Resum de Geometria Lineal

Mario Vilar i Alex Cañas

17 de gener de 2022

1 Espais afins

1.1 Espai afí

Definició 1.1 (espai afí). *Un espai afí sobre $\mathbb{K}$ és un triple $(\mathbb{A}, E, \phi)$, on $\mathbb{A}$ és un conjunt, E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita i ϕ és una aplicació:*

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{A} \times E & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ & (p, \overrightarrow{u}) & \longmapsto & \phi(p, \overrightarrow{u}) := p + \overrightarrow{u} \end{array} \tag{1.1}$$

amb les propietats següents:

1. $(p + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = p + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$, $\forall p \in \mathbb{A}, \forall u, v \in E$;
2. *fixat $p \in \mathbb{A}$, l'aplicació $f : E \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que $f(\overrightarrow{u}) = p + \overrightarrow{u}$ és bijectiva.*

1.2 Varietats lineals

Definició 1.2 (Varietat lineal). *Una varietat lineal en un espai afí $(\mathbb{A}, E)$ sobre un cos $\mathbb{K}$ és un subconjunt de la forma*

$$\mathbb{L} = p + F := \{p + u \mid u \in F\}, \tag{1.2}$$

on $p \in \mathbb{A}$ és un punt i $F \subset E$ és un subespai vectorial. Diem que F és el subespai director de $\mathbb{L}$ i que $\dim \mathbb{L} = \dim F$. Així, els punts són varietats lineals de dimensió 0 i l'única varietat lineal de dimensió n és $\mathbb{A}$.

Proposició 1.3. *Siguin $\mathbb{L} = p + F, \mathbb{M} = q + G$ varietats lineals. Aleshores,*

$$\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset \iff \vec{pq} \in F + G. \tag{1.3}$$

Demostració.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \emptyset \implies \exists q \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$. Aleshores, $\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{p_1q} + \overrightarrow{qp_2} \in F_1 + F_2$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\overrightarrow{p_1p_2} \in F_1 + F_2$ vol dir que $\overrightarrow{p_1p_2} = u_1 + u_2, u_1 \in F_1, u_2 \in F_2$. Aleshores, $p_1 + u_1 = p_2 + \overrightarrow{p_2p_1} + u_1 = p_2 - u_1 - u_2 + u_1 = p_2 - u_2 \in \mathbb{L}_2$. Per tant, $p_1 + u_1 \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \implies \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \emptyset$. ∎

Proposició 1.4. *Es té la fórmula següent per la suma de dues varietats lineals $\mathbb{L} = p + F$ i $\mathbb{M} = q + G$:*

$$\mathbb{L} + \mathbb{M} = p + \langle \vec{pq} \rangle + F + G. \tag{1.4}$$

Teorema 1.5 (Fórmules de Grassmann)**.** *Siguin* $\mathbb{L} = p + F$ *i* $\mathbb{M} = q + G$ *dues varietats lineals. Volem fer* $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim(\langle\overrightarrow{p_1p_2}\rangle + F + G)$*. Es tenen les fórmules següents:*

1. $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M})$, *si* $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$*;*
2. $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} + 1 - \dim(F \cap G)$, *si* $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset$*.*

Demostració. Aplicant la fórmula de Grassmann per a subespais vectorials i 1.4:

1. $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim(\langle\vec{pq}\rangle + F + G) = \dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M})$, ja que $\vec{pq} \in F + G$ pel fet de suposar que $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$.
2. $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim(\langle\vec{pq}\rangle + F + G) = \dim(F + G) + 1 = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) + 1 = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} + 1 - \dim(F \cap G)$, ja que $\vec{pq} \notin F + G$ pel fet de suposar que $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset$.

∎

1.3 Raons simples

Siguin a, b, c tres punts diferents en un espai afí sobre $\mathbb{K}$. Suposem que estan alineats. Recordem que això implica que $\vec{ac} = \lambda\vec{bc}, \lambda \in \mathbb{K}$.

Definició 1.6 (Raó simple)**.** *Aquest nombre* $\lambda \in \mathbb{K}$ *es diu raó simple dels punts* a, b, c *i es denota per* $\lambda = (a, b, c)$ *i depèn de l'ordre dels elements.*

1.4 Teoremes clàssics

Teorema 1.7 (Teorema de Tales)**.** *Siguin* r, s *rectes que es tallen en un punt* O*. Suposem que tres rectes paral·leles* ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 *tallen* r *en* P_1, P_2, P_3 *i tallen* s *en* Q_1, Q_2, Q_3 *(tots diferents d'*O*). Llavors:*

$$(P_1, P_2, P_3) = (Q_1, Q_2, Q_3). \tag{1.5}$$

Demostració. Escollim $\{O; \overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OQ_1}\}$ com a referència. Aleshores:

$$\begin{gathered}
\begin{array}{lll}
O = (0,0) & & \\
P_1 = (1,0) & Q_1 = (0,1) & \overrightarrow{P_1Q_1} = (-1,1) \\
P_2 = (a,0) & Q_2 = (0,c) & \overrightarrow{P_2Q_2} = (-a,c) \\
P_3 = (b,0) & Q_3 = (0,d) & \overrightarrow{P_3Q_3} = (-b,c)
\end{array} \\
(P_1, P_2, P_3) = \frac{b-1}{b-a}, \quad (Q_1, Q_2, Q_3) = \frac{d-1}{d-c}. \\
\left.\begin{array}{l} a = c \\ b = d \end{array}\right\} \implies (P_1, P_2, P_3) = (Q_1, Q_2, Q_3).
\end{gathered} \tag{1.6}$$

