MATRIUS I VECTORS
Curs 2020-21

Teresa Crespo

10 de setembre de 2020

Índex

0 Preliminars

Si A i B són conjunts, $A \setminus B$ indica el conjunt dels elements de A que no són de B.

El conjunt finit format pels elements $a_1, \dots, a_n$ s'indica per $\{a_1, \dots, a_n\}$. Indicarem per $(a_1, \dots, a_n)$ el conjunt ordenat o n-pla format per aquests elements. Tenim doncs $\{a_1, \dots, a_n\} = \{b_1, \dots, b_n\}$ si, i només si, per a cada $a_i, 1 \leq i \leq n$, existeix b_j tal que $a_i = b_j$. En canvi, $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)$ si, i només si $a_i = b_i$ per a tot i, $1 \leq i \leq n$.

Si E_1 i E_2 són conjunts, una aplicació f de E_1 en E_2, que escrivim $f : E_1 \to E_2$, és una regla que fa correspondre a cada element x de E_1 un element ben determinat de E_2, que escrivim $f(x)$ i diem *imatge de x per f*. Si, per a $y \in E_2$, existeix $x \in E_1$ tal que $f(x) = y$, diem que x és *antiimatge de y per f*. Donada una aplicació $f : E_1 \to E_2$, un element de E_2 pot tenir més d'una antiimatge per f, exactament una o bé cap.

Dues aplicacions f i g de E_1 en E_2 són iguals si, i només si, $f(x) = g(x)$, per a tot $x \in E_1$.

Si E_1, E_2, E_3 són conjunts i $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to E_3$ són aplicacions, la *composició de f i g*, que denotem $g \circ f$ és l'aplicació de E_1 en E_3 definida per $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, per a tot $x \in E_1$.

Si E és un conjunt, l'*aplicació identitat* de E, denotada per Id_E (o Id si no hi ha possibilitat de confusió), és l'aplicació de E en E tal que $\mathrm{Id}(x) = x$, per a tot $x \in E$.

Si $f : E_1 \to E_2$ és una aplicació i F_1 és un subconjunt de E_1, denotem per $f(F_1)$ el conjunt de les imatges per f de tots els elements de F_1. Es defineix *la imatge de f* com el conjunt $f(E_1)$. Denotem la imatge de f per $\operatorname{Im} f$. Diem que f és *exhautiva* si $\operatorname{Im} f = E_2$. Equivalentment, f és exhautiva si, i només si, tot element de E_2 té al menys una antiimatge per f.

Una aplicació $f : E_1 \to E_2$ es diu que és *injectiva* si elements diferents de E_1 tenen sempre imatges diferents per f. Equivalentment, f és injectiva si, i només si, tot element de E_2 té com a màxim una antiimatge per f.

Una aplicació $f : E_1 \to E_2$ és *bijectiva* si és injectiva i exhautiva. Equivalentment, f és bijectiva si, i només si, tot element de E_2 té exactement una antiimatge per f. Si f és bijectiva, podem definir l'aplicació inversa $f^{-1} : E_2 \to E_1$ per $f^{-1}(y) = x$ si, i només si, $f(x) = y$.

Considerem una aplicació $f : E_1 \to E_2$. Si existeix una aplicació $g : E_2 \to E_1$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_{E_1}$, aleshores f és injectiva, ja que, per a $x, y \in E_1$, tenim $f(x) = f(y) \Rightarrow x = g(f(x) = g(f(y) = y$. Si existeix una aplicació

$g : E_2 \to E_1$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_{E_2}$, aleshores f és exhautiva, ja que, per a $y \in E_2$, tenim $y = f(g(y))$, per tant $g(y)$ és antiimatge de y per f. Si existeix una aplicació $g : E_2 \to E_1$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_{E_1}$ i $f \circ g = \mathrm{Id}_{E_2}$, aleshores f és bijectiva i $g = f^{-1}$.

1 Espais vectorials

1.1 Definició d'espai vectorial

Indiquem per $\mathbb{R}$ el conjunt dels nombres reals.

Definició 1.1.1. Un *espai vectorial real* (o $\mathbb{R}$-espai vectorial) és un conjunt E, els elements del qual anomenem vectors, dotat de dues operacions que compleixen certes propietats. Aquestes operacions són

- una operació anomenada *suma* que assigna a cada parell de vectors u, v de E un vector de E que escrivim $u + v$ i anomenem suma de u i v.

- una operació anomenada *producte per escalars* que assigna a un vector v de E i un nombre real a un vector de E que escrivim av i anomenem producte del vector v per l'escalar a.

Les propietats que s'han de complir són les quatre propietats següents de la suma:

1) *associativitat:* $(u + v) + w = u + (v + w)$ per a $u, v, w \in E$ qualssevol;

2) *commutativitat:* $u + v = v + u$ per a $u, v \in E$ qualssevol;

3) *existència d'element neutre:* existeix un element de E, que anomenem *vector zero* i denotem per $\vec{0}$ (o $\vec{0}_E$ si volem especificar que és el vector zero de l'espai vectorial E) que compleix $v + \vec{0} = \vec{0} + v = v$, per a tot $v \in E$.

4) *existència d'oposat:* per a tot $v \in E$, existeix un vector de E, que denotem per $-v$, que compleix $v + (-v) = (-v) + v = \vec{0}$. Anomenem $-v$ l'oposat de v.

I les quatre propietats següents del producte per escalars:

5) *distributivitat respecte de la suma de E:* $a(u + v) = au + av$, per a $a \in \mathbb{R}; u, v \in E$, qualssevol;

6) *distributivitat respecte de la suma de $\mathbb{R}$:* $(a + b)v = av + bv$, per a $a, b \in \mathbb{R}; v \in E$, qualssevol;

7) $(ab)v = a(bv)$, per a $a, b \in \mathbb{R}; v \in E$, qualssevol;

8) $1v = v$, per a tot $v \in E$.

Si v és un vector de l'espai vectorial E i a un nombre real, diem que el vector av és un *múltiple* del vector v.

Exemples 1.1.2. 1) Podem considerar l'*espai vectorial trivial* que conté només el vector $\overrightarrow{0}$.

2) $\mathbb{R}$ és espai vectorial real, amb la suma i el producte de nombres reals.

3) *L'espai vectorial* $\mathbb{R}^n$*:* El conjunt $\mathbb{R}^n$ d'n-ples d'elements de $\mathbb{R}$, és a dir

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

és $\mathbb{R}$-espai vectorial amb les operacions

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \tag{1.1.1}$$

per a $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$;

$$a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n), \tag{1.1.2}$$

per a $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$.

Comprovem que $\mathbb{R}^n$ amb aquestes operacions compleix les vuit propietats de la definició d'espai vectorial.

1) Per a $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, qualssevol, tenim

$$\begin{aligned}
&((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) + (z_1, \dots, z_n) \\
&= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) + (z_1, \dots, z_n) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\
&= (x_1, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) \\
&= (x_1, \dots, x_n) + ((y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n)),
\end{aligned}$$

on, a la tercera igualtat usem l'associativitat de la suma de nombres reals.

2) Per a $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, qualssevol tenim

$$\begin{aligned}&(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\\&=(y_1+x_1,\ldots,y_n+x_n)=(y_1,\ldots,y_n)+(x_1,\ldots,x_n),\end{aligned}$$

on, a la segona igualtat, usem la commutativitat de la suma de nombres reals.

3) Sigui $\vec{0}=(0,\ldots,0)$, és a dir, la n-pla amb totes les components iguals a 0. Per a $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, qualsevol, tenim

$$\begin{aligned}(x_1,\ldots,x_n)+(0,\ldots,0)&=(x_1+0,\ldots,x_n+0)=(x_1,\ldots,x_n),\\(0,\ldots,0)+(x_1,\ldots,x_n)&=(0+x_1,\ldots,0+x_n)=(x_1,\ldots,x_n),\end{aligned}$$

on hem usat que 0 és el neutre de la suma de nombres reals. Tenim doncs que $(0,\ldots,0)$ és element neutre per a la suma de $\mathbb{R}^n$.

4) Per a $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, qualsevol, considerem $(-x_1,\ldots,-x_n)$. Tenim

$$\begin{aligned}(x_1,\ldots,x_n)+(-x_1,\ldots,-x_n)&=(x_1-x_1,\ldots,x_n-x_n)=(0,\ldots,0),\\(-x_1,\ldots,-x_n)+(x_1,\ldots,x_n)&=(-x_1+x_1,\ldots,-x_n+x_n)=(0,\ldots,0).\end{aligned}$$

Tenim doncs que tot element de $\mathbb{R}^n$ té oposat.

5) Per a $a\in\mathbb{R}$, $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, qualssevol tenim

$$\begin{array}{l}a((x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n))=a(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\\=(a(x_1+y_1),\ldots,a(x_n+y_n))=(ax_1+ay_1,\ldots,ax_n+ay_n)\\=(ax_1,\ldots,ax_n)+(ay_1,\ldots,ay_n)=a(x_1,\ldots,x_n)+a(y_1,\ldots,y_n)\end{array},$$

on, a la tercera igualtat, hem usat la distributivitat del producte respecte de la suma a $\mathbb{R}$.

6) Per a $a,b\in\mathbb{R}$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, qualssevol tenim

$$\begin{array}{l}(a+b)(x_1,\ldots,x_n)=((a+b)x_1,\ldots,(a+b)x_n)\\=(ax_1+bx_1,\ldots,ax_n+bx_n)\\=(ax_1,\ldots,ax_n)+(bx_1,\ldots,bx_n)\\=a(x_1,\ldots,x_n)+b(x_1,\ldots,x_n)\end{array},$$

on, a la segona igualtat, hem usat la distributivitat del producte respecte de la suma a $\mathbb{R}$.

7) Per a $a, b \in \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, qualssevol tenim

$$\begin{aligned}(ab)(x_1, \ldots, x_n) &= ((ab)x_1, \ldots, (ab)x_n) = (a(bx_1), \ldots, a(bx_n)) \\ &= a(bx_1, \ldots, bx_n) = a(b(x_1, \ldots, x_n)),\end{aligned}$$

on, a la segona igualtat, hem usat l'associativitat del producte de nombres reals.

8) Per a $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, qualsevol tenim,

$$1(x_1, \ldots, x_n) = (1x_1, \ldots, 1x_n) = (x_1, \ldots, x_n),$$

on, a la segona igualtat, hem usat que 1 és l'element neutre del producte de nombres reals.

4) *L'espai vectorial de les matrius:* Si m i n són enters positius, una *matriu (real) de m files i n columnes* o *matriu (real) $m \times n$* està formada per mn nombres reals, anomenats *coeficients de la matriu* disposats en m files i n columnes. Direm que la matriu és *quadrada* si té el mateix nombre de files que de columnes. Usarem un superíndex i un subíndex per indicar la fila i la columna, respectivament, d'un coeficient de la matriu. És a dir, a^i_j serà el coeficient de la fila i i la columna j. La matriu M de m files i n columnes amb coeficients a^i_j es representa de les dues maneres següents.

$$M = \begin{pmatrix} a^1_1 & \ldots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m_1 & \ldots & a^m_n \end{pmatrix} = \left(a^i_j\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}.$$

Posem $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, o simplement $\mathcal{M}_{m\times n}$ el conjunt de matrius reals de m files i n columnes. En aquest conjunt, definim una suma per

$$\left(a^i_j\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} + \left(b^i_j\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \left(a^i_j + b^i_j\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, \qquad (1.1.3)$$

és a dir, cada coeficient de la matriu suma s'obté sumant els coeficients en les mateixes fila i columna de les dues matrius que sumem, i un producte per escalars per

$$c\left(a^i_j\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = \left(ca^i_j\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}, \tag{1.1.4}$$

per a $c \in \mathbb{R}$. Multiplicar una matriu per un escalar és doncs multiplicar cada coeficient de la matriu per aquest escalar. Es pot comprovar que $\mathcal{M}_{m\times n}$ amb aquestes dues operacions és un espai vectorial. L'element neutre de la suma és la matriu zero, és a dir la matriu que té tots els coeficients iguals a 0.

5) Posem $\mathbb{R}[X]$ el conjunt de polinomis en la variable X i amb coeficients reals, és a dir, expressions del tipus

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0,$$

on $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ són nombres reals i n és qualsevol enter no negatiu. Amb la suma habitual de polinomis i el producte d'un polinomi per un nombre real, $\mathbb{R}[X]$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial.

6) *L'espai vectorial de les equacions lineals:* Una equació lineal en les incògnites $x^1, x^2, \ldots, x^n$ (que escrivim amb superíndexs) és una equació de la forma

$$a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = b,$$

on $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ són nombres reals. Els nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es diuen coeficients de l'equació i el nombre b es diu terme independent de l'equació. En el conjunt de les equacions lineals en les incògnites $x^1, x^2, \ldots, x^n$ podem definir una suma i un producte per escalars. La suma de les equacions

$$f_1 : a^1_1x^1 + a^1_2x^2 + \cdots + a^1_nx^n = b^1 \text{ i } f_2 : a^2_1x^1 + a^2_2x^2 + \cdots + a^2_nx^n = b^2,$$

on escrivim cada coeficient amb un subíndex, que indica de quina incògnita és coeficient, i un superíndex, que indica a quina equació, i els termes independents amb un un superíndex, que indica de quina equació ho són, és l'equació

$$f_1 + f_2 : (a^1_1 + a^2_1)x^1 + (a^1_2 + a^2_2)x^2 + \cdots + (a^1_n + a^2_n)x^n = b^1 + b^2.$$

El producte de l'equació f_1 pel nombre real c és l'equació

$$cf_1 : ca_1^1x^1 + ca_2^1x^2 + \cdots + ca_n^1x^n = cb^1.$$

El conjunt de les equacions lineals en les incògnites $x^1, x^2, \ldots, x^n$ amb aquestes operacions és un espai vectorial.

7) *L'espai vectorial de les funcions reals de variable real:* En el conjunt de les funcions reals de variable real, definim la suma $f+g$ de les funcions f, g i el producte per escalars d'una funció f per un nombre real c per

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x),$$

on les operacions dels termes de la dreta de les igualtats són la suma i el producte de nombres reals. Amb aquestes operacions, el conjunt de les funcions reals de variable real és un espai vectorial.

A la definició d'espai vectorial es demana només l'existència del vector zero i del vector oposat de cada vector. A la proposició següent, veiem que són únics.

Proposició 1.1.3. *El vector zero d'un espai vectorial E és únic. Si v és un vector de E, l'oposat de v és únic.*

Demostració. Si $\vec{0}'$ compleix també la propietat de l'element neutre, tenim $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}' = \vec{0}'$, on per a la primera igualtat usem que $\vec{0}'$ és element neutre per a la suma i per a la segona igualtat que ho és $\vec{0}$. Si w compleix també la propietat de ser oposat de v, tenim $w = w + \vec{0} = w + (v + (-v)) = (w+v) + (-v) = \vec{0} + (-v) = -v$, on per a la primera igualtat usem que $\vec{0}$ és element neutre, per a la segona, que $-v$ és oposat de v, per a la tercera l'associativitat de la suma, per a la quarta que w és oposat de v i, finalment, per a la cinquena que $\vec{0}$ és element neutre. $\square$

La proposició següent ens dóna propietats dels espais vectorials que es dedueixen fàcilment de la definició.

Proposició 1.1.4. *Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial, $u, v, w \in E, a \in \mathbb{R}$. Es compleix*

a) $u + w = v + w \Rightarrow u = v$ *(*llei de simplificació*);*

b) $0v = \vec{0}$;

c) $a\vec{0} = \vec{0}$;

d) $av = \vec{0} \Rightarrow a = 0$ *o* $v = \vec{0}$;

e) $(-1)v = -v$.

Demostració. a) Si $u + w = v + w$, tenim $u = u + \vec{0} = u + (w + (-w)) = (u + w) + (-w) = (v + w) + (-w) = v + (w + (-w)) = v + \vec{0} = v$, usant les propietats 3), 4) i 1) de la definició d'espai vectorial.

b) Tenim $0 = 0 + 0$ i, usant la propietat 6), $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Obtenim doncs $0v + \vec{0} = 0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$ que implica $0v = \vec{0}$, per a).

c) Tenim $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$ i, usant la propietat 5), $a(\vec{0} + \vec{0}) = a\vec{0} + a\vec{0}$. Obtenim doncs $a\vec{0} + \vec{0} = a\vec{0} = a(\vec{0} + \vec{0}) = a\vec{0} + a\vec{0}$ que implica $a\vec{0} = \vec{0}$, per a).

d) Si $av = \vec{0}$ i $a \neq 0$, aleshores a té invers i tenim $a^{-1}(av) = a^{-1}\vec{0} = \vec{0}$, per l'apartat c), i, d'altra banda $a^{-1}(av) = (a^{-1}a)v = 1v = v$, per la propietat 8).

e) $(-1)v + v = (-1)v + 1v = (-1 + 1)v = 0v = \vec{0} \Rightarrow (-1)v = -v$, per la unicitat de l'oposat.

□

1.2 Sistemes d'equacions lineals

Un sistema de m equacions lineals en les incògnites $x^1, x^2, \ldots, x^n$ és un conjunt d'equacions de la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \cdots + a^1_n x^n & = & b^1 \\ a^1_2 x^1 + a^2_2 x^2 + \cdots + a^2_n x^n & = & b^2 \\ & \vdots & \\ a^m_1 x^1 + a^m_2 x^2 + \cdots + a^m_n x^n & = & b^m \end{array} \right. \tag{1.2.1}$$

on $a^i_j, b^i, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ són nombres reals. Observem que a^i_j és el coeficient de la incògnita x^j en l'equació i-èsima. Diem que b^i és el *terme independent* de l'equació i-èsima. Si tots els seus termes independents són nuls, el sistema s'anomena *homogeni*. Una solució del sistema és una n-pla

$c^1, c^2, \ldots, c^n$ de nombres reals que compleixen les m equacions del sistema, és a dir, tal que són certes les m igualtats

$$a^i_1 c^1 + a^i_2 c^2 + \cdots + a^i_n c^n = b^i, 1 \le i \le m.$$

Diem *matriu del sistema* (1.2.1) la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ & \vdots & \vdots & \\ a^m_1 & a^m_2 & \ldots & a^m_n \end{pmatrix}$$

i *matriu ampliada del sistema* (1.2.1) la matriu

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n & b^1 \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n & b^2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a^m_1 & a^m_2 & \ldots & a^m_n & b^m \end{pmatrix}. \tag{1.2.2}$$

Diem que dos sistemes d'equacions lineals són *equivalents* si tenen les mateixes solucions. Veiem ara operacions bàsiques que transformen un sistema donat en un d'equivalent. Considerem el sistema (1.2.1) i denotem per f_i la fila i-èsima de la seva matriu ampliada, és a dir

$$f_i = \begin{pmatrix} a^i_1 & a^i_2 & \ldots & a^i_n & b^i \end{pmatrix}.$$

Lema 1.2.1. *1) Un sistema donat d'equacions lineals i el que resulta d'intercanviar dues files de la seva matriu ampliada tenen exactament les mateixes solucions.*

2) Un sistema donat d'equacions lineals i el que resulta de multiplicar una fila de la seva matriu ampliada per un nombre **no nul** *tenen exactament les mateixes solucions.*

3) Un sistema donat d'equacions lineals i el que resulta de sumar a una fila de la seva matriu ampliada un múltiple d'una altra fila tenen exactament les mateixes solucions.

Demostració. Considerem el sistema (1.2.1).
1) Si intercanviem dues equacions és clar que les solucions del sistema no varien.

2) Si multipliquem la fila f_i de la matriu ampliada per $d \neq 0$ i $c^1, c^2, \ldots, c^n$ compleixen l'equació f_i, tenim

$$a_1^i c^1 + a_2^i c^2 + \cdots + a_n^i c^n = b^i \Rightarrow d a_1^i c^1 + d a_2^i c^2 + \cdots + d a_n^i c^n = d b^i,$$

per tant $c^1, c^2, \ldots, c^n$ compleixen l'equació df_i. Com $d \neq 0$, si $c^1, c^2, \ldots, c^n$ compleixen l'equació df_i, aleshores compleixen l'equació $(1/d)df_i = f_i$. Com les altres equacions no varien, obtenim l'apartat 2) del lema.
3) Suposem ara que sumem a la fila f_k de la matriu ampliada df_i, on d és un nombre real. Hem substituit les files f_i, f_k per les files $f_i, f'_k = f_k + df_i$ i hem deixat igual la resta de files. Si $c^1, c^2, \ldots, c^n$ compleixen les equacions corresponents a f_i i f_k tenim

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a_1^i c^1 + a_2^i c^2 + \cdots + a_n^i c^n = b^i \\ a_1^k c^1 + a_2^k c^2 + \cdots + a_n^k c^n = b^k \end{array}\right\} \\ \Rightarrow a_1^k c^1 + a_2^k c^2 + \cdots + a_n^k c^n + d(a_1^i c^1 + a_2^i c^2 + \cdots + a_n^i c^n) = b^k + d b^i \\ \Rightarrow (a_1^k + d a_1^i) c^1 + (a_2^k + d a_2^i) c^2 + \cdots + (a_n^k + d a_n^i) c^n = b^k + d b^i, \end{array}$$

és a dir $c^1, c^2, \ldots, c^n$ compleixen les equacions corresponents a f_i i f'_k. Com $f_k = f'_k - df_i$ tenim també la implicació contrària. Com les equacions restants no han variat, queda provat 3) del lema. $\square$

1.3 Mètode de reducció de Gauss-Jordan

Descrivim ara el mètode de *reducció de Gauss-Jordan* per resoldre un sistema d'equacions lineals. Operarem amb la matriu ampliada del sistema (1.2.2). Les operacions bàsiques seran intercanviar dues files o sumar a una fila un múltiple d'una altra. Notem que permutar dues columnes de la matriu del sistema equival a canviar l'ordre de les incògnites. Suposem que no tots els coeficients a_j^i són nuls.

Si és $a_1^1 = 0$, i $a_1^i \neq 0$, per a algun i, intercanviem la primera fila amb la fila i. Si no existeix aquest i i tenim j tal que $a_i^j \neq 0$, intercanviem també la primera columna amb la columna j. Fets eventualment aquests canvis, tenim $a_1^1 \neq 0$. Ara substituim les files $f_i, 2 \leq i \leq m$ per $f'_i = f_i - (a_1^i / a_1^1) f_1$. Els coeficients de la primera columna de la matriu i files 2 a m són ara nuls. Si és $a_2^2 = 0$, i $a_2^i \neq 0$, per a algun i, intercanviem la segona fila amb la fila i. Si no existeix aquest i i tenim $j \geq 2$ tal que $a_i^j \neq 0$, intercanviem també la segona columna amb la columna j. Fets eventualment aquests canvis, tenim $a_2^2 \neq 0$. Ara substituim les files $f_i, 3 \leq i \leq m$ per $f_i' = f_i - (a_2^i/a_2^1)f_2$. Els coeficients de la segona columna de la matriu i files 3 a m són ara nuls. Repetim el procés fins a obtenir una matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_1^1 & \overline{a}_2^1 & \overline{a}_3^1 & \dots & \overline{a}_r^1 & \dots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & \overline{a}_2^2 & \overline{a}_3^2 & \dots & \overline{a}_r^2 & \dots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{a}_r^r & \dots & \overline{a}_n^r & \overline{b}^r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \overline{b}^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \tag{1.3.1}$$

amb $\overline{a}_i^i \neq 0, 1 \leq i \leq r$, amb $r \leq n$. Aquesta matriu és matriu ampliada del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{a}_1^1 x^1 + \overline{a}_2^1 x^2 + \overline{a}_3^1 x^3 + \cdots + \overline{a}_r^1 x^r + \cdots + \overline{a}_n^1 x^n & = & \overline{b}^1 \\ \overline{a}_2^2 x^2 + \overline{a}_3^2 x^3 + \cdots + \overline{a}_r^2 x^r + \cdots + \overline{a}_n^2 x^n & = & \overline{b}^2 \\ & \vdots & \\ \overline{a}_r^r x^r + \cdots + \overline{a}_n^r x^n & = & \overline{b}^r \\ 0 & = & \overline{b}^{r+1} \\ & \vdots & \\ 0 & = & \overline{b}^n \end{array} \right. \tag{1.3.2}$$

que té les mateixes solucions que el sistema (1.2.1) pel lema 1.2.1. Tenim tres casos possibles.

1) Si algun $\overline{b}^i$, amb $r < i \leq m$ és no nul, el sistema no té solucions, ja que l'equació i-èsima és $0 = \overline{b}^i$. Diem que és *incompatible*.

