Lògica proposicional

1 Lògica proposicional (informal)

1.1 Connectors lògics

S'analitzen enunciats a partir dels connectors lògics:

- $\neg$ Negació (No).
- $\wedge$ Conjunció (i).
- $\vee$ Disjunció (o).
- $\rightarrow$ Condicional (si..., llavors...).
- $\leftrightarrow$ Bicondicional (si i només si).

En lògica el valor de $\vee$ és inclusiu. És a dir, o A, o B o A i B. En principi, tots els connectors es poden construir a partir de només la negació i un altre connector exceptuant el bicondicional.

1.2 Enunciats complexos

Els enunciats són certs o falsos. Els connectors permeten construir enunciats més complexos a partir d'enunciats atòmics. Siguin A i B enunciats atòmics.

- Un enunciat és pot negar: $\neg A$.
- Dos enunciats es poden unir $(A \wedge B)$ o construir la disjunció $(A \vee B)$.
- Es pot construir un condicional $(A \rightarrow B)$ o un bicondicional $(A \leftrightarrow B)$.

1.3 Normes semàntiques

A un enunciat cert se li assigna el nombre 1 i a un fals el nombre 0.

A	B	$\neg A$	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$	$(A \rightarrow B)$	$(A \leftrightarrow B)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Si en un condicional l'antecedent és fals, llavors l'enunciat sencer és directament cert. Per a una expressió concreta es pot construir la taula de veritat tot i que a mesura que augmenten els anunciats les possibilitats augmenten exponencialment. (2^n possibilitats per n enunciats).
Una fórmula que sempre és certa, és a dir que té només 1 a la seva taula de veritats, s'anomena **tautologia**.
Una fórmula que sempre és falsa, és a dir que té només 0 a la seva taula de veritats, s'anomena **contradicció**.
Les fórmules que no són ni tautologies ni contradiccions s'anomenen **fórmules contingents**.
Una fórmula és una tautologia si i només si la seva negació és una contradicció.

1.4 Parèntesis. Normes de relaxació de parèntesis

Els parèntesis són molt importants i cal que siguin respectats. En principi cal posar parèntesis al voltant de cada enunciat complex, no obstant hi ha normes per eliminar els parèntesis.

1. Si a l'acabar de construir una fórmula hi ha parèntesis exteriors, es poden eliminar.

2. En conjuncions i disjuncions repetides es poden treure els parèntesis intermedis.

3. Quan s'enfronta $\to$ o $\leftrightarrow$ a una conjunció o disjunció s'entén que l'operació principal és el condicional o bicondicional i per tant els parèntesis que envolten la conjunció o disjunció es poden eliminar.

1.5 Equivalència lògica

Definició 1.1 (Interpretació)**.** Una interpretació de les variables d'una fórmula lògica és una assignació d'un valor de veritat o fals a aquestes variables.
Cada interpretació de les variables determina un valors per a la fórmula.

Definició 1.2 (Equivalència)**.** Dues formes són equivalents quan les interpretacions de les seves variables produeixen sempre el mateix valor, és a dir, tenen la mateixa taula de veritat. S'escriu $\equiv$ i es diu que són lògicament equivalents.

1.6 Manipulació de fórmules. Equivalències importants

1. Negació:

   - $(\neg(\neg A)) \equiv A$.

2. Conjunció:

   - $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ (Commutativa).
   - $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \equiv A \wedge B \wedge C$ (Associativa).
   - $(A \wedge A) \equiv A$ (Idempotència).

3. Disjunció:

   - $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ (Commutativa).
   - $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \equiv A \vee B \vee C$ (Associativa).
   - $(A \vee A) \equiv A$ (Idempotència).

4. Distribució:
   - $(A \wedge (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
   - $(A \vee (B \wedge C)) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
5. Regles de DeMorgan:
   - $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$.
   - $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$.
6. Condicional:
   - $(A \to B) \equiv (\neg A \vee B)$.
   - $\neg(A \to B) \equiv (A \wedge \neg B)$.
   - $(A \wedge B) \equiv \neg(A \to \neg B)$.
   - $(A \vee B) \equiv (\neg A \to B)$.
7. Bicondicional:
   - $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$.
   - $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.
   - $\neg(A \leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$.
   - $\neg(A \leftrightarrow B) \equiv (A \leftrightarrow \neg B) \equiv (\neg A \leftrightarrow B)$.

