Matrius i vectors (grup de matí)

Curs 2018–2019

9.1 Els vectors com matrius d'una columna

Els elements de $\mathbb{R}^n$ són conjunts ordenats de n nombres reals $(x_1, \ldots, x_n)$. En molts contextos és útil representar els elements de $\mathbb{R}^n$ com matrius amb una única columna:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

D'aquesta manera, per exemple, un sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} a_1^1 x_1 + \cdots + a_1^n x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_m^1 x_1 + \cdots + a_m^n x_n = b_m \end{aligned}\right\}$$

es pot escriure en forma matricial com

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Aquesta expressió la denotarem, més breument, com

$$AX = B,$$

on la lletra A representa la matriu del sistema; la lletra X és el vector d'incògnites i la lletra B és el vector de termes independents. El sistema és homogeni quan $B = 0$.

9.2 Transposada d'una matriu

La matriu *transposada* d'una matriu A es denota per A^{t} i té per files les columnes de A i per columnes les files de A:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_m^1 \\ \\ \vdots & & \vdots \\ \\ a_1^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$$

Algunes propietats de la transposició de matrius:

$$(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = A; \qquad (A+B)^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} + B^{\mathrm{t}}; \qquad (AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}.$$

Una matriu es diu *quadrada* si té el mateix nombre de files que de columnes. Una matriu quadrada A es diu *simètrica* si $A^{\mathrm{t}} = A$ i es diu *antisimètrica* si $A^{\mathrm{t}} = -A$.

9.3 Rang per columnes d'una matriu

Havíem definit el *rang per files* d'una matriu $m \times n$ (és a dir, m files i n columnes) com la dimensió del subespai de $\mathbb{R}^n$ generat per les seves files:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} = \dim\langle (a_1^1, \dots, a_1^n), \dots, (a_m^1, \dots, a_m^n) \rangle.$$

Anàlogament podem definir el *rang per columnes* d'una matriu $m \times n$ com la dimensió del subespai de $\mathbb{R}^m$ generat per les seves columnes. Així doncs, el rang per columnes d'una matriu A es defineix com $\operatorname{rang}(A^{\mathrm{t}})$, on "rang" denota el rang per files. Anem a demostrar que el rang per columnes sempre és igual al rang per files.

Teorema 9.1. *El rang per files de qualsevol matriu A és igual al rang per files de la matriu transposada A^{t}.*

Demostració. Sigui A una matriu amb m files i n columnes. Suposem que el rang per files de A és r. Llavors el sistema homogeni $AX = 0$ té $n - r$ graus de llibertat i el subespai de $\mathbb{R}^n$ format per les seves solucions admet una base de la forma

$$\begin{aligned} &(c_1^1, \dots, c_1^r, 1, 0, \dots, 0) \\ &(c_2^1, \dots, c_2^r, 0, 1, \dots, 0) \\ &\quad\vdots \\ &(c_{n-r}^1, \dots, c_{n-r}^r, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned} \tag{9.1}$$

Denotem per $A_1, \dots, A_n$ les columnes de A (pensades com vectors de $\mathbb{R}^m$) i observem que, si $(x_1, \dots, x_n)$ és una solució qualsevol de $AX = 0$, llavors es compleix

$$x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = 0.$$

Aleshores les solucions (9.1) ens donen expressions

$$\begin{aligned} &c_1^1 A_1 + \cdots + c_1^r A_r + A_{r+1} = 0 \\ &c_2^1 A_1 + \cdots + c_2^r A_r + A_{r+2} = 0 \\ &\quad\vdots \\ &c_{n-r}^1 A_1 + \cdots + c_{n-r}^r A_r + A_n = 0. \end{aligned}$$

Aquestes expressions impliquen que els vectors $A_{r+1}, \dots, A_n$ són combinacions lineals de $A_1, \dots, A_r$. Per tant, el rang per columnes de A és com a màxim r:

$$\operatorname{rang}(A^{\mathrm{t}}) \le \operatorname{rang}(A).$$

El mateix raonament aplicat a A^{t} porta a la conclusió que

$$\operatorname{rang}\big((A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}\big) \le \operatorname{rang}(A^{\mathrm{t}});$$

en altres paraules, $\operatorname{rang}(A) \le \operatorname{rang}(A^{\mathrm{t}})$ i, per tant, $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^{\mathrm{t}})$, tal com es pretenia demostrar. $\square$