Solucions comentades

P1) Demostra per inducció que per tot nombre natural n, 6 divideix $n^3 + 5n$.

Demostrem per inducció sobre n que per tot $n \in \mathbb{N}$, 6 divideix $n^3 + 5n$, és a dir que per tot $n \in \mathbb{N}$, existeix $k \in \mathbb{N}$ tal que $n^3 + 5n = 6k$.
Primer provarem la propietat pel cas inicial, $n = 0$ Així tenim que $n^3 + 5n = 0^3 + 5 \cdot 0 = 0$ i com que $0 = 6 \cdot 0$ i $0 \in \mathbb{N}$, 0 és divisible per 6.

Ara farem el pas d'inducció. Suposem que la propietat és certa per $n = m$ amb $m \in \mathbb{N}$, i hem de demostrar que la propietat és certa per $m + 1$:
Per tant, per hipòtesis d'inducció tenim que $m^3 + 5m = 6k$ per algun $k \in \mathbb{N}$. Com que $(m+1)^3 + 5(m+1) = m^3 + 5m + 3m^2 + 3m + 6 = 6(k+1) + 3m(m+1)$, només ens caldrà demostrar que $3m(m+1)$ és divisible per 6. Fem-ho per casos:

- Si m és parell aleshores $m = 2l$ per algun $l \in \mathbb{N}$ i per tant $3m(m+1) = 6\big(l(2l+1)\big)$ i com que $l(2l+1) \in \mathbb{N}$ ja que $l \in \mathbb{N}$, $3m(m+1)$ és divisible per 6.
- Si m és senar aleshores $m = 2r + 1$ per algun $r \in \mathbb{N}$ i per tant $3m(m+1) = 6\big((2r+1)(r+1)\big)$ i com que $(2r+1)(r+1) \in \mathbb{N}$ ja que $r \in \mathbb{N}$, $3m(m+1)$ és divisible per 6.

Com que tot nombre natural és senar o parell hem demostrat que $3m(m+1)$ és divisible per 6, és a dir que $3m(m+1) = 6s$ per algun $s \in \mathbb{N}$.

Per acabar la demostració, tenim doncs que $(m+1)^3 + 5(m+1) = 6(k+1) + 3m(m+1) = 6(k+1) + 6s = 6(k+s+1)$ i com que $k+s+1 \in \mathbb{N}$ ja que $k, s \in \mathbb{N}$, $(m+1)^3 + 5(m+1)$ és divisible per 6.

P2) Siguin A, B, C conjunts arbitraris. Demostra o refuta les següents igualtats.

(a) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$

(b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

(a) La condició és falsa. La refutem mitjançant el següent contraexemple. Siguin $A = \{0\}, B = \{1\}$ i $C = \{2\}$. Aleshores $B \setminus C = \{1\}$, i per tant $A \setminus (B \setminus C) = \{0\}$. D'altra banda, tenim que $A \setminus B = \{0\}$, i per tant $(A \setminus B) \cup C = \{0, 2\}$. Així doncs, $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \cup C$.

(b) La condició és certa. La demostrem mitjançant la següent cadena d'equivalències: $x \in A \setminus (B \setminus C) \iff x \in A \wedge x \notin B \setminus C \iff x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \iff$ (per la propietat distributiva: conjunció, disjunció) $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \iff x \in A \setminus B \vee x \in A \cap C \iff x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
Així doncs, $A \setminus (B \setminus C)$ i $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$ tenen els mateixos elements, i per tant $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

P3) Considera els següents conjunts, $A = \{1, \{2\}, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, \{3\}, 4\}$ i $C = \{\emptyset, 1, 2, 3\}$

(a) Troba $(A \setminus B) \times C$

(b) Troba $A \setminus \mathcal{P}(B)$

Digues raonadament si són certes o falses les següents afirmacions:

(c) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$

(d) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(C)$

(e) $\{(1,2),(1,3)\} \in \mathcal{P}((A \times B) \cap (B \times A))$

(f) $\{(1,2),(1,3)\} \in \mathcal{P}((A \times B) \cup (B \times A))$

(g) $\{\{(\{3\},\emptyset),(1,2)\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B \times C))$