∎

Teorema 1.8 (Ceva)**.** *Donat un triangle de vèrtex* A_1, A_2, A_3 *del pla afí anomenem* a_i *al costat oposat d'*A_i*. Sigui* O *un punt que no pertany a cap dels costats i tal que, per a tot* i*, la recta que passa per* O *i* A_i *talla* a_i *en un punt* B_i*. Aleshores,*

$$(A_3, A_2, B_1)(A_1, A_3, B_2)(A_2, B_1, B_3) = -1. \tag{1.7}$$

Equivalentment, sigui $A_1A_2A_3$ *un triangle. Siguin* r, s, t *rectes que passen per* A_1, A_2, A_3 *respectivament i tallen els costats en punts* $B_1 \in A_2A_3, B_2 \in A_1A_3$ *i* $B_3 \in A_1A_2$*. Llavors,* r, s, t *són concurrents si i només si* $(A_3, A_2, B_1)(A_1, A_3, B_2)(A_2, B_1, B_3) = -1$*.*

Corol·lari 1.9 (Postulat d'Euclides)**.** *Sigui* $(\mathbb{A}, E)$ *un espai afí. Donats* $p, q \in \mathbb{A}$ *amb* $p \neq q$ *hi ha una i només una recta que conté* p *i* q*, que és* $\mathbb{L} = p + \langle\overrightarrow{pq}\rangle$*. En essència, per dos punts diferents passa una única recta.*

Demostració. Prenem $\mathbb{L} = p + \langle\overrightarrow{pq}\rangle$, que és una recta perquè $p \neq q \implies \overrightarrow{pq} \neq \overrightarrow{0}$. Sigui $\mathbb{L}'$ una recta que passa per p i per q; $\mathbb{L}' = p + F$. Aleshores, per a algun subespai F d'E de dimensió 1 podem dir:

$$\left.\begin{array}{l} p \in \mathbb{L}' \\ q \in \mathbb{L}' \end{array}\right\} \implies \overrightarrow{pq} \in F \implies F = \langle\overrightarrow{pq}\rangle \implies \mathbb{L}' = p + \langle\overrightarrow{pq}\rangle = L. \tag{1.8}$$

■

2 Afinitats

2.1 Propietats de les afinitats

Definició 2.1 (Aplicació afí)**.** *Donats dos espais afins* $(\mathbb{A}, E_1), (\mathbb{A}_2, E_2)$ *una aplicació afí és un parell d'aplicacions:*

$$f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2, \quad \tilde{f} : E_1 \longrightarrow E_2 \tag{2.1}$$

tals que:

1. $\tilde{f}$ *és lineal,*
2. $\forall p \in \mathbb{A}_1, \forall \vec{u} \in E_1$*, tenim* $f(q) = f(p + \vec{u}) = f(p) + \tilde{f}(\vec{u})$*.*

Equivalentment, si en la segona propietat posem $q = p + u$*, tenim que* $\overrightarrow{f(p)f(q)} = \tilde{f}(\vec{pq})$*.*

Definició 2.2 (Afinitat)**.** *Diem que una aplicació afí és una afinitat si és bijectiva. En altres paraules, una afinitat és una aplicació afí bijectiva d'un espai afí en ell mateix.*

Observació 2.3.

1. *Sovint es diu només que* $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ *és una aplicació afí i que* $\tilde{f}$ *és l'aplicació lineal associada. En altres paraules,* $\tilde{f}$ *està determinada per* f*: si* f *és una aplicació afí, llavors* $\tilde{f}$ *és única.*
2. *Si* $\tilde{f}(\vec{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}, \forall p, q$ *aleshores* $\forall p \in \mathbb{A}_1, \forall v \in E_1$ *tenim que*

$$\tilde{f}(v) = \tilde{f}(\overrightarrow{p(p+v)}) = \overrightarrow{f(p)f(p+v)} \implies f(p+v) = f(p) + \tilde{f}(v). \tag{2.2}$$

Propietat 2.4 (Propietats de les aplicacions afins)**.** *Siguin* $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2, g : \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_3$ *dues aplicacions afins. Aleshores:*