2) Si és $\overline{b}^i = 0$, per a tot i amb $r < i \leq m$, i $r = n$, l'equació n és $\overline{a}_n^n x^n = \overline{b}^n$ que dóna $x^n = \overline{b}^n / \overline{a}_n^n$. Substituint aquest valor en l'equació anterior, obtindrem el valor de x^{n-1}, per ser $\overline{a}_{n-1}^{n-1} \neq 0$. Procedint d'aquesta forma, obtenim un valor per a cada incògnita. El sistema té doncs una única solució. Diem que és *compatible i determinat.*

3) Si és $\overline{b}^i = 0$, per a tot i amb $r < i \leq m$, i $r < n$, de l'equació r podem aillar x^r en funció de $x^{r+1}, \ldots, x^n$, per ser $\overline{a}_r^r \neq 0$. Substituint aquesta expressió en l'equació anterior, obtindrem x^{r-1} en funció de $x^{r+1}, \ldots, x^n$ i, procedint d'aquesta forma, obtenim les incògnites $x^1, \ldots, x^r$ en funció de $x^{r+1}, \ldots, x^n$. Per a qualsevol valor real que donem a $x^{r+1}, \ldots, x^n$, tindrem una solució de l'equació. Anomenem $x^{r+1}, \ldots, x^n$ *variables lliures del sistema.* Diem en aquest cas que el sistema és *compatible i indeterminat amb $n - r$ graus de llibertat.*

Si en el procés de reducció, fem canvis de columna, hem de tenir en compte que aquests corresponen a canviar l'ordre de les incògnites quan escrivim les solucions del sistema, si és compatible.

Exemples 1.3.1. 1) Considerem el sistema d'equacions lineals

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y + 3z & = & 1 \\ x + 2y - z & = & 1 \\ x - y + 4z & = & 1 \end{array} \right.$$

Intercanviem la primera equació amb la segona, escrivim la matriu ampliada del sistema i fem reducció.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema donat és equivalent al que té com a matriu ampliada la matriu reduïda que hem obtingut. La tercera equació és $0 = 1$. Per tant el sistema és incompatible.

2) Considerem ara el sistema d'equacions lineals

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y + 3z & = & 1 \\ x + 2y - z & = & 1 \\ x - y + 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

Intercanviem la primera equació amb la segona, escrivim la matriu ampliada del sistema i fem reducció.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema donat és equivalent al sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 1 \\ -3y + 5z & = & -1 \end{array} \right.$$

De la segona equació obtenim $y = (5z+1)/3$ i, substituint a la primera $x = -2y + z + 1 = -2((5z+1)/3) + z + 1 = (-7z+1)/3$. Tenim doncs infinites solucions, dependent del paràmetre z. El sistema és compatible i indeterminat amb 1 grau de llibertat.

3) Considerem ara el sistema d'equacions lineals

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y + 3z & = & 1 \\ 3x - 2y - z & = & 3 \\ 5x - 2y + 4z & = & 2 \end{array} \right.$$

Escrivim la matriu ampliada del sistema i fem reducció. En aquest exemple intercanviarem columnes. Escrivirem la incògnita corresponent a cada columna de coeficients per recordar el canvi de columna que fem.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y & x & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y & x & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y & x & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

El sistema donat és equivalent al sistema

$$\begin{cases} -y+2x+3z &= 1 \\ -x-7z &= 1 \\ -9z &= 1 \end{cases}$$

De la tercera equació obtenim $z=-1/9$, substituint a la segona, $x=-7z-1=-2/9$ i, substituint a la primera, $y=2x+3z-1=-16/9$. Tenim doncs una única solució $(x,y,z)=(-2/9,-16/9,-1/9)$. El sistema és compatible i determinat.

1.4 Reducció completa

En resoldre un sistema d'equacions lineals, quan arribem a la matriu reduïda (1.3.1), si es compleix $\overline{b}^i=0$, per a tot i amb $r<i\leq m$, és a dir si el sistema és compatible, podem seguir reduint la matriu. Primer treiem les files $r+1$ a m, és a dir les files amb tots els seus coeficients nuls. Ara restem $(\overline{a}^i_r/\overline{a}^r_r)f_r$ a la fila $f_i, 1\leq i\leq r-1$; fet això, a la columna r, l'unic coeficient no nul és $\overline{a}^r_r$. Ara restem $(\overline{a}^i_{r-1}/\overline{a}^{r-1}_{r-1})f_{r-1}$ a la fila $f_i, 1\leq i\leq r-2$; fet això, a la columna $r-1$, l'unic coeficient no nul és $\overline{a}^{r-1}_{r-1}$. Seguim el procés fins que a la columna j, l'únic coeficient no nul és $\overline{a}^j_j, 1\leq j\leq r$. Finalment, dividim la fila i per $\overline{a}^i_i$, per a $1\leq i\leq r$. Queda una matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}^1_{r+1} & \dots & \tilde{a}^1_n & \tilde{b}^1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}^2_{r+1} & \dots & \tilde{a}^2_n & \tilde{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}^r_{r+1} & \dots & \tilde{a}^r_n & \tilde{b}^r \end{pmatrix}. \tag{1.4.1}$$

El sistema corresponent té les mateixes solucions que el sistema (1.2.1) pel lema 1.2.1 i obtenim les solucions

$$\begin{aligned} x^1 &= \tilde{b}^1-\tilde{a}^1_{r+1}x^{r+1}-\dots-\tilde{a}^1_n x^n \\ x^2 &= \tilde{b}^2-\tilde{a}^2_{r+1}x^{r+1}-\dots-\tilde{a}^2_n x^n \\ &\vdots \\ x^r &= \tilde{b}^r-\tilde{a}^r_{r+1}x^{r+1}-\dots-\tilde{a}^r_n x^n \end{aligned}$$

Exemples 1.4.1. 1) Considerem de nou el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} 2x+y+3z &= 1 \\ x+2y-z &= 1 \\ x-y+4z &= 0 \end{cases}$$

Escrivim la matriu ampliada del sistema i fem ara reducció completa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -5/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Obtenim les solucions $x = 1/3 - (7/3)z, y = 1/3 + (5/3)z$.

2) Considerem ara el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} 2x+y+3z &= 1 \\ x+2y-z &= 1 \\ x+y+4z &= 0 \end{cases}$$

Escrivim la matriu ampliada del sistema i fem reducció completa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Obtenim la solució $x = 4/5, y = 0, z = -1/5$.

1.5 Els nombres complexos

En el conjunt dels nombres reals, un nombre real negatiu no té arrels quadrades. Per tant una equació quadràtica $X^2 + bX + c = 0$ amb $b^2 - 4c < 0$, no té solucions reals. En aquesta secció construim un conjunt de nombres, anomenats *nombres complexos*, que conté el conjunt de nombres reals, i hi definim una suma i un producte que tenen propietats anàlogues a les de la suma i el producte de nombres reals. Veurem que un nombre real negatiu té dues arrels quadrades que són nombres complexos.

Considerem

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

L'exemple 3 de 1.1.2 amb $n = 2$ ens dóna que a $\mathbb{R}^2$ tenim definits una suma per

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

i un producte per escalars per

$$c(a, b) = (ca, cb),$$

on $c \in \mathbb{R}$, i que $\mathbb{R}^2$ és espai vectorial amb aquestes operacions. En particular, la suma és associativa, commutativa, amb element neutre $(0, 0)$ i cada vector (a, b) té com a oposat el vector $(-a, -b)$. Volem definir ara el producte de dos elements de $\mathbb{R}^2$ de forma que el resultat sigui també un element de $\mathbb{R}^2$. Posem

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba').$$

Provem ara les propietats d'aquest producte.

- *Associativitat:* Per a $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in \mathbb{R}^2$, qualssevol, es compleix

$$((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) \cdot (a_3, b_3) = (a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)).$$

Demostració. Usant la definició del producte, tenim

$$\begin{aligned}
&((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) \cdot (a_3, b_3) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)) \cdot (a_3, b_3) \\
&= ((a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + b_1a_2)b_3, (a_1a_2 - b_1b_2)b_3 + (a_1b_2 + b_1a_2)a_3) \\
&= (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3),
\end{aligned}$$

on hem usat la distributivitat del producte respecte de la suma de nombres reals per a l'última igualtat. D'altra banda, tenim

$$\begin{aligned}&(a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) \cdot (a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3)\\&= (a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + b_2a_3), a_1(a_2b_3 + b_2a_3) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3))\\&= (a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3 - b_1b_2a_3, a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 - b_1b_2b_3),\end{aligned}$$

on de nou hem usat la distributivitat del producte respecte de la suma de nombres reals per a l'última igualtat. Tenint en compte la commutativitat de la suma de nombres reals veiem que els dos resultats són iguals. □

• *Commutativitat:* Per a $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$, qualssevol, es compleix

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1).$$

Demostració. Usant la definició del producte, tenim

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2).$$

D'altra banda, tenim

$$(a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1) = (a_2a_1 - b_2b_1, a_2b_1 + b_2a_1)$$

Tenint en compte la commutativitat de la suma i la del producte de nombres reals veiem que els dos resultats són iguals. □

• *Existència d'element neutre:* Per a $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ qualsevol, tenim

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b),$$

per tant $(1, 0)$ és element neutre pel producte.
• *Distributivitat respecte de la suma:* Per a $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in \mathbb{R}^2$, qualssevol, es compleix

$$(a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2)) + (a_3, b_3)) = ((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) + ((a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3))$$

Demostració. Usant la definició de la suma i la del producte, tenim

$$\begin{aligned}&(a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) \cdot (a_2 + a_3, b_2 + b_3)\\&= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3), a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3)\\&= (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3, a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3),\end{aligned}$$

on hem usat la distributivitat del producte respecte de la suma de nombres reals per a l'última igualtat. D'altra banda, tenim

$$
\begin{aligned}
&((a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2))+((a_1,b_1)\cdot(a_3,b_3))\\
&=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2)+(a_1a_3-b_1b_3,a_1b_3+b_1a_3)\\
&=(a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3,a_1b_2+b_1a_2+a_1b_3+b_1a_3).
\end{aligned}
$$

Tenint en compte la commutativitat de la suma de nombres reals veiem que els dos resultats són iguals. □

Introduïm ara la notació habitual dels nombres complexos. Identifiquem el nombre real a amb l'element $(a,0)$ de $\mathbb{R}^2$. Fem servir la notació $i:=(0,1)$. Per la definició del producte, tenim $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$. A més, si $b\in\mathbb{R}$, tenim $bi=(b,0)(0,1)=(0,b)$ i $a+bi=(a,0)+(0,b)=(a,b)$. A partir d'ara escrivim $a+bi$ en comptes de (a,b). Amb aquesta notació la suma i el producte que hem definit s'escriuen en la forma següent.

$$
\begin{aligned}
(a+bi)+(a'+b'i) &= (a+a')+(b+b')i\\
(a+bi)\cdot(a'+b'i) &= (aa'-bb')+(ab'+a'b)i.
\end{aligned}
\tag{1.5.1}
$$

Direm *nombre complex* una expressió del tipus $a+bi$ amb a i b nombres reals. Posem $\mathbb{C}$ el conjunt dels nombres complexos amb la suma i el producte donats per (1.5.1). Per a $z=a+bi\in\mathbb{C}$, a és diu *part real* de z, b és diu *part imaginària* de z. Posem $a=\operatorname{Re}z, b=\operatorname{Im}z$. Els nombres reals són els nombres complexos que tenen part imaginària nul·la. Observem que si sumem o multipliquem nombres reals amb les fòrmules (1.5.1) el resultat és el mateix que a $\mathbb{R}$. Diem *nombres imaginaris* els nombres complexos amb part real nul·la.

Si $z=a+bi$, posem $\overline{z}=a-bi$ i diem que $\overline{z}$ és el nombre complex *conjugat* de z. La proposició següent dóna propietats del conjugat d'un nombre complex.

Proposició 1.5.1. *Si $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, es compleix*

1. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
2. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

Demostració. Posem $z_1=a_1+b_1i, z_2=a_2+b_2i$, amb $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$. Tenim $\overline{z_1}=a_1-b_1i,\overline{z_2}=a_2-b_2i$. Ara, com $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$, tenim

$$\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

i, com $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$, tenim

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i = (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

$\square$

Volem veure ara una propietat més del producte de $\mathbb{C}$.

• *Existència d'element invers:* Per a tot $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, existeix z' tal que $z \cdot z' = 1$.

Observem que, si $z = a + bi$, tenim $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$. Ara es compleix $a + bi \neq 0$ si, i només si, $a \neq 0$ o $b \neq 0$ si, i només si, $a^2 + b^2 \neq 0$, ja que per a a nombre real no nul, es té $a^2 > 0$. Per tant, si $a + bi \neq 0$, tenim

$$(a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i \right) = 1.$$

Hem provat doncs que tot nombre complex no nul té invers.

Observem que, si a és un nombre real negatiu, els nombres complexos $\pm\sqrt{|a|}\, i$, on $|a|$ indica el valor absolut de a, són arrels quadrades de a a $\mathbb{C}$.

En resum, hem construit un conjunt $\mathbb{C}$ de nombres, anomenats nombres complexos, i hi hem definit una suma associativa, commutativa, amb zero, i tal que tot nombre complex té oposat, i un producte associatiu, commutatiu, distributiu respecte de la suma, amb element neutre i tal que tot nombre complex no nul té invers.

Aquestes propietats permeten definir la noció d'espai vectorial complex (o $\mathbb{C}$-espai vectorial), substituint a la definició d'espai vectorial real els escalars reals per escalars complexos.

Exemples 1.5.2. 1. *L'espai vectorial* $\mathbb{C}^n$. Posem

$$\mathbb{C}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}\}$$

i definim una suma de dos elements $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{C}^n$ per la fòrmula (1.1.1) i un producte d'un element $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$ per un escalar a de $\mathbb{C}$ per la fòrmula (1.1.2). Amb aquestes operacions, $\mathbb{C}^n$ és un $\mathbb{C}$-espai vectorial.

2. *L'espai vectorial de les matrius complexes.* Considerem el conjunt $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ de matrius $m \times n$ amb coeficients complexos. Definim la suma de dues matrius $\left(a^i_j\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}, \left(b^i_j\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ per la fòrmula (1.1.3) i el producte d'una matriu $\left(a^i_j\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ de coeficients complexos per un escalar $c \in \mathbb{C}$ per la fòrmula (1.1.4). Tenim que $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ amb aquestes operacions és un $\mathbb{C}$-espai vectorial.

1.6 Independència lineal. Sistemes de generadors

En el que segueix, considerem espais vectorials reals. Les mateixes nocions es poden definir per espais vectorials complexos, prenent com a escalars nombres complexos en comptes de nombres reals.

Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ són vectors d'un espai vectorial E, un vector u de E és *combinació lineal* de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ si existeixen nombres reals $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tals que $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m$. Els escalars $a_1, a_2, \ldots, a_m$ es diuen *coeficients de la combinació lineal*.

Definició 1.6.1. Vectors $v_1, v_2, \ldots, v_m$, amb $m > 0$, d'un espai vectorial E són *linealment independents* si, per a $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ es compleix

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = \vec{0} \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots, a_m = 0,$$

és a dir, si l'única combinació lineal dels vectors $v_1, v_2, \ldots, v_m$ igual al vector $\vec{0}$ és la que té tots els coeficients nuls.

Convindrem en que el conjunt buit és un conjunt de vectors linealment independents.

Exemples 1.6.2. 1) Un vector v d'un espai vectorial E és linealment independent si, i només si, $v \neq \vec{0}$, per 4) de 1.1.4.

2) Els n vectors $(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^n$ són linealment independents. En efecte

$$a_1(1, 0, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + a_n(0, 0, \ldots, 0, 1) = (0, 0, 0, \ldots, 0)$$
$$\Rightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0, 0, 0, \ldots, 0) \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots, a_n = 0.$$

Definició 1.6.3. Si els vectors $v_1, v_2, \dots, v_m$ de l'espai vectorial E no són linealment independents diem que són *linealment dependents*. Tenim doncs que els vectors $v_1, v_2, \dots, v_m$ són linealment dependents si, i només si, existeixen nombres reals $a_1, a_2, \dots, a_m$, **no tots nuls**, tals que

$$a_1v_1 + a_1v_2 + \cdots + a_mv_m = \vec{0}. \tag{1.6.1}$$

Una igualtat com (1.6.1) on no tots els coeficients són nuls es diu *relació de dependència* entre els vectors $v_1, v_2, \dots, v_m$.

Proposició 1.6.4. *Si un conjunt de vectors conté el vector $\vec{0}$, aleshores és un conjunt de vectors linealment dependents.*

Demostració. Siguin $v_1, \dots, v_m$ els vectors. Com la condició de ser linealment dependents no depen de l'ordre dels vectors, podem suposar $v_1 = \vec{0}$. Aleshores

$$1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_m = \vec{0}$$

és una relació de dependència entre $v_1, \dots, v_m$. □

Proposició 1.6.5. *Vectors $v_1, \dots, v_m$ són linealment dependents si, i només si, un d'ells és combinació lineal dels altres.*

Demostració. Si $v_1, \dots, v_m$ són linealment dependents, tenim una relació de dependència $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = \vec{0}$, amb algun coeficient no nul. Suposem $a_i \neq 0$. Aleshores, tenim

$$v_i = -(a_1/a_i)v_1 - \cdots - (a_{i-1}/a_i)v_{i-1} - (a_{i+1}/a_i)v_{i+1} - \cdots - (a_m/a_i)v_m.$$

Per tant, v_i és combinació lineal dels altres vectors. Recíprocament, si v_i és combinació lineal dels altres vectors, tenim $v_i = a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_mv_m$, que implica

$$a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} - v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_mv_m = \vec{0}$$

i el coeficient de v_i és no nul. Per tant $v_1, \dots, v_m$ són linealment dependents. □

La proposició següent dóna un resultat més precís.

Proposició 1.6.6. *Si els vectors $v_1, \ldots, v_m$ són linealment dependents i els vectors $v_2, \ldots, v_m$ són linealment independents, aleshores v_1 és combinació lineal de $v_2, \ldots, v_m$.*

Demostració. Si $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = \vec{0}$ és una relació de dependència entre $v_1, v_2, \ldots, v_m$ i $a_1 = 0$, tindríem $a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = \vec{0}$, amb no tots els coeficients nuls, que contradiu que $v_2, \ldots, v_m$ són linealment independents. Per tant, és $a_1 \neq 0$ i obtenim $v_1 = -(a_2/a_1)v_2 - \cdots - (a_m/a_1)v_m$. $\square$

Proposició 1.6.7. *Qualsevol subconjunt d'un conjunt de vectors independents és també conjunt de vectors independents.*

Demostració. Si el subconjunt és buit, no hi ha res a provar. Si el conjunt de vectors és $v_1, \ldots, v_m$, reordenant els vectors, podem suposar que el subconjunt és $v_1, \ldots, v_r$, amb $r \leq m$. Si $v_1, \ldots, v_r$ fossin linealment dependents, tindríem una relació de dependència $a_1v_1 + \ldots a_rv_r = \vec{0}$, amb algun coeficient no nul. Aleshores $a_1v_1 + \ldots a_rv_r + 0 \cdot v_{r+1} + \cdots + 0 \cdot v_m = \vec{0}$ seria relació de dependència entre $v_1, \ldots, v_m$. $\square$

Definició 1.6.8. Diem que els vectors $v_1, \ldots, v_m$ d'un espai vectorial E *generen* E o *són generadors de* E si, i només si, tot vector de E és combinació lineal de $v_1, \ldots, v_m$.

Exemple 1.6.9. Els n vectors $(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^n$ generen $\mathbb{R}^n$. En efecte si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és qualsevol vector de $\mathbb{R}^n$, tenim

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Proposició 1.6.10. *Si $v_1, \ldots, v_m$ són generadors d'un espai vectorial E, també ho són $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+r}$, per a $v_{m+1}, \ldots, v_{m+r}$ vectors de E qualssevol.*

Demostració. Per a qualsevol $u \in E$, tenim $u = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$, per certs $a_1, \ldots, a_m$. Podem escriure doncs $u = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m + 0 \cdot v_{m+1} + \cdots + 0 \cdot v_{m+r}$, per tant $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+r}$ generen E. $\square$

Proposició 1.6.11. *Si $v_1, \ldots, v_m$ són generadors d'un espai vectorial E, i un d'ells és combinació lineal dels altres, el conjunt obtingut traient aquest vector del conjunt inicial també és conjunt de generadors de E.*

Demostració. Reordenant, si cal, els vectors, tenim $v_1 = b_2v_2 + \cdots + b_mv_m$. Si u és un vector de E qualsevol, tenim $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = a_1(b_2v_2+\cdots+b_mv_m)+a_2v_2+\cdots+a_mv_m = (a_1b_2+a_2)v_2+\cdots+(a_1b_m+a_m)v_m$, per tant u és combinació lineal de $v_2, \ldots, v_m$. $\square$

No tots els espais vectorials tenen un conjunt finit de generadors.

Exemple 1.6.12. L'espai vectorial $\mathbb{R}[X]$ no té un conjunt finit de generadors. En efecte si fem combinacions lineals d'un nombre finit de polinomis $P_1, P_2, \ldots, P_m$, obtenim polinomis que tenen grau més petit o igual que el màxim dels graus del polinomis $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Com a $\mathbb{R}[X]$ tenim polinomis de grau arbitràriament gran, no tot polinomi de $\mathbb{R}[X]$ és combinació lineal de $P_1, P_2, \ldots, P_m$.

Si un espai vectorial té un conjunt finit de generadors, diem que és *finitament generat*.

1.7 Subespais vectorials

Definició 1.7.1. Un subconjunt F d'un espai vectorial E és un *subespai vectorial de E* si, i només si, compleix les propietats següents.

1) F és no buit;

2) *F és tancat per la suma de E:* $u + v \in F$, per a u, v vectors de F, qualssevol.

3) *F és tancat pel producte per escalars de E:* $au \in F$, per a $a \in \mathbb{R}$ i $u \in F$, qualssevol.

Les dues proposicions següents donen propietats equivalent a la definició de subespai.

Proposició 1.7.2. *Un subconjunt no buit F d'un espai vectorial E és subespai vectorial de E si, i només si, per a tot parell de vectors u, v de F i per a tot parell de nombres reals a, b, es compleix $au + bv \in F$.*

Demostració. Si F és subespai de E, per a u, v de F i a, b nombres reals, tenim $au, bv \in F$ per la propietat 3) de la definició de subespai i $au+bv \in F$, per a propietat 2). Recíprocament, si es compleix la propietat de l'enunciat, prenent $a = b = 1$, obtenim la propietat 2) de la definició de subespai i, prenent $b = 0$, obtenim la propietat 3). $\square$

Proposició 1.7.3. *Un subconjunt no buit F d'un espai vectorial E és subespai vectorial de E si, i només si, tota combinació lineal de vectors de F pertany a F.*

Demostració. Sigui F un subespai vectorial de E i $v_1, \ldots, v_r$ vectors de E. Sigui $a_1v_1 + \cdots + a_rv_r$ una combinació lineal qualsevol de $v_1, \ldots, v_r$. Tenim

$$v_i \in F \Rightarrow a_iv_i \in F, 1 \leq i \leq r \Rightarrow a_1v_1 + \cdots + a_rv_r \in F,$$

on usem 1.7.1 3) per a la primera implicació i 1.7.1 2) per a la segona. El recíproc és immediat, ja que $u+v$ i av són casos particulars de combinacions lineals. $\square$

Veiem ara que un subespai vectorial d'un espai vectorial E és també espai vectorial amb les operacions de E.

Proposició 1.7.4. *Si F és un subespai vectorial d'un espai vectorial E, aleshores F és espai vectorial amb les restriccions de la suma i el producte per escalars de E.*

Demostració. Per les propietats 2) i 3) de la definició de subespai vectorial, la suma de dos vectors de F és un vector de F i el producte per un nombre real d'un vector de F és un vector de F. Veiem ara que F amb aquestes operacions és un espai vectorial. Hem de veure que $\vec{0}$ pertany a F i que, per a tot $v \in F$, el seu oposat $-v$ pertany a F. Les restants propietats de la definició d'espai vectorial es compleixen clarament per a tots els vectors de F, ja que es compleixen per a tots els vectors de E. Com $F \neq \emptyset$, existeix $v \in F$ i, per les propietats 2) i 3) de la definició de subespai, tenim $\vec{0} = v - v = v + (-1)v \in F$. Ara, per a qualsevol $v \in F$, $-v = (-1)v \in F$, per la propietat 3). $\square$

Exemple 1.7.5. Si E és un espai vectorial, $\{\vec{0}\}$ i E són subespais vectorials de E. Un subespai de E diferent de $\{\vec{0}\}$ es diu *no trivial*. Un subespai de E diferent de E es diu *propi*.

