DEMOSTRACIONES

7 de Octubre de 2020

Introducción

En Matemáticas, una de las actividades más importantes consiste en demostrar proposiciones, es decir, a partir de unas afirmaciones iniciales que tomamos como hipótesis, deducir mediante métodos de razonamiento aceptados, otras afirmaciones más complejas.

En la clase de hoy, empezaremos entonces a estudiar los métodos de demostración que se utilizan habitualmente en Matemáticas.

Las proposiciones matemáticas son normalmente enunciados condicionales de la forma $P \Rightarrow Q$, donde P normalmente es una conjunción de enunciados a los que llamamos hipótesis o premisas y Q es la tesis o conclusión de la proposición.

Hay también proposiciones matemáticas que no tienen hipótesis, por ejemplo, la proposición "$\sqrt{2}$ no es un número racional". En este caso, hay que demostrar la proposición utilizando propiedades básicas ya sabidas de los números racionales.

Ejemplos

1. “Si f y g son funciones reales continuas, entonces $f+g$ es una función real continua.”

Hipótesis: f es una función real continua y g es una función real continua.

Conclusión: $f+g$ es una función real continua

2. “La suma de dos números enteros impares es un número entero par”

Hipótesis: m es un número entero impar y n es un número entero impar.

Conclusión: $m+n$ es un número entero par.

3. “Si T es un triángulo rectángulo cuyos lados tienen longitudes a, b y c donde c es la longitud de la hipotenusa, entonces $a^2+b^2=c^2$”

Hipótesis: T es un triángulo rectángulo, a,b son las longitudes de los catetos y c es la longitud de la hipotenusa.

Conclusión: $a^2+b^2=c^2$.

Observación

A partir de ahora, nos centraremos en proposiciones matemáticas que sabemos que son verdaderas, es decir, en proposiciones para las cuales hay una demostración.

Cuando hagamos una demostración de una proposición matemática, utilizaremos el símbolo $\square$ para indicar el final de la demostración.

Demostraciones directas

Queremos demostrar un enunciado condicional $A \Rightarrow B$, donde A y B son proposiciones matemáticas. Tenemos que deducir entonces proposiciones intermedias $C_1, \ldots, C_n$ de manera que

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow C_n \Rightarrow B.$$

Antes de hacer la demostración, tenemos que entender bien el enunciado, entendiendo claramente los conceptos que aparecen en A y en B.

Veamos a continuación algunos ejemplos.

Proposición 1

La suma de dos números enteros impares es un número entero par.

Para demostrar esta proposición, tenemos que tener claro qué significa que un número sea par y que un número sea impar. Consideramos entonces las siguientes definiciones.

Sea n un número entero. Decimos que n es par, si existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Y decimos que n es impar, si existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$.

Demostración de la Proposición 1

Sean n y m números enteros impares. Como n es impar, tenemos que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$. Análogamente, como m es impar, existe un $l \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2l + 1$. Por tanto,

$$n + m = 2k + 1 + 2l + 1 = 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1).$$

Sea $r = k + l + 1$. Como k y l son números enteros, r es también un número entero. Tenemos entonces que $n + m = 2r$ y r es un número entero. Por tanto, $n + m$ es par. $\square$

Observación

Obsérvese que en la demostración de la Proposición 1 hemos utilizado "hipótesis implícitas", como son la propiedad conmutativa de la suma en los enteros, la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en los enteros y el hecho de que la suma de enteros es también un entero.

Las "hipótesis implícitas" se utilizan habitualmente en las demostraciones de proposiciones matemáticas y corresponden a propiedades básicas conocidas de los números u objetos matemáticos que estemos considerando.

Ejemplos

Las siguientes proposiciones se demuestran de manera análoga a la Proposición 1.

Proposición 2

La suma de dos números enteros pares es un número par.

Proposición 3

La suma de un número entero par y un número entero impar es un número impar.

Asimismo, se puede demostrar el siguiente enunciado.

Proposición 4

El cubo de un número impar es impar.

Demostración de la Proposición 4

Sea x un número impar. Por tanto, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2k + 1$. Tenemos entonces:

$$(2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k + 3k) + 1.$$

Sea $l = 4k^3 + 6k + 3k$. Como k es un número entero, l es también un número entero. Entonces, como $x^3 = 2l + 1$, deducimos que x^3 es impar. $\square$

Obsérvese que en la demostración de la Proposición 4, hemos utilizado la fórmula que conocemos para calcular el cubo de la suma de dos números a y b:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Ejemplos

Para demostrar la siguiente proposición, necesitamos definir el siguiente concepto.

Un entero a es un divisor de un entero b, si b es múltiplo de a, es decir si existe un entero c tal que $b = ac$.

Si a es un divisor de b, escribiremos $a|b$.

Proposición 5

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.

Demostración de la Proposición 5

Como $a|b$, existe un $q_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot q_1$. Y como $b|c$, existe un $q_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $c = b \cdot q_2$

Por tanto,

$$c = b \cdot q_2 = a \cdot q_1 \cdot q_2.$$

Sea $q = q_1 \cdot q_2$. Como q_1 y q_2 son números enteros, q es también un número entero. Por tanto, como $c = a \cdot q$, deducimos que $a|c$.
$\square$

Demostraciones por contrarrecíproco o contraposición

Se basa en la equivalencia lógica $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$, que es una de las leyes lógicas que vimos en la penúltima clase. Así pues, si P y Q son proposiciones matemáticas, demostrar por contraposición que $P \Rightarrow Q$ significa demostrar que $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

En muchas demostraciones matemáticas es más fácil demostrar que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ en lugar de demostrar de manera directa que $P \Rightarrow Q$.

