Distribució	PMF/PDF/CDF	Esperança	Variança
Bernoulli(p) $p \in (0,1)$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=q=1-p$	p	pq
B(n,p) $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$	np	npq
Geom(p) $p \in (0,1)$	$P(X=k)=q^k p$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Poiss(λ) $\lambda \in (0,+\infty)$	$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$	λ	λ
U(a,b) $-\infty < a < b < +\infty$	$f(x)=\frac{1}{b-a}\cdot \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$ $F(x)=\frac{x-a}{b-a}\cdot \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$	$m_1=\frac{a+b}{2}$ $m_n=\frac{\sum_{i=0}^n a^i b^{n-i}}{n+1}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (0,+\infty)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{(2\sigma^2)}}$	$m_1=\mu$ $m_2=\mu^2+\sigma^2$	σ^2
Exp(λ) $\lambda \in (0,+\infty)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\cdot \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$ $F(x)=(1-e^{-\lambda x})\cdot \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$	$m_1=\frac{1}{\lambda}$ $m_n=\frac{n!}{\lambda^n}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma(α,β) $\alpha,\beta \in (0,+\infty)$	$f(x)=\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\cdot x^{\beta-1}\cdot e^{-\alpha x}\cdot \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{\beta}{\alpha^2}$
$\mathcal{LN}(\mu,\sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (0,+\infty)$	$f(x)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(\frac{\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\theta=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$\theta^2(e^{\sigma^2}-1)$
χ^2_n $n \in \mathbb{N}$	$f(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\cdot \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$	n	$2n$
t_n $n \in \mathbb{N}$ (g. llibertat)	$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$	0 if $n>1$	$\frac{n}{n-2}$ if $n>2$

1 (Exponencial-Gamma). $\text{Exp}(\alpha) \sim \text{Gamma}(\alpha,1)$. $(Y_i)_i$ VAIID, $Y_i \sim \text{Exp}(\alpha)$, aleshores $\sum_i Y_i = Z \sim \text{Gamma}(\alpha,n)$. $\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ (en general), $\Gamma(n)=(n-1)!$ (en els enters).

2 (Normal). Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, aleshores per a $n \geq 1$: $\mathbb{E}(X^{2n})=\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ i $\mathbb{E}(X^{2n-1})=0$. Evidentment, $\mathcal{N}(0,1)$ és un cas particular de $N(\mu,\sigma^2)$ prenent els valors $\mu=0$ i $\sigma^2=1$. Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, aleshores $Y=\mu+\sigma X \sim N(\mu,\sigma^2)$. Si $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$, aleshores $X=\frac{Y-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

3 (χ^2 de Pearson). $\chi^2_{(n)} \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2},\frac{n}{2})$. Si $X_1,\dots,X_n$ són VAIID amb llei $\mathcal{N}(0,1)$, aleshores $X_i^2 \sim \chi^2_{(1)} \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Conseqüentment, $X_1^2+\cdots+X_n^2 \sim G(\frac{1}{2},\frac{n}{2}) \sim \chi^2_{(n)}$. Siguin $X_1,\dots,X_n$, n VAIID amb llei $N(0,\sigma^2)$, aleshores $\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}$.

4 (t-student). Siguin $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $Y \sim \chi^2_{(n)}$ dues variables aleatòries independents, aleshores $\frac{\sqrt{n}X}{\sqrt{Y}} \sim t_{(n)}$. Siguin $Y,X_1,\dots,X_n$, $n+1$ VAIID amb llei $N(0,\sigma^2)$, aleshores $\frac{\sqrt{n}Y}{\sqrt{X_1^2+\cdots+X_n^2}} \sim t_{(n)}$. Tenim que $\mathbb{E}(X)=0$ per a $n>1$ i $\text{Var}(X)=\frac{n}{n-2}$, $n>2$. Asimptòticament es comporta com una $\mathcal{N}(0,1)$.

---

5. $P(X<a)=F(a^-)$, $P(a \leq X \leq b)=F(b)-F(a^-)$, $P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$, $P(a\leq X<b)=F(b^-)-F(a^-)$, $P(a<X<b)=F(b^-)-F(a)$, $P(X=a)=F(a)-F(a^-)\geq 0$.

6 (Canvi de paràmetre). Y té densitat $f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\cdot|(g^{-1})'(y)|=f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|}$.