Exemple 1.7.6. Donat un enter $d > 0$, el conjunt F de polinomis de coeficients reals i de grau $\leq d$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}[X]$. En efecte, el polinomi 0 pertany a F, la suma de dos polinomis de grau $\leq d$ i el producte d'un polinomi de grau $\leq d$ per un escalar també tenen grau $\leq d$.

Proposició 1.7.7 (Subespai generat per un conjunt de vectors)**.** *Sigui E un espai vectorial i siguin $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vectors de E. Sigui $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ el conjunt de totes les combinacions lineals dels vectors $v_1, v_2, \ldots, v_m$, és a dir*

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m : a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}\}.$$

Aleshores $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ és subespai vectorial de E.

Demostració. Prenent la combinació lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ amb tots els coeficients nuls, obtenim $\vec{0} \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$, per tant $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle \neq \emptyset$. Ara tenim

$$\begin{aligned}&(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m) + (b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_m v_m)\\ &= (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_2 + \cdots + (a_m + b_m) v_m,\end{aligned}$$

per tant $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ és tancat per la suma. Per a $c \in \mathbb{R}$,

$$c(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m) = (ca_1) v_1 + (ca_2) v_2 + \cdots + (ca_m) v_m,$$

per tant $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ és tancat pel producte. □

Per definició, $v_1, v_2, \ldots, v_m$ generen $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$. Diem que $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ és el *subespai generat per* $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Convindrem en que $\langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}\}$.

La proposició següent ens diu que $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ és el subespai més petit, respecte de la inclusió, que conté $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

Proposició 1.7.8. *Siguin E un espai vectorial, $v_1, v_2, \ldots, v_m \in E$, F un subespai vectorial de E. Es compleix*

$$v_1, v_2, \ldots, v_m \in F \Rightarrow \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle \subset F.$$

Demostració. Com F és subespai vectorial de E, si $v_1, v_2, \ldots, v_m \in F$, qualsevol combinació lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ pertany a F per la Proposició 1.7.3. Com $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ és el conjunt de totes aquestes combinacions lineals, tenim $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle \subset F$. □

1.8 Bases d'un espai vectorial

Definició 1.8.1. Un conjunt ordenat de vectors $e_1, e_2, \dots, e_n$ d'un espai vectorial E es diu *base de* E si, i només si, és un conjunt de vectors linealment independents i que generen E.

Escriurem una base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, amb els parèntesis que indiquen que els vectors estan ordenats. Convindrem en que el conjunt buit és base de l'espai vectorial $\{\vec{0}\}$.

Exemple 1.8.2. $((1,0,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,0,1))$ és una base de $\mathbb{R}^n$. Es diu *base canònica de* $\mathbb{R}^n$. En efecte, és un conjunt de vectors linealment independents per 1.6.2 2) i que generen $\mathbb{R}^n$ per 1.6.9.

Observació 1.8.3. La definició 1.8.1 és la de base finita. Més generalment es pot definir per a un conjunt infinit de vectors els conceptes d'independència lineal i de generació, així com el concepte de base, no necessàriament finita.

Proposició 1.8.4. *Siguin E un espai vectorial, $e_1, e_2, \dots, e_n$ vectors de E. Aleshores $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ és una base de E si, i només si, per a tot vector v de E, existeixen nombres reals $a_1, a_2, \dots, a_n$,* **únics** *tals que*

$$v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n. \tag{1.8.1}$$

Demostració. Suposem que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ és una base de E. Sigui v un vector de E. Tenim $v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$, amb $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, ja que $e_1, e_2, \dots, e_n$ generen E. Hem de veure que $a_1, a_2, \dots, a_n$ són únics. Suposem $v = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n$. Restant les dues igualtats, obtenim

$$\begin{aligned}\vec{0} &= a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n - (b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n)\\ &= (a_1 - b_1)e_1 + (a_2 - b_2)e_2 + \cdots + (a_n - b_n)e_n,\end{aligned}$$

que implica, per ser $e_1, e_2, \dots, e_n$ linealment independents $a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, \dots a_n - b_n = 0$ és a dir $b_1 = a_1, b_2 = a_2, \dots, b_n = a_n$.

Recíprocament, suposem que per a tot vector v de E existeixen $a_1, a_2, \dots, a_n$, únics, tals que $v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$. Aleshores, tenim que tot v de E és combinació lineal de $e_1, e_2, \dots, e_n$, per tant aquests vectors generen E. Vegem que $e_1, e_2, \dots, e_n$ són linealment independents. Tenim $\vec{0} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 0 \cdot e_n$ i, per hipòtesi, $\vec{0}$ s'escriu només d'una forma com a combinació lineal de $e_1, e_2, \dots, e_n$. Per tant no existeix cap relació de dependència lineal entre $e_1, e_2, \dots, e_n$. $\square$

Si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ és base de E i, per a $v \in E$, tenim $v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$, diem que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ són les *coordenades de v en la base* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Exemple 1.8.5. Per a $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordenades en la base $((1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1))$ són $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Teorema 1.8.6 (de la base). *Tot espai vectorial finitament generat té una base.*

Demostració. Si l'espai vectorial E és finitament generat, existeixen vectors, en nombre finit, $v_1, \ldots, v_r$ tals que $E = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$. Si els vectors $v_1, \ldots, v_r$ són linealment independents, són base de E. Si no, un d'ells és combinació lineal dels altres per 1.6.5. Reordenant els vectors $v_1, \ldots, v_r$, si cal, podem suposar que v_r és combinació lineal dels altres. Aleshores, per 1.6.11, $v_1, \ldots, v_{r-1}$ generen E. Repetim el procés fins a obtenir un conjunt de generadors que siguin linealment independents, és a dir una base de E. Com comencem amb un nombre finit de vectors, obtenim una base de E en un nombre finit de passos. □

Observació 1.8.7. Un espai vectorial sempre té una base però la demostració d'aquest fet, sense suposar que l'espai vectorial és finitament generat, excedeix el nivell d'aquest curs.

El nostre objectiu ara és provar que dues bases d'un mateix espai vectorial tenen el mateix nombre de vectors.

Lema 1.8.8 (de Steinitz). *Si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ formen base de E i $v_1, v_2, \ldots, v_r$ són vectors linealment independents de E, podem substituir r vectors de la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ pels vectors $v_1, v_2, \ldots, v_r$ de forma a obtenir una nova base de E. En particular es compleix $r \leq n$.*

Demostració. 1) Veiem primer que podem substituir un vector de la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ pel vector v_1 de forma a obtenir una nova base.

Com $e_1, e_2, \ldots, e_n$ formen base de E, tenim $v_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$. Com v_1 forma part d'un conjunt de vectors linealment independents, ha de ser $v_1 \neq \vec{0}$, per 1.6.4. Per tant, no tots els coeficients són nuls. Reordenant la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$, si cal, podem suposar $a_1 \neq 0$. Aleshores, tenim

$$e_1 = (1/a_1)v_1 - (a_2/a_1)e_2 - \cdots - (a_n/a_1)e_n. \tag{1.8.2}$$

Vegem que $v_1, e_2, \ldots, e_n$ és base de E. Vegem primer que són linealment independents. Suposem

$$b_1v_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n = \vec{0}. \tag{1.8.3}$$

Substituint en aquesta igualtat la expressió de v_1 en la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ i operant, obtenim

$$\begin{aligned} \vec{0} &= b_1(a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n) + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n \\ &= b_1a_1e_1 + (b_1a_2 + b_2)e_2 + (b_1a_n + b_n)e_n. \end{aligned}$$

Com els vectors $e_1, e_2, \ldots, e_n$ són linealment independents, aquesta igualtat implica $b_1a_1 = 0, b_1a_2 + b_2 = 0, \ldots, b_1a_n + b_n = 0$. Com $a_1 \neq 0$, $b_1a_1 = 0$ implica $b_1 = 0$ i, substituint a les altres igualtats, obtenim $b_2 = 0, \ldots, b_n = 0$. Hem provat doncs que tots els coeficients de (1.8.3) són nuls, per tant $v_1, e_2, \ldots, e_n$ són linealment independents.

Vegem ara que $v_1, e_2, \ldots, e_n$ generen E. Si $u \in E$, tenim $u = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n$, ja que $e_1, e_2, \ldots, e_n$ generen E. Substituint e_1 per l'expressió de (1.8.2), obtenim

$$\begin{aligned} u &= c_1((1/a_1)v_1 - (a_2/a_1)e_2 - \cdots - (a_n/a_1)e_n) + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n \\ &= (c_1/a_1)v_1 + (c_2 - a_2/a_1)e_2 + \cdots + (c_n - a_n/a_1)e_n. \end{aligned}$$

Per tant $v_1, e_2, \ldots, e_n$ generen E.
2) Suposem ara que, per a $s < r$, hem substituit s vectors de la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ pels vectors $v_1, v_2, \ldots, v_s$ de forma a obtenir una nova base i vegem que podem substituir-ne un més per v_{s+1} de forma a obtenir una nova base. Reordenant $e_1, e_2, \ldots, e_n$, si cal, podem suposar que $v_1, \ldots, v_s, e_{s+1}, \ldots, e_n$ és base de E. Escrivim el vector v_{s+1} en aquesta base.

$$v_{s+1} = d_1v_1 + \cdots + d_sv_s + d_{s+1}e_{s+1} + \cdots + d_ne_n. \tag{1.8.4}$$

En el punt 1) hem vist que podem substituir per v_{s+1} un vector de la base que tingui a (1.8.4) un coeficient no nul. Si fos $d_j = 0$ per a tot j amb $s + 1 \leq j \leq n$, v_{s+1} seria combinació lineal de $v_1, \ldots, v_s$ i això no pot ser, ja que són linealment independents. Per tant podem substituir un dels vectors $e_{s+1}, \ldots, e_n$ per v_{s+1}. $\square$

Corol·lari 1.8.9. *Sigui E un espai vectorial. Per a qualsevol conjunt de vectors de E, linealment independents, existeix una base de E que els conté.*

Demostració. Si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ és base de E i $v_1, v_2, \ldots, v_r$ són vectors de E linealment independents, el lema de Steinitz ens dóna que, reordenant, si cal els vectors de la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, obtenim que $v_1, v_2, \ldots, v_r, e_{r+1}, \ldots, e_n$ formen base de E. $\square$

Corol·lari 1.8.10. *Sigui E un espai vectorial. Suposem que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ són bases de E. Aleshores $m = n$.*

Demostració. Aplicant el lema de Steinitz a la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ i els vectors linealment independents $u_1, u_2, \ldots, u_m$, obtenim $m \leq n$. Aplicant el lema de Steinitz a la base $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ i els vectors linealment independents $e_1, e_2, \ldots, e_n$, obtenim $n \leq m$. Tenim doncs la igualtat. $\square$

Una vegada establert aquest corol·lari, podem donar la definició següent.

Definició 1.8.11. Diem *dimensió* d'un espai vectorial E i posem $\dim E$ el nombre de vectors en una base de E. Si un espai vectorial no té cap base finita diem que té dimensió infinita.

Exemples 1.8.12. 1) $\dim \mathbb{R}^n = n$, ja que $((1,0,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,0,1))$ és una base de $\mathbb{R}^n$.

2) $\dim \mathbb{R}[X] = \infty$, ja que $\mathbb{R}[X]$ no es pot generar amb un nombre finit de polinomis.

3) $\dim\{\vec{0}\} = 0$, ja que el conjunt buit és base de $\{\vec{0}\}$.

4) A $\mathcal{M}_{m\times n}$, considerem les matrius $M^i_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, definides per

$$M^i_j = \left(a^k_\ell\right)_{\substack{1\leq k\leq m \\ 1\leq \ell\leq n}}, \text{ amb } a^k_\ell = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ i } \ell = j \\ 0 & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

És fàcil comprovar que les matriu M^i_j formen base de $\mathcal{M}_{m\times n}$ i, per tant, $\dim \mathcal{M}_{m\times n} = mn$.

Proposició 1.8.13. *Sigui E un espai vectorial de dimensió n.*

1) n vectors linealment independents de E formen base de E.

2) n vectors de E que generen E formen base de E.

Demostració. 1) Si $e_1, e_2, \dots, e_n$ és base de E i $v_1, \dots, v_n$ són vectors de E, linealment independents, pel lema de Steinitz 1.8.8, podem substituir els vectors $e_1, e_2, \dots, e_n$ pels vectors $v_1, \dots, v_n$ de forma a obtenir una base.
2) Si $v_1, v_2, \dots, v_n$ són vectors que generen E, a la demostració del teorema de la base 1.8.6, hem vist que existeix una base de E formada per un subconjunt de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Com aquesta base ha de tenir n vectors, per 1.8.10, obtenim que $v_1, v_2, \dots, v_n$ és base de E. □

Proposició 1.8.14. *Siguin E un espai vectorial, F un subespai vectorial de E. Es compleix*

1) $\dim F \leq \dim E$.

2) $\dim F = \dim E \Rightarrow F = E$.

Demostració. 1) Si $u_1, u_2, \dots u_r$ és base de F, aleshores $u_1, u_2, \dots u_r$ són vectors independents de E. Per tant $\dim F = r \leq \dim E$, per 1.8.8.
2) Si $\dim F = \dim E$ i $u_1, u_2, \dots u_n$ és base de F, aleshores $u_1, u_2, \dots u_n$ són vectors linealment independents de E en nombre igual a la dimensió de E. Per 1.8.13 1) són doncs base de E i tenim $E = \langle u_1, u_2, \dots u_n \rangle = F$. □

Proposició 1.8.15. *Siguin E un espai vectorial, u, v dos vectors de E, c un nombre real. Si $e_1, e_2, \dots, e_n$ és una base de E i, en aquesta base, u té coordenades $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i v té coordenades $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ aleshores $u+v$ té coordenades $(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ i cu té coordenades $(cx_1, cx_2, \dots, cx_n)$.*

Demostració. Tenim $u = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n, v = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_ne_n$. Per tant

$$\begin{aligned} u+v &= (x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) + (y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n) \\ &= (x_1+y_1)e_1 + (x_2+y_2)e_2 + \cdots + (x_n+y_n)e_n \\ cu &= c(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = cx_1e_1 + cx_2e_2 + \cdots + cx_ne_n. \end{aligned}$$

□

La proposició anterior dóna que, en un espai vectorial de dimensió n, una vegada fixada una base, per operar amb els vectors de E, podem operar amb les seves coordenades de la mateixa manera que operem amb vectors de $\mathbb{R}^n$.

1.9 Rang d'un conjunt de vectors

Si $v_1, \ldots, v_m$ són vectors d'un espai vectorial E, diem *rang* del conjunt $\{v_1, \ldots, v_m\}$ la dimensió del subespai de E generat per $v_1, \ldots, v_m$. En símbols, posem

$$\mathrm{rg}\{v_1, \ldots, v_m\} = \dim\langle v_1, \ldots, v_m\rangle.$$

Veiem ara operacions bàsiques sobre un conjunt de vectors que no canvien el subespai que generen.

Proposició 1.9.1. *Siguin $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vectors d'un espai vectorial E.*

1) El subespai de E que generen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ no varia si intercanviem dos dels vectors.

2) El subespai de E que generen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ no varia si multipliquem un dels vectors per un escalar **no nul**.

3) El subespai de E que generen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ no varia si sumem a un dels vectors un múltiple d'un altre.

Demostració. 1) És clar que canviar l'ordre dels vectors no canvia el subespai que generen.
2) Si multipliquem v_i per $d \neq 0$, com $v_i = (1/d)(dv_i)$ tot vector combinació lineal dels vectors $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m$, ho és també dels vectors $v_1, \ldots, dv_i, \ldots, v_m$ i recíprocament.
3) Reordenant els vectors, podem suposar que sumem a v_2 un múltiple de v_1. Hem de veure la igualtat $\langle v_1, v_2, v_3, \ldots v_m\rangle = \langle v_1, v_2 + cv_1, v_3, \ldots v_m\rangle$, per a $c \in \mathbb{R}$, qualsevol. Si $u \in \langle v_1, v_2 + cv_1, v_3, \ldots v_m\rangle$, tenim

$$u = a_1v_1 + a_2(v_2 + cv_1) + a_3v_3 + \cdots + a_mv_m = (a_1 + a_2c)v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \cdots + a_mv_m,$$

per tant $u \in \langle v_1, v_2, v_3, \ldots v_m\rangle$ i hem provat

$$\langle v_1, v_2 + cv_1, v_3, \ldots v_m\rangle \subset \langle v_1, v_2, v_3, \ldots v_m\rangle.$$

Com $v_2 = (v_2 + cv_1) - cv_1$, tenim també la inclusió contrària. $\square$

Apliquem ara el mètode de reducció de Gauss-Jordan per determinar el rang d'un sistema de vectors. Donats vectors $v_1, v_2, \ldots, v_m$ d'un espai vectorial E i fixada una base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de l'espai vectorial E, escrivim $v_1, v_2, \ldots, v_m$ en la base fixada.

$$v_i = a^i_1 e_1 + a^i_2 e_2 + \cdots + a^i_n e_n, 1 \leq i \leq m.$$

Considerem la matriu $\left(a^i_j\right)_{\substack{1\leq i\leq m,\\ 1\leq j\leq n}}$ és a dir la matriu formada per les coordenades del vectors $v_1, v_2, \ldots, v_m$ posades en files. Apliquem reducció a aquesta matriu, com a la secció 1.3, fins a obtenir una matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} \overline{a}^1_1 & \overline{a}^1_2 & \overline{a}^1_3 & \ldots & \overline{a}^1_r & \ldots & \overline{a}^1_n \\ 0 & \overline{a}^2_2 & \overline{a}^2_3 & \ldots & \overline{a}^2_r & \ldots & \overline{a}^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \overline{a}^r_r & \ldots & \overline{a}^r_n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.9.1}$$

amb $\overline{a}^i_i \neq 0, 1 \leq i \leq r$. Posem $\overline{v}_i$ el vector que té com a coordenades en la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ els coeficients de la fila i de la matriu (1.9.1). Observem que intercanviar columnes de la matriu en el procés de reducció equival a canviar l'ordre de les coordenades dels vectors. Ara, la proposició 1.9.1 ens diu que el subespai generat pels vectors $v_1, \ldots, v_m$ és igual al generat pels vectors $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_m$. Clarament podem ignorar els vectors nuls, ja que afegir el vector $\vec{0}$ a un conjunt de vectors no canvia el subespai que genera. Tenim doncs $\langle v_1, \ldots, v_m\rangle = \langle \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_r\rangle$. Volem provar ara que els vectors $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_r$ són linealment independents.

Proposició 1.9.2. *Sigui E un espai vectorial, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ una base de E. Siguin $v_1, \ldots, v_r$ vectors de E i siguin $v_i = \sum_{j=1}^n a^i_j e_j$ les seves expressions en la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Suposem que per a tot i, $1 \leq i \leq r$, es compleix $a^i_i \neq 0, a^i_j = 0$, per a tot j amb $1 \leq j < i$. Aleshores $v_1, \ldots, v_r$ són linealment independents.*

Demostració. Suposem $c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r = \vec{0}$, amb $c_1, \ldots, c_r$ nombres reals. Tenint en compte 1.8.15, aquesta igualtat equival a $c_1(a^1_1, \ldots, a^1_n) + \cdots +$

$c_r(a_1^r, \ldots, a_n^r) = (0, \ldots, 0)$. Igualant cada coordenada, obtenim un sistema de n equacions en les incògnites $c_1, \ldots, c_r$. Tenint en compte les condicions de l'enunciat sobre les a_j^i, tenim que les r primeres equacions d'aquest sistema són

$$\begin{array}{lcl} a_1^1 c_1 & = & 0 \\ a_2^1 c_1 + a_2^2 c_2 & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_r^1 c_1 + a_r^2 c_2 + \cdots + a_r^r c_r & = & 0 \end{array}$$

Com $a_1^1 \neq 0$, la primera equació dóna $c_1 = 0$. Substituint a la segona equació i usant $a_2^2 \neq 0$, obtenim $c_2 = 0$. En aquesta forma, obtenim successivament $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$. Hem provat doncs que els vectors $v_1, \ldots, v_r$ són linealment independents. $\square$

Proposició 1.9.3. *Siguin E un espai vectorial, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ una base de E. Siguin $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vectors de E.*

1) *El rang de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ és igual al nombre de files no nul·les de la matriu resultant del procés de reducció aplicat a la matriu que té com a files les coordenades dels vectors $v_1, v_2, \ldots, v_m$ en la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.*

2) *Si hem fet canvis de columna en el procés de reducció, reordenem la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ d'acord amb aquests canvis de columna. Els vectors que tenen com a coordenades en la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ els coeficients de les files no nul·les de la matriu reduïda anterior formen una base de $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.*

Demostració. Si $\overline{v}_i$ és el vector que té com a coordenades en la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ els coeficients de la fila i de la matriu reduïda i r és el nombre de files no nul·les d'aquesta matriu, hem vist $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \langle \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_r \rangle$ i la Proposició 1.9.2 ens dóna que $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_r$ són linealment independents. Tenim doncs que $(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_r)$ és una base de $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ i $\mathrm{rg}(\{v_1, \ldots, v_m\}) = \dim\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = r$. $\square$

1.10 Rang d'una matriu. Teorema de Rouché-Frobenius

Donada una matriu $A = \left(a_j^i\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, diem *vectors fila* de A els m vectors de $\mathbb{R}^n$ que formen les files de A, és a dir els vectors $A^1 := (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_n^1), \ldots, A^m :=$

$(a_1^m, a_2^m, \ldots, a_n^m)$. Diem *vectors columna* de A els n vectors de $\mathbb{R}^m$ que formen les columnes de A, és a dir els vectors $A_1 := (a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^m), \ldots, A_n := (a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^m)$.

Diem *rang d'una matriu A* el rang dels seus vectors fila.

Proposició 1.10.1. *El rang d'una matriu A és igual al nombre de files no nul·les de la matriu resultant del procés de reducció aplicat a la matriu A.*

Demostració. És immediat a partir de la definició de rang d'una matriu i de 1.9.3. □

Observació 1.10.2. Si A és matriu $m \times n$, tenim $\operatorname{rg} A \leq m$, ja que un conjunt de m vectors té com a màxim rang igual a m. D'altra banda, els vectors fila de A són vectors de $\mathbb{R}^n$, per tant $\operatorname{rg} A \leq n$, per 1.8.14 1).

Teorema 1.10.3 (de Rouché-Frobenius)**.** *Sigui S un sistema d'equacions lineals amb n incògnites, A la matriu de S i (A|b) la matriu ampliada de S. Tenim*

1) $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|b)$.

2) S és compatible si, i només si, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$.

3) Si S és compatible, aleshores té $n - \operatorname{rg} A$ *graus de llibertat.*

Demostració. Escrivim la matriu ampliada del sistema S com

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 & b^2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}.$$

i la matriu obtinguda per reducció a partir de $(A|b)$ com

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_1^1 & \overline{a}_2^1 & \overline{a}_3^1 & \ldots & \overline{a}_r^1 & \ldots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & \overline{a}_2^2 & \overline{a}_3^2 & \ldots & \overline{a}_r^2 & \ldots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \overline{a}_r^r & \ldots & \overline{a}_n^r & \overline{b}^r \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \overline{b}^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \tag{1.10.1}$$

1) Per 1.10.1, el rang de A és igual al nombre de files no nul·les de la matriu obtinguda treient a (1.10.1) l'última columna. Si $\overline{b}^i = 0$, per a tot i amb $r < i \leq m$, la matriu (1.10.1) és reduïda i tenim doncs $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$. Si tenim $\overline{b}^{i_0} \neq 0$, per a algun i_0 amb $r < i_0 \leq m$, intercanviant la fila i_0 amb la fila $r+1$, podem suposar $\overline{b}^{r+1} \neq 0$. Per a $i = r+2, \dots, m$ substituim la fila f_i per la fila $f_i - (\overline{b}^i/\overline{b}^{r+1})f_{r+1}$ i obtenim la matriu

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_1^1 & \overline{a}_2^1 & \overline{a}_3^1 & \dots & \overline{a}_r^1 & \dots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & \overline{a}_2^2 & \overline{a}_3^2 & \dots & \overline{a}_r^2 & \dots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{a}_r^r & \dots & \overline{a}_n^r & \overline{b}^r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \overline{b}^{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Tenim doncs $\operatorname{rg}(A|b) = r + 1 = \operatorname{rg} A + 1$.

