1. Demostra que si c és un nombre enter imparell, aleshores l'equació $n^2 + n - c = 0$ no té solucions enteres. Digues quin mètode de demostració utilitzes.

Ho demostrarem per reducció a l'absurd. Sigui c un enter senar i suposem, per arribar a contradicció, que l'equació $n^2 + n - c = 0$ té alguna solució entera. Per tant, suposem que existeix un $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $n_0^2 + n_0 - c = 0$. Aïllant c obtenim $c = n_0^2 + n_0 = n_0(n_0 + 1)$. Ara raonarem per casos, ja que $n_0 \in \mathbb{Z}$ pot ser parell o senar.
Recordem primerament que la suma d'un senar i un parell és senar i que la suma de dos senars es parell. També que el producte de senar per parell és parell.
Si n_0 és senar, aleshores $n_0 + 1$ és parell, i per tant el producte de n_0 i $n_0 + 1$ és parell. És a dir, $c = n_0(n_0 + 1)$ és parell. Però això està en contradicció amb el fet que c és imparell per hipòtesi.
De manera anàloga, si n_0 es parell aleshores $n_0 + 1$ és senar, i de nou el producte $n_0(n_0 + 1) = c$ és parell. Obtenim la mateixa contradicció amb el fet de que c és imparell per hipòtesi.
Com que en tots dos casos obtenim una contradicció la nostra suposició és falsa, és a dir, l'equació $n^2 + n - c = 0$ no té solucions enteres.

2. Siguin A, B conjunts. Demostra o refuta la següent igualtat.

$$[A \times (A \setminus B)] \cup [(A \setminus B) \times B] = (A \times A) \setminus [(A \cap B) \times (A \cap B)] .$$

Refutem amb un contraexemple.
Sigui $A = \{1\}$ i $B = \{2\}$.
Com que $1 \in A$ i $1 \notin B$,aleshores $1 \in A \setminus B$. Com que $1 \in A \setminus B$ i $2 \in B$, tenim que $(1, 2) \in (A \setminus B) \times B$ i per tant $(1, 2) \in [A \times (A \setminus B)] \cup [(A \setminus B) \times B]$.
D'altra banda com que $2 \notin A$, $(1, 2) \notin A \times A$ i per tant $(1, 2) \notin (A \times A) \setminus [(A \cap B) \times (A \cap B)]$.
Com que hem trobat un element (en aquest cas $(1, 2)$) que pertany a $[A \times (A \setminus B)] \cup [(A \setminus B) \times B]$ i no pertany a $(A \times A) \setminus [(A \cap B) \times (A \cap B)]$ aleshores

$$[A \times (A \setminus B)] \cup [(A \setminus B) \times B] \neq (A \times A) \setminus [(A \cap B) \times (A \cap B)] .$$

3. Definim en el conjunt $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ la relació següent:

$$(m, n) \sim (p, q) \iff m - p = 3k \text{ per algun } k \in \mathbb{Z} \text{ i } nq > 0$$

(a) Demostra que $\sim$ és relació d'equivalència.

Una relació és d'equivalència quan és reflexiva, simètrica i transitiva.

Reflexiva: Hem de veure que per tot $(m, n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $(m, n) \sim (m, n)$. Sigui $(m, n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Com que $m - m = 0 = 3 \cdot 0$ i $0 \in \mathbb{Z}$, tenim que existeix $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m - m = 3 \cdot k$. I clarament $n \cdot n = n^2 > 0$, ja que $n \neq 0$.

Simètrica: Suposem que tenim $(m, n) \sim (p, q)$. Hem de veure que $(p, q) \sim (m, n)$. Per definició de $(m, n) \sim (p, q)$, existeix $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m - p = 3k$ i $nq > 0$. Per tant, tenim que $p - m = -(m - p) = -3k = 3(-k)$ i $qn = nq > 0$. En conseqüència, $(p, q) \sim (m, n)$.

Transitiva: Suposem que tenim $(m,n) \sim (p,q)$ i $(p,q) \sim (r,s)$. Hem de demostrar que $(m.n) \sim (r,s)$. Com que $(m,n) \sim (p,q)$, existeix $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $m - p = 3k_1$ i $nq > 0$. I com que $(p,q) \sim (r,s)$, existeix $k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $p - r = 3k_2$ i $qs > 0$. En conseqüència, $m - r = (m-p) + (p-r) = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2)$, i per tant existeix $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m - r = 3k$. Ara hem de provar que $ns > 0$. Ho fem per casos. Si $q > 0$, com que $nq > 0$ i $qs > 0$, deduïm que $n > 0$ i $s > 0$, i per tant $ns > 0$. I si $q < 0$, com que $nq > 0$ i $qs > 0$, deduïm que $n < 0$ i $s < 0$, i per tant $ns > 0$. En conseqüència, $(m,n) \sim (r,s)$.

(b) $\boxed{\text{Troba les classes d'equivalència dels parells } (1,3),\ (1,5) \text{ i } (-2,3).}$

Per definició de classe d'equivalència, per tot $(p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $\overline{(p,q)} = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : (m,n) \sim (p,q)\}$. Per tant,

$$\begin{aligned} \overline{(1,3)} &= \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : (m,n) \sim (1,3)\} \\ &= \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : \text{ existeix } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } m - 1 = 3k \text{ i } 3n > 0\} \\ &= \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : \text{ existeix } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } m = 3k + 1 \text{ i } n > 0\}. \end{aligned}$$

D'altra banda, tenim que $(1,5) \sim (-2,3) \sim (1,3)$, i per tant $\overline{(1,5)} = \overline{(-2,3)} = \overline{(1,3)}$. En conseqüència,

$\overline{(1,5)} = \overline{(-2,3)} = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : \text{ existeix } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } m = 3k + 1 \text{ i } n > 0\}$.

(c) $\boxed{\text{Dóna una bona descripció del conjunt quocient i digues quants elements té.}}$

Observem que tot enter m es de la forma $3k$ o de la forma $3k+1$ o de la forma $3k+2$ per algun enter k. Llavors, per tot $(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ tenim els següents casos:

- Si $m = 3k$ per algun enter k i $n > 0$, aleshores $\overline{(m,n)} = \overline{(0,1)}$.
- Si $m = 3k$ per algun enter k i $n < 0$, aleshores $\overline{(m,n)} = \overline{(0,-1)}$.
- Si $m = 3k+1$ per algun enter k i $n > 0$, aleshores $\overline{(m,n)} = \overline{(1,1)}$.
- Si $m = 3k+1$ per algun enter k i $n < 0$, aleshores $\overline{(m,n)} = \overline{(1,-1)}$.
- Si $m = 3k+2$ per algun enter k i $n > 0$, aleshores $\overline{(m,n)} = \overline{(2,1)}$.
- Si $m = 3k+2$ per algun enter k i $n < 0$, aleshores $\overline{(m,n)} = \overline{(2,-1)}$.

Per tant, el conjunt quocient associat a la relació $\sim$ és el conjunt

$$[\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})] \Big/ \sim \; = \{\overline{(0,1)}, \overline{(0,-1)}, \overline{(1,1)}, \overline{(1,-1)}, \overline{(2,1)}, \overline{(2,-1)}\}.$$

Així doncs, el conjunt quocient té sis classes.