(a) Per calcular $(A \setminus B) \times C$ primer trobarem $A \setminus B$ que no és altra cosa que $\{ x \in A : x \notin B \}$. Mirant en les definicions per extensió dels conjunts A i B veiem que $1 \in A$ i $1 \in B$; $\{2\} \in A$ i $\{2\} \notin B$; $3 \in A$ i $3 \notin B$; $4 \in A$ i $4 \in B$. Per tant, tenim que $A \setminus B = \{\{2\}, 3\}$. Ara recordem la definició de producte cartesià,
$(A \setminus B) \times C = \{ (x,y) : x \in (A \setminus B) \text{ i } y \in C \}$.
Per tant $(A \setminus B) \times C = \{ (\{2\},\emptyset), (\{2\},1), (\{2\},2), (\{2\},3), (3,\emptyset), (3,1), (3,2), (3,3) \}$.

(b) Partim de nou de la definició $A \setminus \mathcal{P}(B) = \{ x \in A : x \notin \mathcal{P}(B) \}$, a més recordem que $\mathcal{P}(B) = \{ D : D \subseteq B \}$. Ara raonem i no farà falta que calculem tot $\mathcal{P}(B)$. Observem que $\{2\} \in A$ i $\{2\} \subseteq B$ ja que tots el elements que pertanyen a $\{2\}$, és a dir el 2, també pertanyen a B. Els altres elements d' A no són subconjunts de B, ja que no són conjunts formats per elements de B. Així $A \setminus \mathcal{P}(B) = \{1, 3, 4\}$.

(c) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$ si i només si $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(C)$ per la definició de conjunt de les parts. $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(C)$ sii $\emptyset \in \mathcal{P}(C)$ per la definició de subconjunt. I això és el mateix que dir que $\emptyset \subseteq C$. Aquesta última expressió és certa, ja que per tot conjunt X, $\emptyset \subseteq X$, per tant la primera expressió és també certa.

(d) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(C)$ si i només si $\{\emptyset\} \subseteq C$ per la definició de conjunt de les parts. $\{\emptyset\} \subseteq C$ sii $\emptyset \in C$ per la definició de subconjunt. Ara bé, aquesta expressió és certa, ja que $\emptyset$ apareix explícitament a la llista que defineix C per extensió.

(e) $\{(1,2),(1,3)\} \in \mathcal{P}((A \times B) \cap (B \times A))$ sii $\{(1,2),(1,3)\} \subseteq (A \times B) \cap (B \times A)$ per definició de conjunt de les parts. $\{(1,2),(1,3)\} \subseteq (A \times B) \cap (B \times A)$ sii $(1,2),(1,3) \in (A \times B) \cap (B \times A)$ per la definició de subconjunt. Però això és el mateix que dir $(1,2) \in (A \times B) \cap (B \times A)$ i $(1,3) \in (A \times B) \cap (B \times A)$. Aquesta expressió és equivalent a $(1,2) \in (A \times B)$ i $(1,2) \in (B \times A)$ i $(1,3) \in (A \times B)$ i $(1,3) \in (B \times A)$ per la definició de intersecció de conjunts. Ara bé, aquesta expressió és falsa ja que $(1,2) \notin B \times A$ per la definició de producte cartesià, perquè $2 \notin A$ ja que no el trobem a la llista de la definició per extensió d'A. (Nota: $2 \neq \{2\}$). Com aquesta expressió és falsa, també ho és la primera.

(f) $\{(1,2),(1,3)\} \in \mathcal{P}((A \times B) \cup (B \times A))$ sii $\{(1,2),(1,3)\} \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$ per definició del conjunt de parts. $\{(1,2),(1,3)\} \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$ sii $(1,2),(1,3) \in (A \times B) \cup (B \times A)$ per la definició de subconjunt. Però això es el mateix que dir

$(1,2) \in (A \times B) \cup (B \times A)$ i $(1,3) \in (A \times B) \cup (B \times A)$. Com que $1 \in A$ i $2 \in B$ -els trobem a la llista de la definició per extensió d' A, i B respectivament-, aleshores $(1,2) \in A \times B$ i per tant $(1,2) \in (A \times B) \cup (B \times A)$. Anàlogament, com que $1 \in B$ i $3 \in A$ -els trobem a la llista de la definició per extensió de B i A respectivament-, aleshores $(1,3) \in B \times A$ i per tant $(1,3) \in (A \times B) \cup (B \times A)$. Hem vist doncs, que $(1,2) \in (A \times B) \cup (B \times A)$ i $(1,3) \in (A \times B) \cup (B \times A)$ és cert i per tant, la primera expressió és també certa.

