Matrius i vectors (grup de matí)

Curs 2018–2019

11.1 Càlcul de matrius inverses 2×2

Considerem una matriu 2×2 arbitrària

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Comencem amb l'observació següent:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}. \tag{11.1}$$

Si $ad - bc = 0$, llavors el vector (a, b) és proporcional a (c, d) i per tant $\operatorname{rang} A < 2$, la qual cosa implica que A no té inversa. D'altra banda, si $ad - bc \neq 0$, llavors l'expressió (11.1) ens diu que A té inversa i la seva inversa és

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Tot i que també és possible donar fórmules explícites per a les inverses de matrius d'ordre més gran, anem a descriure un procediment més efectiu per calcular-les.

11.2 Transformacions elementals

Enumerem les transformacions següents en una matriu donada, que anomenarem *transformacions elementals:*

(1c) Sumar a una columna un múltiple d'una altra columna.

(1f) Sumar a una fila un múltiple d'una altra fila.

(2c) Permutar dues columnes.

(2f) Permutar dues files.

(3c) Multiplicar una columna per un nombre real no nul.

(3f) Multiplicar una fila per un nombre real no nul.

Cal observar que cadascuna d'aquestes transformacions és reversible: la transformació inversa de sumar a la columna j la columna i multiplicada per un nombre real a és sumar a la columna j la columna i multiplicada per $-a$; la transformació inversa de permutar dues columnes és permutar altra vegada les mateixes dues columnes; la transformació inversa de multiplicar una columna per un nombre real a és multiplicar la mateixa columna per $1/a$, i anàlogament amb les files.

Observem també que el procés d'esglaonament d'una matriu que hem utilitzat en capítols anteriors per reduir conjunts de vectors expressats en components en una base o per resoldre sistemes d'equacions lineals és una successió de transformacions de tipus (1f) i (2f), i ocasionalment també (3f) si convé.

11.3 Matrius elementals

Totes les matrius que es descriuen a continuació són matrius quadrades $n \times n$. Denotarem per U_i^j la matriu que té un 1 en el lloc situat en la fila i i la columna j, i zeros en tots els altres llocs. Per a cada nombre real a, denotem

$$S_i^j(a) = I + aU_i^j,$$

on I és la matriu identitat i suposarem que $i \neq j$. Per exemple,

$$S_2^4(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'efecte de multiplicar una matriu A per $S_i^j(a)$ a la dreta és el següent:

$$A\,S_i^j(a) = (A^1, \dots, A^j, \dots, A^n)\,S_i^j(a) = (A^1, \dots, A^j + aA^i, \dots, A^n),$$

on $A^1, \dots, A^n$ denoten les columnes de A, i el vector $A^j + aA^i$ és situat en la columna j. En altres paraules, l'efecte de multiplicar A per $S_i^j(a)$ a la dreta és sumar a la columna j la columna i multiplicada per a, que és una transformació elemental de tipus (1c). De manera simètrica,

$$S_i^j(a)\,A = S_i^j(a) \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + aA_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix},$$

on $A_1, \dots, A_n$ denoten les files de A, i el vector fila $A_i + aA_j$ és situat en la fila i. Per tant, el resultat és una transformació elemental de tipus (1f). Observem que en cada cas la matriu inversa produeix la transformació elemental inversa; és a dir,

$$(S_i^j(a))^{-1} = S_i^j(-a)$$

per a tot i i tot j amb $i \neq j$, i tot nombre real a.

Les *matrius de permutació* són les matrius P_i^j amb $i \neq j$, $p_i^j = p_j^i = 1$, $p_k^k = 1$ si $k \neq i$ i $k \neq j$, i zeros en la resta de llocs. Per exemple,

$$P_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'efecte de multiplicar una matriu A per aquestes matrius és el següent: la matriu AP_i^j té les mateixes columnes que A però amb les columnes i i j intercanviades, i la matriu $P_i^j A$ té les mateixes files que A amb les files i i j intercanviades. Aquestes són transformacions elementals de tipus (2c) i (2f), i es compleix