2) Hem vist a la secció 1.3 que el sistema és compatible si, i només si, $\overline{b}^i = 0$, per a tot i amb $r < i \leq m$. A 1) hem vist que aquesta condició equival a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$.

3) Hem vist a la secció 1.3 que, quan és compatible, el sistema té $n - r$ graus de llibertat, on n és el nombre d'incògnites i r el nombre de files no nul·les de la matriu (1.10.1). Per 1.10.1, tenim $r = \operatorname{rg} A$.

□

1.11 Equacions d'un subespai vectorial

Proposició 1.11.1. *El conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni de n incògnites és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensió $n - r$, on r és el rang de la matriu del sistema.*

Demostració. Escrivim el sistema com

$$a_1^i x^1 + a_2^i x^2 + \dots + a_n^i x^n = 0, 1 \leq i \leq m. \tag{1.11.1}$$

Comprovem les tres condicions de la definició de subespai vectorial.

1) Clarament $(0, 0, \ldots, 0)$ és solució del sistema, per tant el conjunt és no buit.
2) Si $(c^1, c^2, \ldots, c^n), (d^1, d^2, \ldots, d^n)$ són dues solucions, tenim, per a $1 \leq i \leq m$,

$$\left.\begin{array}{l} a_1^i c^1 + a_2^i c^2 + \cdots + a_n^i c^n = 0 \\ a_1^i d^1 + a_2^i d^2 + \cdots + a_n^i d^n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\begin{aligned} 0 &= (a_1^i c^1 + a_2^i c^2 + \cdots + a_n^i c^n) + (a_1^i d^1 + a_2^i d^2 + \cdots + a_n^i d^n) \\ &= a_1^i (c^1 + d^1) + a_2^i (c^2 + d^2) + \cdots + a_n^i (c^n + d^n) \end{aligned}$$

Per tant $(c^1, c^2, \ldots, c^n) + (d^1, d^2, \ldots, d^n)$ és solució.
3) Si $(c^1, c^2, \ldots, c^n)$ és solució i $d \in \mathbb{R}$, tenim, per a $1 \leq i \leq m$,

$$\begin{array}{l} a_1^i c^1 + a_2^i c^2 + \cdots + a_n^i c^n = 0 \Rightarrow \\ 0 = d(a_1^i c^1 + a_2^i c^2 + \cdots + a_n^i c^n) = a_1^i (dc^1) + a_2^i (dc^2) + \cdots + a_n^i (dc^n) \end{array}$$

Per tant $d(c^1, c^2, \ldots, c^n)$ és solució. Tenim doncs que el conjunt de solucions del sistema (1.11.1) és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Ara, si la matriu del sistema té rang r, reordenant, si cal, les incògnites, tenim que les solucions del sistema són de la forma

$$\begin{array}{rcl} x^1 &=& -\tilde{a}_{r+1}^1 x^{r+1} - \cdots - \tilde{a}_n^1 x^n \\ x^2 &=& -\tilde{a}_{r+1}^2 x^{r+1} - \cdots - \tilde{a}_n^2 x^n \\ &\vdots& \\ x^r &=& -\tilde{a}_{r+1}^r x^{r+1} - \cdots - \tilde{a}_n^r x^n \end{array} \tag{1.11.2}$$

Considerem les $n-r$ solucions que resulten de donar a les incògnites $x^{r+1}, \ldots, x^n$ els valors $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), (0, \ldots, 0, 1)$ i provarem que formen una base del subespai vectorial de solucions del sistema. Aquestes solucions són

$$\begin{array}{rcl} v_1 &=& (-\tilde{a}_{r+1}^1, -\tilde{a}_{r+1}^2, \ldots, -\tilde{a}_{r+1}^r, 1, 0, \ldots, 0), \\ v_2 &=& (-\tilde{a}_{r+2}^1, -\tilde{a}_{r+2}^2, \ldots, -\tilde{a}_{r+2}^r, 0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\vdots& \\ v_{n-r} &=& (-\tilde{a}_n^1, -\tilde{a}_n^2, \ldots, -\tilde{a}_n^r, 0, \ldots, 0, 1). \end{array} \tag{1.11.3}$$

Clarament, si $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ és solució del sistema, tenim $(x^1, x^2, \ldots, x^n) = x^{r+1} v_1 + x^{r+2} v_2 + \cdots + x^n v_{n-r}$, per tant les solucions (1.11.3) generen el subespai de solucions. Ara, si $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_{n-r} v_{n-r} = \vec{0}$, igualant cada coordenada obtenim un sistema d'equacions, les $n-r$ últimes equacions del qual són $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_{n-r} = 0$. Tenim doncs que les solucions (1.11.3) són linealment independents i per tant són base. $\square$

A la demostració de la proposició 1.11.1, hem vist com trobar una base del subespai de solucions d'un sistema d'equacions. Obtenim doncs el següent corol·lari.

Corol·lari 1.11.2. *Si les solucions d'un sistema S d'equacions lineals homogènies s'expressen com a (1.11.2), una base del subespai vectorial de solucions de S està formada pels vectors* $v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}$ *tals que* v_1 *s'obté donant a les variables lliures els valors* $1, 0, \ldots, 0$*;* v_2 *s'obté donant-lis els valors* $0, 1, 0, \ldots, 0$*; ... ;* v_{n-r} *s'obté donant-lis els valors* $0, 0, \ldots, 0, 1$*.*

Si un subespai vectorial F de $\mathbb{R}^n$ és el conjunt de solucions d'un sistema S d'equacions lineals homogènies **independents**, direm que S és un *sistema d'equacions de F* o que les equacions que formen S són *equacions de F*. Admetrem el conjunt buit com a sistema d'equacions linealment independents (*sistema d'equacions buit*). És el sistema d'equacions de $\mathbb{R}^n$.

Observació 1.11.3. Per 1.11.1, qualsevol sistema d'equacions d'un subespai F de $\mathbb{R}^n$ està format per $n - \dim F$ equacions.

Veiem ara que tot subespai de $\mathbb{R}^n$ té un sistema d'equacions.

Proposició 1.11.4. *Si F és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ i $\dim F = d$, existeix un sistema S de $n - d$ equacions lineals homogènies independents tal que el conjunt de solucions de S és igual a F.*

Demostració. Si $F = \mathbb{R}^n$, el sistema d'equacions buit és sistema d'equacions de F. Suposem doncs $F \neq \mathbb{R}^n$. Si S és un sistema d'equacions lineals homogènies en n incògnites, per 1.11.1, el conjunt de solucions de S és subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. Per tant, si $v_1, \ldots, v_d$ és una base de F, i $v_1, \ldots, v_d$ són solucions de S, qualsevol vector de F és també solució de F. Busquem doncs equacions de les quals $v_1, \ldots, v_d$ siguin solucions. Si tenim $v_j = (b_j^1, b_j^2, \ldots, b_j^n)$, una equació lineal $a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ té $v_1, \ldots, v_d$ com a solucions si es compleix

$$a_1b_j^1 + a_2b_j^2 + \cdots + a_nb_j^n = 0, 1 \leq j \leq d. \tag{1.11.4}$$

Els coeficients de les equacions que busquem són doncs solucions d'aquest sistema amb incògnites $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Com els vectors v_j són linealment independents, el sistema (1.11.4) té rang d i, per tant, té $n-d$ solucions independents. Si aquestes són

$$(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_n^1), (a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2), \ldots, (a_1^{n-d}, a_2^{n-d}, \ldots, a_n^{n-d}),$$

el sistema

$$\begin{array}{rcl} a_1^1 y_1 + a_2^1 y_2 + \ldots a_n^1 y_n & = & 0 \\ a_1^2 y_1 + a_2^2 y_2 + \cdots + a_n^2 y_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_1^{n-d} y_1 + a_2^{n-d} y_2 + \cdots + a_n^{n-d} y_n & = & 0 \end{array} \tag{1.11.5}$$

és de $n-d$ solucions independents i té com a solucions els vectors de F. Queda veure que tota solució de (1.11.5) és de F. Sabem que les solucions de (1.11.5) formen un subespai G de $\mathbb{R}^n$ de dimensió $n-(n-d)=d$. Com tenim $F \subset G$ i $\dim F = \dim G$ obtenim la igualtat. Per tant (1.11.5) és un sistema d'equacions de F. $\square$

La demostració de 1.11.4 dóna un mètode per trobar equacions d'un subespai. Ho enunciem en el corol·lari següent.

Corol·lari 1.11.5. *Si el subespai vectorial F té base $v_1, \ldots, v_d$ amb $v_j = (b_j^1, b_j^2, \ldots, b_j^n), 1 \leq j \leq d$, el sistema de les equacions que tenen com a coeficients $n-d$ solucions independents del sistema*

$$b_j^1 z_1 + b_j^2 z_2 + \cdots + b_j^n z_n = 0, 1 \leq j \leq d,$$

és un sistema d'equacions de F.

Observació 1.11.6. Tenint en compte 1.8.15, si E és un espai vectorial de dimensió n i fixem una base $B := (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, donat un subespai vectorial F de E de dimensió d, existeix un sistema S de $n-d$ equacions lineals homogènies independents que compleix que $(c^1, c^2, \ldots, c^n)$ és solució de S si, i només si, el vector $c^1 e_1 + c^2 e_2 + \cdots + c^n e_n$ pertany a F. Direm que S és un sistema d'equacions del subespai F en la base B.

1.12 Intersecció i suma de subespais vectorials. Fòrmula de Grassmann

Proposició 1.12.1. *Sigui E un espai vectorial. Si F i G són subespais vectorials de E, aleshores $F \cap G$ és subespai vectorial de E.*

Demostració. Com $\vec{0}$ pertany a F i a G, tenim $\vec{0} \in F \cap G$. Si $u, v \in F \cap G$, tenim, d'una banda, $u, v \in F$, per tant $u + v \in F$, per ser F subespai de E i, d'altra banda, $u, v \in G$, per tant $u + v \in G$, per ser G subespai de E. Obtenim doncs $u + v \in F \cap G$. Igualment, si $u \in F \cap G$ i $a \in \mathbb{R}$, tenim $au \in F$ i $au \in G$, per tant $au \in F \cap G$. $\square$

Observació 1.12.2. Per les propietats de la intersecció de conjunts, tenim $(F \cap G) \cap H = F \cap (G \cap H)$ i $F \cap G = G \cap F$, per a F, G, H subespais de l'espai vectorial E, qualssevol.

Si F i G són subespais vectorials d'un espai vectorial E, la reunió $F \cup G$ no és en general subespai vectorial de E.

Definició 1.12.3. Si F i G són subespais d'un espai vectorial E, la *suma* de F i G és

$$F + G = \{u \in E \,:\, u = v + w, \quad \text{per certs} \quad v \in F, w \in G\}.$$

Proposició 1.12.4. *Si F i G són subespais d'un espai vectorial E, també ho és $F + G$.*

Demostració. Com $\vec{0}$ pertany a F i a G, tenim $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in F + G$. Si $u_1, u_2 \in F + G$, tenim $u_1 = v_1 + w_1, u_2 = v_2 + w_2$, per certs $v_1, v_2 \in F, w_1, w_2 \in G$. Per tant $u_1 + u_2 = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) = (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) \in F + G$, ja que $v_1 + v_2 \in F$ i $w_1 + w_2 \in G$. Anàlogament, si $a \in \mathbb{R}$, tenim $au_1 = a(v_1 + w_1) = av_1 + aw_1 \in F + G$, ja que $av_1 \in F$ i $aw_1 \in G$. $\square$

Observació 1.12.5. Per les propietats associativa i commutativa de la suma d'un espai vectorial, tenim $(F + G) + H = F + (G + H)$ i $F + G = G + F$, per a F, G, H subespais de l'espai vectorial E, qualssevol.

Proposició 1.12.6. *Si F, G, H són subespais vectorials d'un espai vectorial E, tenim*

$$F \subset H \text{ i } G \subset H \Rightarrow F + G \subset H.$$

Demostració. Si $u \in F + G$, tenim $u = v + w$, per certs $v \in F, w \in G$. Com $F \subset H$, tenim $v \in H$ i, com $G \subset H$, tenim $w \in H$. Com H és subespai de E, tenim $v + w \in H$. □

La proposició anterior ens diu que $F+G$ és el subespai més petit, respecte de la inclusió, que conté F i G.

Les proposicions següents donen un mètode per calcular la intersecció i la suma de subespais.

Proposició 1.12.7. *Sigui E un espai vectorial amb base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Siguin F el subespai de E amb equacions $f_1 = 0, \dots, f_{n-r} = 0$ i G el subespai de E amb equacions $g_1 = 0, \dots, g_{n-s} = 0$. Aleshores un sistema d'equacions lineals independents equivalent al sistema $f_1 = 0, \dots, f_{n-r} = 0, g_1 = 0, \dots, g_{n-s} = 0$ és un sistema d'equacions de $F \cap G$.*

Demostració. Clarament un vector és de $F \cap G$ si, i només si, compleix a la vegada les equacions de F i les de G. Per tant $F \cap G$ és igual al conjunt de solucions del sistema $f_1 = 0, \dots, f_{n-r} = 0, g_1 = 0, \dots, g_{n-s} = 0$ i al del sistema equivalent a aquest. □

Proposició 1.12.8. *Sigui E un espai vectorial. Si $v_1, \dots, v_r$ generen el subespai F de E i $w_1, \dots, w_s$ generen el subespai G de E, aleshores $F + G = \langle v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s \rangle$.*

Demostració. Un vector qualsevol de F és combinació lineal dels vectors $v_1, \dots, v_r$ i un vector qualsevol de G és combinació lineal dels vectors $w_1, \dots, w_s$. Per tant un vector qualsevol de $F + G$ és combinació lineal dels vectors $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$. □

Observació 1.12.9. Si $v_1, \dots, v_r$ és base de F i $w_1, \dots, w_s$ és base de G, podem obtenir una base de $F + G$ aplicant reducció al conjunt de generadors $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$.

Teorema 1.12.10 (Fòrmula de Grassmann)**.** *Si F i G són subespais vectorials d'un espai vectorial E es compleix la igualtat*

$$\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G).$$

Demostració. Sigui $u_1, \dots, u_r$ una base de $F \cap G$. Com $F \cap G \subset F$, els vectors $u_1, \dots, u_r$ són vectors linealment independents de F. Per tant per 1.8.9, existeix una base de F que conté aquests vectors. Escrivim aquesta base com

$u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}, \ldots, v_m$. Igualment, com $F \cap G \subset G$, els vectors $u_1, \ldots, u_r$ són vectors linealment independents de G. Per 1.8.9, existeix una base de G que conté aquests vectors. Escrivim aquesta base com $u_1, \ldots, u_r, w_{r+1}, \ldots, w_k$.

Ara volem provar que $u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}, \ldots, v_m, w_{r+1}, \ldots, w_k$ és base de $F+G$. Si ho provem, quedarà demostrada la fòrmula de l'enunciat, ja que tindrem $\dim(F+G) = m+k-r = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$. Vegem doncs que $u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}, \ldots, v_m, w_{r+1}, \ldots, w_k$ és base de $F+G$.

Si u és un vector qualsevol de $F+G$, tenim $u = v+w$, amb $v \in F, w \in G$. Tenim doncs

$$\begin{aligned} v &= a_1u_1 + \cdots + a_ru_r + a_{r+1}v_{r+1} + \cdots + a_mv_m, \\ w &= b_1u_1 + \cdots + b_ru_r + b_{r+1}w_{r+1} + \cdots + b_kw_k, \end{aligned}$$

per certs nombres reals $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_k$, que implica

$$\begin{aligned} u = v+w &= (a_1u_1 + \cdots + a_ru_r + a_{r+1}v_{r+1} + \cdots + a_mv_m) \\ &\quad +(b_1u_1 + \cdots + b_ru_r + b_{r+1}w_{r+1} + \cdots + b_kw_k)) \\ &= (a_1+b_1)u_1 + \cdots + (a_r+b_r)u_r + a_{r+1}v_{r+1} \\ &\quad + \cdots + a_mv_m + b_{r+1}w_{r+1} + \cdots + b_kw_k). \end{aligned}$$

Per tant $u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}, \ldots, v_m, w_{r+1}, \ldots, w_k$ generen $F+G$.

Ara suposem que tenim una igualtat

$$a_1u_1 + \cdots + a_ru_r + a_{r+1}v_{r+1} + \cdots + a_mv_m + b_{r+1}w_{r+1} + \cdots + b_kw_k = \vec{0}. \quad (1.12.1)$$

Volem veure que tots els coeficients són nuls. De (1.12.1), obtenim

$$a_1u_1 + \cdots + a_ru_r + a_{r+1}v_{r+1} + \cdots + a_mv_m = -(b_{r+1}w_{r+1} + \cdots + b_kw_k).$$

Diem t el vector que compleix

$$t = a_1u_1 + \cdots + a_ru_r + a_{r+1}v_{r+1} + \cdots + a_mv_m = -(b_{r+1}w_{r+1} + \cdots + b_kw_k).$$

Com t és combinació lineal dels vectors de la base de F, tenim $t \in F$. Com t és combinació lineal de vectors de G, tenim $t \in G$. Tenim doncs $t \in F \cap G$ i per tant, t és combinació lineal dels vectors de la base de $F \cap G$. Tenim doncs

$$t = -(b_{r+1}w_{r+1} + \cdots + b_k w_k) = c_1 u_1 + \cdots + c_r u_r$$

que implica

$$c_1 u_1 + \cdots + c_r u_r + b_{r+1}w_{r+1} + \cdots + b_k w_k = \vec{0},$$

que és una combinació lineal igualada a $\vec{0}$ dels vectors de la base de G. Per tant tots els coeficients són nuls i, en particular, $b_{r+1} = 0, \ldots, b_k = 0$. Substituint a (1.12.1), queda una combinació lineal igualada a $\vec{0}$ dels vectors de la base de F. Tenim doncs $a_1 = 0, \ldots, a_r = 0, a_{r+1} = 0, \ldots, a_m = 0$. $\square$

1.13 Suma directa. Subespai complementari

Definició 1.13.1. Siguin E un espai vectorial, F i G subespais vectorials de E. Diem que F i G estan en *suma directa* si, i només si, per a tot vector u de $F+G$, existeixen $v \in F, w \in G$, **únics** tals que $u = v + w$.

Proposició 1.13.2. *Siguin E un espai vectorial, F i G subespais vectorials de E. Les condicions següents són equivalents.*

1) F i G estan en suma directa.

2) $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

3) la reunió d'una base de F i una de G és base de $F+G$.

4) $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

Demostració. Provarem primer que 1) i 2) són equivalents. Suposem que F i G estan en suma directa.. Si existís un vector v no nul a $F \cap G$ tindríem que $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$ i $\vec{0} = v + (-v)$ serien dues maneres diferents d'escriure el vector $\vec{0}$ de $F+G$ com a suma d'un vector de F i un de G. Aquest fet contradiu la hipòtesi que F i G estan en suma directa. Recíprocament, suposem que $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Sigui $u \in F+G$ i suposem $u = v_1 + w_1$, $u = v_2 + w_2$, amb $v_1, v_2 \in F, w_1, w_2 \in G$. Aleshores tenim $v_1 + w_1 = v_2 + w_2$ que implica $v_1 - v_2 = w_2 - w_1$. Posem $t = v_1 - v_2 = w_2 - w_1$. Com $v_1, v_2 \in F$, tenim $t \in F$ i, com $w_1, w_2 \in G$, tenim $t \in G$. Tenim doncs $t \in F \cap G$. Com, per hipòtesi és $F \cap G = \{\vec{0}\}$, tenim $t = \vec{0}$ que implica $v_1 - v_2 = \vec{0}$ i $w_2 - w_1 = \vec{0}$, per tant $v_1 = v_2$ i $w_1 = w_2$. Hem provat doncs que tot vector de $F+G$ s'escriu en forma única com a suma d'una de F i un de G.

Provem ara 2) $\Rightarrow$ 3). Si $F \cap G = \{\vec{0}\}$, és $\dim(F \cap G) = 0$ i la fòrmula de Grassmann 1.12.10 ens dóna $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$. Per 1.12.8, sabem que la reunió d'una base de F i una de G és un conjunt de generadors de $F+G$. Ara, el nombre d'aquests generadors és $\dim F + \dim G = \dim(F+G)$ i, per 1.8.13 2), obtenim que són base de $F+G$.

3) $\Rightarrow$ 4) és immediat. Provem ara 4) $\Rightarrow$ 2). Si $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$, la fòrmula de Grassmann 1.12.10 ens dóna $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = 0$, per tant $F \cap G = \{\vec{0}\}$. □

Notació. Es posa $F \oplus G$ per indicar que la suma de F i G és directa.

Definició 1.13.3. Siguin E un espai vectorial, F i G subespais vectorials de E. Diem que G és un *suplementari de F en E* si la suma de F i G és directa i $F+G=E$.

Observació 1.13.4. Per la definició de suma directa, G és un suplementari de F en E si, i només si, tot vector de E s'escriu en forma única com a suma d'un vector de F i un de G.

Proposició 1.13.5. *Siguin E un espai vectorial, F i G subespais vectorials de E. Es compleix*

1) $F \cap G = \{\vec{0}\}$ i $\dim E = \dim F + \dim G \Rightarrow G$ és suplementari de F en E.

2) $F + G = E$ i $\dim E = \dim F + \dim G \Rightarrow G$ és suplementari de F en E.

Demostració. 1) Per 1.13.2, $F \cap G = \{\vec{0}\}$ equival a que F i G estiguin en suma directa. Ara com $F \cap G = \{\vec{0}\}$, tenim $\dim(F \cap G) = 0$ i la fòrmula de Grassmann dóna $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$. Tenim doncs $\dim(F+G) = \dim E$ i, per 1.8.14 2), obtenim $F+G=E$.
2) Aplicant la fòrmula de Grassmann, tenim $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = 0$ que implica que $F \cap G = \{\vec{0}\}$ i per tant que F i G estiguin en suma directa. □

Proposició 1.13.6. *Sigui F un subespai vectorial de l'espai vectorial E. Aleshores existeix un suplementari G de F en E.*

Demostració. Sigui $v_1, \dots, v_r$ una base de F. Per 1.8.9, existeix una base $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ de E. Posem $G = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$. Per 1.13.2, F i G estan en suma directa i $F + G = \langle v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n \rangle = E$. □

2 Matrius i aplicacions lineals

2.1 Rang d'una matriu

Si $A = \left(a^i_j\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, diem *matriu transposada* de la matriu A i denotem per A^T la matriu definida per

$$A^T = \left(b^i_j\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}, \text{ on } \ b^i_j = a^j_i,$$

és a dir, l'element de la fila i i columna j de A^T és igual a l'element de la fila j i columna i de A. En particular, si A és matriu $m \times n$, A^T és matriu $n \times m$.

Exemple 2.1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

A la secció 1.10, vam definir el rang d'una matriu com el rang dels seus vectors fila. Veiem ara que el rang d'una matriu és també igual al dels seus vector columna.

Proposició 2.1.2. *El rang d'una matriu és igual al rang dels seus vectors columna.*

Demostració. Sigui A la matriu $\left(a^i_j\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ i posem r el seu rang. Volem veure que existeixen r vectors columna de A tals que els restants vectors columna de A són combinació lineal d'aquests r. Aquest fet implicarà que el subespai de $\mathbb{R}^m$ generat pels vectors columna de A té un conjunt de r generadors i, per tant, dimensió $\le r$, és a dir que el rang dels vectors columna de A és $\le r$.

