1 (Errors de primera i segona espècie).

1. L'error de *primera espècie* és la probabilitat de rebutjar la hipòtesi nul·la tot i ésser certa (en altres paraules, un *fals positiu*) i que definirem com: $\alpha_1(\theta) = P_\theta(A_1) = \mathbb{E}_\theta(\varphi(x)) = \Phi(\theta)$, per a tot $\theta \in \Theta_0$.
2. L'error de *segona espècie*, que consisteix en la probabilitat d'acceptar la hipòtesi nul·la tot i ser falsa (en altres paraules, un *fals negatiu*), i que definirem com $\alpha_2(\theta) = P_\theta(A_0) = 1 - \mathbb{E}_\theta(\varphi(x)) = 1 - \Phi(\theta)$, per a tot $\theta \in \Theta_1$.

Aquesta $\Phi : \Theta \longrightarrow [0,1]$ és la funció de potència definida per $\mathbb{E}(\varphi(x)) = P_\theta(A_1)$.

	Acceptar H_0	Rebutjar H_0
H_0 certa	Decisió correcta	Error de primera espècie
H_0 falsa	Error de segona espècie	Decisió correcta

2 (Potència del test). La restricció de Φ sobre $\theta \in \Theta_1$ s'anomena *potència* del test φ contra l'alternativa θ, i representa la probabilitat de rebutjar la hipòtesi nul·la quan és falsa, ja que el valor vertader del paràmetre és θ.

3 (Nivell de significació). L'error màxim de primera espècie s'anomena *nivell de significació*. Sigui $\alpha \in (0,1)$, direm que el test φ té nivell de significació α si $\sup_{\theta\in\Theta_0} \alpha_1(\theta) \leq \alpha$.

4 (UMP). Designarem $\mathscr{D}_\alpha$ el conjunt de tots els tests de nivell de significació α. Aleshores, donats dos testos φ i φ' de $\mathscr{D}_\alpha$ direm que φ és més potent que φ' si $\Phi_{\varphi'}(\theta) \leq \Phi_\varphi(\theta)$, per a tot $\theta \in \Theta_1$. Fixat un nivell de significació α, direm que un test de la classe $\mathscr{D}_\alpha$ *uniformement de màxima potència* (UMP) si és més potent que qualsevol altre test de $\mathscr{D}_\alpha$.

5 (de Neyman-Pearson). Fixat $\alpha \in (0,1)$ i assumim que existeix una constant positiva c_α tal que $A_0 = \{x \mid \mathscr{L}(x,\theta_1) \leq c_\alpha \mathscr{L}(x,\theta_0)\}$ satisfà $P_{\theta_0}(A_0^c) = \alpha$. Aleshores, el test $\varphi(x) = \mathbb{1}_{A_0^c}(x)$ és UMP al nivell de significació α per contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta = \theta_1$. Quan $\mathscr{L}(x,\theta_0)$ no s'anul·la (quan no depèn de θ), aleshores posem $A_0 = \{\frac{\mathscr{L}(x,\theta_1)}{\mathscr{L}(x,\theta_0)} \leq c_\alpha\}$.

6. Si no podem aplicar el lema de Neyman-Pearson (no existeix c_α tal que $P_{\theta_0}(A_0^c) = \alpha$), el que podem fer és determinar la constant c_α de manera que $\alpha' = P_{\theta_0}(A_0^c) \leq \alpha$. Aleshores, A_0 serà la regió d'acceptació d'un test UMP al nivell α'.

7 (Extensió a constrastos d'hipòtesis unilaterals). Suposem que tenim un model estadístic paramètric $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta \mid \theta \in \Theta\})$, i que mitjançant el lema de Neyman-Pearson hem obtingut un test UMP al nivell de significació α amb regió A_0 per a contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta = \theta_1$, assumint $\theta_0 < \theta_1$. Aleshores, si la regió A_0 no depèn de θ_1 i la funció de potència $\Phi(\theta) = P_\theta(A_0^c)$ és creixent (respecte el paràmetre), la regió d'acceptació A_0 també serà la regió d'acceptació d'un test UMP al nivell de significació α per a contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$.

