Introducción

En la clase de hoy, empezaremos a estudiar el concepto de relación de equivalencia, el cual es un concepto continuamente utilizado en Matemáticas.

La noción de relación de equivalencia la utilizaremos también en el siguiente tema de la asignatura para poder construir los números enteros a partir de los números naturales, los números racionales a partir de los números enteros y los números reales a partir de los números racionales.

Relaciones de equivalencia

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es una relación de equivalencia en A, si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Veamos a continuación algunos ejemplos de relaciones de equivalencia.

Consideremos el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Sea

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Claramente, R es una relación sobre A. Demostramos que R es una relación de equivalencia.

(1) R es reflexiva, ya que $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R$.

Ejemplo

(2) R es simétrica, ya que

$$(1,2) \in R \text{ y } (2,1) \in R,$$

$$(3,4) \in R \text{ y } (4,3) \in R.$$

(3) R es transitiva, porque se observa que no existen números $x, y, z \in A$ tales que xRy e yRz, pero $x \not R z$. En efecto, tenemos:

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
&(1,1) \in R \text{ y } (1,2) \in R \Rightarrow (1,2) \in R,\\
&(1,2) \in R \text{ y } (2,1) \in R \Rightarrow (1,1) \in R,\\
&(1,2) \in R \text{ y } (2,2) \in R \Rightarrow (1,2) \in R,\\
&(2,1) \in R \text{ y } (1,1) \in R \Rightarrow (2,1) \in R,\\
&(2,1) \in R \text{ y } (1,2) \in R \Rightarrow (2,2) \in R,\\
&(2,2) \in R \text{ y } (2,1) \in R \Rightarrow (2,1) \in R,\\
&(3,4) \in R \text{ y } (4,4) \in R \Rightarrow (3,4) \in R,\\
&(3,3) \in R \text{ y } (3,4) \in R \Rightarrow (3,4) \in R,\\
&(4,3) \in R \text{ y } (3,3) \in R \Rightarrow (4,3) \in R,\\
&(4,4) \in R \text{ y } (4,3) \in R \Rightarrow (4,3) \in R.
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Definimos la relación R sobre $P(\{1,2,3\})$ de la siguiente manera:

$$ARB \iff |A| = |B|$$

para todo $A, B \in P(\{1,2,3\})$. Demostramos que R es una relación de equivalencia.

(1) R es reflexiva, ya que para todo $A \subseteq \{1,2,3\}$, $|A| = |A|$, y por tanto ARA.

(2) R es simétrica, ya que para todo $A, B \in P(\{1,2,3\})$:

$$ARB \Rightarrow |A| = |B| \Rightarrow |B| = |A| \Rightarrow BRA.$$

(3) R es transitiva, ya que para todo $A, B, C \in P(\{1,2,3\})$:

$$ARB \wedge BRC \Rightarrow |A| = |B| \wedge |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C| \Rightarrow ARC.$$

Ejemplo

En general, es fácil demostrar que las relaciones que vienen definidas por una igualdad son relaciones de equivalencia.

Procediendo entonces de forma análoga a como hemos hecho en el último ejemplo se puede demostrar que la relación $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$ es una relación de equivalencia.

Y asimismo se demuestra facilmente que, para cualquier conjunto A, la relación de igualdad Id_A es una relación de equivalencia.

Ejemplo

Sea $n \in N$ tal que $n \geq 2$. Definimos en $\mathbb{Z}$ la relación de congruencia módulo n, que denotamos por $\equiv_n$, de la siguiente manera:

$$a \equiv_n b \Leftrightarrow a - b \text{ es un múltiplo de } n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}(a - b = kn)$$

para todo $a, b \in \mathbb{Z}$.

Demostramos que $\equiv_n$ es una relación de equivalencia.

(1) $\equiv_n$ es reflexiva, ya que para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0$.

Ejemplo

(2) $\equiv_n$ es simétrica, ya que para todo $a, b \in \mathbb{Z}$:

$a \equiv_n b \Rightarrow a - b$ es un múltiplo de $n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}(a - b = kn) \Rightarrow$ $b - a = (-k)n \Rightarrow b - a$ es un múltiplo de $n \Rightarrow b \equiv_n a$.