Mitjançant l'ús d'aquestes fórmules es poden expressar tots els altres connectors a partir de les parelles $(\neg, \to)$, $(\neg, \vee)$ i $(\neg, \wedge)$.
Fins i tot es podria fer servir un sol connector per expressar-ho tot fent servir la negació de la conjunció o la negació de la disjunció, els operadors **NAND** i **NOR**.

1.7 Tautologies i contradiccions

Sigui $\top$ una tautologia i $\bot$ una contradicció. Podem deduir les següents propietats:

1. Tautologies:
   - $\neg\top \equiv \top$.
   - $\neg\bot \equiv \top$.
   - $(A \wedge \top) \equiv A$.
   - $(A \vee \top) \equiv \top$.
   - $(\top \to A) \equiv A$.
   - $(A \to \top) \equiv \top$.
   - $(A \leftrightarrow \top) \equiv A$.
2. Contradiccions:
   - $(A \wedge \bot) \equiv \bot$.
   - $(\bot \vee A) \equiv A$.
   - $(\bot \to A) \equiv \top$.
   - $(A \to \bot) \equiv \neg A$.
   - $(A \leftrightarrow \bot) \equiv \neg A$.

1.8 Quantificadors

Hi ha dos quantificadors principals. El quantificador universal $\forall$ i l'existencial $\exists$. Sigui $A(x)$ una propietat.

- $\forall x \;\; A(x)$: Per qualsevol x, $A(x)$.
- $\exists x \;\; A(x)$: Existeix un x tal que $A(x)$.

Els quantificadors sempre tenen associada una variable.

1.8.1 Regles lògiques

- $\neg(\forall x \;\; A(x)) \equiv \exists x \;\; \neg A(x)$.
- $\neg(\exists x \;\; A(x)) \equiv \forall x \;\; \neg A(x)$.
- $\forall x \;\; A(x) \equiv \neg\neg(\forall x \;\; A(x)) \equiv \neg(\exists x \;\; \neg A(x))$.
- $\exists x \;\; A(x) \equiv \neg\neg(\exists x \;\; A(x)) \equiv \neg(\forall x \;\; \neg A(x))$.

En general els quantificadors no van sols:

- $\forall x \forall y \;\; A(x,y) \equiv \forall y \forall x \;\; A(x,y)$. (Commuten).
- $\exists x \exists y \;\; A(x,y) \equiv \exists y \exists x \;\; A(x,y)$. (Commuten).

L'existencial i l'universal no commuten. Les expressions $\forall x \exists y \;\; A(x,y)$ i $\exists y \forall x \;\; A(x,y)$ són ben diferents. Hi ha una relació d'implicació:

$$\forall x \forall y \;\; A(x,y) \to \exists y \forall x \;\; A(x,y) \to \forall x \exists y \;\; A(x,y) \to \exists x \exists y \;\; A(x,y)$$

$$\forall y \forall x \;\; A(x,y) \to \exists x \forall y \;\; A(x,y) \to \forall y \exists x \;\; A(x,y) \to \exists y \exists x \;\; A(x,y)$$

1.8.2 Quantificació restringida a un conjunt:

Es pot especificar que els elements quantificats provenen d'un conjunt determinat. Per exemple, tots els naturals, tots els reals, tots els elements d'un conjunt X.

- $(\forall x \in X) \; A(x) \equiv \forall x \; (x \in X \wedge A(x))$.
- $(\exists x \in X) \; A(x) \equiv \exists x \; (x \in X \wedge A(x))$.

1.8.3 Existencials restringits

Els quantificadors existencials poden restringir la quantitat d'elements que existeixen.

- $\exists! x \; A(x)$. Existeix un únic x tal que $A(x)$.
- $\exists^{\leq 4} x \; A(x)$. Existeixen com a màxim quatre x tals que $A(x)$.

El quantificador existencial restringit a un únic element és molt freqüent.

$$\exists! x \;\; A(x) \equiv \exists x \; (A(x) \wedge \forall y \; (A(y) \to x = y))$$