8 (Raó de versemblança). Donada una partició de l'espai de paràmetres $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$; anomenarem *raó de versemblança* el quocient:

$$\lambda(x) = \frac{\mathscr{L}(x,\Theta_0)}{\mathscr{L}(x,\Theta)};\ \mathscr{L}(x,\Theta_0) = \sup_{\theta\in\Theta_0} \mathscr{L}(x,\theta),\ \mathscr{L}(x,\Theta) = \sup_{\theta\in\Theta} \mathscr{L}(x,\theta)$$

Fixem-nos que $\lambda(x) \in [0,1]$, i si $\hat\theta(x)$ és EMV, $\mathscr{L}(x,\Theta) = \mathscr{L}(x,\hat\theta(x))$.

9 (Test de la raó de versemblança). Anomenarem *test de la raó de versemblança* el nivell de significació $\alpha \in (0,1)$ per contrastar la hipòtesi $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contra $H_1 : \theta \in \Theta_1$, el que té per regió d'acceptació $A_0 = \{x \mid \lambda(x) \geq c_\alpha\}$, on c_α ($c_\alpha \leq 1$) es determina de manera que $P_\theta(A_0^c) \leq \alpha$, per a tot $\theta \in \Theta_0$.

$$\mathscr{L}(x,\hat\theta_0(x)) = \sup_{\theta\in\Theta_0} \mathscr{L}(x,\theta) \implies \lambda(x) = \frac{\mathscr{L}(x,\hat\theta_0(x))}{\mathscr{L}(x,\hat\theta(x))}.$$

10. Suposem que volem contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ i $H_1 : \theta = \theta_1$, $\Theta = \{\theta_0\} \cup \{\theta_1\}$. Si existeix el test de Neyman-Pearson i existeix el test de la raó de versemblança per contrastar hipòtesis simples, aleshores coincideixen.

11. Si existeix un estadístic suficient per al paràmetre θ, el test de la raó de versemblança és funció d'aquest estadístic.

12 (Quan no coneixem la llei de la raó de versemblança). Suposem $\Omega \subset \mathbb{R}$ i que l'espai de paràmetres Θ és un obert d'$\mathbb{R}^k$. Assumim que el model estadístic associat és regular i que l'EMV és únic (i.e. per a cada $n \geq 1$, la solució a les equacions de versemblança ho és). Aleshores, quan contrastem $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta \neq \theta_0$ tenim que sota la hipòtesi nul·la:

$$-2\ln\lambda_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_{(k)},$$

on $\lambda_n(x)$ és la raó de versemblança per a una mostra de mida n.

Es tracta de decidir si els paràmetres de la distribució multinomial són $p_1 = p_1^0, \ldots, p_m = p_m^0$ (hipòtesi simple) o no (hipòtesi composta). Plantegem les hipòtesis:

$$H_0 : p_i = p_i^0,\ \forall i = 1,\ldots,m \text{ contra } H_1 : \exists i \mid p_i \neq p_i^0.$$

13 (Estadístic χ^2 de Pearson). Per a construir la regió d'acceptació s'usa l'anomenat estadístic khi-quadrat (χ^2, χ-quadrat) de Pearson:

$$D_n \equiv D_n(x) = \sum_{j=1}^m \frac{(n_j - np_j^0)^2}{np_j^0} = \sum_{j=1}^m \frac{n}{p_j^0}\left(\frac{n_j}{n} - p_j^0\right)^2.$$

14. Sigui $(x_n)_n$ una successió de vectors aleatoris independents i idènticament distribuïts amb llei de Bernoulli m-dimensional de paràmetre $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_m)$ amb $\theta_j \neq 0$, per a tot j. Sigui $f = (n_1,\ldots,n_m) = \sum_{i=1}^n x_i$ el vector de les freqüències absolutes. Aleshores:

$$D_n = \sum_{j=1}^m \frac{n}{p_j^0}\left(\frac{n_j}{n} - p_j^0\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \chi^2_{(m-1)}.$$

Per tant:

$$P(D_n(x) \leq d_\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} P(\chi^2_{(m-1)} \leq d_\alpha)$$

i així, sota H_0:

$$P_{H_0}(A_0^c) = P(\chi^2_{(m-1)} > d_\alpha) = \alpha.$$

15. Pel teorema del límit central,

$$\frac{n_j - np_j^0}{\sqrt{np_j^0(1-p_j^0)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} N(0,1).$$

