Demostració del teorema 13.1. Tenim que

$$\det(AB) = \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} b^1_{i_1} A^{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} b^n_{i_n} A^{i_n}\right) = \sum_{i_1,\dots,i_n} b^1_{i_1} \cdots b^n_{i_n} \, \det(A^{i_1}, \dots, A^{i_n}).$$

En aquesta expressió, quan dos dels índexs $i_1, \dots, i_n$ coincideixen, el sumand corresponent és zero perquè $\det(A^{i_1}, \dots, A^{i_n}) = 0$. Per tant, només queden els sumands en els quals $i_1, \dots, i_n$ són tots diferents. En cadascun d'aquests casos, anomenem σ a la permutació tal que $\sigma(1) = i_1, \dots, \sigma(n) = i_n$. Així apareixen totes les permutacions i queda

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{\sigma\in S_n} b^1_{\sigma(1)} \cdots b^n_{\sigma(n)} \, \det(A^{\sigma(1)}, \dots, A^{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, b^1_{\sigma(1)} \cdots b^n_{\sigma(n)} \, \det(A^1, \dots, A^n). \end{aligned}$$

Ara, com que $\det(A^1, \dots, A^n)$ és un factor comú a tots els sumands, resulta que

$$\det(AB) = \det(A^1, \dots, A^n) \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, b^1_{\sigma(1)} \cdots b^n_{\sigma(n)} = \det A \cdot \det B,$$

tal com volíem demostrar. □

Demostració del teorema 13.2. Com que en cada sumand de la definició del determinant hi apareix exactament un cop cada fila i un cop cada columna, la fórmula és simètrica respecte a files i columnes. Per fer-ho explícit, podem escriure

$$\begin{aligned} \det A^{\mathrm{t}} &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a^1_{\sigma^{-1}(1)} \cdots a^n_{\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\omega\in S_n} \varepsilon(\omega)\, a^1_{\omega(1)} \cdots a^n_{\omega(n)} = \det A, \end{aligned}$$

on hem fet el canvi $\omega = \sigma^{-1}$ i hem tingut en compte que $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$. □

13.2 Càlcul del rang d'una matriu amb determinants

Una de les propietats més destacades del determinant és la següent:

Teorema 13.3. *Una matriu A quadrada $n \times n$ té rang n si i només si* $\det A \neq 0$.

Demostració. Si $\operatorname{rang} A = n$, aleshores A és invertible. Per tant, existeix una matriu A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$. Del teorema 13.1 es dedueix aleshores que

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det I = 1$$

i aquesta igualtat implica que $\det A \neq 0$.

D'altra banda, si $\operatorname{rang} A < n$, llavors alguna columna de A és combinació lineal de les altres columnes, i la propietat (e) de 13.1 ens diu que $\det A = 0$. □

Donada una matriu A amb m files i n columnes, on m pot ser diferent de n, per calcular el rang de A també són útils els determinants. Un *menor* d'ordre k d'una matriu A (on $k \leq m$ i $k \leq n$) és el determinant de qualsevol matriu M quadrada $k \times k$ que s'obtingui suprimint $m-k$ files i $n-k$ columnes de A.

Teorema 13.4. *El rang d'una matriu A és igual al màxim dels ordres dels menors no nuls de A.*

Demostració. Si $\operatorname{rang} A = r$, llavors A té r columnes $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ linealment independents i per tant qualsevol menor que estigui format per aquestes columnes i r files arbitràries serà diferent de zero pel teorema 13.3. Per tant, A té algun menor d'ordre r diferent de zero. A més, A no pot tenir cap menor M d'ordre $r+1$ que sigui diferent de zero, ja que si això passés i les columnes implicades en M fossin $A^{\ell_1}, \dots, A^{\ell_{r+1}}$ aleshores els vectors $A^{\ell_1}, \dots, A^{\ell_{r+1}}$ serien linealment independents i el rang de A seria més gran que r. $\square$

A la pràctica, donada una matriu A amb m files i n columnes, per tal de concloure que $\operatorname{rang} A = r$, és suficient trobar un menor M d'ordre r de A que sigui diferent de zero i comprovar que tots els menors formats afegint una columna addicional a les de M s'anul·len (aquests menors es diuen *orlats* de M). Per demostrar-ho, observem que, si $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ són les columnes implicades en el menor M, llavors aquestes columnes són linealment independents perquè $M \neq 0$, i el fet que tots els orlats de M s'anul·lin implica que qualsevol altra columna de A és combinació lineal de $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$. Aleshores el subespai de $\mathbb{R}^n$ generat per les columnes de A conté un conjunt format per r generadors linealment independents, d'on $\operatorname{rang} A = r$.

13.3 Adjunts

Cada coeficient a_i^j d'una matriu quadrada A té un *adjunt* A_i^j, que es defineix com

$$A_i^j = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^{j-1} & a_1^{j+1} & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1}^1 & \dots & a_{i-1}^{j-1} & a_{i-1}^{j+1} & \dots & a_{i-1}^n \\ a_{i+1}^1 & \dots & a_{i+1}^{j-1} & a_{i+1}^{j+1} & \dots & a_{i+1}^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^{j-1} & a_n^{j+1} & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

on el determinant s'ha obtingut de suprimir la fila i i la columna j de la matriu A.