7. Siguin X,Y v.a. *simples* i $a,b\in\mathbb{R}$. Aleshores: $\mathbb{E}(aX+bY)=a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(a+bX)=a+b\mathbb{E}(X)$, i si $X,Y\geq 0$ i $X\leq Y$, es té $\mathbb{E}(X)\leq\mathbb{E}(Y)$. Si X,Y independents amb esperança finita, $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. A més, si tenim $X_1,\dots,X_n$ VAIID, $\mathbb{E}(X_i)=\mathbb{E}(X_j)$, $\forall i,j$.

8. Siguin $X_1,\dots,X_n$ VAIID amb llei $B(p)$ (Bernoulli), aleshores $X_1+\cdots+X_n \sim B(n,p)$ (Binomial). Siguin $X\sim B(n_1,p)$ i $Y\sim B(n_2,p)$ independents; aleshores, $X+Y\sim B(n_1+n_2,p)$.

9. Sempre es verificarà $\mathbb{E}[\bar{X}]=\mu$ i $\text{Var}(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$, sense importar la distribució.

10. Siguin X,Y dues v.a. independents amb moments de segon ordre finits. Aleshores, $\text{Var}(X+Y)=\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)$. Interessant: $\text{Var}(X_{(n)})=\frac{\text{Var}(X_1)}{n}$ i $\text{Var}(a+bX)=b^2\,\text{Var}(X)$. $\text{Cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$.

11. Sigui X una variable aleatòria amb funció de distribució contínua. Aleshores, $Y=F(X)\sim U(0,1)$. Si $X\sim U(0,1)$, aleshores $Z=-\ln X\sim\text{Exp}(1)$. Siguin $X\sim\text{Gamma}(\alpha,\beta_1)$ i $Y\sim\text{Gamma}(\alpha,\beta_2)$ dues variables aleatòries independents. Aleshores, $X+Y\sim\text{Gamma}(\alpha,\beta_1+\beta_2)$.

12 (Indicatrius). $\mathbb{1}_{A\cap B}=\min(\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B)=\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B$. $\mathbb{1}_{A\cup B}=\max(\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B)=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_{A\cap B}$. $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)=P(A)$, $\text{Var}(\mathbb{1}_A)=P(A)(1-P(A))$.

13 (Txebitxev). Sigui X v.a. no negativa i $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ creixent tal que $\mathbb{E}(f(X))<\infty$. Per a tot nombre real positiu a tal que $f(a)>0$, es compleix que $P(X\geq a)\leq\frac{\mathbb{E}(f(X))}{f(a)}$.

14 (Jensen). Sigui X v.a. amb esperança finita i g convexa tal que $E(g(X))<\infty$. Aleshores, $g(E(X))\leq E(g(X))$.

15 (Model regular). Un model estadístic no és regular si, per exemple, $\{x\in\Omega \mid L(x,\theta)>0\}\subset\Omega$ depèn de θ. En el cas unidimensional, és exponencial regular si:

$$L(x,\theta)=\exp\{C(\theta)\Phi(x)+D(\theta)+\Psi(x)\}. \quad (1)$$

16 (Neyman-Fisher). Sigui T un estadístic. T és suficient si existeixen $\psi(T(x),\theta)$ i $h(x)$ tals que $\mathscr{L}(x,\theta)=\psi\cdot h$.

17. En un model exponencial regular, la Φ de (1) és un estadístic complet i suficient. A més, $\mathbb{E}_\theta(\Phi(x))=-\frac{D'(\theta)}{C'(\theta)}$.

18 (Informació de Fisher). En un model estadístic paramètric regular (R), la informació de Fisher és la funció del paràmetre següent: $I_F(\theta):=\mathbb{E}_\theta\left(|\partial_\theta\ln L(x,\theta)|^2\right)=\mathbb{E}_\theta(\text{sc}(\theta)^2)$ i $\mathbb{E}_\theta(\partial_\theta\ln L(x,\theta))=0$. Assumint (R), $I_F(\theta)=-\mathbb{E}_\theta\left(\partial_\theta^2\ln L(x,\theta)\right)$.

