Matrius i vectors (grup de matí)

Curs 2018–2019

14.1 Aplicacions lineals

Una aplicació $f\colon E \to F$ entre dos espais vectorials sobre $\mathbb{R}$ es diu *lineal* si

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$ per a $u, v \in E$ arbitraris;
- $f(cu) = c\,f(u)$ per a tot $u \in E$ i tot $c \in \mathbb{R}$.

Per exemple, les aplicacions següents són lineals:

(a) L'aplicació identitat $\mathrm{id}\colon E \to E$ per a qualsevol espai vectorial E.

(b) L'aplicació zero, definida com $f(v) = 0$ per a tot $v \in E$.

(c) Tota aplicació $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = ax$ on a és un nombre fixat.

(d) L'aplicació $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ que envia cada polinomi $p(x)$ a la seva derivada $p'(x)$.

En canvi, les aplicacions $f(x) = x^2$ o bé $f(x,y,z) = xyz$ no són lineals.

Generalitzant l'exemple (c), les aplicacions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de la forma següent són lineals:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_1^1 x_1 + \cdots + a_1^n x_n, \dots, a_m^1 x_1 + \cdots + a_m^n x_n). \tag{14.1}$$

A continuació demostrarem que les úniques aplicacions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que són lineals són les de la forma (14.1).

14.2 Matriu d'una aplicació lineal en unes bases donades

Suposem donada una base $v_1, \dots, v_n$ de E. Aleshores tota aplicació lineal $f\colon E \to F$ està determinada pels vectors $f(v_1), \dots, f(v_n)$, ja que si $u = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ llavors

$$f(u) = f(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = x_1\, f(v_1) + \cdots + x_n\, f(v_n).$$

A més, si $w_1, \dots, w_m$ és una base de F, podem escriure

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_1^1 w_1 + \cdots + a_1^m w_m \\ &\ \vdots \\ f(v_n) &= a_n^1 w_1 + \cdots + a_n^m w_m \end{aligned}$$

i aleshores, si $u = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$, resulta que

$$\begin{aligned} f(u) &= x_1\, f(v_1) + \cdots + x_n\, f(v_n) \\ &= x_1(a_1^1 w_1 + \cdots + a_1^m w_m) + \cdots + x_n(a_n^1 w_1 + \cdots + a_n^m w_m) \\ &= (x_1 a_1^1 + \cdots + x_n a_n^1)\, w_1 + \cdots + (x_1 a_1^m + \cdots + x_n a_n^m)\, w_m. \end{aligned}$$

Dit d'una altra manera, si un vector u té components $(x_1, \ldots, x_n)$ en la base $v_1, \ldots, v_n$, llavors el vector $f(u)$ té les components següents en la base $w_1, \ldots, w_m$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 a_1^1 + \cdots + x_n a_n^1 \\ \vdots \\ x_1 a_1^m + \cdots + x_n a_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (14.2)$$

La matriu $A = (a_i^j)$ de (14.2) és la *matriu de f en les bases $v_1, \ldots, v_n$ de E i $w_1, \ldots, w_m$ de F*. Observem que la matriu A té per *columnes* les components dels vectors $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ en la base $w_1, \ldots, w_m$. L'expressió (14.2) ens diu que l'aplicació f s'expressa en components en les bases donades com $f(X) = AX$.

Exemple 14.1. Donades dues bases $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ d'un mateix espai vectorial E, la matriu de canvi de base $C(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$ és la matriu de l'aplicació identitat $\mathrm{id}\colon E \to E$ en les bases respectives $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$.

Teorema 14.2. *Una aplicació $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és lineal si i només si és de la forma $f(X) = AX$ on A és una matriu $m \times n$.*

Demostració. Tota aplicació de la forma $f(X) = AX$ és lineal, ja que

$$f(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = f(X_1) + f(X_2)$$

i també $f(cX) = A(cX) = cAX = c\,f(X)$ per a tot $c \in \mathbb{R}$. Recíprocament, si f és lineal i denotem per A la seva matriu en les bases canòniques de $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$, llavors f s'expressa, per (14.2), com $f(X) = AX$. □

