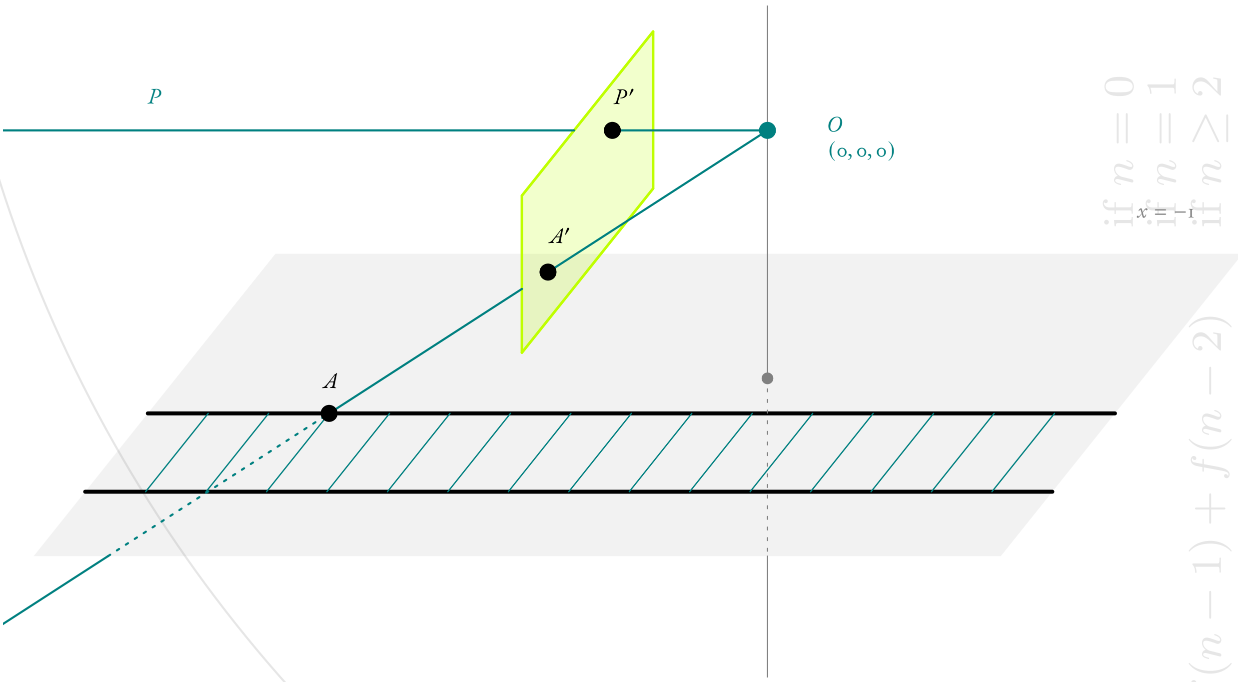
Geometria Projectiva

Cinc Cèntims de Geometria

Mario Vilar

30 de maig de 2023

Universitat de Barcelona



Índex

1

Elements bàsics de la geometria projectiva

1.1 Espai projectiu

Definició 1.1 (Espai projectiu). Un espai projectiu sobre un cos $\mathbb{K}$ és una tripleta $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, E, \pi)$, on $\mathbb{P}$ és un conjunt, E és un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$ i $\pi : E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}$ és una aplicació.

1. π és exhaustiva,
2. Per a tota parella de vectors $u, v \in E \setminus \{0\}$, $\pi(u) = \pi(v) \iff u, v$ són proporcionals, és a dir, $\langle u \rangle = \langle v \rangle$.

La dimensió de $\mathbb{P}$ és $\dim E - 1$.

Definició 1.2 (Punt). Els elements de $\mathbb{P}$ els anomenem *punts*. Si p és un punt i $p = [u]$ direm que el vector *u representa* el punt p. Notem que $\pi^{-1}(p) = \langle u \rangle \setminus \{0\}$.

1.2 Varietats lineals i Grassmann

D'ara en endavant, considerarem $(\mathbb{P}, E, \pi)$ de dimensió n (i.e. $\dim E = n + 1$).

Definició 1.3 (Varietat lineal). Una varietat lineal $\mathbb{L} \subset \mathbb{P} = (P, E, \pi)$ és un subconjunt de $\mathbb{P}$ de la forma $\mathbb{L} = \pi(F \setminus \{0\})$ on F és un subespai vectorial d'E. Definirem $\dim \mathbb{L} = \dim F - 1$ i escriurem $\mathbb{L} = [F]$. Les varietats de dimensió 0 són els *punts*. Anomenem *rectes* a les de dimensió 2 i hiperplans a les de dimensió $n - 1$.

Proposició 1.4. *Si $[F_i]$, $i = 1, \ldots, r$ són varietats lineals, aleshores:*

$$[F_1] \cap \ldots \cap [F_r] = [F_1 \cap \ldots \cap F_r].$$

Definició 1.5 (Varietats disjuntes). Notem que si $F_1 \cap F_2 = (0)$, aleshores la intersecció de $[F_1]$ i $[F_2]$ és la varietat lineal $\emptyset$ (de fet, és condició necessària i suficient). En aquest cas, diem que F_1 i F_2 són *disjuntes*.

Proposició 1.6 (Suma de varietats lineals). *La suma de varietats lineals $[F_1], [F_2]$ és la varietat lineal més petita que les conté les dues. La varietat lineal suma és la varietat lineal associada al subespai suma. És a dir, donades dues varietats lineals $[F_1], [F_2]$, tenim que $[F_1] \vee [F_2] = [F_1 + F_2]$. A més a més, la suma de varietats lineals és associativa i si $[F_i]$ amb $i = 1, \ldots, r$, són varietats lineals, aleshores:*

$$\bigvee_{i=1}^{r} [F_i] = [F_1] \vee \cdots \vee [F_r] = [F_1 + \cdots + F_r] = \left[\sum_{i=1}^{r} F_i \right].$$

Demostració. Com $F_i \subset F_1 + F_2$, la varietat lineal $[F_1 + F_2]$ conté les dues varietats lineals. Anem a veure que és la més petita: si $[G]$ conté $[F_1]$ i $[F_2]$, aleshores $F_i \subset G$ i com $F_1 + F_2$ és el subespai més petit que conté F_1 i F_2, tenim que $F_1 + F_2 \subset G$. Per tant, $[F_1 + F_2] \subset [G]$. L'associativitat de la suma de varietats lineals és un reflex directe de l'associativitat de la suma de subespais vectorials. Aleshores, el cas de r varietats lineals s'obté aplicant iterativament el resultat de dues varietats i aplicant l'associativitat. ■

Teorema 1.7 (Fórmula de Grassmann). *Siguin $[F]$ i $[G]$ dues varietats lineals en un espai projectiu. Aleshores:*

$$\dim([F] \vee [G]) + \dim([F] \cap [G]) = \dim[F] + \dim[G].$$

Demostració. Recordem la fórmula de Grassmann per a subespais vectorials: $\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$. Com que $[F] \vee [G] = [F+G]$ i $[F] \cap [G] = [F \cap G]$ obtenim $\dim[F+G] + \dim[F \cap G] = \dim[F] + \dim[G]$. Aleshores, com $\dim([A]) = \dim A - 1$ per a tot A subespai vectorial, ens queda:

$$\begin{aligned} &\dim(F+G) - 1 + \dim(F \cap G) - 1 = \dim F - \dim G - 1 \\ \iff &\dim(F+G) - \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G. \end{aligned}$$

la fórmula de Grassmann ja coneguda i demostrada. ■

Definició 1.8 (Punts linealment independents). Diem que els punts $p_0, \dots, p_k$ *generen* la varietat lineal $\mathbb{L}$ si $\mathbb{L} = p_0 \vee \cdots \vee p_k$. Un conjunt de punts és linealment independent si els punts generen una varietat lineal de la màxima dimensió possible. Diem que una col·lecció de $k+1$ punts $p_0, \dots, p_k$ són linealment independents si $\dim(p_0 \vee \cdots \vee p_k) = k$.

Definició 1.9 (Varietats suplementàries). Dues varietats lineals $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$ són varietats suplementàries si se satisfan com a mínim dues de les propietats següents:

1. $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ és tot l'espai projectiu.
2. $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset$.
3. $\dim(\mathbb{L}) + \dim(\mathbb{M}) = n - 1$.

Proposició 1.10. *Sigui $\mathbb{L}$ una varietat lineal de dimensió k. Aleshores:*

1. *Existeixen $k+1$ punts linealment independents p_i tals que $\mathbb{L} = p_0 \vee \cdots \vee p_k$.*
2. *Existeix una varietat lineal $\mathbb{M}$ tal que $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$ són suplementàries.*

Demostració.

1. Expressem $\mathbb{L}$ com $[F]$, on F és un subespai de dimensió $k+1$. Sigui $u_0, \dots, u_k$ una base de F i posem $p_i = [u_i]$, $i = 1, \dots, k$. Aleshores, $\mathbb{L} = [F] = \langle u_0 \rangle + \cdots + \langle u_k \rangle$, i això últim és igual a $p_0 \vee \cdots \vee p_k$.
2. Usem el raonament anterior i posem $\mathbb{L}$ com a varietat lineal generada per certs punts p_i. Siguin u_i vectors representant els punts p_i. Aleshores, $u_0, \dots, u_k$ són linealment independents i podem ampliar fins a una certa base $u_0, \dots, u_n$ amb $n-k$ vectors. Aleshores, definint $F = \langle u_0, \dots, u_k \rangle$ i $G = \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle$ tenim que $E = F \oplus G$ i $\mathbb{L} = [F]$. Per tant, $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M} = [G]$ són suplementàries. ■

1.3 Figures lineals

Una figura lineal és una col·lecció finita de varietats lineals. Per no haver de distingir casos, el que farem és pensar, per exemple, el triangle com la figura lineal formada pels tres punts (o vèrtexs), les tres rectes (o costats) i el propi pla que els conté (que normalment s'omet).

Definició 1.11 (k-símplex). Un k-símplex és la figura lineal formada per $k+1$ punts linealment independents i per totes les varietats lineals generades per subcol·leccions d'aquests punts. Diem *cara* de dimensió i a la varietat lineal de dimensió i generada per $i+1$ punts dels punts inicials.

Definició 1.12 (Quadrivèrtex). Un quadrivèrtex és una figura lineal en un pla projectiu formada per quatre punts $p_1, \ldots, p_4$ no tres d'ells alineats i les sis rectes rectes $p_i \vee p_j$. Observem que aquestes sis rectes s'interse-quen en set punts dels quals quatre són els punts p_i inicials. Els tres punts nous són linealment independents i per tant determinen un triangle al que anomenem *triangle diagonal del quadrivèrtex*. **Veure figura** 2.

Definició 1.13 (Quadrilàter complet). Un quadrilàter complet és una figura lineal en un pla projectiu forma-da per quatre rectes l_i no tres d'elles concurrents (anomenats *costats*) junt amb els sis punts $l_i \cap l_j$ on es tallen anomenats *vèrtexs*. Diem que dos vèrtexs són *oposats* si no estan en un mateix costat. Els tres parells de vèrtexs oposats determinen un triangle que anomenem *triangle diagonal del quadrilàter complet*.

1.4 Projectivitats

Definició 1.14 (Projectivitat). Siguin $\mathbb{P}_1 = (\mathbb{P}_1, E_1, \pi_1)$ i $\mathbb{P}_2 = (\mathbb{P}_2, E_2, \pi_2)$ dos espais projectius de la mateixa dimensió n. Una *projectivitat* entre ells és una aplicació $\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ tal que existeix un isomorfisme $f : E_1 \longrightarrow E_2 \mid \varphi([u]) = [f(u)]$, per a tot vector no nul $u \in E_1$. També podem escriure $\varphi(\pi_1(u)) = \pi_2(f(u))$; és a dir, que el diagrama següent commuta:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"'] \\ \mathbb{P}_1 \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{P}_2 \end{tikzcd}$$

Figura 1: Diagrama de projectivitats

Definició 1.15 (Perspectiva de centre $\mathbb{M}$). Siguin dues varietats lineals $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ diferents i de la mateixa dimen-sió k en un espai projectiu fixat $(\mathbb{P}, E, \pi)$ de dimensió n. Sigui $\mathbb{M}$ una varietat lineal suplementària de $\mathbb{L}_1$ i $\mathbb{L}_2$; és a dir, $\dim M = n - k - 1$ i $M \cap \mathbb{L}_i = \emptyset$. Anomenem *perspectiva de centre* $\mathbb{M}$ a l'aplicació:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\mathbb{M}} : & \mathbb{L}_1 & \longrightarrow & \mathbb{L}_2 \\ & p & \longmapsto & (p \vee \mathbb{M}) \cap \mathbb{L}_2 \end{array}$$

2

Coordenades projectives

2.1 Sistemes de referència

Definició 2.1 (Referència projectiva). Una *referència projectiva* (o *sistema de referència projectiu*) en un espai projectiu $\mathbb{P}$ de dimensió n és una col·lecció ordenada de $n+1$ punts linealment independents $p_0, \dots, p_n = [u_0], \dots, [u_n]$ i un punt A, anomenat *punt unitat*, que satisfà la propietat:

$$A \notin p_0 \vee \cdots \vee \widehat{p_i} \vee \cdots \vee p_n,$$

per a tot $i = 0, \dots, n$. Com $u_0, \dots, u_n$ és una base d'E, posarem $\mathcal{R} = (p_0, \dots, p_n; A)$ per a denotar la referència. Anomenem *vèrtexs* de la referència als punts p_i.

Definició 2.2 (Base adaptada). Donada una referència projectiva $\mathcal{R} = (p_0, \dots, p_n; A)$ en un espai projectiu $(\mathbb{P}, E, \pi)$, diem que una base de E, $e_0, \dots, e_n$ és una *base adaptada* a $\mathcal{R}$ si satisfà les condicions següents:

1. $\pi(e_0) = p_0, \dots, \pi(e_n) = p_n$ i
2. $\pi(e_0 + \cdots + e_n) = A$ (en altres paraules, imposem $A = [p_0 + \cdots + p_n]$).

Proposició 2.3. *Donada una referència projectiva $\mathcal{R}$ en un espai projectiu $(\mathbb{P}, E, \pi)$, tenim que:*

1. *Existeix una base $e_0, \dots, e_n$ de E adaptada a la referència $\mathcal{R}$.*
2. *Si $v_0, \dots, v_n$ és una altra base també adaptada a $\mathcal{R}$, aleshores existeix una constant $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ de manera que $v_i = \lambda e_i$ per a tot $i = 0, \dots, n$.*

Demostració.

1. Representem p_i per vectors e'_i qualssevol: $p_i = [e'_i]$. Aleshores, com els punts p_i són linealment independents, tenim que $e'_0, \dots, e'_n$ és una base de E. Sigui u un vector tal que $A = [u], u \in E$, aleshores podem posar $u = a_0 e'_0 + \ldots + a_n e'_n$ per a certs $a_0, \dots, a_n$. Observem que totes les constants a_i han de ser no nul·les ja que si $a_i = 0$, aleshores $u \in \langle e'_0, \dots, \widehat{e'_i}, \dots, e'_n \rangle$ i per tant, aplicant π, $A \in p_0 \vee \ldots \vee \widehat{p_i} \vee \ldots \vee p_n$, que ens portaria a contradicció. Definim doncs $e_i = a_i e'_i$. Com les constants són totes diferents de zero tenim que $e_0, \dots, e_n$ és una base i, per construcció, $u = e_0 + \ldots + e_n$.
2. Si $v_0, \dots, v_n$ és una altra base adaptada, aleshores $[v_i] = p_i = [e_i]$. Siguin c_i les constants de proporcionalitat $v_i = c_i e_i$. Com $\sum e_i$ i $\sum v_i = \sum c_i e_i$ representen el mateix punt A, tindrem que existeix λ no nul amb $\lambda \sum e_i = \sum c_i e_i$. Atès que els vectors e_i són linealment independents obtenim que $\lambda = c_i$ per a tot i:

$$A = [e_1 + \cdots + e_n] = [v_1 + \cdots + v_n] \implies (e_1 + \cdots + e_n) = \lambda(v_1 + \cdots + v_n). \qquad \blacksquare$$

Proposició 2.4. *Sigui $e_0, \ldots, e_n$ una base d'E. Aleshores:*

$$\mathcal{R} = ([e_0], \ldots, [e_n]; [e_0 + \cdots + e_n])$$

és una referència projectiva i $e_0, \ldots, e_n$ n'és una base adaptada.