Igual que abans, $f = (n_1,\ldots,n_m)$ és el vector de les freqüències absolutes. Amb aquesta notació la funció de versemblança es pot escriure com

$$L(x,\theta) = \prod_{j=1}^m p_j(\theta)^{n_j}$$

16 (Estadístic d'ajustament χ^2 de Pearson, multinomial). Sigui $\hat\theta$ el màxim de versemblança del paràmetre θ. Definim l'estadístic de la khi-quadrat de Pearson per a aquest model com

$$D_n = \sum_{j=1}^m \frac{\left(n_j - np_j(\hat\theta)\right)^2}{np_j(\hat\theta)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_{(m-d-1)}$$

17. Quan $np_j^0 < 5$ o $n_j < 5$ per a cert j, hem d'agrupar les dades en intervals disjunts que recobreixin tots els valors possibles de la distribució, $I_1,\ldots,I_m$, $\bigsqcup I_j = \mathbb{R}$. **Els intervals s'han de triar independentment de la mostra**.

18 (Probabilitat empírica). Donat $w \in \Omega$, definim la probabilitat empírica associada a les variables $X_1,\ldots,X_n$ com la llei de probabilitat discreta en $\mathbb{R}$ que assigna una probabilitat $\frac{1}{n}$ a cadascun dels punts $X_i(w)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, és a dir, la probaiblitat empírica sobre $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ val:

$$p_n^w(B) = \frac{1}{n}\#\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid X_i(w) \in B\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_B(X_i(w)).$$

19 (n-èsima funció de distribució empírica). La n-èsima funció de distribució empírica associada a la successió $(X_k)_k$ és la funció de distribució de la n-èsima probabilitat empírica associada a $(X_k)_k$ i això vol dir, per a tot $t \in \mathbb{R}$:

$$F_n(t) = p_n((-\infty,t]) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty,t]}(X_i) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < X_{(1)}, \\ \frac{i}{n}, & \text{si } t \in [X_{(i)}, X_{(i+1)}),\ 1 \leq i \leq n; \\ 1, & \text{si } t \geq X_{(n)}. \end{cases}$$

20 (Test de la χ^2 d'independència). Si trobem quelcom semblant a això:

Classe	A_1	A_2	$\cdots$	A_m	Total
Mostra 1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1m}	n_1
Mostra 2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2m}	n_2
Total	$n_{\cdot,1}$	$n_{\cdot,2}$	$\cdots$	$n_{\cdot,m}$	$n = n_1 + n_2$

Estem davant d'un test d'homogeneïtat. Als exercicis usarem la següent expressió:

$$D_n(x,y) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i,\cdot}n_{\cdot,j}}{n})^2}{\frac{n_{i,\cdot}n_{\cdot,j}}{n}}.$$

Es pot demostrar asimptòticament que D_{n_1,n_2} segueix una llei $\chi^2_{(m-1)}$. Utilitzant aquest resultat asimptòtic és natural proposar la regió d'acceptació $A_0 = \{D_{n_1,n_2} \leq c_{\alpha,m}\}$ on $c_{\alpha,m}$ és el quantil $1-\alpha$ d'una llei $\chi^2_{(m-1)}$. $(rs - 1 - (r-1) - (s-1)$.

21. Siguin $\hat\theta_1,\ldots,\hat\theta_d$ els estimadors de màxima versemblança utilitzant la mostra completa. Aleshores, (16) segueix asimptòticament una llei amb funció de distribució F tal que:

$$F_{\chi^2_{(m-1)}}(x) \leq F(x) \leq F_{\chi^2_{(m-d-1)}}(x). \tag{1}$$

A partir d'aquí, es pot establir la regla de decisió següent:

1. Calculem els valors crítics c_α i C_α utilitzant les lleis $\chi^2_{(m-d-1)}$ i $\chi^2_{(m-1)}$, respectivament.
2. Si $D_n > C_\alpha$, rebutgem la hipòtesi nul·la.
3. Si $D_n < c_\alpha$, acceptem la hipòtesi nul·la.
4. Si $c_\alpha < D_n < C_\alpha$ no podem prendre cap decisió.