Si una aplicació lineal $f\colon E \to F$ té matriu A en unes bases $v_1, \ldots, v_n$ de E i $w_1, \ldots, w_m$ de F, i una altra aplicació lineal $g\colon F \to G$ té matriu B en la base $w_1, \ldots, w_m$ de F i una base $u_1, \ldots, u_k$ de G, aleshores l'aplicació composta $g \circ f$ també és lineal i té matriu BA en les bases $v_1, \ldots, v_n$ i $u_1, \ldots, u_k$. Per demostrar aquest fet, si expressem f, g i $g \circ f$ en components en les bases donades, és suficient escriure que

$$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(AX) = B(AX) = (BA)X,$$

d'on deduïm que $g \circ f$ és lineal i té matriu BA.

14.3 Nucli i imatge d'una aplicació lineal

Donada una aplicació lineal $f\colon E \to F$, el *nucli* de f és el conjunt de vectors $u \in E$ tals que $f(u) = 0$. El nucli de f es denota per $\mathrm{Nuc}\, f$ o bé $\mathrm{Ker}\, f$.

La *imatge* d'una aplicació lineal $f\colon E \to F$ és el conjunt de vectors de F de la forma $f(u)$ per a algun vector $u \in E$. La imatge de f es denota per $\mathrm{Im}\, f$.

Proposició 14.3. *Per a tota $f\colon E \to F$ lineal, el nucli* $\mathrm{Ker}\, f$ *és un subespai vectorial de E i la imatge* $\mathrm{Im}\, f$ *és un subespai vectorial de F.*

Demostració. Si u_1 i u_2 són vectors de $\operatorname{Ker} f$, llavors

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = 0 + 0 = 0,$$

d'on $u_1 + u_2 \in \operatorname{Ker} f$. També si $u \in \operatorname{Ker} f$ i $c \in \mathbb{R}$, llavors $f(cu) = c\,f(u) = 0$ i per tant $cu \in \operatorname{Ker} f$.

Si v_1 i v_2 són vectors de $\operatorname{Im} f$, llavors existeixen vectors u_1 i u_2 de E tals que $f(u_1) = v_1$ i $f(u_2) = v_2$. Aleshores $f(u_1 + u_2) = v_1 + v_2$, d'on $v_1 + v_2 \in \operatorname{Im} f$. Si $v \in \operatorname{Im} f$ i $c \in \mathbb{R}$, podem posar $v = f(u)$ per a algun $u \in E$ i tenim que $f(cu) = cv$, la qual cosa implica que $cv \in \operatorname{Im} f$. $\square$

De la proposició 14.3 es dedueix que, si E i F són de dimensió finita, llavors

$$\dim \operatorname{Ker} f \le \dim E, \qquad \dim \operatorname{Im} f \le \dim F$$

per a tota aplicació lineal $f\colon E \to F$.

Si escollim una base $v_1, \dots, v_n$ de E i una base $w_1, \dots, w_m$ de F i diem A a la matriu d'una aplicació lineal $f\colon E \to F$ en aquestes bases, llavors el nucli de f és el conjunt de solucions del sistema lineal $AX = 0$ i per tant

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rang} A.$$

D'altra banda, la imatge de f és el subespai de F generat pels vectors $f(v_1), \dots, f(v_n)$, i les components d'aquests vectors en la base $w_1, \dots, w_m$ són les columnes de la matriu A; per tant,

$$\dim F = \operatorname{rang} A.$$

D'aquests fets es dedueix el resultat general següent:

Teorema 14.4. *Per a tota aplicació lineal $f\colon E \to F$ es compleix*

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.}$$

Demostració. $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = (\dim E - \operatorname{rang} A) + \operatorname{rang} A = \dim E.$ $\square$

14.4 Monomorfismes, epimorfismes i isomorfismes

- Una aplicació $f\colon E \to F$ és *injectiva* si $f(u_1) = f(u_2)$ implica que $u_1 = u_2$. Les aplicacions lineals injectives s'anomenen *monomorfismes.*

- Una aplicació $f\colon E \to F$ és *exhaustiva* si per a tot $v \in F$ existeix algun $u \in E$ tal que $f(u) = v$. Les aplicacions lineals exhaustives s'anomenen *epimorfismes.*

- Una aplicació $f\colon E \to F$ és *bijectiva* si és injectiva i exhaustiva alhora. Tota aplicació $f\colon E \to F$ té una inversa $f^{-1}\colon F \to E$ tal que $f^{-1}(f(u)) = u$ per a tot $u \in E$ i $f(f^{-1}(v)) = v$ per a tot $v \in F$. Les aplicacions lineals bijectives s'anomenen *isomorfismes.*

Aquesta terminologia prové del fet que una aplicació lineal també s'anomena un *morfisme* entre espais vectorials.

