CAPITOL 2. SUCCESSIONS

En aquest capítol parlarem de successions de nombres i de la noció de límit d'una successió.

Definició: Una successió de nombres reals és un aplicació de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, és a dir, una aplicació

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow a_n$$

$\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ és com ho escriurem i a_n serà el terme general.

Exemple:
$$\begin{cases} a_n = \text{a partir d'avui, minuts dedicats cada dia a instagram}, \\ a_n = \frac{1}{n}, \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \; n \geq 3, \; a_1 = a_2 = 1, \text{ successió de Fibonacci.} \end{cases}$$

Definició: Una successió $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ a $\mathbb{R}$ es diu que té límit el nombre $l \in \mathbb{R}$ (o bé que convergeix cap a l) si per a tot $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ és té $|a_n - l| < \varepsilon$. Escriurem

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_n a_n = l.$$

Exemple: Sigui $\{a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Provem que té límit 0. Per qualsevol $\varepsilon > 0$ prou petit $\exists n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, on $[\cdot]$ és la part entera, tal que $\forall n \geq n_0$,

$$\left|\frac{1}{n} - l\right| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Teorema 2.1

Si una successió té límit, aquest és únic.

Prova:

Suposem que existeixen dos límits l_1 i l_2 d'una mateixa successió $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Aleshores, fixat $\varepsilon > 0$, $\exists$ (existiran) $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - l_1| < \varepsilon, \; \forall n \geq n_1,$$
$$|a_n - l_2| < \varepsilon, \; \forall n \geq n_2.$$

Llavors, si per $n \geq \max(n_1, n_2)$ tenim que

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\varepsilon,$$

i com això és cert per qualsevol $\varepsilon > 0$, implica que $l_1 = l_2$. ∎

Teorema 2.2. Tota successió convergent és acotada.

Prova:

Sigui $\ell = \lim_n a_n$. Fixem per exemple $\varepsilon = 1$. Aleshores, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$|a_n - \ell| < 1, \forall n \geq n_0.$$
En particular,
$$|a_n| \leq |a_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|, \quad \forall n \geq n_0.$$
Així,
$$|a_n| \leq \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |\ell|+1) = M.$$
∎

Observació: Potser acotada però no convergent. Per exemple, $a_n = (-1)^n$.

Tot seguit donem algunes propietats algebràiques i d'ordre.

Teorema 2.3. Siguin $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{\mathbb{N}}$ dues successions amb
$$\lim_n a_n = a \quad i \quad \lim_n b_n = b.$$
Aleshores,

a) $\lim_n (a_n + b_n) = a + b$,

b) $\lim_n (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

Prova: a) Donat $\varepsilon > 0$, $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tals que
$$|a_n - a| < \varepsilon/2, \ \forall n \geq n_1,$$
$$|b_n - b| < \varepsilon/2, \ \forall n \geq n_2.$$
Si $n_0 = \max(n_1, n_2)$, $\forall n \geq n_0$ tenim que
$$|(a_n + b_n) - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

b) Sigui K la cota de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que sabem que està acotada. Donats
$$\frac{\varepsilon}{2|b|} > 0 \quad i \quad \frac{\varepsilon}{2K} > 0,$$
existeixen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tals que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}, \quad \forall n \geq n_1,$$
$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2k}, \quad \forall n \geq n_2.$$

Llavors per qualsevol $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 = \max(n_1, n_2)$ tal que $\forall n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
|a_n \cdot b_n - a \cdot b| &\leq |a_n \cdot b_n - a_n \cdot b| + |a_n \cdot b - a \cdot b| \\
&= |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\
&\leq k \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\
&< k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |b|} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

∎

Teorema 2.4. Sigui $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successió convergent amb límit $\lim_n a_n = a$. Si existeixen constants $c, d \in \mathbb{R}$, i $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$c \leq a_n \leq d, \quad \forall n \geq n_0,$$
aleshores $c \leq a \leq d$.

Prova:

Suposarem $a > d$ (l'altre cas es farà de manera similar). Prenem $\varepsilon = a - d > 0$. Per definició de límit, existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$, es té
$$|a_n - a| < \varepsilon = a - d.$$
En particular,
$$a_n = a - (a - a_n) \geq a - |a - a_n| > a - (a - d) = d,$$
i això és contradictori i per reducció a l'absurd, la contradicció ve de suposar $a > d$. Així $a \leq d$. ∎

Més generalment podríem provar.

