Parcial 1 (09/11/09) Solucions als problemes

Problema 3.
Siguin $X = \{2, 5, 6, 8\}$ i $Y = \{2, \{5\}, 6, \{8\}\}$. Respon a les següents preguntes, justificant breument les respostes.

(a) $\boxed{\text{És veritat que } X \subseteq \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}\,(x = 2y)\}\ ?}$

No. El conjunt de la dreta és el conjunt dels naturals parells, i 5 no és parell.

(b) $\boxed{\text{Calcula } X \cap \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}\,(x = 2y)\}.}$

El resultat és $\{2, 6, 8\}$, ja que aquests són els elements de X que són parells.

(c) $\boxed{\text{És veritat que } X \subseteq \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}\,(y = 2x)\}\ ?}$

Sí. El conjunt de la dreta és el conjunt de tots els naturals, i tots els elements de X són naturals.

(d) $\boxed{\text{És veritat que } \{2\} \in X\,?}$

No. $\{2\}$ no és cap dels elements de X, que són $2, 5, 6$ i 8, i $\{2\}$ és diferent de tots ells.

> *Observació*: Justificacions com "Perquè el símbol $\in$ no es fa servir amb conjunts", o "Perquè $2 \neq \{2\}$", o "Perquè el que sí que és veritat és que $2 \in X$", **no** són correctes. El punt clau és que $\{2\}$ no apareix a la llista dels elements de X; si hi ha 2 o no és irrellevant.
>
> *Observació més general*: Per justificar que una afirmació és *falsa*, **no val** explicar que una altra afirmació semblant sí que seria certa; s'ha de mostrar concretament per què és falsa la que s'ha proposat!

(e) $\boxed{\text{És veritat que } \{2\} \subseteq Y\,?}$

Sí. La pregunta original equival a dir si $2 \in Y$, i efectivament 2 és un dels elements de Y.

> *Observació*: Una justificació com "Perquè $\subseteq$ correspon a conjunts, i $\{2\}$ és un conjunt", **no** és correcta si no s'acompanya de l'explicació que en concret *aquest* conjunt està format per elements de Y. Tampoc no es considera suficient *llegir* la fórmula i respondre "Perquè el conjunt $\{2\}$ està inclòs/contingut en el conjunt Y": això només és una forma alternativa de dir el mateix, però no ho *justifica*.

(f) $\boxed{\text{Calcula } X \cap Y.}$

El resultat és $\{2, 6\}$, ja que són els elements comuns a X i Y.

(g) $\boxed{\text{És veritat que } Y \cap \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}\,(x = 2y)\} = \emptyset\,?}$

No. El conjunt de la dreta és el dels naturals parells, i Y té dos naturals parells, el 2 i el 6.

Problema 4.

Demostra, justificant tots els passos del teu raonament, que si A, B, C són conjunts qualssevol, aleshores $(B \cup A) \cap B = (B \cap C) \cup B$.

Solució 1: $\left.\begin{array}{l} B \subseteq B \cup A, \text{ per tant } (B \cup A) \cap B = B \\ B \cap C \subseteq B, \text{ per tant } (B \cap C) \cup B = B \end{array}\right\}$ Per tant, $(B \cup A) \cap B = (B \cap C) \cup B$.

La propietat clau que hem usat és que si $X \subseteq Y$ aleshores $X \cap Y = X$ i $X \cup Y = Y$.

Solució 2: Demostrem les dues inclusions separadament, agafant elements.

($\subseteq$) Si $x \in (B \cup A) \cap B$, aleshores en particular $x \in B$, i això implica que $x \in (B \cap C) \cup B$. Per tant, hem provat que $(B \cup A) \cap B \subseteq (B \cap C) \cup B$

($\supseteq$) Si $x \in (B \cap C) \cup B$, hi ha dos casos: $x \in B \cap C$, i $x \in B$:

- Si $x \in B \cap C$, aleshores també $x \in B$, i això implica que $x \in B \cup A$, i per tant $x \in (B \cup A) \cap B$.
- Si $x \in B$, el mateix raonament anterior (sense el primer pas) mostra que $x \in (B \cup A) \cap B$.

En tots dos casos hem provat que $x \in (B \cup A) \cap B$. Per tant hem provat que $(B \cap C) \cup B \subseteq (B \cup A) \cap B$.