A continuación, veremos algunos ejemplos de demostraciones por contraposición.

Proposición 6

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Si n^2 es par, entonces n es par.

En este caso, tenemos

$$P = n^2 \text{ es par y } Q = n \text{ es par.}$$

Para demostrar entonces $P \Rightarrow Q$ por contraposición, tenemos que demostrar que $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Supongamos entonces que Q es falso. Por tanto, n es impar. Así pues, existe un entero k tal que $n = 2k + 1$. Tenemos entonces:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Sea $l = 2k^2 + 2k$. Como k es un número entero, l es también un entero. Entonces, como $n^2 = 2l + 1$, deducimos que n^2 es impar. Por tanto, P es falso. Así pues, hemos demostrado $\neg Q \Rightarrow \neg P$. $\square$

Proposición 7

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Si $7n + 4$ es par, entonces n es par.

En este caso, tenemos

$$P = 7n \text{ es par y } Q = n \text{ es par.}$$

Para demostrar entonces $P \Rightarrow Q$ por contraposición, tenemos que demostrar que $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Supongamos entonces que Q es falso. Por tanto, n es impar. Así pues, existe un entero t tal que $n = 2t + 1$. Tenemos entonces:

$$7n + 4 = 7(2t + 1) + 4 = 14t + 11 = 14t + 10 + 1 = 2(7t + 5) + 1.$$

Sea $p = 7t + 5$. Como t es un número entero, p es también un entero. Entonces, como $7n + 4 = 2p + 1$, deducimos que $7n + 4$ es impar. Por tanto, P es falso. Así pues, hemos demostrado $\neg Q \Rightarrow \neg P$. $\square$

Veamos a continuación otro ejemplo de una demostración por contraposición.

Proposición 8

Sean $m, n \in \mathbb{Z}$. Si m y n son consecutivos, entonces $m + n$ es impar.

En este caso, tenemos

$P = m$ y n son números enteros consecutivos,
$Q = m + n$ es impar.

Para demostrar entonces $P \Rightarrow Q$ por contraposición, tenemos que demostrar que $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Supongamos entonces que Q es falso. Por tanto, $m + n$ es par. Así pues, existe un entero k tal que $m + n = 2k$. Por tanto, $m = 2k - n$. Así pues, tenemos:

$$m - n = (2k - n) - n = 2k - 2n = 2(k - n).$$

Demostración de la Proposición 8

Sea $l = k - n$. Entonces, como l es un número entero y $m - n = 2l$, deducimos que $m - n$ es un número par, y por tanto m y n no son consecutivos.

Por consiguiente, P es falso. Así pues, hemos demostrado $\neg Q \Rightarrow \neg P$. $\square$

Veamos a continuación otro método de demostración.

Demostraciones por reducción al absurdo

El método de reducción al absurdo consiste en negar la proposición que se quiere demostrar y llegar entonces a una contradicción. Este método está basado en la ley de reducción al absurdo que vimos en la parte de Lógica y Razonamientos, la cual afirma que para toda proposición P, $(\neg P \to 0) \equiv P$.

Así pues, si queremos demostrar una proposición P por reducción al absurdo, tendremos que suponer que P es falsa y llegar entonces a una contradicción.

Veamos a continuación algunos ejemplos

Proposición 9

En una partida de ajedrez, cada peón se mueve a lo sumo 6 veces.

Supongamos, por el contrario, que hemos movido un péon 7 o más veces.

Tras el primer movimiento, el peón se encuentra al menos en la tercera fila del tablero.

Tras el segundo movimiento, el peón se encuentra al menos en la cuarta fila del tablero.

⋮

⋮

Tras el séptimo movimiento, el peón se encuentra fuera del tablero.

Hemos llegado entonces a una situación absurda. Por tanto, se cumple la proposición. □

Proposición 10

$\sqrt{2}$ es un número irracional.

Supongamos, por el contrario, que $\sqrt{2}$ es un número racional. Entonces, podemos expresar $\sqrt{2}$ como una fracción irreducible, es decir, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m > 0$, $\sqrt{2} = n/m$ y el máximo común divisor de n y m es 1. Por tanto, $2 = n^2/m^2$, y por consiguiente:

$$n^2 = 2m^2.$$

Así pues, n^2 es par. Entonces, por la Proposición 6, n es par. Por tanto, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$. Así pues:

$$n^2 = 4k^2 = 2m^2.$$

Demostración de la Proposición 10

Por consiguiente, $m^2 = 2k^2$. Como $k^2 \in \mathbb{N}$, tenemos que m^2 es par. Aplicando entonces de nuevo la Proposición 6, deducimos que m es par.

Así pues, hemos demostrado que m y n son pares. Por tanto, 2 es un divisor de m y n, lo cual contradice que la fracción n/m es irreducible. Hemos llegado entonces a una contradicción. Por tanto, $\sqrt{2}$ es un número irracional. $\square$