UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Enginyeria Informàtica

APUNTS

Grau en Matemàtiques

Curs 2023-2024 | Vuitè Semestre

Geometria Diferencial de Corbes i Superfícies (GDCS)

Autor:
Mario VILAR

Professor/a:
Dr. Ricardo GARCÍA

PRESENTACIÓ DE L'ASSIGNATURA

L'estudi de les corbes es limita a l'estudi local mitjançant les fórmules de Frenet. El contingut principal són les superfícies, tant en els seus aspectes locals, com ara la curvatura de Gauss i les geodèsiques, el teorema egregi de Gauss, etc. Revisats.

UNIVERSITAT DE BARCELONA

CLASSIFICACIÓ AMS (2020): 53-00, 53A04, 53A05, 53A55, 53C05, 53C15.

Índex

Introducció

We'll all be planning that route
We're gonna take real soon
We're waxing down our surfboards
We can't wait for June
We'll all be gone for the summer
We're on surfari to stay
Tell the teacher we're surfin'.

THE BEACH BOYS, *Surfin' USA* (1963)

Primer de tot, trobareu que hi ha un índex, on hi distingim els diferents apartats ordenats seguint el meu propi criteri i, de tant en tant, seguint l'ordre cronològic del curs. Hi ha capítols, seccions, subseccions (i fins i tot subsubseccions). Us faig cinc cèntims de com he organitzat els encapçalaments de cada pàgina:

1. el número de l'últim capítol/secció/subsecció, depèn de la profunditat que hi hagi definida en aquell moment, figurarà en cada cantonada superior de pàgina parella (per exemple, *1.2*);
2. el nom del capítol es trobarà a la part dreta de la capçalera de les pàgines parelles (per exemple, «Divisibilitat i nombres primers»);
3. el nom de l'última secció/subsecció de la pàgina, a la cantonada dreta superior de les pàgines parelles (per exemple, «Polinomis: algorisme d'Euclides»);
4. el número de l'últim teorema, definició... de la pàgina en qüestió es trobarà a les pàgines senars, a la cantonada superior dreta, *destacat en el color de la seva capçalera corresponent* (per exemple, **1.2.3**).

A més, hi ha una taula, la taula de continguts. En aquest sentit, tal com acabem de dir, es veu fàcilment que s'ha seguit una mena de *sorting-by-color* per poder treballar de manera més eficient amb els diferents tipus d'enunciats matemàtics. D'aquesta manera, si busqueu una definició, un teorema... podreu distingir que estan destacats amb colors diferents (ara els introduïm) i trobar-los molt ràpidament:

1. Teoremes, proposicions, lemes, corol·laris, propietats, conjectures, processos i exercicis tindran aquest format (capçalera destacada amb color gris fosc):

   Teorema. *Compte! L'enunciat del teorema també serà en cursiva! Jove xef, porti whisky amb quinze glaçons d'hidrogen, coi!*

2. Les definicions i notacions tindran aquest format (capçalera de color gris clar):

   Definició. Aqueix betzol, Jan, comprava whisky de figa.

3. Les remarques i exemples tindran aquest format:

   Observació. Zel de grum: quetxup, whisky, cafè, bon vi; ja!

Després de molts anys fent-ho malament, ara sol quedaran numerades aquelles equacions a les quals em referiré més endavant. És la *filosofia dominant* en la majoria de textos matemàtics (té nom i tot, es diu la *regla d'Occam*).

Per últim, m'estalviaré de comentar l'índex terminològic perquè el seu propòsit és clar i, en efecte, paral·lel al de l'organització d'aquest document: poder facilitar-vos al màxim la feina per localitzar qualsevol concepte que desitgeu. Espero que us serveixin d'alguna cosa aquests apunts, els he fet amb tot l'amor del món. Sort!

Mario VILAR
Sitges, Barcelona
17 de juny de 2024

Taula de continguts

I	Capítol 1	I

I

Corbes

1.1

Corbes parametritzades

Denotarem per I un interval de $\mathbb{R}$.

Definició 1.1.1 (Corba parametritzada). Una *corba parametritzada* a $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ és una aplicació contínua:

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)). \end{array}$$

Es diu *paràmetre* de la corba a la variable t. Al conjunt imatge $\gamma^* = \{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\}$ se'n diu *recorregut*, o *trajectòria*, de la corba. Si és contínua (resp. diferenciable) en direm que és contínua (resp. diferenciable).

Definició 1.1.2 (Traça). És el conjunt $\{\alpha(t) \in \mathbb{R}^n \mid x \in I\} = \alpha(I) \subset \mathbb{R}^n$. A més, diem que α és plana si existeix $\Pi \in \mathbb{R}^n$ un pla tal que $\alpha(I) \subset \Pi$.

De moment, per situar-nos, pensem en la regla de Barrow per funcions d'una variable: si F és una primitiva de f $(F' = f)$, aleshores:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

És a dir, la integral de f a (a,b) equival a *integrar* (en aquest cas, avaluar) la primitiva a la vora de (a,b) formada pels punts a i b. Veurem generalitzacions d'aquest principi on, a més de segments (a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{R}^n$) tindrem *corbes*, *superfícies* o *regions* senceres a $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$. Per aquest motiu, haurem de parlar en primer lloc d'integrals *damunt de corbes i superfícies*. Treballarem quasi sempre amb corbes per les quals hi ha un vector tangent ben definit (llevat potser d'uns pocs punts).

Definició 1.1.3 (Corba de classe $\mathcal{C}^1$). Diem que una corba $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és de classe $\mathcal{C}^1$ (s'entén $\mathcal{C}^1([a,b])$) si cada component $\gamma_j(t)$ amb $j = 1 \div n$ és de classe $\mathcal{C}^1$ (derivable i amb derivada contínua, per a tot $t \in [a,b]$).

Sovint en tindrem prou amb tenir corbes de classe $\mathcal{C}^1$ a trossos; és a dir, corbes per a les quals existeix una partició de l'interval del paràmetre $a = t_0 < \cdots < t_n = b$, tal que les restriccions $\gamma_{|[t_{i-1},t_i]}$ són de classe $\mathcal{C}^1$ per a tot $i = 1 \div n$. Sigui com sigui, seguirem demanant que sigui $\mathcal{C}$ en $[a,b]$.

Definició 1.1.4 (Corba tancada, corba simple). Diem que una corba $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és *tancada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Diem que la corba σ és *simple* si és injectiva (és a dir, si la trajectòria no té autointerseccions). Li diem *tancada simple* si $\gamma(a) = \gamma(b)$ i la trajectòria no té autointerseccions (a part de l'a i b).

Figura 1.1: Corba simple i no simple.

Observació 1.1.5. Si γ és tancada i l'únic punt on γ no és injectiva, és a $\gamma(a) = \gamma(b)$, encara diem que γ és simple.

Exemple 1.1.6.

1. *Segment* entre dos punts $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$. Considerem el vector $\vec{v} = p_2 - p_1$ a $\mathbb{R}^n$. Els punts de la recta que passa per aquests dos punts són de la forma $x = p_1 + t\vec{v}$, i els que corresponen al segment entre els dos punts que tenen $t \in [0,1]$. Així, tenim:

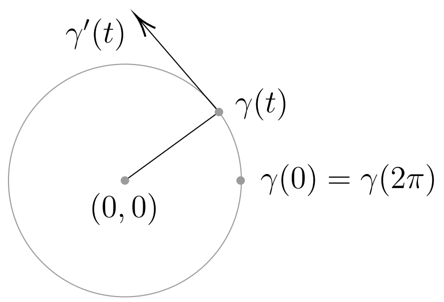
$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = p_1 + t(p_2 - p_1). \end{array}$$

   Aquesta corba és de classe $\mathcal{C}^1$ i $\gamma'(t) = p_2 - p_1 = \vec{v}$. Més generalment, si $p \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v \neq 0$, podem posar aquestes dues corbes:

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & p + tv \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \beta : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & p + t^3 v \end{array}$$

   Fixem-nos que, a més, $\beta(\mathbb{R}) = \alpha(\mathbb{R})$.

2. *Circumferència de centre* $(0,0)$ *i radi 1.* Parametritzem mitjançant l'angle de les coordenades polars:



$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)). \end{array}$$

   Tenim una corba tancada (simple) amb vector tangent $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$. Observem que els vectors de posició $\gamma(t)$ i tangent $\gamma'(t)$ tenen la mateixa longitud, $\|\gamma(t)\| = \|\gamma'(t)\| = 1$ i són perpendiculars: $\gamma(t)$ o $\gamma'(t)$ és 0.

3. *Hèlix a* $\mathbb{R}^3$. Sigui:

$$\begin{array}{rccl}\gamma: & (-\infty,+\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t)=(\cos(t),\sin(t),t).\end{array}$$

Observem que la projecció d'aquesta trajectòria al pla $z=0$ és la circumferència de centre $(0,0)$ i radi 1. Però aquí la corba no és tancada, ja que l'alçada z passa de 0 a 2π:

$$\gamma(0)=(1,0,0) \text{ i } \gamma(2\pi)=(1,0,2\pi).$$

Observem que el vector tangent $\gamma'(t)=(-\sin(t),\cos(t),1)$ té longitud constant $\|\gamma'(t)\|=2$.

4. Gràfica d'una funció d'una variable. Donada $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ funció de classe $\mathcal{C}^1$ considerem la gràfica:

$$\begin{array}{rccl}\gamma: & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t)=(t,f(t)).\end{array}$$

Aquí el vector tangent és $\gamma'(t)=(1,f'(t))$, que té longitud $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+(f'(t))^2}$.

Observació 1.1.7. Si posem la corba $\alpha:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ tal que $t\longmapsto(\cos t,\sin t)$, què passa en els extrems? Si $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ i $\alpha:I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ és una aplicació, α és diferenciable en $a\in[a,b]$ si $\exists\varepsilon>0$ i $f:(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una funció diferenciable tal que $f|_{[a,a+\varepsilon)}=\alpha|_{[a,a+\varepsilon)}$ («es pot estendre una mica a una funció diferenciable»).

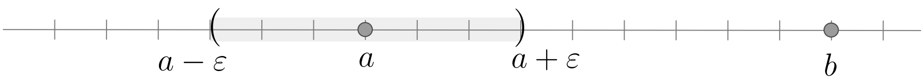


Figura 1.2: Representació dels intervals $[a,b]$ i $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.

Amb les corbes parametritzades hi podem fer diverses operacions.

1. De la corba recorreguda en el sentit invers se'n diu *corba oposada* o *inversa*. Si la corba és $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$, la corba oposada es pot parametritzar fàcilment de la manera següent:

$$\begin{array}{rccl}-\gamma: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & (-\gamma)(t)=\gamma(a+b-t)=\gamma(b-(t-a)).\end{array}$$

La trajectòria és la mateixa: $(-\gamma)^*=\gamma^*$, i la regularitat també.

2. *Juxtaposició de corbes.* Si una corba acaba allà on en comença una altra, podem definir una nova corba, la *juxtaposició*. Siguin $\alpha:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ i $\beta:[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}^n$, amb $\alpha(b)=\beta(c)$. Definim:

$$\gamma=\alpha\vee\beta:[a,b+(d-c)]\longrightarrow\mathbb{R}^n,\quad \gamma(t)=\begin{cases}\alpha(t), & a\le t\le b\\ \beta(t-(b-c)), & b\le t\le b+d-c.\end{cases}$$

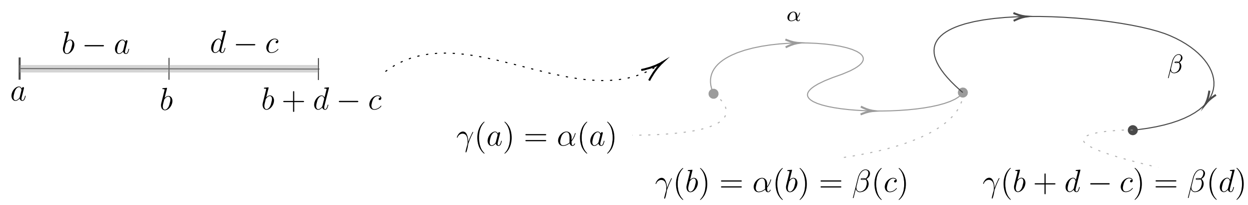


Figura 1.3: Representació de la juxtaposició.

És clar que $(\alpha\vee\beta)^* = \alpha^*\vee\beta^*$ i que si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és una corba, aleshores: $\gamma = \gamma_{[a,x]}\vee\gamma_{[x,b]}$ per a tot $x\in(a,b)$.

Exemple 1.1.8. Parametritzem el triangle de vèrtexs $(0,0),(1,1),(-1,1)$. El segment que va de $(0,0)$ a $(1,1)$ es pot parametritzar amb $\alpha_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha_1(t) = t((1,1)-(0,0)) = (t,t)$. El segment horitzontal de $(1,1)$ a $(-1,1)$ el podem parametritzar com $\alpha_2(t) = (1,1)+(t-1)((-1,1)-(1,1)) = (3-2t,1)$. Finalment, parametritzem el segment de $(-1,1)$ a $(0,0)$ com $\alpha_3 : [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha_3(t) = (-1,1)+(t-2)((0,0)-(-1,1)) = (t-3,3-t)$. Tot plegat, quedaria:

$$\gamma : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = \begin{cases} (t,t) & 0\le t\le 1 \\ (3-2t,1) & 1\le t\le 2 \\ (t-3,3-t) & 2\le t\le 3 \end{cases}$$

3. *Canvi de paràmetres o reparametrització*. Donada una corba $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ podem fer un canvi de variable al paràmetre t.

Definició 1.1.9 (Canvi de paràmetre). Un *canvi de paràmetre* o *reparametrització* és una funció:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & [c,d]\subset\mathbb{R} & \longrightarrow & [a,b] \\ & s & \longmapsto & \varphi(s)=t \end{array},\ \varphi \text{ bijectiva i de classe } \mathcal{C}^1,$$

i amb inversa també de classe $\mathcal{C}^1$.

La corba $\beta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ve donada per la composició $\gamma\circ\varphi = \gamma(\varphi(s)) = \beta(s)$ s'anomena *reparametrització* de γ. Observem que $\beta^* = \gamma$.

Exemple 1.1.10.

3.1. Primer, un contraexemple. Prenem:

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{S}^1\subset\mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\cos t,\sin t) \end{array}$$

No és un canvi de variable perquè h^{-1} no és de classe $\mathcal{C}^1$. De fet, h no és ni bijectiva (perquè tant el sinus com el cosinus no són injectives).

3.2. Ara un exemple. Si prenem la corba $\alpha : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $u \longmapsto p + uv$ i $h : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$[1] és un canvi de variable tal que $t \longmapsto t^3 = u$. Pel que $\beta = \alpha \circ h$ és una reparametrització d'α.

Observació 1.1.11. Cal fer atenció a què si el canvi de paràmetre φ té $\varphi'(s) < 0$ per a tot $s \in [c, d]$, aleshores el sentit de la corba canvia; és a dir, obtenim de fet una reparametrització de $-\gamma$. En aquest sentit, $-\gamma$ es pot considerar com una reparametrització γ.

Definició 1.1.12 (Corbes relacionades). En el conjunt de corbes diferencials parametritzades es defineix $\alpha \sim \beta \iff \beta = \alpha \circ h$, on h és un difeomorfisme. A les classes d'equivalència se les anomena *corbes geomètriques*.

1.2 Vector i recta tangent

Definició 1.2.1 (Vector i recta tangents). Sigui $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una corba diferenciable, $t \in I$ tal que $\gamma'(t) \neq 0$.

1. El vector tangent a la corba γ en el punt t (o en $\gamma(t)$) és el vector $\gamma'(t)$:

$$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$$

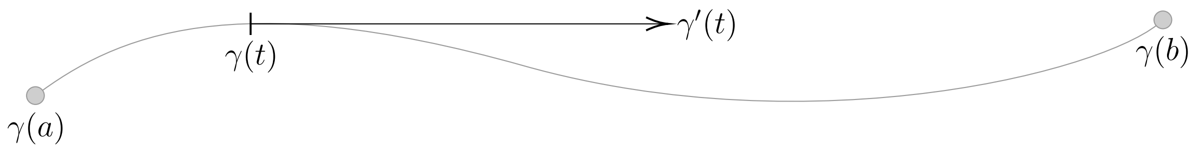


Figura 1.4: Vector tangent a la corba.