Demostració. $[e_0], \ldots, [e_n]$ de $\mathcal{R}$ són punts independents de $\mathbb{P}$. Si per a un cert i es dona que $[e_0 + \cdots + e_n] \in [e_0] \vee \widehat{[e_i]} \vee \cdots \vee [e_n]$, aleshores:

$$e_0 + \cdots + e_n \in \langle e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n \rangle \implies e_i \in \langle e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n \rangle,$$

fet que va en contra de la independència lineal de $e_0, \ldots, e_n$. Per tant, $\mathcal{R}$ és una referència. La resta se segueix de la definició de base adaptada. ■

2.2 Coordenades projectives

Definició 2.5 (Coordenades projectives). Les *coordenades projectives* d'un punt $p \in \mathbb{P}$ en la referència $\mathcal{R}$ són una col·lecció de $n+1$ constants ordenades $a_0, \ldots, a_n$ determinades per la relació $u = a_0 e_0 + \ldots + a_n e_n$, on $p = [u]$. Posem $p = [a_0 : \ldots : a_n]$.

Proposició 2.6. ***Les coordenades projectives estan ben definides llevat de múltiple**, és a dir:*

1. *Sigui $e'_0, \ldots, e'_n$ una altra base adaptada a $\mathcal{R}$ i siguin $a'_0, \ldots, a'_n$ les coordenades de p calculades en aquesta base. Aleshores existeix $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $a'_i = \lambda a_i$ per a tot $i = 0, \ldots, n$.*
2. *Sigui $u' \in E$ un altre representant del punt p i siguin $a'_0, \ldots, a'_n$ les coordenades de p calculades amb u'. Aleshores existeix $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $a'_i = \lambda a_i$ per a tot $i = 0, \ldots, n$.*

Demostració. En el primer apartat tenim, per 2.4, que existeix una constant $c \neq 0$ tal que $e'_i = c e_i$. Per tant:

$$u = a_0 e_0 + \cdots + a_n e_n = \frac{1}{c}\left(a_0 e'_0 + \cdots + a_n e'_n\right).$$

Per tant, $a'_i = \frac{a_i}{c}$. Per al segon apartat, tenim $u' = cu$ i, per tant, $u' = c(a_0 e_0 + \cdots + a_n e_n)$; és a dir, $a'_i = c a_i$. ■

Observació 2.7. Fixada una referència projectiva tenim un sistema de coordenades ben definit en el sentit següent: tenim una bijecció entre els punts de $\mathbb{P}$ i el conjunt de les coordenades homogènies $[a_0 : \ldots : a_n]$ no totes zero i definides llevat de múltiple.

2.3 Referències subordinades

Considerem una referència projectiva $\mathcal{R} = (p_0, \ldots, p_n; A)$ en un espai projectiu $\mathbb{P}$ i sigui $e_0, \ldots, e_n$ una base adaptada. Els vèrtexs p_i determinen un n-símplex en $\mathbb{P}$. Considerem una cara Δ de dimensió k d'aquest símplex que, per simplificar les notacions, suposarem que és la cara determinada pels primers $k+1$ vèrtexs: $\Delta = p_0 \vee \cdots \vee p_k$.

Definició 2.8 (Referència subordinada). La referència projectiva en Δ donada per $\mathcal{R}_\Delta = (p_0, \dots, p_k; A')$ està ben definida. L'anomenarem *referència subordinada a* Δ.

1. La varietat lineal $A \vee p_{k+1} \vee \cdots \vee p_n$ talla Δ en un únic punt A'. De fet, $A' = [e_0 + \cdots + e_k]$.
2. Sigui $p \in \Delta$. Si les coordenades de p en la referència subordinada $\mathcal{R}_\Delta$ són $[a_0 : \cdots : a_k]$ aleshores les coordenades de p en la referència $\mathcal{R}$ són $p = [a_0 : \cdots : a_k : 0 : \cdots : 0]$.

2.4 Equacions de varietats

Fixem un espai projectiu $\mathbb{P}$ de dimensió n i una referència projectiva $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n; A\}$. Sigui $\mathbb{L} = [F]$ una varietat lineal de dimensió k. Volem trobar equacions per a $\mathbb{L}$.

2.4.1 Paramètriques

Suposem que són conegudes les coordenades dels punts q_i en la referència $\mathcal{R}$:

$$q_i = [a_0^i : \cdots : a_n^i], \ i = 0 \div k,$$

Sigui $e_0, \dots, e_n$ una base adaptada a $\mathcal{R}$. Aleshores $u_i = a_0^i e_0 + \cdots + a_n^i e_n \in F$ representa el punt q_i per definició de coordenades: $q_i = [u_i]$. Tenim, doncs, que els vectors $u_0, \dots, u_k$ formen una base de F. Sigui ara $x = [w]$ un punt arbitrari de $\mathbb{L}$. Com que $w \in F$ tindrem:

$$w = \sum_{j=0}^{k} \lambda_i u_i = \sum_{j=0}^{k} \lambda_i (a_0^i e_0 + \cdots + a_n^i e_n) = \left(\sum_i \lambda_i a_0^i \right) e_0 + \cdots + \left(\sum_i \lambda_i a_n^i \right) e_n.$$

Per tant, el punt x té coordenades:

$$x = \left[\sum_i \lambda_i a_0^i : \cdots : \sum_i \lambda_i a_n^i \right].$$

2.4.2 Implícites

Amb la mateixa notació, trobem que un punt arbitrari $x = [x_0 : \cdots : x_n]$ pertany a $\mathbb{L}$ si, i només si, el vector $\sum x_i e_i$ pertany a F. Equivalentment, si:

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_0 & a_0^0 & \cdots & a_0^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & a_n^0 & \cdots & a_n^k \end{pmatrix} = k + 1.$$

Anul·lant els menors d'ordre $k + 2$ trobem un sistema d'equacions homogènies. Observem que és el sistema d'equacions d'F associat als vectors u_i.

2.5 Teoremes de Pappus i Desargues

Teorema 2.9 (Teorema de Pappus). *Siguin a, b dues rectes del pla projectiu. Considerem, donats tres punts diferents A_1, A_2, A_3 en a i tres punts diferents B_1, B_2, B_3 en b. Suposem que els seus punts són diferents d'$a \cap b$. Aleshores, els punts $A_1B_2 \cap A_2B_1$, $A_1B_3 \cap A_3B_1$ i $A_2B_3 \cap A_3B_2$ estan alineats.* ***Veure figura 3.***

Demostració. Anomenem O al punt d'intersecció $a \cap b$ i posem $P = A_1B_2 \cap A_2B_1$. Considerem la referència $\mathcal{R} = (O, A_1, B_1; P)$. Observem que les condicions sobre els punts permeten assegurar que P és un punt unitat ben escollit. Aleshores $a = O \vee A_1 = [1:0:0] \vee [0:1:0]$ té equació implícita $x_2 = 0$. Anàlogament b té equació $x_1 = 0$. Com la recta $A_1 \vee P = [0:1:0] \vee [1:1:1]$ té equació $x_0 - x_2 = 0$, i B_2 és el punt $A_1 \vee P \cap b$, obtenim que $B_2 = [1:0:1]$. De la mateixa forma $A_2 = [1:1:0]$. Finalment podem suposar que A_3 és de la forma $[\alpha_1 : \alpha_2 : 0]$. Com els punts són diferents (i diferents d'O) podem suposar que les dues coordenades són no nul·les. Dividim doncs per α_1 i posem $\alpha := \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Tenim que $A_3 = [1 : \alpha : 0]$. A més a més, $\alpha \neq 0, 1$. Podem fer la mateixa discussió per B_3 i arribem a què $B_3 = [1 : 0 : \beta]$, amb $\beta \neq 0, 1$. Ara ja podem fer el càlcul de totes les rectes i les seves interseccions. Fent servir determinats trobem les següents equacions implícites:

$$\begin{array}{lr} A_1B_3: & \beta x_0 - x_2 = 0; \\ A_3B_1: & \alpha x_0 - x_1 = 0; \\ A_2B_3: & \beta x_0 - \beta x_1 - x_2 = 0; \\ A_3B_2: & \beta\alpha x_0 - x_1 - \alpha x_2 = 0. \end{array}$$

Resolent els corresponents sistemes trobem que $A_1B_3 \cap A_3B_1 = [1 : \alpha : \beta]$ i $A_2B_3 \cap A_3B_2 = [\alpha\beta - 1 : \alpha\beta - \alpha : \alpha\beta - \beta]$. Per acabar la demostració hem de veure que aquests dos punts i $P = [1:1:1]$ estan alineats. Equivalentment, hem de veure que tres vectors representants dels punts són linealment dependents. Ho comprovem amb el determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ \alpha\beta - 1 & \alpha\beta - \alpha & \alpha\beta - \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Efectivament, la tercera fila és igual a la primera multiplicada per $\alpha\beta$ menys la segona fila. ■

Observació 2.10 (Comentaris a la demostració). $A_3 \in a$, $z = 0$. Com ja hem dit, $A_3 = [\alpha_1 : \alpha_2 : 0] = [1 : \alpha : 0]$. Si α_1 fos zero, $A_3 = [0 : \beta : 0] = [0:1:0]$, el punt A_1, però hem suposat que els punts són diferents dos a dos, absurd.

Teorema 2.11 (Teorema de Desargues). *Donats dos triangles $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ en un pla projectiu tals que cap vèrtex d'un triangle es troba sobre cap costat de l'altre triangle, les afirmacions següents són equivalents:*

1. *Les rectes A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 són concurrents.*
2. *Els punts $A_1A_2 \cap B_1B_2$, $A_1A_3 \cap B_1B_3$, $A_2A_3 \cap B_2B_3$ estan alineats.*

Veure figura 4.

Demostració. Per raons que seran evidents més endavant (*autodualitat*), és suficient demostrar una de les dues implicacions.

Siguin doncs dos triangles del pla projectiu $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ tals que cap vèrtex d'un triangle es troba sobre cap costat de l'altre triangle. Suposem que les rectes A_iB_i són concurrents en un punt O i volem demostrar que els punts $A_1A_2 \cap B_2B_1$, $A_2A_3 \cap B_3B_2$ i $A_3A_1 \cap B_1B_3$ estan alineats. Considerem la referència

$$\mathcal{R} = (A_1, A_2, A_3; O)$$

Per tant $A_1 = [1 : 0 : 0]$, $A_2 = [0 : 1 : 0]$, $A_3 = [0 : 0 : 1]$ i $O = [1 : 1 : 1]$. Observem que $B_i \in O \vee A_i$. Per exemple B_1 pertany a la recta $O \vee A_1$ que té equació $x_1 = x_2$. Per tant $B_1 = [a : b : b]$ per a certes constants a i b. Com que $A_1 \neq B_1$ tenim que $b \neq 0$. Dividint per b les coordenades del punt i anomenant α a $\frac{a}{b}$ tenim que $B_1 = [\alpha : 1 : 1]$. Amb un argument similar obtenim que $B_2 = [1 : \beta : 1]$ i $B_3 = [1 : 1 : \gamma]$. Ara ja tenim totes les coordenades dels punts involucrats i podem calcular les coordenades dels punts que hem de veure que estan alineats.

Per calcular $A_1A_2 \cap B_1B_2$ primer trobem les equacions de les dues rectes. L'equació de la primera $A_1A_2 = [1 : 0 : 0] \vee [0 : 1 : 0]$ és simplement $x_2 = 0$. La segona equació s'obté fent el determinant:

$$\begin{vmatrix} x_0 & \alpha & 1 \\ x_1 & 1 & \beta \\ x_2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\beta)x_0 + (1-\alpha)x_1 + (\alpha\beta - 1)x_2 = 0.$$

La intersecció de les dues rectes és el punt $[\alpha - 1 : 1 - \beta : 0]$. Fent un càlcul semblant trobem que els altres dos punts són

$$[\alpha - 1 : 0 : 1 - \gamma] \text{ i } [0 : \beta - 1 : 1 - \gamma].$$

Ara comprovem que estan alineats, és a dir que els punts no són linealment independents, veient que el determinant de les coordenades dels tres punts és zero:

$$\begin{vmatrix} \alpha - 1 & 1 - \beta & 0 \\ \alpha - 1 & 0 & 1 - \gamma \\ 0 & \beta - 1 & 1 - \gamma \end{vmatrix} = (\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \blacksquare$$

2.6 Canvis de coordenades

Suposem donats dos sistemes de referència en un mateix espai projectiu:

$$\mathcal{R} = (p_0, \ldots, p_n; A),$$
$$\mathcal{R}' = (p'_0, \ldots, p'_n; B).$$

Definició 2.12 (Coordenades normalitzades). Diem que les coordenades dels punt p'_i estan *normalitzades* quan la suma de totes elles donen les coordenades del punt B. El lema ens diu que sempre podem normalitzar una referència $\mathcal{R}'$ (en funció d'una segona referència fixada $\mathcal{R}$).

Definició 2.13 (Matriu de canvi de referència). La *matriu de canvi de referència* o matriu de canvi de coordenades de $\mathcal{R}'$ en funció de $\mathcal{R}$ és la matriu obtinguda posant en columna les coordenades normalitzades en la referència $\mathcal{R}$ dels vèrtexs de la referència $\mathcal{R}'$. Amb la notació anterior és la matriu:

$$M = \begin{pmatrix} a_0^0 & \dots & a_0^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^0 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

2.7 Raó doble

Definició 2.14 (Coordenada absoluta). Fixem un espai projectiu de dimensió 1, $\mathbb{P}^1$, en el qual suposem donada una referència projectiva $\mathcal{R} = (p_0, p_1; A)$ ($p_0 = [1 : 0]$, $p_1 = [0 : 1]$, $A = [1 : 1]$). La *coordenada absoluta* d'un punt q de $\mathbb{P}^1$ de coordenades $[a : b]$ en la referència $\mathcal{R}$ és:

$$\theta_q := \frac{a}{b} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\} \text{ (notem que } \infty \text{ no va signat).}$$

En particular, $\theta_{p_0} = \infty$, $\theta_{p_1} = 0$ i $\theta_A = 1$. Observem que, així, s'obté una bijecció entre $\mathbb{P}^1 \setminus \{p_0\}$ i la recta afí $A^1_{\mathbb{K}}$ identificada amb el cos $\mathbb{K}$.

Considerem ara quatre punts ordenats q_1, q_2, q_3, q_4 en una recta projectiva (un espai projectiu de dimensió 1) i suposem que almenys tres dels quatre punts són diferents. Fixem una referència projectiva $(p_0, p_1; A)$ en la recta i suposem que les coordenades projectives de q_i en aquesta referència són $[x_i : y_i]$.

Definició 2.15 (Raó doble). La *raó doble* dels punts q_i és:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\Delta_{3,1}}{\Delta_{3,2}} : \frac{\Delta_{4,1}}{\Delta_{4,2}}$$

La raó doble pren valors en $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$.

Observació 2.16. *Independència de la referència*: sigui $\mathcal{R}'$ una altra referència de la recta en la qual els punts q_i tenen coordenades $[x_i' : y_i']$. Com hem vist anteriorment, existeix una matriu M invertible de canvi de coordenades tal que

$$M \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \implies M \begin{pmatrix} x_i' & x_j' \\ y_i' & y_j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}$$

Aleshores:

$$\Delta_{i,j}' := \begin{vmatrix} x_i' & x_j' \\ y_i' & y_j' \end{vmatrix}$$

satisfà $\det(M) \cdot \Delta_{i,j}' = \Delta_{i,j}$.

Definició 2.17 (Raó doble, segon mètode). Si els tres primers punts són diferents podem *normalitzar* les seves coordenades (és a dir, *buscar una base adaptada*) i calcular la coordenada absoluta del quart.

Exemple 2.18. Per exemple, considerem en un pla projectiu amb una referència fixada els punts

$$q_1 = [1 : 0 : 1], \quad q_2 = [2 : -1 : 1], \quad q_3 = [0 : 1 : 1], \quad q_4 = [-1 : 3 : 2],$$

que estan alineats perquè tots ells pertanyen a la recta $x + y - z = 0$. Considerem la referència donada pels tres primers punts. Per tenir una base adaptada hem de considerar els representants $(2, 0, 2)$, $(-2, 1, -1)$ de q_1 i de q_2 (hem de fer el mateix pas que farem igualant a $[0 : 1 : 1]$, i obtindrem λ, μ tals que $\lambda = 2$ i $\mu = 1$), de manera que la seva suma sigui un representant de q_3. Ara calculem:

$$a(2, 0, 2) + b(-2, 1, -1) = (-1, 3, 2) \implies b = 3, \ a = \frac{5}{2}.$$

Per tant, la raó doble és $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$.