Proposició 14.5. *Una* $f\colon E \to F$ *lineal és injectiva si i només si* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Demostració. Suposem primer que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Si $f(u) = f(v)$, llavors $f(u-v) = 0$, d'on $u - v \in \operatorname{Ker} f$ i per tant $u - v = 0$, és a dir, $u = v$. Recíprocament, si f és injectiva i hi ha un $u \in E$ tal que $f(u) = 0$, llavors $f(u) = f(0)$ i per tant $u = 0$. □

Proposició 14.6. *Una* $f\colon E \to F$ *lineal és exhaustiva si i només si* $\operatorname{Im} f = F$.

Demostració. L'afirmació que f és exhaustiva equival a l'afirmació que tot vector de F és imatge d'algun vector de E, que és el mateix que dir que $\operatorname{Im} f = F$. □

14.5 Inversa d'una aplicació lineal bijectiva

Proposició 14.7. *Si* $f\colon E \to F$ *és lineal i bijectiva, llavors* $\dim E = \dim F$.

Demostració. Com que f és injectiva, $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, i com que f és exhaustiva, $\dim \operatorname{Im} f = \dim F$. Aleshores el teorema 14.4 implica que $\dim E = \dim F$. □

Proposició 14.8. *Si una aplicació lineal* $f\colon E \to F$ *és bijectiva, llavors la seva inversa* $f^{-1}\colon F \to E$ *també és lineal. Si* f *té matriu* A *en unes bases* $v_1, \dots, v_n$ *de* E *i* $w_1, \dots, w_n$ *de* F*, llavors* f^{-1} *té la matriu* A^{-1} *en les mateixes bases.*

Demostració. Si escrivim, en les bases donades, $f(X) = AX$, llavors la igualtat $Y = AX$ és equivalent a $X = A^{-1}Y$ i per tant l'aplicació inversa ve donada per $f^{-1}(Y) = A^{-1}Y$, que també és lineal. □

14.6 Determinant d'un endomorfisme

Una aplicació lineal $f\colon E \to E$ d'un espai vectorial en ell mateix s'anomena un *endomorfisme*. Quan es treballa amb endomorfismes s'acostuma a fixar la mateixa base de E en l'espai de sortida i en el d'arribada.

Si $\mathcal{B}_1 = (u_1, \dots, u_n)$ i $\mathcal{B}_2 = (v_1, \dots, v_n)$ són dues bases diferents de E, llavors la matriu A_1 de f en la base $\mathcal{B}_1$ i la matriu A_2 de f en la base $\mathcal{B}_2$ es relacionen per l'expressió següent:

$$A_2 = C(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) \cdot A_1 \cdot C(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1).$$

D'aquest fet es dedueix el teorema següent. Observem que la matriu d'un endomorfisme en una base qualsevol és necessàriament una matriu quadrada.

Teorema 14.9. *Per a qualsevol endomorfisme* $f\colon E \to E$*, el determinant de la matriu de* f *en una base de* E *no depèn de la base escollida.*

Demostració. Si $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ són dues bases de E i les matrius respectives de f en aquestes bases són A_1 i A_2, llavors

$$\det A_2 = \det C(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) \cdot \det A_1 \cdot \det C(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1) = \det A_1,$$

ja que $C(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1) = C(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)^{-1}$. □

Per tant, donat un endomorfisme $f\colon E \to E$, té sentit parlar del determinant de f, que es denota per $\det f$, ja que no depèn de la base de E que fem servir per calcular-lo. Un endomorfisme f és bijectiu si i només si $\det f \neq 0$, i en aquest cas f s'anomena un *automorfisme*.