1. *La composició* $g \circ f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_3$ *és afí i* $(\widetilde{g \circ f}) = (\tilde{g} \circ \tilde{f})$*.*
2. f *és injectiva si, i només si,* $\tilde{f}$ *ho és.*
3. f *és exhaustiva si, i només si,* $\tilde{f}$ *ho és.*
4. f *és bijectiva si, i només si,* $\tilde{f}$ *ho és.*
5. *Una aplicació afí* f *envia una varietat lineal* $\mathbb{L} = a + F$ *a la varietat lineal* $f(\mathbb{L}) = f(a) + \tilde{f}(F)$*.*
6. *Sigui* $\mathbb{M}$ *una varietat lineal tal que* $f^{-1}(\mathbb{M}) \neq \emptyset$ *i sigui* $a \in f^{-1}(\mathbb{M})$*. Aleshores, si* $\mathbb{M} = f(a) + G$*, tindrem que* $f^{-1}(\mathbb{M}) = a + f^{-1}(G)$*.*

7. *Siguin* $a, b, c \in \mathbb{A}_1$ *tres punts alineats amb* $b \neq c$, *aleshores* $f(a), f(b), f(c) \in \mathbb{A}_2$ *també estan alineats o són el mateix punt. Si* $f(b) \neq f(c)$, *aleshores* $(a, b, c) = (f(a), f(b), f(c))$, *és a dir, la raó simple es manté per aplicacions afins.*

Proposició 2.5 (Propietats de les afinitats)**.** *Sigui* $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ *una aplicació afí d'endomorfisme associat* $\tilde{f} : E \longrightarrow E$. *Aleshores:*

1. f *és la identitat o una translació si, i només si,* $\tilde{f} = Id$ *(que és una aplicació afí).*
2. f *és una homotècia si, i només si,* $\tilde{f}$ *és una homotècia de raó* $\neq 0, 1$.
3. f *és una simetria si, i només si,* $f^2 = Id$ *i* $f \neq Id$.

Teorema 2.6. *Siguin* $(\mathbb{A}_1, E_1), (\mathbb{A}_2, E_2)$ *dos espais afins. Fixem punts* $p_1 \in \mathbb{A}_1, p_2 \in \mathbb{A}_2$ *i suposem donada una aplicació lineal* $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$. *Aleshores, existeix una única aplicació afí* $(f, f) : (\mathbb{A}_1, E_1) \longrightarrow (\mathbb{A}_2, E_2)$ *tal que* $f(p_1) = p_2$ *i* $\tilde{f} = \varphi$. *En altres paraules, una aplicació afí queda totalment determinada per l'aplicació lineal associada i la imatge d'un punt.*

Demostració. Comencem veient la unicitat. Si existeix tal aplicació afí $(f, \tilde{f})$ i suposem que $g : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ també satisfà $\tilde{g} = \varphi$ i $g(p) = q$, aleshores

$$g(x) = g(p_1 + \overrightarrow{p_1 x}) = g(p_1) + \tilde{g}\overrightarrow{p_1 x} = p_2 + \varphi(\overrightarrow{p_1 x}) = f(x); \tag{2.3}$$

per tant, p_1, p_2 i h la determinen completament. Això també ens diu com hem de definir f per provar l'existència. Posem $f(x) = p_2 + \varphi(\overrightarrow{p_1 x})$ i $f(y) = p_2 + \varphi(\overrightarrow{p_1 y})$. Per tant,

$$\overrightarrow{f(x)f(y)} = \overrightarrow{f(x)p_2} + \overrightarrow{p_2 f(y)} = -\varphi(\overrightarrow{p_1 x}) + \varphi(\overrightarrow{p_1 y}) = \varphi(\overrightarrow{p_1 y} - \overrightarrow{p_1 x}) = \varphi(\vec{xy}). \tag{2.4}$$

Per tant, f és una aplicació afí i, a més, $\tilde{f} = \varphi$. A més, $f(p) = q + \varphi(\vec{pp}) = q + 0 = q$. ∎

Proposició 2.7 (Les afinitats conserven les varietats lineals)**.** *Sigui* $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ *una aplicació afí. Sigui* $\mathbb{L} = a + F$ *una varietat lineal a* $\mathbb{A}_1$. *Aleshores:* $f(\mathbb{L}) = f(a) + \tilde{f}(F)$.

Demostració. Si $p \in \mathbb{L}$, llavors $p = a + v$ amb $v \in F$.

$$f(p) = f(a + v) = f(a) + \tilde{f}(v) \in f(a) + \tilde{f}(F) \tag{2.5}$$

El recíproc és el següent: sigui $q \in f(a) + \tilde{f}(F)$. Llavors, $q = f(a) + \tilde{f}(w)$ amb $w \in F$. Per tant, $q = f(a) + \tilde{f}(w) = f(a + w)$, on $a + w \in \mathbb{L} \implies q \in f(\mathbb{L})$. ∎

Proposició 2.8. *Les afinitats conserven el paral·lelisme.*

Demostració. És suficient suposar que f és una aplicació afí.

