P1 | És ben sabut que per tot natural $n > 0$,π^n és un nombre irracional.

(a) Sigui a un real qualsevol. Demostra que si a és racional diferent de 0, aleshores $a\pi + 8$ és irracional.

Procedirem a demostrar-ho per reducció a l'absurd. Suposem que a és un nombre racional diferent de 0 tal que $a\pi + 8$ no és irracional. Per tant, $a\pi + 8$ és racional i existeixen enters $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, tals que

$$a\pi + 8 = \frac{p}{q}.$$

D'altra banda, com que a és un nombre racional, existeixen uns altres enters $r, s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$, tals que $a = \frac{r}{s}$. Per tant,

$$\frac{r}{s}\pi + 8 = \frac{p}{q} \implies \frac{r}{s}\pi = \frac{p}{q} - 8.$$

Ara bé, com que a és diferent de 0, també tenim que $r \neq 0$ i podem aïllar π de l'expressió anterior:

$$\pi = \frac{s}{r}\left(\frac{p}{q} - 8\right) = \frac{sp - 8qs}{rq}.$$

Com que $sp - 8qs \in \mathbb{Z}$ i $rq \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, hem aconseguit escriure π com una fracció de nombres enters, fet que contradiu a la irracionalitat del nombre π. Amb aquesta contradicció queda demostrat l'enunciat.

(b) És cert el recíproc? Justifica la resposta.

El recíproc diu el següent:

Sigui a un real qualsevol, si $a\pi + 8$ és irracional, aleshores a és racional diferent de 0.

Aquest enunciat és fals, i per demostrar-ho trobarem un contraexemple. Triem $a = \pi$, per tant,

$$a\pi + 8 = \pi^2 + 8.$$

Per veure que $\pi^2 + 8$ és irracional ho farem per reducció a l'absurd. Suposem per tant que $\pi^2 + 8$ és racional, i per tant existeixen enters $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ tals que $\pi^2 + 8 = \frac{p}{q}$. Per tant,

$$\pi^2 = \frac{p}{q} - 8 = \frac{p - 8q}{q}.$$

Com que $p - 8q \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, deduim que π^2 és racional, fet que es contradiu amb l'afirmació inicial que ens diu que per a tot nombre natural $n > 0$, π^n és un nombre irracional. Amb aquesta contradicció queda demostrat que $\pi^2 + 8$ és irracional. Ara bé, hem trobat un a irracional tal que $a\pi + 8$ és irracional, per tant queda refutat el recíproc.

P2 Siguin A i B conjunts arbitraris.

(a) Demostra o refuta:

1. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2. $(A \times A) \setminus (B \times B) = (A \setminus B) \times (B \setminus A)$.

1. La proposició és certa. Demostrarem la igualtat veient les dues inclusions:
($\subseteq$) Donat $a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, això vol dir que $a \in (A \cup B)$ i $a \notin (A \cap B)$. És a dir, ($a \in A$ o $a \in B$) i ($a \notin A$ o $a \notin B$). Això ens dóna quatre casos: ($a \in A$ i $a \notin A$) o ($a \in A$ i $a \notin B$) o ($a \in B$ i $a \notin A$) o ($a \in B$ i $a \notin B$). Tant el primer com l'últim són contradiccions, considerem els altres:
($a \in A$ i $a \notin B$) implica que $a \in A \setminus B$ i per tant, també $a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
($a \in B$ i $a \notin A$) implica que $a \in B \setminus A$ i per tant, també $a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
En ambdós casos arribem on volíem.

($\supseteq$) Sigui $a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ tenim que $a \in (A \setminus B)$ o $a \in (B \setminus A)$. El primer cas implica que $a \in A$ i $a \notin B$. Com que $a \in A$ tenim que $a \in A \cup B$ i com que $a \notin B$ tenim $a \notin A \cap B$, així $a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Al segón cas, analogament intercanviant els papers de A i B obtenim el mateix.

2. La proposició és falsa. La refutem amb un contraexemple:
Considerant $A = \{1, 2\}$ i $B = \{2, 3\}$. Per veure que

$$(A \times A) \setminus (B \times B) \neq (A \setminus B) \times (B \setminus A)$$

ens fixem en que $(1, 2) \in (A \times A) \setminus (B \times B)$ ja que $(1, 2) \in A \times A$ però $(1, 2) \notin B \times B$, ja que $1 \notin B$. En canvi $(1, 2) \notin (A \setminus B) \times (B \setminus A)$ ja que $2 \notin B \setminus A$ perque $2 \in B$ però també $2 \in A$.
Pel principid'extensionalitat cloncluïm que aquestos dos conjunts no poden ser el mateix.

(b) Demostra que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ si, i només si, $A = B$.

($\Leftarrow$) Si $A = B$, és clar que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, ja que es tracta de la mateixa operació feta amb el mateix conjunt i per tant només estem fent servir la reflexivitat de la igualtat.

En qualsevol cas, podem provar-ho també amb el mètode habitual, si $C \in \mathcal{P}(A)$, aleshores $C \subseteq A$, però aleshores $C \subseteq A = B$, és a dir, $C \in \mathcal{P}(B)$. Analogament es prova l'altra inclusió.

