Introducción

En la clase de hoy, construiremos el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales a partir del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, y mostraremos cómo se puede construir el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales a partir del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

La construcción de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ es análoga a la construcción de $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$, que hemos visto en las últimas dos clases, por lo que no daremos todos los detalles de la construcción.

Definimos la relación $\equiv$ en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ por:

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Un par $(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ representa intuitivamente a a/b. Entonces,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Teorema 1

$\equiv$ es una relación de equivalencia.

Demostración del Teorema 1

Tenemos que demostrar que $\equiv$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

$\equiv$ es reflexiva, ya que para todo $(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, tenemos que $a \cdot b = b \cdot a$, y por tanto $(a, b) \equiv (a, b)$.

$\equiv$ es simétrica, ya que para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, tenemos:

$$(a, b) \equiv (c, d) \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \Rightarrow c \cdot b = d \cdot a \Rightarrow (c, d) \equiv (a, b).$$

Demostramos ahora que $\equiv$ es transitiva. Supongamos que $(a, b) \equiv (c, d)$ y $(c, d) \equiv (e, f)$. Tenemos que demostrar que $(a, b) \equiv (e, f)$.

Demostración del Teorema 1

Como $(a, b) \equiv (c, d)$, tenemos que $ad = bc$, y por tanto $adf = bcf$. Y como $(c, d) \equiv (e, f)$, tenemos que $cf = de$, y por tanto $cfb = edb$. Por consiguiente:

$$afd = adf = bcf = cfb = edb = ebd.$$

.

Así pues, $afd = ebd$. Entonces, como $d \neq 0$, aplicando la propiedad cancelativa del producto en $\mathbb{Z}$, deducimos que $af = eb$, con lo cual $(a, b) \equiv (e, f)$. $\square$

Definimos

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})/\equiv .$$

Identificamos un número racional p/q con $\overline{(p,q)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : (x,y) \equiv (p,q)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : xq = yp\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : x/y = p/q\}$.

Por ejemplo,

$0 = \overline{(0,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : (x,y) \equiv (0,1)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : x = 0\} = \{(0,1), (0,-1), (0,2), (0,-2), (0,3), \ldots\}$

$1 = \overline{(1,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : (x,y) \equiv (1,1)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : x = y\}$
$= \{(1,1), (-1,-1), (2,2), (-2,-2), (3,3), \ldots\}$,

$1/2 = \overline{(1,2)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : (x,y) \equiv (1,2)\} =$
$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : 2x = y\} =$
$\{(1,2), (-1,-2), (2,4), (-2,-4), (3,6), \ldots\}$.

Definición de la suma en $\mathbb{Q}$

Definimos la suma $+$ en $\mathbb{Q}$ por:

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(ad+bc, bd)}.$$

Obsérvese que la definición que hemos dado de la suma se corresponde con:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Teorema 2

$+$ está bien definida en $\mathbb{Q}$.

Supongamos que $(a, b) \equiv (a', b')$ y $(c, d) \equiv (c', d')$. Tenemos que demostrar que

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a', b')} + \overline{(c', d')}.$$

Como $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(ad + cb, bd)}$ y $\overline{(a', b')} + \overline{(c', d')} = \overline{(a'd' + c'b', b'd')}$, es suficiente demostrar:

$$(*) \qquad (ad + cb, bd) \equiv (a'd' + c'b', b'd').$$

Tenemos que

$$(ad + cb) \cdot b'd' = adb'd' + cbb'd' = ab'dd' + cd'bb'.$$

Como $(a, b) \equiv (a', b')$, tenemos que $ab' = ba'$. Y como $(c, d) \equiv (c', d')$, tenemos que $cd' = dc'$. Por tanto:

$(ad + cb)b'd' = ab'dd' + cd'bb' = ba'dd' + dc'bb' = a'd'bd + c'b'bd = (a'd' + c'b')bd.$

Así pues, $(ad + cb, bd) \equiv (a'd' + c'b', b'd')$. $\square$

Elementos opuestos

Si $\overline{(m,n)} \in \mathbb{Q}$, definimos el opuesto de $\overline{(m,n)}$ como

$$-\overline{(m,n)} = \overline{(-m,n)}.$$

Demostramos que el opuesto de un elemento está bien definido. Supongamos que $\overline{(m,n)} = \overline{(p,q)}$. Demostramos entonces que $-\overline{(m,n)} = -\overline{(p,q)}$. Como $\overline{(m,n)} = \overline{(p,q)}$, tenemos que $mq = np$, y por tanto $-mq = -np$, con lo cual $\overline{(-m,n)} = \overline{(-p,q)}$. Así pues, $-\overline{(m,n)} = -\overline{(p,q)}$.