Considerem un model estadístic paramètric $(\Omega,\mathscr{A},\{P_\theta,\theta\in\Theta\}),\Theta\subseteq\mathbb{R}^d$, on el paràmetre θ és desconegut, i n observacions $x_1,\dots,x_n$ d'un vector aleatori $X=(X_1,\dots,X_n):\tilde{\Omega}\longrightarrow\Omega$ amb llei P_θ.

19 (Uniformement millor). Fixada una funció de pèrdua W i dos estadístics T i S amb funció de risc finita per a qualsevol $\theta\in\Theta$, direm que T és uniformement millor que S si $R_T(\theta)\leq R_S(\theta)$, $\forall\theta\in\Theta$.

20 (Òptim). Fixada una funció de pèrdua W i una classe $\mathscr{E}$ d'estadístics que tenen tots funció de risc finita per a qualsevol $\theta\in\Theta$, direm que T és òptim dins la classe $\mathscr{E}$ si

$$R_T(\theta)\leq R_S(\theta),\quad\forall\theta\in\Theta,\forall S\in\mathscr{E}$$

L'objectiu de l'estimació puntual és trobar estimadors òptims.

21 (Sense biaix). Direm que un estadístic integrable T és un estimador sense biaix de $g(\theta)$ si $\mathbb{E}_\theta(T)=g(\theta)$, per a tot $\theta\in\Theta$.

22 (Biaix). El biaix d'un estimador integrable T respecte a $g(\theta)$ és la funció $b_T(\theta)=\mathbb{E}_\theta(T)-g(\theta)$.

23. La mitjana mostral $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ és un estimador sense biaix de $\mathbb{E}_\theta(X_1)$. La variància mostral $T=\frac{1}{n}\sum_i(X_i-\bar{X}_n)$ és un estimador esbiaixat de $\text{Var}_\theta(X_1)$.

24 (Cota de Cramer-Rao). Suposem que tenim un model estadístic paramètric regular com el d'abans. Sigui $T\in\mathscr{E}_F$ i considerem la funció $g(\theta)=\mathbb{E}_\theta(T)$. Aleshores, $\text{Var}_\theta(T)\geq\frac{g'(\theta)^2}{I_F(\theta)}$.

25 (Estimador eficient). Direm que T és eficient si per a tot $\theta\in\Theta$ es compleix que $\text{Var}_\theta(T)=\frac{g'(\theta)^2}{I_F(\theta)}$. Tot estimador $T\in\mathscr{E}_F$ eficient no té biaix i tot estimador eficient en un model (R) és UMV.

26 (Eficient). Sigui un model estadístic paramètric regular i $T\in\mathscr{E}_F$ un estadístic. Són equivalents:

1. T és eficient respecte a $g(\theta)$.
2. Existeix una funció $\lambda(\theta)$ tal que per a tot $\theta\in\Theta$, $\lambda(\theta)\cdot\partial_\theta\ln L(x,\theta)=T(x)-g(\theta)\xrightarrow[\text{qs}]{x\to\infty}P(\theta)$.

27 (Mètode dels moments). La llei dels grans nombres ens diu que els moments empírics convergeixen cap als moments poblacionals:

$$\hat{m}_j:=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^j\xrightarrow[n\to\infty]{\text{qs}}m_j=\mathbb{E}_\theta\left(x_1^j\right).$$

Propietats asimptòtiques del mètode de moments: Òbviament $k\geq d$, però pot ocórrer que $k>d$. Aquests estimadors són fortament consistents.

28 (EMV). Un estadístic $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x)$ a valors en Θ s'anomena *estimador de màxima versemblança* del paràmetre θ si maximitza la funció de versemblança $L(x,\theta)$. Un EMV $\hat{\theta}(x)$ haurà de complir les anomenades *equacions de versemblança*:

$$\partial_{\theta_i}\ln L(x,\theta)|_{\theta=\hat{\theta}(x)}=0,\quad i=1,\dots,d.$$

I la matriu:

$$\left(-\partial^2_{\theta_i,\theta_j}\ln L(x,\theta)|_{\theta=\hat{\theta}(x)}\right)_{i,j=1,\dots,d}$$

haurà de ser definida positiva. Amb aquestes condicions obtenim $\hat{\theta}(x)$ és un màxim local; a la pràctica, però ens faltarà confirmar que és global.