(3) $\equiv_n$ es transitiva. Para demostrarlo, supongamos que $a \equiv_n b$ y $b \equiv_n c$. Tenemos que demostrar que $a \equiv_n c$. Como $a \equiv_n b$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = kn$. Como $b \equiv_n c$, existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $b - c = ln$. Entonces:

$$a - c = (a - b) + (b - c) = kn + ln = (k + l)n.$$

Por tanto, $a - c$ es un múltiplo de n, con lo cual $a \equiv_n c$. Así pues, $\equiv_n$ es transitiva.

Como hemos demostrado que $\equiv_n$ es reflexiva, simétrica y trasitiva, tenemos que $\equiv_n$ es relación de equivalencia.

Clases de equivalencia

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Sea $x \in A$. Definimos la clase de equivalencia de x con respecto a R por

$$\overline{x} = \{y \in A : xRy\}.$$

Como R es simétrica, tenemos que

$$\overline{x} = \{y \in A : yRx\}.$$

Obsérvese que para todo $x \in A$ tenemos lo siguiente:

(1) $\overline{x} \subseteq A$.

(2) $x \in \overline{x}$, ya que por la propiedad reflexiva tenemos que xRx.

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, definimos el conjunto cociente de A respecto de R por

$$A/R = \{\overline{x} : x \in A\}.$$

Es decir, el conjunto cociente A/R es el conjunto de las clases de equivalencia de los elementos de A. Obsérvese que los elementos de A/R son conjuntos. Es decir, A/R es un conjunto de subconjuntos de A.

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, $X \in A/R$ y $a \in X$, diremos que a es un representante de X.

Veamos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo

Consideremos el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Sea

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Demostramos anteriormente que R es una relación de equivalencia. Tenemos entonces que
$\overline{1} = \{1, 2\}$, $\overline{2} = \{1, 2\}$, $\overline{3} = \{3, 4\}$, $\overline{4} = \{3, 4\}$. Por tanto,

$$A/R = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}.$$

Ejemplo

Definimos la relación R sobre $P(\{1,2,3\})$ de la siguiente manera:

$$ARB \iff |A| = |B|$$

para todo $A, B \in P(\{1,2,3\})$.

Demostramos anteriormente que R es una relación de equivalencia. Tenemos entonces:

$\overline{\emptyset} = \{A \subseteq \{1,2,3\} : |A| = |\emptyset|\} = \{A \subseteq \{1,2,3\} : |A| = 0\} = \{\emptyset\}$,

$\overline{\{1\}} = \{A \subseteq \{1,2,3\} : |A| = |\{1\}|\} =$
$\{A \subseteq \{1,2,3\} : |A| = 1\} = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$,

Ejemplo

$$\overline{\{1,2\}} = \{A \subseteq \{1,2,3\} : |A| = |\{1,2\}|\} =$$
$$\{A \subseteq \{1,2,3\} : |A| = 2\} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\},$$

$$\overline{\{1,2,3\}} = \{A \subseteq \{1,2,3\} : |A| = |\{1,2,3\}|\} =$$
$$\{A \subseteq \{1,2,3\} : |A| = 3\} = \{\{1,2,3\}\}.$$

Ejemplo

Obsérvese que

$$\overline{\{1\}} = \overline{\{2\}} = \overline{\{3\}} \text{ y}$$

$$\overline{\{1,2\}} = \overline{\{1,3\}} = \overline{\{2,3\}}.$$

Por tanto,

$$A/R = \{\overline{\emptyset}, \overline{\{1\}}, \overline{\{1,2\}}, \overline{\{1,2,3\}}\}.$$

Ejemplo

Definimos en $\mathbb{Z}$ la relación de congruencia módulo n, que denotamos por $\equiv_n$, de la siguiente manera:

$$a \equiv_n b \Leftrightarrow a - b \text{ es un múltiplo de } n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}(a - b = nk)$$

para todo $a, b \in \mathbb{Z}$.

Demostramos anteriormente que $\equiv_n$ es una relación de equivalencia.