2. La recta tangent a γ en t (o en $\gamma(t)$) és la recta $\gamma(t) + \langle \gamma'(t) \rangle$.

Observació 1.2.2. Si $\alpha = \beta \circ h$ és una reparametrització de β (o $\beta = \alpha \circ h^{-1}$ respectivament d'α), aleshores:

$$\alpha'(t) = (\beta \circ h)'(t) = \beta'(h(t)) \cdot h'(t).$$

Proposició 1.2.3. *Sigui $h : J \longrightarrow I$ un canvi de paràmetre tal que $h'(t) \neq 0$ per a cert t. En punts que es corresponen per h, la recta tangent és la mateixa.*

[1] Notem que en el zero h no és diferenciable, així que certament no ens convé agafar tot $\mathbb{R}$. Ens decantem per prendre els $\mathbb{R}_+$.

Demostració. Si h és canvi de paràmetre, existeix $h^{-1} \in \mathcal{C}^1$ tal que $h^{-1}(h(t)) = \mathrm{id}(t) = t$. D'aquí, $(h^{-1})'(h(t)) \cdot h'(t) = 1$ (hem usat que $h'(t) \neq 0$). D'aquesta manera, $\alpha'(t)$ i $\beta'(h(t))$ difereixen en $h'(t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. D'aquí:

$$\alpha(t) + \langle \alpha(t) \rangle = \beta(h(t)) + \langle \beta'(h(t)) \rangle;$$

és a dir, en punts que es corresponen per h la recta tangent és la mateixa, com volíem veure. ■

1.3 Longitud d'una corba

Definició 1.3.1 (Longitud de la corba). Donada una corba $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, i assignem $t \longmapsto \gamma(t) := (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$; definim la seva longitud com:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \, .$$

En termes físics, la longitud és la integral de la velocitat $\|\gamma'(t)\|$. Si $l(\gamma) \ll \infty$, diem que γ és *rectificable*.

Observació 1.3.2. Si tenim $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una corba diferenciable, amb $t_0, t_1 \in I$ tals que $t_0 < t_1$, hem definit la longitud com $\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| \, dt$. Si $t_0 > t_1$ no hi hauria cap problema:

$$l(\alpha) = -\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_{t_1}^{t_0} \|\alpha'(t)\| \, dt \, .$$

No només això, sinó que per a $t_0 < t_1$,

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| \, dt = P(t_1) - P(t_0) \geq 0 \implies P' = \|\alpha'\| \geq 0,$$

tal que P és una primitiva.

Observació 1.3.3. Podem veure la longitud com el límit de les longituds de corbes poligonals que aproximen γ: si tenim una partició d'$[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, tenim una *poligonal* formada pels segments $\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})$ per a tot $j = 1 \div n$. La longitud de l'aproximació poligonal és:

$$L(P) = \sum_{j=1}^n \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \implies l(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \right\}.$$

Teorema 1.3.4. *Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és de classe $\mathcal{C}^1$, llavors $\|\gamma'(t)\| \in \mathcal{L}^1([a,b])$ (és Lebesgue-integrable) i la seva longitud és $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$.*

Demostració. Com que $\gamma \in \mathcal{C}^1$ podem aplicar el teorema del valor intermig de Lagrange, per a cada interval $[t_{j-1}, t_j]$: existeix $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ tal que:

$$\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) = \gamma'(\xi_j)(t_j - t_{j-1}).$$

Aleshores, $\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \|\gamma'(\xi_j)\| \cdot \|t_j - t_{j-1}\| = \|\gamma'(\xi_j)\|(t_j - t_{j-1})$ i, per tant:

$$L(P) = \sum_{j=1}^{n} \|\gamma'(\xi_j)\|(t_j - t_{j-1}).$$

Aquesta és una suma de Riemann de la integral $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$, associada a la partició $a = t_0 < \cdots < t_n = b$. ■

Observació 1.3.5. Automàticament, això dona també la longitud d'una corba de classe $\mathcal{C}^1$ a trossos: si cada tros $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ és de classe $\mathcal{C}^1$, $j = 1 \div n$, tenim:

$$l(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\|\, dt\,.$$

Exemple 1.3.6. Siguin $p_0, v \in \mathbb{R}^2$ i $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $t \longmapsto p_0 + tv$. Aleshores, $\alpha([a,b])$ és el segment que va de $p_0 + av = \alpha(a)$ fins a $p_0 + bv = \alpha(b)$. És evident que per a $\alpha(t) = p_0 + tv$ tenim $\alpha'(t) = v$ i

Proposició 1.3.7. *La longitud d'una corba entre dos punts és invariant per reparametrització.*

Demostració. Sigui β una corba diferenciable en $\mathbb{R}^n$, h un canvi de paràmetre, $\alpha = \beta \circ h$. D'aquí, $\alpha'(t) = \beta'(h(t)) \cdot h'(t)$. Siguin $t_0, t_1 \in I$ i $t_0 < t_1$:

$$l(\alpha) \equiv \operatorname{long}(\alpha, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \beta'(h(t)) \cdot h'(t)\, dt\,.$$

Tenim dos casos, en funció del signe de la derivada:

1. Si $h'(t) > 0$ per a tot $t \in I$, aleshores:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\beta'(h(t))\| \cdot h'(t)\, dt \left\{ \begin{array}{cc} u = h(t) & u_1 = h(t_1) \\ u_0 = h(t_0) & u_0 < u_1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \int_{u_0}^{u_1} \|\beta'(u)\|\, du = l(\beta),$$

des d'u_0 fins a u_1 (pel que és injectiva).

2. Si $h'(t) < 0$ per a tot $t \in I$, aleshores:

$$-\int_{t_0}^{t_1} \|\beta'(h(t))\| \cdot h'(t)\, dt \left\{ \begin{array}{c} u = h(t) \\ u_0 > u_1 \end{array} \right\} \Longrightarrow -\int_{u_0}^{u_1} \|\beta'(u)\, du = \int_{u_1}^{u_0} \|\beta'(u)\|\, du = l(\beta),$$

des d'u_1 fins a u_0 (pel que és injectiva).

Per tant, la longitud és intrínsecament geomètrica. ■

Exemple 1.3.8.

1. *Circumferència de centre* $(0,0)$ *i radi 1.* Teníem $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ tal que $t \in [0, 2\pi]$. Per tant, $\|\gamma'(t)\| = \|(-\sin(t), \cos(t))\| = 1$ i:

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

2. *Gràfiques de funcions.* Donada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ teníem $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donada per $\gamma(x) = (x, f(x))$. Llavors:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(x)\| \, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx\,.$$

3. *Hèlix a* $\mathbb{R}^3$. Teníem $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, tal que $t \in [0, 2\pi]$. Llavors, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}$ i, per tant:

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

4. *Cardioide.* Considerem la corba definida en coordenades polars per $r = 1 + \cos(\theta), \theta \in [0, 2\pi)$. Llavors, tenim:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) = (1 + \cos\theta)\cos\theta, \\ y = r\sin(\theta) = (1 + \cos\theta)\sin\theta, \end{cases}$$

i ens queda una corba $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que assigna l'instant θ a $\gamma(\theta) := ((1+\cos(\theta))\cos(\theta), (1+\cos(\theta))\sin(\theta))$. Aquesta és una corba tancada i simètrica respecte l'eix horitzontal.

Volem parametritzar una corba donada de manera que el nou paràmetre s coincideixi amb la longitud del tros de corba des de l'inici fins a $\gamma(s)$. En altres paraules, volem fer un canvi de variable de manera que la nova corba, $\Gamma(s) = \gamma(\psi^{-1}(s))$, el paràmetre s coincideixi amb la longitud transcorreguda.

Definició 1.3.9 (Corba regular). Una corba $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és regular si $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ per a tot $t \in [a, b]$ (en el seu defecte, $\gamma'(t) \neq (0, \ldots, 0)$). Si $\gamma'(t) = 0$ es diu que t és un punt singular de γ.

Als exemples anteriors, totes les corbes són regulars llevat de la cardioide, que té $\|\gamma'(\pi)\| = 0$.

Observació 1.3.10. Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una corba, J un interval i $h : J \longrightarrow I$ un canvi de paràmetre. α és regular a t si, i només si, $\beta = \alpha \circ h$ és regular a $h(t)$.

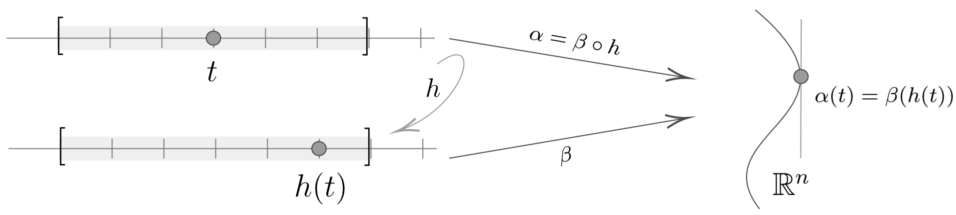


Figura 1.5: La regularitat de β en funció de la d'α.

Observació 1.3.11 (Resum de reparametrització). També, val la pena recordar que la derivada en una corba (multidimensional) es fa terme a terme:

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \alpha': & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & (\alpha_1'(t), \ldots, \alpha_n'(t)) \end{array}$$

Donada una corba γ regular, amb longitud $L = l(\gamma)$, considerem la *reparametrització* (inversa):

$$\begin{array}{rccl} s: & [a,b] & \longrightarrow & [0,L] \\ & t & \longmapsto & s(t) := l(\gamma_{[a,t]}) = \int_a^t \|\gamma'(u)\|\, du\,. \end{array}$$

És a dir, el nou paràmetre s queda definit per la igualtat $s = \int_a^t \|\gamma'(u)\|\, du$. La funció $s = s(t)$ és derivable amb $s'(t) = \|\gamma'(t)\| \neq 0$; és a dir, *aplicant el teorema de la funció inversa* trobem que $s(t)$ és estrictament monòtona creixent i de classe $\mathcal{C}^1$.

$$t_1 < t_2 \implies s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(u)\|\, du > 0.$$

Per tant, s és una bijecció, un *canvi de paràmetre* i, així, la seva inversa local també és de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{array}{rccc} t: & [0,L] & \longrightarrow & [a,b] \\ & s & \longmapsto & t(s) \end{array}\,,\ t \in \mathcal{C}^1.$$

Definició 1.3.12 (Preserva l'orientació). Si $\alpha = \beta \circ h$, $h'(t) > 0$ per a tot $t \in I$, es diu que h preserva l'orientació. En canvi, si $h'(t) < 0$ per a tot $t \in I$ es diu que *inverteix* l'orientació. Una corba orientada és una classe d'equivalència de corbes parametritzades que des dels canvis preserven l'orientació.

Exemple 1.3.13. Per exemple, si prenem $\beta : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $t \longmapsto (\cos(-t), \sin(-t))$ i $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$, obtenim la mateixa corba però en sentits oposats.

1.4 Parametrització per l'arc

Definició 1.4.1 (Paràmetre d'arc). El paràmetre s s'anomena *paràmetre d'arc* i la parametrització global $\psi : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\psi(s) = \gamma(t(s))$ s'anomena *parametrització per l'arc.*

Observació 1.4.2. *Clarament, $s(a) = 0$ i $s(b) = L$.* Comprovem que la corba reparametritzada té velocitat 1; és a dir, que $\|\psi'(s)\| = 1$, usarem que $t = s^{-1}$:

$$\psi'(s) \overset{\text{cadena}}{=} \gamma'(t(s))t'(s) = \gamma'(t)(s^{-1})'(s) = \gamma'(t)\frac{1}{s'(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \implies \|\psi'(s)\| = 1.$$

Per tant, tal com volíem:

$$l(\psi([0,s])) = \int_0^s \|\psi'(u)\|\,du = \int_0^s du = s.$$

D'aquí, en surt una definició igualment vàlida i la que s'usarà en aquestes notes.

Definició 1.4.3 (Parametrització per l'arc)**.** Diem que una corba $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ està parametritzada per l'arc si $\|\beta'(s)\| = 1$ (o $|\beta'(s)| = 1$, depèn de la notació que vulguem seguir), per a tot $s \in J$.

Exemple 1.4.4.

1. *Circumferència de centre* $(0,0)$ *i radi 1.* Teníem $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ tal que $t \in [0, 2\pi]$. Per tant, t ja és el paràmetre d'arc.
2. *Hèlix a* $\mathbb{R}^3$. Teníem $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, tal que $t \in [0, 2\pi]$ i $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$. Llavors, el paràmetre d'arc és:
$$s = \int_0^t \|\gamma'(u)\|\,du = \int_0^t \sqrt{2}\,du = \sqrt{2}t,$$
i la parametrització amb l'arc és:
$$\begin{array}{rccl} \gamma_1 : & [0, 2\sqrt{2}\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longmapsto & \gamma_1(s) = \gamma\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \end{array}$$

Teorema 1.4.5. *Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una corba diferenciable i regular (i.e. $\alpha'(t) \neq 0$ per a tot t). Aleshores, existeix un difeomorfisme $h : J \longrightarrow I$ tal que $\beta = \alpha \circ h$ és una parametrització per l'arc.*

Demostració. Sigui $b \in I$. Sigui $s : I \longrightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$, tal que $t \longmapsto s(t) := \int_b^t \|\alpha'(u)\|\,du$. Per la regla de Barrow, $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$. Tal com hem definit s és bijectiva[2] i, pel teorema de la funció inversa $s : I \longrightarrow s(I)$ té inversa s^{-1} que serà una funció diferenciable. En particular, $J := s(I) \subset \mathbb{R}$ és un interval i $h := s^{-1} : J \longrightarrow I$ és l'aplicació inversa d's. Denotem per un punt $(\cdot)$ la derivada respecte s:

$$\begin{array}{rccc} h : & s(I) & \longrightarrow & I \\ & s & \longmapsto & h(s) = t \end{array} \quad \dot{h}(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|}, \; s \circ h = \mathrm{id}_{s(I)}, \; h \circ s = \mathrm{id}_I .$$

[2] És injectiva perquè $s'(t) > 0$ per a tot t i per tant s és estrictament creixent.

Si derivem $h \circ s$, aleshores $\dot{h}(s(t)) \cdot s'(t) = 1$, pel que $\dot{h}(s(t)) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}$. Calculem ara β' i prenem normes per veure que, efectivament, $\beta = \alpha \circ h$ és una parametrització per l'arc. Donat $s = s(t) \in J$:

$$\dot{\beta}(s) = \alpha'(h(s)) \cdot \dot{h}(s) \xrightarrow{\text{normes}} \|\dot{\beta}\| = \|\alpha'(h(s))\| \cdot |\dot{h}(s)| = \frac{\|\alpha'(h(s))\|}{\|\alpha'(h(s))\|} = 1. \qquad \blacksquare$$

Exemple 1.4.6. Considerem $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $t \longmapsto (e^t, e^t)$. El vector tangent és $\alpha'(t) = (e^t, e^t)$ i $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}e^t$. Podem calcular $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| \, dt$, i posant $t_0 = 0$:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{2}e^t \, dt = \sqrt{2}(e^t - 1) \xrightarrow{s=\sqrt{2}(e^t-1)} \beta(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1, \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right).$$

Aleshores, $\beta'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ i $\|\beta'(s)\| = 1$, pel que β és una parametrització per l'arc.

Proposició 1.4.7. *Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una corba parametritzada per l'arc, $h : J \longrightarrow I$ un canvi de paràmetre, sigui $\beta = \alpha \circ h : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si β està parametritzada per l'arc, $h(s) = \pm s + a$, $a \in \mathbb{R}$.*

Demostració. Com que β està parametritzada per l'arc (α ho està i h és un canvi de paràmetre), tenim $1 = \|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(t)) \cdot h'(t)\|$. Al seu torn, com α també està parametritzada per l'arc, $\|\alpha'(t)\| = 1$ per a tot $t \in I$ i

$$1 = \|\alpha'(h(t)) \cdot h'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| \cdot |h'(t)| \implies |h'(t)| = 1.$$

Ara, com J és connex (tot interval de la recta real ho és), tenim els dos casos del valor absolut; és a dir, o bé $h'(s) = 1$ per a tot $s \in J$ o bé $h'(s) = -1$, per a tot $s \in J$:

1. Si $h'(t) = 1$, aleshores $h(t) = t + a$, $a \in \mathbb{R}$.
2. Si $h'(t) = -1$, aleshores $h(t) = -t + a$, $a \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

1.5 Corbes planes

Observació. Recordem que una corba plana és, planerament (mai millor dit), aquella per a la qual existeix un pla on hi està continguda (cf. 1.1.2).