Exercici. Sigui X una variable aleatòria amb densitat

$$f(x) = 2\theta x\exp\{-\theta x^2\}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x),\ \theta > 0.$$

Fixem dos nombres reals $0 < \theta_0 < \theta_1$, i considerem una mostra de mida n. Trobeu un test UMP per a contrastar $H_0 : p = p_0$ contra $H_1 : p = p_1$. Apliqueu-ho a $n = 6, p_0 = 1, p_1 = 1.5$ i $\alpha = 0.05$.

Proof. El model estadístic paramètric és $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta \mid \theta > 0\})$, i $\Omega = (0,+\infty)^n$ no depèn del paràmetre. La funció de versemblança és:

$$\mathscr{L}(x,\theta) = 2^n\theta^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\cdot\exp\left\{-\theta\sum_{i=1}^n x_i^2\right\} > 0,\ \forall\theta > 0.$$

Per tant, $\mathscr{L}(x,\theta_0) > 0$ i el quocient $\frac{\mathscr{L}(x,\theta_1)}{\mathscr{L}(x,\theta_0)}$ està ben definit.

$$\frac{\mathscr{L}(x,\theta_1)}{\mathscr{L}(x,\theta_0)} = \frac{2^n\theta_1^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\cdot\exp\left\{-\theta_1\sum_i x_i^2\right\}}{2^n\theta_0^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\cdot\exp\left\{-\theta_0\sum_i x_i^2\right\}} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n\exp\left\{(\theta_0-\theta_1)\cdot\sum_i x_i^2\right\}.$$

La regió d'acceptació és $A_0 = \left\{\frac{\mathscr{L}(x,\theta_1)}{\mathscr{L}(x,\theta_0)} \leq c_\alpha\right\}$:

$$A_0 = \left\{\exp\{(\theta_0-\theta_1)\cdot\sum_i x_i^2\} \leq c_\alpha\cdot\frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}\right\}$$

$$= \left\{(\theta_0-\theta_1)\cdot\sum_i x_i^2 \leq \ln\left(c_\alpha\cdot\frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}\right)\right\} \overset{\theta_0\leq\theta_1}{=} \left\{\sum_i x_i^2 \leq \frac{\ln\left(c_\alpha\cdot\frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}\right)}{\theta_0-\theta_1}\right\}.$$

Així, si definim $k_\alpha = \frac{\ln\left(c_\alpha\cdot\frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}\right)}{\theta_0-\theta_1} \neq 0$, $A_0^c = \{\sum_i x_i^2 < k_\alpha\}$. Definim $Y_i = X_i^2$:

$$\begin{array}{cccc} g: & (0,+\infty) & \longrightarrow & (0,+\infty) \\ & x & \longmapsto & x^2 \\ & \sqrt{y} & \longleftarrow & y \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} g': & (0,+\infty) & \longrightarrow & (0,+\infty) \\ & x & \longmapsto & 2x \\ & \frac{1}{2\sqrt{y}} & \longleftarrow & y \end{array}$$

Per tant, la densitat $f_\theta(y)$ queda com:

$$f_\theta(y) = 2\theta y\cdot\exp\{-\theta y\}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y) = \theta\exp\{-\theta y\}\cdot\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y).$$

Així doncs, queda clar que $Y_i \sim \text{Exp}(\theta)$ i $\sum_i Y_i \sim \text{Gamma}(n,\theta)$. Per tant, substituint:

$$P_{\theta_0}(A_0^c) = P_{\theta_0}\left(\sum_i Y_i \leq k_\alpha\right) = P(\text{Gamma}(6,1) \leq k_\alpha) = \alpha = 0.05,$$

obtenim que $k_\alpha = 2.61301$. Per tant, $A_0^c = \{\sum_i x_i \leq 2.61301\}$ i $\varphi = \mathbb{1}_{A_0^c}$ és el test UMP que buscàvem gràcies al lema de Neyman-Pearson. $\square$

Exercici. Consideramos una muestra de tamaño $n = 15, x = (x_1, \dots, x_n)$, de variables iid $\sim X$, cuya función de densidad de probabilidad, para $x \in \mathbb{R}$, es:

$$f_X(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} \cdot \nVdash_{(0,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \theta > 0,$$

dependiente del parámetro θ.

