LLISTA 1

EXERCICI 1: Aquest l'he escollit perquè està bé per repassar la definició d'espai vectorial

Condicions de la definició d'espai vectorial:

E conjunt $+, \cdot$

aquestes són les internes

1) $(v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3) \quad \forall v_1,v_2,v_3 \in E$
2) $\exists\, 0_E \quad 0_E + v = v \quad \forall v \in E$
3) $\forall v \quad \exists\, w_1$ tq $v+w_1=0$
4) $v_1+v_2 = v_2+v_1$

externes

5) $(\lambda_1+\lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v \quad \forall \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R} \ \forall v \in E$
6) $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) v = \lambda_1(\lambda_2 v)$ ''
7) $\lambda(v_1+v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ v_1,v_2 \in E$
8) $1 \cdot v = v$

La gràcia d'aquest exercici és comprovar que es compleixen totes les condicions per ser un espai vectorial menys la 8)

8) $1 \cdot v = v$

$1 \cdot (a_1, a_2) = (1 \cdot a_1, 0) = (a_1, 0)$

$(a_1, 0) \neq (a_1, a_2) \Rightarrow$ NO es verifica una condició

$\Downarrow$

NO ÉS UN ESPAI VECTORIAL

EXERCICI 2: Aquest exercici no és difícil, no recomano fer-lo a no ser que us sobri el temps.

Son matrius $M \in M_{3\times3}$ i $M' \in M_{3\times4}$

Podem provar de fer Gauss o directament calcular els rangs

- Rang M = rang M' $\rightarrow \boxed{SC}$
  - Rang màxim $\rightarrow \boxed{SCD}$
  - No rang màxim $\rightarrow \boxed{SCI}$ n. incògnites − n. equacions = n. graus de llibertat
    (rang 2 → 1 grau
    rang 1 → 2 graus)
- Rang $M \neq$ rang M' $\rightarrow \boxed{SI}$

3. Discutiu ~~ana~~ funció de a la compatibilitat del sistema

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ x+y+3z=4 \\ 5x-y+az=10 \end{cases}$$

i resoleu-lo per als valors de a per als quals tingui solució.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & a & 10 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & a-5 & 15 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & a-11 & 0 \end{array}\right)$$

Hi ha dos casos possibles

i) $a-11=0 \Rightarrow a=11$.

El sistema és compatible indeterminat. Deixem el resultat en funció de z.

$3y+2z=5 \Rightarrow y=\frac{5-2z}{3}$

$x-2y+z=-1 \Rightarrow x=-1-z+2\frac{5-2z}{3}=\frac{7}{3}-\frac{17}{3}z$

$(x,y,z)=\left(\frac{7}{3}-\frac{17}{3}z, \frac{5}{3}-\frac{2}{3}z, z\right)$

ii) $a-11\neq 0 \Rightarrow a\neq 11$

El sistema és compatible determinat.

$az=0 \Rightarrow z=0$

$3y+2z=5 \Rightarrow y=\frac{5}{3}$

$x-2y+z=-1 \Rightarrow x=-1+2\cdot\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$

$(x,y,z)=\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$

4. Es considera el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Determineu-ne la compatibilitat i els graus de llibertat en funció del paràmetre a, i resoleu-lo en els casos en què sigui compatible.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & \frac{(a^2-1)^2}{a-1}-(a-1) & a^2-1-(a-1) \end{array}\right)$$

$$\frac{(a^2-1)^2}{a-1} - (a-1) = \frac{a^4-2a^2\cancel{+1}-a^2+2a\cancel{-1}}{a-1} = \frac{a(a^3-3a+2)}{a-1}$$

$$a^2-1-(a-1) = a^2-a = a(a-1).$$

i) $\frac{a(a^3-3a+2)}{a-1} = 0$ i $a(a-1) \neq 0$ S.E.L. incompatible.

i.1)
$a^3-3a+2=0 \Rightarrow$ Ruffini

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

$a^3-3a+2=0 \Rightarrow (a-1)(a^2+a-2)=0$

i.1.1) $(a-1)=0$ fa que $a(a-1)=0$.

i.1.2) $(a^2+a-2)=0$ $\quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ $\to$ $a=1$ → fa que $a(a-1)=0$.! per tant no. ; $a=-2$.

i.2) $a=0$ no perquè aleshores $a(a-1)=0$.

ii) $\frac{a\cancel{(a-1)}(a^2+a-2)}{\cancel{(a-1)}} = 0$ i $a(a-1)=0$ S.E.L. compatible indeterminat.