No hem usat res més que les definicions de la unió i la intersecció: Si $x \in X \cap Y$ aleshores $x \in X$; i si $x \in X$, aleshores $x \in X \cup Y$ per qualsevol Y.

Problema 5 (a).

Identifica els següents conjunts. Justifica la resposta.

1. $\boxed{A = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, \forall p \in \mathbb{Q}\,(p \cdot x = -x)\}.}$

$A = \{0\}$. Per una banda, $0 \in A$ ja que $p \cdot 0 = 0 = -0$ per qualsevol $p \in \mathbb{Q}$. I si $a \in A$, aleshores hauria de ser $p \cdot a = -a$ *per a tot* $p \in \mathbb{Q}$, i en particular per a $p = 0$ tindríem $0 \cdot a = -a$, i això només pot passar si $a = 0$; dit d'una altra manera, si $a \neq 0$, podríem dividir la igualtat $p \cdot a = -a$ per a, i resultaria que $p = -1$ *per tot* $p \in \mathbb{Q}$, cosa absurda.

2. $\boxed{B = \{x \in \mathbb{N} \,:\, \exists m \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N}\,(k \neq 0 \to k \cdot x < m)\}.}$

$B = \{0\}$. La fórmula diu que $x \in B$ quan x és natural i *existeix una cota superior <u>de tots</u> els seus múltiples no nuls.* $0 \in B$ ja que per qualsevol k natural positiu, $k \cdot 0 = 0 < 1$, per tant $m = 1$ és una de les cotes demanades. Però cap natural $n \neq 0$ pot pertànyer a B, perquè donat un natural qualsevol m sempre existeix un múltiple de n que és més gran que m, per tant cap m pot ser cota superior de *tots* els múltiples no nuls de n.

Problema 5 (b).

Escriu amb símbols la següent propietat:

> *L'arrel quadrada de qualsevol nombre real comprès estrictament entre 0 i 1 està compresa estrictament entre 0 i 1 i és més gran que el propi nombre.*

Pots usar només els símbols $\forall$, $\exists$, (,) , $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $=$, $\in$, $\cdot$, $<$, $\leqslant$, $\mathbb{R}$.

Vàries solucions correctes:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\Big(\big((0 < x < 1) \wedge (x = y \cdot y) \wedge (0 \leqslant y)\big) \rightarrow \big((0 < y < 1) \wedge (x < y)\big)\Big)$$

i també

$$\forall x\Bigg(\big((x \in \mathbb{R}) \wedge (0 < x) \wedge (x < 1)\big) \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \forall y\Big(\big((y \in \mathbb{R}) \wedge (x = y \cdot y) \wedge (0 \leqslant y)\big) \rightarrow \big((0 < y) \wedge (y < 1) \wedge (x < y)\big)\Big)\Bigg)$$

I les mateixes sense tants parèntesis:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\Big(0 < x < 1 \ \wedge\ x = y \cdot y \ \wedge\ 0 \leqslant y \ \rightarrow\ 0 < y < 1 \ \wedge\ x < y\Big)$$

$$\forall x\Big(x \in \mathbb{R} \ \wedge\ 0 < x \ \wedge\ x < 1 \ \rightarrow\ \forall y\Big(y \in \mathbb{R} \ \wedge\ x = y \cdot y \ \wedge\ 0 \leqslant y \ \rightarrow\ 0 < y \ \wedge\ y < 1 \ \wedge\ x < y\Big)\Big)$$

> *Observació*: Cal especificar $0 \leqslant y$ per tal que y sigui l'arrel quadrada de x, que sempre es pren positiva. També hi ha un y negatiu tal que $x = y \cdot y$, però no és *l'arrel quadrada* de x.

Si volem expressar que l'arrel quadrada existeix (encara que l'enunciat no ho diu explícitament), es pot escriure:

$$\forall x\Big(x \in \mathbb{R} \ \wedge\ 0 < x \ \wedge\ x < 1 \ \rightarrow\ \exists y\Big(y \in \mathbb{R} \ \wedge\ x = y \cdot y \ \wedge\ 0 < y \ \wedge\ y < 1 \ \wedge\ x < y\Big)\Big)$$