Introducció al Càlcul Diferencial **Matemàtiques**

Examen Final. Part 1. Semestre de Tardor 2017-2018

1. Demostreu que si una successió té límit, aquest és únic. I proveu també que tota successió acotada té límit.

2. Suposem que tenim dues funcions f i g complint:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$
Proveu que si $l > 0$, aleshores $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty$.

3. Sigui la funció definida per l'expressió
$$f(x) = \sqrt{\log(x^2-4)-2}\,.$$
   (a) Determineu el domini i el recorregut de f.
   (b) Digueu si f és injectiva. En cas afirmatiu justifiqueu la resposta i en cas negatiu doneu un interval on f sí que ho sigui i calculeu la funció inversa restringida a aquest subconjunt.

4. Utilitzeu la definició de límit per demostrar que
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3}{x+1} = -3\,.$$

5. Demostreu que el polinomi $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$ té una arrel a l'interval $[0,2]$. Doneu també un interval d'amplada com a molt de 0.25 que contingui aquesta arrel.

6. Siguin $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ dues successions de nombres reals definides per:
$$x_1 = 1, \quad y_1 = 2, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \quad \text{i} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \qquad \text{per a cada } n \in \mathbb{N}.$$
Demostreu que:
   (a) $0 < x_n \le y_n$, per a cada $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $(x_n)_n$ és creixent i $(y_n)_n$ és decreixent.
   (c) $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ són convergents i els seus límits són iguals.

7. Determineu per a quins valors d'$a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$ és contínua la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per
$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \le 0, \\ ax\log x, & \text{si } 0 < x < 1, \\ |x-b|, & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

TOTS ELS EXERCICIS VALEN EL MATEIX
ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT
POSEU EL VOSTRE NOM I COGNOM EN CADA FULL