$a=0$

No hi havia x.

iii) $a(a^2+a-2) \neq 0$ i $(a(a-1)=0 \vee a(a-1)\neq 0)$.

iii.1) $(a-1)=0 \Rightarrow a=1$.

$1(1+1-2)=0$ No pot ser!,

iii.2) $a(a-1)\neq 0 \wedge a(a^2+a-2)\neq 0$

$$z=\frac{\cancel{a}(a-1)}{\cancel{a}(a^2+a-2)}=\frac{a-1}{a^2+a-2}$$

$$y=\left(a-1-(a-1)\frac{a-1}{a^2+a-2}\right):a^2-1=\frac{(a-1)(a^2+a-2-a+1)}{(a^2-1)(a^2+a-2)}=\frac{(a-1)\cancel{(a^2-1)}}{\cancel{(a^2-1)}(a^2+a-2)}=\frac{a-1}{a^2+a-2}$$

$$x=\frac{1-y-z}{a}=\frac{1-2\left(\frac{a-1}{a^2+a-2}\right)}{a}=\frac{a^2+a-2-2a+2}{a(a^2+a-2)}=\frac{a^2-a}{a(a^2+a-2)}=\frac{\cancel{a}(a-1)}{\cancel{a}(a^2+a-2)}=\frac{a-1}{a^2+a-2}$$

$$(x,y,z)=\left(\frac{a-1}{a^2+a-2},\frac{a-1}{a^2+a-2},\frac{a-1}{a^2+a-2}\right)$$

RESUM:

i) Si $a=2$ SEL incompatible

ii) Si $a=0$ o $a=1$ SEL compatible indeterminat.

iii) Si $a\neq 0, a\neq 1$ i $a\neq 2$ SEL compatible determinat amb solució:

$$(x,y,z)=\left(\frac{a-1}{a^2+a-2},\frac{a-1}{a^2+a-2},\frac{a-1}{a^2+a-2}\right)$$

5. Considerem el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x+y=a \\ y+t=b \\ x+2y+3z+4t=c \\ 2x+y+4z+3t=d \end{cases}$$

Determineu-ne la compatibilitat i els graus de llibertat en funció dels paràmetres i resoleu-lo en el cas que sigui compatible.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&a \\ 0&1&0&1&b \\ 1&2&3&4&c \\ 2&1&4&3&d \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&a \\ 0&1&0&1&b \\ 0&1&3&4&c-a \\ 0&-1&4&3&d-2a \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&a \\ 0&1&0&1&b \\ 0&0&3&3&c-a-b \\ 0&0&7&7&d-2a+c-a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -a-b+c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{7}(-3a+c+d)+a+b-c \end{array}\right)$$

i) $\frac{3}{7}(-3a+c+d)+a+b-c \neq 0$ S.E.L incompatible.

$$\frac{-9+7}{7}a + \frac{3-7}{7}c + b + \frac{3}{7}d \neq 0 \Rightarrow -\frac{2}{7}a + b - \frac{4}{7}c + \frac{3}{7}d \neq 0.$$

ii) $\frac{3}{7}(-3a+c+d)+a+b-c = 0$ SEL compatible indeterminat.

$t = t$

$z = -t - \frac{a+b-c}{3}$

$y = b-t$

$x = a-(b-t) = a-b+t$

R//: El sistema serà compatible indeterminat amb solucis =

$(x,y,z,t) = \left(t+a-b, -t+b, -t - \frac{a+b-c}{3}, t\right)$ sempre i quan $\frac{3}{7}(-3a+c+d)+a+b-c = 0$.

6. Per a cada un dels sistemes d'equacions, trobeu quines condicions han de complir els paràmetres $a, b, c \in \mathbb{R}$ per tal que siguin compatibles i, en aquest cas, trobeu-ne la solució.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = a \\ 5x + 3y + 3z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & a \\ 5 & 3 & 3 & b \\ 1 & 1 & -1 & c \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & c \\ 5 & 3 & 3 & b \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & c \\ 0 & -2 & 8 & b-5c \\ 0 & -1 & 4 & a-3c \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & c \\ 0 & -2 & 8 & b-5c \\ 0 & 0 & 0 & 2a-6c-b+5c \end{array}\right)$$

Per a que sigui compatible, $2a - b - 11c = 0$.

