# Solucions comentades

**1.** Demostra que no existeix cap nombre natural $n$ tal que $n^2+1$ és multiple de 3.

Demostrarem l'enunciat utilitzant el mètode de reducció a l'absurd. Suposem, per tant, que existeix un nombre natural $n$ tal que $n^2+1$ és múltiple de 3 i hem d'arribar a una contradicció. Estudiem els casos segons el residu de la divisió de $n$ entre 3.

- Si $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n=3k$ aleshores:

  $$n^2+1=9k^2+1=3\cdot 3k^2+1.$$

  Ara utilitzem el fet que $n^2+1$ és múltiple de 3, per tant existeix un nombre $l \in \mathbb{N}$ tal que $n^2+1=3l$. Per tant,

  $$3\cdot 3k^2+1=3l \implies 1=3(l-3k^2) \implies 1 \text{ és múltiple de } 3.$$

  Hem arribat a una contradicció ja que 1 no és múltiple de 3.
- Si $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n=3k+1$ aleshores:

  $$n^2+1=(3k+1)^2+1=9k^2+6k+1+1=3\cdot(3k^2+2k)+2.$$

  De forma similar al cas anterior, com que $n^2+1$ és múltiple de 3, existeix un nombre $l \in \mathbb{N}$ tal que $n^2+1=3l$. Per tant,

  $$3\cdot(3k^2+2k)+2=3l \implies 2=3(l-3k^2-2k) \implies 2 \text{ és múltiple de } 3.$$

  Hem arribat a una contradicció ja que 2 no és múltiple de 3.
- Si $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n=3k+2$ aleshores:

  $$n^2+1=(3k+2)^2+1=9k^2+12k+4+1=3\cdot(3k^2+4k+1)+2.$$

  Observem que, com en el cas anterior, hem arribat a escriure el nombre $n^2+1$ de la forma $3\cdot k'+2$ per un cert $k' \in \mathbb{N}$. Per tant, es pot arribar a la mateixa contradicció que en el cas anterior.

En els tres casos hem topat amb una contradicció, per tant hem demostrat que no existeix cap nombre natural $n$ tal que $n^2+1$ és múltiple de 3.$\blacksquare$

**2.** Demostra per inducció que tot polinomi a coeficients reals de grau $n \geqslant 1$ té com a màxim $n$ arrels reals.

Cal recordar algunes definicions i propietats que apareixen a l'exercici i donem per sabudes:

- *Un polinomi $p(x)$ a coeficients reals de grau $n \in \mathbb{N}$* és una expresió de la forma $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, on $a_i \in \mathbb{R}$ per a $i=0,\dots,n$ i a més $a_n \neq 0$. És a dir $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, amb tots els coeficients reals i $a_n$ no nul. Per tant el grau d'un polinomi és el màxim $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_k \neq 0$, dit d'una altra forma, és el màxim dels exponents que apareixen a $p(x)$.
- A vegades haureu vist escrit $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ significant que $p(x)$ és un polinomi amb coeficients reals, i fins i tot $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ per indicar que el grau de $p(x)$ és $n$.
- *Una arrel real d'un polinomi $p(x)$* és un nombre real que és solució de l'equació $p(x)=0$. En altres paraules $\alpha \in \mathbb{R}$ és una arrel de $p(x)$ si $p(\alpha)=0$, és a dir que si substituïm totes les aparicions de la incògnita $x$ per $\alpha$ i fem les operacions indicades (potències, productes i sumes) obtenim 0.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ és una arrel de $p(x)$, aleshores $(x-\alpha)|p(x)$. Això vol dir que existeix un polinomi $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ amb $grau[q(x)]=grau[p(x)]-1$ tal que $p(x)=(x-\alpha)q(x)$.
- El conjunt d'arrels d'un producte de polinomis és la unió dels conjunts d'arrels de cada polinomi del producte. (El mateix no és cert per a la suma en general.)