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{L}_1 = a_1 + F_1 \\ \mathbb{L}_2 = a_2 + F_2 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} f(\mathbb{L}_1) = f(a_1) + \tilde{F}_1 \\ f(\mathbb{L}_2) = f(a_2) + \tilde{f}(F_2) \end{aligned}\right\} \implies f(\mathbb{L}_1) \parallel f(\mathbb{L}_2). \tag{2.6}$$

Suposant que $F_1 \subseteq F_2$, aleshores $\tilde{f}(F_1) \subseteq \tilde{f}(F_2)$. ∎

Proposició 2.9 (Les afinitats conserven la raó simple)**.** *Sigui* $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ *una aplicació afí injectiva. Siguin* $a, b, c \in \mathbb{A}_1$ *punts alineats i diferents. Sigui* $\mathbb{L}$ *la recta que passa per* a, b, c. *Llavors,* $f(\mathbb{L})$ *és una recta que conté* $f(a), f(b), f(c)$.

Demostració. Posem $(a,b,c)=\lambda$. Com que estan alineats, $\vec{ac}=\lambda\vec{bc}$. Posem $\tilde{f}(\vec{ac})=\tilde{f}(\lambda\vec{bc})=\lambda\tilde{f}(\vec{bc})$. Si substituïm $\tilde{f}(\vec{ac})=\overrightarrow{f(a)f(c)}$ i $\lambda\overrightarrow{f(b)f(c)}$, tenim que la raó simple $(f(a),f(b),f(c))=\lambda$ es compleix. ■

Propietat 2.10 (Propietats del conjunt de punts fixos)**.**

1. *El conjunt de punts fixos és una varietat lineal.*
2. *Si $p_1,\dots,p_k$ són fixos, aleshores tots els punts de la varietat lineal $\{p_1\}+\cdots+\{p_k\}$ són fixos.*
3. *Si 1 no és VAP de l'endomorfisme $\tilde{f}$, aleshores l'afinitat té un únic punt fix.*

Demostració. Fixem un sistema de referència. Suposem que les equacions de f són

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Els punts fixos no són sinó varietats lineals de dimensió 0 que es transformen en ells mateixos. En notació ampliada, tenim que compleixen $x^*=Ax+b \iff x=Ax+b \iff (A-\mathbb{I})x=-b$. Per tant, es poden trobar mitjançant el sistema

$$(A-\mathbb{I})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},\ (A-\mathbb{I})x=-b \tag{2.8}$$

Això demostra el primer apartat i el segon n'és una conseqüència. Notem finalment que si 1 no és VAP, aleshores $\det(A-\mathbb{I})\neq 0$ i el sistema de punts fixos és compatible determinat. ■

2.2 Varietats lineals invariants

Definició 2.11 (Varietat lineal invariant)**.** *Diem que una varietat lineal $\mathbb{L}=a+F$ és invariant si es dona que $f(\mathbb{L})=\mathbb{L}$. Com que $f(a+F)=f(a)+\tilde{f}(F)$, la varietat $a+F$ és invariant si, i només si,*

1. *$\tilde{f}(F)\subset F$ i*
2. *$\overrightarrow{qf(q)}\in F$.*

Definició 2.12 (Recta invariant)**.** *Si una recta $r=a+\langle v\rangle$ és invariant, aleshores $\tilde{f}(\langle v\rangle)=\langle v\rangle$. És a dir, el vector director de r és propi.*

Proposició 2.13. *Si p és un punt fix de f i v és un vector propi de $\tilde{f}$, llavors $\mathbb{L}=p+\langle v\rangle$ és una recta invariant de f.*

Demostració. Suposem que $\tilde{f}(v)=\alpha v$. Llavors,

$$f(p+\lambda v)=f(p)+\lambda\tilde{f}(v)=f(p)+\lambda\alpha v=p+\lambda\alpha v\in\mathbb{L},\forall\lambda \implies f(\mathbb{L})\subset\mathbb{L} \tag{2.9}$$

■

Proposició 2.14. *Sigui $f:\mathbb{A}\longrightarrow\mathbb{A}$ una afinitat que en certa referència té matriu M. Un hiperplà d'equació $A_1x_1+\cdots+A_nx_n+B=0$ és invariant per f si, i només si, $(A_1,\dots,A_n,B)$ és un VEP de M^T i almenys un dels coeficients A_i és no nul.*

Definició 2.15 (Homologia). *Una homologia és una afinitat amb un hiperplà de punts fixos. Dins de la homologia distingim:*

- *la raó de la homologia: el valor propi* r *tal que* $\tilde{h} = rId$*;*
- *l'eix de la homologia: correspon al vector de la recta de punts fixos, és a dir, al VEP de VAP 1;*
- *la direcció de la homologia: correspon al VEP de VAP* r*.*

Teorema 2.16. *Una varietat lineal* $\mathbb{L} = a + F$ *és invariant per una afinitat* f *si, i només si:*