(g) $\{\{(3,\{\emptyset\}),(1,2)\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B \times C))$ sii $\{\{(\{3\},\emptyset),(1,2)\}\} \subseteq \mathcal{P}(B \times C)$ per definició del conjunt de parts. Anàlogament, $\{\{(\{3\},\emptyset),(1,2)\}\} \subseteq \mathcal{P}(B \times C)$ si i només si $\{(\{3\},\emptyset),(1,2)\} \in \mathcal{P}(A \times C)$. $\{(\{3\},\emptyset),(1,2)\} \in \mathcal{P}(B \times C)$ sii $\{(\{3\},\emptyset),(1,2)\} \subseteq B \times C$ altra vegada per definició de les parts d'un conjunt. $\{(\{3\},\emptyset),(1,2)\} \subseteq B \times C$ sii $(\{3\},\emptyset),(1,3) \in A \times C$, és a dir $(\{3\},\emptyset) \in B \times C$ i $(1,2) \in B \times C$. Així veiem que és certa, perquè els dos parells ordenats pertanyen a $B \times C$ perquè $\{3\},1 \in B$ i $\emptyset,2 \in C$ ja que apareixen la llista de la definició per extensió de B i C respectivament. Com aquesta expressió és certa i equivalent a la primera, tenim que aquella també ho és.

P4) Considera les relacions $T = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^3 = y^2\}$ i $S = \{(t^3,t^4) : t \in \mathbb{R}\}$.

(a) Demostra que $T = \{(u^2,u^3) : u \in \mathbb{R}\}$

(b) Troba el domini i recorregut (imatge) de T i de S. Digues si T i S són o no funcions.

(c) De les que siguin funció, digues raonadament si són injectives, exhaustives o bijectives.

(a) Donats dos conjunts A i B, recordem que $A = B$ si, i només si, ambdós conjunts tenen els mateixos elements. Aquesta clausula és equivalent a dir que $A \subseteq B$ i que $B \subseteq A$. Llavors, per provar que $T = \{(u^2,u^3) : u \in \mathbb{R}\}$, caldrà que provem que $T \subseteq \{(u^2,u^3) : u \in \mathbb{R}\}$ i que $\{(u^2,u^3) : u \in \mathbb{R}\} \subseteq T$.

$\boxed{\subseteq}$ Per provar que $T \subseteq \{(u^2,u^3) : u \in \mathbb{R}\}$, escollim un element arbitrari $(x,y) \in T$ i provem que $(x,y) \in \{(u^2,u^3) : u \in \mathbb{R}\}$. És a dir, provarem que existeix un real u tal que $u^2 = x$ i que $u^3 = y$. En efecte, per definició, si $(x,y) \in T$ llavors $x^3 = y^2$. Notem que això implica directament que $x \geqslant 0$ atès que si $x < 0$ es tindria que $x^3 < 0$ i que per tant $y^2 < 0$, la qual cosa ens faria arribar a una contradicció. Tot plegat, concloem que $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

D'altra banda notem que

$$\exists u \in \mathbb{R}(u^2 = x \ \wedge \ u^3 = y) \iff \exists u \in \mathbb{R}((u = \sqrt{x} \vee u = -\sqrt{x}) \ \wedge \ u = \sqrt[3]{y})$$

Com per hipòtesi $x^3 = y^2$, tenim tenim dues possibilitats:

- O bé $y \geqslant 0$ i llavors necessàriament $\sqrt[3]{y} = \sqrt{x}$.
- O bé $y < 0$ i llavors necessàriament $\sqrt[3]{y} = -\sqrt{x}$.