Notació 1.5.1 (Vector tangent normalitzat). Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és una corba diferenciable regular, denotarem $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ el vector tangent (normalitzat).

Definició 1.5.2 (Vector normal). Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba plana, regular i parametritzada per l'arc. Es defineix el vector normal a la corba α en un punt $s \in I$ (o en $\alpha(s)$) al vector:

$$N(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \alpha'(s) \equiv N(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1'(s) \\ \alpha_2'(s) \end{pmatrix}, \ \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s)).$$

Anàlogament, si $\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és la rotació positiva d'angle $\frac{\pi}{2}$, anomenarem vector normal a α en s (o en $\alpha(s)$) al vector $N(s) = \rho(T(s)) = \rho(\alpha'(s))$.

Propietat 1.5.3. *Sigui I un interval, $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba diferenciable parametritzada per l'arc.*

1. $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$. *Això és perquè* $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = \|\alpha'(s)\|^2 \cdot \cos 0 = 1$.
2. *Si $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ són diferenciables, aleshores:*

$$\frac{d}{ds}(\langle f(s), g(s) \rangle) = \langle f'(s), g(s) \rangle + \langle f(s), g'(s) \rangle.$$

D'aquí, prenent $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle$, tenim:

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \implies \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \implies \alpha'(s) \perp \alpha''(s).$$

Pel que $\alpha''(s) = k(s) \cdot N(s)$, $k(s) \in \mathbb{R}$. I d'aquí la definició de curvatura.

Definició 1.5.4 (Curvatura). Sigui I un interval, $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba diferenciable parametritzada per l'arc. Direm que $k_\alpha(s)$ és la curvatura de α en s (o $\alpha(s)$). La curvatura és una mesura del canvi de direcció del vector tangent a una corba, com més ràpid canvia aquest a mesura que ens desplacem al llarg de la corba, es diu que és més gran la curvatura.

Al llarg d'aquesta secció prendrem $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba plana i regular. Volem estendre la definició anterior de curvatura a corbes més generals prenent com a referència la definició per a corbes parametritzades per l'arc, i de manera que sigui invariant per reparametritzacions. Considerarem, per tant, corbes que admetin una reparametrització per l'arc (no és el mateix que estiguin parametritzades per l'arc que admetin una reparametrització per l'arc).

Exemple 1.5.5. Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba definida per $\alpha(s) = (as+b, a's+b')$, $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ i $a^2 + (a')^2 = 1$. Calculem el vector tangent $\alpha'(s) = (a, a')$. El vector normal és una rotació en sentit antihorari de 90 graus:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a' \\ a \end{pmatrix}.$$

Està clar, doncs, que $\alpha''(s) = (0,0) = k(s) \cdot (-a', a)$. Si $a^2 + (a')^2 = 1$, a o a' (un dels dos mínim) no és nul, pel que $(-a', a) \neq 0$ i per tant $k(s) = 0$.

Exemple 1.5.6. Considerem el cercle de centre $(0,0)$ i radi $R > 0$, de manera que:

$$\begin{array}{rccc} c: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longmapsto & \left(R\cos\left(\frac{s}{R}\right), R\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right), \end{array}$$

és la parametrització per l'arc. Calculem el vector tangent i seguim derivant per trobar la curvatura:

$$\begin{aligned} c'(s) &= \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right), \\ c''(s) &= \frac{1}{R}\left(-\cos\left(\frac{s}{R}\right), -\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right). \end{aligned}$$

Com $c''(s) = k(s) \cdot N(s)$, $k(s) \in \mathbb{R}$, $\|N(s)\| = 1$ pel que $N(s)$ està parametritzada per l'arc i $\|c''(s)\| = |k(s)|$. A partir d'aquí, $|k(s)| = \frac{1}{R}$ i calculant $N(s)$ podem dir que $k(s) = \frac{1}{R}$.

Notació 1.5.7. Denotarem el vector tangent en $t \in I$ normalitzat per $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$. Si t és el paràmetre per l'arc, $T(t) = \alpha'(t)$.

Recordem que si α està parametritzada per l'arc, $N(s) = \rho(T(s))$, ρ una rotació d'angle $\frac{\pi}{2}$. Recordem també la definició de curvatura.

Definició (Curvatura en el pla). Sigui I un interval, $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba diferenciable parametritzada per l'arc. Diem que $k_\alpha(s) \equiv k(s) \in \mathbb{R}$ és la curvatura d'α en el punt $s \in I$ (o en $\alpha(s)$).

Definició 1.5.8 (Curvatura amb canvi de paràmetre). Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba plana parametritzada per l'arc. Sigui $h : J \longrightarrow I$ un canvi de variable tal que $h'(t) > 0$ per a tot $t \in J$. Sigui $\beta = \alpha \circ h$. Donat $t \in J$, anomenarem curvatura de β en t a $k_\beta(t) = k_\alpha(h(t))$.

La següent proposició ens mostra que per calcular k_β no és necessari trobar el paràmetre per l'arc.

Proposició 1.5.9. *Sigui $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba plana, regular. Aleshores:*

$$k_\beta(t) = \frac{\det(\beta'(t), \beta''(t))}{\|\beta'(t)\|^3}.$$

Demostració. Sigui h un canvi de paràmetre tal que $\beta = \alpha \circ h$, α parametritzada per l'arc i $h'(t) > 0$, per a tot $t \in J$. D'aquí, $\beta'(t) = \alpha'(h(t)) \cdot h'(t)$. Prenent normes:

$$\|\beta'(t)\| = \underbrace{\|\alpha'(h(t))\|}_{1} \cdot |h'(t)| = |h'(t)| \xrightarrow[\alpha \text{ parametritzada per l'arc}]{h'(t)>0} \|\beta'(t)\| = h'(t).$$

En particular, com $\beta' = \alpha'(h(t)) \cdot h'(t)$, la segona derivada queda:

$$\beta'' = \alpha''(h(t)) \cdot (h'(t))^2 + \alpha(h(t)) \cdot h''(t).$$

Podem calcular el determinant $\det(\beta'(t), \beta''(t))$, que és:

$$\begin{aligned}
\det(\beta'(t), \beta''(t)) &= \det(\alpha'(h(t)) \cdot h'(t), \alpha''(h(t)) \cdot (h'(t))^2 + \alpha'(h(t)) \cdot h''(t)) \\
&= \det(\alpha'(h(t)) \cdot h'(t), \alpha''(h(t)) \cdot (h'(t))^2) + \det(\alpha'(h(t)) \cdot h'(t), \alpha'(h(t)) \cdot h''(t)) \\
&= (h'(t))^3 \cdot \det(\alpha'(h(t)), \alpha''(h(t))) + h'(t) \cdot h''(t) \cdot \underbrace{\det(\alpha'(h(t)), \alpha'(h(t)))}_{0} \\
&= (h'(t))^3 \cdot \underbrace{\det(\alpha'(h(t)), \alpha''(h(t))}_{\det(T_\alpha(h(t)), k_\alpha(h(t)) \cdot N_\alpha(h(t)))}) = k_\alpha(h(t)) \cdot \underbrace{\det(T_\alpha(h(t)), N_\alpha(h(t)))}_{1}.
\end{aligned}$$

Hem usat que $\det(\alpha'(h(t)) \cdot h'(t), \alpha'(h(t)) \cdot h''(t)) = 0$, ja que tenim un vector repetit. En resum, acaba quedant que:

$$\det(\beta'(t), \beta''(t)) = (h'(t))^3 \cdot k_\alpha(h(t)) = \|\beta(t)\|^3 \cdot k_\alpha(h(t)) = \|\beta(t)\|^3 \cdot k_\beta(t).$$ ■

Teorema 1.5.10 (Fórmules de Frenet per a corbes planes). *Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba plana, regular i parametritzada per l'arc. Aleshores,*

1. $T'(s) = k(s) \cdot N(s)$,
2. $N'(s) = -k(s) \cdot T(s)$.

Demostració.

1. Definició de curvatura, ja que $T'(s) = \alpha''(s)$ i $\alpha''(s) = k(s) \cdot N(s)$.
2. És evident que $\|N(s)\| = 1$ per definició, de manera que $\langle N(s), N(s)\rangle = 1$, per a tot $s \in I$. Derivant, $\langle N'(s), N(s)\rangle + \langle N(s), N'(s)\rangle = 0$. D'aquí, $\langle N'(s), N(s)\rangle = 0$, pel que usant el triedre de Frenet com a base, $N'(s)$ es pot expressar com a combinació lineal dels vectors tangent i binormal. Com $N'(s) \perp N(s)$, aleshores $N'(s)$ és un múltiple de $T(s)$, és a dir, $N'(s) = \xi(s) \cdot T(s)$, per a alguna funció ξ. Sabem que $\langle N(s), T(s)\rangle = 0$. Derivant:

$$\begin{aligned}
\langle N'(s), T(s)\rangle + \langle N(s), T'(s)\rangle = 0 &\implies \langle \xi(s)T(s), T(s)\rangle + \langle N(s), k_\alpha(s) \cdot N(s)\rangle = 0 \\
&\overset{3}{\implies} \xi(s) \underbrace{\langle T(s), T(s)\rangle}_{1} + k_\alpha(s) \underbrace{\langle N(s), N(s)\rangle}_{1} = 0.
\end{aligned}$$

Per tant, $k(s) = -\xi(s)$. I amb això ja hem acabat. ■

Exercici 1.5.11. *Proveu que si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és una corba plana regular i $h : J \longrightarrow I$ és un canvi de paràmetre que inverteix l'orientació, aleshores $k_\alpha(h(t)) = -k_{\alpha\circ h}(t)$.*

[3] Hem usat que $\xi(s)$ és un escalar, de manera que $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.

1.6

Corbes en l'espai

Per a corbes en l'espai la noció de vector normal no existeix, ja que per a cada punt de la corba podem trobar un pla normal (un pla en què tot vector és normal), i el vector normal no només no és únic (llevat d'orientació), sinó que hi ha infinits.

Definició 1.6.1 (Funció curvatura en l'espai)**.** Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada per l'arc. Es defineix la funció curvatura:

$$\begin{array}{rccc} k_\alpha : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & s & \longmapsto & \|\alpha''(s)\| \end{array}$$

Equivalentment, es defineix la curvatura per $k_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\|$, i té en compte la taxa a què la direcció de l'objecte canvia.

Observació 1.6.2. Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és una corba plana i $i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(x, y) \longmapsto (x, y, 0)$, aleshores $i \circ \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Com a exercici cal veure que $k_{i\circ\alpha}(s) = |k_\alpha(s)|$, el primer com a corba en l'espai i el segon com a corba plana.

Definició 1.6.3 (n-regularitat)**.** Direm que una corba $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és 2-regular si $\dim_{\mathbb{R}}\langle \alpha'(s), \alpha''(s)\rangle = 2$. En general, direm que és n-regular si $\dim_{\mathbb{R}}\langle \alpha'(s), \dots, \alpha^{(n)}(s)\rangle = n$ (és a dir, si són linealment independents. Si una corba és 1-regular direm simplement que és regular.

Exercici 1.6.4. *Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada per l'arc. α és 2-regular si, i només si, $k_\alpha(s) \neq 0$ per a tot $s \in I$.*

Definició 1.6.5 (Vector normal unitari)**.** Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc, sigui $s_0 \in I$ tal que $k_\alpha(s_0) \neq 0$ (és a dir, α és 2-regular). Definim el vector normal (unitari) a α en s_0 (o en $\alpha(s_0)$) per $N(s_0) := \frac{\alpha''(s_0)}{\|\alpha''(s_0)\|} = \frac{\alpha''(s_0)}{k_\alpha(s_0)}$.

Exercici 1.6.6. *Si $T(s_0) = \alpha'(s_0)$, aleshores $\langle N(s_0), T(s_0)\rangle = 0$.*

Demostració. Si $T(s_0) = \alpha'(s_0)$, aleshores α està parametritzada per l'arc. Tenim que $\langle \alpha', \alpha'\rangle = 1$, derivant obtenim que $\langle \alpha', \alpha''\rangle = 0$, pel que $\alpha' \perp \alpha''$ i, en particular, $N = \frac{\alpha''}{k_\alpha} \perp T$. Fent els càlculs en més detall:

$$\langle \alpha', \alpha'\rangle' = \langle \alpha'', \alpha'\rangle + \langle \alpha', \alpha''\rangle = 0 \implies \langle \alpha', \alpha''\rangle = 0. \qquad \blacksquare$$

Definició 1.6.7 (Binormal)**.** Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc, $s_0 \in I$ tal que $k_\alpha(s_0) \neq 0$. Es defineix el binormal a α en s_0 per $B(s_0) = T(s_0) \times N(s_0)$. Com $T(s_0) \perp N(s_0)$ (exercici anterior), podem escriure $\|B(s_0)\| = \|T(s_0)\| \times \|N(s_0)\|$.

Observació 1.6.8 (Triedre de Frenet)**.** Com que $B(s_0)$ és ortogonal, per definició, tant a $T(s_0)$ com a $N(s_0)$, $(T(s_0), N(s_0), B(s_0))$ és una base ortonormal positiva que s'anomena *triedre de Frenet* d'α en s_0.

Definició 1.6.9 (Plans osculador, rectificant i normal)**.**

1. Al pla $\alpha(s_0) + \langle T(s_0), N(s_0)\rangle$ l'anomenarem pla *osculador* d'α en s_0.
2. Al pla $\alpha(s_0) + \langle T(s_0), B(s_0)\rangle$ l'anomenarem pla *rectificant* d'α en s_0.
3. Al pla $\alpha(s_0) + \langle N(s_0), B(s_0)\rangle$ l'anomenarem pla *normal* a α en s_0.

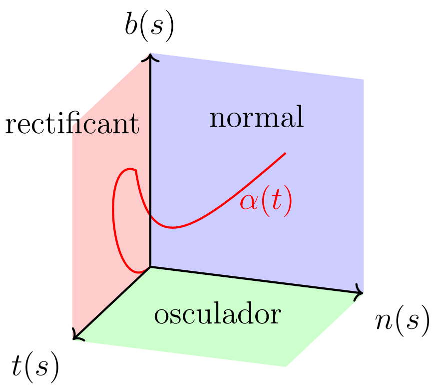


Figura 1.6: Plans osculador, rectificant i normal.

Definició 1.6.10 (Torsió)**.** Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc, sigui $s_0 \in I$ tal que $k_\alpha(s_0) \neq 0$ i sigui $(T(s_0), N(s_0), B(s_0))$ el triedre de Frenet. Es defineix la torsió d'α en s_0 com $\tau_\alpha(s_0) = \langle N'(s_0), B(s_0)\rangle$. A diferència de la curvatura, la torsió té signe (en algunes referències s'agafa com a definició de torsió $-\langle N'(s), B(s)\rangle$, nosaltres no ho farem).

Proposició 1.6.11 (Fórmules de Frenet)**.** *Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc, tal que $k_\alpha(s) \neq 0$ per a tot s. Sigui (T, N, B) el triedre de Frenet d'α en s. Si $k := k_\alpha(s)$ i $\tau := \tau_\alpha(s) = \langle N', B\rangle$, es té que*

$$T' = k \cdot N, \tag{1Fr}$$

$$N' = -k \cdot T + \tau \cdot B, \tag{2Fr}$$

$$B' = -\tau \cdot N. \tag{3Fr}$$

Demostració.

