Matrius i vectors (grup de matí)

Curs 2018–2019

13.1 Determinants

El *determinant* d'una matriu $A = (a_i^j)$ quadrada $n \times n$ és un nombre real que es denota per

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

i es defineix com

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a^1_{\sigma(1)} \cdots a^n_{\sigma(n)} \tag{13.1}$$

on la suma és sobre totes les permutacions σ del conjunt $\{1, \dots, n\}$ i on $\varepsilon(\sigma)$ denota el signe de la permutació σ; és a dir, $\varepsilon(\sigma) = 1$ si σ es descompon en un nombre parell de transposicions i $\varepsilon(\sigma) = -1$ si σ es descompon en un nombre senar de transposicions. Observem que en cada sumand de (13.1) hi ha exactament un element de cada fila i de cada columna de A, ja que cada σ és una aplicació bijectiva.

Per exemple, quan $n = 2$ tenim

$$\det A = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$$

i quan $n = 3$ resulta que

$$\det A = a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 + a_3^1 a_1^2 a_2^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3 - a_2^1 a_1^2 a_3^3 - a_3^1 a_2^2 a_1^3.$$

De la definició del determinant es dedueixen les propietats següents:

(a) $\det(A^1, \dots, A^j + B^j, \dots, A^n) = \det(A^1, \dots, A^j, \dots, A^n) + \det(A^1, \dots, B^j, \dots, A^n)$.

(b) $\det(A^1, \dots, cA^j, \dots, A^n) = c \det(A^1, \dots, A^j, \dots, A^n)$ per a tot $c \in \mathbb{R}$.

(c) Si A té dues columnes iguals, llavors $\det A = 0$.

Per demostrar (a), escrivim

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a^1_{\sigma(1)} \cdots \left(a^j_{\sigma(j)} + b^j_{\sigma(j)}\right) \cdots a^n_{\sigma(n)}$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a^1_{\sigma(1)} \cdots a^j_{\sigma(j)} \cdots a^n_{\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a^1_{\sigma(1)} \cdots b^j_{\sigma(j)} \cdots a^n_{\sigma(n)}.$$

Anàlogament, per demostrar (b), observem que

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a^1_{\sigma(1)} \cdots \left(c a^j_{\sigma(j)}\right) \cdots a^n_{\sigma(n)} = c \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a^1_{\sigma(1)} \cdots a^j_{\sigma(j)} \cdots a^n_{\sigma(n)}.$$

Per demostrar (c), utilitzem el fet que S_n és la unió del subgrup A_n de les permutacions parelles i el conjunt $S_n \setminus A_n$ de les permutacions senars, que són les de la forma $\sigma\tau$ on $\sigma \in A_n$ i τ és una transposició qualsevol. Si les columnes A^i i A^j de A són iguals, escollim la transposició $\tau = (i, j)$ i escrivim

$$\det A = \sum_{\sigma \in A_n} \varepsilon(\sigma)\, a^1_{\sigma(1)} \cdots a^n_{\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in A_n} \varepsilon(\sigma\tau)\, a^1_{\sigma(\tau(1))} \cdots a^n_{\sigma(\tau(n))}. \tag{13.2}$$

Si $\sigma \in A_n$ llavors $\varepsilon(\sigma) = 1$ i $\varepsilon(\sigma\tau) = -1$. A més,

$$\begin{aligned} a^1_{\sigma(\tau(1))} \cdots a^n_{\sigma(\tau(n))} &= a^1_{\sigma(1)} \cdots a^i_{\sigma(j)} \cdots a^j_{\sigma(i)} \cdots a^n_{\sigma(n)} \\ &= a^1_{\sigma(1)} \cdots a^j_{\sigma(j)} \cdots a^i_{\sigma(i)} \cdots a^n_{\sigma(n)} = a^1_{\sigma(1)} \cdots a^n_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

ja que $a^i_k = a^j_k$ per a tot k, per la hipòtesi que $A^i = A^j$. Per tant, els dos sumands a (13.2) són idèntics i de signe contrari, d'on es dedueix que $\det A = 0$.

Les propietats (a), (b) i (c) impliquen les següents:

(d) Si intercanviem dues columnes de A, el determinant canvia de signe.

(e) Si una columna de A és combinació lineal d'altres columnes, llavors $\det A = 0$.

(f) Si sumem a una columna de A una combinació lineal de les altres columnes, el determinant no varia.

Per demostrar (d), observem que la igualtat

$$\det(A^1, \ldots, A^i + A^j, \ldots, A^i + A^j, \ldots, A^n) = 0$$

implica que

$$\det(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^i, \ldots, A^n) = -\det(A^1, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, A^n).$$

En general,

$$\det(A^{\sigma(1)}, \ldots, A^{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\, \det(A^1, \ldots, A^n),$$

utilitzant el fet que tota permutació és composició de transposicions i el fet, acabat de demostrar, que cada transposició de dues columnes canvia el signe del determinant.

Ara per demostrar (e) és suficient considerar el cas on la primera columna és combinació lineal de les altres, en el qual cas utilitzant (a) i (b) obtenim que

$$\det A = \det\left(\sum_{i \geq 2} c_i A^i, A^2, \ldots, A^n\right) = \sum_{i \geq 2} c_i\, \det(A^i, A^2, \ldots, A^n) = 0.$$

L'afirmació (f) és conseqüència directa de (e).

Teorema 13.1. *Donades dues matrius quadrades A i B, es compleix*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Teorema 13.2. *Per a tota matriu quadrada A es compleix* $\det A = \det A^{\mathrm{t}}$.

Com a conseqüència del teorema 13.2, les propietats (a), (b), (c), (d), (e) i (f) que hem enunciat per a les columnes també es compleixen per a les files.