- Donada una propietat $P(n)$ que involucra als nombres naturals i donat un nombre natural $n_0$, la demostració per inducció es basa en el següent principi:

$$\Big[P(n_0) \wedge \forall n \geqslant n_0 \Big(P(n) \rightarrow P(n+1)\Big)\Big] \rightarrow \forall n \geqslant n_0 P(n)$$

*Sigui $p(x)$ un polinomi amb coeficients reals de grau $n \geqslant 1$, aleshores el nombre d'arrels reals de $p(x)$ és com a molt el grau del polinomi.*

$\square$ Ho demostrarem per inducció en el grau del polinomi, *i.e.*, la propietat $P(n)$ a provar serà per tant $nombre.arrels[p(x)] \leqslant n = grau[p(x)]$:

**[B.I.]** Base de la inducció: En aquesta proposició el cas base és el resultant de $n = 1$. Un polinomi $p(x) \in \mathbb{R}_1[x]$ és, $p(x) = a_1x + a_0$ amb $a_1 \neq 0$. Per tant l'equació $p(x) = 0$ ens queda $a_1x + a_0 = 0$ i com que $a_1 \neq 0$ aïllant obtenim que aquesta equació és equivalent a $x = \frac{-a_0}{a_1}$. Així doncs, observem que existeix sempre una única solució real i per tant que es compleix la desigualtat $nombre.arrels[p(x)] = 1 \leqslant 1 = grau[p(x)]$.

Recordem que el pas d'inducció al nostre cas consisteix a demostrar $\forall n \geqslant 1[P(n) \rightarrow P(n+1)]$. Per fer això, agafem un $n \geqslant 1$, suposarem l'antecedent de la implicació, -el que anomenem hipòtesi d'inducció- i arribarem a $P(n+1)$.

**[H.I.]** Fixat un $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tot polinomi de grau $n$ té com a molt $n$ arrels reals.

**[P(n+1)]**: Considerem un polinomi $p(x) \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$, *i.e.*, $p(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i$, amb $a_{n+1} \neq 0$.
Ara raonem per casos :

Si $p(x)$ no té arrels reals, *i.e.*, $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ p(\alpha) \neq 0$, es satisfà la propietat trivialment, és a dir $nombre.arrels[p(x)] = 0 \leqslant n + 1 = grau[p(x)]$ com volíem demostrar.

Si per contra $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p(\alpha) = 0$, recordem que $(x - \alpha)|p(x)$. Aleshores existeix un polinomi $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ amb $grau[q(x)] = grau[p(x)] - 1 = n$ tal que $p(x) = (x - \alpha)q(x)$. Per [H.I.] sabem que $nombre.arrels[q(x)] \leqslant n$. Així, com les arrels de $(x - \alpha)q(x)$ són: $\alpha$ que és l'arrel de $(x - \alpha)$ i les arrels de $q(x)$, el nombre d'arrels de $p(x)$ és com a màxim $n + 1$, *i.e.*, $p(x)$ satisfà $nombre.arrels[p(x)] \leqslant n + 1 = grau[p(x)]$. Aquest cas també satisfà el que volíem i hem acabat la demostració. $\blacksquare$

**3.** Considera els següents conjunts:

$$A = \Big\{x \in \mathbb{Q} : \exists y \in \mathbb{Z}(x = 3^y)\Big\},$$
$$B = \Big\{x \in \mathbb{R} : |x - 5| \leqslant \frac{19}{4}\Big\},$$
$$C = \Big\{0, \frac{1}{4}, 9, \{\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\}, \frac{1}{3}, \{\frac{1}{4}\}, 1\Big\}.$$

**(a)** Expressa $B$ com un interval.

Observem que si $a \in \mathbb{R}$, aleshores

$$|a - 5| \leqslant \frac{19}{4} \iff -\frac{19}{4} \leqslant a - 5 \leqslant \frac{19}{4} \iff \frac{1}{4} \leqslant a \leqslant \frac{39}{4}.$$

Per tant,

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 5| \leqslant \frac{19}{4}\} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{39}{4}\} = \Big[\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\Big].$$