Com $z = z$
$$\begin{cases} -2y = b - 5c - 8z \Longrightarrow y = 4z - \dfrac{b+5c}{2} \\ x + y = c + z \Longrightarrow x = -3z + \dfrac{b+7c}{2} \end{cases}$$

R//: Per a que sigui compatible (indeterminat), $2a - b - 11c = 0$. El resultat serà:

$(x, y, z) = \left(-3z + \dfrac{b+7c}{2},\ 4z - \dfrac{b+5c}{2},\ z\right)$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = a \\ 5x + 3y + 4z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & a \\ 5 & 3 & 4 & b \\ 1 & 1 & -1 & c \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & c \\ 5 & 3 & 4 & b \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & c \\ 0 & -2 & 9 & b-5c \\ 0 & -1 & 4 & a-3c \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & c \\ 0 & -2 & 9 & b-5c \\ 0 & 0 & -1 & 2a-6c-b+5c \end{array}\right)$$

$z = -2a + b + c$

$y = \dfrac{b - 5c - 9z}{-2} = -\dfrac{1}{2}b + \dfrac{5}{2}c - 9a + \dfrac{9}{2}b + \dfrac{9}{2}c = -9a + \dfrac{8}{2}b + \dfrac{14}{2}c = -9a + 4b + 7c$.

$x = c - y + z = c + 9a - 4b - 7c - 2a + b + c = 7a - 3b - 5c$.

R//: Serà sempre compatible determinat amb resultat:

$(x, y, z) = (7a - 3b - 5c,\ -9a + 4b + 7c,\ -2a + b + c)$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = a \\ x \qquad\quad - 2z + 3t = a \\ -x + 4y + 12z - t = b \\ 3x - 2y - 11z + 8t = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 & a \\ -1 & 4 & 12 & -1 & b \\ 3 & -2 & -11 & 8 & c \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 3 & 4 & a \\ -1 & 4 & 12 & -1 & b \\ 3 & -2 & -11 & 8 & c \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & a \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 2 & b+a \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -3a+c \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & a \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3a+c \end{array}\right)$$

$\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ \text{i} \\ -3a+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ S.E.L. compatible indeterminat.

Com que z i t són 0, $\left| \begin{array}{l} 2y = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = a \end{array}\right.$

R: Serà un sistema d'equacions compatible determinat quan $\left\{ \begin{array}{l} a+b=0 \\ -3a+c=0 \end{array}\right.$ amb solució:

$(x, y, z, t) = (a, 0, 0, 0)$.

7. Discutiu i resoleu, en els casos compatibles, els SEL següents:

i) $\begin{cases} ax+y+z=a \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} a&1&1&a\\1&a&1&a\\1&1&a&a\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a&1&1&a\\0&a^2-1&a-1&a^2-a\\0&a-1&a^2-1&a^2-a\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a&1&1&a\\0&a^2-1&a-1&a(a-1)\\0&0&(a+1)^2(a-1)-(a-1)&a(a-1)(a+1)-a(a-1)\end{array}\right)$

i) SEL compatible determinat $\Longleftrightarrow (a^2+1)(a-1)-(a-1)\neq 0 \wedge a(a-1)(a+1)-a(a-1)\neq 0$.

ii) SEL compatible indeterminat $\Longleftrightarrow (a^2+1)(a-1)-(a-1)=0 \wedge a(a-1)(a+1)-a(a-1)=0$

SEL incompatible $\Longleftrightarrow (a^2+1)(a-1)-(a-1)=0 \wedge a(a-1)(a+1)-a(a-1)\neq 0$.

i) $a^3-a^2+\cancel{a}\cancel{-1}\cancel{-a}\cancel{+1}\neq 0 \wedge a^3\cancel{-a}-a^2\cancel{+a}\neq 0$.

$$z=\frac{a^3-a^2}{a^3-a^2}=1.$$

$$y=\frac{a(a-1)-1\cdot(a-1)}{a(a-1)}=\frac{a-1}{a}$$

$$(x,y,z)=\left(\frac{(a-1)^2}{a^2},\frac{a-1}{a},1\right)$$

$$x=\frac{a-\frac{a-1}{a}-1}{a}=\frac{a^2-a+1-a}{a^2}=\frac{(a-1)^2}{a^2}$$

ii) $a^3+a^2=0 \wedge a^3-a^2=0$

$a(a^2+a)=a(a(a+1))=0 \longrightarrow a=0$; $a+1=0 \Rightarrow a=-1$.