Vamos a describir el conjunto cociente para $n = 3$. Si $a \in \mathbb{Z}$, tenemos que
$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} : 3|b - a\} = \{b \in \mathbb{Z} : b - a = 3l \text{ para algún } l \in \mathbb{Z}\} = \{a + 3l : l \in \mathbb{Z}\}$.
Por tanto:

Ejemplo

$$\overline{0} = \{3l : l \in \mathbb{Z}\},$$

$$\overline{1} = \{3l + 1 : l \in \mathbb{Z}\},$$

$$\overline{2} = \{3l + 2 : l \in \mathbb{Z}\}.$$

En general, si $k \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\overline{k} = \{3l + k : l \in \mathbb{Z}\}.$$

Se tiene entonces que $\overline{3} = \overline{0}$, $\overline{4} = \overline{1}$, $\overline{5} = \overline{2}$, $\overline{6} = \overline{0}, \ldots$

Por tanto,

$Z/\equiv_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\} = \{\{3l : l \in \mathbb{Z}\}, \{3l+1 : l \in \mathbb{Z}\}, \{3l+2 : l \in \mathbb{Z}\}\}.$

Ejemplo

Consideremos ahora la relación de congruencia módulo n para $n \geq 2$. Para todo $a \in Z$ tenemos:
$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} : n|b-a\} = \{b \in \mathbb{Z} : b-a = nl$ para algún $l \in \mathbb{Z}\} = \{nl + a : l \in \mathbb{Z}\}$.
Por tanto:

$$\overline{0} = \{nl : l \in \mathbb{Z}\},$$

$$\overline{1} = \{nl + 1 : l \in \mathbb{Z}\},$$

$$\vdots$$

$$\overline{n-1} = \{nl + n - 1 : l \in \mathbb{Z}\},$$

$$\overline{n} = \{nl : l \in \mathbb{Z}\} = \overline{0}$$

$$\vdots$$

Ejemplo

En general, si $k \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\overline{k} = \{nl + k : l \in \mathbb{Z}\}.$$

Por tanto,

$$(Z/\equiv_n) = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}.$$

Propiedades básicas de las clases de equivalencia

Proposición 1

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Sean $a, b \in A$ tales que aRb. Entonces, para todo $x \in A$ se tiene que $xRa \Leftrightarrow xRb$.

Para demostrar la Proposición 1, supongamos que aRb y que $x \in A$. Si xRa, como tenemos que aRb, deducimos que xRb por la transitividad de R. Por tanto,

$$xRa \Rightarrow xRb.$$

Supongamos ahora que xRb. Como aRb y R es simétrica, tenemos que bRa. Entonces, como xRb y bRa, deducimos que xRa por la transitividad de R. Por tanto,

$$xRb \Rightarrow xRa. \quad \square$$

Teorema 1

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Sean $a, b \in A$. Entonces:

(1) $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow aRb$.

(2) $b \in \overline{a} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b}$.

(3) Si $\overline{a} \neq \overline{b}$, entonces $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$.

Demostración del Teorema 1

Demostramos el apartado (1). Para probar la implicación de izquierda a derecha, supongamos que $\overline{a} = \overline{b}$. Como $a \in \overline{a}$ y $\overline{a} = \overline{b}$, deducimos que $a \in \overline{b}$, y por tanto aRb por la definición de $\overline{b}$.

Para demostrar la implicación de derecha a izquierda, supongamos que aRb. Sea $x \in A$. Por la Proposición 1, tenemos que

$$xRa \Leftrightarrow xRb.$$

Por tanto:

$$x \in \overline{a} \Leftrightarrow xRa \Leftrightarrow xRb \Leftrightarrow x \in \overline{b}.$$

Así pues, $\overline{a} = \overline{b}$

Demostración del Teorema 1

Para demostrar el apartado (2), obsérvese que

$$b \in \overline{a} \Leftrightarrow aRb,$$

por la definición de $\overline{a}$. Aplicando ahora el apartado (1), obtenemos:

$$b \in \overline{a} \Leftrightarrow aRb \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b}.$$

Demostración del Teorema 1

Demostramos ahora el apartado (3) por contraposición. Supongamos que $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$. Sea $x \in \overline{a} \cap \overline{b}$. Como $x \in \overline{a}$, tenemos que xRa. Y como $x \in \overline{b}$, tenemos que xRb.

Como xRa y R es simétrica, deducimos que aRx. Entonces, como aRx y xRb, inferimos que aRb por la transitividad de R. Aplicando ahora el apartado (1), tenemos que $\overline{a} = \overline{b}$. $\square$