El *desenvolupament per la primera columna* és un dels mètodes pràctics més útils per calcular determinants. Consisteix en aplicar la fórmula següent:

Teorema 13.5. *Per a cada matriu A quadrada $n \times n$ es compleix*

$$\det A = a_1^1 A_1^1 + \cdots + a_n^1 A_n^1.$$

Demostració. Comencem agrupant les permutacions $\sigma \in S_n$ en aquelles tals que $\sigma(1) = 1$, aquelles tals que $\sigma(1) = 2$, etc.

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma(1)=1} \varepsilon(\sigma)\, a_1^1 a_{\sigma(2)}^2 \cdots a_{\sigma(n)}^n + \cdots + \sum_{\sigma(1)=n} \varepsilon(\sigma)\, a_n^1 a_{\sigma(2)}^2 \cdots a_{\sigma(n)}^n \\
&= a_1^1 \sum_{\sigma(1)=1} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(2)}^2 \cdots a_{\sigma(n)}^n + \cdots + a_n^1 \sum_{\sigma(1)=n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(2)}^2 \cdots a_{\sigma(n)}^n.
\end{aligned}$$

Ara observem que

$$\sum_{\sigma(1)=1} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(2)}^2 \cdots a_{\sigma(n)}^n = \begin{vmatrix} a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = A_1^1.$$

Anàlogament, per a cada $k \in \{1, \dots, n\}$ el sumatori k-èsim és igual a A_k^1. Per demostrar aquest fet, cal tenir en compte que si $\sigma(1) = k$ aleshores σ aplica el conjunt $\{2, \dots, n\}$ en $\{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$. Per tal d'obtenir una permutació de $\{2, \dots, n\}$, cal compondre σ amb $k-1$ transposicions, fent

$$\omega = (1,2)(2,3)\cdots(k-1,k)\,\sigma$$

de manera que $\omega(1) = 1$ conservant l'ordre de la resta de valors de σ (aquesta transformació correspon a traslladar la fila k-èsima de la matriu A a la primera fila conservant l'ordre de les files restants). Llavors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k-1}\varepsilon(\omega)$ i queda

$$\sum_{\sigma(1)=k} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(2)}^2 \cdots a_{\sigma(n)}^n = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1}^2 & \dots & a_{k-1}^n \\ a_{k+1}^2 & \dots & a_{k+1}^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = A_k^1,$$

ja que $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$. Per tant, $\det A = \sum_{k=1}^n a_k^1 A_k^1$. □

La mateixa fórmula és vàlida per a qualsevol altra columna, amb una demostració semblant:

$$\det A = a_1^j A_1^j + \cdots + a_n^j A_n^j. \tag{13.3}$$

D'aquesta fórmula (13.3) s'obté una fórmula explícita per a la matriu inversa:

Teorema 13.6. *Si A és una matriu invertible, llavors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ A_n^1 & \dots & A_n^n \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}.$$

Demostració. És suficient efectuar la multiplicació següent (on cal observar que la matriu dels adjunts està transposada respecte a A):

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}$$

ja que $a_1^j A_1^j + \cdots + a_n^j A_n^j = \det A$ per a tot j segons (13.3), i a més si $i \neq j$ llavors

$$a_1^i A_1^j + \cdots + a_n^i A_n^j = \det(A^1, \dots, A^i, \dots, A^i, \dots, A^n) = 0,$$

degut al fet que un determinant amb dues columnes iguals és zero. □

13.4 Regla de Cramer

Suposem donat un sistema d'equacions lineals $AX = B$ on A és una matriu quadrada $n \times n$ de rang n. En aquest cas es diu que el sistema és *de Cramer*. Tot sistema de Cramer té solució única, i aquesta solució ve donada per $X = A^{-1}B$. Si fem servir l'expressió del teorema 13.6 per a A^{-1}, resulta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

i per tant

$$x_j = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} b_i A_i^j = \frac{1}{\det A} \det(A^1, \dots, A^{j-1}, B, A^{j+1}, \dots, A^n).$$

Aquesta fórmula explícita per a les solucions de $AX = B$ s'anomena *regla de Cramer*.

13.5 Equacions d'un subespai

Si un subespai F de $\mathbb{R}^n$ de dimensió m és generat per una col·lecció de vectors linealment independents $v_1 = (a_1^1, \dots, a_1^n), \dots, v_m = (a_m^1, \dots, a_m^n)$, aleshores F està format per tots els vectors $u \in \mathbb{R}^n$ tals que $\dim\langle v_1, \dots, v_m, u\rangle = m$. Aquest fet és equivalent al fet que la matriu següent tingui rang m, on $u = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Aleshores el sistema de $n - m$ equacions lineals en les incògnites $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^m & a_1^i \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_m^1 & \dots & a_m^m & a_m^i \\ x_1 & \dots & x_m & x_i \end{vmatrix} = 0, \qquad i \in \{m+1, \dots, n\},$$

té com a solucions exactament els vectors $(x_1, \dots, x_n) \in F$.