($\Rightarrow$) Si tenim que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ i volem provar $A \subseteq B$, és suficient adonar-se que com $A \in \mathcal{P}(A)$, aleshores $A \in \mathcal{P}(B)$, és a dir $A \subseteq B$ com volíem. L'altra direcció és anàloga intercanviant els papers de A i B.

També és vàlida la següent prova més estàndar: Donat $a \in A$, tenim que $\{a\} \subseteq A$, és a dir $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ i per tant $\{a\} \in \mathcal{P}(B)$, és a dir $\{a\} \subseteq B$ que és el mateix que dir $a \in B$ com volíem, doncs $A \subseteq B$. L'altra inclusió és totalment anàloga.

P3 Considera la relació $f = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : y - 1 = x^2\}$.

(a) Demostra que f és aplicació i digues raonadament si f és injectiva, si és exhaustiva i si és bijectiva.

Efectivament, una aplicació és una funció on el domini coincideix amb tot el conjunt on està definit. En el nostre cas haurem de provar que f és funció i a més

$$dom\, f = \{x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{N}, (x, y) \in f\} = \{x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{N}, y - 1 = x^2\} = \mathbb{Z}$$

Primerament veiem que f és una funció:
Recordem la definició de la condició funcional
$\forall (x, y), (x, y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, si $(x, y), (x, y') \in f$ aleshores $y = y'$.
Així, donats $(x, y), (x, y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, tals que $(x, y), (x, y') \in f$, tenim que $y - 1 = x^2$ i $y' - 1 = x^2$, per transitivitat de la igualtat (ara que sabem el nom exacte de la propietat que utilitzem la podem dir i queda millor) tenim que $y - 1 = y' - 1$ i així $y = y'$ com volíem.

Ara, per continuar amb la demostració de que f és aplicació, notar que $dom\, f \subseteq \mathbb{Z}$ per definició. Per l'altra inclusió, $\mathbb{Z} \subseteq dom\, f$, prenem $x \in \mathbb{Z}$, i per tant si considerem $y = x^2 + 1 \in \mathbb{N}$, ja que el quadrat d'un enter és positiu, per tant natural, i sumant 1 seguirà sent-ho; és clar que $y - 1 = x^2$ i per tant $(x, y) \in f$, és a dir $x \in dom\, f$.
Ara, ja té sentit fer servir la notació $f(z)$, per que sabem que per a un $z \in \mathbb{Z}$ està determinat l'únic $n \in \mathbb{N}$, tal que $(z, n) \in f$ i és a aquest n al que anomenem $f(z)$, la imatge de z mitjançant f. A més com ja hem dit al paràgraf anterior, $f(z) = z^2 + 1$.

Volem saber si l'aplicació f és injectiva, però com que hi està involucrat el quadrat d'un nombre enter, és fàcil veure que no ho és amb un contraexemple:
$-1, 1 \in dom\, f$ i $f(1) = 1^2 + 1 = 2 = (-1)^2 + 1 = f(-1)$.

També si és exhaustiva, és a dir, si $rec\, f = \{y \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{Z}, f(x) = y\}$ és igual a tot el conjunt d'arribada, és a dir, si $rec\, f = \mathbb{N}$. Com que per definició $rec\, f \subseteq \mathbb{N}$, això es reduiex a provar que per a tot $n \in \mathbb{N}$ existeix un $x \in dom\, f$ tal que $f(x) = y$. Però hi podem observar que per exemple per al $0 \in \mathbb{N}$, si existira tal enter x, es donaria $x^2 + 1 = 0$, és a dir $x = \sqrt{-1} = i$ o $x = \sqrt{-1} = -i$ però $i, -i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, contradicció. Per tant no hi existeix tal enter per a 0 i f no és exhaustiva.

Una funció és bijectiva si és injectiva i exhaustiva. Per tant la nostra f no ho és ja que acabem de veure que no és ni una ni l'altra.

(b) Troba els conjunts $f(\{0, 1, 3, -1, 5\})$, $f^{-1}(\{4\})$ i $f^{-1}(\{0, 1, 3, 5\})$. Justifica la resposta.

Recordem que en general, la imatge d'un conjunt mitjantÃ§ant f es defineix com $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ donat, $A \subseteq \mathbb{Z}$. I la antiimatge d'un conjunt com $f^{-1}(B) = \{a \in dom\, f : f(a) \in B\}$, donat $B \subseteq \mathbb{N}$ del conjunt d'arribada. Així doncs:

$f(\{0,1,3,-1,5\}) = \{f(a) : a \in \{0,1,3,-1,5\}\} = \{f(0), f(1), f(3), f(-1), f(5)\} =$
$= \{1,2,10,26\}$

Per a calcular $f^{-1}(\{4\}) = \{a \in dom\, f : f(a) = 4\}$
Trobem els $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 4$. Per que es doni això s'haurà de complir que $x^2 + 1 = 4$, és a dir $x = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ o $x = -\sqrt{3}$. Però no hi existeixen enters complint això, per tant $f^{-1}(\{4\}) = \{a \in dom\, f : f(a) = 4\} = \emptyset$.

