Introducció al Càlcul Diferencial **Matemàtiques**

Examen Final. Part 1. Semestre de Tardor 2019-20

JUSTIFIQUEU DETALLADAMENT LES VOSTRES RESPOSTES

1. Proveu a partir de la definició de límit d'una successió que
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{4n^2}{3n^2 - n - 1} = \frac{4}{3}.$$
2. Considereu la successió $\{x_n, n \geq 1\}$ definida per $x_1 = 2$ i
$$x_{n+1} = \frac{3 + x_n^2}{4}, \qquad \text{per } n \geq 1.$$
Estudieu la convergència d'aquesta successió, i calculeu-ne, si existeix, el límit.
3. Calculeu
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n^3 \left(\frac{1}{(n^2+1)^2} + \frac{1}{(n^2+2)^2} + \cdot + \frac{1}{(n^2+n)^2} \right)$$
i
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1 + (2!)^2 + (3!)^2 + \cdots + (n!)^2}{(n!)^2}.$$
4. Calculeu
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{|x|} \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+4}}.$$
5. Determineu els valors dels paràmetres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que fan que la funció definida per
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \sin x}{x}, & x < 0, \\ \sqrt{\beta^2 - x^2}, & 0 \leq x < |\beta|, \\ \alpha^2 - 4 + (x^2 - \beta^2), & x \geq |\beta|. \end{cases}$$
sigui contínua.
6. Sigui $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ una funció contínua parell amb $f(0) = -1$ i $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$. Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té almenys una solució positiva i una solució negativa.

TOTS ELS EXERCICIS VALEN EL MATEIX

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT

POSEU EL VOSTRE NOM I COGNOM EN CADA FULL EN MAJÚSCULES