1. Obtener un test UMP para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta = \theta_1$. con nivel de significación $\alpha = 0.05$, siendo $\theta_0 = 1$ y $\theta_1 = 2$. Calcular su potencia.
2. Razonar detalladamente si se puede extender el test a un test UMP para $H_0 : \theta = \theta_0$ y $H_1 : \theta > \theta_0$.
3. Razonar detalladamente si se puede extender el test a un test UMP para $H_0 : \theta \leq \theta_0$ y $H_1 : \theta > \theta_0$.

Proof. Función de verosimilitud de la muestra. Supondremos que todas las observaciones están en $(0, 1)$, así nos ahorramos escribir indicadores. Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in (0, 1)^n$,

$$\mathscr{L}(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\theta) = \theta^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in (0,1)^n.$$

Obtenemos:

$$Q(x) = \frac{\mathscr{L}_1(x)}{\mathscr{L}_0(x)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta_1-\theta_0}, \quad x \in (0,1)^n,$$

$$\log Q(x) = n(\log\theta_1 - \log\theta_0) - (\theta_1 - \theta_0) \cdot T_n(x), \quad x \in (0,1)^n.$$

Estas dos funciones dependen de la muestra x a través del estadístico unidimensional $T_n(x) = -\sum_i \log(x_i)$. Amb $Y = -\log X$ trobem que $f_Y(y) = \theta e^{-\theta y}$, pel que $Y \sim \text{Exp}(\theta)$ i $T_n \sim \text{Gamma}(n, \theta)$. $A_0^c = \{T_n(x) < a_\alpha\} = 0.05 \implies a_\alpha = 9.2463$.

La forma de la región crítica $A_0^c = \{T_n(x) < a\}$ depende solo de $\theta_0 < \theta_1$, y $a = a_\alpha$ depende solo de θ_0, por lo que esta misma región crítica define un test UMP com la hipótesis alternativa $H_1 : \theta > \theta_0$.

La densidad de $T_n \sim \text{Gamma}(n, \theta)$ es, para $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f_T(t) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} \exp(-\theta t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Calculamos la densidad de $U_n = \theta T_n$. Transformación: $u = g(t) = \theta t$. Transformación inversa: $t = g^{-1}(u) = u/\theta$. Derivada: $\left(g^{-1}\right)'(u) = 1/\theta$. Densidad de U_n, para $u \in \mathbb{R}_+$,

$$f_U(u) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \left(\frac{u}{\theta}\right)^{n-1} \exp(-u) \cdot \frac{u}{\theta} = \frac{1}{\Gamma(n)} u^{n-1} \exp(-u), \quad u \in \mathbb{R}_+,$$

o sea que $U_n \sim \text{Gamma}(n, 1)$, no depende de θ y nos permite relacionar las probabilidades para diferentes valores del parámetro θ. Así, para $H_0 : \theta \leq \theta_0$, podemos comparar el tamaño $\widetilde{\alpha}(\theta)$ del test que hemos construido en el apartado anterior con α, como función de $\theta \leq \theta_0$. Como $(0, a_\alpha \cdot \theta) \subset (0, a_\alpha \cdot \theta_0)$,

$$\widetilde{\alpha}(\theta) = P\left(T_n(X) < a_\alpha \mid \theta \leq \theta_0\right) = P\left(U_n(X) < a_\alpha \cdot \theta\right) \leq P\left(U_n(X) < a_\alpha \cdot \theta_0\right) = \alpha.$$

Por tanto, el test es UMP para $H_0 : \theta \leq \theta_0$. □

Exercici. Tenim una mostra de mida n d'una variable aleatòria X amb distribució uniforme en $\{1, \dots, N\}$ on N és un natural desconegut. Donat un natural N_0, construïu un test per a contrastar $H_0 : N = N_0$ contra $H_1 : N \neq N_0$.