Corol·lari 2.19 (Acció de les permutacions en la raó doble). *Combinant aquestes dues proposicions, és fàcil deduir tots els valors següents:*

$$\begin{aligned}
\lambda &= (q_1, q_2, q_3, q_4) = (q_2, q_1, q_4, q_3) = (q_3, q_4, q_1, q_2) = (q_4, q_3, q_2, q_1) \\
\frac{1}{\lambda} &= (q_2, q_1, q_3, q_4) = (q_1, q_2, q_4, q_3) = (q_3, q_4, q_2, q_1) = (q_4, q_3, q_1, q_2) \\
1 - \lambda &= (q_1, q_3, q_2, q_4) = (q_3, q_1, q_4, q_2) = (q_2, q_4, q_1, q_3) = (q_4, q_2, q_3, q_1) \\
\frac{\lambda - 1}{\lambda} &= (q_2, q_3, q_1, q_4) = (q_3, q_2, q_4, q_1) = (q_1, q_4, q_2, q_3) = (q_4, q_1, q_3, q_2) \\
\frac{1}{1 - \lambda} &= (q_3, q_1, q_2, q_4) = (q_1, q_3, q_4, q_2) = (q_2, q_4, q_3, q_1) = (q_4, q_2, q_1, q_3) \\
\frac{\lambda}{\lambda - 1} &= (q_3, q_2, q_1, q_4) = (q_2, q_3, q_4, q_1) = (q_1, q_4, q_3, q_2) = (q_4, q_1, q_2, q_3)
\end{aligned}$$

Si en un determinat ordre la raó doble val λ, els valors que es poden assolir permutant l'ordre dels punts són:

$$\Lambda = \left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{\lambda - 1}{\lambda}\right\}.$$

En general aquests sis valors seran diferents entre sí però es produeixen coincidències entre ells en situacions de posicions geomètriques especials (és a dir, hi ha certs casos en què $\#\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\} < 6$). Imposant totes les igualtats possibles es fàcil arribar a la conclusió de que Λ té menys de sis valors diferents únicament en les tres situacions següents:

1. $\Lambda = \{0, 1, \infty\}$ que com ja hem vist correspon al cas en què dos dels quatre punts són iguals.
2. $\Lambda = \left\{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right\}$, és a dir les dues arrels de l'equació $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Aquesta situació només es produeix quan l'equació té solució en el cos en què treballem, per exemple sobre $\mathbb{C}$ (però no sobre $\mathbb{R}$) i per tant la seva aparició és més de caire algebraic que geomètric.
3. $\Lambda = \{-1, 2, \frac{1}{2}\}$. Aquesta possibilitat apareix sempre (amb l'única hipòtesi de que la característica del cos no sigui 2), està relacionada amb el concepte de punt mig de la geometria afí i es dona si, i només si, $q_1, \ldots, q_4$ estan en *quaterna harmònica*.

Definició 2.20 (Quaterna harmònica). Direm que els punts q_1, q_2, q_3, q_4 formen quaterna harmònica si: $(q_1, q_2, q_3, q_4) = -1$.

Definició 2.21 (Separació harmònica). Direm que dues parelles de punts $\{q_1, q_2\}$ i $\{q_3, q_4\}$ se *separen harmònicament*:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = -1.$$

El següent resultat ens proporciona una forma efectiva de construcció de quaternes harmòniques a partir de quatre rectes del pla projectiu $\ell_1, \dots, \ell_4$ formant un quadrilàter complet; és a dir, tals que no hi ha tres de concurrents. Utilitzem la notació $p_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$.

Teorema 2.22 (Teorema del quadrilàter complet). *Siguin D, D' els vèrtexs del triangle diagonal del quadrilàter alineats amb p_{12}, p_{34}. Amb aquesta notació, la parella $\{D, D'\}$ separa harmònicament la parella p_{12} i p_{34}. En aquesta situació, tenim $(p_{12}, p_{34}, D, D') = -1$.* ***Veure figura 5.***

Demostració. La demostració del teorema del quadrilàter complet és senzilla de fer en coordenades si triem una referència adequada. Per exemple, podem triar la referència: $\mathcal{R} = (p_{23}, p_{13}, p_{24}; p_{14})$, que és una referència per la definició de quadrilàter complet. Aleshores, podem calcular les coordenades dels punts que ens interessen en aquesta referència: $p_{12} = [1 : 0 : 1]$, $p_{34} = [1 : 1 : 0]$, $D = [0 : 1 : -1]$ i $D' = [2 : 1 : 1]$. Efectivament:

$$([1 : 1 : 0], [1 : 0 : 1], [0 : 1 : -1], [2 : 1 : 1]) = -1.$$

De manera que les dues parelles de punts se separen harmònicament. ■

Proposició 2.23. *Sigui $\varphi = [f] : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ una projectivitat amb isomorfisme associat $f : E_1 \longrightarrow E_2$. Siguin q_i quatre punts alineats de $\mathbb{P}_1$ dels quals almenys tres són diferents. Aleshores, també hi ha almenys tres punts diferents entre els punts $\varphi(p_i)$ i*

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = (\varphi(q_1), \varphi(q_2), \varphi(q_3), \varphi(q_4)).$$

Demostració. La primera afirmació sobre l'existència de tres punts diferents és conseqüència de la bijectivitat de φ. Per una altra banda, gràcies als resultats obtinguts sobre les permutacions dels punts, demostrant la igualtat en qualsevol ordre la igualtat queda demostrada. Això ens permet suposar que els tres primers punts són diferents. Sigui e_i una base adaptada a la referència $\mathcal{R} = (q_1, q_2; q_3)$, és a dir $q_1 = [e_1]$, $q_2 = [e_2]$ i $q_3 = [e_1 + e_2]$. Si $q_4 = [ae_1 + be_2]$ tenim que $(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{a}{b}$. Aplicant φ obtenim:

$$\begin{aligned}
\varphi(q_1) &= [f]([e_1]) = [f(e_1)] \\
\varphi(q_2) &= [f]([e_2]) = [f(e_2)] \\
\varphi(q_3) &= [f]([e_1 + e_2]) = [f(e_1 + e_2)] = [f(e_1) + f(e_2)]
\end{aligned}$$

Per tant $f(e_1), f(e_2)$ és una base adaptada a la referència

$$(\varphi(q_1), \varphi(q_2); \varphi(q_3))$$

i com que

$$\varphi(q_4) = [f]([ae_1 + be_2]) = [f(ae_1 + be_2)] = [af(e_1) + bf(e_2)]$$

tenim que $(\varphi(q_1), \varphi(q_2), \varphi(q_3), \varphi(q_4))$ també és $\frac{a}{b}$. ■

Observació 2.24. **La raó doble és invariant per les projectivitats**. Això ens indica que és un objecte (un element de $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$) projectiu. La raó doble és invariant per projecció i secció. Si agafem una perspectiva de $r \longrightarrow s$ amb centre M, com sabem que és una projectivitat, tindrem que preserva raons dobles.

3 Dualitat

3.1 Espai projectiu dual

Definició 3.1 (Espai projectiu dual). Considerem un espai projectiu $(\mathbb{P}, E, \pi)$ de dimensió n i volem donar estructura d'espai projectiu al conjunt dels hiperplans de $\mathbb{P}$. Definim doncs

$$\mathbb{P}^\vee := \{H \subset \mathbb{P} \mid H \text{ és un hiperplà}\}.$$

La definició d'espai vectorial dual ens dona l'espai vectorial associat a $\mathbb{P}^\vee$ el projectiu dual que volem construir:

$$E^\vee := \{\omega : E \longrightarrow \mathbb{K} \mid \omega \text{ és lineal}\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K}).$$

és un espai vectorial de dimensió $n + 1 = \dim E$ i si $e_0, \dots, e_n$ és una base de E, aleshores $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ definida per $e_i^*(e_j) = \delta_i^k$ és una base de $E^\vee$ (l'anomenem base dual de la base $.e_i$). Als vectors de $E^\vee$ els anomenem *formes*.

Proposició 3.2. *L'aplicació:*

$$\pi^\vee : E^\vee \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^\vee, \; w \longmapsto [\ker(\omega)].$$

és a dir, assignant a $\omega \in E^\vee$ el subespai $[\ker(\omega)]$ està ben definida i $(\mathbb{P}^\vee, E^\vee, \pi^\vee)$ ***és un espai projectiu de dimensió*** *n.*

Definició 3.3 (Varietat lineal dual). Fixem ara un varietat lineal $\mathbb{L} = [F]$ en $\mathbb{P}$ i estudiem el conjunt dels hiperplans que la contenen, posem:

$$\mathbb{L}^* := \{H \in \mathbb{P}^\vee \mid \mathbb{L} \subset H\}.$$

la *varietat lineal dual*. Una varietat és varietat lineal de $\mathbb{P}^\vee$ si, i només si, existeix un subespai vectorial $F^\vee$ d'$E^\vee$ tal que $\mathbb{L}^* = [F^\vee]$. En aquest sentit, la següent cadena d'igualtats ens dona $\mathbb{L}^* = [F^\circ]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{L}^* &= \{H \in \mathbb{P}^\vee \mid \mathbb{L} \subset H\} = \{[\ker \omega] \in \mathbb{P}^\vee \mid [F] \subset [\ker \omega]\} = \{[\ker \omega] \in \mathbb{P}^\vee \mid F \subset \ker \omega\} \\ &= \{[\ker \omega] \in \mathbb{P}^\vee \mid \omega_{|F} = 0\} = \{\pi'(\omega) \in \mathbb{P}^\vee \mid \omega \in F^\circ\} = [F^\circ].\end{aligned}$$

Proposició 3.4. *L'assignació $\mathbb{L} \longmapsto \mathbb{L}^*$ dona una bijecció entre les varietats lineals de dimensió r de $\mathbb{P}$ i les varietats lineals de dimensió $n - r - 1$ de $\mathbb{P}^\vee$.*

Observació 3.5.

- Si $\mathbb{L}$ és un hiperplà, aleshores $\mathbb{L}^*$ té dimensió $n - 1 - (n - 1) = 0$ i aquesta bijecció ens diu de nou que **els punts de $\mathbb{P}^\vee$ corresponen a hiperplans de** $\mathbb{P}$.
- Si $\mathbb{L}$ té dimensió $n - 2$, aleshores L^* és una recta en $\mathbb{P}^\vee$, per tant els feixos d'hiperplans també es poden pensar com rectes de l'espai projectiu dual.

Principi de dualitat. Tot enunciat sobre figures lineals en un espai projectiu de dimensió n involucrant únicament les operacions $\subset, \supset, \vee, \cap$ i la noció de dimensió és equivalent a l'enunciat obtingut aplicant l'operació $*$. Dit d'una altra forma, la seva veracitat és equivalent a les de l'enunciat obtingut canviant dimensió r per dimensió $n - r - 1$, $\subset$ per $\supset$ (i viceversa) i $\vee$ per $\cap$ (i viceversa).

Definició 3.6 (Hiperplans linealment independents)**.** Diem que una col·lecció de k hiperplans diferents $H_1, \dots, H_k$ són *linealment independents* si els punts H_i^* de $\mathbb{P}^\vee$ ho són.

Proposició 3.7. *Una col·lecció de k hiperplans diferents $H_1, \dots, H_k$ són linealment independents si i només si* $\dim H_1 \cap \dots \cap H_k = n - k$.

Demostració. Per la definició els hiperplans H_i són linealment independents si H_i^* són linealment independents, és a dir si $\dim H_1^* \vee \dots \vee H_k^* = k - 1$. Com tenim que:

$$H_1^* \vee \dots \vee H_k^* = (H_1 \cap \dots \cap H_k)^*$$

això és equivalent a que la dimensió de $H_1 \cap \dots \cap H_k$ sigui

$$n - 1 - \dim (H_1 \cap \dots \cap H_k)^* = n - 1 - (k - 1) = n - k,$$

de manera que $\dim H_1 \cap \dots \cap H_k = n - k$. ■

Definició 3.8 (Raó doble d'hiperplans)**.** Siguin $H_1, \dots, H_4$ quatre hiperplans en un feix, és a dir tals que $H_1^*, \dots, H_4^*$ estan alineats (equivalent a que $\dim H_1 \cap \dots \cap H_4 = n - 2$). Suposem que almenys tres d'aquests quatre hiperplans són diferents. Aleshores definim la seva raó doble com

$$(H_1, \dots, H_4) := (H_1^*, \dots, H_4^*).$$

En particular té sentit parlar de quaternes harmòniques d'hiperplans, de separació harmònica, etcètera, sempre que els hiperplans continguin una varietat lineal de dimensió $n-2$.

$$H_1^*, \cdots, H_4^* \text{ estan alineats } \iff \dim(H_1^* \vee H_2^* \vee H_3^* \vee H_4^*) \leq 1 \iff \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_4) \geq n-2.$$

Hem usat el fet que $H_1^* \vee H_2^* \vee H_3^* \vee H_4^* = (H_1 \cap \cdots \cap H_4)^*$.

3.2 Dualitat amb coordenades

Definició 3.9 (Referència dual). Suposem donada una referència projectiva $\mathcal{R} = (p_0, \ldots, p_n; A)$ en $\mathbb{P}^n$. Sigui $e_0, \ldots, e_n$ una base adaptada a $\mathcal{R}$ (que és única llevat de múltiples). Aleshores la base dual $e_0^*, \ldots, e_n^*$ determina en $\mathbb{P}^\vee$ una referència anomenada *referència dual*:

$$\mathcal{R}^\vee := ([e_0^*], \ldots, [e_n^*]; [e_0^* + \cdots + e_n^*]),$$

de la qual $e_0^*, \ldots, e_n^*$ n'és base adaptada.

Proposició 3.10. *Sigui $\mathbb{P}$ un espai projectiu amb una referència fixada $\mathcal{R}$. Si un hiperplà H té equació $A_0x_0 + \cdots + A_nx_n = 0$ en la referència $\mathcal{R}$, aleshores el punt H^* de $\mathbb{P}^\vee$ té coordenades $[A_0 : \cdots : A_n]$ en la referència dual $\mathcal{R}^\vee$. De fet, $\mathcal{R}^\vee$ és la única referència que ho compleix.*

Demostració. Sigui $e_0, \ldots, e_n$ una base adaptada a $\mathcal{R}$ i considerem la forma $\omega = A_0x_0 + \ldots + A_nx_n$. Per construcció $[\ker(\omega)] = H$, per tant $\omega \in E^\vee$ representa H en la base $(e_1, \ldots, e_n)$ a E i en la base $\mathbb{1}$ a $\mathbb{K}$. Observem que la forma $x_i : E \longrightarrow \mathbb{K}$ (enviant $(x_0 \ldots, x_n)$ a x_i) correspon a e_i^*, per tant les coordenades de H en la referència dual són $[A_0 : \ldots : A_n]$. ■

Proposició 3.11. *Siguin $H_1, \ldots, H_4$ quatre hiperplans, tres d'ells diferents, tals que $L = H_1 \cap \ldots \cap H_4$ té dimensió $n-2$. Sigui ℓ una recta tal que $l \cap L = \emptyset$. Aleshores:*

$$(H_1, \ldots, H_4) = (H_1 \cap \ell, \ldots, H_4 \cap \ell).$$

Existeix una recta, concretament ℓ, que talla els hiperplans com a mínim en tres punts diferents (ℓ és suplementària a $H_1 \cap \cdots \cap H_4$).

Demostració. Posem coordenades de manera que $\ell = [1 : 0 : \cdots : 0] \vee [0 : 1 : 0 : \ldots : 0]$ (escollim les dues primeres coordenades) i $\mathbb{L}$ estigui generada per $[0 : 0 : 1 : 0 : \cdots : 0] \vee \cdots \vee [0 : \cdots : 0 : 1]$. Per tant, com $\mathbb{L}$ pertany a la intersecció dels hiperplans, pertany a cadascun d'ells, i $A_3, \ldots, A_n = 0$ eventualment. L'equació de l'hiperplà H_i és de la forma $A_0^i x_0 + A_1^i x_1 = 0$. Per definició la raó doble dels hiperplans és:

$$\left(\left[A_0^1 : A_1^1 : 0 : \cdots : 0\right], \ldots, \left[A_0^4 : A_1^4 : 0 : \cdots : 0\right]\right) = \left(\left[A_0^1 : A_1^1\right], \ldots, \left[A_0^4 : A_1^4\right]\right),$$

on la igualtat prové de les discussions sobre la raó doble (invariància per projectivitat i ús de la referència subordinada). D'altra banda $\ell \cap H_i = \left[A_1^i : -A_0^i : 0 : \ldots : 0\right]$; per tant,

$$\left(H_1 \cap \ell, \ldots, H_4 \cap \ell\right) = \left(\left[A_1^1 : -A_0^1\right], \ldots, \left[A_1^4 : -A_0^4\right]\right).$$

Com que:

$$\begin{vmatrix} A_0^i & A_0^j \\ A_1^i & A_1^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^i & A_1^j \\ -A_0^i & -A_0^j \end{vmatrix}$$

Observem que la igualtat obtinguda diu en particular que la raó doble $\left(H_1 \cap \ell, \ldots, H_4 \cap \ell\right)$ és independent de ℓ. Això també es podia haver demostrat utilitzant perspectives. En efecte, si ℓ' és una altra recta disjunta amb $\mathbb{L}$, la perspectiva $\ell \longrightarrow \ell'$ de centre $\mathbb{L}$ transforma $\ell \cap H_i$ en $\ell' \cap H_i$ i per tant la raó doble és la mateixa. ■

3.3 Projectivitats duals

Definició 3.12 (Projectivitat associada). Sigui $\varphi = [f] : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ la projectivitat associada l'isomorfisme $f : E_1 \longrightarrow E_2$. Aleshores definim l'aplicació:

$$\varphi^\vee : \mathbb{P}_2^\vee \longrightarrow \mathbb{P}_1^\vee$$

de la forma $\varphi^\vee(H) = \varphi^{-1}(H)$.