1. F *és un subespai invariant de* $\tilde{f}$*,*
2. $\overrightarrow{af(a)} \in F$*.*

Demostració.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Suposem que es compleixen les dues condicions. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{f}(F) \subseteq F \\ \overrightarrow{af(a)} \in F \end{array}\right\} \Longrightarrow f(a+v) = f(a) + \tilde{f}(v) = a + u + w, \ \forall v \in F, \ w \in F. \tag{2.10}$$

Per tant, $f(a+v) \in a + F$, $\forall v \in F$ i això implica que $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Ara suposem que $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$. Sabem que

$$\mathbb{L} = a + F \Longrightarrow f(\mathbb{L}) = f(a)\tilde{f}(F). \tag{2.11}$$

Si $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$, llavors $\tilde{f}(F) = F$ i això vol dir que F és invariant per $\tilde{f}$. A més,

$$a \in \mathbb{L}, \ f(a) \in \mathbb{L} \Longrightarrow \overrightarrow{af(a)} \in F. \tag{2.12}$$

■

3 Espais vectorials euclidians

3.1 Normes i angles

Definició 3.1 (Norma). *Sigui* E *un espai vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*. Una norma a* E *és una aplicació*

$$\begin{array}{rccl} \| \ \ \| : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ (sempre a } \mathbb{R}!) \\ & v & \longmapsto & \|v\| \end{array} \tag{3.1}$$

que compleix

1. $\|v\| = 0 \iff v = \overrightarrow{0}$,
2. $\|kv\| = |k| \cdot \|v\|$,
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(desigualtat triangular).*

$|k|$ *indica el valor absolut si* $k \in \mathbb{R}$ *o bé indica el mòdul si* $k \in \mathbb{C}$*.*

Lema 3.2 (Desigualtat de Cauchy-Schwarz). *Es compleix que*

$$|uv|^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v), \forall u, v \in E \tag{3.2}$$

Demostració. Si $v = \overrightarrow{0}$, aleshores la desigualtat és certa. Suposem $v \neq \overrightarrow{0}$ i considerem $k = \frac{uv}{v \cdot v}$. Aleshores:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (u - kv)(u - kv) = u \cdot u - k(vu) - k(uv) + k\overline{k}(v \cdot v) \\ &= u \cdot u - \frac{(uv)(vu)}{v \cdot v} - \frac{\overline{(uv)}(uv)}{v \cdot v} + \frac{(uv)\overline{(uv)}}{v \cdot v} \\ &= u \cdot u - \frac{(uv)\overline{(uv)}}{v \cdot v} = u \cdot u - \frac{|uv|^2}{v \cdot v}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

d'on $|uv|^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v), \forall u, v \in E$. ■

Teorema 3.3 (Teorema de Pitàgores)**.** *Si $u \cdot v = 0$, aleshores $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.*

Demostració.

$$\|u + v\|^2 = (u + v)(u + v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \cdot v) \tag{3.4}$$

■

3.2 Subespais ortogonals

Proposició 3.4. *Sigui S un subconjunt de E, on $(E, \cdot)$ és un espai vectorial Euclidià. Tenim que*

1. *$S^{\perp}$ és subespai vectorial d'E.*
2. *$S^{\perp} = \langle S \rangle^{\perp}$.*
3. *Si $T \subseteq S$, aleshores $S^{\perp} \subseteq T^{\perp}$.*

Demostració. Siguin $x, y \in S^{\perp}$, o sigui $x \cdot u = y \cdot u = 0$, per a tot $u \in S$. Aleshores, $(x + y) \cdot u = x \cdot u + y \cdot u = 0$. Per tant, $x + y \in S^{\perp}$. Anàlogament, si $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores $\lambda x \in S^{\perp}$. Pel que fa al tercer apartat, suposem que $F \subseteq G$ i que $x \in G^{\perp}$. Aleshores, x és ortogonal a tots els vectors de G, en particular ho és als d'F. Per tant, $x \in F^{\perp}$. ■

Proposició 3.5. *Sigui $(E, \cdot)$ un espai vectorial Euclidià. Si F és un subespai vectorial d'E, aleshores:*

1. *$E = F \oplus F^{\perp}$.*
2. *$\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$.*
3. *$(F^{\perp})^{\perp} = F$.*

Demostració. És immediat veure que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Prenem una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de F i la completem a una base de E tal que $\{v_1, \ldots, v_k e_{k+1}, \ldots, e_n\}$. Apliquem ara el mètode de Gram-Schmidt per convertir aquesta base en una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. Observem que $u_j \in F^{\perp}$ quan $j \in \{k + 1, \ldots, n\}$. Per tant, qualsevol $v \in E$ es pot escriure de forma única com

$$v = (a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k) + (a_{k+1} u_{k+1} + \cdots + a_n u_n) \tag{3.5}$$

on el primer parèntesi pertany a F i el segon a $F^{\perp}$. Això prova que $E = F \oplus F^{\perp}$. La fórmula de les dimensions se segueix de la suma directa. És fàcil verificar que $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$. Per dimensions obtenim la igualtat d'espais vectorials. ■