Considerem el sistema d'equacions lineals homogènies amb matriu A, és a dir, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \cdots + a^1_n x^n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a^m_1 x^1 + a^m_2 x^2 + \cdots + a^m_n x^n & = & 0 \end{array}\right. \tag{2.1.1}$$

Com és homogeni, (2.1.1) és compatible i, com $\operatorname{rg} A = r$, (2.1.1) té $n-r$ graus de llibertat. Reordenant, si cal, les columnes de A, podem suposar que $x^{r+1}, \dots, x^n$ són les variables lliures. Donant a una de les variables lliures el valor 1 i a les restants el valor 0, obtenim solucions del sistema (2.1.1) de la forma

$$\begin{gathered}
(b_1^1, \dots, b_r^1, 1, 0, \dots, 0, 0),\\
(b_1^2, \dots, b_r^2, 0, 1, 0, \dots, 0),\\
\vdots\\
(b_1^{n-r}, \dots, b_r^{n-r}, 0, 0, \dots, 0, 1).
\end{gathered}$$

Escrivim que la primera d'elles és solució.

$$\begin{array}{rcl}
a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_2^1 \cdots + a_r^1 b_r^1 + a_{r+1}^1 & = & 0\\
a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_2^1 + \cdots + a_r^2 b_r^1 + a_{r+1}^2 & = & 0\\
& \vdots & \\
a_1^m b_1^1 + a_2^m b_2^1 + \cdots + a_r^m b_r^1 + a_{r+1}^m & = & 0
\end{array}$$

Equivalentment, tenim en forma matricial

$$b_1^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} + b_2^1 \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} + \cdots + b_r^1 \begin{pmatrix} a_r^1 \\ a_r^2 \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{r+1}^1 \\ a_{r+1}^2 \\ \vdots \\ a_{r+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

és a dir

$$A_{r+1} = -b_1^1 A_1 - b_2^1 A_2 - \cdots - b_r^1 A_r,$$

si posem A_j la columna j de la matriu A. Tenim doncs $A_{r+1} \in \langle A_1, A_2, \dots, A_r \rangle$. Anàlogament, procedint amb les altres solucions, obtenim successivament $A_{r+2} \in \langle A_1, A_2, \dots, A_r \rangle, \dots, A_n \in \langle A_1, A_2, \dots, A_r \rangle$. Obtenim així

$$\langle A_1, A_2, \dots A_r, A_{r+1}, \dots, A_n \rangle = \langle A_1, A_2, \dots A_r \rangle$$

que ens diu que els vectors columna de A tenen rang menor o igual que el rang de A.

Com aquest resultat l'hem provat per a una matriu qualsevol, ho podem aplicar a la matriu A^T, transposada de A. Obtenim així que el rang de A, que és el rang dels vectors columna de A^T, és menor o igual que el rang dels vectors fila de A^T, que són els vectors columna de A. Tenim doncs la igualtat. $\square$

Obtenim clarament el següent corol·lari.

Corol·lari 2.1.3. *El rang d'una matriu A és igual al rang de la seva matriu transposada A^T.*

2.2 Producte de matrius

Per simplificar, en aquest apartat, considerarem matrius amb coeficients reals. Notem, però, que tant la definició del producte com les seves propietats són vàlides per a matrius amb coeficients complexos.

Considerem dues matrius A i B tals que el nombre de columnes de A és igual al nombre de files de B. Aleshores podem definir la *matriu producte* AB com segueix. Posem que A té m files i n columnes i B té n files i p columnes i escrivim

$$A = \left(a^i_j\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}, \quad B = \left(b^k_\ell\right)_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le \ell\le p}}.$$

Considerem la fila i de A i la columna ℓ de B i fem el seu producte en la forma següent.

$$\left(a^i_1\, a^i_2 \dots a^i_n\right) \begin{pmatrix} b^1_\ell \\ b^2_\ell \\ \vdots \\ b^n_\ell \end{pmatrix} = a^i_1 b^1_\ell + a^i_2 b^2_\ell + \cdots + a^i_n b^n_\ell,$$

és a dir, fem la suma dels productes de cada element de la fila i de A per l'element de la columna ℓ de B en la mateixa posició. Observem que tenim el mateix nombre d'elements a la fila de A que a la columna de B, per ser el nombre de columnes de A és igual al nombre de files de B. Podem escriure també la suma $a^i_1 b^1_\ell + a^i_2 b^2_\ell + \cdots + a^i_n b^n_\ell$ amb un sumatori.

$$a^i_1 b^1_\ell + a^i_2 b^2_\ell + \cdots + a^i_n b^n_\ell = \sum_{j=1}^n a^i_j b^j_\ell.$$

La matriu producte AB és la matriu $m \times p$ que té com a coeficient de la fila i i columna ℓ el producte de la fila i de A per la columna ℓ de B, és a dir

$$AB = \left(c^i_\ell\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le \ell\le p}}, \text{ amb } c^i_\ell = \sum_{j=1}^{n} a^i_j b^j_\ell.$$

Exemple 2.2.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 4\cdot(-1) + (-2)\cdot 6 & 1\cdot 5 + 4\cdot 2 + (-2)\cdot(-3) \\ 0\cdot 2 + 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 6 & 0\cdot 5 + 3\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 19 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 23 & -9 \\ -1 & 2 & 0 \\ 6 & 15 & -9 \end{pmatrix}.$$

Observació 2.2.2. Notem que, donades dues matrius A i B, pot estar definit el producte AB però no el producte BA. Per exemple, si A és 2×2 i B és 2×3. Com a l'exemple anterior, també pot ser que estiguin definits els dos productes però donin matrius de mides diferents. Si A i B són totes dues matrius quadrades $n\times n$, estan definits els dos productes AB i BA però en general no són iguals. Per exemple, tenim

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veiem ara propietats del producte de matrius.

Proposició 2.2.3 (Associativitat)**.** *Si A és matriu $m\times n$, B és matriu $n\times p$ i C és matriu $p\times q$, els productes de matrius $(AB)C$ i $A(BC)$ estan definits i es compleix $(AB)C = A(BC)$.*

Demostració. Posem

$$A = \left(a^i_j\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}, \quad B = \left(b^k_\ell\right)_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le \ell\le p}}, \quad C = \left(c^r_s\right)_{\substack{1\le r\le p\\ 1\le s\le q}}.$$

La matriu AB és una matriu $m \times p$ i el coeficient de AB de la fila i i columna ℓ és $\sum_{j=1}^{n} a_j^i b_\ell^j$. Com el nombre de columnes de AB és igual al nombre de files de C, el producte $(AB)C$ està definit i és una matriu $m \times q$. El seu coeficient de la fila i i columna s és $\sum_{\ell=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_j^i b_\ell^j) c_s^\ell = \sum_{\ell=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_j^i b_\ell^j c_s^\ell$, ja que el producte de nombres reals és distributiu respecte de la suma.

La matriu BC és una matriu $n \times q$ i el coeficient de BC de la fila ℓ i columna s és $\sum_{\ell=1}^{p} b_\ell^j c_s^\ell$. Com el nombre de columnes de A és igual al nombre de files de BC, el producte $A(BC)$ està definit i és una matriu $m \times q$. El seu coeficient de la fila i i columna s és $\sum_{j=1}^{n} a_j^i(\sum_{\ell=1}^{p} b_\ell^j c_s^\ell) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p} a_j^i b_\ell^j c_s^\ell$, ja que el producte de nombres reals és distributiu respecte de la suma. L'ordre dels sumatoris no canvia el resultat i obtenim doncs la igualtat. $\square$

Proposició 2.2.4 (Distributivitat per l'esquerra)**.** *Si A és matriu $m \times n$, B i C són matrius $n \times p$, els productes de matrius AB, AC i $A(B+C)$ estan definits i es compleix $A(B+C) = AB + AC$.*

Demostració. Posem

$$A = \left(a_j^i\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}, \quad B = \left(b_\ell^k\right)_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le \ell\le p}}, \quad C = \left(c_s^r\right)_{\substack{1\le r\le n\\ 1\le s\le p}}.$$

La matriu $B+C$ és una matriu $n \times p$ i el coeficient de $B+C$ de la fila k i columna ℓ és $b_\ell^k + c_\ell^k$. Com el nombre de columnes de A és igual al nombre de files de $B+C$, el producte $A(B+C)$ està definit i és una matriu $m \times p$. El seu coeficient de la fila i i columna ℓ és $\sum_{j=1}^{n} a_j^i(b_\ell^j + c_\ell^j) = \sum_{j=1}^{n}(a_j^i b_\ell^j + a_j^i c_\ell^j)$, ja que el producte de nombres reals és distributiu respecte de la suma.

La matriu AB és una matriu $m \times p$ i el coeficient de AB de la fila i i columna ℓ és $\sum_{j=1}^{n} a_j^i b_\ell^j$. La matriu AC és una matriu $m \times p$ i el coeficient de AC de la fila i i columna ℓ és $\sum_{j=1}^{n} a_j^i c_\ell^j$. La matriu $AB + AC$ és una matriu $m \times p$ i el coeficient de $AB + AC$ de la fila i i columna ℓ és $\sum_{j=1}^{n} a_j^i b_\ell^j + \sum_{j=1}^{n} a_j^i c_\ell^j = \sum_{j=1}^{n}(a_j^i b_\ell^j + a_j^i c_\ell^j)$, ja que la suma de nombres reals és commutativa. $\square$

Proposició 2.2.5 (Distributivitat per la dreta)**.** *Si B i C són matrius $m \times n$ i A és matriu $n \times p$, els productes de matrius BA, CA i $(B+C)A$ estan definit i es compleix $(B+C)A = BA + CA$.*

Demostració. La demostració és similar a la de la distributivitat per l'esquerra. $\square$

Proposició 2.2.6 (Compatibilitat entre productes)**.** *Si A és matriu $m \times n$, B és matriu $n \times p$ i c un nombre real, els productes de matrius $AB, (cA)B$ i $A(cB)$ estan definit i es compleix $c(AB) = (cA)B = A(cB)$.*

Demostració. Com cA és matriu $m \times n$ i cB és matriu $n \times p$, els productes $(cA)B$ i $A(cB)$ estan definits. Si posem

$$A = \left(a_j^i\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, \quad B = \left(b_\ell^k\right)_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le \ell \le p}},$$

les igualtats de l'enunciat s'obtenen de les definicions de producte de matrius i de producte d'una matriu per un escalar i de les igualtats

$$c \sum_{j=1}^{n} a_j^i b_\ell^k = \sum_{j=1}^{n} c a_j^i b_\ell^k = c \sum_{j=1}^{n} a_j^i c b_\ell^k,$$

que resulten de la distributivitat del producte respecte de la suma a $\mathbb{R}$. □

Diem *matriu identitat* $n \times n$ la matriu Id_n definida per

$$\mathrm{Id}_n = \left(a_j^i\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}, \text{ on } a_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Proposició 2.2.7. *Si A és una matriu $m \times n$, els productes $A \,\mathrm{Id}_n$ i $\mathrm{Id}_m A$ estan definits i es compleix $A \,\mathrm{Id}_n = A$ i $\mathrm{Id}_m A = A$.*

Demostració. Si posem $A = \left(a_j^i\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, \mathrm{Id}_n = \left(b_\ell^k\right)_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le \ell \le n}}$, el coeficient de la fila i i columna ℓ de $A \,\mathrm{Id}_n$ és

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^i b_\ell^j = a_\ell^i,$$

ja que $b_\ell^j = 1$, si $j = \ell$ i és 0 si $j \neq \ell$. Per tant $A \,\mathrm{Id}_n = A$. Anàlogament, es prova $\mathrm{Id}_m A = A$.

□

Proposició 2.2.8. *Si A és matriu $m \times n$ i B és matriu $n \times p$, el producte $B^T A^T$ està definit i es compleix $(AB)^T = B^T A^T$.*

Demostració. Si posem $A = \left(a^i_j\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, $B = \left(b^k_\ell\right)_{\substack{1\le k\le n\\1\le \ell\le p}}$, el coeficient de la fila i i columna ℓ de AB és $\sum_{j=1}^n a^i_j b^j_\ell$. Com B^T és matriu $p\times n$ i A^T és matriu $n\times m$, el producte $B^T A^T$ està definit. Posem $A^T = \left(\overline{a}^i_j\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}$, on $\overline{a}^i_j = a^j_i$, $B^T = \left(\overline{b}^k_\ell\right)_{\substack{1\le k\le p\\1\le \ell\le n}}$, on $\overline{b}^k_\ell = b^\ell_k$. El coeficient de la fila ℓ i columna i de $B^T A^T$ és $\sum_{j=1}^n \overline{b}^\ell_j \overline{a}^j_i = \sum_{j=1}^n b^j_\ell a^i_j$, per tant igual al coeficient de la fila i i columna ℓ de AB. $\square$

Notació. Donat el sistema d'equacions lineals (1.2.1), considerant la matriu $A = \left(a^i_j\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, les matrius columna $b = \begin{pmatrix} b^1\\ b^2\\ \vdots\\ b^n\end{pmatrix}$ i $x = \begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}$, i tenint en compte la definició de producte de matrius, podem escriure el sistema en forma abreujada com $Ax = b$.

2.3 Matriu inversa d'una matriu quadrada

Sigui A una matriu quadrada $n\times n$. Si A' és també una matriu quadrada $n\times n$, diem que A' és *inversa* de A si, i només si, compleix $AA' = A'A = \mathrm{Id}_n$.

Observació 2.3.1. No tota matriu quadrada té inversa. Per exemple $A = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ compleix $AB = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, per a $B = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$. Per tant, si A tingués inversa A', tindriem $B = \mathrm{Id}_2\, B = (A'A)B = A'(AB) = A'\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, contradicció.

Proposició 2.3.2. *Si una matriu quadrada A té inversa, aquesta és única.*

Demostració. Si A és matriu $n\times n$ i A' i A'' són inverses de A, tenim $A' = A'\,\mathrm{Id}_n = A'(AA'') = (A'A)A'' = \mathrm{Id}_n\, A'' = A''$. $\square$

Si una matriu quadrada A té inversa, direm que A és *invertible* o *regular*. Denotarem per A^{-1} la matriu inversa de A.

Observació 2.3.3. Si una matriu A té inversa A^{-1}, clarament A és la inversa de A^{-1}.

Observacions 2.3.4. 1) Si A és matriu invertible, d'una igualtat de matrius $AB = C$, deduim $B = A^{-1}C$. En efecte, tenim $AB = C \Rightarrow B = \mathrm{Id}\, B =$

$(A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}C$. Anàlogament, de $BA = C$, deduim $B = CA^{-1}$.
2) (Llei de simplificació) Si A és matriu invertible, d'una igualtat de matrius $AB = AC$, deduim $B = C$. Igualment, $BA = CA$ implica $B = C$.

Exemple 2.3.5. Només és correcte simplificar un factor d'un producte de matrius quan aquest factor és una matriu invertible. Per exemple, tenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

però

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposició 2.3.6. *Si A i B són matrius $n \times n$, ambdues invertibles, també és invertible la matriu producte AB i es compleix*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Demostració. N'hi ha prou amb veure que $B^{-1}A^{-1}$ compleix la condició de ser inversa de AB. Tenim $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A \operatorname{Id}_n A^{-1} = AA^{-1} = \operatorname{Id}_n$ i, anàlogament, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = \operatorname{Id}_n$. □

Proposició 2.3.7. *Si A és matriu invertible, també ho és la seva transposada i es compleix $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Demostració. N'hi ha prou amb veure que $(A^{-1})^T$ compleix la condició de ser inversa de A^T. Tenim $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = \operatorname{Id}^T = \operatorname{Id}$. Anàlogament $(A^{-1})^T A^T = \operatorname{Id}$. □

Ara volem caracteritzar les matrius que són invertibles. Fem primer dues definicions. Si A és matriu $n \times n$, una matriu $n \times n$, B, diem que és *inversa per l'esquerra de A* si compleix $BA = \operatorname{Id}_n$; una matriu $n \times n$, C, diem que és *inversa per la dreta de A* si compleix $AC = \operatorname{Id}_n$. Clarament, si A^{-1} és inversa de A, A^{-1} és inversa per l'esquerra i inversa per la dreta de A.

Lema 2.3.8. *Sigui A una matriu $n \times n$. Si B és inversa per l'esquerra de A i C és inversa per la dreta de A, és $B = C$.*

Demostració. Tenim $B = B \operatorname{Id}_n = B(AC) = (BA)C = \operatorname{Id}_n C = C$. □

Teorema 2.3.9. *Una matriu $n \times n$, A, té inversa si, i només si,* $\operatorname{rg} A = n$.

Aquest teorema es dedueix directament del lema següent.

Lema 2.3.10. *Sigui A una matriu $n \times n$. Es compleix*

1) Si A té inversa per la dreta, aleshores $\operatorname{rg} A = n$.

2) Si A té inversa per l'esquerra, aleshores $\operatorname{rg} A = n$.

3) Si $\operatorname{rg} A = n$, *aleshores A és invertible.*

Demostració. 1) Suposem que A té inversa per la dreta, C. Tenim doncs $AC = \mathrm{Id}_n$. Aquesta igualtat és equivalent a les n igualtats

$$c_j^1 A_1 + c_j^2 A_2 + \cdots + c_j^n A_n = I_j, 1 \leq j \leq n, \tag{2.3.1}$$

on $C = (c_j^i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, $A_j, 1 \leq j \leq n$, són les columnes de la matriu A i $I_j, 1 \leq j \leq n$ són les columnes de la matriu identitat. Les igualtats (2.3.1) donen que I_j és combinació lineal de les columnes de A, per a tot $j = 1 \dots n$. Com els vectors columna de la matriu indentitat són base de $\mathbb{R}^n$, tenim $\mathbb{R}^n = \langle I_1, \dots, I_n \rangle \subset \langle A_1, \dots, A_n \rangle$. Per tant els vectors columna de A generen $\mathbb{R}^n$ i obtenim $\operatorname{rg} A = n$.
2) Suposem que A té inversa per la esquerra, B. Tenim doncs $BA = \mathrm{Id}_n$. Aleshores tenim $A^T B^T = \mathrm{Id}_n$, és a dir B^T és inversa per la dreta de A^T. Per 1), això implica $\operatorname{rg} A^T = n$ i, aplicant 2.1.3, obtenim $\operatorname{rg} A = n$.
3) Suposem $\operatorname{rg} A = n$. Provarem primer que A té inversa per la dreta. Hem de provar que existeix una matriu $n \times n$, C tal que $AC = \mathrm{Id}_n$. Aquesta igualtat equival a les n igualtats $AC_j = I_j$, $1 \leq j \leq n$, on C_j és la columna j de C i I_j la columna j de la identitat. Hem de veure doncs que els n sistemes d'equacions lineals $AC_j = I_j$, amb incògnites els coeficients $c_j^1, \dots, c_j^n$ de la columna C_j de C, tenen solució. Com per a tots ells, la matriu és A, que, per hipòtesi, té rang n, són sistemes compatibles i determinats i, per tant, existeix inversa (única) per la dreta de A.

Hem provat doncs que tota matriu quadrada $n \times n$ amb rang igual a n té inversa per la dreta. Si $\operatorname{rg} A = n$, tenim $\operatorname{rg} A^T = n$ i, aplicant el que ja hem provat, tenim que existeix una matriu $n \times n$, B tal que $A^T B = \mathrm{Id}$. Tenim doncs $B^T A = \mathrm{Id}_n$, és a dir A té invers per l'esquerra i, per 2.3.8, A és invertible. $\square$

Corol·lari 2.3.11. *Sigui A una matriu $n \times n$. Si existeix una matriu $n \times n$, B tal que $BA = \mathrm{Id}_n$, aleshores A és invertible i $A^{-1} = B$. Si existeix una matriu $n \times n$, C tal que $AC = \mathrm{Id}_n$, aleshores A és invertible i $A^{-1} = C$.*

Demostració. Si existeix B com a l'enunciat, pel lema 2.3.10 1), tenim $\mathrm{rg}\, A = n$ i per 3), A és invertible i, tal com hem vist a la demostració del lema $A^{-1} = B$. Anàlogament es demostra la segona afirmació del corol·lari. $\square$

La demostració de l'apartat 3) del lema 2.3.10 dóna un mètode per calcular la inversa d'una matriu, resoldre els sistemes d'equacions $AC_j = I_j$. Com per a tots ells la matriu del sistema és A, es poden resoldre tots alhora aplicant reducció completa a la matriu $(A|\,\mathrm{Id})$. Al final del procés, les n columnes de la dreta ens donen A^{-1}, ja que cada una d'aquestes columnes és la solució d'un sistema $AC_j = I_j$.

Exemple 2.3.12. Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

i apliquem reducció a la matriu $(A|\,\mathrm{Id})$. Obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -8/9 & -7/9 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 11/9 & -8/9 & -7/9 \\ 0 & -7 & 0 & -14/9 & -7/9 & -14/9 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -8/9 & -7/9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 11/9 & -8/9 & -7/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -8/9 & -7/9 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7/9 & -10/9 & -11/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -8/9 & -7/9 \end{pmatrix}.$$

Obtenim doncs

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/9 & -10/9 & -11/9 \\ 2/9 & 1/9 & 2/9 \\ 2/9 & -8/9 & -7/9 \end{pmatrix}.$$

2.4 Canvi de base

Si E és un espai vectorial i $(e_1, \ldots, e_n)$ una base de E, un vector v de E queda determinat per les seves coordenades $(x^1, \ldots, x^n)$ en la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Volem veure ara la relació entre les coordenades d'un vector v de E en dues bases diferents. Sigui $(u_1, \ldots, u_n)$ una segona base de E i siguin

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} c_j^i e_i$$

les expressions dels vectors de la segona base en la primera. Per ser $(u_1, \ldots, u_n)$ una base, la matriu

$$C = \left(c_j^i\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

té rang n i és per tant invertible. Siguin ara $(y^1, \ldots, y^n)$ les coordenades del vector v de E en la base $(u_1, \ldots, u_n)$. Tenim

$$\begin{aligned} v &= y^1 u_1 + y^2 u_2 + \cdots + y^n u_n \\ &= y^1(c_1^1 e_1 + c_1^2 e_2 + \cdots + c_1^n e_n) + y^2(c_2^1 e_1 + c_2^2 e_2 + \cdots + c_2^n e_n) \\ &\quad + \cdots + y^n(c_n^1 e_1 + c_n^2 e_2 + \cdots + c_n^n e_n) \\ &= (c_1^1 y^1 + c_2^1 y^2 + \cdots + c_n^1 y^n) e_1 + (c_1^2 y^1 + c_2^2 y^2 + \cdots + c_n^2 y^n) e_2 \\ &\quad + \cdots + (c_1^n y^1 + c_2^n y^2 + \cdots + c_n^n y^n) e_n. \end{aligned}$$

Per tant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^1 &=& c_1^1 y^1 + c_2^1 y^2 + \cdots + c_n^1 y^n \\ x^2 &=& c_1^2 y^1 + c_2^2 y^2 + \cdots + c_n^2 y^n \\ \ldots && \\ x^n &=& c_1^n y^1 + c_2^n y^2 + \cdots + c_n^n y^n \end{array} \right.$$

Podem escriure aquesta igualtat en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ & & \vdots & \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

i, abreujadament,

$$(x) = C(y) \tag{2.4.1}$$

on (x) indica la matriu columna amb coeficients x^j i (y) la matriu columna amb coeficients y^j. Diem que C és la *matriu de canvi de base* de la base $(u_1, \dots, u_n)$ a la base $(e_1, \dots, e_n)$. La podem indicar per $C_{(u)\to(e)}$. Observem que C és la matriu que té per columnes les coordenades dels vectors $u_1, \dots, u_n$ en la base $(e_1, \dots, e_n)$. De (2.4.1), obtenim $(y) = C^{-1}(x)$. Per tant la matriu de canvi de base de la base $(e_1, \dots, e_n)$ a la base $(u_1, \dots, u_n)$ és C^{-1}. Tenim $C_{(e)\to(u)} = (C_{(u)\to(e)})^{-1}$.

2.5 Matrius elementals

En aquesta secció definirem tres tipus de matrius quadrades que s'anomenen elementals. Fixem un enter positiu n i totes les matrius que considerarem en aquesta secció seran matrius $n \times n$.

Per a k, ℓ enters amb $1 \leq k, \ell \leq n$ definim la matriu U_ℓ^k per

$$U_\ell^k = \left(u_j^i\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \text{ on } u_j^i = \begin{cases} 1 \text{ si } & i = k \text{ i } j = \ell \\ 0 \text{ en cas contrari.} \end{cases}$$

és a dir U_ℓ^k té el coeficient de la fila k i columna ℓ igual a 1 i tots els altres coeficients iguals a 0.

Proposició 2.5.1. *Si B és qualsevol matriu $n \times n$, la fila k del producte $U_\ell^k B$ és igual a la fila ℓ de B i totes les altres files de $U_\ell^k B$ són nul·les.*

Demostració. El coeficient de la fila i, columna s del producte $U_\ell^k B$ és $c_s^i = \sum_{j=1}^n u_j^i b_s^j$. Si $i \neq k$, tots els u_j^i són nuls i per tant $c_s^i = 0$. Si $i = k$, tenim que $u_\ell^k = 1$ i els altres u_j^k són nuls. Obtenim doncs $c_s^k = b_s^\ell$, per a $s = 1, \dots, n$. $\square$

2.5.2. Matrius elementals $R_\ell^k(a)$. Per a k, ℓ qualssevol amb $1 \leq k, \ell \leq n, k \neq \ell$, i $a \in \mathbb{R}$, definim

$$R^k_\ell(a) := \mathrm{Id}_n + aU^k_\ell,$$

és a dir $R^k_\ell(a)$ té els coeficients de la diagonal iguals a 1 i la resta iguals a 0, excepte el coeficient de la fila k i columna ℓ que és igual a a.