Proposició 3.13. *L'aplicació $\varphi^\vee$ és la projectivitat associada a l'isomorfisme dual $f^\vee : E_2^\vee \longrightarrow E_1^\vee$, o sigui $\varphi^\vee = [f^\vee]$.*

4 Projectivitats

4.1 Representació matricial i varietats invariants

Recordem que una projectivitat φ entre dos espais projectius $(\mathbb{P}_1, E_1, \pi_1)$ i $(\mathbb{P}_2, E_2, \pi_2)$ ve donada per un isomorfisme $f : E_1 \setminus \{0\} \longrightarrow E_2 \setminus \{0\}$ i que les aplicacions φ i f estan lligades per la condició $\varphi([u]) = [f(u)]$, per a u qualsevol. Diem que f és l'isomorfisme associat a φ i està determinat llevat de constant.

Teorema 4.1 (Teorema Fonamental de la Geometria Projectiva). *Donades dues referències $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ definides de la següent forma:*

$$\mathcal{R}_1 = (p_0, \ldots, p_n; A) \text{ i}$$

$$\mathcal{R}_2 = (q_0, \ldots, q_n; B)$$

en $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ respectivament, existeix una única projectivitat $\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ tal que $\varphi(p_i) = q_i$ i $\varphi(A) = B$. A més a més si $p = [x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}_1$ en la referència $\mathcal{R}_1$, aleshores $\varphi(p) = [x_0. : \ldots. : x_n] \in \mathbb{P}_2$ en la referència $\mathcal{R}_2$.

Demostració. Per a l'existència només hem de considerar bases adaptades $e_0, \ldots, e_n$ per a $\mathcal{R}_1$ i $v_0, \ldots, v_n$ per a $\mathcal{R}_2$ i considerar l'isomorfisme $f : E_1 \longrightarrow E_2$ determinat per $f(e_i) = v_i$ (que serà únic pel que vam veure a *Àlgebra Lineal*). Sigui $\varphi = [f]$. Aleshores:

$$\varphi(p_i) = \varphi([e_i]) = [f(e_i)] = [v_i] = q_i,$$

per a tot $i = 0, \ldots, n$. A més a més:

$$\varphi(A) = \varphi([e_0 + \ldots + e_n]) = [f(e_0 + \ldots + e_n)] = [v_0 + \ldots + v_n] = B.$$

Per demostrar la unicitat considerem una altra projectivitat ψ que compleixi $\psi(p_i) = q_i$ i $\psi(A) = B$. Sigui g l'isomorfisme associat $\psi = [g]$. Aleshores $[g(e_i)] = [f(e_i)] = q_i = [v_i]$, per tant $g(e_i) = \lambda_i v_i = \lambda_i g(u_i)$ i $f(u_0 + \cdots + u_n) = \lambda g(u_0 + \cdots + u_n)$. Com que:

$$[g][e_0 + \cdots + e_n] = [g(e_0 + \cdots + e_n)] = [\lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n] = B = [v_0 + \cdots + v_n],$$

tenim que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n$. Això implica que g és un múltiple de f la qual cosa implica que $\varphi = \psi$. Finalment, si $p = [x_0 e_0 + \ldots + x_n e_n]$, aplicant $[f]$ obtenim $\varphi(p) = [x_0 v_0 + \ldots x_n v_n]$. Com que $v_0, \ldots, v_n$ és una base adaptada a $\mathcal{R}_2$ trobem que les coordenades de p i de $\varphi(p)$ són les mateixes. ■

Sigui ara una projectivitat $\varphi = [f] : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ i suposem donades una referència $\mathcal{R}_1 = (p_0, \ldots, p_n; A)$ de $\mathbb{P}_1$ i una referència Ω de $\mathbb{P}_2$. Volem construir una matriu que permeti calcular les coordenades del punt $\varphi(p)$ en la referència Ω en funció de les coordenades de p en la referència $\mathcal{R}_1$. Sigui $\mathcal{R}_2 = (q_0, \ldots, q_n; B)$ la referència imatge, on $q_0 = [f](p_0), \ldots, q_n = [f](p_n)$ i $B = [f](A)$.

Observació 4.2 (Conclusions respecte la matriu associada a una projectivitat)**.**

- Pel *Teorema Fonamental de la Geometria Projectiva* tenim que, usant les referències $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ a la sortida i a l'arribada respectivament, la matriu que busquem és la identitat.
- La matriu que estem buscant és la matriu de canvi de coordenades de $\mathcal{R}_2$ a Ω. Observeu que agafant bases adaptades a $\mathcal{R}_1$, i Ω obtenim que la matriu de φ és simplement la matriu de f en aquestes bases.

4.2 Equacions d'una projectivitat

Si la matriu associada $M = (a^i_j)$ té determinant diferent de zero, aleshores defineix una projectivitat: en efecte, si e_i, v_j són bases adaptades a les referències considerem f l'isomorfisme que té matriu M en aquestes bases. Tindrem que $\varphi := [f]$ té matriu M.

Proposició 4.3 (Projectivitat dual)**.** *Sigui $\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ una projectivitat amb isomorfisme associat $f : E_1 \longrightarrow E_2$. Suposem donades referències $\mathcal{R}_i$ a $\mathbb{P}_i$, també $\mathcal{R}_i^\vee$ a $\mathbb{P}_i^\vee$ al dual. Si la matriu de φ en aquestes referències és M (és la matriu de f en bases adaptades $e_0, \ldots, e_n$ i $f_0, \ldots, f_n$) aleshores la matriu de $\varphi^\vee$:*

$\mathbb{P}_2^\vee \longrightarrow \mathbb{P}_1^\vee$, *amb assignació* $H \longmapsto \varphi^{-1}(H)$, *en les referències duals* $\mathcal{R}_i^\vee$, *serà la matriu de* $f^\vee$ *en bases* $(f_0^*, \dots, f_n^*)$ *i* $(e_0^*, \dots, e_n^*)$ *serà* M^T.

Demostració. Vam veure que l'endomorfisme associat a $\varphi^\vee$ és $f^\vee$. D'altra banda les bases adaptades a les referències duals són les respectives bases duals. La proposició és conseqüència del següent resultat d'àlgebra lineal: la matriu de l'aplicació dual en les bases duals és la matriu transposada de la matriu de l'aplicació lineal. ■

4.3 Punts fixos i hiperplans invariants

Definició 4.4 (Homografia). Anomenem *homografia* a les projectivitats d'un espai en ell mateix: $\varphi = [f] : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$. Junt amb les perspectives són les dues grans famílies de transformacions que estudiarem.

Proposició 4.5. *Sigui* $\varphi = [f] : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ *una homografia de l'espai projectiu* $\mathbb{P}$. *Aleshores:*

- *Un punt* $p = [u]$ *és fix si i només si* u *és un vector propi per* f.
- *Un hiperplà* H *és invariant si i només si* H^* *és un punt fix de* $\varphi^\vee$.

Demostració. Els punts fixos són aquells p tals que $\varphi(p) = p$. Com que també $[f(u)] = [u]$, clarament $f(u) = \lambda u$. Per tant, p és un punt fix si, i només si, $p = [u]$ amb un VEP de f. Pel que fa als hiperplans, anàlogament $\varphi(H) = H$ per definició i, com φ és bijectiva, $H = \varphi^{-1}(H)$. Això passa si, i només si H és un punt fix de $\varphi^\vee$ si, i només si, H ve representat per un VEP de $f^\vee$. ■

Observació 4.6. No és cert que si p, q són punts fixos $p \vee q$ és una recta de punts fixos, però sí que és una recta invariant. En aquest sentit, els punts fixos d'una projectivitat no són necessàriament una varietat lineal. La combinació lineal de VEPs de VAPs diferents no són VEPs en general.

Corol·lari 4.7. *Sigui* φ *una projectivitat. Un cop fixada una referència* $\mathcal{R}$, *els punts fixos els trobem calculant els vectors propis de la matriu associada* M *i els (coeficients dels) hiperplans invariants es calculen trobant els vectors propis de* M^T.

5 Espai afí i espai projectiu

5.1 Compleció projectiva

Definició 5.1 (Compleció projectiva). Donat $\mathbb{A}^n = (\mathbb{A}, F, \phi)$, considerem $\mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}(F)$ que té estructura d'espai projectiu amb $\overline{A^n} = (\mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}(F), F \times \mathbb{K}, \pi)$ on:

$$\begin{array}{rccl} \pi: & E \setminus \{0\} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{A}^n} \\ & (k, v) & \longmapsto & \begin{cases} p + \frac{1}{k} v \in \mathbb{A}^n & \text{si } k \neq 0, \\ [v] & \text{si } k = 0. \end{cases} \end{array}$$

Clarament, $\mathbb{P}(F) \subset \overline{\mathbb{A}^n}$ (diem que $\overline{\mathbb{A}^n}$ és la *compleció* d'$\mathbb{A}^n$). $\mathbb{P}(F)$ és un espai projectiu de dimensió $n-1$; per tant, un hiperplà d'$\overline{\mathbb{A}}^n$. Se l'anomena *hiperplà de l'infinit d'*$\overline{A}^n$, i el denotarem per H_∞. Cada punt d'H_∞ representa una direcció a $\mathbb{A}^n$. Els punts d'H_∞ s'anomenen *punts impropis* (són els nous punts), i els punts d'$\overline{A^n} \setminus H_\infty$ s'anomenen *punts propis*.

Definició 5.2 (Funció afí). Una funció afí d'$\mathbb{A}^n$ és una aplicació $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que existeix un punt $p \in \mathbb{A}^n$ amb la propietat que la funció

$$\begin{array}{rccl} \psi_{f,p}: & F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & v & \longmapsto & f(p+v)-f(p) \end{array}$$

sigui lineal. una funció $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ és afí si per qualsevol punt $p \in \mathbb{A}^n$, $\psi_{f,p} : F \longrightarrow \mathbb{K}$ és lineal. A més, en aquest cas, la funció $\psi_{f,p}$ no depèn de p. Per això, quan no hi hagi confusió, escriurem directament ψ_f. Així doncs, les funcions afins compleixen que $f(q) = f(p) + \psi_f(\overrightarrow{pq})$.

Proposició 5.3. *El conjunt de les funcions afins d'$\mathbb{A}^n_k$ és un espai vectorial: en efecte, el conjunt G següent defineix un espai vectorial de dimensió $n+1$: $G = \left\{f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ és una funció afí d'} \mathbb{A}^n\right\}$.*

Demostració. Siguin f i g funcions afins. El fet que $\psi_{f,p}$ i $\psi_{g,p}$ siguin lineals per qualsevol $p \in \mathbb{A}^n$ fa que $\psi_{f+\lambda g,p} = \psi_{f,p} + \lambda\psi_{g,p}$ sigui lineal i, per tant, $f+\lambda g$ sigui una funció afí. Per calcular la dimensió, fixem un punt $p \in \mathbb{A}^n$ i observem que:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{K} \times F^\vee \\ f & \longmapsto & \big(f(p), \psi_f\big) \end{array} \tag{5.1}$$

és un isomorfisme, *que depèn d'un punt que és arbitrari però, d'altra banda, està fixat*. És senzill veure que és una aplicació lineal. La inversa ve donada per $(\lambda, \psi) \longmapsto g$, on $g(q) = \lambda + \psi(\overrightarrow{pq})$. ∎

Definició 5.4 (Hiperplà de l'infinit, punts impropis i propis). L'hiperplà de l'infinit $H_\infty \subset \overline{\mathbb{A}^n}$ és $[K^\circ]$. Els punts de l'hiperplà de l'infinit H_∞ s'anomenen punts *impropis* i els de $\overline{\mathbb{A}^n} \setminus H_\infty$ s'anomenen punts *propis*.

Proposició 5.5. *Sigui l'aplicació* ev *a $\mathbb{K}$, que depèn del punt triat i, per tant, indueix l'aplicació següent:*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ev}: & \mathbb{A}^n & \longrightarrow & G^\vee \\ & p & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rccc} \mathrm{ev}_p: & G & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & f(p) \end{array} \right. \end{array}$$

I sigui Ψ l'aplicació lineal, que no depèn de cap punt (en contrast amb (5.1)):

$$\begin{array}{rccl} \Psi: & G & \longrightarrow & F^\vee \\ & f & \longmapsto & \psi_f. \end{array}$$

Aleshores:

1. *Existeix una projectivitat natural entre l'hiperplà de l'infinit H_∞ i $\mathbb{P}(F)$. La projectivitat ve induïda per $\Psi^\vee$.*

2. *Tenim una bijecció* $\pi \circ \mathrm{ev} : \mathbb{A}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{A}^n} \setminus H_\infty$. *En altres paraules, tenim una injectivitat natural de* $\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}(G^\vee) = \overline{A^n}$ *tal que la imatge sigui el complementari de l'hiperplà a l'infinit.*

Observació 5.6. El primer ítem justifica que l'hiperplà de l'infinit *parametritza*, mòdul constant, totes les direccions de l'espai afí. El segon, explica per què els punts de $\overline{\mathbb{A}^n} \setminus H_\infty$ s'anomenen *propis* (això és, perquè $\mathbb{A}^n \subset \overline{\mathbb{A}^n}$). Així doncs, podem pensar que les dues estructures que apareixen separades en un espai afí (punts i vectors) conviuen com a punts en la seva compleció projectiva.

Si tenim marcat un punt $p \in \mathbb{A}^n$ podem considerar la seva compleció $\overline{\mathbb{A}^n}$ amb també un punt marcat com $(\mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}(F), \mathbb{K} \times F, \pi)$ on π és l'aplicació definida directament per:

$$\begin{array}{rccl} \pi : & \mathbb{K} \times F \setminus \{0\} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{A}^n} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}(F) \\ & (k, v) & \longmapsto & \begin{cases} p + \frac{1}{k} v \in \mathbb{A}^n & \text{si } k \neq 0 \\ [v] \in \mathbb{P}(F) & \text{si } k = 0 \end{cases} \end{array}$$

on p és el punt marcat. Observem que amb aquesta aplicació $\mathbb{P}(F) = [\{0\} \times F]$, per tant $\mathbb{P}(F)$ és un hiperplà. *Aquesta tripleta defineix efectivament un espai projectiu*.

5.2 Estructura afí al complementari

Ara veurem que la compleció que hem introduït a la secció anterior es pot invertir. És a dir, donat $\mathbb{P}^n = (\mathbb{P}^n, E, \pi)$ un espai projectiu i $H = [V] \subset \mathbb{P}^n$ un hiperplà, volem donar una estructura d'espai afí al conjunt $\mathbb{P}^n \setminus H$ (i a més que la compleció de $\mathbb{P}^n \setminus H$ sigui $\mathbb{P}^n$).

Definició 5.7 (Espai vectorial subjacent i acció de l'espai afí)**.** Per això definim l'*espai vectorial subjacent* com: $F := \mathrm{Hom}(E/V, V)$. I si $\rho : E \longrightarrow E/V$ és el pas al quocient, definim l'*acció de l'espai afí* com:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^n \setminus H) \times F & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \setminus H \\ ([v], f) & \longmapsto & [v + f(\rho(v))]. \end{array}$$

Observem que $\dim(E/V) = 1$ i $\dim V = n$, per tant, $\dim F = n$ com volíem.

Observació 5.8. Les dues construccions són inversa una de l'altra.

$$\mathbb{A}^n \rightsquigarrow \left(\overline{\mathbb{A}^n}, H_\infty\right) \rightsquigarrow \overline{\mathbb{A}^n} \backslash H_\infty = \mathbb{A}^n$$
$$(\mathbb{P}^n, H) \rightsquigarrow \mathbb{P}^n \backslash H \rightsquigarrow \left(\overline{\mathbb{P}^n \backslash H}, H_\infty\right) = (\mathbb{P}^n, H)\,.$$

En el primer cas obtenim un isomorfisme natural d'espais afins i en el segon, obtenim un isomorfisme natural d'espais projectius amb un hiperplà marcat. En particular, donar un espai afí $\mathbb{A}^n$ dins d'un espai projectiu $\mathbb{P}^n$ és equivalent a fixar un hiperplà.