29 (Invariància funcional). Si $\hat{\theta}$ és un EMV de θ en el model $(\Omega,\mathscr{A},\{P_\theta \mid \theta\in\Theta\})$, aleshores $g(\hat{\theta})$ (bijectiva) és un EMV de $\bar{\theta}=g(\theta)$. Si existeix un estimador eficient, serà l'obtingut pel mètode de la màxima versemblança.

30 (Consistent). Direm que una successió d'estimadors $(T_n)_n$ és consistent/fortament consistent si:

$$T_n\xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta}g(\theta),\forall\theta\in\Theta.$$
$$T_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{qs}}g(\theta),\ \forall\theta\in\Theta.$$

31 (Regió de confiança). Una regió de confiança per a $g(\theta)$ al nivell de confiança α compleix que $P_\theta(x\in\Omega,g(\theta)\in S(x))\geq\alpha$ (permet d'interpretar α com la probabilitat que $S(x)$ inclogui el veritable valor des paràmetre).

32 (Funció pivotant). Una funció $\Pi:\Omega\times g(\Theta)\longrightarrow\mathbb{R}^k$ s'anomena *funció pivotant* per a $g(\theta)$ si compleix:

1. Per a tot $\theta\in\Theta$, $\pi(\cdot,g(\theta))$ és mesurable.
2. La llei de $\pi(\cdot,g(\theta))$ no depèn de θ.

33 (LFGN). Sigui $(X_n)_n$ una successió de variables incorrelacionades amb $E(X^2)<C$. Aleshores:

$$\frac{S_n-E(S_n)}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

34. Sigui $(X_n)_n$ una successió de VAIID. Suposem que $E(|X_1|)<\infty$. Aleshores, $\lim_n\frac{S_n}{n}=E(X_1)$, QS. Recíprocament, si $E(|X_1|)=\infty$. Aleshores, $\limsup_n\frac{S_n}{n}=\infty$, QS.

35 (del límit central). Sigui (Z_n) una successió de VAIID i de quadrat integrable. m i σ^2 són la mitjana i la variància de la distribució comuna. Suposem $\sigma^2>0$. Si $S_n=Z_1+\cdots+Z_n$, es compleix que:

$$\mathcal{L}-\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}=Y,$$

on Y és una v.a. amb distribució $\mathcal{N}(0,1)$.

36 (Teorema de Fisher). Sigui $(x_1,\dots,x_n)$ una mostra aleatòria simple de mida n d'una normal $N(0,1)$. Aleshores, la mitjana i la variància mostral són independents i, a més $\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right)$ i $ns_n^2=\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x}_n)^2\sim\chi^2_{(n-1)}$.

37. Sigui $(x_1,\dots,x_n)$ una mostra aleatòria simple de mida n d'una normal $N(\mu,\sigma^2)$. Aleshores, la mitjana i la variància mostral són independents i $\bar{x}_n\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$, $\frac{ns_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)}$ i $\sqrt{n-1}\cdot\frac{\bar{x}_n-\mu}{s_n}\sim t_{(n-1)}$.

38. Sigui $(x_1,\dots,x_{n_1})$ una mostra aleatòria simple de mida n_1 d'una normal $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ i $(y_1,\dots,y_{n_2})$ una mostra aleatòria simple de mida n_2 d'una normal $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ independent de l'anterior. Aleshores, les dues variàncies mostrals $s^2_{n_1}$ i $s^2_{n_2}$ associades a cada mostra són independents i:

$$\frac{n_1 s^2_{n_1}(n_2-1)\sigma_2^2}{n_2 s^2_{n_2}(n_1-1)\sigma_1^2}\sim F_{n_1-1,n_2-1}.$$

39 (Estadístic suficient). Direm que un estadístic $T:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$ és *suficient* si la llei del vector X condicionada per l'estadístic T no depèn de θ.

40 (Estadístic complet). Direm que un estadístic S és complet si per a tota funció $f:g(\Theta)\longrightarrow\mathbb{R}$ mesurable, tal que $f(S)$ és integrable, es compleix:

$$\mathbb{E}_\theta(f(S))=0,\forall\theta\in\Theta\implies f(S)=0,\forall\theta\in\Theta,\ \text{ae.}\tag{2}$$

41 (IC per a la mitjana amb variància coneguda). En un exemple ja hem obtingut:

$$S(x)=\left[\bar{x}_n-\eta_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}_n+\eta_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

amb $\nu([-\eta_\alpha,\eta_\alpha])=\alpha$, on ν és la llei $N(0,1)$.