3.3 Orientacions

Proposició 3.6. *Un endomorfisme f és ortogonal si, i només si, per a tota base ortonormal $e_1, \dots, e_n$ tenim que $v_i := f(e_i)$ és també una base ortonormal. A més, la base v_i té la mateixa orientació que la base e_i si, i només si, $f \in SO(n)$.*

Demostració. Suposem que f és ortogonal i que la base e_i és ortonormal. Aleshores,

$$v_i \cdot v_j = f(e_i) \cdot f(e_j) = e_i \cdot e_j. \tag{3.6}$$

En direcció contrària, sigui e_i una base ortonormal. La matriu de canvi de base P de la base v_i en funció de e_i és, per construcció, la matriu de f. Com la matriu de Gram $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = \mathbb{I}$ i P és una matriu ortogonal, trobem que f és ortogonal. La afirmació sobre la preservació de la orientació és conseqüència de la relació:

$$\det f = \det_{e_i}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{e_i}(v_1, \dots, v_n). \tag{3.7}$$

■

3.4 Producte vectorial

Definició 3.7 (Producte vectorial)**.** *El producte vectorial d'u i v és una operació bilineal que retorna el vector $u \wedge v$, el qual té les següents propietats:*

1. $(u_1 + u_2) \wedge v = u_1 \wedge v + u_2 \wedge v$;
2. $(\lambda u) \wedge v = \lambda(u \wedge v)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $u \wedge (v_1 + v_2) = u \wedge v_1 + u \wedge v_2$;
4. $u \wedge (\lambda v) = \lambda(u \wedge v)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Demostració. Donat $w \in E$ qualsevol, tenim per que

$$\begin{gathered} ((u_1 + u_2) \wedge v) \cdot w = \det(u_1 + u_2, v, w). \\ (u_1 \wedge v + u_2 \wedge v) \cdot w = (u_1 \wedge v) \cdot w + (u_2 \wedge v) \cdot w \xrightarrow{\det(u_1,v,w)+\det(u_2,v,w)} \det(u_1 + u_2, v, w). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Per tant, $(u_1 + u_2) \wedge v = u_1 \wedge v + u_2 \wedge v$. Les altres igualtats es demostren per analogia. ■

Propietat 3.8 (Altres propietats del producte vectorial)**.**

1. $v \wedge u = -(u \wedge v)$, $\forall u, v \in E$.
2. $u \wedge v$ *és ortogonal a* u *i a* v.
3. $u \wedge u = 0$, $\forall u \in E$.
4. $u \wedge v = 0 \iff u, v$ *són linealment dependents.*
5. *Si* $u \wedge v \neq 0$, *aleshores* $\langle u \wedge v \rangle = \langle u, v \rangle^{\perp}$.
6. $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$.
7. *Donats* $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ *i* $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ *tenim que*

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix}. \tag{3.9}$$

8. $(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$.

9. $(u \wedge v) \wedge w + (v \wedge w) \wedge u + (w \wedge u) \wedge v = 0$ *(identitat de Jacobi).*
10. $(u_1 \wedge u_2) \cdot (v_1 \wedge v_2) = (u_1 \cdot v_1)(u_2 \cdot v_2) - (u_1 \cdot v_2)(u_2 \cdot v_1)$.
11. *Donats* u, v *no nuls,* $\exists \theta \in \mathbb{R},\ 0 \leq \theta \leq \pi$ *tal que*

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\| &= \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin(\theta) \\ u \cdot v &= \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Demostració. Ho dividirem en 11 demostracions diferents, una per cada apartat.

1. Donat $w \in E$ qualsevol, aplicant les propietats dels determinants:

$$-(u \wedge v) \cdot w = -\det(u, v, w) = \det(v, u, w). \tag{3.11}$$

2. És directe donat que el determinant d'una matriu amb dues columnes iguals és 0:

$$\begin{aligned} (u \wedge v) \cdot u = \det(u, v, u) = 0, \\ (u \wedge v) \cdot v = \det(u, v, v) = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

3. Com que $v \wedge u = -(u \wedge v)$, $u \wedge u = -(u \wedge u) \iff 2(u \wedge u) = 0 \iff u \wedge u = 0$.

4. Si $v = \lambda u$, aleshores $u \wedge v = u \wedge (\lambda u) = \lambda(u \wedge u) = 0$. Recíprocament, si $u \wedge v = 0$ llavors $\det(u, v, w) = 0$, $\forall w \in E$ i això implica que u, v són linealment dependents. En cas contrari, podríem escollir w tal que u, v, w fos una base de E i, per tant, $\det(u, v, w) \neq 0$.

5. Com que $(u \wedge v) \cdot u = 0$ i $(u \wedge v) \cdot v = 0$, tenim que $\langle u \wedge v \rangle \subseteq \langle u, v \rangle^{\perp}$. Ara bé, si $u \wedge v \neq 0$, u, v són linealment independents i $\dim\langle u, v \rangle = 2$. Així doncs, $\dim\langle u, v \rangle = \dim\langle u, v \rangle^{\perp}$ i, per tant, la inclusió ha de ser igualtat.

