Solucions comentades

1. Demostra que per tot nombre real x diferent de zero, $x + \dfrac{1}{x} < 2$ implica $x \leqslant 0$. Indica quin mètode de demostració utilitzes.

Fem la prova pel mètode del contrarecíproc. Per tant, demostrem que per tot nombre real x, si $x > 0$ aleshores $x + 1/x \geqslant 2$. Suposem que x és un nombre real positiu. Tenim les següents equivalències :

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0.$$

Com que $x > 0$ i el quadrat de qualsevol nombre real és més gran o igual que 0, tenim que

$$\frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0.$$

Per tant,

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

2. Siguin A, B i C conjunts. Dóna una demostració de la següent igualtat:

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B \cap C) = [A \setminus (B \cap C)] \cup [B \setminus (A \cap C)].$$

Per demostrar la igualtat, n'hi ha prou en demostrar les dues inclusions

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B \cap C) \subseteq [A \setminus (B \cap C)] \cup [B \setminus (A \cap C)]$$

i

$$[A \setminus (B \cap C)] \cup [B \setminus (A \cap C)] \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B \cap C).$$

Demostrem primer $(A \cup B) \setminus (A \cap B \cap C) \subseteq [A \setminus (B \cap C)] \cup [B \setminus (A \cap C)]$. Sigui $a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B \cap C)$ arbitrari. Aleshores $a \in A \cup B$ i $a \notin A \cap B \cap C$. Com que $a \in A \cup B$, tenim que $a \in A$ o bé $a \in B$. Farem la demostració per casos.

- Cas $a \in A$. Si $a \in B \cap C$, aleshores $a \in A \cap B \cap C$, però això contradiu la hipòtesi que $a \notin A \cap B \cap C$. Per tant, $a \notin B \cap C$. Així, $a \in A \setminus (B \cap C)$ i per tant $a \in [A \setminus (B \cap C)] \cup [B \setminus (A \cap C)]$.
- Cas $a \in B$. Si $a \in A \cap C$, aleshores $a \in A \cap B \cap C$, però això contradiu la hipòtesi que $a \notin A \cap B \cap C$. Per tant, $a \notin A \cap C$. Així, $a \in B \setminus (A \cap C)$ i per tant $a \in [A \setminus (B \cap C)] \cup [B \setminus (A \cap C)]$.

Com que en tots dos casos $a \in [A \setminus (B \cap C)] \cup [B \setminus (A \cap C)]$, hem demostrat que per tot a, si $a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B \cap C)$, aleshores $a \in [A \setminus (B \cap C)] \cup [B \setminus (A \cap C)]$, és a dir queda establerta la primera inclusió.

Ara demostrem $[A \setminus (B \cap C)] \cup [B \setminus (A \cap C)] \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B \cap C)$. Sigui $a \in [A \setminus (B \cap C)] \cup [B \setminus (A \cap C)]$ arbitrari. Aleshores $a \in A \setminus (B \cap C)$ o bé $a \in B \setminus (A \cap C)$. Fem la demostració per casos.

- Cas $a \in A \setminus (B \cap C)$. Aleshores $a \in A$ i $a \notin B \cap C$. Com que $a \in A$, $a \in A \cup B$. Com que $a \notin B \cap C$, $a \notin A \cap B \cap C$. Per tant, $a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B \cap C)$.
- Cas $a \in B \setminus (A \cap C)$. Aleshores $a \in B$ i $a \notin A \cap C$. Com que $a \in B$, $a \in A \cup B$. Com que $a \notin A \cap C$, $a \notin A \cap B \cap C$. Per tant, $a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B \cap C)$.

En tots dos casos, $a \in (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B \cap C)$. Hem demostrat que per tot a, si $a \in [A \smallsetminus (B \cap C)] \cup [B \smallsetminus (A \cap C)]$, aleshores $a \in (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B \cap C)$. Queda per tant establerta la segona inclusió.