5.3 Compleció de l'espai afí en coordenades

Volem definir una referència projectiva $\mathcal{R}$ a partir d'una referència afí $\mathcal{R}^a = (p; e_1, \ldots, e_n)$ i després comparar les coordenades cartesianes respecte de $\mathcal{R}^a$ amb les coordenades homogènies en la referència $\mathcal{R}$.

Definició 5.9 (Referència en $\overline{\mathbb{A}^n}$). Per tant podem considerar la referència projectiva associada:

$$\mathcal{R} = ([v_0] = p, [v_1] = [e_1], \ldots, [v_n] = [e_n]; [v_0 + \ldots + v_n] = p + e_1 + \ldots + e_n),$$

de la qual $v_0, \ldots, v_n$ n'és base adaptada.

Proposició 5.10. *Considerem les referències $\mathcal{R}^a$ en $\mathbb{A}^n$ i $\mathcal{R}$ en $\overline{\mathbb{A}^n}$ definides anteriorment. Tenim que:*

1. *Si les coordenades afins d'un punt propi són $(a_1, \ldots, a_n)$, aleshores les seves coordenades homogènies són $[1 : a_0 : \ldots : a_n]$.*
2. *Donat un vector $v \in F$ amb $v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, les coordenades homogènies de $[v] \in H_\infty$ són $[0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n]$.*

Demostració.

1. Sigui q un punt propi de coordenades cartesianes $(a_1, \ldots, a_n)$. Per definició tenim que $q = p + \sum a_i e_1$ i per tant un vector de $\mathbb{K} \times F$ representant q és $(1, a_1 e_1, \ldots, a_n e_n)$. Atès que:

$$(1, a_1 e_1, \ldots, a_n e_n) = (1, 0) + a_1 (0, e_1) + \ldots + a_n e_n = v_0 + \sum a_i v_i$$

i que v_i és una base adaptada de $\mathcal{R}$, trobem $p = [1 : a_0 : \ldots : a_n]$.

2. De la mateixa forma el punt impropi $[v]$ està representat pel vector $(0, v) \in \mathbb{K} \times F$ que en la base adaptada té una expressió:

$$(0, v) = (0, \alpha_1 e_1 + \ldots \alpha_n e_n) = \alpha_1 (0, e_1) + \ldots \alpha_n (0, e_n).$$

Per tant $[v] = [0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n]$. ■

Observació 5.11. Observem que si denotem per $[x_0 : \ldots : x_n]$ les coordenades de l'espai projectiu $\overline{\mathbb{A}^n}$ en la referència $\mathcal{R}$ associada a la referència afí $\mathcal{R}^a$, aleshores H_∞ és l'hiperplà d'equació $x_0 = 0$. En particular un punt és propi si i només si satisfà $x_0 \neq 0$. En aquest cas podem posar les seves coordenades com:

$$\left[1 : \frac{x_1}{x_0} : \ldots : \frac{x_n}{x_0}\right]$$

i per tant $\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ són les seves coordenades afins.

5.4 Comparació de varietats lineals d'$\mathbb{A}^n$ i d'$\overline{\mathbb{A}^n}$.

Definició 5.12 (Varietat lineal impròpia). Sigui $\mathbb{L} \subset \overline{\mathbb{A}^n}$ una varietat lineal. Si $\mathbb{L} \subset H_\infty$ diem que és una varietat lineal impròpia. En aquest cas, $\mathbb{L} \cap \mathbb{A}^n = \emptyset$ i queda clar que $\mathbb{L}$ no prov
 d'un varietat lineal afí.

Definició 5.13 (Part pròpia). Sigui $\mathbb{L}$ una varietat lineal no impròpia ($\mathbb{L}$ no està continguda a l'hiperplà de l'infinit). Aleshores denotem per $\mathbb{L}^a$ el conjunt dels seus punts propis: $\mathbb{L}^a = \mathbb{L} \cap \mathbb{A}^n$. Diem que és la part pròpia o finita de $\mathbb{L}$.

Proposició 5.14. *L'assignació $\mathbb{L} \longmapsto \mathbb{L}^a$ dona una bijecció entre el conjunt de les varietats lineals pròpies de dimensió r de $\overline{\mathbb{A}^n}$ i el conjunt de les varietats lineals de dimensió r de l'espai afí $\mathbb{A}^n$.*

Demostració. Per veure que és bijectiva, és suficient amb donar una inversa. Sigui $\mathbb{M}$ una varietat lineal afí de dimensió r donada pel sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + \dots a_n^1 x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_1^k x_1 + \dots a_n^k x_n &= b_k, \end{aligned}$$

on $k = n - r$. Aleshores el sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + \dots a_n^1 x_n &= b_1 x_0 \\ &\vdots \\ a_1^k x_1 + \dots a_n^k x_n &= b_k x_0 \end{aligned}$$

defineix una varietat lineal projectiva $\mathbb{L}$ de la mateixa dimensió i és clar que $\mathbb{L}^a = \mathbb{M}$. ∎

Donada una varietat lineal afí $\mathbb{M}$ denotarem per $\overline{\mathbb{M}}$ la varietat projectiva associada. La bijecció ens diu que $\mathbb{M} = (\overline{\mathbb{M}})^a$. A més, $\overline{\mathbb{M}} \cap H_\infty = [G]$.

Proposició 5.15. *Siguin $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2$ dues varietats lineals afins de subespais directors G_1, G_2 respectivament. Aleshores, són equivalents:*

1. *$\mathbb{M}_1$ i $\mathbb{M}_2$ són paral·leles.*
2. *$G_1 \subset G_2$ o $G_2 \subset G_1$.*
3. *$\overline{\mathbb{M}_1} \cap H_\infty \subset \overline{\mathbb{M}_2} \cap H_\infty$ o $\overline{\mathbb{M}_2} \cap H_\infty \subset \overline{\mathbb{M}_1} \cap H_\infty$.*

5.5 Raó simple i raó doble

Proposició 5.16. *Siguin $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{A}^1$ tres punts sobre una recta afí dels quals almenys dos són diferents. Considerem la compleció projectiva $\overline{\mathbb{A}^1} = \mathbb{A}' \sqcup H_\infty$ de la recta afi i posem $H_\infty = \{p_\infty\}$. Aleshores:*

$$(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2, p_3, p_\infty)\,.$$

Demostració. Suposem que $p_1 \neq p_2$ (si no, reordenem i la igualtat es preserva) i considerem a $\mathbb{A}^1$ la referència afí $\left(p_1, \overrightarrow{p_1p_2}\right)$ i en $\overline{\mathbb{A}^1}$ la referència projectiva associada. Així dons els punts $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = a$ tenen coordenades projectives $p_1 = [1:0]$, $p_2 = [1:1]$, $p_3 = [1:a]$ i el punt de l'infinit és $p_\infty = [0:1]$. Calculem la raó simple i la raó doble i veiem que són iguals:

$$\left(p_1, p_2, p_3\right) = \frac{a-0}{a-1},$$

$$\left(p_1, p_2, p_3, p_\infty\right) = \left([1:0],[1:1],[1:a],[0:1]\right) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a}{a-1}.$$

Amb això, ja hem acabat. ∎

5.6 Afinitats i projectivitats

Siguin $\mathbb{A}^n$ i $\mathbb{A}^{n'}$ dos espais afins i considerem les respectives complecions projectives $\overline{\mathbb{A}^n}$ i $\overline{\mathbb{A}^{n'}}$ i els respectius hiperplans de l'infinit H_∞ i H'_∞. Suposem fixades referències afins en els espais afins inicials i considerem les referències associades en les seves complecions. Les equacions de $\overline{f}$ seran de la forma:

$$\begin{aligned}
x_0^* &= a_0^0 x_0 + a_1^0 x_1 + \ldots + a_n^0 x_n \\
x_1^* &= a_0^1 x_0 + a_1^1 x_1 + \ldots + a_n^1 x_n \\
&\vdots \\
x_n^* &= a_0^n x_0 + a_1^n x_1 + \ldots + a_n^n x_n
\end{aligned}$$

on $\left[x_0^* : \ldots : x_n^*\right]$ són les coordenades del punt imatge del punt de coordenades $[x_0 : \ldots x_n]$. Recordem que els punts de l'hiperplà de l'infinit en tots dos espais són els que tenen la primera coordenada nul·la. Tenim doncs que per a qualssevol $x_1, \ldots, x_n$ no tots nuls, la primera coordenada de $f\left([0 : x_1 : \ldots : x_n]\right)$ és 0 ($x_0 = 0$). Per tant, $a_1^0 x_1 + \ldots + a_n^0 x_n$ és idènticament nul·la i $a_i^0 = 0$ per $i = 1, \ldots, n$ (i $a_0^0 \neq 0$ donat que estem en una projectivitat). Podem suposar sense pèrdua de generalitat que $a_0^0 = 1$. La matriu de la projectivitat $\overline{f}$ serà de la forma:

$$M_{\overline{f}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline a_0^1 & a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \ldots & a_n^n \end{array}\right)$$

Abusem de la notació i seguim anomenant a_j^i a $\frac{a_j^i}{a_0^0}$.

Observació 5.17. Si en comptes d'introduir la «nova variable» x_0 a l'esquerra de les coordenades afins $x_1, \ldots, x_n$ ho haguéssim fet a la dreta, tindríem coordenades homogènies $[x_1 : \ldots : x_n : x_{n+1}]$ i l'hiperplà de l'infinit tindria equació $x_{n+1} = 0$. Això es podria aconseguir posant en la definició de la clausura projectiva $E = F \times \mathbb{K}$

i en la definició de referència associada $\mathcal{R} = \left([e_1], \ldots, [e_n], p; p + \sum e_i\right)$. En aquest cas la matriu $M_{\overline{f}}$ seria de la forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_0^1 & a_1^1 & \ldots & a_{n-1}^1 & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \ldots & a_{n-1}^n & a_n^n \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

6
Quàdriques projectives i afins

Definició 6.1 (Quàdrica). Fixem un espai projectiu $(\mathbb{P}, E, \pi)$ de dimensió n sobre un cos $\mathbb{K}$ (de moment arbitrari, però de característica diferent de 2). Una quàdrica d'aquest espai projectiu és la classe, mòdul multiplicació per una constant no nul·la, d'una forma bilineal simètrica a E diferent de zero. *Per raons històriques a les quàdriques del pla ($n = 2$) les anomenem còniques.*

Observació 6.2. Que sigui simètrica vol dir que $\eta(u, v) = \eta(v, u)$ per a qualssevol vectors $u, v \in E$. Notem que en la nostra definició les formes bilineals η i $k\eta$ són considerades equivalents (és el que vol dir «mòdul multiplicació per una constant no nul·la»).

Notació 6.3. Posarem $Q = [\eta]$ per referir-nos a la quàdrica associada a η. Suposem donada una referència $\mathcal{R} = (p_0, \ldots, p_n; A)$ en l'espai projectiu fixat i sigui $e_0, \ldots, e_n$ una base adaptada: $p_0 = [e_0], \ldots, p_n = [e_n], A = [e_0 + \ldots + e_n]$. Aleshores la matriu de Q en la referència $\mathcal{R}$ és la matriu següent:

$$M = \begin{pmatrix} \eta(e_0, e_0) & \ldots & \eta(e_0, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta(e_n, e_0) & \ldots & \eta(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Propietat 6.4.

1. *La matriu M té $n+1$ files i $n+1$ columnes i és simètrica.*
2. *Està definida llevat de multiplicació per constant: en efecte, si canviem η per $k\eta$, totes les entrades de la matriu queden multiplicades per k i per tant la matriu obtinguda és kM. D'altra banda, si considerem una altra base adaptada a la mateixa referència, haurà de ser de la forma $\lambda e_0, \ldots, \lambda e_n$. Atès que per la bilinealitat $\eta\left(\lambda e_i, \lambda e_j\right) = \lambda^2 \eta\left(e_i, e_j\right)$ la matriu queda modificada per la constant no nul·la λ^2.*
3. *La matriu permet «calcular» la forma bilineal en dos vectors $u = \sum a_i e_i, v = \sum b_j e_j$:*

$$\eta(u, v) = \eta\left(\sum a_i e_i, \sum b_j e_j\right) = \sum a_i b_j, \quad \eta\left(e_i, e_j\right) = \begin{pmatrix} a_0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Definició 6.5 (Punts conjugats). Sigui $Q = [\eta]$ una quàdrica en un espai projectiu. Direm que dos punts $p = [u], q = [v]$ són conjugats respecte de Q si $\eta(u, v) = 0$. Diem que un punt p pertany a Q o que la quàdrica Q passa pel punt si p és conjugat d'ell mateix (*autoconjugat*). És a dir si $p = [u]$ i $\eta(u,u) = 0$. Posem: $|Q| = \{\text{punts que pertanyen a } Q\}$.

Observació 6.6. Fixada una referència $\mathcal{R}$ com abans, denotem per M la matriu de Q en aquesta referència. Si les coordenades dels punts p i q són $[a_0 : \ldots : a_n]$ i $[b_0 : \ldots : b_n]$ respectivament tenim que p i q són conjugats si:

$$\begin{pmatrix} a_0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0. \text{ i } \begin{pmatrix} a_0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0. \text{ si } p \in |Q|.$$

6.1 Equacions de les quàdriques

Posem $a_{ij} = \eta\left(e_i, e_j\right)$, notem que $a_{ij} = a_{ji}$. Utilitzem la darrera expressió que hem obtingut: un punt variable $[x_0 : \ldots : x_n]$ pertany a Q si, i només si:

$$\begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

Desenvolupant aquesta expressió trobem la següent equació:

$$a_{00}x_0^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j = 0.$$

Observació 6.7. A més a més, donada l'equació podem reconstruir la matriu mirant els coeficients de cada monomi. Per exemple el coeficient de x_i^2 és el terme (i,i) de la matriu, mentre que el coeficient de $x_i x_j$, $i \neq j$, és el doble que el del terme (i,j) (o (j,i)).

Proposició 6.8. *Fixada una referència en un espai projectiu les dades següents són equivalents:*

1. *Una quàdrica $Q = [\eta]$;*
2. *Una matriu $(n+1) \times (n+1)$ simètrica determinada llevat de constant;*
3. *Un polinomi de segon grau en les variables $x_0, \ldots, x_n$, homogeni i determinat llevat de constant.*

En altres paraules, és la versió en coordenades de l'equivalència entre les formes bilineals simètriques a E i les formes quadràtiques a E.

Definició 6.9 (Aplicacions quadràtiques). Anomenem *aplicacions quadràtiques* les aplicacions $\theta : E \longrightarrow \mathbb{K}$ tals que $(u,v) \mapsto \frac{1}{2}(\theta(u+v) - \theta(u) - \theta(v))$ és bilineal simètrica. L'aplicació θ permet recuperar la forma bilineal η (si la característica de $\mathbb{K}$ és diferent de 2).

6.2 Canvis de referència

Si M és la matriu d'una forma bilineal η en una certa base i A és la matriu de canvi de base aleshores la matriu de η en la nova base és de la forma $A^T M A$. La fórmula anterior ens diu que el determinant de M no és un valor intrínsec associat a Q. Com que la matriu A és invertible, el rang de $M' = A^T M A$ es correspon al d'M.

Definició 6.10 (Quàdrica degenerada). Diem que una quàdrica és degenerada si el determinant de qualssevol matriu associada a Q és zero. En cas contrari diem que és no degenerada. Anomenem rang de la quàdrica Q al rang de qualsevol matriu associada a Q. Les quàdriques de rang $n+1$ (o rang màxim) són les quàdriques no degenerades.

6.3 Restricció d'una quàdrica a una varietat lineal

Lema 6.11. *Sigui $Q = [\eta]$ una quàdrica d'un espai projectiu, i sigui $\mathbb{L} = [F]$ una varietat lineal. Sigui la forma bilineal $\eta_{|F} : F \times F \hookrightarrow E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $\eta_{|F} = \eta \circ i$. $\eta_{|F}$ és zero si i només si $\mathbb{L} \subset |Q|$ (sovint escriurem $\mathbb{L} \subset Q$).*

Demostració. Suposem que la restricció és zero. Aleshores $\eta_{|F}(u,v) = \eta(u,v) = 0$ per a totes els vectors $u, v \in F$. En particular, per a tot punt $p = [u] \in \mathbb{L}$ tenim que $\eta(u,u) = 0$i per tant $p \in |Q|$. Per tant $\mathbb{L} \subset |Q|$. Provem ara l'altra implicació suposant que tots els punts de $\mathbb{L}$ pertanyen a la quàdrica. Usant la definició obtenim que tots els vectors u de F satisfan $\eta(u,u) = 0$. Volem veure que $\eta(u,v) = 0$ per a qualsevol parell de vectors de F, que, aparentment, és més fort. Com $u+v$ també és de F tenim el següent:

$$0 = \eta(u+v, u+v) = \eta(u,u) + 2\eta(u,v) + \eta(v,v) = 2\eta(u,v).$$

Per tant, com la característica del cos no és 2 (estem a $\mathbb{R}$), tenim que $\eta(u,v) = 0$. ∎

Definició 6.12 (Quàdrica restringida a la varietat). Sigui la restricció de la forma bilineal no nul·la tal que es defineix una quàdrica en $\mathbb{L}$. Denotem aquesta quàdrica per $Q_{|\mathbb{L}}$ i diem que és la *quàdrica restringida a la varietat lineal*.