6. $e_1 \wedge e_2 \in \langle e_1, e_2 \rangle^{\perp} = \langle e_3 \rangle$, ja que la base e_1, e_2, e_3 és ortonormal per hipòtesi. Per tant, $e_1 \wedge e_2 = \lambda e_3$ per a algun $\lambda \in \mathbb{R}$. A més,

$$\lambda = (\lambda e_3) \cdot e_3 = (e_1 \wedge e_2) \cdot e_3 = \det_{e_i}(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{3.13}$$

Les altres dues igualtats es demostren de la mateixa manera, tenint en compte que

$$\det_{e_i}(e_2, e_3, e_1) = \det_{e_i}(e_3, e_1, e_2) = 1. \tag{3.14}$$

7. Per bilinealitat, tenim:

$$\begin{aligned} u \wedge v = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \wedge (y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3) = x_1 y_1 e_1 \wedge e_1 + x_1 y_2 e_1 \wedge e_2 + x_1 y_3 e_1 \wedge e_3 \\ + x_2 y_1 e_2 \wedge e_1 + x_2 y_2 e_2 \wedge e_2 + x_2 y_3 e_2 \wedge e_3 + x_3 y_1 e_3 \wedge e_1 + x_3 y_2 e_3 \wedge e_2 + x_3 y_3 e_3 \wedge e_3 \\ = (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3 - (x_1 y_3 - x_3 y_1) e_2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 \\ = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

8. Si $u \wedge v = 0$, llavors u, v són linealment dependents. Si $v = \lambda u$, llavors:

$$(u \cdot w)(\lambda u) - ((\lambda u) \cdot w) u = \lambda(u \cdot w) u - \lambda(u \cdot w) u = 0. \tag{3.16}$$

Si $u\wedge v \neq 0$, aleshores $(u\wedge v)\wedge w \in \langle u\wedge v\rangle^{\perp} = \langle u, v\rangle$. Per tant, $(u\wedge v)\wedge w = \alpha u+\beta v,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Per determinar-los, fem el següent:

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} u &= (x_1, x_2, x_3),\\ v &= (y_1, y_2, y_3),\\ w &= (z_1, z_2, z_3)\end{aligned}\right\} \quad u \wedge v = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).\\
&(u \wedge v) \wedge e_1 = (0, x_1y_2 - x_2y_1, -x_3y_1 + x_1y_3) = -y_1(x_1, x_2, x_3) + x_1(y_1, y_2, y_3),\\
&(u \wedge v) \wedge e_2 = (-x_1y_2 + x_2y_1, 0, x_2y_3 - x_3y_2) = -y_2(x_1, x_2, x_3) + x_2(y_1, y_2, y_3),\\
&(u \wedge v) \wedge e_3 = (x_3y_1 - x_1y_3, -x_2y_3 + x_3y_2, 0) = -y_3(x_1, x_2, x_3) + x_3(y_1, y_2, y_3).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

En tots tres casos es compleix que $(u \wedge v) \wedge w = -(v \cdot w)u + (u \cdot w)v$. Com que tots dos membres de la igualtat depenen linealment de w, és suficient haver comprovat la igualtat en una base.

9. Aplicant que $(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$, tenim:

$$\left.\begin{aligned}(u \wedge v) \wedge w &= (u \cdot w)v - (v \cdot w)u\\ (v \wedge w) \wedge u &= (v \cdot u)w - (w \cdot u)v\\ (w \wedge u) \wedge v &= (w \cdot v)u - (u \cdot v)w\end{aligned}\right\} (u \wedge v) \wedge w + (v \wedge w) \wedge u + (w \wedge u) \wedge v = 0. \tag{3.18}$$

10. Primerament, $(u_1 \wedge u_2) \cdot (v_1 \wedge v_2) = \det(u_1, u_2, v_1 \wedge v_2)$. Ara operem:

$$\begin{aligned}\det(v_1 \wedge v_2, u_1, u_2) &= ((v_1 \wedge v_2) \wedge u_1) \cdot u_2 = ((v_1 \cdot u_1)v_2 - (v_2 \cdot u_1)v_1) \cdot u_2\\ &= (u_1 \cdot v_1)(u_2 \cdot v_2) - (u_1 \cdot v_2)(u_2 \cdot v_1).\end{aligned} \tag{3.19}$$

11. Apliquem la fórmula anterior:

$$\|u \wedge v\|^2 = (u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = (u \cdot u)(v \cdot v) - (u \cdot v)(v \cdot u) = \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2. \tag{3.20}$$

Si definim $a = \frac{\|u\wedge v\|}{\|u\|\cdot\|v\|}$ i $b = \frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}$, aleshores,

$$a^2 + b^2 = \frac{\|u \wedge v\|^2 + (u \cdot v)^2}{\|u\|^2\|v\|^2} = 1. \tag{3.21}$$

Per tant, $a = \sin(\theta),\ b = \cos(\theta)$ per a algun θ. A més, $a \geq 0 \implies 0 \leq \theta \leq \pi$.