42 (IC per a la mitjana amb variància desconeguda). Considerem una mostra aleatòria simple de mida n d'una variable aleatòria amb llei normal $N(\mu,\sigma^2)$ amb paràmetres μ,σ desconeguts, de la qual volem donar un interval de confiança per a la mitjana μ. Tenim la funció pivotant següent:

$$\nu\sim\pi(x,\mu)=\sqrt{n-1}\cdot\frac{\bar{x}_n-\mu}{s_n}\sim t_{(n-1)}.$$

Com que una t de Student és simètrica al voltant del zero, escollim un $\eta_\alpha>0$ tal que $\nu([-\eta_\alpha,\eta_\alpha])=\alpha$. Aleshores:

$$P_\theta\left(x\in\mathbb{R}^n,\ -\nu_\alpha\leq\sqrt{n-1}\cdot\frac{\bar{x}_n-\mu}{s_n}\leq\nu_\alpha\right)=\alpha.$$

Per tant, l'interval de confiança per μ és:

$$S(x)=\left[\bar{x}_n-\eta_\alpha\cdot\frac{s_n}{\sqrt{n-1}},\bar{x}_n+\eta_\alpha\cdot\frac{s_n}{\sqrt{n-1}}\right].$$

43 (IC per a la variància). Considerem la funció pivotant:

$$\nu\sim\pi(x,\sigma^2)=\frac{ns_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)}.$$

Com que una χ^2 de Pearson no és simètrica, escollim dos reals positius $\zeta_\alpha<\eta_\alpha$ tals que:

$$P_\theta\left(x\in\mathbb{R}^n\mid\frac{ns_n^2}{\sigma^2}\leq\zeta_\alpha\right)=P_\theta\left(x\in\mathbb{R}^n\mid\eta_\alpha\leq\frac{ns_n^2}{\sigma^2}\right)=\frac{1-\alpha}{2}.$$

Així l'interval de confiança per a la variància σ^2 és $S(x)=[\frac{ns_n^2}{\eta_\alpha},\frac{ns_n^2}{\zeta_\alpha}]$.

44 (Radi de confiança per a la mitjana i la variància). Tenim que:

$$\nu\sim\pi(x,\theta)=\left(\sqrt{n}\frac{\bar{x}_n-\mu}{\sigma},\frac{ns_n^2}{\sigma^2}\right)$$

és una funció pivotant amb lleis normal $N(0,1)$ i χ^2_{n-1}, respectivament i, a més, independents. S'han de trobar $\zeta_\alpha,\eta_\alpha,\kappa_\alpha>0$ tals que $\eta_\alpha<\kappa_\alpha$ i:

$$P_\theta\left(x\in\mathbb{R}^n\mid-\zeta_\alpha\leq\sqrt{n}\frac{\bar{x}_n-\mu}{\sigma}\leq\zeta_\alpha,\ \eta_\alpha\leq\frac{ns_n^2}{\sigma^2}\leq\kappa_\alpha\right)=\alpha.$$

Existeixen moltes possibilitats per determinar aquests tres valors, per exemple, denotant $\nu_1=\sim N(0,1)$ i $\nu_2\sim\chi^2_{n-1}$, els podem escollir de manera que es compleixin:

$$\nu_1([-\zeta_\alpha,\zeta_\alpha])=\sqrt{\alpha}\text{ i }\nu_2([0,\eta_\alpha])=\nu_2([\kappa_\alpha,\infty))=\frac{1-\sqrt{\alpha}}{2}.$$

Aleshores, la regió de confiança per (μ,σ^2) serà:

$$S(x)=\left[\bar{x}_n-\zeta_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}_n+\zeta_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\times\left[\frac{ns_n^2}{\kappa_\alpha},\frac{ns_n^2}{\eta_\alpha}\right].$$

45 (Raó de variàncies). Un resultat previ ens dona una funció pivotant:

$$\nu\sim\pi\left(x,y,\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)=\frac{n_1s_{n_1}^2(n_2-1)\sigma_2^2}{n_2s_{n_2}^2(n_1-1)\sigma_1^2}=\frac{\tilde{s}_{n_1}^2\sigma_2^2}{\tilde{s}_{n_2}^2\sigma_1^2}\sim F_{n_1-1,n_2-1}.$$