3. Considera els següents conjunts:

$$A = \{a, b, \{c\}, d\}, \ \ B = \{a, \{b\}, c, d\}, \ \ C = \{\emptyset, a, b, c\}$$

(a) Troba $(A \smallsetminus B) \times C$

(b) Troba $A \smallsetminus \mathcal{P}(B)$

Digues raonadament si són certes o falses les següents afirmacions:

(c) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$

(d) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(C)$

(e) $\{(a, c), (a, b)\} \in \mathcal{P}((A \times B) \cap (B \times A))$

(f) $\{(a, c), (a, b)\} \in \mathcal{P}((A \times B) \cup (B \times A))$

(g) $\{\{(\{c\}, \emptyset), (a, b)\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times C))$

(a) Per calcular $(A \smallsetminus B) \times C$ primer tobarem $A \smallsetminus B$ que no és altra cosa que $\{ x \in A \ : \ x \notin B \}$. Mirant en les definicions per extensió dels conjunts A i B veiem que $a \in A$ i $a \in B$; $b \in A$ i $b \notin B$; $\{c\} \in A$ i $\{c\} \notin B$; $d \in A$ i $d \in B$ tenim que $A \smallsetminus B = \{ b, \{c\} \}$. Ara recordem la definició de producte cartesià,
$(A \smallsetminus B) \times C = \{ (x, y) \ : \ x \in (A \smallsetminus B) \ y \in C \}$.
Per tant $(A \smallsetminus B) \times C = \{ (b, \emptyset), (b, a), (b, b), (b, c), (\{c\}, \emptyset), (\{c\}, a), (\{c\}, b), (\{c\}, c) \}$.

(b) Partim de nou de la definició $A \smallsetminus \mathcal{P}(B) = \{ x \in A \ : \ x \notin \mathcal{P}(B) \}$, a més recordem que $\mathcal{P}(B) = \{ D \ : D \subseteq B \}$. Ara raonem i no farà falta que calculem tot $\mathcal{P}(B)$. Observem que $\{c\} \in A$ i $\{c\} \subseteq B$ ja que tots el elements que pertanyen a $\{c\}$, és a dir c pertany també a B. Els altres elements d' A no són subconjunts de B, ja que no són conjunts formats per elements de B. Així $A \smallsetminus \mathcal{P}(B) = \{a, b, d\}$.

(c) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$ si i només si $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(C)$ per la definició de conjunt de les parts. $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(C)$ sii $\emptyset \in \mathcal{P}(C)$ per la definició de subconjunt. I això és el mateix que dir que $\emptyset \subseteq C$. Aquesta última expressió és certa, ja que per tot conjunt X, $\emptyset \subseteq X$, per tant la primera expressió és també certa.

(d) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(C)$ si i només si $\{\emptyset\} \subseteq C$ per la definició de conjunt de les parts. $\{\emptyset\} \subseteq C$ sii $\emptyset \in C$ per la definició de subconjunt. Ara bé, aquesta expressió és certa, ja que $\emptyset$ apareix explícitament a la llista que defineix C per extensió.

(e) $\{(a, c), (a, b)\} \in \mathcal{P}((A \times B) \cap (B \times A))$ sii $\{(a, c), (a, b)\} \subseteq (A \times B) \cap (B \times A)$ per definició de conjunt de les parts. $\{(a, c), (a, b)\} \subseteq (A \times B) \cap (B \times A)$ sii $(a, c), (a, b) \in (A \times B) \cap (B \times A)$ per la definició de subconjunt. Però això és el mateix que dir $(a, c) \in (A \times B) \cap (B \times A)$ i $(a, b) \in (A \times B) \cap (B \times A)$. Aquesta expressió és equivalent a $(a, c) \in (A \times B)$ i $(a, c) \in (B \times A)$ i $(a, b) \in (A \times B)$ i $(a, b) \in (B \times A)$ per la definició de intersecció de conjunts. Ara bé, aquesta expressió és falsa ja que $(a, b) \notin A \times B$ per la definició de producte cartesià, perquè $b \notin B$ ja que no el trobem a la llista de la definició per extensió. (Nota: $b \neq \{b\}$). Com aquesta expressió és falsa, també ho és la primera.

(f) $\{(a, c), (a, b)\} \in \mathcal{P}((A \times B) \cup (B \times A))$ sii $\{(a, c), (a, b)\} \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$ per definició de conjunt de les parts. $\{(a, c), (a, b)\} \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$ sii $(a, c), (a, b) \in (A \times B) \cup (B \times A)$ per la definició de subconjunt. Però això es el mateix que dir $(a, c) \in (A \times B) \cup (B \times A)$ i $(a, b) \in (A \times B) \cup (B \times A)$. Aquesta expressió és equivalent a $\Big(\ (a, c) \in (A \times B)$ o $(a, c) \in (B \times A) \ \Big)$ i $\Big(\ (a, b) \in (A \times B)$ o $(a, b) \in (B \times A) \ \Big)$ per la definició de unió de conjunts. Ara observem que aquesta expressió és certa ja que ambdues disjuncions son certes: $(a, c) \in A \times B$ per la definició de producte cartesià, perquè $a \in A$ i $c \in B$ -els trobem a la llista de la definició per extensió- i $(a, b) \in B \times A$ per la definició de producte cartesià, perquè $a \in B$ i $b \in A$. Per tant la primera expressió és també certa.