Proposició 2.5.3. *Si B és qualsevol matriu $n \times n$, la fila k del producte $R^k_\ell(a)B$ és el resultat de sumar-li a la fila k de B la fila ℓ de B, multiplicada per a. Totes les altres files de $R^k_\ell(a)B$ són iguals a les files corresponents de B.*

Demostració. Per la distributivitat del producte de matrius respecte de la suma, és $R^k_\ell(a)B = B + aU^k_\ell B$. Tenint en compte 2.5.1, obtenim el resultat. □

2.5.4. Matrius elementals P^k_ℓ. Per a k, ℓ qualssevol amb $1 \leq k, \ell \leq n, k < \ell$, definim

$$P^k_\ell := U^1_1 + \cdots + U^{k-1}_{k-1} + U^k_\ell + U^{k+1}_{k+1} + \cdots + U^{\ell-1}_{\ell-1} + U^\ell_k + U^{\ell+1}_{\ell+1} + \cdots + U^n_n,$$

és a dir, si posem $P^k_\ell = (c^j_i)$, tenim $c^i_i = 1$, excepte si $i = k$ o $i = \ell$, $c^k_\ell = c^\ell_k = 1$ i tots els altres coeficients de P^k_ℓ iguals a 0.

Proposició 2.5.5. *Si B és qualsevol matriu $n \times n$, la matriu $P^k_\ell B$ és el resultat d'intercanviar les files k i ℓ de B i deixar iguals les altres files.*

Demostració. Per la distributivitat del producte de matrius respecte de la suma, és $P^k_\ell(a)B = U^1_1 B + \cdots + U^{k-1}_{k-1}B + U^k_\ell B + U^{k+1}_{k+1}B + \cdots + U^{\ell-1}_{\ell-1}B + U^\ell_k B + U^{\ell+1}_{\ell+1}B + \cdots + U^n_n B$. Per 2.5.1, la fila i de $U^i_i B$ és igual a la fila i de B i les altres files de $U^i_i B$ són nul·les; la fila k de $U^k_\ell B$ és igual a la fila ℓ de B i totes les altres files de $U^k_\ell B$ són nul·les; la fila ℓ de $U^\ell_k B$ és igual a la fila k de B i totes les altres files de $U^\ell_k B$ són nul·les. La suma ens dóna doncs el resultat de l'enunciat. □

2.5.6. Matrius elementals $M^k(a)$. Per a k qualssevol, amb $1 \leq k \leq n$, i $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, definim

$$M^k(a) := U^1_1 + \cdots + U^{k-1}_{k-1} + aU^k_k + U^{k+1}_{k+1} + \cdots + U^n_n,$$

és a dir, $M^k(a)$ té els coeficients de la diagonal iguals a 1, excepte el k-èsim que és igual a a, i tots els altres coeficients iguals a 0.

Proposició 2.5.7. *Si B és qualsevol matriu $n \times n$, la matriu $M^k B$ és el resultat de multiplicar la fila k de B pel nombre a i deixar iguals les altres files.*

Demostració. Per la distributivitat del producte de matrius respecte de la suma, és $M^k(a)B = U_1^1 B + \cdots + U_{k-1}^{k-1} B + aU_k^k B + U_{k+1}^{k+1} B + \cdots + U_n^n B$. Per 2.5.1, la fila i de $U_i^i B$ és igual a la fila i de B i les altres files de $U_i^i B$ són nul·les; la fila k de $aU_k^k B$ és igual a la fila k de B, multiplicada per a, i totes les altres files de $aU_k^k B$ són nul·les. La suma ens dóna doncs el resultat de l'enunciat. $\square$

Proposició 2.5.8. *Totes les matrius elementals són invertibles i les seves inverses són també matrius elementals. Més exactament*

1) $(R_\ell^k(a))^{-1} = R_\ell^k(-a)$*, per a* k, ℓ *qualssevol amb* $1 \leq k, \ell \leq n, k \neq \ell$*, i qualsevol* $a \in \mathbb{R}$*.*

2) $P_\ell^k = P_\ell^k$*, per a* k, ℓ *qualssevol amb* $1 \leq k, \ell \leq n, k < \ell$*.*

3) $(M^k(a))^{-1} = M^k(a^{-1})$*, per a qualssevol* k*, amb* $1 \leq k \leq n$*, i qualsevol* $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$*.*

Demostració. 1) Per a B matriu $n \times n$ qualsevol, aplicant 2.5.3, tenim que $R_\ell^k(a)B$ és la matriu obtinguda sumant-li a la fila k de B la fila ℓ de B, multiplicada per a, i mantenint les altres files; $R_\ell^k(-a)(R_\ell^k(a)B)$ és la matriu obtinguda sumant-li a la fila k de $R_\ell^k(a)B$ la fila ℓ de $R_\ell^k(a)B$, que és igual a la fila ℓ de B, multiplicada per $-a$, i mantenint les altres files. Tenim doncs $R_\ell^k(-a)(R_\ell^k(a)B) = B$. En particular, prenent $B = \mathrm{Id}_n$, obtenim $R_\ell^k(-a)R_\ell^k(a) = \mathrm{Id}$.
2) Anàlogament a 1), usant ara 2.5.5, obtenim $P_\ell^k(P_\ell^k B) = B$, per a qualsevol matriu $n \times n$, B, i $P_\ell^k P_\ell^k = \mathrm{Id}$.
3) Anàlogament a 1), usant ara 2.5.7, obtenim $M^k(a^{-1})(M^k(a)B) = B$, per a qualsevol matriu $n \times n$, B, i $M^k(a^{-1})M^k(a) = \mathrm{Id}$.

Una altra manera de provar aquesta proposició és comprovar que el producte de cada matriu elemental per la matriu proposada com a inversa seva és igual a la matriu identitat. $\square$

La proposició següent ens dóna una forma de calcular la inversa d'una matriu regular.

Proposició 2.5.9. *Per a tota matriu $n \times n$ regular, B, existeixen matrius elementals $E_1, \dots, E_r$ tals que $E_r \dots E_1 B = \mathrm{Id}_n$.*

Demostració. Observem que, en ser B invertible, per tant $\operatorname{rg} B = n$, si apliquem reducció a B, queda una matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} \bar{b}_1^1 & \bar{b}_2^1 & \bar{b}_3^1 & \dots & \bar{b}_n^1 \\ 0 & \bar{b}_2^2 & \bar{b}_3^2 & \dots & \bar{b}_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{b}_n^n \end{pmatrix},$$

amb $\bar{b}_1^1 \neq 0, \bar{b}_2^2 \neq 0, \dots, \bar{b}_n^n \neq 0$. Per tant, si seguim el procés fins a fer reducció completa, ens queda la matriu identitat. Ara, per 2.5.3, 2.5.5 i 2.5.7, cada una de les operacions que fem en el procés de reducció equival a multiplicar la matriu resultant de l'operació anterior a l'esquerra per una matriu elemental. Tenim doncs que multiplicant B successivament per matrius elementals a l'esquerra, obtenim la matriu identitat. $\square$

Corol·lari 2.5.10. *Tota matriu $n \times n$ regular és producte de matrius elementals.*

Demostració. Si B és regular, per 2.5.9, tenim $E_r \dots E_1 B = \mathrm{Id}_n$, amb $E_1, \dots, E_r$ matrius elementals, que implica $B = E_1^{-1} \dots E_r^{-1}$ i l'inversa d'una matriu elemental també ho és per 2.5.8. $\square$

Exemple 2.5.11. Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

de la qual vam calcular la inversa a 2.3.12. Ara apliquem reducció a la matriu A i notem la matriu elemental corresponent a cada pas. Obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1^2(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1^3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2^3(8)M^3(7)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{M^3(-1/9)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3^1(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3^2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{M^2(-1/7)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2^1(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obtenim doncs

$$\begin{aligned} A^{-1} &= R_2^1(-2)M^2(-1/7)R_3^2(2)R_3^1(1)M^3(-1/9)R_2^3(8)M^3(7)R_1^3(2)R_1^2(-2) \\ &= \begin{pmatrix} 7/9 & -10/9 & -11/9 \\ 2/9 & 1/9 & 2/9 \\ 2/9 & -8/9 & -7/9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

i la descomposició de A com a producte de matrius elementals.

$$A = R_1^2(2)R_1^3(-2)M^3(1/7)R_2^3(-8)M^3(-9)R_3^1(-1)R_3^2(-2)M^2(-7)R_2^1(2).$$

2.6 Permutacions

En aquesta secció veurem les qüestions sobre permutacions que necessitem per definir el determinant d'una matriu quadrada. Considerem un enter $n \geq 2$ i el conjunt $C = \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$. Una *permutació* de n elements és una bijecció σ de C en C. Per tant cada enter $i \in C$ té una imatge $\sigma(i)$ per σ i tenim $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ si $i \neq j$ i tot enter de C és $\sigma(i)$ per a un únic $i \in C$. Si, per a un $i \in C$ es compleix $\sigma(i) = i$, diem que i és *fix* per σ. Es representa una permutació per una matriu de dues files, a la primera fila hi posem els enters $1, 2, \ldots, n$ ordenats i, a la segona fila, a sota de cada enter, hi posem la seva imatge per σ:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

La *composició* o producte de dues permutacions és la seva composició com a aplicacions. És a dir, la composició de les permutacions σ i τ és la permutació $\sigma\tau$ tal que $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$. La imatge d'un enter i per $\sigma\tau$, s'obté doncs fent la imatge de i per τ i després la imatge de $\tau(i)$ per σ.

Exemple 2.6.1. Amb $n = 6$, considerem

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculem $\sigma\tau$:

$$1 \xrightarrow{\tau} 3 \xrightarrow{\sigma} 5;\ 2 \xrightarrow{\tau} 2 \xrightarrow{\sigma} 4;\ 3 \xrightarrow{\tau} 6 \xrightarrow{\sigma} 6;\ 4 \xrightarrow{\tau} 4 \xrightarrow{\sigma} 1;\ 5 \xrightarrow{\tau} 1 \xrightarrow{\sigma} 2;\ 6 \xrightarrow{\tau} 5 \xrightarrow{\sigma} 3.$$

Obtenim doncs

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

De la mateixa manera, podem calcular

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Com veiem a l'exemple, la composició de permutacions no és commutativa.

Veiem ara propietats de la composició de permutacions.

Proposició 2.6.2. *1) Si σ, τ, ρ són permutacions de n elements, es compleix $(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$ (associaticitat).*

2) Considerem la permutació identitat Id definida per $\mathrm{Id}(i) = i$, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Si σ és qualsevol permutació de n elements, es compleix $\mathrm{Id}\,\sigma = \sigma\,\mathrm{Id} = \sigma$ (existència d'element neutre).

3) Per a tota permutació σ de n elements, existeix una permutació de n elements, que denotem per σ^{-1} i diem inversa de σ, que compleix $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \mathrm{Id}$ (existència d'element invers).

Demostració. 1) Per a $i \in \{1, \ldots, n\}$, qualsevol, tenim

$$((\sigma\tau)\rho)(i) = (\sigma\tau)(\rho)(i)) = \sigma(\tau(\rho(i)))$$
$$(\sigma(\tau\rho))(i) = \sigma((\tau)\rho)(i)) = \sigma(\tau(\rho(i)))$$

2) Per a $i \in \{1, \ldots, n\}$, qualsevol, tenim $(\mathrm{Id}\,\sigma)(i) = \mathrm{Id}(\sigma(i)) = \sigma(i)$ i $(\sigma\,\mathrm{Id})(i) = \sigma(\mathrm{Id}(i))) = \sigma(i)$.
3) Com cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ és igual a $\sigma(j)$ per a exactament un enter j de $\{1, \ldots, n\}$, podem definir σ^{-1} per $\sigma^{-1}(i) = j$ si, i només si, $i = \sigma(j)$ i es compleix clarament $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \mathrm{Id}$. □

Exemple 2.6.3. Per a

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

tenim

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Proposició 2.6.4. *Si σ, τ són permutacions de n elements, es compleix $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$.*

Demostració. Tenim $(\sigma\tau)(\tau^{-1}\sigma^{-1}) = \sigma(\tau\tau^{-1})\sigma^{-1} = \sigma\,\mathrm{Id}\,\sigma^{-1} = \sigma\sigma^{-1} = \mathrm{Id}$ i, igualment $(\tau^{-1}\sigma^{-1})(\sigma\tau) = \mathrm{Id}$. □

Quan fem composicions de permutacions, usem la notació habitual dels productes. Si m és un enter estríctament positiu, σ^m és el producte de m factors iguals a σ, $\sigma^{-m} = (\sigma^{-1})^m$, $\sigma^0 = \mathrm{Id}$.

Denotarem per S_n el conjunt de les permutacions de n elements. Les propietats del producte de permutacions demostrades a la Proposició 2.6.2 ens diuen que S_n amb el producte de permutacions és un grup. Es diu *grup simètric*.

Una *transposició* és una permutació que deixa fixos tots els elements de C excepte dos que es corresponen l'un amb l'altre per la transposició. Si aquests dos són i, j, denotem la transposició per (i, j) (o per (j, i)). Tenim doncs, suposant $i < j$,

$$(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i-1 & i & i+1 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & i-1 & j & i+1 & \ldots & j-1 & i & j+1 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Clarament $(i, j)^2 = \mathrm{Id}$. Per tant l'inversa d'una transposició és ella mateixa.

Proposició 2.6.5. *Tota permutació és producte de transposicions.*

Demostració. Sigui σ una permutació de n elements. Si $\sigma = \mathrm{Id}$, tenim $\sigma = (1,2)(1,2)$, per tant producte de transposicions. Si $\sigma \neq \mathrm{Id}$, sigui i_1 l'enter més petit que no és fix per σ. Tenim $\sigma(i_1) = j_1 \neq i_1$. Considerem la transposició $\tau_1 = (i_1, j_1)$ i fem el producte $\tau_1\sigma$. Per a $i < i_1$, tenim $\tau_1(\sigma(i)) = \tau_1(i) = i$ i $\tau_1(\sigma(i_1)) = \tau(j_1) = i_1$. Per tant l'enter més petit que no és fix per $\tau_1\sigma$ és més gran que i_1. Posem i_2 aquest enter i $j_2 = (\tau_1\sigma)(i_2)$. Considerem la transposició $\tau_2 = (i_2, j_2)$ i fem el producte $\tau_2\tau_1\sigma$. Per a $i < i_2$, tenim $\tau_2\tau_1(\sigma(i)) = \tau_2(\tau_1(i)) = i$ i $\tau_2(\tau_1(\sigma(i_2))) = \tau_2(j_2) = i_2$. Per tant l'enter més petit que no és fix per $\tau_2\tau_1\sigma$ és més gran que i_2. Repetint el procés, obtenim transposicions $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ tals que $\tau_r \dots \tau_2\tau_1\sigma = \mathrm{Id}$ i, per tant $\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_r$. $\square$

Exemple 2.6.6. Considerem la permutació

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tenim

$$(1,2)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad (2,4)(1,2)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$
$$(3,5)(2,4)(1,2)\sigma = \mathrm{Id}\,.$$

Per tant $\sigma = (1,2)(2,4)(3,5)$.

La descomposició d'una permutació en producte de transposicions no és única i també podem tenir dues descomposicions en producte de transposicions d'una mateixa permutació amb un nombre diferent de factors. Per exemple, $(1,2)(2,4)(3,5) = (1,3)(1,2)(2,3)(2,4)(3,5)$. Veurem ara que la paritat del nombre de factors en la descomposició d'una permutació en producte de transposicions depen només de la permutació. És a dir, si tenim dues descomposicions en producte de transposicions d'una mateixa permutació, el nombre de factors ha de ser parell en les dues descomposicions o bé senar en les dues descomposicions.

Proposició 2.6.7. *El producte d'un nombre senar de transposicions no pot ser igual a la permutació identitat.*

Demostració. Suposarem que la identitat és producte d'un nombre senar de transposicions i arribarem a contradicció. Siguin $\tau_1 = (a_1, b_1), \ldots, \tau_k = (a_k, b_k)$, amb k senar, transposicions tals que

$$\tau_1 \ldots \tau_k = \mathrm{Id}\,. \tag{2.6.1}$$

Podem suposar $a_i < b_i$, per a $1 \leq i \leq k$. Si $a_i \neq 1$, tenim $(a_i, b_i) = (1, a_i)(1, b_i)(1, a_i)$. Per a cada $a_i \neq 1$, en el producte (2.6.1), substituim el factor (a_i, b_i) pel producte $(1, a_i)(1, b_i)(1, a_i)$. Obtenim així una igualtat

$$(1, c_1)(1, c_2) \ldots (1, c_\ell) = \mathrm{Id}, \tag{2.6.2}$$

on tots els factors són transposicions de la forma $(1, c_i)$ i el nombre ℓ de factors és senar. Considerem c_i, amb $1 \leq i \leq \ell$. Com la transposició $(1, c_i)$ envia c_i a 1 i $(1, c_j)$ envia 1 a c_j, hi ha d'haver al producte (2.6.2) un nombre parell de factors $(1, c_i)$ per tal que la imatge de c_i pel producte sigui c_i. Com el producte de transposicions de (2.6.2) és igual a la identitat, la imatge de c_i ha de ser c_i, per a tot $i = 1, \ldots, \ell$. Per tant el nombre de factors a (2.6.2) ha de ser parell, contradicció. $\square$

Corol·lari 2.6.8. *Si tenim dues descomposicions en producte de transposicions d'una permutació, aleshores el nombre de factors ha de ser parell en les dues descomposicions o bé senar en les dues descomposicions.*

Demostració. Sigui σ una permutació de n elements i suposem $\sigma = t_1 t_2 \ldots t_k$ i $\sigma = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_\ell$, amb $t_1, t_2, \ldots, t_k, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\ell$ transposicions. Aleshores tenim $\sigma^{-1} = \tau_\ell \ldots \tau_2 \tau_1$ i, per tant, $t_1 t_2 \ldots t_k \tau_\ell \ldots \tau_2 \tau_1 = \mathrm{Id}$. Per la Proposició 2.6.7, ha de ser $k + \ell$ parell i, per tant k i ℓ tots dos parells o tots dos senars. $\square$

Una permutació σ es diu *parella* si descompon en producte d'un nombre parell de transposicions, i es diu *senar* si descompon en producte d'un nombre senar de transposicions. Definim la *signatura* $\varepsilon(\sigma)$ d'una permutació σ per

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{si } \ \sigma \text{ és parella,} \\ -1 & \text{si } \ \sigma \text{ és senar.} \end{cases}$$

Veiem ara propietats de la signatura.

Proposició 2.6.9. *1)* $\varepsilon(\mathrm{Id}) = +1$.

2) Per a tota permutació σ, es compleix $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

3) Si σ, ρ són permutacions de n elements, es té $\varepsilon(\sigma\rho) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\rho)$.

Demostració. 1) Es compleix per la Proposició 2.6.7.
2) Si $\sigma = t_1 \dots t_k$, amb $t_1, \dots, t_k$ transposicions, aleshores $\sigma^{-1} = t_k \dots t_1$, per tant les signatures són iguals.
3) Si $\sigma = t_1 \dots t_k$, i $\rho = \tau_1 \dots \tau_\ell$, amb $t_1, \dots, t_k, \tau_1, \dots, \tau_\ell$ transposicions, tenim $\sigma\rho = t_1 \dots t_k \tau_1 \dots \tau_\ell$. Tenint en compte que $k + \ell$ és parell si, i només si, k i ℓ són tots dos parells o tots dos senars, obtenim el resultat.

□

Proposició 2.6.10. *En el conjunt S_n de permutacions de n elements hi ha exactement el mateix nombre de permutacions parelles que de permutacions senars.*

Demostració. Posem A_n el conjunt de permutacions parelles de n elements. Aleshores el conjunt de permutacions senars de n elements és el complementari de A_n a S_n. Si t és una transposició i σ és una permutació parella, aleshores σt és permutació senar. Podem definir doncs una aplicació

$$f : A_n \to S_n \setminus A_n, \sigma \mapsto \sigma t.$$

Ara, com $t^2 = \mathrm{Id}$, l'aplicació

$$g : S_n \setminus A_n \to A_n, \rho \mapsto \rho t$$

compleix $g \circ f = \mathrm{Id}_{A_n}$ i $f \circ g = \mathrm{Id}_{Sn \setminus A_n}$ i és doncs la inversa de f. Per tant, f és bijectiva i els dos conjunts A_n i $S_n \setminus A_n$ tenen el mateix nombre d'elements. □

2.7 Determinants

Volem definir el determinant d'una matriu quadrada $n \times n$ com un nombre real associat a la matriu que compleixi que el determinant és nul si, i només si, la matriu té rang $< n$. Si M és una matriu $n \times n$, escriurem el seu determinant com $|M|$ o $\det(M)$. Recordem primer el determinant d'una matriu 2×2 i d'una matriu 3×3.

Tenim

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1,$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1a_2^2a_3^3 + a_1^3a_2^1a_3^2 + a_1^2a_2^3a_3^1 - a_1^3a_2^2a_3^1 - a_1^1a_2^3a_3^2 - a_1^2a_2^1a_3^3.$$

Observem que cada sumand de l'expressió del determinant d'una matriu 2×2 o 3×3 és el producte d'un element de cada fila i cada columna de la matriu amb un signe. Per tant, en cada sumand els índexs de fila i de columna de cada factor són diferents. Podem doncs associar a cada sumand una permutació que envia l'índex de columna de cada factor al seu índex de fila. En el cas de la matriu 2×2

$$a_1^1a_2^2 \to \mathrm{Id}, \quad a_1^2a_2^1 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,2),$$

i en el cas de la matriu 3×3,

$$\begin{aligned} &a_1^1a_2^2a_3^3 \to \mathrm{Id}, && a_1^3a_2^1a_3^2 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3)(2,3), \\ &a_1^2a_2^3a_3^1 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2)(2,3), && a_1^3a_2^2a_3^1 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3), \\ &a_1^1a_2^3a_3^2 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,3), && a_1^2a_2^1a_3^3 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2). \end{aligned}$$

Veiem també que el signe de cada sumand és la signatura de la permutació corresponent. A més, el conjunt de permutacions de dos elements és $S_2 = \{\mathrm{Id}, (1,2)\}$ i el conjunt de permutacions de 3 elements és

$$S_3 = \{\mathrm{Id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, (1,3), (2,3), (1,2)\}.$$

Donem ara la definició del determinant d'una matriu $n \times n$, que generalitza les dels casos $n = 2$ i $n = 3$.

Definició 2.7.1. Per a $A = \left(a_j^i\right)_{1 \le i,j \le n}$, definim

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)}. \tag{2.7.1}$$

Tenim doncs que el determinant d'una matriu $n \times n$ és una suma on cada sumand correspon a una permutació σ de n elements. El sumand corresponent a la permutació σ és el producte d'un element de cada fila i columna de forma que l'índex de fila és la imatge per σ de l'índex de columna i el signe del sumand és la signatura de σ.

Exemple 2.7.2. Una matriu quadrada $A = \left(a^i_j\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ s'anomena *triangular superior* si compleix $a^i_j = 0$ sempre que $i > j$ i A s'anomena *triangular inferior* si compleix $a^i_j = 0$ sempre que $i < j$. Veiem que el determinant d'una matriu triangular és igual al producte dels elements de la seva diagonal.

En efecte, suposem que A és triangular inferior i mirem quins són els sumands no nuls de la fòrmula (2.7.1), tenint en compte que cada sumand és el producte d'un element de cada fila i cada columna. L'únic element no nul de la primera fila és a^1_1. Hem de triar ara un element de la segona fila, que no sigui de la primera columna, l'única possibilitat és doncs a^2_2. Igualment, l'únic element no nul de la tercera fila, que no sigui de les columnes primera i segona, és a^3_3. D'aquesta forma arribem a que l'únic producte no nul és $a^1_1 a^2_2 a^3_3 \dots a^n_n$.

Si A és triangular superior ho provem de forma anàloga considerant les columnes en compte de les files.

Uma matriu quadrada $A = \left(a^i_j\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ s'anomena *diagonal* si compleix $a^i_j = 0$ sempre que $i \neq j$. De forma anàloga al cas de les matriu triangulars, es prova que el determinant d'una matriu diagonal és el producte dels elements de la diagonal. En particular, el determinant de la matriu identitat és igual a 1.