1. Pel que fa a 1Fr, és la definició de k, l'hem vista a les fórmules de Frenet per a corbes planes, 1.5.10, per exemple.
2. Pel que fa a 3Fr, apliquem que (T, N, B) és ortonormal i, per tant, $\langle B, T\rangle = \langle B, N\rangle = 0$:

$$\langle B', T\rangle = \underbrace{\langle B, T\rangle'}_{0} - \langle B, T'\rangle \overset{(1Fr)}{=} -\langle B, kN\rangle = -k\langle B, N\rangle = 0.$$

D'altra banda, per la simetria del producte escalar i l'ortonormalitat de la base:

$$2\langle B', B\rangle = \langle B, B\rangle' = 0 \text{ i } \langle B', N\rangle = \langle B, N\rangle' - \langle B, N'\rangle = -\langle B, N'\rangle = -\langle N', B\rangle = -\tau,$$

on la darrera igualtat és la definició de τ.

Observació 1.6.12. Recordar que si $e_1, \ldots, e_n$ és una base ortonormal d'un espai vectorial euclidià $(E, \langle\cdot\rangle)$ i si $v \in E$, aleshores $v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n\rangle e_n$, on $\langle e_i, e_j\rangle$ és 1 si $i = j$ i 0 si $i \neq j$.

Com T, N, B és una base ortonormal:

$$B' = \langle B', T\rangle T + \langle B', N\rangle N + \langle B', B\rangle B = -\tau N$$

3. I, finalment, pel que fa a 2Fr, anem fent els diferents productes escalars:

$$\begin{aligned} \langle N', T\rangle &= \underbrace{\langle N, T\rangle'}_{0} - \underbrace{\langle N, T'\rangle}_{k}{}^{4} = -k \\ 2\langle N', N\rangle &= \langle N, N\rangle' = 0 \implies \langle N', B\rangle = \tau; \\ N' &= \underbrace{\langle N', T\rangle}_{-k} \cdot T + \underbrace{\langle N', N\rangle}_{0} \cdot N + \underbrace{\langle N', B\rangle}_{\tau} \cdot B. \end{aligned}$$

Per tant, $N' = -k \cdot T + \tau \cdot B$, com volíem. ■

Observació 1.6.13 (Frenet, matricial)**.** També podríem haver escrit, de forma *matricial*:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.6.14 (Hèlix)**.** Considerem:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\longmapsto \left(\cos\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right), \tfrac{s}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Aquesta és la parametrització per l'arc d'una hèlix, com hem vist a 1.1.6 apartat *3.*. És clar que $\|\alpha'\| = 1$, i calculem els vectors normal, binormal i tangent:

$$\begin{aligned} T(s) = \alpha'(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 1\right) \\ \alpha''(s) &= \frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right) \end{aligned}$$

De manera que $k_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{1}{2}$ (per ser α parametritzada per l'arc), i

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{k_\alpha(s)} = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right).$$

[4] Per si no es veu directament, usant (1Fr) tenim $\langle N, T'\rangle = \langle N, kN\rangle = k\langle N, N\rangle = k$.

També podem calcular-la a partir de la torsió:

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 1\right),$$

i $\tau_\alpha(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle = \frac{1}{2}$.

Exercici 1.6.15. *Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc, $k_\alpha(s) \neq 0$ per a tot $s \in I$, aleshores $\tau_\alpha(s) = 0$ per a tot s si, i només si, $\alpha(I)$ està continguda en un pla de $\mathbb{R}^3$.*

Fem un petit recordatori de què volia dir una corba 2-regular.

Definició (Corba 2-regular). Si $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una corba diferenciable. β és 2-regular si $\forall t \in I$ tenim que $\{\beta'(t), \beta''(t)\}$ són linealment independents. És a dir, que $\operatorname{rang}(\beta'(t), \beta''(t)) = 2$, per a tot $t \in I$.

Lema 1.6.16. *Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba 2-regular. Sigui $h : J \longrightarrow I$ un canvi de paràmetre, tal que $\beta = \alpha \circ h$ i $t \longmapsto h(t) = s$. Aleshores, $k_\alpha(t) \neq 0$ per a tot $t \in I$.*

Demostració. Sigui $\ell = h^{-1}$, de manera que $\beta \circ \ell = \alpha$ és una reparametrització de β. Tenim que $\alpha(s) = \beta(\ell(s))$; si derivem aquesta expressió dos cops obtenim:

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2}(s) = \frac{d^2\beta}{dt^2}(\ell(s)) \cdot (\ell'(s))^2 + \frac{d\beta}{dt}(\ell(s)) \cdot \ell''(s), \quad \left\{\frac{d^2\beta}{dt^2}(\ell(s)), \frac{d\beta}{dt}(\ell(s))\right\} \text{ linealment independents.}$$

Com $\ell'(s) \neq 0$, aleshores $\frac{d^2\alpha}{ds^2}(s) \neq 0$ i $k_\alpha(s) \neq 0$, com volíem. ■

Definició 1.6.17 (Triangle de Frenet). Sigui $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una corba 2-regular. Sigui $h : J \longrightarrow I$ un canvi de paràmetre positiu (i.e. $h'(t) > 0$ per a tot $t \in J$, equivalentment que h preserva l'orientació), tal que $\alpha = \beta \circ h^{-1}$ ($\beta = \alpha \circ h$) està parametritzada per l'arc. Definim:

$$\begin{array}{ll} T_\beta(t) := T_\alpha(h(t)) & k_\beta(t) = k_\alpha(h(t)) \\ N_\beta(t) := N_\alpha(h(t)) & \tau_\beta(t) = \tau_\alpha(h(t)) \\ B_\beta(t) := B_\alpha(h(t)) & \end{array}$$

Com en el cas pla, el càlcul del triangle de Frenet de β la curvatura i la torsió es poden fer sense haver de calcular el canvi de paràmetre h.

Proposició 1.6.18 (Frenet per canvi de paràmetre). *Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada per l'arc i tal que $k_\alpha(s) \neq 0$ per a tot $s \in I$. Denotem:*

$$T_\alpha(s) := \alpha'(s), \quad N_\alpha(s) := \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad B_\alpha(s) = T_\alpha(s) \times N_\alpha(s).$$

Sigui $h : J \longrightarrow I$ tal que $t \longmapsto h(t) := s$ un canvi de paràmetre positiu, i sigui $\beta = \alpha \circ h$. Aleshores,

$$T_\beta(t) = T_\alpha(h(t)) = \frac{\dot\beta(t)}{\|\dot\beta(t)\|}, \tag{Fr$_\beta$ 1}$$

$$N_\beta(t) = N_\alpha(h(t)) = B_\beta(t) \times T_\beta(t), \tag{Fr$_\beta$ 2}$$

$$B_\beta(t) = B_\alpha(h(t)) = \frac{\dot\beta(t) \times \ddot\beta(t)}{\|\dot\beta(t) \times \ddot\beta(t)\|}. \tag{Fr$_\beta$ 3}$$

És a dir, que $(T_\beta, N_\beta, B_\beta)$ ens dona el triangle de Frenet per a β. El punt $\cdot$ ens indica que la derivada és respecte t i $'$, respecte s. $\times$ és el producte vectorial a $\mathbb{R}^3$.

Demostració.

Fr$_\beta$ 1 Sabem que $\beta(t) = (\alpha \circ h)(t)$, pel que aplicant la regla de la cadena tenim $\dot\beta(t) = \alpha'(h(t)) \cdot \dot h(t)$. Ara, podem trobar el vector tangent $T_\alpha(h(t))$:

$$T_\alpha(h(t)) = \alpha'(h(t)) = \frac{\dot\beta(t)}{\dot h(t)} = \frac{\dot\beta(t)}{\|\dot\beta(t)\|} = \dot\beta(t) = T(t).$$

Hem usat que h és un canvi de paràmetre positiu i α està parametritzada per l'arc:

$$\|\dot\beta(t)\| = \|\alpha'(h(t)) \cdot \dot h(t)\| = \underbrace{\|\alpha'(h(t))\|}_{1} \cdot |\dot h(t)| = \dot h(t).$$

Fr$_\beta$ 3 Derivant i fent el producte vectorial $\dot\beta(t) \times \ddot\beta(t)$,

$$\begin{aligned}
\ddot\beta(t) &= \alpha''(h(t)) \cdot (\dot h(t))^2 + \alpha'(h(t)) \cdot \ddot h(t), \\
\dot\beta \times \ddot\beta(t) &= \Big[\alpha'(h(t)) \cdot \dot h(t)\Big] \times \Big[\alpha''(h(t)) \cdot (\dot h(t))^2 + \alpha'(h(t)) \cdot \ddot h(t)\Big] \\
&= (\dot h(t))^3 \cdot [\alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t))] + (\dot h(t) \cdot \ddot h(t)) \underbrace{[\alpha'(h(t)) \times \alpha'(h(t))]}_{0} \\
&= (\dot h(t))^3 \cdot [\alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t))],
\end{aligned}$$

en l'última igualtat hem usat que $\alpha' \parallel \alpha'$, de manera que:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot\beta(t) \times \ddot\beta(t)}{\|\dot\beta(t) \times \ddot\beta(t)\|} &= \frac{(\dot h(t))^3}{|\dot h(t)|^3} \cdot \frac{\alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t))}{\|\alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t))\|} \overset{5}{=} \frac{\alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t))}{\|\alpha''(h(t))\|} \\
&= \alpha'(h(t)) \times \frac{\alpha''(h(t))}{\|\alpha''(h(t))\|} = T_\alpha(h(t)) \times N_\alpha(h(t)) = B_\alpha(h(t)) = B_\beta(t).
\end{aligned}$$

Fr$_\beta$ 2 Com $T(t)$ i $B(t)$ són unitaris i ortogonals, l'únic vector $N(t)$ tal que $(T(t), N(t), B(t))$ és una base ortonormal directa és el vector $N(t) = B(t) \times T(t)$. Com $T_\beta(t) = T(t) = T_\alpha(h(t))$ i $B(t) = B_\beta(t) = B_\alpha(h(t))$, tenim:

$$N_\beta(t) = N(t) = B(t) \times N(t) = B_\alpha(h(t)) \times T_\alpha(h(t)) = N_\alpha(h(t)). \qquad \blacksquare$$

[5] Hem usat que el producte escalar és $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \cdot \sin \widehat{vw}$, $\alpha' \perp \alpha''$ i $\|\alpha'\| = 1$ (està parametritzada per l'arc). Per tant, $\|\alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t))\| = 1 \cdot \|\alpha''(h(t))\|$.

Exercici 1.6.19. *Si h fos un canvi de coordenada en $\dot{h}(t) < 0$ per a tot t, aleshores:*

$$T(t) = -T_\alpha(h(t)), \quad N(t) = N_\alpha(h(t)), \quad B(t) = -B_\alpha(h(t)).$$

Proposició 1.6.20. *Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc, amb $k_\alpha(s)$ per a tot s. Sigui $h : J \longrightarrow I$ un canvi de coordenada positiu, $\beta = \alpha \circ h$. Aleshores,*

$$k_\beta(t) = \frac{\|\dot{\beta}(t) \times \ddot{\beta}(t)\|}{\|\dot{\beta}(t)\|^3}. \tag{1.1}$$

$$\tau_\beta(t) = \frac{\det(\dot{\beta}(t), \ddot{\beta}(t), \dddot{\beta}(t))}{\|\dot{\beta}(t) \times \ddot{\beta}(t)\|^2}. \tag{1.2}$$

Demostració. Posem $' = \frac{d}{ds}$ i $\cdot = \frac{d}{dt}$. Tenim:

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= \alpha(h(t)), \\
\dot{\beta}(t) &= \alpha'(h(t)) \cdot \dot{h}(t), \\
\ddot{\beta}(t) &= \alpha''(h(t)) \cdot (\dot{h}(t))^2 + \alpha'(h(t)) \cdot \ddot{h}(t), \\
\dddot{\beta}(t) &= \alpha'''(h(t)) \cdot (\dot{h}(t))^3 + 3\alpha''(h(t)) \cdot \dot{h}(t) \cdot \ddot{h}(t) + \alpha'(h(t)) \cdot \dddot{h}(t).
\end{aligned}$$

Ara, $\det(\dot{\beta}(t), \ddot{\beta}(t), \dddot{\beta}(t))$ es calcula substituint les expressions de l'equació anterior i descartant aquells determinants amb derivades repetides:

$$\det(\dot{\beta}(t), \ddot{\beta}(t), \dddot{\beta}(t)) = (\dot{h}(t))^6 \cdot \det(\alpha', \alpha'', \alpha''') \text{ i } \|\dot{\beta}(t) \times \ddot{\beta}(t)\|^2 = (\dot{h}(t))^6 \cdot \|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|^2,$$

on $s = h(t)$. Llavors, és suficient provar la fórmula per la corba α parametritzada per l'arc. En aquest cas, tenim, per les fórmules de Frenet:

$$\begin{aligned}
\|\alpha' \times \alpha''\| &= \|\alpha''\| = k_\alpha, \\
\alpha'' &= k_\alpha \cdot N_\alpha, \\
\alpha''' &= k'_\alpha \cdot N_\alpha + k'_\alpha \cdot N_\alpha + k_\alpha(-k_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha).
\end{aligned}$$

Per tant:

$$\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \det(T_\alpha, k_\alpha N_\alpha, k_\alpha \tau_\alpha B_\alpha) = k_\alpha^2 \tau_\alpha \cdot \underbrace{\det(T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha)}_{1} = k_\alpha^2 \tau_\alpha.$$

I, finalment:

$$\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} = \frac{k_\alpha^2 \tau_\alpha}{k_\alpha^2} = \tau_\alpha.$$

Pel que fa la curvatura, és senzill si tenim en compte tot l'anterior. Per una banda:

$$\|\dot{\beta}(t)\|^3 = |\dot{h}(t)|^3 \cdot \underbrace{\|\alpha'(h(t))\|^3}_{1} = |\dot{h}(t)|^3.$$

Per l'altra, hem de fer el càlcul de $\|\dot{\beta}(t) \times \ddot{\beta}(t)\|$, que és més farragós. En aquest càlcul, caldrà tenir en compte que $\alpha'(s) \times \alpha''(s) = \alpha''(s)$ i $\alpha'(s) \times \alpha'(s) = 0$, per a tot $s \in I$.

$$\begin{aligned}\|\dot{\beta}(t) \times \ddot{\beta}(t)\| &= \|\alpha'(h(t)) \cdot \dot{h}(t) \times (\alpha''(h(t)) \cdot (\dot{h}(t))^2 + \alpha'(h(t)) \cdot \ddot{h}(t))\| \\ &= \|(\dot{h}(t))^3 \cdot (\alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t)) + \dot{h}(t) \cdot \ddot{h}(t) \cdot (\alpha'(h(t)) \times \alpha'(h(t)))\| \\ &= |\dot{h}(t)|^3 \cdot \|\alpha''(h(t))\| = |\dot{h}(t)|^3 \cdot k_{\alpha \circ h}(t) = |\dot{h}(t)|^3 \cdot k_\beta(t).\end{aligned}$$

El quocient entre aquestes dues quantitats és el resultat que buscàvem:

$$\frac{\|\dot{\beta}(t) \times \ddot{\beta}(t)\|}{\|\dot{\beta}(t)\|^3} = \frac{|\dot{h}(t)|^3 \cdot k_\beta(t)}{|\dot{h}(t)|^3} = k_\beta(t). \qquad \blacksquare$$

Exercici 1.6.21. *Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba 2-regular parametritzada per l'arc. Proveu que $\alpha(I)$ està continguda en un pla si, i només si, $\tau_\alpha(s) = 0$ per a tot $s \in I$.*

Demostració. Suposem $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba 2-regular parametritzada per l'arc, $\alpha(I)$ està continguda en un pla. Provarem que $\tau_\alpha(s) = 0$ per a tot $s \in I$. En efecte, podem prendre el pla $\pi := \{z = 0\}$ sense pèrdua de generalitat, pel que $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), 0)$. Posem $N(s)$ el normal, $B(s)$ el binormal i $T(s)$ el tangent.

$$\tau(s) = \langle B(s), N'(s)\rangle = -\langle B'(s), N(s)\rangle = -\langle 0, N(s)\rangle = 0.$$

En la segona igualtat hem usat que $\langle B, N\rangle = 0$; en la tercera, que $\pi = \langle T, N\rangle$. Recíprocament, $B' = -\tau \cdot N = -0 \cdot N$ pel que B és constant. Sigui $f(s) = \langle B(s), \alpha'(s) - \alpha_0\rangle$, $s_0 \in t$ i $\alpha_0 = \alpha(s_0)$. Aleshores, $f'(s) = \langle B'(s), \alpha'(s) - \alpha_0\rangle + \langle B(s), \alpha'(s)\rangle = 0 + 0 = 0$, pel que $f(s)$ també és constant. Com $f(s)$ és constant i $f(s_0) = 0$, aleshores $f \equiv 0$ i l'equació del pla $\langle B(s), \alpha'(s) - \alpha_0\rangle = 0$ per a tot $s \in I$. En altres paraules, $\langle v, x - p\rangle$, per a $p, v \in \mathbb{R}^3$. $\blacksquare$

1.7 Teorema fonamental de les corbes en l'espai

Definició 1.7.1 (Desplaçament d'un espai euclidià). Un desplaçament d'un espai euclidià $\mathbb{R}^n$ és una isomeria afí, és a dir, una aplicació $D : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de forma que $D(x) = Ax + b$, on $b \in \mathbb{R}^n$ és un punt qualsevol i A una matriu $n \times n$ ortogonal (és a dir, tal que $A \cdot A^T = Id$. Un desplaçament D és *directe* o *positiu* si $\det(D) = 1$.