Com $z=?$, $(a^2-1)y=a^2-a-(a-1)z \Rightarrow y=\dfrac{a(a-1)-(a-1)z}{(a-1)(a+1)}=-\dfrac{1}{a+1}z+\dfrac{a}{a+1}$

$x=a-z+\dfrac{1}{a+1}z-\dfrac{a}{a+1}=-\dfrac{a}{a+1}z+\dfrac{a^2+2a}{a+1}$

iii) $a^3-a^2=0 \wedge a^3-a^2\neq 0$ MAI.

R// El SEL serà sempre compatible. Quan $a=0$ o $a=-1$, serà indeterminat amb $(x,y,z)=\left(-\frac{a}{a+1}z+\frac{a(a+2)}{a+1},-\frac{1}{a+1}z+\frac{a}{a+1},z\right)$. En la resta de casos serà determinat, amb solució $(x,y,z)=\left(\frac{(a-1)^2}{a^2},\frac{a-1}{a},1\right)$.

ii) $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + my + z = 3 \\ 3x + y + mz = 4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & m & 1 & 3 \\ 3 & 1 & m & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2m-1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2m-3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2m-1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & (2m+3)(2m-1)+3 & 2(2m-1)+3 \end{array}\right)$$

i) SEL compatible determinat $\Leftrightarrow 4m^2 - 2m + 6m - 3 + 3 \neq 0 \wedge 4m - 2 + 3 \neq 0$

$$z = \frac{4m(m+1)}{4m+1}$$

$$y = \left(3 - 3\,\frac{4m(m+1)}{4m+1}\right) \cdot \frac{1}{2m-1} = \frac{12m + 3 - 12m^2 - 12m}{8m^2 - 4m + 2m - 1} = \frac{-3(4m^2-1)}{8m^2 - 2m - 1}.$$

$$x = \left(3 + \frac{4m(m+1)}{4m+1} + \frac{3(2m+1)(2m-1)}{8m^2-2m-1}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{24m^2 - 6m - 3 + 8m^3 - 4m^2 + 8m^2 - 4m + 12m^2 - 3}{16m^2 - 4m - 2} =$$

$$= \frac{8m^3 + 40m^2 - 10m - 6}{16m^2 - 4m - 2} = \frac{4m^3 + 20m^2 - 5m - 3}{8m^2 - 2m - 1}$$

ii) SEL compatible indeterminat $\Longleftrightarrow 4m^2 - 2m + 6m - 3 + 3 = 0 \wedge 4m - 2 + 3 \neq 0$

$4m^2 + 4m = 0$

$4m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1/4$ $\Big\}$ $4 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) = 4 - 1 = 3 \neq 0$ mai.

iii) SEL incompatible $\Longleftrightarrow 4m^2 - 4m = 0 \wedge 4m + 1 \neq 0$.

$4m^2 + 4m = 0 \Longrightarrow m(4m+4) = 0 \rightarrow m = 0$, $m = -1$

$4m + 1 \neq 0 \rightarrow$ quan $\begin{cases} m = 0 \rightarrow 0 + 1 = 1 \neq 0 \checkmark \\ m = -1 \rightarrow -4 + 1 = -3 \neq 0 \checkmark \end{cases}$

R// Serà SEL compatible determinat amb solució $(x,y,z) = \left(\frac{4m^3 + 20m^2 - 5m - 3}{8m^2 - 2m - 1}, \frac{-12m^2 + 3}{8m^2 - 2m - 1}, \frac{4m^2 + 4m}{4m+1}\right)$

a menys que $m = 0$ o $m = -1$, que serà incompatible.

