Matrius i Vectors
Examen de reevaluación, problemas

Febrero 2016

Todos los teléfonos deberán estar desconectados durante el examen. Pongan nombre y apellidos en cada hoja. Entreguen los problemas en hojas separadas y al menos una hoja por problema (aunque sea sólo con el nombre). En la parte de problemas pueden consultarse libros y apuntes propios.

Al terminar la parte de problemas dejen todo el material escrito en la tarima bajo la pizarra.

Horario:

- Problemas: de 9 a 12.50 horas
- Teoría: de 13 a 14 horas

1.- En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$F =< (1,1,1,0),(0,1,1,1) >$$

y G y H, dados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} G &: x+y+2z+t=0, \quad x-y-t=0, \\ H &: x-y-z-t=0, \quad 2x-y-2z-t=0. \end{aligned}$$

Se pide calcular ecuaciones independientes del subespacio F y la dimensión de $F \cap (G+H)$.

2.- Sean F, G, H subespacios de un espacio vectorial E de dimensión finita. Se pide:

(1) Demostrar que

$$\dim(F+G+H) \leq \dim F + \dim G + \dim H.$$

(2) Demostrar que si

$$\dim(F+G+H) = \dim F + \dim G + \dim H.$$

entonces se cumplen

$$\begin{aligned}(F+G)\cap H &= \{0\}\\ (G+H)\cap F &= \{0\}\\ (H+F)\cap G &= \{0\}.\end{aligned}$$

3.- Se suponen dados un espacio vectorial E, una base del mismo (e_1, e_2, e_3) y un endomorfismo f de E que cumple

$$\begin{aligned}f(e_1) &= e_1 - e_3\\ f(e_2) &= e_2 - e_3\\ f(e_1+e_2+e_3) &= 0.\end{aligned}$$

Se pide:

(1) Calcular la matriz de f en la base (e_1, e_2, e_3).

(2) Demostrar que $E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$.

(3) Demostrar que los vectores $w_1 = e_1 - e_2$, $w_2 = 2e_1 - e_2 - e_3$ son base de $\operatorname{Im} f$.

(4) Demostrar que w_1, w_2 y $w_3 = e_1 + e_2 + e_3$ forman una base de E y calcular la matriz de f en dicha base.

4.- Se tienen un espacio vectorial E de dimensión $n \geq 2$ y una base del mismo $(e_1, \ldots, e_n)$. Se considera el endomorfismo g de E que cumple

$$\begin{aligned}g(e_1) &= e_1 + e_2\\ g(e_2) &= e_2 + e_3\\ &\vdots\\ g(e_{n-1}) &= e_{n-1} + e_n\\ g(e_n) &= e_n + e_1.\end{aligned}$$

Se pide:

(1) Calcular la matriz A de g en la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

(2) Calcular $\det A$.

(3) Calcular las dimensiones de $\ker g$ e $\operatorname{Im} g$ distinguiendo los casos de n par y n impar.