Matrius i Vectors
Grupo Tarde
Examen de reevaluación, problemas

Enero 2013

Todos los teléfonos deberán estar desconectados durante el examen. Pongan nombre y apellidos en cada hoja. Entreguen los problemas en hojas separadas y al menos una hoja por problema (aunque sea sólo con el nombre). En la parte de problemas pueden consultarse libros y apuntes propios.

Al terminar la parte de problemas dejen todo el material escrito en la tarima bajo la pizarra.

Horario:

- Problemas: de 9 a 12.50 horas
- Teoría: de 13 a 14 horas

1.- En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$F =< (1,1,1,1), (1,0,1,0) >,$$

G, dado por las ecuaciones

$$x + y - 3z + 3t = 0, \quad x + 5y - 3z - t = 0,$$

y H, dado por las ecuaciones

$$x + 4y - 3z = 0, \quad x + 5y + 3z + t = 0.$$

Se pide calcular ecuaciones (independientes) y la dimensión de $F \cap (G + H)$.

2.- Sean e_1, e_2, v_1, v_2 vectores de $\mathbb{R}^4$, $F =< e_1, e_2 >$, $G =< v_1, v_2 >$ y M la matriz cuyas columnas son e_1, e_2, v_1, v_2. Se pide demostrar que $\det M \neq 0$ si y sólo si $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$

3.- a) Determine para qué valores de a la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa y calcule en estos casos M^{-1}, M^t y $(M^t)^{-1}$.

b) Para los casos en los que M no es inversible, fijada en un espacio vectorial E una base (e_1, e_2, e_3), se considera el endomorfismo f de E que tiene matriz M en dicha base y se pide calcular el núcleo y la imagen de f.

4.- Fijada en un espacio vectorial E, de dimensión 3, una base $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$, se consideran la aplicación

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto -v \end{aligned}$$

y la aplicación lineal

$$g : E \longrightarrow E,$$

que cumple

$$\begin{aligned} g(e_1) &= e_2 \\ g(e_2) &= e_3 \\ g(e_3) &= e_1, \end{aligned}$$

y se pide:

a) Demostrar que f es lineal y calcular las matrices de f y g relativas a la base $\mathfrak{B}$.

b) Comprobar que se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned} (g \circ f)^2 &= g^2, \\ (g \circ f)^3 &= f. \end{aligned}$$

c) Encontrar todos los vectores $v \in E$ que cumplen $g(v) = e_1 + 2e_2 - e_3$.