Com que una F de Fisher no és simètrica, per trobar l'interval de confiança buscarem dos nombres reals positius ζ_α,η_α tals que:

$$\nu([0,\zeta_\alpha])=\frac{1-\alpha}{2}\text{ i }\nu([\eta_\alpha,\infty))=\frac{1-\alpha}{2}.$$

Per tant, l'interval per a la raó és $S(x)=\left[\frac{\tilde{s}_{n_1}^2}{\eta_\alpha\tilde{s}_{n_2}^2},\frac{\tilde{s}_{n_1}^2}{\zeta_\alpha\tilde{s}_{n_2}^2}\right]$.

46 (IC per a la diferència de mitjanes amb la mateixa variància desconeguda). Per diferents resultats, per exemple, perquè

$$\bar{X}_n-\bar{Y}_n\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1},\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$$

tenim que

$$\frac{\bar{x}_{n_1}-\bar{y}_{n_2}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

$$\frac{n_1s_{n_1}^2}{\sigma^2}+\frac{n_2s_{n_2}^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x}_{n_1})^2}{\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\bar{y}_{n_2})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n_1+n_2-2)}$$

són independents. Aleshores, per les propietats de la t-Student la funció següent és pivotant:

$$\begin{aligned}\nu&\sim\pi\left(x,y,\mu_1-\mu_2\right)\\&=\frac{\bar{x}_{n_1}-\bar{y}_{n_2}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{n_1s_{n_1}^2+n_2s_{n_2}^2}}\sqrt{\frac{n_1n_2\left(n_1+n_2-2\right)}{n_1+n_2}}\sim t_{(n_1+n_2-2)}.\end{aligned}$$

Podem escollir un real positiu ζ_α tal que $\nu\left([-\zeta_\alpha,\zeta_\alpha]\right)=\alpha$ i, aleshores, obtenim l'interval de confiança per a $\mu_1-\mu_2$ següent

$$\begin{aligned}S(x)=\Bigg[&\bar{x}_{n_1}-\bar{y}_{n_2}-\zeta_\alpha\sqrt{\frac{(n_1+n_2)\left(n_1s_{n_1}^2+n_2s_{n_2}^2\right)}{n_1n_2\left(n_1+n_2-2\right)}},\\&\bar{x}_{n_1}-\bar{y}_{n_2}+\zeta_\alpha\sqrt{\frac{(n_1+n_2)\left(n_1s_{n_1}^2+n_2s_{n_2}^2\right)}{n_1n_2\left(n_1+n_2-2\right)}}\Bigg].\end{aligned}$$

47 (IC per a la diferència de mitjanes amb diferents variàncies desconegudes). En aquest cas no tenim una resolució exacta del problema i el que es fa és donar solucions aproximades. Nosaltres donarem alguns breus comentaris extrets del llibre de Vélez i García. Si la mida de les mostres no és gaire petita ($n_1,n_2\geq15$) es substitueix σ_1^2 i σ_2^2 per les variàncies mostrals corregides respectives, obtenint que

$$\frac{\bar{x}_{n_1}-\bar{y}_{n_2}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\bar{s}_{n_1}^2}{n_1}+\frac{\bar{s}_{n_2}^2}{n_2}}}$$

es comportarà aproximadament com una normal $N(0,1)$. En canvi, en el cas que la mida d'una mostra sigui petita, s'empra que la quantitat anterior es comporta aproximadament com una $t_{(n)}$ on n és l'enter més pròxim a:

$$\frac{\left(\frac{\bar{s}_{n_1}^2}{n_1}+\frac{\bar{s}_{n_2}^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1+1}\left(\frac{\bar{s}_{n_1}}{n_1}\right)^2+\frac{1}{n_2+1}\left(\frac{\bar{s}_{n_2}}{n_2}\right)^2}.$$

