Inducció

1 El principi d'inducció

Si $X \subset \mathbb{N}$ compleix les següents condicions:

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, si $n \in X$, llavors $n + 1 \in X$.

Llavors $X = \mathbb{N}$.
Aquest principi no cal que sigui demostrat perquè forma part de l'axiomàtica dels nombres naturals.

2 Demostració per inducció

Es vol demostrar que tots els nombres naturals tenen una certa propietat P. Per a demostrar-ho cal demostrar que 0 té la propietat i que si n té la propietat, llavors $n + 1$ també la té.

Esquema

Es vol demostrar que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$. Es mostra:

1. $P(0)$. (Cas inicial, cas base).
2. $\forall n \in \mathbb{N} \ \ (P(n) \to P(n + 1))$. (Cas inductiu).

Per demostrar (2) es considera $n \in \mathbb{N}$, es suposa $P(n)$ i es demostra $P(n + 1)$. La hipòtesi $P(n)$ s'anomena *hipòtesi inductiva.*

2.0.1 Exemples

Proposició 2.1. Per qualsevol $n \in \mathbb{N}$, $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Demostració. 1. Es comprova que $0 = \frac{0(0+1)}{2}$. Per tant $P(0)$. (Cas inicial).

2. Es suposa que $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, es vol demostrar que $1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + n + 1 = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

$\square$

Proposició 2.2. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 3^n$ és múltiple de 4.

Demostració. **Cas inicial:** $7^0 - 3^0 = 0$. 0 és múltiple de 4.
Cas inductiu: Es suposa que $7^n - 3^n$ és múltiple de 4. Llavors existeix un $k \in \mathbb{N}$ tal que $7^n - 3^n = 4k$. Es considera $7^{n+1} - 3^{n+1}$.

$$7^{n+1} - 3^{n+1} = (4+3)7^n - 3 \cdot 3^n = 4 \cdot 7^n + 3(7^n - 3^n) = 4 \cdot 7^n + 3(4k) = 4(7^n - 3k)$$

Per tant, $7^n - 3^n$ és múltiple de 4 per qualsevol $n \in \mathbb{N}$. □

2.1 Inducció a partir d'un nombre determinat

També es pot demostrar que tots els naturals compleixen una propietat P a partir d'un $n_0 \in \mathbb{N}$ concret.

- Es vol demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$, llavors $P(n)$. (Si $n_0 = 0$, és el cas general). Cal mostrar que:

  1. $P(n_0)$. (Cas inicial).
  2. Si $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq n_0$ i $P(n)$, llavors $P(n+1)$.

2.1.1 Exemples

Proposició 2.3. $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Demostració. **Cas inicial:** Es pren $n = 1$ com a cas inicial. $1 = 1^2$.
Cas inductiu: Es suposa $1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$. Llavors $1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$. □

3 Inducció completa

És un mètode més potent que la inducció natural, no obstant, no és necessari fer-lo servir sempre ja que hi ha vegades en que és més senzill fer servir la inducció natural i resulta més elegant. (*"No cal matar mosques amb bales de canó"*.
Es vol demostrar que tots els nombres naturals tenen la propietat P.

1. Es demostra $P(0)$. (També es pot modificar el nombre inicial).
2. Es suposa que tots els nombres fins a n compleixen la propietat i es demostra $P(n+1)$. (La hipòtesi inductiva dóna més informació $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(n-1), P(n)$).

3.0.1 Exemples

Proposició 3.1. Tot $n \geq 2$ i $n \in \mathbb{N}$ és producte de nombres primers.

Demostració. **Cas inicial:** 2 és producte de primers, ja que 2 és primer.
Cas inductiu: Es suposa que tots els nombres de 2 fins a n són producte de primers. Es vol demostrar que llavors $n+1$ també ho és. Es consideren dos casos:

- Cas 1: Si $n+1$ és primer, ell mateix és primer i ja està demostrat.

- Cas 2: Si $n+1$ no és primer. Llavors existeixen $m, k \in \mathbb{N}$ tals que $m, k \neq n+1$ i $n+1 = mk$. Es veu que $m \leq n$ i $k \leq n$. Els dos nombres són anteriors a $n+1$ i més grans que 2, per tant, són producte de primers (degut a la hipòtesi inductiva). Per tant els podem escriure $m = p_1 p_2 \cdots p_r$ i $k = q_1 q_2 \cdots q_s$ on els p_i i q_j són primers. Per tant $n = p_1 p_2 \cdots p_r q_1 q_2 \cdots q_s$ és producte de primers.

$\square$

3.1 Formulació alternativa

Hi ha una formulació del principi d'inducció completa alternativa i equivalent.
Per demostrar que tots els naturals tenen una propietat P és suficient demostrar que:

- Si tot nombre menor que n té P, llavors $P(n)$.

Es basa en que l'ordre dels nombres naturals és un bon ordre. (Tot conjunt no buit de nombres naturals té un element mínim).