Proof. Tenim que $X \sim U\{1, \dots, N\}$, pel que $P(X = k) = \frac{1}{N}$, per a tot $k \in \{1, \dots, N\}$. Sigui $\Omega = \mathcal{N}^n$ l'espai mostral, la funció de versemblança $\mathscr{L}(x, N)$ és:

$$\mathscr{L}(x, N) = \prod_{i=1}^{n} \mathscr{L}(x_i, N) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{N} \mathbb{1}_{1,\dots,N}(x_i) = \frac{1}{N^n} \mathbb{1}_{1,\dots,N}(x_{(n)}).$$

On $x_{(n)} = \max(x_1, \dots, x_n)$. Per a contrastar $H_0 : N = N_0$ contra $H_1 : N \neq N_0$ amb nivell de significació $\alpha \in (0, 1)$, usarem el test de la raó de versemblança. Primer observem que $\hat{N} = X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ és un estimador de màxima versemblança, ja que la funció de versemblança és decreixent en N. Per tant:

$$\mathscr{L}(x_1, \dots, x_n; X_{(n)}) = \sup_N \mathscr{L}(x_1, \dots, x_n; N).$$

L'estadístic de la raó de versemblança $\lambda(x)$ queda determinat per:

$$\lambda(x) = \frac{\mathscr{L}(x, N_0)}{\sup_{N \in \mathcal{N}} \mathscr{L}(x, N)} = \frac{\mathscr{L}(x, N_0)}{\mathscr{L}(x, x_{(n)})} = \frac{\frac{1}{N_0^n} \mathbb{1}_{1,\dots,N_0}(x_{(n)})}{\frac{1}{x_{(n)}^n} \cdot 1} = \frac{x_{(n)}^n}{N_0^n} \mathbb{1}_{\{1,\dots,N_0\}}(x_{(n)}).$$

La regió d'acceptació és $A_0 = \{\lambda(x) \geq c_\alpha\}$ i volem $P_{H_0}(A_0^c) \leq \alpha$. La regió d'acceptació queda:

$$A_0 = \{\lambda(x) \geq c_\alpha\} = \{x_{(n)}^n \mathbb{1}_{\{1,\dots,N_0\}}(x_{(n)}) \geq c'_\alpha\} = \{x_{(n)} \leq N_0,\ x_{(n)} \geq \sqrt[n]{c'_\alpha}\} = \{\sqrt[n]{c'_\alpha} \leq x_{(n)} \leq N_0\}.$$

Per tant:

$$\begin{aligned} P_{H_0}(A_0^c) &= P_{H_0}\left((x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{N}^n \mid \lambda(x) < c_\alpha\right) = P_{H_0}\left(x_{(n)}^n \mathbb{1}_{\{1,\dots,N_0\}}(x_{(n)}) < c_\alpha\right) \\ &= P_{H_0}(x_{(n)} > N_0 \text{ o bé } x_{(n)} < \sqrt[n]{c'_\alpha}) = P_{H_0}(x_{(n)} < c'_\alpha) = P_{H_0}(x_1 < c'_\alpha)^n \\ &= \left(\frac{c'_\alpha - 1}{N_0}\right)^n \leq \alpha. \end{aligned}$$

Així doncs, cal prendre c'_α tal que:

$$c'_\alpha \leq N_0 \sqrt[n]{\alpha} + 1. \text{ Per exemple, } c'_\alpha = N_0 \sqrt[n]{\alpha} + 1.$$

Per tant, acceptarem la hipòtesi nul·la quan $x \in A_0$ i la rebutjarem en cas contrari. □

Exercici. Quatre homes i quatre dones que s'asseguessin en una taula rectangular. Dues persones havien de ser cap de taula i les altres sis s'havien d'asseure als dos laterals. Els dos caps de taula eren especials perquè tenien una posició dominant.

1. Si les persones elegeixen el seu lloc a l'atzar, quina és la probabilitat que els caps de taula siguin dos homes? I dues dones? I un home i una dona?
2. L'experiment es va realitzar 28 cops i es va observar que en 9 ocasions els caps de taula eren homes, en 5 eren dones i en 14 eren un home i una dona. Contrasteu la hipòtesi que les persones trien els llocs a l'atzar (amb $\alpha = 0.1$).

Proof.