Observació 1.7.2. La tensió i la curvatura per canvi de paràmetre o per composició amb un desplaçament de l'espai varien de la manera descrita per la taula següent:

Composició	Curvatura $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$	Curvatura $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$	Torsió $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$\gamma = \beta \circ h$, h positiu	$k_\gamma(h(t)) = k_\beta(t)$	$k_\gamma(h(t)) = k_\beta(t)$	$\tau_\gamma(h(t)) = \tau_\beta(t)$
$\gamma = \beta \circ g$, g negatiu	$k_\gamma(g(t)) = k_\beta(t)$	$k_\gamma(g(t)) = k_\beta(t)$	$\tau_\gamma(g(t)) = \tau_\beta(t)$
$\delta = F \circ \beta$, F ortogonal directe	$k_\delta(t) = k_\beta(t)$	$k_\delta(t) = k_\beta(t)$	$\tau_\delta(t) = \tau_\beta(t)$
$\delta = G \circ \beta$, G ortogonal invers	$k_\delta(t) = k_\beta(t)$	$k_\delta(t) = k_\beta(t)$	$\tau_\delta(t) = -\tau_\beta(t)$

Taula 1.1: Corba parametritzada per l'arc.

En aquesta taula:

1. A la primera columna, $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és una corba plana 1-regular. A la segona i tercera columnes, $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una corba a l'espai 2-regular.
2. h, g són difeomorfismes (canvis de variable).
3. $F(x) = Ax + B$, on A és una matriu ortogonal i $\det(A) > 0$, $G(x) = Bx + b$ on B és una matriu ortogonal i $\det(B) < 0$.

Proposició 1.7.3. *Sigui $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba 2-regular. Sigui $F(x) = A(x) + b$ un desplaçament positiu. Aleshores, si $\gamma = F \circ \beta$ tenim que $k_\gamma(t) = k_\beta(t)$ i $\tau_\gamma(t) = \tau_\beta(t)$.*

Demostració. Considerarem $\gamma = F \circ \beta$ i provarem que $\tau_\gamma(t) = \tau_\beta(t)$, per a tot t. Idealment voldrem aplicar la fórmula (1.2), així que provarem que $\|\dot\gamma(t)\| = \|\dot\beta(t)\|$ i $\|\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)\| = \|\dot\beta(t) \times \ddot\beta(t)\|$. En efecte:

$$\|\dot\gamma(t)\| = \|A \cdot \dot\beta(t)\| \xrightarrow[\text{es preserven normes}]{A \text{ ortogonal}} \|\dot\beta(t)\|.$$

$$\|\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)\| = \|A \cdot \dot\beta(t) \times A \cdot \ddot\beta(t)\| = \|A(\dot\beta(t) \times \ddot\beta(t))\| = \|\dot\beta(t) \times \ddot\beta(t)\|$$

$$\det(\gamma'(t), \ddot\gamma(t), \dddot\gamma(t)) = \det(A\dot\beta, A\ddot\beta, A\dddot\beta) = \det A \cdot \det(\dot\beta, \ddot\beta, \dddot\beta) = \det(\dot\beta(t), \ddot\beta(t), \dddot\beta(t)).$$

Per tant, $\tau_\gamma(t) = \tau_\beta(t)$, com volíem. Com que $\|\dot\gamma(t)\| = \|\dot\beta(t)\|$ i $\|\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)\| = \|\dot\beta(t) \times \ddot\beta(t)\|$, $k_\gamma(t) = k_\beta(t)$ queda provat via (1.1). ■

Definició 1.7.4 (Corbes congruents). Siguin $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dues corbes. Es diu que α, β són congruents si existeix un desplaçament $D : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\beta = D \circ \alpha$.

Definició 1.7.5 (Corbes positivament congruents). Diem que α, β són positivament congruents si es desplaçament D és positiu.

Teorema 1.7.6 (Teorema fonamental de les corbes en l'espai). *Sigui $I \longrightarrow \mathbb{R}$ un interval obert. Siguin $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables tals que $f(s) > 0$ per a tot $s \in I$. Existeix una corba parametritzada per l'arc $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que satisfà $k_\alpha(s) = f(s)$ i $\tau_\alpha(s) = g(s)$ per a tot $s \in I$. A més, α és única llevat de congruències positives (composició amb un desplaçament positiu o directe de $\mathbb{R}^3$, $x \longmapsto Ax + b$, $A \cdot A^t = Id$ i $\det A > 0$).*

Demostració. Aplicarem el teorema d'existència i unicitat de solucions d'EDOS. Siguin α, β dues corbes congruents. Sigui $s_0 \in I$. Considerem el sistema que surt de les fórmules de Frenet:

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & -f & 0 & g \\ 0 & 0 & -g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ T \\ N \\ B \end{pmatrix}, \ \alpha, T, N, B : I \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Les condicions inicials són:

$$\alpha(s_0) = (0,0,0), \quad T(s_0) = (1,0,0), \quad N(s_0) = (0,1,0), \quad B(s_0) = (0,0,1).$$

Com que és un sistema d'EDOS lineal, existeix una solució única α, T, N, B definida per a tot $s \in I$ i que verifica la condició inicial. Vegem que per a tot $s \in I$, $(T(s), N(s), B(s))$ és la base ortonormal directa.

$$\langle T, T\rangle' = 2\langle T', T\rangle = 2f\langle T, N\rangle$$
$$\langle N, T\rangle' = 2\langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = -f\langle T, T\rangle + g\langle B, T\rangle + f\langle N, N\rangle.$$

Calculant el producte escalar del tangent amb ell mateix i derivem, i el mateix amb $\{N, T\}$, $\{P, T\}$ i totes les combinacions possibles obtenim el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} \langle T,T\rangle' \\ \langle T,N\rangle' \\ \langle B,B\rangle' \\ \langle B,T\rangle' \\ \langle B,N\rangle' \\ \langle N,T\rangle' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2g & 2f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & -g \\ 0 & -g & g & -f & 0 & 0 \\ -f & f & 0 & g & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle T,T\rangle \\ \langle T,N\rangle \\ \langle B,B\rangle \\ \langle B,T\rangle \\ \langle B,N\rangle \\ \langle N,T\rangle \end{pmatrix}$$

Els productes escalars són solució del sistema amb condició inicial:

$$\begin{pmatrix} \langle T,T\rangle \\ \langle T,N\rangle \\ \langle B,B\rangle \\ \langle B,T\rangle \\ \langle B,N\rangle \\ \langle N,T\rangle \end{pmatrix}_{s=s_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Això és perquè per a $s = s_0$ (condició inicial) tenim $\langle T, T\rangle = \langle T, N\rangle = \langle B, B\rangle = 1$ i els tres restants són ortogonals amb els anteriors un a un pel que el producte escalar val zero. Considerem ara la funció:

$$\varphi : s \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \forall s \in I.$$

també és solució, amb la mateixa condició inicial. Per la unicitat de la solució, el vector $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ correspon al $\begin{pmatrix}\langle T,T\rangle\\\langle T,N\rangle\\\langle B,B\rangle\\\langle B,T\rangle\\\langle B,N\rangle\\\langle N,T\rangle\end{pmatrix}$. En qualsevol cas, acabem de demostrar que $(T(s),N(s),B(s))$ és base ortonormal per a tot $s\in I$. Per continuïtat del determinant, ha de ser base ortogonal directa[6]. D'aquí, considerem la corba de l'enunciat:

$$\begin{aligned}\alpha: \ I &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ s &\longmapsto \alpha(s)\end{aligned}$$

Podem deduir el següent:

1. $\alpha'(s)=T(s)$ pel que $\|\alpha'(s)\|=\|T(s)\|$ i com $\|T(s)\|=1$ α està parametritzada per l'arc.
2. Com que $\alpha'(s)=T(s)$, $\alpha''(s)=T'(s)=f(s)\cdot N(s)$ i $\|N(s)\|=1$. Tenim que $f(s)=k_\alpha(s)$ i per tant α és 2-regular.
3. Volem acabar calculant $\tau_\alpha=\frac{\det(\alpha',\alpha'',\alpha''')}{k_\alpha^2}$. Com que α,T,N,B és solució del sistema inicial, tenim:

$$\alpha'''=(f\cdot N)'=f'N+fN'=f'N+f(-fT+gB)\implies \tau_\alpha=\frac{\det(\alpha',\alpha'',\alpha''')}{k_\alpha^2}=\frac{f^2\cdot g}{f^2}=g.$$

Ara hem de provar *unicitat*. Suposem $\tilde{\alpha}:I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ una altra corba 2-regular, parametritzada per l'arc tal que $k_{\tilde{\alpha}}=f$ i $\tau_{\tilde{\alpha}}=g$. Prenem (T_0,N_0,B_0) el triedre de Frenet de α en s_0 i $(\tilde{T}_0,\tilde{N}_0,\tilde{B}_0)$ el triedre de Frenet de $\tilde{\alpha}$ en s_0. Com que (T_0,N_0,B_0) i $(\tilde{T}_0,\tilde{N}_0,\tilde{B}_0)$ són bases ortonormals directes, existeix un desplaçament positiu de l'espai afí (desplaçament directe) $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tal que $F(\tilde{T}_0)=T_0$, $F(\tilde{N}_0)=N_0$ i $F(\tilde{B}_0)=B_0$, de manera que $F(\tilde{\alpha}(s_0))=(0,0,0)=F(\alpha(s_0))$. Sigui ara $\hat{\alpha}=F\circ\tilde{\alpha}$; podem assegurar que $k_{\hat{\alpha}}=k_{\tilde{\alpha}}=f=k_\alpha$ i $\tau_{\hat{\alpha}}=\tau_{\tilde{\alpha}}=g=\tau_\alpha$. Per tant, per les fórmules de Frenet $(\hat{\alpha},\hat{T},\hat{N},\hat{B})$ és solució del mateix sistema que verificava α amb la mateixa condició inicial $((0,0,0),T(s_0),N(s_0),B(s_0))$:

$$\alpha(s)=\hat{\alpha}(s)=(F\circ\tilde{\alpha})(s)=F(\tilde{\alpha}(s)).$$ ■

[6] Amb això volem dir que, I és un connex. $s\longmapsto\det(T(s),N(s),B(s))$, però el determinant és una funció contínua i no pot passar de manera contínua del -1 al 1 o viceversa. Per tant, o bé $\det(T(s),N(s),B(s))$ o bé $\det(T(s),N(s),B(s))=-1$. Com en la condició inicial $s=s_0$, $\det(T(s_0),N(s_0),B(s_0))=1$, aleshores $\det(T(s),N(s),B(s))=1$, per a tot $s\in I$.

Exercici 1.7.7. *Provar el teorema fonamental de les corbes planes, donat un interval $I \subset \mathbb{R}$ i una funció diferenciable $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, existeix una corba plana diferenciable, parametritzada per l'arc tal que $k_\alpha(s) = f(s)$. Aquesta corba és única llevat de composició amb un desplaçament directe.*

Observació 1.7.8. Els únics invariants de congruències positives de corbes 2-regulars en $\mathbb{R}^3$ són la curvatura i la torsió. Qualsevol altre invariant es pot expressar com a funció de la curvatura i la torsió.

Proposició 1.7.9. *Sigui $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Sigui $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una aplicació diferenciable. Donat $t_0 \in I$ i una matriu $X_0 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, existeix una única aplicació diferenciable $X : I \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tal que:*

$$X'(t) = X(t)A(t) \text{ i } X(t_0) = X_0.$$

II

Superfícies

2.1 Conceptes previs

Definició 2.1.1 (Superfície parametritzada). Sigui $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ un obert no trivial. Anomenarem superfície parametritzada a $\mathbb{R}^3$ a una aplicació *diferenciable* $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$[1]. S'anomena traça de φ al conjunt $\varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$.

Notació 2.1.2. Tindrem que $\varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))$.

Definició 2.1.3 (Superfície regular). Direm que una superfície parametritzada $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és regular en un punt $\alpha = (u,v) \in \mathcal{U}$ si la matriu:

$$d_\alpha(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}_{|\alpha}$$

té rang 2. Direm que φ és regular si ho és per a tot $\alpha \in \mathcal{U}$.

Definició 2.1.4 (Espai vectorial tangent). Sigui una superfície parametritzada $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regular en un punt $\alpha = (u,v) \in \mathcal{U}$. En aquest cas, el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\langle \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right), \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right) \right\rangle$$

és de dimensió dos i l'anomenarem *espai vectorial tangent a φ en $\alpha \in \mathcal{U}$* i el denotarem per $T_\alpha(\varphi)$. Abreujarem notació posant:

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} := \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right), \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} := \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right).$$

Anomenarem *pla tangent* a φ en α al pla afí $\varphi(\alpha) + T_\alpha(\varphi)$.

Observació 2.1.5. Val la pena comentar les diferències amb corbes en l'espai. Podem definir $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $t \longmapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$. Si volem derivar, en el cas de superfícies tenim la matriu diferencial $d_\alpha(\varphi)$, mentre que en corbes aquest $(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t))$ és simplement un vector.

Exemple 2.1.6.

[1] O sigui que per provar que una superfície φ és parametritzada en tindrem prou amb demostrar que φ és diferenciable en $\mathcal{U}$.

1. Siguin $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ linealment independents i un punt $p \in \mathbb{R}^3$. Prenem la superfície:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & p + u\vec{x} + v\vec{y} \end{array} \qquad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3),\ \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \text{ i } p = (p_1, p_2, p_3).$$

Per comprovar que és regular, amb les notacions preses $\varphi(u,v)$ queda com:

$$\varphi(u,v) = (p_1 + ux_1 + vy_1, p_2 + ux_2 + vy_2, p_3 + ux_3 + vy_3) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

En $\alpha = (u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$d_\alpha(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix},\ \operatorname{rang}(d_\alpha(\varphi)) = 2.$$

Per a tot $\alpha = (u,v) \in \mathbb{R}^2$ el pla tangent és $\varphi(\alpha) + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

2. La superfície:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (R\cos u \cos v, R\sin u \cos v, R\sin v) \end{array}$$

és una parametrització d'una part de $\mathbb{S}^2$. *Exercici*: el cas $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$ no és regular.

Demostració. Com φ és parametritzada, podem calcular el diferencial $d_\alpha(\varphi)$, que resulta:

$$d_\alpha(\varphi) = \begin{pmatrix} -R\sin u \cos v & -R\sin u \sin v \\ R\cos u \cos v & -R\sin u \sin v \\ 0 & R\cos v \end{pmatrix},$$

i $\operatorname{rang}(d_\alpha(\varphi)) < 2$ si tots els menors s'anul·len, és a dir, $R^2 \sin^2 u \sin v \cos v + R^2 \cos^2 v \sin v \cos v = R^2 \sin v \cos v = R^2 \cos u \cos^2 v = -R^2 \sin u \cos^2 v = 0$. Podem trobar valors d'$u, v$ que compleixin totes aquestes igualtats; per exemple, $u \in \mathbb{R}, v = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. ∎

3. Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba 1-regular, I un interval obert. Es defineix una superfície de la següent manera:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & I \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v) := \alpha(u) + v\alpha'(u) \end{array}$$

En quins punts és regular? Certament no ho és si $v = 0$. En efecte, si calculem la matriu diferencial de $\varphi(u,v) = (\alpha_1(u) + v\alpha_1'(v), \alpha_2(u) + v\alpha_2'(v), \alpha_3(u) + v\alpha_3'(v))$:

$$d_\alpha(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1'(u) + v\alpha_1''(u) & \alpha_1'(u) \\ \alpha_2'(u) + v\alpha_2''(u) & \alpha_2'(u) \\ \alpha_3'(u) + v\alpha_3''(u) & \alpha_3'(u) \end{pmatrix}$$

Si $v \neq 0$, la superfície és regular en (u,v) si $\{\alpha'(u), \alpha''(u)\}$ són linealment independents (2-regular).