6.4 Quàdriques a $\mathbb{P}^1$

Suposem doncs una recta projectiva $\mathbb{P}^1$ amb una referència fixada. Una quàdrica Q en $\mathbb{P}^1$ ve donada per una matriu simètrica no nul·la 2×2:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Equivalentment, tindrem $ax_0^2 + 2bx_0x_1 + cx_1^2 = 0$.

Proposició 6.13. *Si el cos base és $\mathbb{C}$, tenim que $|Q|$ està format per dos punts diferents si i només si Q és no degenerada* ($\det(M) \neq 0$). *Si Q és degenerada $|Q|$ consisteix en un sol punt. Si el cos base és $\mathbb{R}$, aleshores:*

1. *Si* $\det(M) < 0$, *aleshores $|Q|$ està formada per dos punts.*
2. *Si* $\det(M) = 0$, *aleshores $|Q|$ està formada per un sol punt.*
3. *Si* $\det(M) > 0$, *aleshores $|Q| = \emptyset$.*

Demostració. Demostrem primer aquest resultat suposant $a = 0$. En aquest cas el determinant de M és $-b^2$. L'equació serà:

$$2bx_0x_1 + cx_1^2 = x_1(2bx_0 + cx_1) = 0.$$

Els punts solució són $[1 : 0]$ i $[c : -2b]$. El determinant és no nul ($b \neq 0$) si i només si aquestes dues solucions són diferents ($-b^2 = \det M$ si $a = 0$, si $\det M \neq 0$ es dona que $b \neq 0$). Això prova la proposició en aquest cas, tant sobre els reals com sobre els complexos.

Suposem, doncs, que $a \neq 0$. Com que $a \neq 0$, el punt $[1 : 0]$ no és solució de l'equació, per tant podem suposar que els punts solució són de la forma $[\alpha : 1]$, on α és solució de l'equació $a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$. Aplicant la fórmula de l'equació de segon grau ($c \neq 0$) trobem:

$$\alpha = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{-b \pm \sqrt{-\det(M)}}{a}.$$

Així, sobre $\mathbb{C}$, hi ha dues solucions si i només si el determinant és no nul, i si ho és n'hi ha una. Sobre $\mathbb{R}$ el nombre de solucions depèn del signe $\det(M)$ tal com descriu l'enunciat. ■

6.5 Interseccions d'una quàdrica amb una recta

Fixem una quàdrica projectiva $Q = [\eta]$ en un espai projectiu $\mathbb{P}^n$ de dimensió n. Sigui l una recta. Diem que un punt p és *comú a la quàdrica i a la recta* si $p \in l \cap |Q|$. Sovint anomenarem *talls* als punts comuns. També diem que l està continguda en Q si $l \subset |Q|$.

Proposició 6.14. *Siguin Q tal com abans. Es donen les possibilitats següents:*

1. *Si el cos base és $\mathbb{R}$, aleshores o bé l està continguda en Q o els punts comuns de Q i l són:*
   - *o 2 punts reals diferents,*
   - *o 1 punt real,*
   - *o 2 punts imaginaris conjugats (no reals)*
2. *Si el cos base és $\mathbb{C}$, aleshores o bé l està continguda en Q o els punts comuns de Q i l són:*
   - *o 2 punts diferents,*
   - *o 1 punt.*

Definició 6.15 (Recta tangent a una quàdrica). Diem que una recta $l = [F]$ és tangent a una quàdrica Q si l està continguda a Q (és a dir, si $\eta|_F \equiv 0$) o si l i Q tenen només un punt en comú ($Q|_l$ és una quàdrica degenerada). En el segon cas, al punt $l \cap |Q|$ li diem *punt de contacte o de tangència*.

Definició 6.16 (Corda). A una recta no tangent l'anomenem *corda* i als seus dos punts en comú amb la quàdrica els anomenem *punts de tall*. Si la quàdrica és real i $\left|Q_l\right| = \emptyset$, considerem la quàdrica complexa associada i anomenem els seus punts de tall, punts de tall imaginaris amb la quàdrica real.

Lema 6.17. *Sigui $Q = [\eta]$ una quàdrica i siguin $p = [u], q = [v]$ dos punts diferents. Posem $l = p \vee q$ i suposem que aquesta recta no està continguda a Q. Aleshores la matriu de Q restringida a l en la referència $(p, q; [u + v])$ és:*

$$M = \begin{pmatrix} \eta(u,u) & \eta(u,v) \\ \eta(u,v) & \eta(v,v) \end{pmatrix}$$

En particular, l és tangent a Q si, i només si $\det M = 0$ *o bé* $\eta(u,u) = \eta(v,v) = \eta(u,v) = 0$.

Demostració. Tenim que $l = [\langle u, v\rangle]$ i que u, v és una base adaptada a la referència de l'enunciat. Per tant la matriu associada a la quàdrica restringida és la matriu de la forma bilineal en aquesta base, que és la matriu:

$$\begin{pmatrix} \eta(u,u) & \eta(u,v) \\ \eta(u,v) & \eta(v,v) \end{pmatrix}.$$

A més a més, hem vist que la recta és tangent (talla en un sol punt) si, i només si, la quàdrica restringida a la recta és degenerada que és equivalent a demanar que el determinant de la matriu sigui zero (i aquesta és una condició invariant respecte qualsevol base). ■

6.6 Tangència i polaritat

Definició 6.18 (Varietat tangent a Q). Sigui $p \in Q$. Anomenem varietat tangent a Q en p a la unió de totes les rectes tangents a Q que passen per p i la denotem per $T_Q(p)$. Posem $p = [u]$, com el punt pertany a la quàdrica tenim que $\eta(u,u) = 0$.

Observació 6.19. Fixat $p \in Q$, aleshores els punts $q = [v]$ tals que $p \vee q$ és tangent a Q són els punts $q = [v]$ tals que $\eta(u,v) = 0$. $T_Q(p)$ és la varietat lineal dels punts $q = [v]$ que satisfan $\eta(u,v) = 0$.

Suposem fixada una referència. Aleshores Q té associada una matriu simètrica:

$$M = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{n0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i l'equació de la varietat tangent a Q en el punt de coordenades $u = [\alpha_0 : \dots : \alpha_n]$ és:

$$(\alpha_0 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{n0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

Definició 6.20 (Punt doble). Sigui $p = [u]$ tal que $u \in \ker(M)$. Diem que p és un punt doble o punt singular de la quàdrica.

Observació 6.21. Notem que una quàdrica té punts singulars si, i només si, és degenerada i que els punts dobles són conjugats de tots els punts, en particular són autoconjugats i pertanyen a la quàdrica.

Proposició 6.22. *El conjunt dels punts dobles d'una quàdrica Q és una varietat lineal que denotarem per $\mathbb{D} \subset |Q|$. A més a més,* $\dim \mathbb{D} = n - \operatorname{rang}(Q)$.

Demostració. Un punt $p = [u]$ és doble si només si $u \in \ker(M)$ on M és la matriu de Q en una referència fixada. Per tant $\mathbb{D}$ és la varietat lineal $[\ker(M)]$. Calculem la seva dimensió:

$$\dim \mathbb{D} = \dim \ker(M) - 1 = n + 1 - \operatorname{rang}(M) - 1 = n - \operatorname{rang}(M) = n - \operatorname{rang}(Q). \qquad \blacksquare$$

Si p no és doble parlarem de *l'hiperplà tangent a la quàdrica en el punt*.

Definició 6.23 (Varietat polar). La varietat polar d'un punt p respecte d'una quàdrica Q és el conjunt de punts conjugats de p respecte de Q. La denotem per $H_Q(p)$ o $\operatorname{Polar}_Q(p)$.

Observació 6.24.

1. Si $p \in \mathbb{D}$, novament $H_Q(p) = T_Q(p) = \mathbb{P}^n$. En cas contrari $H_Q(p)$ és un hiperplà.
2. Si $p \in |Q| \setminus \mathbb{D}$, aleshores $H_Q(p) = T_Q(p)$. És a dir, si el punt és de la quàdrica, l'hiperplà polar és el mateix que l'hiperplà tangent.
3. Si $p \notin |Q|$, tindríem que $H_Q(p)$ és un hiperplà que no passa per p (si $p \in H_Q(p)$ aleshores p seria autoconjugat i seria un punt de la quàdrica).
4. Segons la definició, dos punts $p = [u], q = [v]$ són conjugats respecte de la quàdrica $Q = [\eta]$ si i només si $\eta(u, v) = 0$. Observeu que això també es pot expressar com $q \in H_Q(p)$ o $p \in H_Q(q)$.

Proposició 6.25. *Sigui Q una quàdrica no degenerada. Donat un hiperplà H existeix un únic punt p tal que $H_Q(p) = H$.*

Definició 6.26 (Pol de H). Sigui Q una quàdrica no degenerada que té matriu M en una certa referència projectiva i sigui un hiperplà H. Diem que p és el *pol* de H respecte de Q.

Si $Q = [\eta]$ és una quàdrica en l'espai projectiu $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, E, \pi)$, la projectivitat està induïda per l'isomorfisme $\phi_\eta : E \to E^\vee$ definit per $\phi_\eta(u)(v) := \eta(u, v)$.

Definició 6.27 (Referència autopolar). Diem que una referència $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n; A\}$ és autopolar respecte d'una quàdrica Q si $\forall i \neq j$ els punts p_i i p_j són conjugats. Dit d'una altra forma, $H_Q(p_i) = p_0 \vee \dots \vee \hat{p}_i \vee \dots \vee p_n$. Com el punt unitat no intervé en la definició, sovint direm simplement que $\{p_0, \dots, p_n\}$ és un *símplex autopolar* (triangles autopolars en el pla, tetràedres autopolars a $\mathbb{P}^3$, etcètera).

Teorema 6.28. *Sigui $Q = [\eta]$ una quàdrica de $\mathbb{P}^n$ i siguin $p, q \in \mathbb{P}^n$ dos punts diferents. Aleshores:*

1. *Si $p, q \in |Q|$, tenim que p i q són conjugats si i només si $p \vee q$ està continguda en Q.*
2. *Si $p \in |Q|$ i $q \notin |Q|$, aleshores p i Q són conjugats si i només si $p \vee q$ és tangent a Q i no està continguda en Q.*
3. *Si $p, q \notin |Q|$, aleshores p i q són conjugats respecte de Q si i només si $p \vee q$ és una corda d'extrems a, b, aleshores $\{p, q\}$ i $\{a, b\}$ se separen harmònicament. És a dir, $(p, q, a, b) = -1$.*

Demostració.

1. Posem $p = [u]$ i $q = [v]$. Per hipòtesi $\eta(u, u) = \eta(v, v) = 0$. Per tant p i q són conjugats si, i només si, $\eta(u, v) = 0$ i això equival a què la restricció de η a $\langle u, v\rangle$ sigui zero, és a dir que la recta estigui continguda en Q.
2. Amb la mateixa notació, la restricció de η no és zero perquè ara suposem que $\eta(v, v) \neq 0$. Pel lema 6.17 la recta $p \vee q$ serà tangent si, i només si, $\eta(u, u) \cdot \eta(v, v) - \eta(u, v)^2 = 0$. Com que estem suposant $p \in |Q|$ tenim que $\eta(u, u) = 0$. Per tant, la recta és tangent si, i només si, $\eta(u, v) = 0$, és a dir, els punts són conjugats.
3. Suposem ara que els punts p i q no pertanyen a la quàdrica, és a dir $\eta(u, u)$ i $\eta(v, v)$ són no nuls. Primer veiem que si p i q són conjugats, és a dir, $\eta(u, v) = 0$, aleshores $p \vee q$ és una corda. En efecte, la quàdrica restringida a la recta té matriu:

$$\begin{pmatrix} \eta(u, u) & 0 \\ 0 & \eta(v, v) \end{pmatrix}$$

per tant, la restricció a la recta és no degenerada i en conseqüència la recta és una corda. Per tant, podem suposar que $p \vee q$ és una corda. Siguin a i b els seus extrems (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i els extrems són imaginaris conjugats, estenem $\mathbb{K}$ als nombres complexos). Volem veure que p i q són conjugats si, i només si, $(a, b, p, q) = -1$ (o equivalentment $(p, q, a, b) = -1$).

Considerem una referència sobre la corda de manera que $a = [1 : 0], b = [0 : 1]$. Aleshores, en aquesta referència, tenim que la matriu de la quàdrica restringida és:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ja que a, b pertanyen a $|Q|$. En aquesta referència, els punts p, q tenen coordenades $p = [\alpha : 1], q = [\beta : 1]$. Tenim que els punts són conjugats si, i només si:

$$(\alpha, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha + \beta = 0.$$

La raó doble $(a, b, p, q) = ([1 : 0], [0 : 1], [\alpha : 1], [\beta : 1])$ es pot calcular amb els determinats i s'obté fàcilment $\frac{\beta}{\alpha}$. Per tant, efectivament, p i q són conjugats, és a dir, $\alpha + \beta = 0$ si, i només si, la raó doble és $(a, b, p, q) = \frac{\beta}{\alpha} = -1$. ■

6.7 Quàdriques degenerades

Fixem un espai projectiu de dimensió $\mathbb{P}^n$ i considerem una quàdrica Q en $\mathbb{P}^n$ de rang r. Recordant 6.10, Q és degenerada si $r \leq n$ (i no degenerada si $r = n+1$). Equivalentment, la **varietat de punts dobles** $\mathbb{D}$ de Q és de dimensió $n - r \geq 0$, en particular no buida.

Considerem una referència projectiva $\mathcal{R} = \left(p_0, \ldots, p_n; A\right)$ tal que $p_0, p_1, \ldots, p_{n-r}$ són punts de $\mathbb{D}$. Sigui $e_0, \ldots, e_n$ una base adaptada. Aleshores els vectors $e_0, \ldots, e_{n-r}$ són del nucli de la matriu de Q (per definició de punt doble). Així doncs, la matriu M de Q en aquesta referència és de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-r+1,n-r+1} & \ldots & a_{n-r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-r+1,n} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Posem M_r a la submatriu $r \times r$ dels elements $a_{i,j}$. Tenim doncs que $\operatorname{rang}(Q) = \operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(M_r) = r$. En particular M_r és una matriu simètrica de rang màxim. En aquesta referència, la varietat lineal $\mathbb{D}$ té equacions $x_{n-r+1} = \ldots = x_n = 0$. La varietat lineal $\mathbb{L}$ d'equacions $x_0 = \ldots = x_{n-r} = 0$ és suplementària de $\mathbb{D}$. La restricció de Q a $\mathbb{L}$ té matriu M_r, denotem per $Q_{\mathbb{L}}$ aquesta restricció. Si un punt $p = [x_0 : \ldots : x_n]$ no pertany a $\mathbb{D}$ considerem:

$$(p \vee \mathbb{D}) \cap \mathbb{L} = [0 : \ldots : 0 : x_{n-r+1} : \ldots : x_n]$$

i el denotem per p'. En referència subordinada a $\mathbb{L}$ les coordenades de p' són $[x_{n-r+1} : \ldots : x_n]$.

Lema 6.29. *Siguin $p = [x_0 : \ldots : x_n]$ i $q = \left[y_0 : \ldots : y_n\right]$ dos punts que no pertanyen a $\mathbb{D}$. Aleshores p i q són conjugats respecte de Q si, i només si, p' i q' són conjugats respecte de $Q_{\mathbb{L}}$. En particular $p \in |Q|$ si, i només si, $p' \in Q_{\mathbb{L}}$.*

Observació 6.30. Sigui p un punt que no pertany ni a $\mathbb{D}$ ni a $\mathbb{L}$. Com $\mathbb{L}$ i $\mathbb{D}$ són suplementàries existirà una única recta per p que talla a les dues varietats lineals. El tall amb $\mathbb{L}$ necessàriament és el punt p'. Segons 6.29 tota la recta $p \vee p'$ està continguda en $|Q|$ si i només si $p' \in \left|Q_{\mathbb{L}}\right|$.