Notem que el conjunt S_n de les permutacions de n elements té $n!$ (n factorial) elements. Per a $n = 4$, la fòrmula (2.7.1) té 24 sumands. Veurem ara propietats de determinants que ens permetran de calcular determinants de matrius quadrades $n \times n$, per a $n \geq 4$.

Per a una matriu A, $n \times n$, posem $A_1, A_2, \dots, A_n$ les seves columnes. Posem $\det(A_1, A_2, \dots, A_n)$ el determinant de la matriu A que té columnes $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Proposició 2.7.3 (multilinearitat)**.** *Sigui A una matriu $n \times n$ i siguin $A_1, A_2, \dots, A_n$ les seves columnes.*
1) Si la columna k de la matriu A és suma de dues columnes $A_k = B_k + C_k$, es compleix

$$\det(A_1, \dots, A_{k-1}, B_k + C_k, A_{k+1}, \dots, A_n)$$
$$= \det(A_1, \dots, A_{k-1}, B_k, A_{k+1}, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_{k-1}, C_k, A_{k+1}, \dots, A_n).$$

2) Si b és un nombre real, es compleix

$$\det(A_1, \dots, A_{k-1}, bA_k, A_{k+1}, \dots, A_n) = b \det(A_1, \dots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n).$$

Demostració. 1) Si $A = (a^i_j)_{1 \leq i,j \leq n}, B_k = (b^i_k)_{1 \leq i \leq n}, C_k = (c^i_k)_{1 \leq i \leq n}$, tenim $a^i_k = b^i_k + c^i_k, 1 \leq i \leq n$ i

$$\det((A_1, \dots, A_{k-1}, B_k + C_k, A_{k+1}, \dots, A_n)$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \dots a_{k-1}^{\sigma(k-1)} (b_k^{\sigma(k)} + c_k^{\sigma(k)}) a_{k+1}^{\sigma(k+1)} \dots a_n^{\sigma(n)}$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \dots a_{k-1}^{\sigma(k-1)} b_k^{\sigma(k)} a_{k+1}^{\sigma(k+1)} \dots a_n^{\sigma(n)}$$
$$+ \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \dots a_{k-1}^{\sigma(k-1)} c_k^{\sigma(k)} a_{k+1}^{\sigma(k+1)} \dots a_n^{\sigma(n)}$$
$$= \det(A_1, \dots, A_{k-1}, B_k, A_{k+1}, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_{k-1}, C_k, A_{k+1}, \dots, A_n).$$

2)
$$\det(A_1, \dots, A_{k-1}, bA_k, A_{k+1}, \dots, A_n)$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \dots a_{k-1}^{\sigma(k-1)} b a_k^{\sigma(k)} a_{k+1}^{\sigma(k+1)} \dots a_n^{\sigma(n)}$$
$$= b \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \dots a_{k-1}^{\sigma(k-1)} a_k^{\sigma(k)} a_{k+1}^{\sigma(k+1)} \dots a_n^{\sigma(n)}$$
$$= b \det(A_1, \dots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n).$$

□

De la Proposició 2.7.3 es dedueix de forma immediata el següen corol·lari

Corol·lari 2.7.4. *Sigui A una matriu $n \times n$ i siguin $A_1, A_2, \dots, A_n$ les seves columnes. Si A_k és combinació lineal de vectors columna $C_1, \dots, C_r$, $A_k = \sum_{\ell=1}^r b_\ell C_\ell$, es compleix*

$$\det(A_1, \dots, A_{k-1}, \sum_{\ell=1}^r b_\ell C_\ell, A_{k+1}, \dots, A_n)$$
$$= \sum_{\ell=1}^r b_\ell \det(A_1, \dots, A_{k-1}, C_\ell, A_{k+1}, \dots, A_n).$$

Proposició 2.7.5 (Alternància)**.** *Si una matriu quadrada té dues columnes iguals, aleshores el seu determinant és igual a 0.*

Demostració. Sigui $A = (a^i_j)_{1\leq i,j\leq n}$ i suposem que les columnes k i ℓ, amb $k < \ell$ són iguals. Posem $t = (k, \ell)$. Per la Proposició 2.6.10, sabem que $\sigma \mapsto \sigma t$ defineix una bijecció de A_n en $S_n \setminus A_n$. Per a una permutació parella σ fixada, el sumand corresponent a σ és

$$a_1^{\sigma(1)} \dots a_k^{\sigma(k)} \dots a_\ell^{\sigma(\ell)} \dots a_n^{\sigma(n)}$$

ja que $\varepsilon(\sigma) = +1$, i el corresponent a σt

$$\begin{aligned} &-a_1^{\sigma(t(1))} \dots a_k^{\sigma(t(k))} \dots a_\ell^{\sigma(t(\ell))} \dots a_n^{\sigma(t(n))} \\ &= -a_1^{\sigma(1)} \dots a_k^{\sigma(\ell)} \dots a_\ell^{\sigma(k)} \dots a_n^{\sigma(n)}, \end{aligned}$$

ja que $\varepsilon(\sigma t) = -1$. Ara, com les columnes k i ℓ de A són iguals, tenim $a_k^{\sigma(\ell)} = a_\ell^{\sigma(\ell)}$ i $a_\ell^{\sigma(k)} = a_k^{\sigma(k)}$. Per tant el sumand corresponent a σt és igual al corresponent a σ, amb el signe canviat. Tenim doncs que cada sumand corresponent a una permutació parella σ s'anul·la amb el sumand corresponent a la permutació senar σt i el determinant és igual a 0. $\square$

D'aquesta proposició deduim uns quants corol·laris, que usarem en el càlcul de determinants. En tots ells, A és una matriu quadrada amb columnes $A_1, \dots, A_n$.

Corol·lari 2.7.6. *Si una columna de A és combinació lineal de les altres columnes, $A_j = \sum_{k\neq j} b_k A_k$, aleshores* $\det A = 0$.

Demostració. Pel corol·lari 2.7.4, tenim

$$\begin{aligned} &\det(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_n) \\ &\quad = \textstyle\sum_{k\neq j} \det(A_1, \dots, A_{j-1}, A_k, A_{j+1}, \dots, A_n) = 0, \end{aligned}$$

ja que cada un dels determinants $\det(A_1, \dots, A_{j-1}, A_k, A_{j+1}, \dots, A_n)$ té dues columnes iguals. $\square$

Corol·lari 2.7.7. *Si a una columna de A li sumem una combinació lineal de les altres columnes, el determinant de A no varia.*

Demostració. Suposem que a la columna j de A li sumem una combinació lineal C de les altres columnes. Tenim

$$\begin{aligned}&\det(A_1,\dots,A_{j-1},A_j+C,A_{j+1},\dots,A_n)\\&=\det(A_1,\dots,A_{j-1},A_j,A_{j+1},\dots,A_n)+\det(A_1,\dots,A_{j-1},C,A_{j+1},\dots,A_n)\end{aligned}$$

i el segon sumand és zero pel corol·lari anterior. □

Corol·lari 2.7.8. *Si intercanviem les posicions de dues columnes de A, el determinant de A canvia de signe.*

Demostració. Si $j < k$, per 2.7.5 i aplicant dues vegades 2.7.3, tenim

$$\begin{aligned}0 &= \det(A_1,\dots,A_{j-1},A_j+A_k,A_{j+1},\dots,A_{k-1},A_j+A_k,A_{k+1},\dots,A_n)\\&= \det(A_1,\dots,A_{j-1},A_j,A_{j+1},\dots,A_{k-1},A_j,A_{k+1},\dots,A_n)\\&+\det(A_1,\dots,A_{j-1},A_k,A_{j+1},\dots,A_{k-1},A_j,A_{k+1},\dots,A_n)\\&+\det(A_1,\dots,A_{j-1},A_j,A_{j+1},\dots,A_{k-1},A_k,A_{k+1},\dots,A_n)\\&+\det(A_1,\dots,A_{j-1},A_k,A_{j+1},\dots,A_{k-1},A_k,A_{k+1},\dots,A_n).\end{aligned}$$

De nou per 2.7.5, el primer i l'últim sumands són nuls i obtenim el resultat. □

Corol·lari 2.7.9. *Per a qualsevol $\sigma \in S_n$, tenim*

$$\det(A_{\sigma(1)},\dots,A_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\det(A_1,\dots,A_n).$$

És a dir si permutem les columnes de la matriu A, el determinant no varia si la permutació és parella i canvia de signe si la permutació és senar.

Demostració. Descomponent σ en producte de transposicions i aplicant reiteradament 2.7.8, obtenim el resultat. □

Proposició 2.7.10. *Si A i B són matrius quadrades $n \times n$, es compleix $\det(AB) = \det A \det B$.*

Demostració. Si A té columnes $A_1,\dots,A_n$ i $B = (b^r_s)_{1\le r,s\le n}$, les columnes de AB són

$$\left(\sum_{j_1=1}^n b_1^{j_1}A_{j_1},\sum_{j_2=1}^n b_2^{j_2}A_{j_2},\dots,\sum_{j_n=1}^n b_n^{j_n}A_{j_n}\right).$$

Usant el corol·lari 2.7.4 per a cada columna, tenim

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det\left(\textstyle\sum_{j_1=1}^n b_1^{j_1} A_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n b_2^{j_2} A_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^n b_n^{j_n} A_{j_n}\right) \\ &= \textstyle\sum_{j_1,j_2,\dots,j_n=1}^n b_1^{j_1} b_2^{j_2} \dots b_n^{j_n} \det(A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_n}). \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

En la expressió anterior, els determinants que tenen dos dels índexs $j_1, j_2, \dots, j_n$ repetits són nuls i els podem descartar. A cada un dels restants, amb $j_1, j_2, \dots, j_n$ tots diferents, podem associar la permutació

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

i reescriure el corresponent sumand

$$\begin{aligned} & b_1^{j_1} b_2^{j_2} \dots b_n^{j_n} \det(A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_n}) \\ &= b_1^{\sigma(1)} b_2^{\sigma(2)} \dots b_n^{\sigma(n)} \det(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(n)}) \\ &= \varepsilon(\sigma) b_1^{\sigma(1)} b_2^{\sigma(2)} \dots b_n^{\sigma(n)} \det(A_1, A_2, \dots, A_n), \end{aligned}$$

usant 2.7.9 per a la segona igualtat. Com les n-ples $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ sense índexs repetits es corresponen bijectivament amb les corresponents permutacions i hi apareixen totes les permutacions de S_n, de (2.7.2), obtenim

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_1^{\sigma(1)} b_2^{\sigma(2)} \dots b_n^{\sigma(n)} \det(A_1, A_2, \dots, A_n) \\ &= (\textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_1^{\sigma(1)} b_2^{\sigma(2)} \dots b_n^{\sigma(n)}) \det(A_1, A_2, \dots, A_n) = \det B \det A. \end{aligned}$$

$\square$

Proposició 2.7.11 (Determinant de la matriu transposada). *Per a qualsevol matriu quadrada A, es compleix* $\det(A^T) = \det A$.

Demostració. Si $A = (a_j^i)$, tenim $A^T = (b_j^i)$ amb $b_j^i = a_i^j$. Tenim doncs

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_1^{\sigma(1)} \dots b_n^{\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)}^1 \dots a_{\sigma(n)}^n.$$

Si ara per a cada índex i, posem $j = \sigma(i)$, tenim $i = \sigma^{-1}(j)$ i podem escriure, reordenant els factors,

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_1^{\sigma^{-1}(1)} \dots a_n^{\sigma^{-1}(n)}. \tag{2.7.3}$$

Si fem correspondre a cada permutació σ la seva inversa σ^{-1} tenim una bijecció de S_n en S_n. Per tant, si σ varia en tot el conjunt S_n, la seva inversa també. Si posem $\tau = \sigma^{-1}$, tindrem $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma)$ i, de (2.7.3), obtenim

$$\det(A^T) = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) a_1^{\tau(1)} \dots a_n^{\tau(n)} = \det(A).$$

□

Observació 2.7.12. Tenint en compte la Proposició 2.7.11, obtenim que els enunciats de 2.7.3, 2.7.4, 2.7.5, 2.7.6, 2.7.7, 2.7.8 i 2.7.9 són igualment vàlids si hi canviem columnes per files.

Si $A = (a_j^i)_{1 \le i,j \le n}$, diem *menor complementari* del coeficient a_j^i de la matriu A i denotem per $\overline{A}_j^i$ el determinant de la matriu $(n-1) \times (n-1)$ que s'obté treient a A la fila i i la columna j. Diem *adjunt* de a_j^i i denotem per A_j^i el producte de $(-1)^{i+j}$ per $\overline{A}_j^i$.

Proposició 2.7.13 (Desenvolupament del determinant per una columna)**.** *Si A és matriu $n \times n$, es compleix*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_j^i A_j^i,$$

per a qualsevol columna j de A. És a dir, obtenim el determinant de A com la suma de cada coeficient de la columna j multiplicat pel seu adjunt.

Demostració. Primer provem un cas particular, la igualtat de determinants

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_{n-1}^1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & 0 \\ a_1^n & \dots & a_{n-1}^n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_{n-1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{2.7.4}$$

Com el determinant de l'esquerra de la igualtat té a la columna n un únic coeficient no nul, l'1 de la fila n, els sumands de la expressió d'aquest determinant que corresponen a permutacions amb $\sigma(n) \neq n$ seran nuls i els podem descartar. Tenim doncs

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_{n-1}^1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & 0 \\ a_1^n & \dots & a_{n-1}^n & 1 \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(n)=n} \varepsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \dots a_{n-1}^{\sigma(n-1)} a_n^n. \tag{2.7.5}$$

Ara, si a cada permutació de n elements que deixa n fix

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n-1) & n \end{pmatrix}$$

li fem correspondre la permutació de $n-1$ elements

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-1 \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n-1) \end{pmatrix}$$

obtenim una bijecció entre el conjunt de les permutacions de n elements amb $\sigma(n) = n$ i el conjunt S_{n-1} de les permutacions de $n-1$ elements i, a més, $\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma)$, ja que una descomposició de σ' en producte de transposicions també ho és de σ. Per tant, tenint en compte $a_n^n = 1$, la suma de (2.7.5) es pot escriure com

$$\sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma') a_1^{\sigma'(1)} \dots a_{n-1}^{\sigma'(n-1)},$$

que és igual al determinant de la dreta de (2.7.4).

Provem ara l'enunciat de la proposició. Podem escriure la columna j de A com $A_j = \sum_{i=1}^n a_j^i C_i$, on C_i és el vector columna que té 1 en el lloc i i 0 en tots els altres llocs. Aplicant el corol·lari 2.7.4, obtenim

$$\det(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^n a_j^i \det(A_1, \dots, A_{j-1}, C_i, A_{j+1}, \dots, A_n),$$

En forma de matriu, tenim

$$\det(A_1,\ldots,A_{j-1},C_i,A_{j+1},\ldots,A_n) = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_{j-1}^1 & 0 & a_{j+1}^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_1^{i-1} & \ldots & a_{j-1}^{i-1} & 0 & a_{j+1}^{i-1} & \ldots & a_n^{i-1} \\ a_1^{i} & \ldots & a_{j-1}^{i} & 1 & a_{j+1}^{i} & \ldots & a_n^{i} \\ a_1^{i+1} & \ldots & a_{j-1}^{i+1} & 0 & a_{j+1}^{i+1} & \ldots & a_n^{i+1} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n} & \ldots & a_{j-1}^{n} & 0 & a_{j+1}^{n} & \ldots & a_n^{n} \end{vmatrix}.$$

En aquest determinant, permutem files i columnes fins a obtenir el determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_{j-1}^1 & a_{j+1}^1 & \ldots & a_n^1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_1^{i-1} & \ldots & a_{j-1}^{i-1} & a_{j+1}^{i-1} & \ldots & a_n^{i-1} & 0 \\ a_1^{i+1} & \ldots & a_{j-1}^{i+1} & a_{j+1}^{i+1} & \ldots & a_n^{i+1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n} & \ldots & a_{j-1}^{n} & a_{j+1}^{n} & \ldots & a_n^{n} & 0 \\ a_1^{i} & \ldots & a_{j-1}^{i} & a_{j+1}^{i} & \ldots & a_n^{i} & 1 \end{vmatrix}. \tag{2.7.6}$$

Observem que, per passar d'un determinant a l'altre, hem fet les transposicions de columnes $(j,j+1),(j+1,j+2),\ldots,(n-1,n)$, per tant $n-j$ transposicions i les transposicions de files $(i,i+1),(i+1,i+2),\ldots,(n-1,n)$, per tant $n-i$ transposicions. Tenim doncs, aplicant 2.7.8 i l'observació 2.7.12, que un determinant és igual a l'altre multiplicat per $(-1)^{(n-j)+(n-i)} = (-1)^{2n-i-j} = (-1)^{i+j}$, ja que els enters $2n-i-j$ i $i+j$ són tots dos parells o tots dos senars. Ara, tenint en compte (2.7.4), resulta

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_{j-1}^1 & a_{j+1}^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{i-1} & \ldots & a_{j-1}^{i-1} & a_{j+1}^{i-1} & \ldots & a_n^{i-1} \\ a_1^{i+1} & \ldots & a_{j-1}^{i+1} & a_{j+1}^{i+1} & \ldots & a_n^{i+1} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n} & \ldots & a_{j-1}^{n} & a_{j+1}^{n} & \ldots & a_n^{n} \end{vmatrix} = \overline{A}_j^i.$$

Hem obtingut doncs $\det(A_1, \ldots, A_{j-1}, C_i, A_{j+1}, \ldots, A_n) = (-1)^{i+j}\overline{A}_j^i = A_j^i$ i, per tant $\det A = \sum_{i=1}^n a_j^i A_j^i$.

$\square$

Els resultats anteriors ens permeten calcular determinants de matrius quadrades $n \times n$, amb $n > 3$. Donada una matriu quadrada A, sumem múltiples d'una fila a totes les altres de forma a obtenir que una columna de la matriu, diguem-li j, tingui només un element no nul. Per 2.7.7, 2.7.8 i 2.7.12, el determinanat no varia o canvia de signe si permutem files. Desenvolupant el determinant per la columna j, el determinant inicial és igual al determinant d'una matriu $(n-1) \times (n-1)$.

Exemple 2.7.14. Volem calcular el determinant de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenim

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 10 & 14 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 8 & 5 \\ -3 & -1 & -2 & -6 \\ -6 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 10 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & -26 & -21 \\ 0 & 7 & -46 & -34 \\ 0 & 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \begin{vmatrix} 2 & -26 & -21 \\ 7 & -46 & -34 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = (-1)488 = -488. \end{aligned}$$

2.8 Aplicacions dels determinants

Teorema 2.8.1. *Una matriu $n \times n$ té rang n si, i només si,* $\det A \neq 0$.

Demostració. Si $\operatorname{rg} A < n$, una de les columnes de A és combinació lineal de les altres, per 1.6.5, i, per 2.7.4, $\det A = 0$. Si $\operatorname{rg} A = n$, aleshores A és invertible, per 2.3.10 i, si A^{-1} és la matriu inversa de A tenim $AA^{-1} = \mathrm{Id}$ que implica, per 2.7.2, $(\det A)(\det A^{-1}) = \det \mathrm{Id} = 1$, per tant $\det A \neq 0$. $\square$

Volem veure ara com determinar el rang d'una matriu usant determinants. Si $A = \left(a^i_j\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ és una matriu $m \times n$, diem *submatriu de* A de les files $i_1, i_2, \dots, i_r$, on $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$, i columnes $j_1, j_2, \dots, j_s$, on $j_1 < j_2 < \cdots < j_s$, la matriu formada per aquestes files i columnes de la matriu A, és a dir la matriu $r \times s$

$$A' = \begin{pmatrix} a^{i_1}_{j_1} & a^{i_1}_{j_2} & \dots & a^{i_1}_{j_s} \\ a^{i_2}_{j_1} & a^{i_2}_{j_2} & \dots & a^{i_2}_{j_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{i_r}_{j_1} & a^{i_r}_{j_2} & \dots & a^{i_r}_{j_s} \end{pmatrix}.$$

Si $r = s$, és a dir si A' és una matriu quadrada, el determinant de A' es diu *menor de* A d'ordre r, de les files $i_1, i_2, \dots, i_r$ i columnes $j_1, j_2, \dots, j_r$.

Corol·lari 2.8.2. *Si A és una matriu i $\operatorname{rg} A = r$, aleshores*

1) tots els menors de A d'ordre $> r$ són nuls;

2) A té un menor no nul d'ordre r.

Demostració. 1) Com $\operatorname{rg} A = r$, si un menor de A és d'ordre $> r$, les seves columnes són linealment dependents, per tant el menor és igual a 0.
2) Si $\operatorname{rg} A = r$, existeixen r files de A que són linealment independents. Considerem la submatriu A' de A formada per aquestes files. Com $\operatorname{rg} A' = r$, té r columnes linealment independents. La submatriu A'' de A' formada per aquestes r columnes és una matriu $r \times r$ que té rang r i, pel Teorema 2.8.1 té determinant no nul. Com A'' és submatriu de A, tenim un menor de A d'ordre r no nul. $\square$

Sigui $A = \left(a^i_j\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ una matriu $m \times n$ i sigui

$$M := \begin{vmatrix} a^{i_1}_{j_1} & a^{i_1}_{j_2} & \dots & a^{i_1}_{j_r} \\ a^{i_2}_{j_1} & a^{i_2}_{j_2} & \dots & a^{i_2}_{j_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{i_r}_{j_1} & a^{i_r}_{j_2} & \dots & a^{i_r}_{j_r} \end{vmatrix}.$$

un menor de A d'ordre r, amb $r < m$ i $r < n$. Els menors de A d'ordre $r+1$ obtinguts afegint a M una fila i una columna de A, és a dir de la forma

$$\begin{vmatrix} a^{i_1}_{j_1} & a^{i_1}_{j_2} & \dots & a^{i_1}_{j_r} & a^{i_1}_{j} \\ a^{i_2}_{j_1} & a^{i_2}_{j_2} & \dots & a^{i_2}_{j_r} & a^{i_2}_{j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a^{i_r}_{j_1} & a^{i_r}_{j_2} & \dots & a^{i_r}_{j_r} & a^{i_r}_{j} \\ a^{i}_{j_1} & a^{i}_{j_2} & \dots & a^{i}_{j_r} & a^{i}_{j} \end{vmatrix}$$

es diuen *menors orlants de M.*

Proposició 2.8.3. *Una matriu A té rang r si, i només si, A té un menor M d'ordre r, no nul i tots els menors d'ordre $r+1$ de A, orlants de M, són nuls.*

Demostració. Si A té rang r, per 2.8.2, A té un menor d'ordre r i tots els menors de A d'ordre $r+1$ són nuls. Recíprocament, suposem que A té un menor M d'ordre r, no nul i tots els menors d'ordre $r+1$ de A, orlants de M, són nuls. Com A té un menor d'ordre r, per 2.8.2, ha de ser $\operatorname{rg} A \geq r$. Per veure que $\operatorname{rg} A = r$, provarem que totes les columnes de A són combinació lineal de les columnes de M. Si és així, A tindrà exactement r columnes independents i, per tant, $\operatorname{rg} A = r$. Siguin $j_1, \dots, j_r$ les columnes de M i j una altra columna de A. Considerem el sistema d'equacions lineals homogènies

$$\begin{pmatrix} a^1_{j_1} & \dots & a^1_{j_r} & a^1_j \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a^m_{j_1} & \dots & a^m_{j_r} & a^m_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Com tots els menors d'ordre $r+1$ de la matriu d'aquest sistema són menors orlants de M, són tots nuls i, per tant, el sistema té rang r. Com té $r+1$ incògnites, és indeterminat i té solucions no nul·les. Sigui $(d_1, \dots, d_r, d_j)$ una solució no nul·la del sistema. Que sigui solució del sistema equival a

$$d_1 \begin{pmatrix} a^1_{j_1} \\ \vdots \\ a^m_{j_1} \end{pmatrix} + \dots + d_r \begin{pmatrix} a^1_{j_r} \\ \vdots \\ a^m_{j_r} \end{pmatrix} + d_j \begin{pmatrix} a^1_{j} \\ \vdots \\ a^m_{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Com les columnes $j_1, \dots, j_r$ són linealment independents, ha de ser $d_j \neq 0$ i, per tant, la columna j de A és combinació lineal de les columnes de M, com volíem. □

Si $A = (a^i_j)_{1\le i,j\le n}$ és matriu quadrada $n\times n$, diem *matriu d'adjunts* de A la matriu $(A^i_j)_{1\le i,j\le n}$, és a dir la matriu obtinguda substituint cada coeficient de A pel seu adjunt.