iii) $\begin{cases} 2x - ay = 1 \\ -x + 2y - az = 1 \\ -y + 2z = 1 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 4-a & -2a & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 4-a & -2a & 3 \\ 0 & 0 & 8-4a & 4-a+3 \end{array}\right)$

i) SEL compatible determinat $\Longleftrightarrow$ $8-4a \neq 0 \wedge -a+7 \neq 0$.

$$z = \frac{-a+7}{8-4a}$$

$$y = \left[3 + \cancel{2}a\left(\frac{-a+7}{\cancel{4}_2(-a+2)}\right)\right] \cdot \frac{1}{4-a} = \frac{-6a+12-a^2+7a}{(-2a+4)(4-a)} = \frac{-a^2+a+12}{2a^2-8a+16-4a} = \frac{-a^2+a+12}{2a^2+12a+16}$$

$$x = \left(1 + \frac{-a^2+a+12}{2a^2+12a+16}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2+13a+28}{4(a^2+6a+8)}.$$

ii) SEL compatible indeterminat $\Longleftrightarrow$ $8-4a = 0 \wedge -a+7 = 0$.

$\left.\begin{array}{l} 8-4a=0 \\ -a+7=0 \Rightarrow a=7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 8-4a=0 \\ a=7 \end{array}\right\} 8-4\cdot 7 \neq 0$ MAI

iii) SEL incompatible. $\Longleftrightarrow$ $8-4a=0 \wedge 4-a+3 \neq 0$.

$\left.\begin{array}{l} 8-4a=0 \Rightarrow a=2 \\ -a+7 \neq 0 \end{array}\right\} -2+7=5 \neq 0$ ✓

R: Serà un SEL compatible determinat amb solucis $(x,y,z) = \left(\frac{a^2+13a+28}{4a^2+24a+32}, \frac{-a^2+a+12}{2a^2+12a+16}, \frac{-a+7}{-4a+8}\right)$

sempre i quan $a \neq 2$. Si no és, serà un SEL incompatible.

6

iv) $\begin{cases} x + 3y = 2a \\ x + y = 5 \\ 2ax + 6y = a+3 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2a \\ 1 & 1 & 5 \\ 2a & 6 & a+3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2a \\ 0 & -2 & 5-2a \\ 0 & 6-6a & a+3-4a^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2a \\ 0 & -2 & 5-2a \\ 0 & 0 & -4a^2+a+3+(5-2a)(3-3a) \end{array}\right)$$

i) SEL compatible determinat $\longleftrightarrow -4a^2+a+3+6a^2-6a-15a+15=0$

$2a^2-20a+18=0 \Rightarrow a^2-10a+9=0$

$a = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} \Rightarrow a = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$

$y = \dfrac{5-2a}{-2}$

$x = 2a - 3\,\dfrac{5-2a}{-2} = \dfrac{4a-6a+15}{2} = \dfrac{-2a+15}{2}$

i1) $a=9$

$y = \dfrac{5-18}{-2} = +\dfrac{13}{2}$

$x = \dfrac{-18+15}{2} = \dfrac{3}{2}$

$(x,y) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{13}{2}\right)$

i2) $a=1$

$y = \dfrac{5-2}{-2} = -\dfrac{3}{2}$

$x = \dfrac{-2+15}{2} = \dfrac{13}{2}$

$(x,y) = \left(\dfrac{13}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

ii) SEL incompatible $\Longleftrightarrow 2a^2-20a+18 \neq 0$.

$a \neq 9 \wedge a \neq 1$

R: És un SEL compatible determinat amb solució $(x,y) = (3/2, 13/2)$ quan $a=9$, un SEL compatible determinat amb solució $(x,y) = (13/2, 3/2)$ quan $a=1$, i un SEL incompatible per qualsevol altre valor d'a.

v) $\begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m+1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & (m-1) & m \\ 1 & 1 & 1 & m+1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & 1-m^2 & -1 & 0 \\ 0 & 1-m & 0 & m \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & 1-m^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m(m+1) \end{array}\right)$$

$z = m^2 + m$

$$y = \frac{m^2+m}{-m^2+1} = \frac{m\cancel{(m+1)}}{\cancel{(1+m)}(1-m)} = \frac{m}{-m+1}$$

$$x = 1 - m^2 + m - m\frac{m}{-m+1} = \frac{(1-m) - m(m+1)(1-m) - m^2}{(1-m)} = \frac{1 - m + m^3 - m - m^2}{-m+1} = \frac{m^3 - m^2 - 2m + 1}{-m+1}$$

i) Quan $1 - m^2 = 0 \rightarrow m \begin{cases} = 1 \\ = -1 \end{cases}$

i 1) $m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

SEL compatible indet

$z = 2$
$y = ?$
$x = 1 - 2 - y = -y - 1$

$(x, y, z) = (-y-1, y, 2)$

i 2) $m = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

SEL compatible indet.