1. Utilitzarem $H_2 = \{\text{dos homes}\}$, $D_2 = \{\text{dues dones}\}$, $DH = \{\text{dona i home}\}$. Les probabilitats s'han de calcular com fèiem a ADIP, o a la primera part de Probabilitats:

$$P(H_2) = P(D_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1} \cdot 6!}{8!} = \frac{3}{14},\ P(DH) = 1 - 2 \cdot P(D_2) = \frac{4}{7}.$$

2. Aplicarem el test de la χ^2 per la llei multinomial. Se'ns demana contrastar les hipòtesis:

$$H_0 : P(H_2) = P(D_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1} \cdot 6!}{8!} = \frac{3}{14},\ P(DH) = 1 - 2 \cdot P(D_2) = \frac{4}{7} \text{ contra}$$
$$H_1 : P(H_2) \neq P(D_2) \text{ o bé } P(DH) \neq \frac{3}{14}.$$

Podem ser més formals. Si $X = (X_{D_2}, X_{H_2}, X_{DH})$ on, per exemple, X_{D_2} és la variable que compta quants cops s'han assegut dues dones com a cap de taula, volem contrastar les hipòtesis:

$$H_0 : X \sim M\left(28; \frac{3}{14}, \frac{3}{14}, \frac{4}{7}\right) \text{ i } H_1 : X \nsim M\left(28; \frac{3}{14}, \frac{3}{14}, \frac{4}{7}\right).$$

Per fer-ho, escriurem una taula amb tots els valors que necessitem per emprar l'*estadístic* χ-quadrat de Pearson. Recordem que p_j^0 són les probabilitats sota la hipòtesi nul·la:

$$D_n(x) = \sum_{j=1}^{3} \frac{(n_j - np_j^0)^2}{np_j^0} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_{(3-1)} = \chi^2_{(2)}.$$

Per tant, i recordant que $n = n_1 + n_2 + n_3 = 28$:

	n_j	p_j^0	np_j^0	$(n_j - np_j^0)^2$	$\frac{(n_j-np_j^0)^2}{np_j^0}$
H_2	9	$\frac{3}{14}$	6	9	$\frac{9}{6} = 1.5$
D_2	5	$\frac{3}{14}$	6	1	$\frac{1}{6} = 0.167$
DH	14	$\frac{4}{7}$	16	4	$\frac{4}{16} = 0.25$
	28	1	28	14	**1.917**

Així doncs, $D_n(x) = 1.917$. Recordem que la regió d'acceptació és $A_0 = \{D_n \leq d_\alpha\}$, tal que $P_{H_0}(A_0^c) = \alpha$. Amb el comportament asimptòtic de D_n, i per $\alpha = 0.1$:

$$P_{H_0}(A_0^c) = P_{H_0}(D_n > d_\alpha) = P(\chi^2_{(2)} > d_\alpha) = 0.1 \implies d_\alpha = 4.605.$$

Com $A_0 = \{D_n \leq d_\alpha\}$, $D_n = 4.605$ i $d_\alpha = 4.605$, acceptem la hipòtesi nul·la; és a dir, no tenim prou evidències per a rebutjar la hipòtesi que les persones trien els llocs a l'atzar. □

Exercici. Un dau s'ha llançat 200 vegades. Els resultats són els següents:

Punts	1	2	3	4	5	6
Freqüències	35	42	30	29	40	24

Decidiu, mitjançant un test de la raó de versemblança, si el dau és perfecte o no.

Proof. Sigui $X = (X_1, \dots, X_{200})$ el vector aleatori associat a l'experiment del dau. Aleshores, X segueix una distribució multinomial de paràmetres $p = (p_1, \dots, p_6)$, $0 < p_k < 1$, on $p_k = P(X_i = k)$, per a tot $i \in \{1, \dots, 200\}$ i per a tot $k \in \{1, \dots, 6\}$. També és clar que $p_1 + \dots + p_6 = 1$. Tornem a estar en un cas discret, pel que donada la mostra $x = (x_1, \dots, x_{200})$,

$$P(X = x) = P(X_1 = x_1, \dots, X_{200} = x_{200}) = \frac{200!}{n_1! \cdots n_6!} \cdot p_1^{n_1} \cdots p_6^{n_6},\ n_k = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i = k\}}.$$