■

4 Espais afins euclidians

4.1 Distància

Definició 4.1 (Distància). *Una distància entre dos punts $p, q \in \mathbb{A}$ com $d(p, q) := \|\overrightarrow{pq}\|$, és a dir, la distància és una aplicació*

$$\begin{array}{rccl} d: & A \times A & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (p, q) & \longmapsto & d(p, q) := \|\overrightarrow{pq}\|,\end{array} \tag{4.1}$$

on es compleix:

1. $d(p, q) \geq 0$,
2. $d(p, q) = 0 \iff p = q$,
3. $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ *(desigualtat triangular).*

4.2 Distància entre varietats

Proposició 4.2. *Es compleix que la distància d'un punt a un hiperplà és:*

$$d(p, \mathbb{L}) = \frac{|A_1 p_1 + \cdots + A_n p_n + B|}{\sqrt{(A_1)^2 + \cdots + (A_n)^2}}. \tag{4.2}$$

Proposició 4.3. *Es compleix que la distància d'un punt a un hiperplà és:*

$$d(p, \mathbb{L}) = \frac{|A_1 p_1 + \cdots + A_n p_n + B|}{\sqrt{(A_1)^2 + \cdots + (A_n)^2}}. \tag{4.3}$$

5 Endomorfismes ortogonals

Proposició 5.1 (Propietats de les matrius ortogonals)**.** *Donada una matriu $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, les afirmacions següents són equivalents:*

1. *M és una matriu ortogonal,*
2. *$M^T M = \mathbb{I}$,*
3. *M és la matriu d'un endomorfisme ortogonal en una base ortonormal.*

Demostració. Escollim una base $e_1, \ldots, e_n$ a E i diem $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ a la matriu de Gram d'aquesta base. Sigui $f : E \longrightarrow E$ un endomorfisme i sigui M la matriu de f en la base $e_1, \ldots, e_n$. Llavors, f és ortogonal si, i només si,

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f(y) &= x \cdot y,\ \forall x, y \in E; \\ (MX)^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) MY &= X^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) Y,\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n; \\ X^T M^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) MY &= X^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) Y,\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n; \\ M^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) M &= \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi). \end{aligned} \tag{5.1}$$

En el cas particular que la base $e_1, \ldots, e_n$ sigui ortonormal, tenim que $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = \mathbb{I}$ i ens queda la condició $M^T M = \mathbb{I}$. ■

5.1 Teorema espectral

Teorema 5.2 (Teorema espectral)**.** *Si un endomorfisme $f : E \longrightarrow E$ és ortogonal, hi ha alguna base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ on f té la matriu següent:*

$$f = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{A_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

i

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha_i < \pi,\ \forall i. \tag{5.3}$$

Demostració. Sigui $f : E \longrightarrow E$, f ortogonal. Considerem els subespais propis:

$$E^+ = \{v \in E \mid f(v) = v\},\ E^- = \{v \in E \mid f(v) = -v\}. \tag{5.4}$$

Llavors E^+ i E^- són ortogonals (perquè VEPs de VAPs diferents són ortogonals). Sigui $F = E^+ \oplus E^-$. El subespai F és invariant per f. Aleshores, $F^\perp$ també és invariant per f. Podem escriure $E = E^+ \oplus E^- \oplus F^\perp$. Considerem la restricció de f a $F^\perp$ i sigui $p(x)$ el polinomi mínim de la restricció: $p(x)$ no té arrels reals, ja que $b_i > 0$, $\forall i$, i

$$p(x) = (x^2 + a_1x + b_1) \cdots (x^2 + a_kx + b_k). \tag{5.5}$$

D'aquesta manera, el determinant de la restricció d'f a $F^\perp$ és igual a 1. Posem $p(x) = (x^2 + a_1x + b_1) \cdot r(x)$ i escollim $u \in F^\perp$ tal que $v_1 = r(f)(u) \neq 0$. Sabent que ens surt $p(f)(u) = 0$:

$$\begin{aligned} p(f)(u) = 0 \implies (f^2 + a_1f + b_1\mathbb{I})(r(f)(u)) &\implies (f^2 + a_1f + b_1\mathbb{I})(v_1) = 0 \\ &\implies f(f(v_1)) = -a_1f(v_1) - b_1v_1. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Aleshores, $\langle v_1, f(v_1)\rangle$ és invariant per f. Així, $E = E^+ \oplus E^- \oplus \langle v_1, f(v_1)\rangle \oplus \langle v_1, f(v_1)\rangle^\perp$. Repetint el mateix raonament iterativament, ens queda:

$$E = E^+ \oplus E^- \oplus \langle v_1, f(v_1)\rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_k, f(v_k)\rangle. \tag{5.7}$$

$\blacksquare$