- Respon a cada pregunta (1 a 5) en fulls diferents.
- Entrega almenys un full per cada pregunta (encara que el deixis en blanc).
- Numera correctament les 5 preguntes i els seus apartats.
- No t'oblidis de posar el teu nom i cognoms (en aquest ordre, en MAJÚSCULES i lletra clara) a l'angle superior dret de cada full. A l'esquerra posa també "«Matí» o «Tarda», segons correspongui.
- Recorda que cal justificar totes les respostes.

T1 Digues què és una demostració per reducció a l'absurd i demostra que $\sqrt{2}$ és irracional. [20 p.]

$\neg(A \to B) \equiv \neg(\cancel{A}\neg B \vee A) \equiv B \wedge \neg A \equiv \neg A \wedge B \equiv \neg(A \vee \neg B) \equiv$

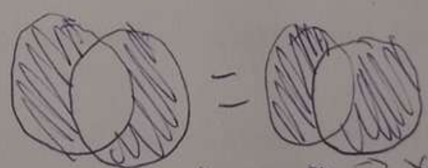
T2 **(a)** Defineix el conjunt dels enters $\mathbb{Z}$ a partir del conjunt dels naturals $\mathbb{N}$ i d'una relació d'equivalència $\sim$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Defineix $\sim$ i demostra que és una relació d'equivalència. Descriu les classes d'equivalència i defineix $\mathbb{Z}$.

(b) Defineix la suma en $\mathbb{Z}$ i demostra que està ben definida. [20 p.]

P1 És ben sabut que per tot natural $n > 0$,π^n és un nombre irracional.

(a) Sigui a un real qualsevol. Demostra que si a és racional diferent de 0, aleshores $a\pi + 8$ és irracional.

(b) És cert el recíproc? Justifica la resposta. [20 p.]

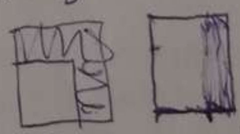


P2 Siguin A i B conjunts arbitraris.

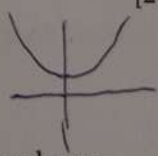
$\neg(x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$

(a) Demostra o refuta:

1. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. $(A \times A) \setminus (B \times B) = (A \setminus B) \times (B \setminus A)$.



(b) Demostra que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ si, i només si, $A = B$. [20 p.]



P3 Considera la relació $f = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : y - 1 = x^2\}$. $y \in \mathbb{N}$ $x \in \mathbb{Z}$

(a) Demostra que f és aplicació i digues raonadament si f és injectiva, si és exhaustiva i si és bijectiva.

(b) Troba els conjunts $f(\{0, 1, 3, -1, 5\})$, $f^{-1}(\{4\})$ i $f^{-1}(\{0, 1, 3, 5\})$. Justifica la resposta.

(c) Demostra que la relació $\sim$ definida en $\mathbb{Z}$ per

$$n \sim m \text{ si, i només si, } f(n) = f(m)$$

és d'equivalència. Dona les classes d'equivalència $\overline{0}$, $\overline{1}$.

(d) Si n és un element arbitrari de $\mathbb{Z}$ dóna la classe $\overline{n}$ i digues quants elements té. Dóna una bona representació de $\mathbb{Z}/\sim$. [20 p.]