Definición del producto en $\mathbb{Q}$

Definimos el producto $\cdot$ en $\mathbb{Q}$ por:

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac,bd)}.$$

Obsérvese que la definición que hemos dado del producto se corresponde con:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Teorema 3

$\cdot$ está bien definido en $\mathbb{Q}$.

Demostración del Teorema 3

Supongamos que $\overline{(m,n)} = \overline{(m',n')}$ y $\overline{(p,q)} = \overline{(p',q')}$. Tenemos que demostrar que

$$\overline{(m,n)} \cdot \overline{(p,q)} = \overline{(m',n')} \cdot \overline{(p',q')}.$$

Como $\overline{(m,n)} = \overline{(m',n')}$, tenemos que $mn' = nm'$. Y como $\overline{(p,q)} = \overline{(p',q')}$, tenemos que $pq' = qp'$. Por tanto,

$$mn'pq' = nm'qp'.$$

Así pues, $mpn'q' = nqm'p'$. Por consiguiente, $\overline{(mp,nq)} = \overline{(m'p',n'q')}$. Luego, $\overline{(m,n)} \cdot \overline{(p,q)} = \overline{(m',n')} \cdot \overline{(p',q')}$.
$\square$

De manera similar a como hemos definido anteriormente el opuesto de un número racional, podemos definir también el inverso de un número racional distinto de cero, de la siguiente manera. Si $a = \overline{(m, n)} \in \mathbb{Q} \setminus \{\overline{(0, 1)}\}$, definimos $a^{-1} = \overline{(n, m)}$. Se demuestra fácilmente que a^{-1} está bien definido, es decir, no depende del representante elegido.

Se pueden entonces demostrar las propiedades básicas de la suma y el producto en los racionales de manera análoga a como demostramos las propiedades básicas de la suma y el producto en los enteros. Es decir, para la suma y el producto en los racionales se pueden demostrar las propiedades conmutativas, asociativas, distributiva, cancelativas, propiedades de existencia de elemento neutro, etc, de manera análoga a como hicimos con los enteros.

Definición del orden en $\mathbb{Q}$

Definimos:

$$\overline{(a,b)} < \overline{(c,d)} \Leftrightarrow ad < bc,$$

para todo $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Q}$ tales que b y d son positivos.

Obsérvese que la definición es correcta, porque para todo $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$, tenemos que $\overline{(a,b)} = \overline{(-a,-b)}$, y por tanto todo número racional se puede representar por una fracción con denominador positivo.

Teorema 4

$<$ está bien definido en $\mathbb{Q}$.

Demostración del Teorema 4

Supongamos que $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ y $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$ de manera que b, b', d, d' son positivos. Supongamos que $\overline{(a,b)} < \overline{(c,d)}$. Tenemos que demostrar que $\overline{(a',b')} < \overline{(c',d')}$.

Como $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$, tenemos que $ab' = ba'$. Y como $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, tenemos que $cd' = dc'$.

Por otra parte, tenemos:

$$\overline{(a,b)} < \overline{(c,d)} \Rightarrow ad < cb \Rightarrow adb'd' < cbb'd' \Rightarrow ab'dd' < cd'bb'.$$

Ahora, como tenemos que $ab' = ba'$ y $cd' = dc'$, deducimos que $ba'dd' < dc'bb'$, con lo cual $a'd' < c'b'$. Por tanto, $\overline{(a',b')} < \overline{(c',d')}$. $\square$

Una copia de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$

Definimos la función $\tau : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ por $\tau(n) = \overline{(n, 1)}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se demuestra entonces fácilmente que el conjunto $\{\overline{(n, 1)} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una copia de $\mathbb{Z}$ dentro de $\mathbb{Q}$ que se comporta correctamente respecto a la suma, al producto y al orden. Es decir, se tiene que τ es una aplicación inyectiva de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ tal que:

(1) τ preserva la suma, es decir, $\tau(m + n) = \tau(m) + \tau(n)$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

(2) τ preserva el producto, es decir, $\tau(m \cdot n) = \tau(m) \cdot \tau(n)$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

(3) Para todo $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$m < n \Leftrightarrow \tau(m) < \tau(n).$$

Por último, vamos a mostrar cómo se puede construir el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales a partir del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Por tanto, partiendo del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, podemos construir los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. La construcción de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$ la veréis con detalle en Análisis Matemático. Aquí, vamos a mostrar una introducción sobre esta construcción.

Representamos por $\mathbb{Q}^+$ al conjunto de los números racionales positivos, es decir,

$$\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}.$$

Una sucesión racional es una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que una sucesión racional $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una aplicación $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ donde $a_n = f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión racional de Cauchy es una sucesión racional $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > k$ $|a_m - a_n| < \epsilon$.

