

JUSTIFIQUEU DETALLADAMENT LES VOSTRES RESPOSTES

1. Donats nombres reals p i q , considerem la funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donada per l'expressió

$$f(x) = x^3 + px + q,$$

i suposem que f té tres arrels reals. Demostreu que:

(a) $p < 0$.

(b) f té un màxim relatiu a $-\sqrt{\frac{-p}{3}}$ i un mínim relatiu a $\sqrt{\frac{-p}{3}}$.

(c) $f\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) < 0$.

(d) $4p^3 + 27q^2 < 0$.

2. Resoleu els exercicis següents:

- (a) Trobeu tots els valors reals α i β tals que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{\alpha x^\beta} = 1.$$

- (b) Calculeu el polinomi de Taylor de segon ordre en $x = 0$ i la corresponent resta de Lagrange de la funció

$$f(x) = (x + 1)^2 \log(1 + x),$$

i demostreu que per $x \in (0, \frac{3}{2})$,

$$\log(1 + x) < \frac{x}{x + 1} + \left(\frac{x}{x + 1}\right)^2.$$

3. Sigui f una funció definida en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, i sigui $a \in I$. Demostreu que si f és derivable en a , aleshores f és contínua en a . Per fer-ho, utilitzeu la definició (ε, δ) de continuïtat d'una funció en un punt.

TOTS ELS EXERCICIS VALEN EL MATEIX

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT

POSEU EL VOSTRE NOM I COGNOM EN CADA FULL EN MAJÚSCULES