48 (Intervals de confiança asimptòtics). Suposem una successió d'estadístics T_n amb moment de segon ordre finit ($\mathrm{Var}_\theta(T_n)\ll\infty$), complint que $\mathbb{E}_\theta(T_n)=g(\theta)$ i amb el comportament asimptòtic següent: $\frac{T_n-g(\theta)}{\sqrt{\mathrm{Var}_\theta(T_n)}}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}}N(0,1)$. Si la mida de la mostra n és suficientment gran, podrem donar un interval de confiança de $g(\theta)$ utilitzant l'aproximació d'aquest quocient per la distribució normal. És a dir:

$$P_\theta\left(-\eta_\alpha\leq\frac{T_n-g(\theta)}{\sqrt{\mathrm{Var}_\theta(T_n)}}\leq\eta_\alpha\right)=\alpha.$$

Pel que:

$$T_n-\eta_\alpha\sqrt{\mathrm{Var}_\theta(T_n)}\leq g(\theta)\leq T_n+\eta_\alpha\sqrt{\mathrm{Var}_\theta(T_n)}.$$

49. Sigui $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ vaiid amb densitat $f_\beta(x)=\frac{1}{4\beta-1}\mathbb{1}_{[1,4\beta]}$ amb $\beta>\frac{1}{4}$.

1. És un model regular?
2. Troba un estadístic suficient i complet.
3. Construeix un estimador sense biaix a partir de l'EMV de β, $\widehat{\beta}$.
4. Construeix un estimador sense biaix a partir de l'estimador pels moments de β, $\widetilde{\beta}$.
5. Troba el UMV.

Proof.
1. Tenim que $L(x,\beta)=\frac{1}{(4\beta-1)^n}\mathbb{1}_{[\frac{x(n)}{4},\infty]}(\beta)$. Veiem que el model no és regular perquè $L=0$ si $\beta<\frac{x(n)}{4}$ per tant no es satisfà la primera condició de regularitat.
2. Per Neyman-Fisher, $T(x)=x_{(n)}$ és suficient.
3. L'estimador demanat ve donat per $\widehat{\beta}=\frac{x_{(n)}}{4}$ i tenim que $E_\beta(\widehat{\beta})=E_\beta(\frac{X_{(n)}}{4})=\frac{n}{4(4\beta-1)^n}\int_1^{4\beta}(z-1)^{n-1}z\,dz=\frac{1+4n\beta}{4(n+1)}$ i si diem $\widehat{\beta}^*=\beta$ i $\widehat{\beta}=E_\beta(\widehat{\beta})$ i aïllem tenim un estimador sense biaix $\widehat{\beta}^*=\frac{4(n+1)\widehat{\beta}^-1}{4n}$.
4. Ara utilitzem $E(X_1)=\int_1^{4\beta}\frac{x}{4\beta-1}\ dx=\frac{4\beta+1}{2}$ i ens queda $\widetilde{\beta}=\frac{2\bar{x}-1}{4}$.
5. El UMV es $\widehat{\beta}^*$ ja que no té biaix i es funció de l'estadístic suficient i complet $T=x_{(n)}$.

□

50. Sigui $n=10$, hem obtingut $x_{(1)}=-1,x_{(10)}=2$. Les observacions son vaiid amb densitat $f(x,\theta)=\frac{3}{2\theta}\mathbb{1}_{[-\frac{\theta}{3},\frac{\theta}{3}]}$.

1. Troba la llei de $|X|$.
2. Troba una funció pivotant que depengui de $max(|X_1|,\dots,|X_n|)$.
3. Troba un interval de confiança de 0.95 basat en EMV.

