Examen final (03/02/10) — Solucions dels problemes

Pregunta 1.

Demostra que per a tot $n \geqslant 2$, el nombre de rectes determinades per n punts del pla és, com a màxim, $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Procedim per inducció sobre n:

Cas inicial: $n = 2$. És sabut que dos punts (diferents) determinen una única recta. D'altra banda, $\dfrac{2(2-1)}{2} = 1$. Com que $1 \leqslant 1$, queda demostrat.

Pas d'inducció: Suposem-ho cert per a n punts i demostrem-ho per a $n+1$. Escollim un dels $n+1$ punts. Com que per a determinar una recta es necessiten dos punts, les rectes determinades pels $n+1$ punts es poden repartir en dos grups, les determinades pels n punts no escollits, i les determinades pel punt escollit i un dels punts no escollits. Les rectes del primer grup seran com a màxim $\dfrac{n(n-1)}{2}$, per la *hipòtesi d'inducció*. Les del segon grup seran com a màxim n, ja que hi ha n punts no escollits (podrien ser menys, si hi ha tres punts aliniats, per això hem de dir "com a màxim"). Per tant, en total com a màxim hi haurà $\dfrac{n(n-1)}{2} + n$ rectes. Operant, es comprova que $\dfrac{n(n-1)}{2} + n = \dfrac{(n+1)n}{2} = \dfrac{(n+1)\big((n+1)-1\big)}{2}$, que és la fórmula proposada en el cas $n+1$.

Pregunta 4.

Siguin A, B, C conjunts qualssevol.

(a) Demostra que $(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$.

(b) Demostra que $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ si i només si $A \subseteq C$.

En cada cas es donen dues solucions igualment vàlides, una agafant elements i l'altra raonant directament amb propietats de les operacions entre conjunts.

(a) Sigui $x \in (A \cup B) \cap C$. Aleshores, $x \in A \cup B$ i $x \in C$. Degut al primer fet, cal distingir casos:
− Si $x \in A$, també $x \in A \cup (B \cap C)$.
− Si $x \in B$, com que també $x \in C$, resulta que $x \in B \cap C$ i per tant que $x \in A \cup (B \cap C)$.
En els dos casos s'ha provat que $x \in A \cup (B \cap C)$. Per tant, $(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Directament: Usant la propietat distributiva i que $A \cap C \subseteq A$, tenim que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq A \cup (B \cap C).$$

(b) La igualtat equival a les dues inclusions, però $\subseteq$ val sempre, segons l'apartat anterior, per tant el que hem de provar és que $(A \cup B) \cap C \supseteq A \cup (B \cap C)$ si i només si $A \subseteq C$. És una equivalència, per tant cal provar les dues implicacions per separat:

($\Rightarrow$) Sigui $x \in A$. Aleshores també $x \in A \cup (B \cap C)$, i per la hipòtesi també $x \in (A \cup B) \cap C$, cosa que en particular implica que $x \in C$.

Directament, és molt simple, només s'aplica la hipòtesi:

$$A \subseteq A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C \subseteq C.$$

($\Leftarrow$) Sigui $x \in A \cup (B \cap C)$. Cal distingir casos:
– Si $x \in A$, per la hipòtesi $x \in C$, i d'altra banda $x \in A \cup B$. Per tant $x \in (A \cup B) \cap C$.
– Si $x \in B \cap C$, en particular $x \in C$, i d'altra banda $x \in B$, que també implica $x \in A \cup B$. Per tant, $x \in (A \cup B) \cap C$.
Com que s'ha provat que en els dos casos $x \in (A \cup B) \cap C$, queda demostrada la implicació.
Directament: Si $A \subseteq C$, aleshores $A \cup C = C$. Aplicant això i la propietat distributiva, tenim

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = (A \cup B) \cap C.$$

Com es veu, fent-ho així s'obté directament la igualtat (que de fet és el que s'havia de demostrar).

Pregunta 5.
Considerem els següentes conjunts:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} (m \leqslant 5 \wedge n = m^2)\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} : 0 < n \wedge n < 10\}$$

Dóna en forma extensional:

(a) $A \cap B$, $A \cup B$, i $B \cup \{\emptyset\}$.

(b) $\mathcal{P}(A \cap B)$ i $\mathcal{P}(A \setminus B)$.

(c) $(A \cap B) \times A$, $A \times (A \setminus B)$ i $A \times \{\emptyset\}$.

Per a respondre a les preguntes, convé determinar primer els conjunts A i B. Veiem que A és el conjunt dels naturals que són el quadrat d'algun natural menor o igual que 5; i que B és el conjunt dels naturals estrictament entre 0 i 10. Per tant

$$A = \{1, 4, 9, 16, 25\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Recorda que *en forma extensional* vol dir *donant la llista dels seus elements*. Alehores, usant simplement les definicions, obtenim:

(a) $A \cap B = \{1, 4, 9\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16, 25\}$, i $B \cup \{\emptyset\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \emptyset\}$.