4. *Gràfica de la funció*: Sigui $h : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(u,v) \longmapsto h(u,v)$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ un obert diferenciable. Aleshores, la *gràfica* de h és:

$$\Gamma_h = \{(u,v,h(u,v)) \bigm| (u,v) \in \mathcal{U}\}, \qquad \begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{U} & \longrightarrow & T_h' \subset \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u,v,h(u,v)) \end{array}$$

És regular perquè:

$$d_\alpha(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Amb aquesta parametrització podem construir diverses superfícies rellevants:

- Paraboloide el·líptic: Γ_h per a $h(u,v) = (\frac{u}{a})^2 + (\frac{v}{b})^2$.
- Paraboloide hiperbòlic: Γ_h per a $h(u,v) = (\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2$.
- Volcà: Γ_h per a $h(u,v) = -(u^2+v^2-3)^2$.
- Teulades de les escoles de Gaudí: Γ_h per a $h(u,v) = v\sin u$.
- *Monkey saddle*: Γ_h per a $h(u,v) = u^3 - 3uv^2$.

De la gràfica d'una funció en podem fer el pla tangent:

$$\left.\begin{array}{rccc} h : & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & h(u,v) \\ \varphi : & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u,v,h(u,v)) \end{array}\right\} \Longrightarrow T_{\alpha_0}(\varphi) = \left\langle \left(1,0,\frac{\partial h}{\partial u}\right), \left(0,1,\frac{\partial h}{\partial v}\right) \right\rangle |_{\alpha_0}.$$

I el pla afí resulta ser $(u_0, v_0, h(u_0,v_0)) + \lambda(1,0,\frac{\partial h}{\partial v}) + \mu(0,1,\frac{\partial h}{\partial v})$. En forma implícita:

$$z - h(u_0,v_0) = \frac{\partial h}{\partial u}|_{\alpha_0}(x-u_0) + \frac{\partial h}{\partial v}|_{\alpha_0}(y-v_0).$$

Prenent la parametrització anterior, demanem el següent:

Exercici 2.1.7. *Calcular amb aquesta definició el pla tangent a:*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

2.2 Superfícies regulars i parametritzades

Recordem la definició de superfície regular.

Definició 2.2.1 (Superfície regular)**.** Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$. Diem que S és una superfície regular si per a cada $p \in S$ existeix un obert $\mathcal{W} \subset S$, $p \in \mathcal{W}$, un obert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ i una aplicació $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

1. $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{W}$ i $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{W}$ és un homeomorfisme.

2. Per a tot $\alpha \in \mathcal{U}$, la matriu $d_\alpha(\varphi)$ té rang 2 en α.

Definició 2.2.2 (Carta coordenada). Sigui S una superfície parametritzada localment regular amb $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{W}$ un homeomorfisme i $\operatorname{rang}(d_\alpha(\varphi)) = 2$. Direm que $(\mathcal{W}, \varphi)$ és una *carta coordenada* de S (o també que $(\mathcal{W}, \mathcal{U}, \varphi)$ és carta coordenada). També que $\mathcal{W}$ és un entorn coordenat de p.

Exemple 2.2.3.

1. *Gràfiques de funcions*: són superfícies regulars amb una carta coordenada única:

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{U}\}. \qquad \begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (u, v, f(u, v)) \end{array}$$

2. Sigui $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ l'esfera unitat i siguin $\mathcal{W}_z^+ = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, y, z) \mid z > 0\}$ i $\mathcal{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ dos oberts. Aleshores, podem definir una aplicació $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_z^+ : & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{W}_z^+ \\ & (u, v) & \longmapsto & (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} (\varphi_z^+)^{-1} : & \mathcal{W}_z^+ & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ & (u, v, w) & \longmapsto & (u, v) \end{array}$$

$$d_\alpha(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial\sqrt{1-u^2-v^2}}{\partial u} & \frac{\partial\sqrt{1-u^2-v^2}}{\partial v}. \end{pmatrix}$$

En definitiva, $(\mathcal{W}_z^+, \varphi_z^+)$ descriu una carta. Anàlogament, podem definir les cartes

$$(\mathcal{W}_z^-, \varphi_z^-), (\mathcal{W}_x^+, \varphi_x^+), (\mathcal{W}_x^-, \varphi_x^-), (\mathcal{W}_y^+, \varphi_y^+), (\mathcal{W}_y^-, \varphi_y^-).$$

I amb totes aquestes, ja hem recobert l'esfera.

Observació 2.2.4 (Atles). No podem crear una única carta que recobreixi tota l'esfera ja que, per exemple, això voldria dir que $\mathcal{U} \simeq \mathbb{S}^2$ (un obert, que mai és compacte, és isomorf a un compacte, contradicció). En total, tenim diverses cartes que recobreixen una esfera (a aquest conjunt de cartes s'anomena *atles*).

Si volem ho podem recobrir amb menys cartes:

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\},\ \pi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}.$$

Com a exercici, escriure $\varphi_N = \pi_N^{-1}$ en coordenades i provar que $\forall \alpha \in \mathbb{R}^2$, $d_\alpha(\varphi_N)$ és de rang 2.

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\},\ \pi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}.$$

Observació 2.2.5. Les condicions *1.* i *2.* de 2.2.1 diuen que $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una superfície regular on φ és injectiva. Sovint, tindrem una equació $f(x, y, z) = 0$ i ens preguntarem si el conjunt $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$ és una superfície regular. En aquest sentit, el següent criteri ens serà molt útil.

Teorema 2.2.6 (Criteri del gradient)**.** *Sigui $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ un obert, sigui $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Denotem per $S = \{(x, y, z) \in \mathcal{U} \mid f(x, y, z) = 0\}$. Si per a cada $p \in \mathcal{U}$ es compleix que el gradient[2] $\nabla f(p) \neq 0$, aleshores S és una superfície regular.*

Demostració. Sigui $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$, $\nabla f(p) \neq (0, 0, 0)$. Suposem, per exemple, que $\frac{\partial f}{\partial z}|_p \neq 0$. Pel teorema de la funció implícita existeix un entorn obert $\mathcal{U}'$ de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, un entorn obert de $\mathcal{W}'$ de p en $\mathbb{R}^3$ i una funció diferenciable $g : \mathcal{U}' \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que:

$$\mathcal{W}' \cap S = \{(x, y, g(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{U}'\} \quad \text{i} \quad \begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{U}' & \longrightarrow & \mathcal{W}' \\ & (x, y) & \longmapsto & (x, y, g(x, y)) \end{array}$$

és un difeomorfisme. En particular, que φ sigui difeomorfisme vol dir que és un homeomorfisme i el seu diferencial $d_\alpha(\varphi)$ és de rang 2 per a cada $(x, y) \in \mathcal{U}'$. I si $i : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és la inclusió, el diferencial $d_\alpha(i \circ \varphi)$ té rang 2. Aleshores tenim una corba que conté al punt p i com es pot fer per a tot p, la superfície és regular. ■

Exemple 2.2.7. Sigui l'expressió $x^n + y^n + z^n = 1$, $n \geq 1$, descrita pel conjunt $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^n + y^n + z^n - 1 = 0\}$. Per tant, definim:

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \longmapsto & x^n + y^n + z^n - 1 \end{array}$$

Imposem $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$ (entre d'altres, p no pot ser l'origen de coordenades). Aleshores, $\nabla f(p) = (nx_0^{n-1}, ny_0^{n-1}, nz_0^{n-1}) \neq (0, 0, 0)$. Com el gradient és no nul, S és superfície regular.

Teorema 2.2.8. *Sigui $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superfície parametritzada, regular en $\alpha \in \mathcal{U}$. Existeix un entorn obert $\mathcal{V}$ d'α, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, un entorn obert $\mathcal{W}$ de $\varphi(\alpha)$ en $\mathbb{R}^3$ i una aplicació diferenciable $\rho : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}$ tals que $\rho \circ \varphi_{\mathcal{V}} = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$.*

Demostració. Posem $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, definim $\varphi_u = (\frac{\varphi_1}{\partial u}, \frac{\varphi_2}{\partial u}, \frac{\varphi_3}{\partial u})$ i $\varphi_v = (\frac{\varphi_1}{\partial v}, \frac{\varphi_2}{\partial v}, \frac{\varphi_3}{\partial v})$. Sigui $\alpha = (u_0, v_0) \in \mathcal{U}$.

$$d_\alpha(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}_{|\alpha}, \ \mathrm{rang}(d_\alpha(\varphi)) = 2 \iff \varphi_u, \varphi_v \text{ són linealment independents.}$$

[2] Recordem que el gradient és $\mathrm{grad}(f) = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$.

Suposem que el menor format per les dues primeres files té determinant no nul (si fos nul, canviem l'ordre de les coordenades a $\mathbb{R}^3$). Considerem:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{U}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v,t) & \longmapsto & \varphi(u,v)+(0,0,t) \end{array}$$

Aquesta aplicació és diferenciable i el seu diferencial en el punt $(u_0,v_0,0)$ és:

$$d_\alpha(\varphi)(u_0,v_0,0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} & 1 \end{pmatrix}_{|\alpha} \Longrightarrow \det(d_\alpha(\varphi)(u_0,v_0,0))\neq 0 \iff \operatorname{rang}(d_\alpha(\varphi)(u_0,v_0,0))=3.$$

Pel teorema de la funció inversa (que podem aplicar perquè hem verificat que $\det(d_\alpha(\varphi))\neq 0$), existeixen un entorn obert $\mathcal{V}'$ de $(u_0,v_0,0)\in\mathcal{U}\times\mathbb{R}$ i un entorn obert $\mathcal{W}'$ de $F(u_0,v_0,0)$ a $\mathbb{R}^3$ tals que:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{V}' & \longrightarrow & \mathcal{W}' \\ & \beta & \longmapsto & F(\beta) \end{array}$$

és un difeomorfisme (diferenciable amb inversa diferenciable). Sigui $\pi:\mathcal{U}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{U}$ la projecció, posem $\tau=\pi\circ F^{-1}:\mathcal{W}'\longrightarrow\mathcal{U}$. τ és diferenciable i si $(u,v)\in\pi(\mathcal{V}'\cap(\mathcal{U}\times\{0\}))$ tenim que:

$$\tau(\varphi(u,v))=\pi\circ F^{-1}(\varphi(u,v))=(u,v).$$

És suficient prendre $\mathcal{V}=\mathcal{V}'\cap(\mathcal{U}\times\{0\})$, $\mathcal{W}=\tau^{-1}(\mathcal{V})$ i $\rho=\tau_{\mathcal{W}}$. ■

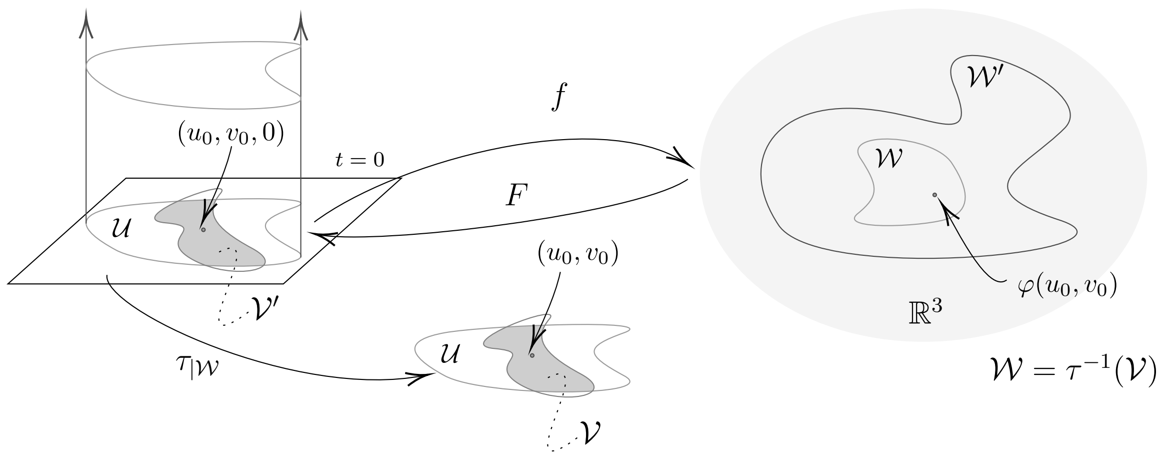


Figura 2.1: Teorema anterior, 2.2.8.

Teorema 2.2.9. *Siguin $\varphi:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $\psi:\mathcal{V}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ dues cartes d'una superfície regular S. Suposem $\varphi(\mathcal{U})\cap\psi(\mathcal{V})\neq\emptyset$. Aleshores, l'aplicació de canvi de coordenades:*

$$\begin{array}{rccc} h: & \varphi^{-1}(\psi(\mathcal{V})) & \longrightarrow & \psi^{-1}(\varphi(\mathcal{U})) \\ & x & \longmapsto & \psi^{-1}(\varphi(x)) \end{array}$$

és un difeomorfisme.

Demostració. Clarament és bijectiva. Provarem que és diferenciable (que $h^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi$ ho és resulta del mateix argument). Sigui $\alpha \in \varphi^{-1}(\psi(\mathcal{V}))$, sigui $\beta \in \mathcal{V}$ amb $\psi(\beta) = \varphi(\alpha)$. Per 2.2.8, existeix un entorn obert $\mathcal{W}$ de $\psi(\beta)$ en $\mathbb{R}^3$ i una aplicació diferenciable $\rho : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ tals que $\beta \in \mathcal{V}'$ i $\rho \circ \psi_{|\mathcal{V}'} = \mathrm{id}_{\mathcal{V}'}$. Si prenem $\mathcal{U}' = \varphi^{-1}(\mathcal{W} \cap \varphi(\mathcal{U}))$ tenim que $\alpha \in \mathcal{U}'$ i sobre els punts d'$\mathcal{U}'$, $h = \psi^{-1} \circ \varphi = \rho \circ \varphi$ que, en ser composició d'aplicacions diferenciables és també diferenciable. ■

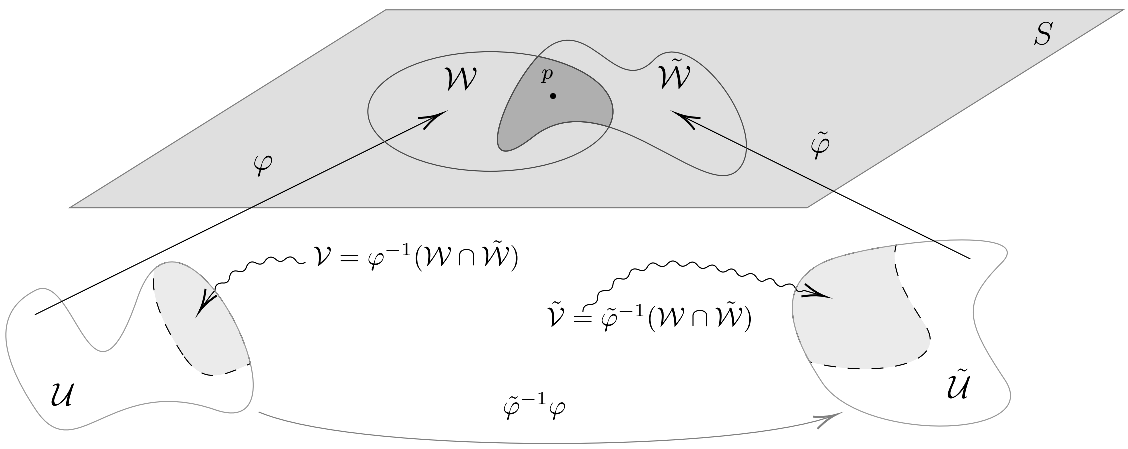


Figura 2.2: Representació gràfica del teorema anterior, 2.2.9.