$z = 0$
$y = ?$
$x = 1 + y$

$(x, y, z) = (y+1, y, 0)$.

R: És un SEL compatible determinat amb solució $(x, y, z) = \left(\frac{m^3 - m^2 - 2m + 1}{-m+1}, \frac{m}{-m+1}, m^2 + m\right)$ menys quan $m = 1$, que és SEL compatible indeterminat amb solució $(x, y, z) = (-y-1, y, 2)$ i quan $y = -1$, que és SEL compatible indeterminat amb solucis $(x, y, z) = (y+1, y, 0)$.

5

vi) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ ax + y + z = 1 \\ x - y + 3z = -3 \\ 4x + 2y = a \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} z\,y\,x \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & a \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & a \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & a+1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & a \\ 0 & 0 & 0 & 3-a \\ 0 & 0 & a-3 & 3-a \end{array}\right)$$

i) SEL compatible determinat $\Longleftrightarrow$ $a-3 \neq 0$ $\quad 3-a \neq 0$.

Però, si $3-a \neq 0$, és incompatible.

ii) SEL compatible indeterminat $\Longleftrightarrow$ $a-3 = 3-a = 0$.

$\left.\begin{array}{l} a-3=0 \Rightarrow a=3 \\ 3-a=0 \end{array}\right\} 3-3=0$ ✓

$x = ?$

$y = (a-4x)\cdot\frac{1}{2} = -2x + \frac{a}{2}$

$z = -(2 - x - (-2x + \frac{a}{2})) = -x - \frac{4-a}{2}$

<u>R</u>: Serà un SEL compatible indeterminat amb solució $(x,y,z) = (x, -2x + \frac{a}{2}, -x - \frac{4-a}{2})$ sempre i quan $a = 3$. Si $a \neq 3$, serà un SEL incompatible.

8. Determineu per a quins valors dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$ és incompatible el SEL:

$$\begin{cases} ax + (a-3)y + z = 2 \\ bx + (2b+5)y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a-3 & 1 & 2 \\ b & 2b+5 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{z \leftrightarrow x}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-3 & a & 2 \\ 2 & 2b+5 & b & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-3 & a & 2 \\ 0 & \binom{2b+5}{-2a+6} & b-2a & 3-4 \end{array}\right)$$

Serà incompatible quan $2b+5-2a+6=0 \wedge b-2a=0$

$$\begin{array}{l} -2a + 2b + 11 = 0 \\ -2a + b \quad\quad = 0 \\ \hline 0 + b + 11 = 0 \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} b = -11 \\ -2a + b = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a = \frac{b}{2} = \frac{-11}{2} \end{array}$$

R: Quan $a = -\frac{11}{2} \wedge b = -11$, el SEL serà incompatible

9. Determineu un polinomi de tercer grau $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$ tal que

$p(1) = 5 \qquad p(-1) = 3 \qquad p(2) = 9 \qquad p(-2) = 16$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 9 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -9 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 22 \end{array}\right)$$

$$p_3 = \frac{22}{-24} = -\frac{11}{12}$$

$$p_2 = \left[6 - 12 \cdot \left(-\frac{11}{12}\right)\right] \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$$

$$p_1 = \left[-2 + 2 \cdot \left(-\frac{11}{12}\right)\right] \cdot \frac{-1}{2} = \frac{-12-11}{6} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{23}{12}$$

$$p_0 = 5 - \left(\frac{-11}{12}\right) - \frac{17}{6} - \frac{23}{12} = \frac{60 + 11 - 34 - 23}{12} = \frac{17}{12}$$

R: El polinomi serà $p(x) = \frac{17}{12} + \frac{23}{12}x + \frac{34}{12}x^2 - \frac{11}{12}x^3$