(g) $\{\{(c, \{\emptyset\}), (a, b)\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times C))$ sii $\{\{(\{c\}, \emptyset), (a, b)\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \times C)$ per definició de conjunt de les parts. $\{\{(\{c\}, \emptyset), (a, b)\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \times C)$ sii $\{(\{c\}, \emptyset), (a, b)\} \in \mathcal{P}(A \times C)$ per definició de subconjunt.

$\{(\{c\},\emptyset),(a,b)\} \in \mathcal{P}(A\times C)$ sii $\{(\{c\},\emptyset),(a,b)\} \subseteq A\times C$ altra vegada per definició de les parts d'un conjunt. $\{(\{c\},\emptyset),(a,b)\} \subseteq A\times C$ sii $(\{c\},\emptyset),(a,b) \in A\times C$ és a dir $(\{c\},\emptyset)\in A\times C$ i $(a,b)\in A\times C$. Així veiem que és certa, perquè els dos parells ordenats pertanyen a $A\times C$ ja que $\{c\}, a\in A$ i $\emptyset, b\in C$. Com aquesta expressió és certa i equivalent a la primera, tenim que aquella també ho és.

4. En el conjunt dels nombres reals $\mathbb{R}$ definim les relacions E i G de la forma següent:

Per tot $x,y\in\mathbb{R}$, xEy si i només si $y-x$ és racional.

Per tot $x,y\in\mathbb{R}$, xGy si i només si $y-x$ és enter parell.

Es demana

(a) Demostra $G\subseteq E$.

Per demostrar $G\subseteq E$, hem de veure que per tot $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, si $(a,b)\in G$, aleshores $(a,b)\in E$.
Sigui $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ arbitrari. Si $(a,b)\in G$, aleshores $b-a$ és un enter parell, en particular $b-a\in\mathbb{Z}$. Com que $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$, aleshores $b-a\in\mathbb{Q}$ i per tant $(a,b)\in E$ com volíem demostrar.

(b) Demostra que G és relació d'equivalència.

Recordem que una relació és d'equivalència si i només si és reflexiva, transitiva i simètrica.

Reflexiva Sigui $a\in\mathbb{R}$ arbitrari. Com que $a-a=0=2\cdot 0$ i $0\in\mathbb{Z}$ tenim que $a-a$ és enter parell i per tant aGa. Com que a és un real arbitrari, hem demostrat que per tot $x\in\mathbb{R}$, xGx, és a dir que G és reflexiva.

Transitiva Siguin $a,b,c\in\mathbb{R}$ tals que aGb i bGc. Com que aGb, aleshores hi ha $k\in\mathbb{Z}$ tal que $b-a=2k$, anàlogament de bGc obtenim que hi ha $s\in\mathbb{Z}$ tal que $c-b=2s$. Observem doncs que $c-a=c-b+b-d=2s+2k=2(s+k)$ i com que $s+k\in\mathbb{Z}$ ja que $s,k\in\mathbb{Z}$, aleshores $c-a$ és un enter parell i per tant aGc. Com que a,b,c són reals arbitraris, hem demostrat que per tot $x,y,z\in\mathbb{R}$, si xGy i yGz, aleshores xGz; és a dir que G és transitiva.

Simètrica Siguin $a,b\in\mathbb{R}$ tals que aGb. Com que aGb, aleshores hi ha $k\in\mathbb{Z}$ tal que $b-a=2k$, Observem doncs que $a-b=-(b-a)=-2k=2(-k)$ i com que $-k\in\mathbb{Z}$ ja que $k\in\mathbb{Z}$, aleshores $a-b$ és un enter parell i per tant bGa. Com que a,b són reals arbitraris, hem demostrat que per tot $x,y\in\mathbb{R}$, si xGy aleshores yGx; és a dir que G és simètrica.

(c) Calcula les classes d'equivalència respecte G: $\overline{-1}$, $\overline{\frac{1}{3}}$, $\overline{1}$ i $\overline{\pi}$.