Proposició 6.31. *Sigui Q una quàdrica degenerada amb varietat lineal de punts dobles $\mathbb{D} \neq \emptyset$. Sigui $\mathbb{L}$ una varietat lineal suplementària de $\mathbb{D}$. Denotem per $Q_{\mathbb{L}}$ la quàdrica (no degenerada) restricció de Q a $\mathbb{L}$. Aleshores $|Q|$ és la unió de les rectes que uneixen punts de $\left|Q_{\mathbb{L}}\right|$ i punt de $\mathbb{D}$. És a dir:*

$$|Q| = \mathbb{D} \cup \bigcup_{x \in \left|Q_{\mathbb{L}}\right|, y \in \mathbb{D}} x \vee y.$$

Definició 6.32 (Con). Diem *con* a una quàdrica de rang n, o sigui un per sota del rang màxim. En aquest cas, $\mathbb{D}$ està formada per un punt V al qual anomenem *vèrtex* del con.

Observació 6.33 (Sobre els cons).

1. Podem prendre com a varietat $\mathbb{L}$ un hiperplà que no passa per V. La proposició 6.31 ens diu que a l'hiperplà hi ha una quàdrica no degenerada i Q la podem veure com la unió de V amb tots els punts de la quàdrica no degenerada.
2. Per tant, *un con en el pla és un parell de rectes que passen per un punt V*. Sobre els reals aquestes rectes poden ser reals o imaginàries conjugades. *En el pla els cons són les quàdriques de rang 2.*

Quàdriques de rang 2. Amb aquesta hipòtesi, la varietat lineal $\mathbb{D}$ té dimensió $n-2$ ($n-r$ i $r=2$) i una varietat suplementària és una recta sobre la qual tenim dos punts (que, com abans, sobre $\mathbb{R}$ poden ser imaginaris conjugats). Unint $\mathbb{D}$ amb els punts obtenim que les quàdriques de rang 2 són exactament els parells d'hiperplans diferents. Sobre els reals poden ser dos plans imaginaris conjugats.
Quàdriques de rang 1. Per estudiar les quàdriques de rang 1 no necessitem usar 6.31 (en aquest cas, $\mathbb{L}$ és un punt i sobre un punt no tenim quàdriques). Agafant la referència de manera que els punts $p_0, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{D}$ tenim que la matriu està formada per zeros llevat de l'element a_{nn}, necessàriament no nul. Per tant l'equació és $x_n^2 = 0$. Diem que és un hiperplà doble ja que les seves solucions són els punts de l'hiperplà $x_n = 0$ «comptats dues vegades».

6.8 Quàdriques en espais afins

Considerem un espai afí $(\mathbb{A}^n, F)$ i recordem que vam construir un espai projectiu que el conté i al que anomenem la seva *compleció projectiva*. Tenim, com a conjunts, $\overline{\mathbb{A}}^n = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}(F)$. Així que la diferència entre l'espai afí i l'espai projectiu $\overline{\mathbb{A}}^n \setminus \mathbb{A}^n$ és un hiperplà H_∞ que correspon a les classes dels vectors de l'espai afí. També vam veure que tota referència afí té associada una referència projectiva que permet relacionar bé les coordenades afins i projectives. Concretament, si $p \in \mathbb{A}^n$ té coordenades afins $(a_1, \dots, a_n)$ aleshores les seves coordenades projectives són $[1 : a_1; \dots : a_n]$.
De manera intuïtiva una quàdrica afí la podem pensar, un cop fixada la referència, com una equació de segon grau en n variables $x_1, \dots, x_n$ no necessàriament homogènia, és a dir: hi haurà una part quadràtica (els monomis de grau 2), una part lineal i un terme independent. Per fer una formulació independent de coordenades i que eviti la incomoditat de treballar amb monomis de diferents graus, **definirem les quàdriques afins com quàdriques projectives en $\overline{\mathbb{A}}^n$ de les quals mirem els punts afins**. Això també permet associar a la quàdrica una forma bilineal i poder usar, entre altres, la *polaritat*.

Definició 6.34 (Quàdrica en l'espai afí). Una quàdrica en l'espai afí $\mathbb{A}^n$ és una quàdrica en l'espai projectiu $\overline{\mathbb{A}}^n$ que no conté l'hiperplà de l'infinit H_∞.

Observació 6.35. Suposem, com al principi, que tenim fixada una referència afí i que considerem en la compleció projectiva la referència projectiva associada. Aleshores donar una quàdrica afí Q equival a donar una quàdrica projectiva $\overline{Q}$ de matriu M. La condició que Q no contingui H_∞ és equivalent a què algun coeficient a_{ij} sigui no nul amb $i, j \geq 1$.

Definició 6.36 (Secció impròpia). Observem que la restricció de $\overline{Q}$ a l'hiperplà de l'infinit és una quàdrica que té matriu M_∞. Li diem *quàdrica de l'infinit* o *secció impròpia*. Des del punt de vista de les equacions, la matriu M correspon tant a la quàdrica projectiva de la definició:

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + \ldots + 2a_{0n}x_0x_n + \sum_{i,j\geq 1} a_{i,j}x_ix_j = 0.$$

Com a la seva restricció a l'espai afí:

$$a_{00} + 2a_{01}x_1 + \ldots + 2a_{0n}x_n + \sum_{i,j\geq 1} a_{i,j}x_ix_j = 0.$$

La quàdrica obtinguda restringint a H_∞ té equació $\sum_{i,j\geq 1} a_{i,j}x_ix_j = 0$. Aquesta equació és exactament la part quadràtica de l'equació de la quàdrica afí.

Notació 6.37. Donada una quàdrica afí Q denotarem per $\overline{Q}$ la quàdrica projectiva de la qual prové. La definició ens diu que, des d'un punt de vista formal, **les dues quàdriques són el mateix**. La diferència de notació es deu a que en el cas afí considerem només les solucions pròpies i per tant l'equació és l'obtinguda fent $x_0 = 1$. Noteu que la matriu de les dues quàdriques és la mateixa. Denotem per Q_∞ la restricció de $\overline{Q}$ a l'hiperplà de l'infinit. Per hipòtesi Q_∞ és una quàdrica ben definida. Tindrem doncs que $|\overline{Q}| = |Q| \sqcup |Q_\infty|$.

Definició 6.38 (Quàdrica afí no degenerada). Direm que una quàdrica afí Q és no degenerada si $\overline{Q}$ també és no degenerada. Equivalentment si $\det(M) \neq 0$.

El fet que tinguem un hiperplà distingit permet definir nous conceptes, purament afins, relacionats amb la posició relativa de la quàdrica amb l'hiperplà H_∞.

Definició 6.39 (Paraboloide). Diem que una quàdrica afí no degenerada Q és un *paraboloide* si és tangent a l'hiperplà de l'infinit. El punt de tangència serà conjugat de tots els punts de l'infinit. Per tant, també es pot dir que un paraboloide és una quàdrica no degenerada Q tal que Q_∞ és degenerada.

Definició 6.40 (Paràbola). Una cònica no degenerada (amb punts) Q del pla afí $\mathbb{A}^2$, és una *paràbola* si és tangent a la recta de l'infinit. És a a dir, *en el cas del pla anomenem paràboles als paraboloides*. Observem que equival a dir que $|Q_\infty|$ és un punt.

Definició 6.41 (Hipèrbola). En el cas que $|Q_\infty|$ estigui formada per dos punts *reals* diem que Q és una *hipèrbola*.

Definició 6.42 (El·lipse). En el cas que $|Q_\infty|$ estigui formada per dos punts *imaginaris conjugats* diem que és una *el·lipse*.

Notem que *sobre els complexos hipèrboles i el·lipses són indistingibles*.

Observació 6.43.

1. Notem que l'hiperplà polar H_p es calcula amb la matriu de Q, que és comú a la de $\overline{Q}$; per tant, ho veiem com l'hiperplà polar respecte de la quàdrica projectiva. Notem que el centre serà un punt impropi si, i només si, és autoconjugat (pertany a $|Q_\infty|$) i el seu hiperplà tangent és H_∞.
2. Per tant, el centre existeix i és únic si, i només si, Q no és un paraboloide. En el cas dels paraboloides, el centre no existeix en el sentit que no és un punt propi. Direm que té *centre impropi*, aquest centre és el punt de tangència amb l'infinit.

Proposició 6.44. *Sigui Q una quàdrica afí no degenerada amb centre propi O. Aleshores O és un centre de simetria: si $p \in |Q|$, aleshores el simètric de p respecte de O pertany a Q.*

Demostració. Considerem la corda Op i tallem amb l'hiperplà de l'infinit H_∞, sigui p_∞ aquest tall. Per definició de centre, O i p_∞ són conjugats. Hem vist a la secció anterior que en aquest cas els extrems de la corda $\{p, p'\}$ separen harmònicament $\{O, p_\infty\}$. O sigui: $(p, p', O, p_\infty) = -1$. Com el quart punt de la raó doble es troba a l'infinit, coincideix amb la raó simple: $(p, p', O) = -1$. Això equival a dir que O és el punt mig de p i p'; per tant, l'altre extrem de la corda, p', és el simètric de p respecte de O. ■

Procés 6.45 (Càlcul del centre). *Seguint la definició, si Q té matriu M com a l'inici de la secció, aleshores $(a_1, \dots, a_n) = [1 : a_1 : \dots : a_n]$ és el centre de Q si l'hiperplà:*

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

és l'hiperplà $x_0 = 0$. Això és equivalent a dir que el producte de $(1, a_1, \dots, a_n)$ amb M, que calcula els coeficients de l'hiperplà polar, dona $(\rho, 0, \dots, 0)$. Per tant:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \rho & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Com la matriu M és simètrica, podem transposar i escriure la condició anterior com el sistema següent, que anomenarem sistema del centre:

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

del qual la primera equació no dona cap informació. En el cas dels parabaloides el sistema (6.1) *és incompatible. Per exemple el centre de la cònica* $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ *el trobem amb el sistema d'equacions:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que té solució $(0, 0)$.

Definició 6.46 (Diàmetres). Sigui Q una quàdrica afí no degenerada amb centre O. Anomenem *diàmetres* a les rectes que passen pel centre. Diem que dos diàmetres són conjugats si els corresponents punts de l'infinit són conjugats respecte de Q_∞. Els diàmetres que tenen el punt impropi en Q_∞ s'anomenen asímptotes.

7 Classificació de les quàdriques

Definició 7.1 (Quàdriques equivalents). Siguin Q_1, Q_2 dues quàdriques projectives (reals o complexes). Diem que són equivalents si existeixen dues referències $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ de manera que la matriu de Q_1 en la referència $\mathcal{R}_1$ és proporcional a la matriu de Q_2 en la referència $\mathcal{R}_2$. Posarem $Q_1 \sim Q_2$ i això és una *relació d'equivalència*.

7.1 Cas projectiu complex

Proposició 7.2 (Rang de les quàdriques projectives). *El rang és un invariant de les quàdriques projectives reals i complexes.*

Demostració. Recordem que vam definir el rang d'una quàdrica com el rang qualsevol matriu que la representa. Si dues matrius M, M' representen la mateixa quàdrica, aleshores existeix una matriu invertible A de manera que $A^T M A = \lambda M'$ per una constant no nul·la λ. Com $\operatorname{rang}\left(A^T M A\right) = \operatorname{rang}(M)$ tenim que té sentit definir el rang de Q. Si $Q_1 \sim Q_2$, aleshores podem mirar el rang de les dues quàdriques en la matriu que les representa simultàniament i tenim que $\operatorname{rang}(Q_1) = \operatorname{rang}(Q_2)$. ■

Lema 7.3 (Equacions reduïdes d'una quàdrica projectiva). *Per a tota quàdrica projectiva existeix una referència en la qual la matriu de la quàdrica és diagonal.*

Demostració. Primer ens reduïm al cas en què la quàdrica és no degenerada. Vam veure en una lliçó anterior que existeix una referència en la qual la matriu de la quàdrica és de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-r+1,n-r+1} & \dots & a_{n-r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-r+1,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

on $M' = \left(a_{ij}\right)$ és una matriu simètrica de determinant no nul. Per tant és suficient amb diagonalitzar M'. Suposem doncs que Q és una quàdrica no degenerada en un espai projectiu $\mathbb{P}$ de dimensió n.
Provarem per inducció que existeix un símplex autopolar $p_0, \ldots, p_n$, això acabarà la demostració ja que sabem que en la referència $(p_0, \ldots, p_n; A)$ la matriu de Q serà diagonal. Si $n = 1$ és suficient considerar un punt p_0 fora de la quàdrica i prendre p_1 el seu punt conjugat, per definició formen un símplex autopolar. Suposem que $n > 1$ i considerem $p_0 \notin |Q|$. Aleshores el seu hiperplà polar H_{p_0} talla Q en una quàdrica no degenerada: en efecte si hi hagués un punt doble x de $Q \cap H_{p_0}$ tindríem que x seria conjugat de tots els punts d' H_{p_0} i també de p_0, per tant $p_0 \vee H_{p_0} = \mathbb{P} \subset H_x$ (i els punts conjugats formen una varietat lineal que, com a mínim, conté $H_{p_0} \vee p_0$). És a dir, x seria un punt doble de Q i això contradiu que sigui no degenerada. Finalment apliquem la hipòtesi d'inducció i obtenim que existeix un símplex autopolar $p_1, \ldots, p_n$ de $Q \cap H_{p_0}$. Com tots aquests punts són conjugats de p_0 obtenim que $p_0, p_1, \ldots, p_n$ és un símplex autopolar de Q. ■

Considerem ara una quàdrica projectiva Q i una referència en la qual la matriu de Q és diagonal. Podem suposar que l'equació de Q és de la forma $a_{00}x_0^2 + \cdots + a_{rr}x_r^2 = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ 0 & \cdots & a_r & & & \\ \hline & & & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right).$$

Notem que $\operatorname{rang}(Q) = r+1$. Fins ara no hem fet servir que els coeficients són complexos, és a dir: $a_{ii} \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Fem el canvi de variables:

$$y_0 = \sqrt{a_{00}}x_0, \ldots, y_r = \sqrt{a_{rr}}x_r, y_{r+1} = x_{r+1}, \ldots, y_n = x_n.$$

En les noves coordenades l'equació de Q és:

$$y_0^2 + \ldots + y_r^2 = 0$$

Aleshores té rang $r + 1$, el rang és invariant per la relació d'equivalència que ens hem fixat i diem que aquesta equació és *reduïda*.

Teorema 7.4 (Teorema de classificació de les quàdriques projectives complexes). *Siguin Q_1, Q_2 dues quàdriques en un espai projectiu complex. Són equivalents:*

1. $Q_1 \sim Q_2$.
2. $\operatorname{rang}(Q_1) = \operatorname{rang}(Q_2)$.
3. *Q_1 i Q_2 tenen la mateixa equació reduïda.*

Demostració. Com el rang és un invariant projectiu de les quàdriques tenim que el primer apartat implica el segon. D'altra banda, hem vist que el rang determina l'equació reduïda, per tant, el segon apartat implica el tercer. Finalment, per la definició de relació d'equivalència, el tercer apartat implica el primer. ∎

7.2 Cas projectiu real

Havíem arribat, sense usar cap propietat especial del cos base, a l'existència de símplexs autopolars per a la quàdrica fixada Q i per tant a l'existència d'una referència en la qual la matriu de la quàdrica és diagonal. Podem suposar que l'equació de Q és de la forma: $a_{00}x_0^2 + \ldots + a_{rr}x_r^2 = 0$, on tots els coeficients a_{ii} són no nuls per $0 \leq i \leq r$. En particular el rang de Q és $r+1$. Podem, doncs, suposar que permutem les variables de forma que tots els coeficients a_{ii} són positius des de $i = 0$ fins a $i = j$ i que $a_{ii} < 0$ per $i = j+1, \ldots, r$. A més a més podem suposar que $j + 1 \geq r - j$, o equivalentment $j \geq \frac{r-1}{2}$. Ara fem el canvi de variables:

$$\begin{aligned} y_0 &= \sqrt{a_{00}} \cdot x_0, \ldots, y_j = \sqrt{a_{jj}} \\ y_{j+1} &= \sqrt{-a_{j+1j+1}} x_{j+1}, \ldots, y_r = \sqrt{-a_{rr}} x_r \\ y_{r+1} &= x_{r+1}, \ldots, y_n = x_n. \end{aligned}$$

En les noves coordenades l'equació de Q és:

$$y_0^2 + \cdots + y_j^2 - y_{j+1}^2 - \cdots - y_r^2 = 0. \tag{7.1}$$

Diem que aquesta equació és *reduïda*.