Observació. Anteriorment hem vist que si $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $\psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ són cartes de S una superfície regular, aleshores $\psi \circ \varphi^{-1}$ és un difeomorfisme.

Per poder tenir una definició del pla tangent a una superfície regular en un punt que *no depengui de la carta triada*, provarem la proposició següent.

Proposició 2.2.10. *Sigui S una superfície regular, sigui $p \in S$. Sigui $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ carta de S tal que $p = \varphi(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{U}$. Sigui $\psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ carta de S tal que $p = \psi(\beta)$. Aleshores, $T_\alpha(\varphi) = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_{|\alpha} = T_\beta(\psi)$.*

Demostració. Per 2.2.9, sobre $\mathcal{U} \cap \varphi^{-1}(\psi(\mathcal{V}))$ tenim que $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ és un difeomorfisme, a més, $h(\alpha) = \beta$. Per les matrius diferencials (o jacobianes) tenim $\psi \circ h = \varphi$ pel que

$$\left.\begin{array}{r} d_\alpha(\psi \circ h) = d_\alpha(\varphi) \\ d_\alpha(\psi \circ h) = d_{h(\alpha)}(\psi) \circ d_\alpha(h) = d_\beta(\psi) \circ d_\alpha(h) \end{array}\right\} \Longrightarrow d_\alpha(\varphi) = d_\beta(\psi) \circ \underbrace{d_\alpha(h)}_{\text{invertible}}$$

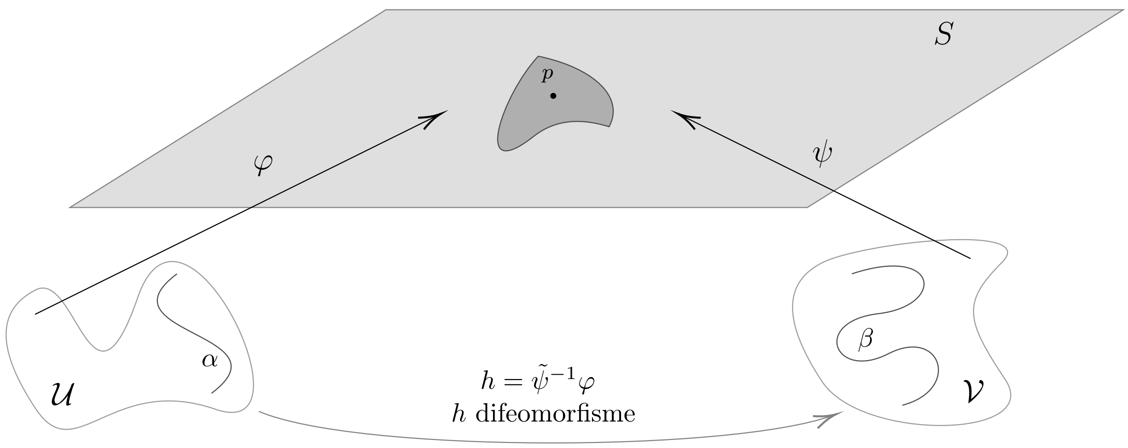


Figura 2.3: Representació gràfica de la demostració, 2.2.10.

Hem usat que h és difeomorfisme per afirmar que $d_\alpha(h)$ és invertible. I $T_\alpha(\varphi) = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_{|\alpha}$ i $T_\beta(\psi) = \langle \psi_x, \psi_y \rangle_{|\beta}$. Per tant, les columnes de la matriu $d_\alpha(\varphi)$ que les columnes de $d_\beta(\psi)$. ∎

Exemple 2.2.11. Si tenim $A, B, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrius, amb P invertible, $A = B \cdot P$, aleshores $\langle$columna d'$A\rangle = \langle$columna de $B\rangle$.

Definició 2.2.12 (Pla tangent a una superfície). Sigui S una superfície regular, $p \in S$ i $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ carta de S amb $p = \varphi(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{U}$. L'espai tangent a S en p és, per definició, l'espai vectorial $T_p(s) := T_\alpha(\varphi)$. Val a dir que $T_p(S)$ queda definit com un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió 2 generat per la $\mathbb{R}$-base $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$. Anomenarem *pla tangent a S en p* al pla afí $p + T_p(S)$.

Exemple 2.2.13. Suposem que $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$ és una superfície regular, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció afí. Sigui $p = (u_0, v_0, z_0) \in S$ tal que $\nabla f(p) \neq 0$; suposem, per exemple, que $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Vam veure que el teorema de la funció implícita ens dona una parametrització local d'un entorn de p del tipus:

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u,v,g(u,v)) \end{array}$$

Aleshores, tenim que $T_p(S) = T_{(u_0,v_0)}(\varphi)$. Això és el mateix que l'espai generat per $(1, 0, \frac{\partial g}{\partial u})_{|(u_0,v_0)}$ i $(0, 1, \frac{\partial g}{\partial v})_{(u_0,v_0)}$, que denotarem per φ_u, φ_v respectivament i $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_{|(u_0,v_0)}$. Com per a tot $(u,v) \in \mathcal{U}$ tenim que $f(u,v,g(u,v)) = 0$, pel que

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial u}_{|(u_0,v_0)} & \Longleftrightarrow & \nabla f(p) \cdot \varphi_u(u_0,v_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial v}_{|(u_0,v_0)} & \Longleftrightarrow & \nabla f(p) \cdot \varphi_v(u_0,v_0) = 0 \end{array}$$

Per tant, $\langle \varphi_{u|(u_0,v_0)}, \varphi_{v|(u_0,v_0)} \rangle = \langle \nabla f(p) \rangle^\perp$. D'aquí:

$$T_p(S) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla f(p) \cdot (a,b,c) = 0\} = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a\frac{\partial f}{\partial x}|_p + b\frac{\partial f}{\partial y}|_p + c\frac{\partial f}{\partial z}|_p \right\}.$$

Equivalentment, si considerem $\nabla f(p)$ com la matriu d'una aplicació lineal $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, tenim que $T_p(S) = \ker(\nabla f(p))$.

Exemple 2.2.14. Sigui $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2-1=0\}$ una superfície regular, $p_0 = (x_0,y_0,z_0) \in S$. Evidentment, $\nabla f = (2x,2y,2z)$, pel que $T_{p_0}(S) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b,c)\cdot(2x_0,2y_0,2z_0) = 0\}$.

Observació 2.2.15. Existeixen altres definicions equivalents d'espai tangent. Per exemple, en alguns llibres es defineix l'espai tangent a S en p com el conjunt format pels vectors tangents en p de totes les corbes regulars contingudes a S i que passen per p.

2.3 La primera forma fonamental

Definició 2.3.1 (Primera forma fonamental). Sigui S una superfície regular, $p \in S$. Anomenarem primera forma fonamental de S (en p) al producte escalar (forma bilineal, simètrica i definida positiva) en $T_p(s)$ obtingut per restricció del producte escalar usual $\langle\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ a $T_p(S) \times T_p(S)$. La denotarem per $I_p : T_p(S) \times T_p(S) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Notació 2.3.2. Suposem que $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una carta de S, $p = \varphi(u_0,v_0)$. Aleshores, $\{\varphi_u(u_0,v_0), \varphi_v(u_0,v_0)\}$ és una base de $T_p(S)$ i podem considerar la matriu de Gram de I_p en aquesta base que, per abús de notació, denotarem també per I_p:

$$I_p = \begin{pmatrix} \langle\varphi_u,\varphi_u\rangle & \langle\varphi_u,\varphi_v\rangle \\ \langle\varphi_v,\varphi_u\rangle & \langle\varphi_v,\varphi_v\rangle \end{pmatrix}_{|(u_0,v_0)} = \begin{pmatrix} \langle\varphi_u,\varphi_u\rangle & \langle\varphi_u,\varphi_v\rangle \\ \langle\varphi_u,\varphi_v\rangle & \langle\varphi_v,\varphi_v\rangle \end{pmatrix}_{|(u_0,v_0)} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Observem que la primera forma fonamental és intrínseca (no depèn de les cartes que triem), però la matriu de Gram depèn de la tria de coordenades.

Exemple 2.3.3.

1. Si $S = p + u\vec{x} + v\vec{y}$ és un pla, aleshores:

$$\left.\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & p+u\vec{x}+v\vec{y} \end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi_u = \vec{x},\ \varphi_v = \vec{y} \Longrightarrow I_p = \begin{pmatrix} \langle\vec{x},\vec{x}\rangle & \langle\vec{x},\vec{y}\rangle \\ \langle\vec{x},\vec{y}\rangle & \langle\vec{y},\vec{y}\rangle \end{pmatrix}.$$

   Si ho volem posar en termes d'E,F,G: $E = \langle\vec{x},\vec{x}\rangle,\ F = \langle\vec{x},\vec{y}\rangle,\ G = \langle\vec{y},\vec{y}\rangle$.

2. Considerem la parametrització $\varphi(u,v) = (r\cos u\sin v, r\sin u\cos v, r\sin v)$. D'aquí:

$$\left.\begin{array}{r} \varphi_u = (-r\sin u\cos v, r\cos u\cos v, 0) \\ \varphi_v = (-r\cos u\sin v, -r\sin u\sin v, r\cos v) \end{array}\right\} \Longrightarrow E = r^2\cos^2 v,\ F = 0,\ G = r^2.$$

Observació 2.3.4.

1. *Criteri de Sylvester*: Si $I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ tenim que $E > 0$ i $EG - F^2 > 0$.
2. Sigui $h : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ un difeomorfisme. Sigui $\psi = \varphi \circ h$. Definim per M_φ a la matriu de Gram d'I en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ i M_ψ en la base $\{\psi_u, \psi_v\}$. Aleshores, donat $\alpha = (x, y) \in \mathcal{V}$ tenim:
$$d_{(x,y)}(\psi) = d(\varphi \circ h) = d_{h(x,y)}(\varphi) \times d_{(x,y)}(h)$$
La matriu canvi de base entre les bases $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ i $\{\psi_u, \psi_v\}$ és la següent:
$$\mathrm{Jac}(h) = d_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix} \implies M_\psi(\alpha) = d_\alpha h^T \cdot M_\varphi(h(\alpha)) \cdot d_\alpha(h) \equiv \mathrm{Jac}(h)^T M_\varphi \,\mathrm{Jac}(h). \tag{2.1}$$
3. Si tenim una forma bilineal $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\dim E = 2$, prenem una E-base $\{v_1, v_2\}$ i volem passar a una altra base $\{w_1, w_2\}$. Posant:
$$A = \begin{pmatrix} b(v_1, v_1) & b(v_1, v_2) \\ b(v_2, v_1) & b(v_2, v_2) \end{pmatrix},$$
per la regla de canvi de base per a formes bilineals: $B = \mathrm{Jac}(b)^T \cdot A \cdot \mathrm{Jac}(b)$ (2.1).

Proposició 2.3.5. *Suposem que tenim una superfície regular S, sigui $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, carta de S, i $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ un obert. Sigui I un interval i $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{U}$ una aplicació diferenciable. Aleshores, $\gamma = \varphi \circ \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una corba diferenciable i $\gamma(I) \subset \varphi(\mathcal{U}) \subset S$. $\alpha = \varphi^{-1} \circ \gamma$ és plana.*

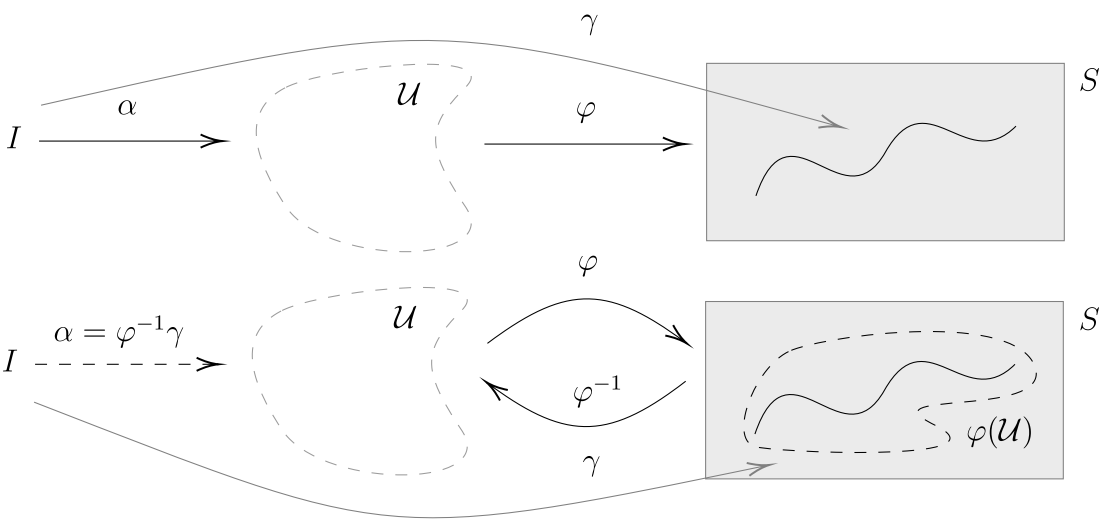


Figura 2.4: Representció gràfica de la situació en 2.3.5.

Definició 2.3.6 (Expressió local de γ)**.** Si $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, es diu que $(u(t), v(t))$ és l'expressió local de γ en la carta $(\mathcal{U}, \varphi)$. Recíprocament, si S és una superfície regular, $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una carta de S i $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una corba diferenciable tal que $\gamma(I) \subset \varphi(\mathcal{U})$, podem definir $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{U}$ per $\alpha(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$, doncs $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \varphi(\mathcal{U})$ és un homeomorfisme.

Proposició 2.3.7. *Suposem que S és una superfície regular, $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ amb $\varphi(\mathcal{U}) \subset S$ una carta d'S. Sigui $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba diferenciable tal que $\gamma(I) \subset \varphi(\mathcal{U})$. Podem definir $\alpha = \varphi^{-1} \circ \gamma : I \longrightarrow \mathcal{U}$. En aquesta situació, α és diferenciable.*

Demostració. Sigui $t_0 \in I$, tal que $\alpha(t_0) = (u_0, v_0)$. Existeixen un entorn obert $\mathcal{V}$ de (u_0, v_0) en $\mathcal{U}$, un entorn obert $\mathcal{W}$ de $\varphi(u_0, v_0)$ en $\mathbb{R}^3$ i una aplicació $\rho : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}$ diferenciable tal que $\rho \circ \varphi_{|\mathcal{V}} = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$ (cf. 2.1). En l'entorn $\alpha^{-1}(\mathcal{V})$ de t_0 en I, tenim que si $t \in \alpha^{-1}(\mathcal{V})$, $\alpha(t) = (\varphi^{-1} \circ \gamma)(t) = (\rho \circ \gamma)(t)$; per tant, α és diferenciable en t_0 (composició de diferenciables). ■

Observació 2.3.8. Si ens fixem en 2.4 tenim α diferenciable, com φ és una carta (en particular, és diferenciable perquè ens donava un homeomorfisme) aleshores γ també serà diferenciable. Ara bé, si el que tenim és γ diferenciable a priori α no té per què ser-ho. Ni que suposem φ diferenciable, que φ^{-1} sigui diferenciable pot no tenir sentit.

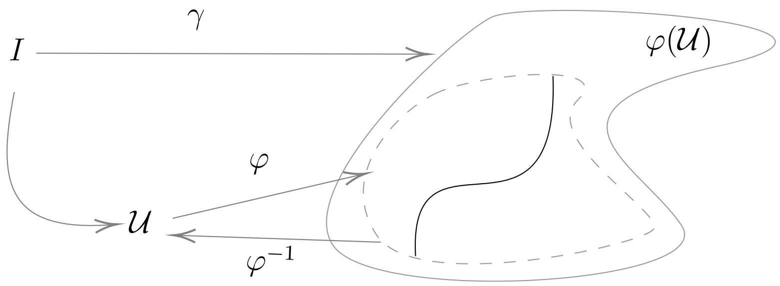


Figura 2.5: Expressió local.

