LLISTA 6

Els exercicis d'aquesta llista es basen en equacions matricials.
Una equació matricial es resol de la següent manera:

$$AX + B = C \iff$$
$$X = A^{-1}(C - B)$$

També es poden resoldre escrivint i resolent totes les combinacions lineals possibles.

EXERCICI: Demostreu que si dues matrius A i B commuten, llavors $A^n B = B \cdot A^n$ (1)

I si A es regular: $A^{-1} \cdot B = B \cdot A^{-1}$ (2) $n > 1$

$A^{-n} \cdot B = B \cdot A^{-n}$ (3)

(1) $A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow A^n \cdot B = B \cdot A^n$

Inducció sobre n

Cas inicial $n = 2$: $A^2 \cdot B = A \cdot A \cdot B = A \cdot B \cdot A = B \cdot A \cdot A = B \cdot A^2$

Cas inductiu $n \Rightarrow n+1$: Suposem que $A^n \cdot B = B \cdot A^n$ i veiem que aleshores $A^{n+1} \cdot B = B \cdot A^{n+1}$

$A^{n+1} \cdot B = A^n \cdot A \cdot B = A^n \cdot B \cdot A = B \cdot A^n \cdot A = B \cdot A^{n+1}$ Q.E.D

(2) $A \cdot B = B \cdot A$ i A regular $\Rightarrow A^{-1} \cdot B = B \cdot A^{-1}$

$A \cdot B = B \cdot A \iff A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot B \cdot A \iff B = A^{-1} \cdot B \cdot A \iff$

$B \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot A \cdot A^{-1} \iff B \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot B$ Q.E.D

(3) $A \cdot B = B \cdot A$ i A regular $\Rightarrow A^{-n} \cdot B = B \cdot A^{-n}$

$A^{-n} \cdot B = (A^n)^{-1} \cdot B = B (A^n)^{-1} = B \cdot A^{-n}$ → Utilitzant el resultat anterior.

EXERCICI - Demostreu que si A és una matriu $n \times m$ i $rg(A) < m$, aleshores existeix una matriu $m \times 1$, B, $B \neq 0$ de manera que $A \cdot B = 0$. Deduïu d'aquest fet que en cas de ser $n = m$, A no és invertible.

Cal demostrar $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ i $rg(A) < m \Rightarrow \exists B \in M_{m \times 1}, B \neq 0 \mid AB = 0$

Suposem $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ i $rg(A) < m$

~~Aleshores~~ Si interpretem A com una matriu de vectors posats en columnes

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{m1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & & v_{mn} \end{pmatrix} = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_m),$$

aleshores un vector es podrà escriure com a combinació dels altres ($rg(A) < m$). i:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \cdots \lambda_m v_m = 0 \quad \text{amb } \lambda_i \neq 0 \text{ per algun } 1 \le i \le m$$

Així doncs, si agafem $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$, aleshores

$$A \cdot B = 0$$

perquè a cada columna ens quedarà la següent combinació lineal: $\lambda_1 v_{1i} + \lambda_2 v_{2i} + \lambda_3 v_{3i} + \cdots + \lambda_m v_{mi}$, que abans hem demostrat que era 0.

EXERCICI: Per quina matriu i per quin costat s'ha de multiplicar una matriu per obtenir: ~~la~~

a) la seva i-èsima fila

b) la seva j-èsima columna

~~[illegible]~~.

a) Tenim una matriu $M \in M_{n\times m}$ i volem obtenir una matriu $N \in M_{1\times m}$. Primer hem de trobar l'ordre de la matriu que busquem:

$$X \underset{n\times m}{M} Y = \underset{1\times m}{N}$$

per l'esquerra!

Per tant multiplicarem per una matriu $X \in M_{[illegible]}$. Anem a buscar els termes ara

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{n1} & \cdots & \mu_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{j1} & \cdots & \mu_{jm} \end{pmatrix} \iff$$

$$\cancel{\lambda_i \mu_{1j} + \lambda_i \mu_{2j} + \dots + \lambda_i \mu_{ij} + \dots + \lambda_i \mu_{im}}$$

$$\cancel{\lambda_i \mu_{1j} + \dots + \lambda_i \mu_{ij} + \dots + \lambda_i \mu_{nj} = \sum \mu}$$

$$\lambda_i \mu_{1i} + \dots + \lambda_i \mu_{ji} + \dots + \lambda_i \mu_{ni} = \mu_{ji} \iff$$

$$\lambda_i = \frac{\mu_{ji}}{\sum_{j=1}^{n} \mu_{ji}}$$

b) Tenim una matriu $M \in M_{n\times m}$ i volem obtenir una matriu $N \in M_{n\times 1}$. Primer hem de trobar l'ordre de la matriu que busquem:

$$X \underset{n\times m}{M} Y = \underset{n\times 1}{M}$$

Per tant multiplicarem per una matriu $Y \in M_{m\times 1}$ per la dreta.

Anem a buscar els termes:

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{n1} & \cdots & \mu_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1i} \\ \vdots \\ \mu_{ni} \end{pmatrix} \iff$$

$$\lambda_j \mu_{j1} + \lambda_j \mu_{j2} + \dots \lambda_j \mu_{ji} + \dots + \lambda_j \mu_{jm} = \mu_{ji} \iff$$

$$\cancel{\lambda_j = \mu_{ji}} \qquad \lambda_j = \frac{\mu_{ji}}{\sum_{i=1}^{n} \mu_{ji}}$$

EXERCICI: Si $A = (a^i_j)$ amb

$$a^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad \forall\, i,j = 1,\dots,n \quad n > 1$$

demostreu que ~~A~~ $A^2 = (n-1)I + (n-2)A$

Aïlleu I de l'equació anterior i calculeu la inversa de A.

Veiem que $A^2 = (n-1)I + (n-2)A = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \cdots & n-2 \\ n-2 & n-1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ n-2 & n-2 & & n-1 \end{pmatrix}$

Sabem que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & & 0 \end{pmatrix}$

i si calculem $A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

distingim dos casos: $- i = j \quad (1, 1, \dots \overset{i}{0}, \dots 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0_i \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n-1$

$- i \neq j \quad (1 \dots \overset{i}{0} \dots 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0_j \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n-2$

Així doncs, A^2 és com diu l'enunciat. Q.E.D.

$A^2 = (n-1)I + (n-2)A \iff A^2 - (n-2)A = (n-1)I \iff$

$I = \left(A^2 - (n-2)A\right)/_{n-1} = \cancel{\dfrac{A - (n-2)A}{n-1} \iff A^{-1} = \dfrac{A - n + 2}{n-1}}$

$\cancel{I = \dfrac{A^2}{n-1} - \dfrac{n-2}{n-1}A}$

NO SÉ CONTINUAR I M'HE RALLAT A SACO!