Observació 7.5. Observem que l'equació reduïda està determinada per dues constants: el nombre de coeficients no nuls $r+1$ (que és igual al rang de Q) i el nombre de coeficients positius $j+1$.

Definició 7.6 (Index de la quàdrica). Sigui Q una quàdrica de l'espai projectiu real. Anomenem index de la quàdrica a la constant següent:

$$j(Q) = \max\{\dim \mathbb{L} \mid \mathbb{L} \text{ és una varietat lineal amb } \mathbb{L} \cap |Q| = \emptyset\}.$$

Dit d'una altra forma: l'índex mesura la mida de la varietat lineal més gran que podem trobar sense tenir punts en comú amb Q. **L'índex també és un invariant**.

Proposició 7.7. *Tenim les següents propietats de l'índex de les quàdriques de l'espai projectiu real:*

1. *L'índex és un invariant projectiu, és a dir, si dues quàdriques són equivalents aleshores tenen el mateix índex.*
2. *Si Q té l'equació reduïda (7.1), aleshores $j(Q) = j$.*
3. $n - j - 1 = \max\{\dim \mathbb{L} \mid \mathbb{L}$ *és una varietat lineal amb* $\mathbb{L} \subset |Q|\}$.

Com a conseqüència, $n - j(Q) - 1$ és la dimensió màxima d'una varietat lineal continguda a la quàdrica.

Demostració. El primer apartat és conseqüència de què el conjunt de les varietats lineals disjuntes amb $|Q|$ és una noció intrínseca, independent de la referència escollida. Per demostrar els apartats segon i tercer considerem les varietats lineals:

$$\mathbb{L} : x_{j+1} = \ldots = x_n = 0,$$
$$\mathbb{M} : x_0 = x_{j+1}, \ldots, x_{r-j-1} = x_r, x_{r-j} = \ldots = x_j = 0.$$

Aquestes $j+1$ equacions ens diuen que $\mathbb{L}$ té dimensió j i $\mathbb{M}$ té dimensió $n-j-1$, i l'equació de Q restringida a $\mathbb{M}$ és $0 = 0$. Com $\mathbb{L}, \mathbb{M}$ són disjuntes, aleshores són suplementàries. En efecte, substituint en l'equació (7.1) obtenim que $\mathbb{L} \cap |Q| = \emptyset$ i $\mathbb{M} \subset |Q|$. Sigui $\mathbb{L}'$ una varietat lineal de dimensió $> j$ aleshores $\mathbb{L}' \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$ i, per tant, no pot ser disjunta amb Q. En més detall, com $\mathbb{M} \subset |Q|$ implica que $L' \cap |Q| \neq \emptyset$, ja que $\mathbb{L}' \cap \mathbb{M} \subset \mathbb{L}' \cap |Q| \neq \emptyset$, i arribem a una contradicció. Això és, no hi ha cap varietat amb dimensió superior a j disjunta amb Q. De la mateixa forma no hi pot haver una varietat de dimensió $> n-j-1$ continguda en Q perquè tallaria $\mathbb{L}$. ■

Teorema 7.8 (Teorema de classificació de les quàdriques projectives reals). *Siguin Q_1, Q_2 dues quàdriques en un espai projectiu real. Són equivalents:*

1. $Q_1 \sim Q_2$.
2. $\operatorname{rang}(Q_1) = \operatorname{rang}(Q_2)$ *i* $j(Q_1) = j(Q_2)$.
3. Q_1 *i* Q_2 *tenen la mateixa equació reduïda.*

Lema 7.9. *Sigui M una matriu representant una quàdrica Q. Suposem que M té a_+ VAPs estrictament positius i a_- VAPs estrictament negatius. Aleshores:*

$$\mathrm{j}(Q) = \max\{a_+, a_-\} - 1.$$

Teorema 7.10 (Regla de Descartes). *Sigui $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ un polinomi amb totes les arrels reals. Considerem la successió de signes:*

$$\operatorname{signe}(a_n) \quad \operatorname{signe}(a_{n-1}) \quad \ldots \quad \operatorname{signe}(a_1) \quad \operatorname{signe}(a_0).$$

Aleshores el nombre d'arrels positives de p és igual al nombre de canvis de signe de la successió.

Per calcular l'índex usem els dos resultats: gràcies al lema només hem de mirar **quantes arrels positives i negatives té el polinomi característic de la matriu**. Noteu que no necessitem saber quins són els VAPs, només els seus signes. D'altra banda, les matrius simètriques diagonalitzen[1], per tant el polinomi característic té totes les arrels reals i podem aplicar la regla de Descartes.

[1] Totes les matrius simètriques diagonalitzen en virtut del teorema de Schur.

7.3 Classificació de les quàdriques afins reals i complexes

Definició 7.11 (Quàdriques equivalents). Siguin Q_1, Q_2 dues quàdriques afins (reals o complexes). Diem que són equivalents si existeixen dues referències afins $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ de manera que la matriu de Q_1 en la referència $\mathcal{R}_1$ és proporcional a la matriu de Q_2 en la referència $\mathcal{R}_2$. Fent el mateix argument que en el cas projectiu es demostra que es tracta d'una relació d'equivalència, posarem $Q_1 \sim_{af} Q_2$.

Observació 7.12. Les afinitats corresponen a projectivitats en la seva compleció projectiva $\overline{f} : \overline{\mathbb{A}^n} \longrightarrow \overline{\mathbb{A}^n}$ que deixen invariant l'hiperplà de l'infinit. En particular si dues quàdriques són afinment equivalents aleshores les corresponents quàdriques projectives seran projectivament equivalents i també les seves seccions impròpies. Per tant:

$$Q_1 \sim_{\text{af}} Q_2 \implies \overline{Q}_1 \sim \overline{Q}_2, \quad \overline{Q}_{1,\infty} \sim \overline{Q}_{2,\infty}.$$

Proposició 7.13. *Sigui Q una quàdrica afí real. Denotem amb $\mathbf{r}(Q)$ el rang de $\overline{Q}$ i amb $\mathbf{r}'(Q)$ el rang de Q_∞. De la mateixa manera denotem per $\mathbf{j}(Q)$ i $\mathbf{j}'(Q)$ els índexs de $\overline{Q}$ i Q_∞, respectivament. Aleshores $\mathbf{r}(Q), \mathbf{r}'(Q), \mathbf{j}(Q), \mathbf{j}'(Q)$ són invariants. Si Q és complexa, aleshores només tenim els invariants $\mathbf{r}(Q)$ i $\mathbf{r}'(Q)$.*

7.4 Equacions reduïdes de les quàdriques i teorema de la classificació

Considerem una quàdrica Q en un espai afí $(\mathbb{A}^n, F)$. Una referència en aquest espai afí està formada per un punt $p \in \mathbb{A}^n$ i una base $(e_1, \ldots, e_n)$ d'F.

- Aquesta base determina una referència projectiva $([e_1], \ldots, [e_n]; [e_1 + \ldots + e_n])$ en l'hiperplà de l'infinit $H_\infty = \mathbb{P}(F)$.
- A tota quàdrica projectiva se li pot associar una matriu diagonal amb 1 i -1 a la diagonal i en una referència afí convenient podem posar la matriu de Q de la forma:

$$\begin{pmatrix}
a_{00} & a_{10} & \cdots & a_{j0} & a_{(j+1)0} & \cdots & a_{r0} & a_{(r+1)0} & \cdots & a_{n0} \\
a_{10} & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{j0} & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{(j+1)0} & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{r0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{(r+1)0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix},$$

  on el nombre de vegades que apareix l'1 (j vegades) és més gran o igual que el nombre de vegades que apareix -1 ($r - j$ vegades).

Posant la matriu per blocs tindrem:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^T & \mathrm{Id} & 0 & 0 \\ a_2^T & 0 & -\mathrm{Id} & 0 \\ a_3^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Proposició 7.14. *Per a tota quàdrica afí real en un espai afí de dimensió n, existeix una referència afí en la qual l'equació de la quàdrica és una de les següents (tornem a utilitzar les variables* $(x_0, \ldots, x_n)$*):*

1. $x_1^2 + \ldots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0$, *amb* $j \geq r - j$ *i invariants* $(r, j-1, r, j-1)$.
2. $x_1^2 + \ldots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 1$, *amb* $j > r - j$ *i invariants* $(r+1, j-1, r, j-1)$.
3. $x_1^2 + \ldots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 1$, *amb* $j \leqslant r - j$ *i invariants* $(r+1, r-j, r, r-j-1)$.
4. $x_1^2 + \ldots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 2x_n$, *amb* $j \geqslant r - j$ *i invariants* $(r+2, j, r, j-1)$.

Teorema 7.15 (Teorema de classificació de les quàdriques afins reals). *Siguin* Q_1, Q_2 *dues quàdriques en un espai afí real. Són equivalents:*

1. $Q_1 \sim_{af} Q_2$.
2. Q_1 *i* Q_2 *tenen els mateixos invariants* $(\mathbf{r}, \mathbf{j}, \mathbf{r}', \mathbf{j}')$.
3. Q_1 *i* Q_2 *tenen la mateixa equació reduïda.*

Demostració.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ És degut a què els quatre nombres són invariants.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ D'altra banda, analitzant el resum anterior observem que totes les equacions reduïdes tenen invariants diferents, per tant no són equivalents entre si i en conseqüència a tota quàdrica li correspon una única equació reduïda.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Per la definició de la relació d'equivalència. ∎

A
Figures

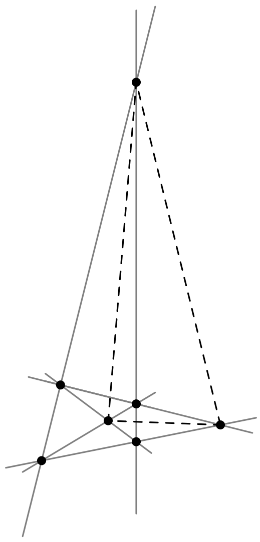


Figura 2: Representació d'un quadrivèrtex (en discontinu, el *triangle diagonal*).

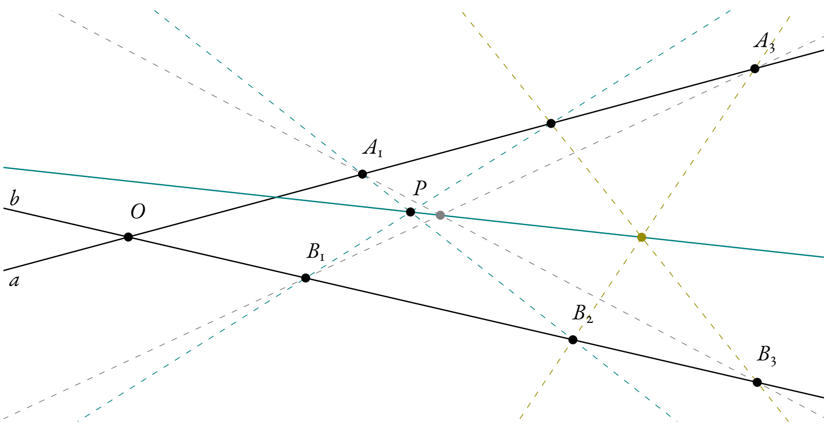


Figura 3: Teorema de Pappus

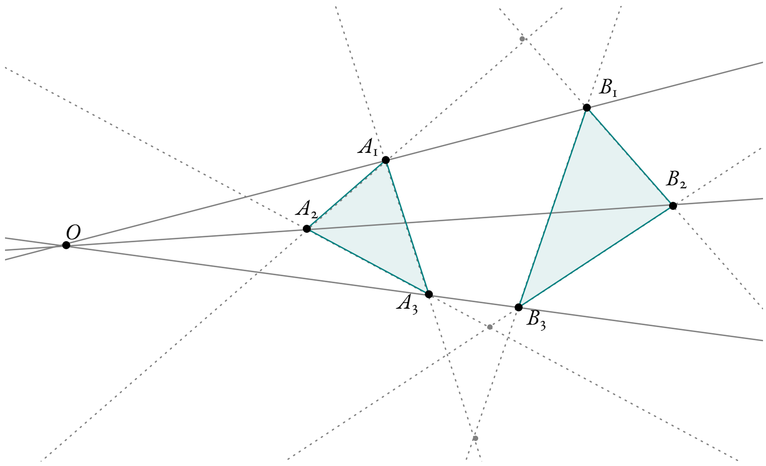


Figura 4: Teorema de Desargues

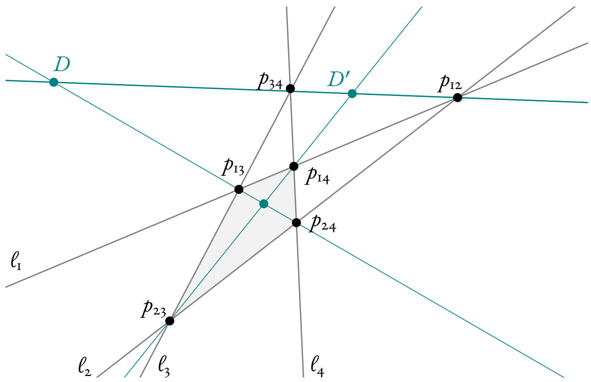


Figura 5: Teorema del quadrilàter complet

B

Taules de còniques i quàdriques

Taula 1: Tipus de còniques reals afins i projectives.

Invariants projectius				Invariants afins no projectius				
reduïda	r	j	*tipus*	**reduïda**	r'	j'	*tipus*	*secció*
$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	3	2	imaginària	$-x^2 - y^2 = 1$	2	1	imaginària	parell de punts imaginaris
$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	3	1	no degenerada	$x^2 + y^2 = 1$	2	1	el·lipse	parell de punts imaginaris
				$x^2 - y^2 = 1$	2	0	hipèrbola	parell de punts reals
				$x^2 = 2y$	1	0	paràbola	punt doble
$x_0^2 + x_1^2 = 0$	2	1	parell de rectes imaginàries	$x^2 + y^2 = 0$	2	1	parell de rectes imaginàries	parell de punts imaginaris
				$-x^2 = 1$	1	0	parell de rectes imaginàries	punt doble
$x_0^2 - x_1^2 = 0$	2	0	parell de rectes reals	$x^2 - y^2 = 0$	2	0	parell de rectes reals	parell de punts reals
				$x^2 = 1$	1	0	parell de rectes reals paral·leles	punt doble
$x_0^2 = 0$	1	0	recta doble	$x^2 = 0$	1	0	recta doble pròpia	recta doble

Taula 2: Tipus de quàdriques afins i projectives de l'espai real tridimensional.

Invariants projectius				Invariants afins no projectius				
reduïda	r	j	*tipus*	**reduïda**	r'	j'	*tipus*	*secció*
$x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	4	3	imaginària	$-x^2-y^2-z^2=1$	3	2	imaginària	imaginària
$x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$	4	2	no reglada	$x^2+y^2+z^2=1$	3	2	el·lipsoide	imaginària
				$x^2-y^2-z^2=1$	3	1	hiperboloide de dues fulles	real no degenerada
				$x^2+y^2=2z$	2	1	paraboloide el·líptic	parell de rectes imaginàries
$x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$	4	1	reglada	$x^2+y^2-z^2=1$	3	1	hiperboloide d'una fulla	real no degenerada
				$x^2-y^2=2z$	2	0	paraboloide hiperbòlic	parell de rectes reals
$x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$	3	2	con imaginari	$x^2+y^2+z^2=0$	3	2	con imaginari	imaginària
				$-x^2-y^2=1$	2	1	cilindre imaginari	parell de rectes imaginàries
$x_0^2+x_1^2-x_2^2=0$	3	1	con real	$x^2+y^2-z^2=0$	3	1	con real	real no degenerada
				$x^2+y^2=1$	2	1	cilindre el·líptic	parell de rectes imaginàries
				$x^2-y^2=1$	2	0	cilindre hiperbòlic	parell de rectes reals
				$x^2=2y$	1	0	cilindre parabòlic	recta doble
$x_0^2+x_1^2=0$	2	1	parell de plans imaginaris	$x^2+y^2=0$	2	1	parell de plans imaginaris no paral·lels	parell de rectes imaginàries
				$-x^2=1$	1	0	parell de plans paral·lels i imaginaris	recta doble

Taula 2, continuació.

Invariants projectius				Invariants afins no projectius				
reduïda	*r*	*j*	*tipus*	**reduïda**	*r'*	*j'*	*tipus*	*secció*
$x_0^2 - x_1^2 = 0$	2	0	parell de plans reals	$x^2 - y^2 = 0$	2	0	parell de plans reals no paral·lels	parell de rectes reals
				$x^2 = 1$	1	0	parell de plans paral·lels	recta doble
$x_0^2 = 0$	1	0	pla doble	$x^2 = 0$	1	0	un pla doble propi	recta doble