Teorema 2.5. Siguin $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dues successions satisfent
$$\lim_n a_n = a \quad i \quad \lim_n b_n = b.$$
Si existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$, aleshores $a \leq b$.

Observació. Aquest resultat no és cert si $a_n < b_n$, $\forall n \geq n_0$, no implica que $a < b$. Agafem com a contraexemple

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Teorema 2.6 (Lema o Teorema del Sandwich). Siguin $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successions per a les quals existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \forall n \geq n_0.$$

Si

$$\lim_n a_n = \lim_n c_n = l,$$

aleshores

$$\lim_n b_n = l.$$

Exemples:

1) Comprovem que $\lim_n \frac{\sin n}{n^{1/3}} = 0$. Sabem que $\lim_n \left(\pm \frac{1}{n^{1/3}}\right) = 0$. Aplicant el Teorema del Sandwich i les desigualtats

$$-\frac{1}{n^{1/3}} \leq \frac{\sin n}{n^{1/3}} \leq \frac{1}{n^{1/3}},$$

obtenim el resultat desitjat.

2) Provem que $\lim_n \frac{(-1)^n + n}{3n+1} = \frac{1}{3}$.

És immediat comprovar que

$$\lim_n \frac{n-1}{3n+1} = \frac{1}{3} \quad \text{i} \quad \lim_n \frac{n+1}{3n+1} = \frac{1}{3}.$$

Com abans, el teorema del Sandwich i les desigualtats

$$\frac{n-1}{3n+1} \leq \frac{(-1)^n + n}{3n+1} \leq \frac{n+1}{3n+1},$$

ens implica el resultat.

2.1 SUCCESSIONS MONÒTONES

Una successió $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és monòtona creixent (decreixent) si $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad (a_n \geq a_{n+1}).$$

La successió $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és acotada si ho és superiorment i inferiorment, o equivalentment $\exists M > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leq M.$$

Si la successió només compleix que existeix $M \in \mathbb{R}$ tal que per tot $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq M,$$

aleshores és acotada superiorment. Podem definir també acotada inferiorment de manera similar.

Teorema 2.7 Tota successió monòtona creixent i acotada superiorment és convergent. Anàlogament, tota successió monòtona decreixent i acotada inferiorment és convergent.

Prova. Sigui $S = \sup_n \{a_n\}$. Sabem que $a_n \leq S$, i que per tot $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S - \varepsilon < a_{n_0}$. Per monotonia

$$S - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n < S, \quad \forall n \geq n_0.$$

Per tant,

$$|a_n - S| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

i això implica que

$$\lim_n a_n = S.$$

■

Exemple. Vosaltres saben que $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Anem a veure però que la successió $\{a_n = (1+\frac{1}{n})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és creixent i acotada, i per tant, té límit.

Veiem primer el creixement. Desenvolupant el binomi de Newton tenim que

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}1^{n-1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{n}1^0\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\times \cdots \times\left(1 - \frac{n-1}{n}\right),$$

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\times \cdots \times\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\times \cdots \times\left(1 - \frac{n}{n+1}\right),$$

on en aquesta darrera igualtat hem utilitzat els mateixos arguments que abans. Fixem-nos que a_{n+1} té un terme més que a_n, aquest terme és

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(2 - \frac{1}{n+1}\right)\times \cdots \times\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq 0,$$

que és positiu. La resta de termes de a_n i a_{n+1} poden ser comparats. Veiem que un terme qualsevol de a_n i a_{n+1} compleix que

$$\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\times \cdots \times\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$
$$\leq \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\times \cdots \times\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right).$$

Així,

$$a_n \leq a_{n+1}.$$

Ara veurem que està acotada per 3. Per qualsevol $n \geq 1$,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\times \cdots \times\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

A la penúltima desigualtat hem utilitzat que $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ perquè $2^{k-1} \leq k!$ ja que

$$2^{k-1} = \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{k-1 \text{ vegades}} \leq k(k-1) \times \cdots \times 2 \cdot 1 = k!\,;$$

i a l'última hem emprat que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \text{ (suma geomètrica)}$$

2.2 SUCCESSIÓ DE CAUCHY

Una manera equivalent de provar la convergència, sense conèixer a priori el valor del límit, és la següent:

Definició: Una successió $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és de Cauchy si per tot $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$, es té

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Exemple. Comprovem que $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ és de Cauchy.