$$(P_i^j)^{-1} = P_i^j.$$

Finalment, denotem per $M_i(a)$ la matriu amb $m_i^i = a$, $m_k^k = 1$ per a tot $k \neq i$, i zeros en la resta de llocs, on suposem que $a \neq 0$. Per exemple,

$$M_2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'efecte de multiplicar una matriu A per $M_i(a)$ a la dreta és multiplicar la columna i per a, i l'efecte de multiplicar una matriu A per $M_i(a)$ a l'esquerra és multiplicar la fila i per a. Aquestes són transformacions elementals de tipus (3c) i (3f). A més,

$$(M_i(a))^{-1} = M_i(1/a).$$

Les matrius de la forma $S_i^j(a)$, P_i^j i $M_i(a)$ s'anomenen *matrius elementals*.

11.4 Algoritme d'inversió de matrius

Sigui A una matriu $n \times n$ amb $\operatorname{rang} A = n$. Mitjançant transformacions elementals de tipus (1f) i (2f) podem transformar A en

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ 0 & b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n^n \end{pmatrix}.$$

Aquí sabem segur que $b_i^i \neq 0$ per a tot i, ja que $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} A = n$. Per tant, amb transformacions elementals de tipus (3f) podem transformar B en

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_1^2 & \dots & c_1^n \\ 0 & 1 & \dots & c_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalment, amb transformacions addicionals de tipus (1f) podem transformar C en la matriu identitat I. Com que cadascun dels passos que hem fet ha estat multiplicació a l'esquerra per una matriu elemental, el procés es resumeix en una igualtat

$$E_m \cdots E_3\, E_2\, E_1\, A = I, \tag{11.2}$$

on $E_1, \dots, E_m$ són matrius elementals. L'expressió (11.2) equival a

$$A^{-1} = E_m \cdots E_3\, E_2\, E_1 \tag{11.3}$$

i per tant la matriu inversa A^{-1} és el resultat d'efectuar a la matriu identitat I les mateixes transformacions elementals que hem fet a A. De manera resumida,

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array} \right) \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array} \right).$$

L'expressió (11.3) demostra, de passada, el resultat següent, que és important:

Teorema 11.1. *Tota matriu invertible és producte de matrius elementals.*

Tanmateix, la descomposició d'una matriu invertible en producte de matrius elementals no és mai única. Per exemple, $E = P_i^j P_i^j E$ per a qualsevol matriu E.

11.5 Canvis de base

Com a aplicació de la tècnica d'inversió de matrius, explicarem un procediment per canviar de base les components dels vectors d'un espai vectorial.

Sigui E un espai vectorial de dimensió $n \geq 1$ i siguin

$$\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n), \qquad \mathcal{B}_2 = (v_1, \dots, v_n)$$

dues bases de E. Suposem donades les components de cada vector v_i en la base $\mathcal{B}_1$:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1^1 e_1 + \cdots + a_1^n e_n \\ &\vdots \\ v_n &= a_n^1 e_1 + \cdots + a_n^n e_n. \end{aligned}$$

Llavors la matriu

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

s'anomena *matriu de canvi de base* de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ i la denotarem per $C(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1)$. És la matriu que té per columnes (atenció: *columnes*, no pas files) les components dels vectors de $\mathcal{B}_2$ en la base $\mathcal{B}_1$. Si un vector $w \in E$ té components $w = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}_1}$ i $w = (y_1, \dots, y_n)_{\mathcal{B}_2}$, llavors

$$\begin{aligned} w &= y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n = y_1(a_1^1 e_1 + \cdots + a_1^n e_n) + \cdots + y_n(a_n^1 e_1 + \cdots + a_n^n e_n) \\ &= (a_1^1 y_1 + \cdots + a_n^1 y_n)\, e_1 + \cdots + (a_1^n y_1 + \cdots + a_n^n y_n)\, e_n, \end{aligned}$$

d'on resulta que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

En notació matricial,

$$X = C(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1)\, Y.$$

Observem que aleshores es compleix també que $Y = C(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1)^{-1}\, X$, i per tant

$$C(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1)^{-1} = C(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2).$$

En altres paraules, la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ és la inversa de la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.