Tot plegat, definint $u = \sqrt{x}$ o $u = -\sqrt{x}$ (segons escaiga), obtindrem un número real tal que $x = u^2$ i $y = u^3$, la qual cosa demostra que el parell (x,y) és un element de $\{(u^2,u^3) : u \in \mathbb{R}\}$. Com que (x,y) era abitrari, concloem que $T \subseteq \{(u^2,u^3) : u \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\supseteq}$ Donat $(x,y) \in \{(u^2,u^3) : u \in \mathbb{R}\}$ volem que provar que $x^3 = y^2$. Per definició, sabem que existeix $u \in \mathbb{R}$ tal que $x = u^2$ i que $y = u^3$. En eixe cas, $x^3 = u^6 = y^2$, i per tant el parell (x, y) és un element de T. Com que aquest parell era arbitrari, concloem que $\{(u^2, u^3) : u \in \mathbb{R}\} \subseteq T$.

(b) Primer que tot convé definir alguns conceptes teòrics que caldrà estudiar a l'apartat. Donada una relació $R \subseteq A \times B$, definim el seu domini $dom(R)$ i el seu recorregut $rec(R)$ com el següents conjunts:

$$dom(R) = \{x : \exists y\, (x, y) \in R\}$$
$$rec(R) = \{y : \exists x\, (x, y) \in R\}.$$

És a dir, $dom(R)$ s'identifica amb el conjunt de les primeres coordenades dels parells de R i $rec(R)$ amb les segones coordenades. Passem ara a estudiar doncs els dominis de les relacions sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, T i S.

$\boxed{\text{Domini de } T}$ Al apartat anterior hem provat que $T = \{(u^2, u^3) : u \in \mathbb{R}\}$, llavors

$$dom(T) = \{u^2 \in \mathbb{R} : u \in \mathbb{R}\} = [0, \infty).$$

$\boxed{\text{Recorregut de } T}$ Raonant com abans, tenim que

$$rec(T) = \{u^3 \in \mathbb{R} : u \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

donat que per a tot nombre real la seua arrel cúbica està definida.

$\boxed{\text{Domini de } S}$ Per la mateixa raó d'abans,

$$dom(S) = \{t^3 \in \mathbb{R} : t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{Recorregut de } S}$

$$rec(S) = \{t^4 \in \mathbb{R} : t \in \mathbb{R}\} = [0, \infty).$$

Recordem que una relació $R \subseteq A \times B$ direm que és una funció si

$$\forall x, y, z\, ((x, y) \in R \ \wedge \ (x, z) \in R \ \longrightarrow \ y = z)$$

A aquest respecte, afirmem que:

$\boxed{T \text{ no és una funció}}$ En efecte, simplement cal que notem que $(1, 1), (1, -1) \in T$.

$\boxed{S \text{ sí que és una funció}}$ Per provar que S és funció fixarem $x, y, z \in \mathbb{R}$ i tot suposant que $(x, y), (x, z) \in S$ provarem que $y = z$. En efecte, si $(x, y), (x, z) \in S$, per definició existiran $t, t' \in \mathbb{R}$ tals que

$$(t^3 = x \ \wedge \ t^4 = y)$$
$$(t'^3 = x \ \wedge \ t'^4 = z).$$

En particular, $t^3 = t'^3$, i per tant $\sqrt[3]{t^3} = \sqrt[3]{t'^3}$, d'on deduïm que $t = t'$. Això implica que $t^4 = t'^4$ o, en altres paraules, que $y = z$.

(c) Primer que tot definim quan una funció és injectiva, exhaustiva o bijectiva. Per a $F \subseteq A \times B$ una funció, direm que:

- F és injectiva si $\forall x, y, z\, ((x, z) \in F \land (y, z) \in F \longrightarrow x = y)$.
- F és exhaustiva si $rec(F) = B$.
- F és bijectiva si és injectiva i exhaustiva.

A aquest respecte, l'única funció és S. Notem per una banda que S no és injectiva atès que $(1, 1), (-1, 1) \in S$ i, per altra, que S no és exhaustiva perquè $rec(S) = [0, \infty) \neq \mathbb{R}$. Per tant, com que no és ni injectiva ni exhaustiva, S no és bijectiva.