Introducción

En la clase de hoy, estudiaremos los llamados conjuntos infinitos numerables, que son conjuntos similares al conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Los conjuntos infinitos numerables son los conjuntos infinitos más simples. Demostraremos entonces que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables, pero $\mathbb{R}$ no lo es.

Conjuntos equipotentes

Decimos que dos conjuntos X e Y son equipotentes, si existe una biyección $f : X \longrightarrow Y$. Diremos entonces que X e Y tienen el mismo cardinal (o el mismo tamaño), y escribiremos $|X| = |Y|$. Obsérvese que si f es una biyección de X en Y, entonces f^{-1} es una biyección de Y en X.

Hemos clasificado los conjuntos en dos tipos: conjuntos finitos y conjuntos infinitos. Por ejemplo, sabemos que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos infinitos. En los conjuntos finitos, el concepto de cardinal de un conjunto está asociado al número de elementos del conjunto, de manera que si X es un conjunto finito e Y es un subconjunto propio de X, X e Y no son equipotentes, ya que al no tener X e Y el mismo número de elementos, no existe una biyección de X en Y. Sin embargo, esta propiedad deja de ser cierta en los conjuntos infinitos. Por ejemplo, si consideramos en $\mathbb{N}$ el conjunto A de los números naturales que son cuadrado de algún número natural, es decir $A = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$, se tiene que $|A| = |\mathbb{N}|$, ya que la aplicación f de $\mathbb{N}$ en A definida por $f(n) = n^2$ es biyectiva.

Decimos que un conjunto X es infinito numerable, si $\mathbb{N}$ y X son equipotentes, es decir, si existe una biyección $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.

Y decimos que un conjunto X es numerable, si X es finito o es infinito numerable.

Claramente, $\mathbb{N}$ es numerable, ya que la aplicación $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una biyección.

Teorema 1

$\mathbb{Z}$ es numerable.

Demostración del Teorema 1

Definimos la aplicación $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ por:

(1) $g(n) = 2n$ si $n \in \mathbb{N}$,

(2) $g(-n) = 2n - 1$ si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Observamos que $g(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par }\}$ y $g(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es impar }\}$. Se comprueba entonces fácilmente que $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una aplicación biyectiva. Por tanto, $g^{-1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es también una biyección. Luego, $\mathbb{Z}$ es numerable.
$\square$

Para poder demostrar que $\mathbb{Q}$ es numerable, necesitamos probar algunos teoremas previos.

Teorema de caracterización de los conjuntos numerables

Teorema 2

Para todo conjunto $A \neq \emptyset$, son equivalentes las siguientes condiciones:

(1) A es numerable.

(2) Existe una aplicación inyectiva $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.

(3) Existe una aplicación exhaustiva $h : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

Para demostrar el Teorema 2, lo haremos de forma circular, es decir, probaremos que $(1) \Rightarrow (2)$, $(2) \Rightarrow (3)$ y $(3) \Rightarrow (1)$.

Demostración del Teorema 2

Demostramos $(1) \Rightarrow (2)$. Supongamos que A es numerable. Distinguimos los siguientes dos casos:

Caso 1. A es finito.

Sean $x_1, \ldots, x_n$ los elementos de A. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x_1) = 1, \ldots, f(x_n) = n$. Claramente, f es inyectiva.

Caso 2. A es infinito numerable.

Entonces, existe una aplicación biyectiva $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$. Por tanto, $g^{-1} : A \longrightarrow \mathbb{N}$ es también biyectiva, y en particular es inyectiva.

Demostración del Teorema 2

Demostramos ahora $(2) \Rightarrow (3)$. Supongamos que existe una aplicación inyectiva $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$. Sea $x_0 \in A$. Definimos $h : \mathbb{N} \longrightarrow A$ por:

$$h(n) = \begin{cases} f^{-1}(n), & \text{si } n \in f(A). \\ x_0, & \text{si } n \notin f(A). \end{cases}$$

Se tiene entonces que h es exhaustiva. Para demostrarlo, consideremos un elemento $z \in A$. Sea $x = f(z)$. Tenemos que $x \in f(A)$. Entonces, $h(x) = f^{-1}(x) = f^{-1}(f(z)) = z$.