Proof.
1. Si $Y=|X|$ i $y\in[0,\frac{\theta}{3}]$. La funció de distribució per $y\in[0,\frac{\theta}{3}]$ és $P(|Y|\leqslant y)=P(|X|\leqslant y)=P(-y\leqslant X\leqslant y)=\frac{3}{2\theta}\int_{-y}^{y}\ dx=\frac{3y}{\theta}$. Si $y<0$ aleshores val 0, si $y>\frac{\theta}{3}$ aleshores és 1. Com es contínua i derivable aleshores $f_Y(y)=\frac{3}{\theta}\mathbb{1}_{[}0,\frac{\theta}{3}](y)$. Això és $Y\sim U(0,\frac{\theta}{3})$.
2. Gràcies a l'apartat a tenim $\frac{|X|}{\theta/3}\sim U(0,1)$ i aleshores $\frac{3}{\theta}max(|X_1|,\dots,|X_n|)\sim max(U_1,U_2,\dots,U_n)$ on $U_i\sim u(0,1)$ independents.
3. Tenim $L(x,\theta)=(\frac{3}{2\theta})^n\prod_{i=1}^n\mathbb{1}_{[-\frac{\theta}{3},\frac{\theta}{3}]}(x_i)$. Però $-\frac{\theta}{3}\leqslant x_i\leqslant\frac{\theta}{3}$ implica que $|x_i|\leqslant\frac{\theta}{3}$ per tant si escrivim $|x|_{(n)}=max(|x_1|,\dots,|x_n|)$ tenim $L(x,\theta)=(\frac{3}{2\theta})^n\mathbb{1}_{3|x|_{(n)},\infty}(\theta)$. D'aquesta manera el EMV és $\widehat{\theta}(x)=3|x|_{(n)}$. Considerant les variables $Y_i=\frac{3|X_i|}{\theta}$ tenim $Y_i\sim U(0,1)$ i aleshores $\frac{\widetilde{\theta}}{\theta}=\frac{3}{\theta}|X|_{(n)}=max(\frac{3}{\theta}|X|_{(1)},\dots,\frac{3}{\theta}|X|_{(n)})=max(Y_1,\dots,Y_n)$ te una llei independent de θ. Aleshores $\frac{\widetilde{\theta}}{\theta}$ té densitat donada per $f_{\frac{\widetilde{\theta}}{\theta}}(u)=nu^{n-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(u)$. Podem buscar k tal que $P(k\leqslant\frac{\widetilde{\theta}}{\theta}\leqslant1)=0.95$. Això es $1-k^n=0.95$ i per tant $k=\sqrt[n]{0.05}$. En el nostre cas, amb $n=10$ és $k=0.74$. Ara tenim $0.74\leqslant\frac{\widetilde{\theta}}{\theta}\leqslant1$, i per tant, $\widetilde{\theta}\leqslant\theta\leqslant\frac{\widetilde{\theta}}{0.74}$. Tenint en compte que $\widehat{\theta(x)}=3|x|_{(n)}$ i que $x_{(1)}=-1,x_{(10)}=2$ tenim que $\widehat{\theta(x)}=3\cdot2=6$ i ens queda l'interval $6\leqslant\theta\leqslant\frac{6}{0.74}\approx8.1$. □

51. Suposant que el contingut de nicotina dels cigarrets de determinada marca segueix una distribució $N(30,\sigma^2)$. Agafem a l'atzar deu cigarrets d'aquesta marca i obtenim:

$$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{n}(X_i-30)^2=12.4.$$

Trobeu un interval de confiança per a σ amb un nivell de confiança de 0.9.

Proof. Tenim una mostra d'una variable aleatòria X amb distribució normal de mitjana $\mu=30$ i σ^2 desconeguda. Tenim que $\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n)}$. Està clar que $\frac{X-30}{\sigma}$ té una distribució normal estàndard. Per tant:

$$T:=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-30}{\sigma}\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-30)^2$$

és un estadístic amb la distribució $\chi^2_{(n)}$ de Pearson, amb n graus de llibertat. Observem que T és una funció pivotant perquè la seva llei no depèn del paràmetre σ^2. En aquest cas, assumim $n=10$ i, aleshores, podem calcular a,b tals que $P(a\leq T\leq b)=P(a\leq\chi^2_{(10)}\leq b)=0.9$.

$$P(\chi^2_{(10)}\leq a)=0.05\implies a=3.94$$
$$P(\chi^2_{(10)}\leq b)=0.95\implies b=18.30$$

Volem arribar a demostrar que l'interval observat és $[\frac{124}{18.30},\frac{124}{3.94}]=[6.78,31.47]$. Efectivament, tenim que:

$$a\leq\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\leq b\iff\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2}{b}\leq\sigma^2\leq\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2}{a}.$$

En el nostre cas tenim que $\sum_{i=1}^n(X_i-30)^2=12.4\cdot10=124$, pel que l'interval de confiança resulta:

$$I_{0.9}(\sigma^2)=\left[\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-30)^2}{b},\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-30)^2}{a}\right]=\left[\frac{124}{18.30},\frac{124}{3.94}\right]=[6.78,31.47].$$

Si volem un interval per a σ tenim $I_{0.9}(\sigma)=[\sqrt{6.78},\sqrt{31.47}]=[2.60,5.61]$. □