**Introducció al Càlcul Diferencial** **Matemàtiques**

*Reavaluació.* Semestre de Tardor 2016-17

1. (a) [8 punts] Enuncieu l'axioma del suprem, i expliqueu el significat dels conceptes que apareixen a l'enunciat.

   (b) [8 punts] Trobeu el domini de la funció $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x^2-1}{x+5}\right)}$.

2. (a) [14 punts] Considerem la successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida per

$$x_1 = 5, \qquad x_{n+1} = \frac{7x_n - 9}{x_n + 1}.$$

   Proveu que $x_n \geq 3$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Demostreu que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és convergent i calculeu-ne el seu límit.

   (b) [8 punts] Calculeu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + (2!)^2 + (3!)^2 + \cdots + (n!)^2}{(n!)^2}.$$

3. (a) [6 punts] Donada una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$, doneu de manera precisa el significat de $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ amb $\ell \in \mathbb{R}$. Definiu també què vol dir $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

   (b) [18 punts] Per $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, considerem la funció

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sqrt{|\cos(1/x)|} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^\beta \ln(1+x) & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \gamma e^{x-1} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   Trobeu per a quins valors de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ és possible definir el valor $f(0)$ de manera que la funció $f$ sigui: (i) contínua a tot $\mathbb{R}$; (ii) derivable en $x = 0$ i $x = 1$.

4. (a) [3 punts] Enuncieu el teorema de Rolle.

   (b) [9 punts] Demostreu que l'equació $4x^9 + x^7 + 2x^5 = 2 - 3x$ té una única solució real.

   (c) [10 punts] Sigui $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = e^x \cos x$. Calculeu $\max_{x\in[-\pi,\pi]} f(x)$ i trobeu els intervals de convexitat de $f$.

5. (a) [4 punts] Enuncieu la fórmula de Taylor (amb resta de Lagrange).

   (b) [12 punts] Demostreu que, per a tot $x \in \mathbb{R}$, es compleix la desigualtat

$$\sqrt[5]{1+x^2} \geq 1 + \frac{x^2}{5} - \frac{2x^4}{25}.$$

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT
JUSTIFIQUEU DETALLADAMENT LES RESPOSTES
POSEU EL VOSTRE NOM I COGNOM EN CADA FULL