Fixem $\varepsilon > 0$ i mirem per quin $n_0 \in \mathbb{N}$ tenim que si $n, m \geq n_0$, la desigualtat

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon.$$

Suposem $n > m$ (al revés es fa anàlogament). Tenim que

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{m}{n}\right) < \frac{1}{m},$$

i triant $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, s'obté que, si $n, m \geq n_0$, $\frac{1}{m} < \varepsilon$, i per tant, es compleix la desigualtat de dalt.

Una de les aplicacions més importants d'aquesta definició és el teorema següent:

Es pot provar l'equivalència entre ser convergent i ser de Cauchy a $\mathbb{R}$. És una de les característiques que defineixen el conjunt $\mathbb{R}$, l'anomenada completitud.

Teorema 2.8 Sigui $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió. Aleshores

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ és convergent} \iff \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ és de Cauchy}$$

La demostració d'aquest teorema la deixarem per més endavant. Una aplicació molt important d'aquesta equivalència és el teorema que donem a continuació.

Teorema 2.9 (**Teorema de Bolzano-Weierstrass**)
Sigui $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió acotada. Aleshores existeix una subsuccessió convergent.

Prova.
Primer aclarir que una subsuccessió (o successió parcial) de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió de la forma $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, on $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$.
En farem una prova ràpida i no molt detallada, ja ens estendrem a classe. Prenem $I = [A, B]$ tal que $\forall a_n \in I$, i dividim l'interval en dues meitats. En alguna de les dues meitats hi ha infinits termes de la successió (podrien ser les dues meitats). Ens quedem la meitat I_1 que conté infinits elements i prenem com a a_{n_1} el primer element de la successió compleix $a_{n_1} \in I_1$. Repetim el procès amb I_1 i ens quedem la meitat que conté infinits elements, anomenem-la I_2, triem $a_{n_2} \in I_2$ de la mateixa manera. Anem repetint aquesta idea i obtenim una subsuccessió $a_{n_k} \in I_k$ tal que si $k, m \geq n_0$, aleshores

$$|a_{n_k} - a_{n_k}| < \frac{B-A}{2^{n_0}},$$

perquè cada cop anem fent meitats. Així $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ és una successió de Cauchy, i per tant convergent.

$\blacksquare$

2.3 ALTRES LÍMITS

Aquesta noció de convergència la podem estendre a successió amb límit "infinit".

Direm que la successió $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendeix a $+\infty$ si per a tot $M\in\mathbb{R}_+$ (o $M>0$), $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\geq n_0$ es té

$$a_n > M.$$

Ho escriurem $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Anàlogament pel $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Exemples:

- $\lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty$,
- $\lim_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$,
- En canvi $\{(-1)^n n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no convergeix ni a $+\infty$, ni a $-\infty$.

Cal vigilar a l'hora de fer operacions amb límits, els infinits són símbols per indicar el comportament de la successió, no són nombres reals.

Teorema 2.10 Siguin $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dues successions amb $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Aleshores,

a) $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = +\infty$,

b) $\lim_{n\to+\infty} a_n\cdot b_n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a>0, \\ -\infty, & \text{si } a<0, \end{cases}$

c) si $a\neq 0$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Teniu en compte que hi ha uns quants límits que no estan definits, que depenen de cada cas en particular. Se les anomena **indeterminacions** com per exemple

$$(\pm\infty)-(\pm\infty);\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad 0\cdot(\pm\infty),\quad \frac{0}{0}$$

Exemple: Siguin $a_n = n^2$ i $b_n = \sqrt{n}$. Òbviament

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty,$$

i $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$$

Per acabar aquest tema donarem un criteri útil en segons quines situacions.

Criteri de Stolz. Sigui $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió estrictament creixent amb $\lim_{n\to+\infty} B_n = +\infty$ i sigui $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de nombres reals tq

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}} = l.$$

Aleshores,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{B_n} = l.$$

Exemple. Comprovem que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.
Fixem-nos que $A_n = \ln n$ i $B_n = n$ compleixen les hipòtesis del criteri i mirem

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n - \ln(n-1)}{1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \ln \frac{n}{n-1} = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = 0.$$