Demostración del Teorema 2

Por último, demostramos que $(3) \Rightarrow (1)$. Supongamos que existe una aplicación exhaustiva $h : \mathbb{N} \longrightarrow A$. Si A es finito, A es numerable, ya que por la definición de conjunto numerable, todo conjunto finito es numerable. Supongamos entonces que A es infinito. Definimos entonces la aplicación $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ de la siguiente manera:

$f(0) = h(0)$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) = h(x)$ donde $x =$ el menor $m \in \mathbb{N}$ tal que $h(m) \notin \{f(0), \ldots, f(n)\}$.

Por ejemplo, si tenemos que $h(0) = 2$, $h(1) = 2$, $h(2) = 3$,
$h(3) = 4$, $h(4) = 0$, $h(5) = 2$, $h(6) = 7$, $h(7) = 3$,
$h(8) = 14, \ldots\ldots,$
tendremos que $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, $f(3) = 0$, $f(4) = 7$,
$f(5) = 14$, $\ldots\ldots$

Demostración del Teorema 2

Se tiene entonces que rec$(f) =$ rec(h), pero en el recorrido de f no hay repeticiones. Como rec$(f) =$ rec(h) y h es exhaustiva, se tiene que f es exhaustiva.

Demostramos ahora que f es inyectiva. Sean $k, m \in \mathbb{N}$ tales que $k \neq m$. Supongamos que $k < m$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + 1$. Por la definición de $f(m) = f(n + 1)$, tenemos que $f(m) \notin \{f(0), \ldots, f(m-1)\}$, y por tanto $f(m) \neq f(k)$. Y si $m < k$, se procede de forma análoga. $\square$

Como consecuencia inmediata del Teorema 2, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1

Para todo conjunto $A \neq \emptyset$, A es numerable si y sólo si existe una aplicación exhaustiva $h : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

Entonces, si $h : \mathbb{N} \longrightarrow A$ es una aplicación exhaustiva, diremos que la sucesión

$$h(0), h(1), \ldots, h(n), \ldots \ldots$$

es una enumeración del conjunto A.

Por tanto, el que un conjunto A sea numerable significa que A tiene una enumeración.

Consecuencias del Teorema 2

Como consecuencia inmediata del Teorema 2, obtenemos también el siguiente resultado.

Corolario 2

Si A es numerable y $B \subseteq A$, entonces B es numerable.

Si $B = \emptyset$, la condición es inmediata, ya que todo conjunto finito es numerable por definición. Supongamos entonces que $B \neq \emptyset$. Como A es un conjunto numerable, por el apartado (2) del Teorema 2, existe una aplicación inyectiva $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$. Sea g la restricción de f al conjunto B. Entonces, $g : B \longrightarrow \mathbb{N}$ es una aplicación inyectiva. Aplicando entonces el Teorema 2, deducimos que B es numerable. $\square$

Teorema 3

Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos no vacíos tal que A_n es numerable para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es numerable

Demostramos el Teorema 3. Consideremos $n \in \mathbb{N}$. Como A_n es numerable, por el Teorema 2, existe una aplicación exhaustiva $h^n : \mathbb{N} \longrightarrow A_n$. Sea $a_i^n = h^n(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por tanto, $A_n = \{a_o^n, a_1^n, a_2^n, \ldots\ldots\}$.

Así pues, tenemos:

$A_0 : a_0^0\, a_1^0\, a_2^0\, a_3^0 \ldots\ldots$

$A_1 : a_0^1\, a_1^1\, a_2^1\, a_3^1 \ldots\ldots$

$A_2 : a_0^2\, a_1^2\, a_2^2\, a_3^2 \ldots\ldots$

$A_3 : a_0^3\, a_1^3\, a_2^3\, a_3^3 \ldots\ldots$

$\vdots$

$\vdots$

Sea $A = \bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tomamos la siguiente enumeración de A. En primer lugar, consideramos a_0^0. A continuación, consideramos los elementos de la diagonal a_0^1, a_1^0. A continuación, consideramos los elementos de la diagonal a_0^2, a_1^1, a_2^0. A continuación, consideramos los elementos de la diagonal a_0^3, a_1^2, a_2^1, a_3^0. Y así sucesivamente.

Demostración del Teorema 3

Por tanto, obtenemos la siguiente enumeración de A:

$a_0^0,\ a_0^1,\ a_1^0,\ a_0^2,\ a_1^1,\ a_2^0,\ a_0^3,\ a_1^2,\ a_2^1,\ a_3^0,\ \ldots\ldots$

Definimos entonces $h : \mathbb{N} \longrightarrow A$ como $h(n) = n$-ésimo elemento de la enumeración de A para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $h(0) = a_0^0$, $h(1) = a_0^1$, $h(2) = a_1^0$, $h(3) = a_0^2$, $\ldots\ldots$.