$f^{-1}(\{0,1,3,5\}) = \{a \in \mathbb{N} : f(a) \in \{0,1,3,5\}\}$. Calculem en cada cas:

- $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 0$, *i.e.*, $x^2 + 1 = 0$, és a dir $x = \sqrt{-1}$ o $x = -\sqrt{-1}$. Però no hi existeixen enters complint això.
- $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 1$, *i.e.*, $x^2 + 1 = 1$, és a dir $x = 0$.
- $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 3$, *i.e.*, $x^2 + 1 = 3$, és a dir $x = \sqrt{2}$ o $x = -\sqrt{2}$. Però no hi existeixen enters complint això.
- $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 5$, *i.e.*, $x^2 + 1 = 5$, és a dir $x = \sqrt{4}$ o $x = -\sqrt{4}$. I obtenim -2 i 2.

I així finalment tenim que $f^{-1}(\{0,1,3,5\}) = \{a \in \mathbb{N} : f(a) \in \{0,1,3,5\}\} = \{0,-2,2\}$.

(c) Demostra que la relació $\sim$ definida en $\mathbb{Z}$ per

$$n \sim m \text{ si, i només si, } f(n) = f(m)$$

és d'equivalència. Dóna les classes d'equivalència $\overline{0}$, $\overline{1}$.

Per a la reflexivitat, donat $n \in \mathbb{Z}$, com que $\mathbb{Z} = dom\, f$, tenim que $\exists f(n)$, i per tant per reflexivitat de la igualtat als naturals, tenim que $f(n) = f(n)$ i per tant $n \sim n$.
Per a la simetria i la transitivitat, només cal fer servir les mateixes propietats de la igualtat de números naturals. És a dir, donats $n, m \in \mathbb{Z}$ tal que $n \sim m$, això vol dir que les imatges $f(n) = f(m)$ que per simetria de la igualtat és el mateix que dir $f(m) = f(n)$, és a dir $m \sim n$. Per tant la relació $\sim$ és simètrica. I si ara tenim $n, m, l \in \mathbb{Z}$ tal que $n \sim m$ i $m \sim l$, això és equivalent a $f(n) = f(m)$ i $f(m) = f(l)$. Per transitivitat de la igualtat, tenim que $f(n) = f(l)$, és a dir $n \sim l$ i així hem provat que la nostra relació és transitiva.

Per a obtenir la classes de 0 i 1:
$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} : x \sim 0\}$ és a dir, tots el que estan relacionats amb el zero, dit d'altra manera, $\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = f(0)\} = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + 1 = 1\} = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 0\} = \{0\}$
$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} : x \sim 1\} = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = f(1)\} = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + 1 = 2\} =$
$= \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$

(d) Si n és un element arbitrari de $\mathbb{Z}$ dóna la classe $\overline{n}$ i digues quants elements té. Dóna una bona representació de $\mathbb{Z}/\sim$.

Donat $n \in \mathbb{Z}$, com abans amb els enters concrets, la classe de n, seran tots els enters relacionats amb ell, és a dir, $\overline{n} = \{x \in \mathbb{Z} : x \sim n\} = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = f(n)\}$=
$= \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + 1 = n^2 + 1\} = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = n^2\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = n \text{ o } x = -n\} = \{-n, n\}$.
Per tant si $n \neq 0$ la classe té dos elements i si $n = 0$ la classe en tindrà sols un element. Això concorda amb aquest càlcul general ja que l'oposat del 0 és el mateix 0.

Ara per donar una bona representació del conjunt quocient $\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{z} : z \in \mathbb{Z}\}$ recordem que una bona representació no és sinó un conjunt on apareixen totes les classes però sense repeticions.
El nostre candidat serà $\Delta = \{\overline{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Primer veiem que en efecte $\Delta = \mathbb{Z}/\sim$:
La inclusió $\Delta \subseteq \mathbb{Z}/\sim$ és clara, ja que es tracta d'un conjunt de classes d'equivalència de la mateixa relació $\sim$.
Per a veure $\mathbb{Z}/\sim \subseteq \Delta$, donada $\overline{z} \in \mathbb{Z}/\sim$, recordem que $\overline{z} = \{-z, z\}$. Per tant si $z \geqslant 0$ tindrem que $z \in \mathbb{N}$ i així, per definició $\overline{z} \in \Delta$. I si $z < 0$, aleshores $-z > 0$ i per tant $-z \in \mathbb{N}$ i concloem que $\overline{z} = \overline{-z} \in \Delta$.

Per provar que no hi ha repeticions, hem de demostrar que donats $n, m \in \mathbb{N}$ si $n \neq m$, aleshores $\overline{n} \neq \overline{m}$, o equivalentment, si $\overline{n} = \overline{m}$, necessàriament $n = m$.
Per tant, donats $n, m \in \mathbb{N}$ tals que $\overline{n} = \overline{m}$, com que $\{-n, n\} = \overline{n} = \overline{m} = \{-m, m\}$, tenim que $n = m$ o $n = -m$, però com que n i m son naturals ha de ser $n = m$ com volíem demostrar.