1. Utilitzant les equivalències donades en la llista següent, justifica l'equivalència entre les fórmules $\neg((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B))$ i $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \wedge \neg B)$

(a) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ (commutativa de la conjunció)

(b) $P \vee Q \equiv Q \vee P$ (commutativa de la disjunció)

(c) $\big(P \wedge (Q \wedge R)\big) \equiv \big((P \wedge Q) \wedge R\big)$ (associativa de la conjunció)

(d) $\big(P \vee (Q \vee R)\big) \equiv \big((P \vee Q) \vee R\big)$ (associativa de la disjunció)

(e) $\neg\neg P \equiv P$ (doble negació)

(f) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ (negació d'una conjunció) (llei de De Morgan)

(g) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ (negació d'una disjunció) (llei de De Morgan)

(h) $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$ (definibilitat del condicional)

Per provar l'equivalència entre ambdues expressions caldrà partir d'una d'elles (tant se val quina escollim) i fent servir les regles d'equivalència que es donen a l'exercici arribar a l'altra. Comencem, per exemple, amb la segona expressió. Llavors tenim la següent cadena d'equivalències:

(a) Fem us de la Definibilitat del condicional:

$$\neg(A \wedge B) \to (\neg A \wedge \neg B) \equiv \neg\neg(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B).$$

(b) Fem ús de la regla de negacio de la disjunció:

$$\neg\neg(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \equiv \neg\neg(A \wedge B) \vee \neg(A \vee B).$$

(c) Fem ús de la regla de negació de la conjunció (invertida):

$$\neg\neg(A \wedge B) \vee \neg(A \vee B) \equiv \neg(\neg(A \wedge B) \wedge (A \vee B)).$$

(d) Fem ús de la regla de commutativitat de la conjunció:

$$\neg(\neg(A \wedge B) \wedge (A \vee B)) \equiv \neg((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B).$$

2. Siguin a, b nombres reals, amb $b \geqslant 0$. Demostra que

$$|a| \leqslant |b| \text{ si i només si } a \leqslant b \quad \text{i} \quad -a \leqslant b$$

Recordem que per demostrar una equivalència cal demostrar les dues implicacions:

$(\Rightarrow)$ Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ amb $b > 0$ i tals que $|a| \leqslant |b|$. Fem la demostració per casos:

– Si $a \geqslant 0$ aleshores $|a| = a$ i per tant $a = |a| \leqslant |b| = b$ ja que $b \geqslant 0$. És a dir $a \leqslant b$. A més com que $a \geqslant 0$, aleshores $-a \leqslant 0$; i com que $0 \leqslant b$, $-a \leqslant b$.
– Si $a < 0$ aleshores $|a| = -a$ i per tant $-a = |a| \leqslant |b| = b$ ja que $b \geqslant 0$. A més com que $a < 0$ i $0 \leqslant b$, $a \leqslant b$.

Com que els casos son exhaustius i en tots dos casos hem demostrat que $a \leqslant b$ i $-a \leqslant b$, queda demostrat que per qualssevol $a, b \in \mathbb{R}$ amb $b \geqslant 0$, $|a| \leqslant |b|$ implica $a \leqslant b$ i $-a \leqslant b$.

($\Leftarrow$) Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ amb $b > 0$ i tals que $a \leqslant b$ i $-a \leqslant b$. Fem la demostració per casos:

- Si $a \geqslant 0$ aleshores $|a| = a$ i per tant $|a| = a \leqslant b = |b|$ ja que $b \geqslant 0$. És a dir $|a| \leqslant |b|$.
- Si $a < 0$ aleshores $|a| = -a$ i per tant $|a| = -a \leqslant b = |b|$ ja que $b \geqslant 0$. És a dir $|a| \leqslant |b|$.

Com que els casos son exhaustius i en tots dos casos hem demostrat que $|a| = |b|$, queda demostrat que per qualssevol $a, b \in \mathbb{R}$ amb $b \geqslant 0$, $a \leqslant b$ i $-a \leqslant b$ implica $|a| \leqslant |b|$.

3. Siguin m, n, r nombres naturals estrictament positius. Demostra per reducció a l'absurd que si tenim $m \cdot n + r$ objectes i els distribuïm entre m caixes, aleshores hi ha almenys una caixa que té més de n objectes.

Per demostrar la condició de l'enunciat per reducció a l'absurd, hem de supposar la negació de la conclusió de l'enunciat i llavors arribar a una contradicció. Tenim que la negació de la condició "hi ha almenys una caixa que que té més de n objectes" és la condició "cada caixa té com a màxim n objectes". Per tant, suposem que tenim una distribució de $m \cdot n + r$ objectes entre m caixes de manera que cada caixa té com a màxim n objectes. Com que tenim m caixes i en cada caixa hi ha com a màxim n objectes, deduïm que com a molt hi ha d'haver $m \cdot n$ objectes entre totes les caixes. Per tant, $m \cdot n + r \leqslant m \cdot n$. Però d'aquí es dedueix que $r \leqslant 0$, la qual cosa contradiu la hipòtesi de l'enunciat que diu que r és estrictament positiu.