**(b)** Troba $A \cap B$, $C \setminus A$ i $C \setminus B$.

- Observem que $A$ és el conjunt de totes les potències de 3 on l'exponent és un enter positiu, negatiu o zero, i $B = \Big\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{4} \leqslant x \text{ i } x \leqslant \frac{39}{4}\Big\}$. Aleshores $A \cap B$ és el conjunt de totes les potències enteres de 3 més grans o iguals que $\dfrac{1}{4}$ i més petites o iguals que $\dfrac{39}{4} = 9{,}75$. Tenint en compte que

$$\frac{1}{9} = 3^{-2} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} = 3^{-1} < 1 = 3^0 < 3 = 3^1 < 9 = 3^2 < \frac{39}{4} < 27 = 3^3$$

i que per tot $n, m \in \mathbb{Z}$, $3^n \leqslant 3^m$ sii $n \leqslant m$, aleshores

$$A \cap B = \left\{\frac{1}{3}, 1, 3, 9\right\}.$$

- $C \setminus A = \left\{0, \frac{1}{4}, \{\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\}, \{\frac{1}{4}\}\right\}$ ja que $0 \in C$, $\frac{1}{4} \in C$, $\{\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\} \in C$, $\{\frac{1}{4}\} \in C$ i $0 \notin A$, $\frac{1}{4} \notin A$, $\{\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\} \notin A$ i $\{\frac{1}{4}\} \notin A$. I a més $9 \in A$, $1 \in A$ i $\frac{1}{3} \in A$.
- Com que $C \setminus (A \cup B) = \{x \in C : x \notin A \cup B\} = \{x \in C : x \notin A \text{ i } x \notin B\} = \{x \in C \setminus A : x \notin B\} = (C \setminus A) \setminus B = \left\{0, \frac{1}{4}, \{\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\}, \{\frac{1}{4}\}\right\} \setminus \left[\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\right] = \left\{0, \{\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\}, \{\frac{1}{4}\}\right\}$ ja que $\frac{1}{4}$ és l'únic element de $C \setminus A$ que també pertany a $B$.

**(c)** Digues raonadament si són certes o falses les següents afirmacions:

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{27} \in A$; | $\frac{1}{27} \in B$; | $A \cap B \subseteq C$; |
| $\{\frac{1}{4}\} \subseteq C$; | $\{\{\frac{1}{4}\}\} \subseteq C$; | $\{\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\} \subseteq C$; |

- $\frac{1}{27} \in A$ és certa, ja que $\frac{1}{27} \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{27} = 3^{-3}$ i $-3 \in \mathbb{Z}$.
- $\frac{1}{27} \in B$ és falsa, ja que $\frac{1}{27} < \frac{1}{4}$ i per tant $\frac{1}{27} \notin \left[\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\right] = B$.
- $A \cap B \subseteq C$ és falsa, ja que $3 \in A \cap B$ ja que és un dels elements que apareix a la llista que defineix per extensió el conjunt $A \cap B$ donada en l'apartat anterior, però en canvi $3 \notin C$ ja que $3 \neq 0$, $3 \neq \frac{1}{4}$, $3 \neq 9$, $3 \neq \{\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\}$, $3 \neq \frac{1}{3}$, $3 \neq \{\frac{1}{4}\}$ i $3 \neq 1$.
- $\{\frac{1}{4}\} \subseteq C$ és certa, ja que $\{\frac{1}{4}\} \subseteq C$ sii $\frac{1}{4} \in C$, i $\frac{1}{4}$ és un dels elements que apareix a la llista que defineix $C$ per extensió.
- $\{\{\frac{1}{4}\}\} \subseteq C$ és certa, ja que $\{\{\frac{1}{4}\}\} \subseteq C$ sii $\{\frac{1}{4}\} \in C$, i $\{\frac{1}{4}\}$ és un dels elements que apareix a la llista que defineix $C$ per extensió.
- $\{\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\} \subseteq C$ és falsa, ja que $\frac{39}{4} \in \{\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\}$, però en canvi $\frac{39}{4} \notin C$ ja que $\frac{39}{4} \neq 0$, $\frac{39}{4} \neq \frac{1}{4}$, $\frac{39}{4} \neq 9$, $\frac{39}{4} \neq \{\frac{1}{4}, \frac{39}{4}\}$, $\frac{39}{4} \neq \frac{1}{3}$, $\frac{39}{4} \neq \{\frac{1}{4}\}$ i $\frac{39}{4} \neq 1$.