$\overline{-1}=\{x\in\mathbb{R}: xG-1\}=\{x\in\mathbb{R}: -1Gx\}=\{x\in\mathbb{R}:\exists k\in\mathbb{Z}(x-(-1)=2k)\}=$
$\{x\in\mathbb{R}:\exists k\in\mathbb{Z}(x=2k-1)\}=\{x\in\mathbb{Z}: x \text{ és senar}\}$.

$\overline{\frac{1}{3}}=\{x\in\mathbb{R}:\frac{1}{3}Gx\}=\{x\in\mathbb{R}:\exists k\in\mathbb{Z}(x-\frac{1}{3}=2k)\}=\{x\in\mathbb{R}:\exists k\in\mathbb{Z}(x=2k+\frac{1}{3})\}=\{2k+\frac{1}{3}:k\in\mathbb{Z}\}$.

$\overline{1}=\{x\in\mathbb{Z}: x \text{ és senar}\}=\overline{-1}$ ja que $-1G1$ perquè $1-(-1)=2=2\cdot 1$ i $1\in\mathbb{Z}$.

$\overline{\pi}=\{x\in\mathbb{R}:\pi Gx\}=\{x\in\mathbb{R}:\exists k\in\mathbb{Z}(x-\pi=2k)\}=\{x\in\mathbb{R}:\exists k\in\mathbb{Z}(x=2k+\pi)\}=\{2k+\pi:k\in\mathbb{Z}\}$.

(d) Calcula la classe d'equivalència respecte a G d'un element arbitrari $a\in\mathbb{R}$.

$\overline{a}=\{x\in\mathbb{R}:aGx\}=\{x\in\mathbb{R}:\exists k\in\mathbb{Z}(x-a=2k)\}=\{x\in\mathbb{R}:\exists k\in\mathbb{Z}(x=2k+a)\}=\{2k+a:k\in\mathbb{Z}\}$.

(e) Dóna la partició associada a G, és a dir, el conjunt quocient $\mathbb{R}/G$.

$\mathbb{R}/G =_{\text{def}} \{\overline{a}\subseteq\mathbb{R}: a\in\mathbb{R}\}=\{\overline{a}\subseteq\mathbb{R}: a\in[0,2)\}$.

Per demostrar la igualtat cal demostrar les dues inclusions.
Com que $[0,2) \subseteq \mathbb{R}$, trivialment $\{\overline{a} \subseteq \mathbb{R} : a \in [0,2)\} \subseteq \{\overline{a} \subseteq \mathbb{R} : a \in \mathbb{R}\}$.
Per veure l'altra inclusió hem de veure que per tot $b \in \mathbb{R}$, $\bar{b} \in \{\overline{a} \subseteq \mathbb{R} : a \in [0,2)\}$.
Sigui $b \in \mathbb{R}$, denotem per $[b]$ la part entera d'b, és a dir $[b] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant b\}$. Observem que $0 \leqslant b - [b] < 1$.
Si $[b]$ és enter parell aleshores $b - (b - [b]) = [b]$ és un enter parell i per tant $\bar{b} = \overline{b - [b]}$ i com que $b - [b] \in [0,1) \subseteq [0,2)$, $\bar{b} \in \{\overline{a} \subseteq \mathbb{R} : a \in [0,2)\}$.
Si $[b]$ és un enter senar aleshores $b - (b - [b] + 1) = [b] - 1$ és un enter parell i per tant $\bar{b} = \overline{b - [b] + 1}$ i com que $b - [b] + 1 \in [1,2) \subseteq [0,2)$, $\bar{b} \in \{\overline{a} \subseteq \mathbb{R} : a \in [0,2)\}$.

Observem també que $\{\overline{a} \subseteq \mathbb{R} : a \in [0,2)\}$ és una bona representació de $\mathbb{R}/G$, és a dir que per qualssevol $x, y \in [0,2)$, $\bar{x} = \bar{y}$ implica $x = y$.
Siguin $a, b \in [0,2)$ tals que $\bar{a} = \bar{b}$. Com que $a, b \in [0,2)$, aleshores $|a - b| < 2$. Si suposem que $\bar{a} = \bar{b}$, aleshores $b - a$ i $a - b$ són enters parells que és equivalent a dir que $|a - b|$ és natural parell. Ara bé si $|a - b| < 2$ i $|a - b|$ és natural parell, aleshores $|a - b| = 0$ i per tant $a = b$.