element de $\mathcal{P}(A)$, per tant se'n formen 2^n. Com que els dos conjunts són disjunts, llavors hi ha $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ elements. □