Como h es exhaustiva, por el Teorema 2, A es numerable. $\square$

Corolario 3

Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \cup B$ es numerable.

Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$, entonces $A \cup B = A$ o $A \cup B = B$ o $A \cup B = \emptyset$, y por tanto $A \cup B$ es numerable. Supongamos entonces que A y B son distintos del conjunto vacío. Definimos $A_0 = A$ y $A_n = B$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Entonces, $\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\} = A \cup B$ es numerable por el Teorema 3. $\square$

Teorema 4

$\mathbb{Q}$ es numerable.

Demostración del Teorema 4

Sean $X = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$, $Y = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$. Claramente $Q = X \cup Y$.

Demostramos que X es numerable. Tenemos que

$$X = \bigcup \{A_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

donde $A_n = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{N}\}$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Se tiene que A_n es numerable, porque la aplicación $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow A_n$ definida por $f_n(m) = m/n$ es una biyección. Por tanto, X es una unión numerable de conjuntos numerables. Aplicando entonces el Teorema 3, deducimos que X es numerable.

Demostración del Teorema 4

Demostramos ahora que Y es numerable.

Tenemos que

$$Y = \bigcup \{B_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

donde $B_n = \{\frac{-m}{n} : m \in \mathbb{N}\}$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Se tiene que B_n es numerable, porque la aplicación $g_n : \mathbb{N} \longrightarrow B_n$ definida por $g_n(m) = -m/n$ es una biyección. Por tanto, Y es una unión numerable de conjuntos numerables. Aplicando entonces el Teorema 3, deducimos que Y es numerable.

Así pues, tenemos que $\mathbb{Q} = X \cup Y$ y X e Y son numerables. Aplicando entonces el Corolario 3, deducimos que $\mathbb{Q}$ es numerable.
$\square$

Sin embargo, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5

$\mathbb{R}$ no es numerable.

Para demostrar el Teorema 5, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathbb{R}$ es numerable. Sea

$$x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n \ldots\ldots$$

una enumeración de $\mathbb{R}$. Por tanto, dicha enumeración es el recorrido de una aplicación biyectiva $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, de manera que $x_n = h(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración del Teorema 5

Para todo $n \in \mathbb{N}$ sea u_n la parte entera del número real x_n. Por tanto, x_n es de la forma

$$x_n = u_n.x_0^n x_1^n \ldots\ldots x_k^n \ldots\ldots$$

donde x_k^n es el k-ésimo dígito decimal de x_n para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, $x_k^n \in \{0, \ldots, 9\}$ para todo $n, k \in \mathbb{N}$.

Así pues, tenemos:

$$x_0 = u_0.x_0^0 x_1^0 \ldots\ldots x_k^0 \ldots\ldots$$
$$x_1 = u_1.x_0^1 x_1^1 \ldots\ldots x_k^1 \ldots\ldots$$
$$x_2 = u_2.x_0^2 x_1^2 \ldots\ldots x_k^2 \ldots\ldots$$
$$\vdots$$
$$x_n = u_n.x_0^n x_1^n \ldots\ldots x_k^n \ldots\ldots$$
$$\vdots$$

Demostración del Teorema 5

Ahora, para llegar a una contradicción, construimos un numero real que no está en la lista. Definimos entonces:

$$z = 0.z_1 z_2 \ldots\ldots z_m \ldots\ldots$$

donde:

$$z_m = \begin{cases} 1, & \text{si } x_m^m \neq 1. \\ 2, & \text{si } x_m^m = 1. \end{cases}$$

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $z \neq x_n$, porque $z_n \neq x_n^n$. Así pues, $z \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es imposible ya que $z \in (0, 1)$, y por tanto $z \in \mathbb{R}$. $\square$

Una consecuencia del Teorema 5

Sea $\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es irracional}\}$. El siguiente resultado es una consecuencia del Teorema 5.

Teorema 6

$\mathbb{I}$ no es numerable.

Supongamos que $\mathbb{I}$ es numerable. Por el Teorema 4, tenemos que $\mathbb{Q}$ es numerable. Entonces, como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, deducimos por el Corolario 3 que $\mathbb{R}$ es numerable, lo que contradice al Teorema 5. Por tanto, $\mathbb{I}$ no es numerable. $\square$