Para simplificar la notación, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión racional de Cauchy, escribiremos $(a_n)_n$ en lugar de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea C el conjunto de las sucesiones racionales de Cauchy. Definimos entonces la relación $\backsim$ sobre C por:

$$(a_n)_n \backsim (b_n)_n \Leftrightarrow \lim(a_n - b_n)_n = 0.$$

para todo $(a_n)_n, (b_n)_n \in C$.

Teorema 5

$\backsim$ es una relación de equivalencia.

Es claro que $\backsim$ es reflexiva y simétrica. Demostramos entonces que $\backsim$ es transitiva. Sean $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n \in C$ tales que $(a_n)_n \backsim (b_n)_n$ y $(b_n)_n \backsim (c_n)_n$. Demostramos que $(a_n)_n \backsim (c_n)_n$.
Para ello, tenemos que probar que:
$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}^+ \exists k \in \mathbb{N} \forall n > k(|a_n - c_n| < \epsilon)$.
Sea $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$. Demostramos que

$$\exists k \in \mathbb{N} \forall n > k(|a_n - c_n| < \epsilon).$$

Demostración del Teorema 5

Como $(a_n)_n \backsim (b_n)_n$, tenemos que

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \forall n > k_0 (|a_n - b_n| < \frac{\epsilon}{2}).$$

Y como $(b_n)_n \backsim (c_n)_n$, tenemos que

$$\exists k_1 \in \mathbb{N} \forall n > k_1 (|b_n - c_n| < \frac{\epsilon}{2}).$$

Demostración del Teorema 5

Tomamos $k = \max(k_0, k_1)$. Demostramos que

$$\forall n > k(|a_n - c_n| < \epsilon).$$

Sea $n > k$. Como $k = \max(k_0, k_1)$, tenemos que $n > k_0$ y $n > k_1$. Entonces:

$$n > k_0 \Rightarrow |a_n - b_n| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$n > k_1 \Rightarrow |b_n - c_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así pues:

$|a_n - c_n| = |(a_n - b_n) + (b_n - c_n)| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

Por tanto, hemos demostrado que para todo $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > k$, $|a_n - c_n| < \epsilon$. Así pues, $(a_n)_n \backsim (c_n)_n$. Por consiguiente, $\backsim$ es transitiva. $\square$

Definimos entonces

$$\mathbb{R} = C/\backsim .$$

Definición de la suma y el producto en $\mathbb{R}$

(1) Definimos

$$\overline{(a_n)_n} + \overline{(b_n)_n} = \overline{(a_n + b_n)_n}.$$

para todo $(a_n)_n, (b_n)_n \in C$.

(2) Definimos

$$\overline{(a_n)_n} \cdot \overline{(b_n)_n} = \overline{(a_n \cdot b_n)_n}.$$

para todo $(a_n)_n, (b_n)_n \in C$.

Utilizando propiedades de las sucesiones de Cauchy, se puede demostrar que la suma y el producto en $\mathbb{R}$ están bien definidas, es decir, no dependen de los representantes elegidos.

Si $(a_n)_n, (b_n)_n \in C$, entonces

$$(a_n)_n \leq (b_n)_n \Leftrightarrow \text{existe } (c_n)_n \in C \text{ tal que } c_n \geq 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$
$$\text{y } \overline{(b_n)_n} = \overline{(a_n)_n} + \overline{(c_n)_n}.$$

Utilizando propiedades de las sucesiones de Cauchy, se puede demostrar que $\leq$ está bien definido.

Y se pueden demostrar las propiedades que conocemos de la suma, el producto y el orden en $\mathbb{R}$, utilizando propiedades de las sucesiones de Cauchy y las propiedades de la suma, el producto y el orden en $\mathbb{Q}$.

Una copia de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Si $a \in \mathbb{Q}$, denotamos por $\overline{(a)_n}$ a la clase $\overline{(a_n)_n}$ donde $a_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definimos la función $\lambda : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\lambda(a) = \overline{(a)_n}$ para todo $a \in \mathbb{Q}$. Se demuestra entonces fácilmente que el conjunto $\{\overline{(a)_n} : a \in \mathbb{Q}\}$ es una copia de $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$ que se comporta correctamente respecto a la suma, al producto y al orden. Es decir, se tiene que λ es una aplicación inyectiva de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}$ tal que:

(1) λ preserva la suma, es decir, $\lambda(a + b) = \lambda(a) + \lambda(b)$ para todo $a, b \in \mathbb{Q}$.

(2) λ preserva el producto, es decir, $\lambda(a \cdot b) = \lambda(a) \cdot \lambda(b)$ para todo $a, b \in \mathbb{Q}$.

(3) Para todo $a, b \in \mathbb{Q}$,

$$a \leq b \Leftrightarrow \lambda(a) \leq \lambda(b).$$