(b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \{\, \emptyset, \{1\}, \{4\}, \{9\}, \{1, 4\}, \{1, 9\}, \{4, 9\}, \{1, 4, 9\} \,\}$.
Com que $A \setminus B = \{16, 25\}$, resulta que $\mathcal{P}(A \setminus B) = \{\, \emptyset, \{16\}, \{25\}, \{16, 25\} \,\}$.

(c) $(A \cap B) \times A = \{\, (1,1), (1,4), (1,9), (1,16), (1,25), (4,1), (4,4), (4,9), (4,16), (4,25), (9,1), (9,4), (9,19), (9,16), (9,25) \,\}$

$A \times (A \setminus B) = \{\, (1,16), (1,25), (4,16), (4,25), (9,16), (9,25), (16,16), (16,25), (25,16), (25,25) \,\}$
$A \times \{\emptyset\} = \{\, (1,\emptyset), (4,\emptyset), (9,\emptyset), (16,\emptyset), (25,\emptyset) \,\}$.

Pregunta 6.

Sigui $\sim$ la relació en $\mathbb{R}$ definida a continuació:
Per tot $a, b \in \mathbb{R}$, $a \sim b$ si, i només si $a = b$ o $\big(|a|-2\big)\cdot\big(|b|-2\big) > 0$.

(a) Demostra que $\sim$ és una relació d'equivalència.

(b) Troba $\overline{2}$ i $\overline{-3}$.

(c) Dóna la partició associada a $\sim$.

(a) Cal demostrar que $\sim$ és una relació reflexiva, simètrica, i transitiva.

Reflexiva ($a \sim a$, per tot $a \in \mathbb{R}$) Això és veritat, segons la definició de $\sim$, ja que $a = a$.

Simètrica (si $a \sim b$ aleshores $b \sim a$) Això és veritat, perquè si $a = b$ aleshores $b = a$, i si $\big(|a|-2\big)\cdot\big(|b|-2\big) > 0$, aleshores $\big(|b|-2\big)\cdot\big(|a|-2\big) = \big(|a|-2\big)\cdot\big(|b|-2\big) > 0$.

Transitiva (si $a \sim b$ i $b \sim c$, aleshores $a \sim c$) Quan $a = b$ o $b = c$, la implicació és trivial (la conclusió coincideix amb una de les hipòtesis). Si no es dóna cap dels dos casos, és que es donen alhora $\big(|a|-2\big)\cdot\big(|b|-2\big) > 0$ i $\big(|b|-2\big)\cdot\big(|c|-2\big) > 0$. La primera desigualtat vol dir que $|a|-2$ i $|b|-2$ tenen el mateix signe i cap és 0, i la segona vol dir que $|b|-2$ i $|c|-2$ tenen el mateix signe i cap és 0. Per tant, $|a|-2$ i $|c|-2$ tenen el mateix signe i cap és 0, i per tant el seu producte és estrictament positiu: $\big(|a|-2\big)\cdot\big(|c|-2\big) > 0$: $a \sim c$.

(b) En general, $\overline{a} = \{x : x \sim a\}$.

En aquest cas, $x \sim 2$ si i només si $x = 2$ o bé $\big(|x|-2\big)\cdot\big(|2|-2\big) > 0$. Però $|2|-2 = 2-2 = 0$, per tant el segon cas no es pot donar, i $\overline{2} = \{2\}$.

D'altra banda, $x \sim -3$ si i només si $x = -3$ o bé $\big(|x|-2\big)\cdot\big(|-3|-2\big) > 0$. Com que $|-3|-2 = 3-2 = 1 \geqslant 0$, el producte és positiu si i només si $|x|-2 \geqslant 0$, és a dir, si i només si $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ i per tant $\overline{-3} = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ (observa que aquesta reunió d'intervals ja inclou el -3).

(c) Dos punts diferents estan relacionats per $\sim$ si i només si en calcular $|x|-2$ donen el mateix signe, i no són 0. Aquest signe només pot ser, doncs, positiu, o negatiu. Per tant, només hi ha dues classes que incloguin elements diferents: Com hem vist al càlcul de l'apartat anterior, $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ correspon als casos de signe positiu. Per al signe negatiu resulta que $|x|-2 < 0$ si i només si x pertany a l'interval $(-2, 2)$, per tant aquest interval és una altra classe d'equivalència. Finalment queden els punts "aïllats", que no estan relacionats amb ningú més: Ja hem vist que 2 ho és, i només queda un punt de la recta per analitzar: -2. Com que $|-2|-2 = 2-2 = 0$, no pot complir la segona part de la definició amb cap altre punt, per tant només està relacionat amb si mateix.

En conclusió, doncs, la partició associada a $\sim$ està formada per les 4 classes d'equivalència següents: $\{2\}, \{-2\}, (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ i $(-2, 2)$.

Si ho volem escriure més formalment, i anomenen P la partició, aleshores posarem

$$P = \big\{\, \{2\}, \{-2\}, (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), (-2, 2) \,\big\}.$$