Per a tot $k \in \{1, \dots, 6\}$ i $n_1 + \dots + n_6 = n = 200$. El nostre objectiu és contrastar les hipòtesis següents:

$$H_0 : p_k = \frac{1}{6},\ \forall k \in \{1, \dots, 6\} \text{ contra } H_1 : \exists k \in \{1, \dots, 6\} \mid p_k \neq \frac{1}{6},$$

mitjançant un test de la raó de versemblança. Primer, calculem la funció de versemblança per a la nostra $x = (x_1, \dots, x_{100})$ i paràmetre $p = (p_1, \dots, p_6)$, $\mathscr{L}(x, p) = \mathscr{L}((n_1, \dots, n_6), p)$:

$$\lambda(x) = \frac{\mathscr{L}(x, p)}{\mathscr{L}(x, p_0)} = \frac{\frac{n!}{n_1! \cdots n_6!} \frac{1}{6^n}}{\frac{n!}{n_1! \cdots n_6!} \left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{n_6}{n}\right)^{n_6}} = \frac{n^n}{6^n \cdot n_1^{n_1} \cdots n_6^{n_6}}.$$

Com volem aplicar el test de la raó de versemblança, hem de buscar els estimadors de màxima versemblança:

$$\log \mathscr{L}(x, p) = \log\left(\frac{200!}{n_1! \cdots n_6!}\right) + \sum_{k=1}^{6} n_k \log(p_k).$$

Així doncs, volem trobar quins valors de p_k maximitzen la funció, és a dir, $\partial_{p_k} \log \mathscr{L}(x, p) = 0$.

$$\partial_{p_k} \log \mathscr{L}(x, p) = 0 \iff \frac{n_k}{p_k} - \frac{n_6}{p_6} = 0 \iff n_6 p_k = n_k p_6.$$

Per tant,

$$\sum_{k=1}^{5} = \sum_{k=1}^{5} n_k p_6 \implies n_6(1 - p_6) = (n - n_6)p_6 \implies p_6 = \frac{n_6}{n}.$$

Per tant, $\hat{p}_k = \frac{n_k}{n}$, $k \in \{1, \dots, 5\}$. En el cas unidimensional en tindríem prou amb comprovar que $\partial^2_{p_k} \log \mathscr{L}(x, p) < 0$, però amb el multidimensional necessitaríem la Hessiana (obviem, doncs, el pas de comprovar que és un màxim). Aleshores, $\hat{p} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_6)$ és un màxim. Així doncs, la raó de versemblança és:

$$\lambda(x) = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{200}}{\hat{p}_1^{n_1} \cdots \hat{p}_6^{n_6}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{200} \frac{n^n}{n_1^{n_1} \cdots n_6^{n_6}},$$

i la regió d'acceptació és:

$$A_0 = \left\{x \mid \lambda(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^{200} \frac{n^n}{n_1^{n_1} \cdots n_6^{n_6}} \geq c_\alpha\right\},\ c_\alpha \leq 1.$$

Observem que l'espai de paràmetres $\Theta = \{(p_1, \dots, p_6) \mid p_1 + \dots + p_6 = 1, 0 < p_i < 1\}$ és un obert de $\mathbb{R}^5$ i, per tant,

$$-2\log(\lambda(x)) \xrightarrow{n\to\infty} \chi^2_{(5)}.$$

La sisena probabilitat depèn de les cinc anteriors, pel que solament tenim $6 - 1 = 5$ graus de llibertat. Llavors, com $-2\log(\lambda(x)) = 7.247394$, escollint $\alpha = 0.05$, com $n = 200$ és ¡¡suficientment gran¿¿ aleshores:

$$0.05 = P_{H_0}(A_0^c) = P(-2\log(\lambda(x)) > -2\log(c_\alpha)) = P(\chi^2_{(5)} > \tilde{c}_\alpha).$$

En la taula de la χ-quadrat podem trobar que $P(\chi^2_{(5)} \leq k) = 0.95 \iff k = 11.0705$, i com $-2\log(\lambda(x)) = 7.247394 < 11.0705$, tenim que $x \in A_0$. Així doncs, no podem rebutjar H_0; és a dir, no tenim raons per suposar que el dau no sigui perfecte i, per tant, podem acceptar que ho és. □