Proposició 2.8.4. *Si A és matriu quadrada $n\times n$, invertible, la seva inversa és igual a la transposada de la matriu d'adjunts de A multiplicada per l'invers del determinant de A,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A^1_1 & A^2_1 & \dots & A^n_1 \\ A^1_2 & A^2_2 & \dots & A^n_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^1_n & A^2_n & \dots & A^n_n \end{pmatrix}.$$

Demostració. Fem el producte de A per la transposada de la seva matriu d'adjunts

$$\begin{pmatrix} A^1_1 & A^2_1 & \dots & A^n_1 \\ A^1_2 & A^2_2 & \dots & A^n_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^1_n & A^2_n & \dots & A^n_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & a^n_n \end{pmatrix}. \tag{2.8.1}$$

El coeficient de la fila i, columna j del producte és $a^1_jA^1_i + a^2_jA^2_i + \cdots + a^n_jA^n_i$. Si $i=j$, és el desenvolupament del determinant de A per la columna j. Si $i\neq j$, és el desenvolupament per la columna i del determinant de la matriu obtinguda substituint a A la columna i per la columna j. Com és el determinant d'una matriu amb dues columnes iguals, dóna 0. Tenim doncs que el producte (2.8.1) és igual a una matriu diagonal amb tots els elements de la diagonal iguals a $\det A$. Multiplicant aquesta matriu per $1/\det A$, obtenim doncs la matriu identitat. $\square$

Un sistema de n equacions lineals amb n incògnites i de rang n es diu *sistema de Cramer*. Com la matriu ampliada té n files, ha de tenir també rang n i, per tant, un sistema de Cramer té una única solució.

Corol·lari 2.8.5 (Regla de Cramer)**.** *Si*

$$\left\{\begin{array}{c} a^1_1x^1 + \cdots + a^1_nx^n = b^1 \\ \dots \\ a^n_1x^1 + \cdots + a^n_nx^n = b^n \end{array}\right.$$

és un sistema de Cramer, la seva solució és

$$x^j = \frac{\det B_j}{\det A}, 1 \leq j \leq n,$$

on B_j és la matriu obtinguda sustituint a A la seva columna j per la columna de termes independents del sistema.

Demostració. Si posem x el vector columna de les incògnites i b el vector columna del termes independents, podem escriure el sistema en forma matricial com $Ax = b$. Com A és invertible, obtenim $x = A^{-1}b$. Tenint en compte 2.8.4, obtenim

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ A_n^1 & \dots & A_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}.$$

En particular $x^j = \dfrac{A_j^1 b^1 + \cdots + A_j^n b^n}{\det A}$ i el numerador és el desenvolupament de $\det B_j$ per la columna j. □

Observació 2.8.6. Podem també resoldre amb la regla de Cramer un sistema d'equacions lineals compatible, no determinat. Si el sistema d'equacions de m equacions i n incògnites

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \dots \\ a_1^m x^1 + \cdots + a_n^m x^n = b^n \end{cases}$$

té rang r, suposem que el menor de la matriu del sistema format per les r primeres files i les r primeres columnes és no nul. Aleshores, el sistema és equivalent al format per les r primeres equacions, que podem escriure com

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r = b^1 - a_{r+1}^1 x^{r+1} - \cdots - a_n^1 x^n \\ \dots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r = b^r - a_{r+1}^r x^{r+1} - \cdots - a_n^r x^n \end{cases}$$

Considerat com a sistema amb incògnites $x^1, \dots, x^r$ és un sistema de Cramer i la regla de Cramer ens dóna en aquest cas $x^1, \dots, x^r$ en funció de $x^{r+1}, \dots, x^n$.

Veiem ara com trobar les equacions d'un subespai vectorial usant determinants. Sigui E un espai vectorial amb base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ i F un subespai vectorial de E amb base $v_1, v_2, \ldots, v_r$ i siguin $(a_1^i, a_2^i, \ldots, a_n^i)$ les coordenades del vector v_i en la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n), 1 \leq i \leq r$. Un vector v de E pertany a F si, i només si, v és combinació lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_r$, si, i només si, $\operatorname{rg}(v_1, \ldots, v_r, v) = r$. Si posem $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordenades de v en la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\operatorname{rg}(v_1, \ldots, v_r, v) = r$ equival a

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \ldots & a_n^r \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} = r. \tag{2.8.2}$$

Com les r primeres files de la matriu de (2.8.2) són linealment independents, té un menor no nul M d'ordre r format per les r primeres files. Aleshores la igualtat (2.8.2) equival a que els menors orlants de M siguin nuls. Obtenim així $n - r$ equacions en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que són linealment independents, per 1.11.1, ja que $\dim F = r$, i són doncs equacions de F.

2.9 Definició d'aplicació lineal

Siguin E_1, E_2 dos espais vectorials. Una aplicació

$$f : E_1 \to E_2$$

es diu *aplicació lineal* si compleix les dues condicions següents.

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in E_1$;
2. $f(av) = af(v)$, $\forall a \in \mathbb{R}, v \in E_1$.

La proposició següent és immediata.

Proposició 2.9.1. *$f : E_1 \to E_2$ és aplicació lineal si, i només si,*

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v),\ \forall a, b \in \mathbb{R}, u, v \in E_1.$$

Proposició 2.9.2. *Si $f : E_1 \to E_2$ és aplicació lineal compleix:*

1) $f(\sum_{i=1}^n a_i v_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(v_i)$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, v_1, \ldots, v_n \in E$;

2) $f(\vec{0}_{E_1}) = \vec{0}_{E_2}$*;*

Demostració. 1) $f(\sum_{i=1}^n a_i v_i) = \sum_{i=1}^n f(a_i v_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(v_i)$, on la primera igualtat s'obté per aplicació reiterada de la primera condició de la definició d'aplicació lineal i la segona de la segona propietat.
2) $\vec{0}_{E_1} = 0v$, per a tot $v \in E$ i, per tant $f(\vec{0}_{E_1}) = f(0v) = 0f(v) = \vec{0}_{E_2}$. □

Una aplicació lineal es diu també *morfisme d'espais vectorials.*

Proposició 2.9.3. *Siguin* E_1, E_2, E_3 *espais vectorials. Si* $f : E_1 \to E_2$ *i* $g : E_2 \to E_3$ *són aplicacions lineals, aleshores* $g \circ f : E_1 \to E_3$ *és aplicació lineal.*

Demostració. Per a $a, b \in \mathbb{R}, u, v \in E_1$, tenim

$$\begin{aligned}&(g \circ f)(au + bv) = g(f(au + bv)) \overset{f \text{ lineal}}{=} g(af(u) + bf(v)) \\ &\overset{g \text{ lineal}}{=} ag(f(u)) + bg(f(v)) = a(g \circ f)(u) + b(g \circ f)(v).\end{aligned}$$

□

Exemples 2.9.4. 1) Siguin E_1, E_2 espais vectorials, l'aplicació $f : E_1 \to E_2$ definida per $f(u) = \vec{0}_{E_2}$, per a tot $u \in E_1$, és lineal. Es diu *morfisme zero* o *morfisme trivial.*

2) Si E és espai vectorial, l'aplicació identitat Id_E és clarament lineal.

3) Siguin E un espai vectorial de dimensió n i $(e_1, \ldots, e_n)$ una base de E. L'aplicació

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^n \\ u = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n & \mapsto & (x^1, \ldots, x^n) \end{array}$$

que fa correspondre a cada vector de E la n-pla de les seves coordenades en la base fixada és aplicació lineal de E en $\mathbb{R}^n$. Aquest fet és equivalent a la proposició 1.8.15.

4) Siguin E un espai vectorial, F i G subespais de E tals que $E = F \oplus G$. Cada vector u de E s'escriu en forma única com $u = u_F + u_G$, amb $u_F \in F$, $u_G \in G$. Les aplicacions

$$p_F : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ u & \mapsto & u_F \end{array}, \qquad p_G : \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ u & \mapsto & u_G \end{array}$$

estan ben definides i són lineals. L'aplicació p_F s'anomena *projecció sobre F paral·lelament a G* i p_G s'anomena projecció sobre G paral·lelament a F.

5) Donats enters naturals n, m, per a nombres reals fixats $a^i_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ (x^1, \ldots, x^n) & \mapsto & (\sum_{j=1}^n a^1_j x^j, \ldots, \sum_{j=1}^n a^m_j x^j) \end{array}$$

és lineal.

6) Donat un nombre real a, l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(a) \end{array}$$

que envia un polinomi de $\mathbb{R}[X]$ al seu valor en a és lineal.

2.10 Nucli i imatge d'una aplicació lineal

Siguin E_1, E_2 espais vectorials, $f : E_1 \to E_2$ una aplicació lineal. Definim el nucli de f, denotat per $\operatorname{Nuc} f$, o $\operatorname{Ker} f$, com

$$\operatorname{Nuc} f = \{v \in E_1 : f(v) = \vec{0}_{E_2}\}.$$

Proposició 2.10.1. *Siguin E_1, E_2 espais vectorials, $f : E_1 \to E_2$ una aplicació lineal.*

1) $\operatorname{Im} f$ *és subespai vectorial de E_2;*

2) $\operatorname{Nuc} f$ *és subespai vectorial de E_1.*

Demostració. 1) Siguin $u, v \in \operatorname{Im} f$. Per definició de $\operatorname{Im} f$, tenim $u = f(u_1), v = f(v_1)$, amb $u_1, v_1 \in E_1$. Per a $a, b \in \mathbb{R}$, tenim $au + bv = af(u_1) + bf(v_1) = f(au_1 + bv_1) \in \operatorname{Im} f$.
2) Siguin $u, v \in \operatorname{Nuc} f$. Per definició de $\operatorname{Nuc} f$, tenim $f(u) = \vec{0}_{E_2}, f(v) = \vec{0}_{E_2}$. Per a $a, b \in \mathbb{R}$, tenim $f(au + bv) = af(u) + bf(v) = \vec{0}_{E_2}$, per tant $au + bv \in \operatorname{Nuc} f$. $\square$

Diem *rang d'una aplicació lineal* f la dimensió de $\operatorname{Im} f$.

Proposició 2.10.2. *Si* $f : E_1 \to E_2$ *és una aplicació lineal i* $u_1, \dots, u_r$ *generen* E_1*, aleshores* $f(u_1), \dots, f(u_r)$ *generen* $\operatorname{Im} f$.

Demostració. Un vector de $\operatorname{Im} f$ és $f(v)$, per a algun $v \in E_1$. Si $u_1, \dots, u_r$ generen E_1, és $v = a_1u_1 + \cdots + a_ru_r$, per certs $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$. Aleshores $f(v) = f(a_1u_1 + \cdots + a_ru_r) = a_1f(u_1) + \cdots + a_rf(u_r)$. $\square$

Proposició 2.10.3. *Siguin* E_1, E_2 *espais vectorials,* $f : E_1 \to E_2$ *una aplicació lineal. Es compleix*

$$\dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E_1.$$

Demostració. Sigui $(u_1, \dots, u_m)$ una base de $\operatorname{Nuc} f$. Com $u_1, \dots, u_m$ són vectors linealment independents de E_1, podem completar-los a base de E_1. Sigui $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ una tal base de E_1. Tenim $f(u_1) = \cdots = f(u_m) = \vec{0}_{E_2}$ i, per tant $\operatorname{Im} f = \langle f(u_1), \dots, f(u_m), f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)\rangle = \langle f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)\rangle$. Vegem que els vectors $f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)$ són linealment independents. Sigui

$$a_1f(u_{m+1}) + \cdots + a_{n-m}f(u_n) = \vec{0}_{E_2},$$

amb $a_1, \dots, a_{m-n} \in \mathbb{R}$. Tenim

$$\vec{0}_{E_2} = a_1f(u_{m+1}) + \cdots + a_{n-m}f(u_n) = f(a_1u_{m+1} + \cdots + a_{n-m}u_n),$$

per tant $a_1u_{m+1} + \cdots + a_{n-m}u_n \in \operatorname{Nuc} f$. Es compleix doncs

$$a_1u_{m+1} + \cdots + a_{n-m}u_n = b_1u_1 + \cdots + b_mu_m,$$

amb $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, i, per tant

$$a_1u_{m+1} + \cdots + a_{n-m}u_n - b_1u_1 - \cdots - b_mu_m = \vec{0}_{E_1},$$

que implica $a_1 = \cdots = a_{n-m} = b_1 = \cdots = b_m = 0$, per ser $\{u_1, \dots, u_n\}$ base de E_1. Tenim doncs $\dim \operatorname{Im} f = n - m = \dim E_1 - \dim \operatorname{Nuc} f$. $\square$

Proposició 2.10.4. *Siguin* E_1, E_2 *espais vectorials. Una aplicació lineal* $f : E_1 \to E_2$ *és injectiva si i només si* $\operatorname{Nuc} f = \{\overrightarrow{0}_{E_1}\}$.

Demostració. Siguin $u, v \in E_1$. Tenim $f(u) = f(v) \Leftrightarrow f(u - v) = f(u) - f(v) = \vec{0}_{E_2} \Leftrightarrow u - v \in \operatorname{Nuc} f$. Si $\operatorname{Nuc} f = \{\vec{0}_{E_1}\}$, tenim doncs $f(u) = f(v) \Rightarrow u - v = \vec{0}_{E_1} \Rightarrow u = v$.

Suposem ara f injectiva i sigui $u \in \operatorname{Nuc} f$. Tenim $f(u) = \vec{0}_{E_2} = f(\vec{0}_{E_1}) \Rightarrow u = \vec{0}_{E_1}$. □

Un *monomorfisme* d'espais vectorials és una aplicació lineal injectiva. Un *epimorfisme* d'espais vectorials és una aplicació lineal exhaustiva. Un *isomorfisme* d'espais vectorials és una aplicació lineal bijectiva. Un *endomorfisme* d'un espai vectorial E és una aplicació lineal de E en E. Un *automorfisme* és un endomorfisme bijectiu.

Proposició 2.10.5. *Siguin E_1, E_2 espais vectorials, $f : E_1 \to E_2$ un isomorfisme. Aleshores, l'aplicació inversa $f^{-1} : E_2 \to E_1$ també és lineal.*

Demostració. Donats $u, v \in E_2$, $a, b \in \mathbb{R}$, volem veure $f^{-1}(au + bv) = af^{-1}(u) + bf^{-1}(v)$. Com f és bijectiva, l'igualtat equival a que els dos termes tinguin la mateixa imatge per f. Tenim $f(f^{-1}(au + bv)) = au + bv$, per ser f^{-1} la inversa de f, i

$$f(af^{-1}(u) + bf^{-1}(v)) = af(f^{-1}(u)) + bf(f^{-1}(v)) = au + bv,$$

on la primera igualtat és certa per ser f lineal. □

Dos espais vectorials E_1, E_2 es diuen *isomorfs* si existeix un isomorfisme $f : E_1 \to E_2$. Si E_1 i E_2 són isomorfs, escrivim $E_1 \simeq E_2$.

Proposició 2.10.6. *Siguin E_1, E_2 espais vectorials. Una aplicació lineal $f : E_1 \to E_2$ és bijectiva si i només si la imatge d'una base de E_1 per f és base de E_2.*

Demostració. Suposem que f és bijectiva i sigui $(u_1, \dots, u_n)$ una base de E_1. Com f és exhautiva, tenim $E_2 = \operatorname{Im} f = \langle f(u_1), \dots, f(u_n) \rangle$. Vegem que $f(u_1), \dots, f(u_n)$ són linealment independents. Sigui $a_1 f(u_1) + \dots + a_n f(u_n) = \vec{0}_{E_2}$, amb $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Tenim $f(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) = a_1 f(u_1) + \dots + a_n f(u_n) = \vec{0}_{E_2}$; per tant $a_1 u_1 + \dots + a_n u_n \in \operatorname{Nuc} f$. Com f és injectiva, $a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = \vec{0}_{E_1}$, que implica $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Recíprocament, sigui $(u_1, \dots, u_n)$ una base de E_1 i suposem que els vectors $f(u_1), \dots, f(u_n)$ formen base de E_2. Sigui $v \in \operatorname{Nuc} f$. Tenim $v = x^1 u_1 + \dots +$

$x^n u_n$, amb $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}$. Aleshores $\vec{0}_{E_2} = f(v) = f(x^1 u_1 + \cdots + x^n u_n) = x^1 f(u_1) + \cdots + x^n f(u_n)$. Com $f(u_1), \dots, f(u_n)$ són linealment independents, tenim $x^1 = \cdots = x^n = 0$, per tant $v = \vec{0}_{E_1}$.

Sigui ara $v \in E_2$. Tenim $v = y^1 f(u_1) + \cdots + y^n f(u_n) = f(y^1 u_1 + \cdots + y^n u_n)$, amb $y^1, \dots, y^n \in \mathbb{R}$, per tant $v \in \operatorname{Im} f$. □

Corol·lari 2.10.7. *Dos espais vectorials són isomorfs si i només si tenen la mateixa dimensió.*

Demostració. Si $f : E_1 \to E_2$ és isomorfisme i $(u_1, \dots, u_n)$ és base de E_1, per la proposició 2.10.6, $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ és base de E_2. Per tant $\dim E_1 = \dim E_2$.

Recíprocament, si $\dim E_1 = \dim E_2$, escollim bases $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)$ de E_1 i E_2. L'aplicació $f : E_1 \to E_2$ definida per $f(\sum_{i=1}^n x^i u_i) = \sum_{i=1}^n x^i v_i$ és clarament lineal i és isomorfisme per la proposició 2.10.6. □

2.11 Matriu d'una aplicació lineal. Canvi de base

Proposició 2.11.1. *Siguin E_1, E_2 espais vectorials, $(u_1, \dots, u_n)$ una base de E_1, $v_1, \dots, v_n$ vectors qualssevol de E_2. Existeix una aplicació lineal única $f : E_1 \to E_2$ tal que $f(u_j) = v_j$, per a tot $j = 1, \dots, n$.*

Demostració. Suposem que existeix f com a l'enunciat i sigui $v \in E_1$. Tenim $v = \sum_{j=1}^n a^j u_j$ i, per tant $f(v) = \sum_{j=1}^n a^j f(u_j) = \sum_{j=1}^n a^j v_j$. Com la imatge de tot $v \in E_1$ queda determinada, f és única.

Ara, definint $f(v) = \sum_{j=1}^n a^j v_j$, per a $v = \sum_{j=1}^n a^j u_j$, obtenim clarament una aplicació ben definida i lineal i tenim doncs l'existència de f. □

Siguin ara E_1, E_2 espais vectorials, $(u_1, \dots, u_n)$ una base de E_1, $(v_1, \dots, v_m)$ una base de E_2. Sigui $f : E_1 \to E_2$ una aplicació lineal. Com hem vist a la proposició 2.11.1, f està determinada per les imatges $f(u_1), \dots, f(u_n)$ dels vectors de la base de E_1. Escrivim aquests vectors en la base escollida a E_2: $f(u_j) = \sum_{i=1}^m a_j^i v_i$. Tenim doncs que, fixades bases dels espais vectorials de partida i arribada, l'aplicació lineal queda determinada pels nombres reals $a_j^i, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. La matriu $(a_j^i)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ s'anomena *matriu de f en les bases $(u_1, \dots, u_n)$ de E_1, $(v_1, \dots, v_m)$ de E_2*. Si $w = \sum_{j=1}^n x^j u_j$ és un vector de E_1, tenim

$$f(w) = f(\sum_{j=1}^{n} x^j u_j) = \sum_{j=1}^{n} x^j f(u_j) = \sum_{j=1}^{n} x^j (\sum_{i=1}^{m} a^i_j v_i) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j) v_i.$$

Per tant les coordenades de $f(w)$ en la base $(v_1, \dots, v_m)$ de E_2 són $y^i = \sum_{j=1}^n a^i_j x^j$, $1 \leq i \leq m$. Podem escriure aquestes igualtats en forma matricial

$$(y) = A(x),$$

on A indica la matriu $(a^i_j)_{\substack{1\leq i\leq m,\\ 1\leq j\leq n}}$, (y) la matriu columna $\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}$, i (x) la matriu columna $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$.

Si A és la matriu de l'aplicació lineal f de E_1 en E_2 en les bases $(u_1, \dots, u_n)$ de E_1, $(v_1, \dots, v_m)$ de E_2, podem determinar el rang i el nucli de f a partir de A.

1) Les columnes de A són les coordenades dels vectors $f(u_1), \dots, f(u_n)$ en la base $(v_1, \dots, v_m)$ de E_2. Per tant el rang de f és igual al rang dels vectors $f(u_1), \dots, f(u_n)$ i, per tant, igual al rang de A.

2) Un vector de E_1 pertany al nucli de f si, i només si, les seves coordenades en la base $(u_1, \dots, u_n)$ de E_1 són solucions del sistema d'equacions lineals homogènies $A(x) = (0)$.

Proposició 2.11.2. *Siguin E_1, E_2, E_3 espais vectorials; $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to E_3$ aplicacions lineals. Siguin $(u_1, \dots, u_n)$, $(v_1, \dots, v_m)$, $(w_1, \dots, w_\ell)$ bases de E_1, E_2 i E_3, respectivament. Si A és la matriu de f en les bases $(u_1, \dots, u_n)$, $(v_1, \dots, v_m)$ i B és la matriu de g en les bases $(v_1, \dots, v_m)$, $(w_1, \dots, w_\ell)$, aleshores BA és la matriu de $g \circ f$ en les bases $(u_1, \dots, u_n)$, $(w_1, \dots, w_\ell)$.*

Demostració. Posem $A = (a^i_j)_{\substack{1\leq i\leq m,\\ 1\leq j\leq n}}$, $B = (b^j_k)_{\substack{1\leq j\leq n.\\ 1\leq k\leq l}}$. Si $u = \sum_{j=1}^n x^j u_j \in E_1$, tenim

$$\begin{array}{rcl}(g \circ f)(u) & = & g(f(u) = g(\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_j^i x^j) v_i) \\ & = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_j^i x^j g(v_i) \\ & = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_j^i x^j \sum_{k=1}^l b_i^k w_k \\ & = & \sum_{k=1}^l (\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m a_j^i b_i^k) x^j) w_k.\end{array}$$

Ara $\sum_{i=1}^m b_i^k a_j^i$ és justament l'element de la fila k i columna j de la matriu BA. $\square$

Volem veure ara la relació entre les matrius d'una aplicació lineal en bases diferents.

Proposició 2.11.3. *Siguin E_1, E_2 espais vectorials, $(u_1, \ldots, u_n)$ una base de E_1, $(v_1, \ldots, v_m)$ una base de E_2, $f : E_1 \to E_2$ una aplicació lineal amb matriu A en les bases $(u_1, \ldots, u_n)$, $(v_1, \ldots, v_m)$.*

Siguin $(u'_1, \ldots, u'_n)$ una altra base de E_1, $(v'_1, \ldots, v'_m)$ una altra base de E_2. Aleshores la matriu de f en les bases $(u'_1, \ldots, u'_n)$, $(v'_1, \ldots, v'_m)$ és

$$A' = C_{(v)\to(v')} A C_{(u')\to(u)},$$

on $C_{(u')\to(u)}$ és la matriu de canvi de base de la base $(u'_1, \ldots, u'_n)$ a la base $(u_1, \ldots, u_n)$ i $C_{(v)\to(v')}$ és la matriu de canvi de base de la base $(v_1, \ldots, v_m)$ a la base $(v'_1, \ldots, v'_m)$.

Demostració. Sigui (x) la matriu columna de les coordenades d'un vector w de E_1 en la base $(u'_1, \ldots, u'_n)$. Aleshores $C_{(u')\to(u)}(x)$ és la matriu columna de les coordenades de w en la base $(u_1, \ldots, u_n)$. Com A és la matriu de f en les bases $(u_1, \ldots, u_n)$, $(v_1, \ldots, v_m)$, $A(C_{(u')\to(u)}(x))$ és la matriu columna de les coordenades de $f(w)$ en la base $(v_1, \ldots, v_m)$. Finalment $C_{(v)\to(v')}(A(C_{(u')\to(u)}(x)))$ és la matriu columna de les coordenades de $f(w)$ en la base $(v'_1, \ldots, v'_m)$. Com el producte de matrius és associatiu, obtenim que $C_{(v)\to(v')} A C_{(u')\to(u)}$ és la matriu de f en les bases $(u'_1, \ldots, u'_n)$, $(v'_1, \ldots, v'_m)$. $\square$