En la situació anterior, com podríem calcular la longitud de γ entre dos punts suposant coneguda la primera forma fonamental de S?

Definició 2.3.9 (Càlcul de distàncies). Sigui $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ l'expressió local de $\gamma = \varphi \circ \alpha$. Volem calcular la norma de $\gamma'(t)$. Com que γ és la composició de φ amb α, $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Derivant,

$$\gamma'(t) = u'(t) \cdot \varphi_u + v'(t) \cdot \varphi_v.$$

En la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ de $T_{\gamma(t)}(S)$, el vector $\gamma'(t)$ té coordenades $(u'(t), v'(t))$. Tindrem:

$$\|\gamma'(t)\| = +\sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} = \sqrt{(u'(t), v'(t)) \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}}.$$

Exemple 2.3.10. Suposem $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una carta coordenada d'una superfície regular S. Suposem $E = v^2 + 1$, $F = 0$ i $G = 1$, pel que la primera forma fonamental queda determinada. Sigui ara $\gamma(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $I \subset \mathbb{R}$, una corba en S tal que $\gamma([0,1]) \subset \varphi(\mathbb{R}^2)$. Suposem que l'expressió local de γ a la carta φ és $\alpha_\gamma(t) = (5t, 2t)$ i tenim $\alpha'_\gamma(t) = (5, 2)$. Per tant, $(5, 2)$ són les coordenades de $\gamma'(t)$ en la base $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$:

$$\|\gamma'(t)\| = +\sqrt{(5,2)\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

Sabem que $E = v^2 + 1$, però com $\alpha(t) = (5t, 2t) =: (u, v)$, es pot posar $E = 4t^2 + 1$.

Definició 2.3.11 (Angle format entre dues corbes)**.** Sigui S una superfície regular i siguin $\gamma_1 : I_1 \longrightarrow S$ i $\gamma_2 : I_2 \longrightarrow S$ dues corbes diferenciables. Suposem que existeix $\alpha \in I_1$ i $\beta \in I_2$ tals que $\gamma_1(\alpha) = \gamma_2(\beta)$[3]. Anomenem angle format per les corbes γ_1, γ_2 en $p = \gamma_1(\alpha) = \gamma_2(\beta)$ a l'angle format per $\gamma_1'(\alpha)$ i $\gamma_2'(\beta)$. Si la traça de les corbes γ_1, γ_2 està continguda en la imatge d'una carta φ d'una superfície regular S aleshores tindrem $\gamma_1(t) = \varphi((u_1(t), v_1(t)))$ i $\gamma_2(t) = \varphi((u_2(t), v_2(t)))$:

$$\gamma_1'(t) = \varphi_u \times u_1'(t) + \varphi_v \cdot v_1'(t), \quad \gamma_2'(t) = \varphi_u \times u_2'(t) + \varphi_v \cdot v_2'(t).$$

Per tant, si coneixem la matriu de Gram de la primera forma fonamental de S en la carta φ i si $p = \gamma_1(\alpha) = \gamma_2(\beta) = \varphi(a, b)$, podem calcular:

$$\langle \gamma_1'(\alpha), \gamma_2'(\beta) \rangle = (u_1'(\alpha), v_1'(\alpha)) \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{|(a,b)} \cdot \begin{pmatrix} u_2'(\beta) \\ v_2'(\beta) \end{pmatrix}.$$

Per tant, podem calcular el cosinus de l'angle format per les dues corbes en el punt d'intersecció $p \in S$. Si anomenem θ a l'angle,

$$\cos\theta = \frac{\langle \gamma_1'(\alpha), \gamma_2'(\beta) \rangle}{\|\gamma_1'(\alpha)\| \cdot \|\gamma_2'(\beta)\|},$$

que es pot calcular fent servir expressions locals de γ_1, γ_2.

2.4 Funcions diferenciables en una superfície regular

Observació 2.4.1. Siguin $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ oberts i $G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ amb

$$G(x_1, \ldots, x_n) = (G_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, G_m(x_1, \ldots, x_n)), \; G_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si G_i és diferenciable per a tot $i = 1, \ldots, m$, G és diferenciable en $a \in \mathcal{U}$ i, aleshores:

$$\mathrm{Jac}_a(G) = d_a(G) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

[3] Recordem que si E és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensió finita, aleshores en el conjunt de totes les bases de E podem considerar la relació d'equivalència $B \sim B' \iff \det(P_{B,B'}) > 0$ on $P_{B,B'}$ és la matriu de pas de la base B a la base B'. El quocient per aquesta relació té dues classes d'equivalència, cadascuna d'elles s'anomena una orientació de E. Donada una orientació en $\mathbb{R}^3$ i dos vectors $v, w \in \mathbb{R}^3$, assignem signe positiu al angle format per (v, w) (en aquest ordre) si la base $(v, w, v \times w)$ és directa i signe negatiu altrament. Més endavant estudiarem orientacions en superfícies regulars.

Si $H : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ és diferenciable en G_a, aleshores $H \circ G$ és diferenciable en a i $d_a(H \circ G) = d_{G_a}(H) \cdot d_a(G)$.

Proposició 2.4.2. *Sigui S una superfície regular i $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació contínua, $p \in S$. Són equivalents:*

1. *Existeix una carta coordenada $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de S tal que $p = \varphi(\alpha, \beta)$ i $f \circ \varphi$ és diferenciable en (α, β).*
2. *Per a tota carta coordenada $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de S tal que $p = \varphi(\alpha, \beta)$ i $f \circ \varphi$ és diferenciable en (α, β).*

Demostració.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sigui $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $p \in \varphi(\mathcal{U})$, $f \circ \varphi$ diferenciable en (α, β) i $p = \varphi(\alpha, \beta)$. Sigui també $\psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $p \in \psi(\mathcal{V})$ i $p = \psi(\alpha', \beta')$. Volem veure que $f \circ \psi$ és diferenciable en (α', β').

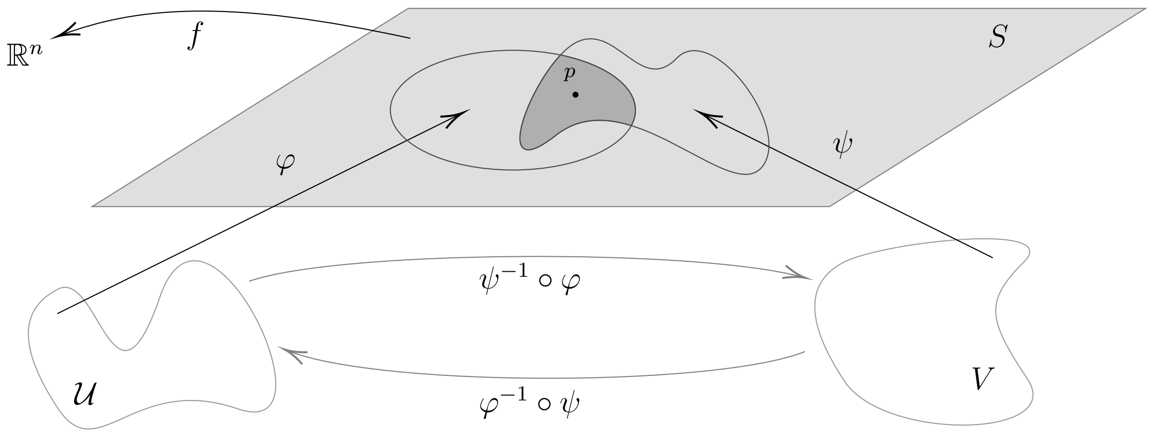


Figura 2.6: Il·lustració de la proposició 2.4.2.

En un entorn d'(α', β') tenim que $f \circ \psi$ és $(f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$. $f \circ \varphi$ és diferenciable per definició, i $\varphi^{-1} \circ \psi$ ho és per canvi de paràmetre. Per tant, $f \circ \psi$ és diferenciable, com volíem veure.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si és cert per a tota carta coordenada, en particular, es compleix per a una. ■

Definició 2.4.3 (f diferenciable). Diem que f és diferenciable en p si es compleix la primera o la segona condició de 2.4.2.

Definició 2.4.4 (Diferencial d'f). Sigui $(f \circ \varphi)(u, v) = (f_1(u, v), \ldots, f_m(u, v))$ l'expressió local de f en la carta φ. Anomenarem diferencial de f en $p = \varphi(\alpha, \beta)$ a l'aplicació lineal $d_p(f)$:

$T_p(S) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que, en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}_{|(a,b)}$ té matriu:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u} & \frac{\partial f_m}{\partial v} \end{pmatrix}_{|(a,b)}.$$

Lema 2.4.5. *Suposem que $\psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una altra carta de S tal que $p = \psi(\alpha', \beta')$. Sigui $h : \mathcal{U} \cap \varphi^{-1}(\psi(\mathcal{V})) \longrightarrow \mathcal{V}$ l'aplicació $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ de canvi de coordenades i sigui u', v' les coordenades en $\mathcal{V}$. Aleshores, tindrem:*

$$\begin{array}{rccc} f \circ \psi : & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (u', v') & \longmapsto & (\tilde{f}_1(u', v'), \ldots, \tilde{f}_m(u', v')) \end{array}$$

i $h(u, v) = (h_1(u, v), h_2(u, v))$. Aleshores:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u} & \frac{\partial f_m}{\partial v} \end{pmatrix}_{|(a,b)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial u'} & \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial v'} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{f}_m}{\partial u'} & \frac{\partial \tilde{f}_m}{\partial v'} \end{pmatrix}_{|(a',b')} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix}_{|(a,b)}$$

Demostració. Observar que $(f \circ \varphi) = (f \circ \psi) \circ h$, i aplicar la regla de la cadena per a funcions de diverses variables. ■

Observació 2.4.6. Resulta del lema anterior que l'aplicació *lineal* $d_p(f) = T_p(S) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és independent de la carta triada.

Demostració. Si tenim dues cartes φ, ψ aleshores la matriu de pas de la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ a la base $\{\psi_{u'}, \psi_{v'}\}$ és la matriu jacobiana del canvi de variable h. ■

Demostració, alternativa. Sigui S una superfície regular, $p \in S$. Sigui $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ carta de S tal que $p = \varphi(a, b)$. Donada una corba $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ amb traça continguda en S i tal que $\gamma(0) = p$, tindrem en un entorn de $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ una expressió local $\gamma(t) = \varphi(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ i, per tant, $\gamma'(0) = (\varphi_u)_{(a,b)} \cdot \gamma_1'(0) + (\varphi_v)_{(a,b)} \cdot \gamma_2'(0)$.

Proposició 2.4.7. *En la situació anterior, si posem:*

$$\tilde{T}_p(S) = \{\gamma'(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ diferenciable i tal que } \gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset S,\ \varphi(0) = p\},$$

l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \Phi_\varphi : & \tilde{T}_p(S) & \longrightarrow & T_p(S) \\ & \gamma'(0) & \longmapsto & \gamma_1'(0) \cdot (\varphi_u)_{(a,b)} + \gamma_2'(0) \cdot (\varphi_v)_{(a,b)} \end{array}$$

és una bijecció. En particular, $\tilde{T}_p(S)$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió 2.

Demostració. La aplicació Φ_φ està ben definida i clarament és injectiva. Veiem l'exhaustivitat. Sigui $v \in T_pS$. Tindrem

$$v = \alpha \cdot (\varphi_u)_{(a,b)} + \beta \cdot (\varphi_v)_{(a,b)}$$

on $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La corba $\gamma(t) = \varphi(a + \alpha \cdot t, b + \beta \cdot t)$, definida per t prou petit, verifica que $\Phi_\varphi(\gamma'(0)) = v$. ■

Sigui ara S una superfície regular, $p \in S, f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable. Definim l'aplicació diferencial de f en p per

$$\begin{array}{rccc} d_p(f): & T_pS & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \gamma'(0) & \longmapsto & (f \circ \gamma)'(0) \end{array}$$

Es comprova que aquesta aplicació està ben definida i que coincideix amb l'anterior, i clarament no depèn de la tria d'una carta coordenada que contingui a p. ■

Necessitarem també considerar un altre cas en el que es pot parlar d'aplicacions diferenciables i de diferencial.

Definició 2.4.8 (f diferenciable en un punt)**.** Siguin S_1, S_2 dues superfícies regulars i sigui $f : S_1 \longrightarrow S_2$ contínua, sigui també $p \in S_1$. Diem que f és diferenciable en p si existeixen cartes coordenades $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ definida per $\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de S_1 tal que $p = \varphi_1(\alpha, \beta), (\alpha, \beta) \in \mathcal{U}$ i $(\varphi_2, \mathcal{U}_2)$ definida per $\varphi_2 : \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $q = f(p) \in \varphi_2(\mathcal{U}_2)$. I, a més,

$$\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(\varphi_1(\mathcal{U}_1) \cap f^{-1}\varphi_2(\mathcal{U}_2)) \longrightarrow \mathcal{U}_2$$

és diferenciable en (α, β). Podem prendre $(\mathcal{U}, \varphi_1)$ tal que $f(\varphi_1(\mathcal{U}_1)) \subset \varphi_2(\mathcal{U}_2)$.

Sigui $F : S_1 \longrightarrow S_2$ una aplicació diferenciable i sigui $p \in S_1$ amb $q = F(p)$. Sigui $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una carta coordenada de S_1 tal que $p = \varphi(\alpha, \beta)$ i $\psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una carta coordenada de S_2 tal que $q = \varphi(\alpha', \beta')$. Tenim el següent:

1. $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_{|\alpha,\beta}$ és una base de $T_p(S_1)$.
2. $\langle \psi_u, \psi_v \rangle_{|\alpha',\beta'}$ és una base de $T_p(S_2)$.
3. Un entorn d'(α, β) on $G : \psi^{-1} \circ F \circ \varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ és diferenciable.

En aquest context, podem posar $G(u, v) = (G_1(u, v), G_2(u, v))$.

Definició 2.4.9 (F diferenciable)**.** Direm que $F : S_1 \longrightarrow S_2$ és diferenciable si és diferenciable en p per a tot $p \in S_1$.

$$\psi^{-1} \circ F \circ \varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V} \qquad \begin{array}{rccc} G_{|\mathcal{U} \cap \varphi^{-1}(F^{-1}(\psi(\mathcal{V})))}: & \mathcal{U} \cap \varphi^{-1}(F^{-1}(\psi(\mathcal{V}))) & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & (u, v) & \longmapsto & \psi^{-1}(F(\varphi(u, v))) \end{array}$$

és diferenciable. Si $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v))$, direm que $(F_1(u, v), F_2(u, v))$ és l'expressió local de F en les cartes $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ i $(\mathcal{U}_2, \varphi_2)$.

Definició 2.4.10 (Diferencial). Sigui $F : S_1 \longrightarrow S_2$ una aplicació diferenciable i sigui $p \in S_1$ amb $q = F(p)$. Sigui $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $(\varphi,\mathcal{U})$ una carta coordenada de S_1 tal que $p = \varphi(\alpha, \beta)$ $((\alpha, \beta) \in \mathcal{U})$ i $\psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(\psi, \mathcal{V})$ és una carta coordenada de S_2 amb $q = \varphi(\alpha', \beta')$ $(q = F(p) \in \psi(\mathcal{V}))$. Sigui, a més, un entorn d'(α, β) on $G : \psi^{-1} \circ F \circ \varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ és diferenciable. Anomenem diferencial de F en el punt $p \in S_1$ a l'aplicació lineal $T_p(S_1) \longrightarrow T_q(S_2)$ que en les bases anteriors té matriu:

$$d_P(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial u} & \frac{\partial G_1}{\partial v} \\ \frac{\partial G_2}{\partial u} & \frac{\partial G_2}{\partial v} \end{pmatrix}_{|(\alpha,\beta)} .$$

Definició 2.4.11 (Difeomorfisme). Si S_1, S_2 són superfícies regulars i $F : S_1 \longrightarrow S_2$ és una aplicació diferenciable, bijectiva i $F^{-1} : S_2 \longrightarrow S_1$ és també diferenciable, diem que F és un difeomorfisme i que S_1, S_2 són difeomorfs.

Exercici 2.4.12. *Sigui $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ un obert, S_1, S_2 superfícies regulars tals que $S_1 \subset \mathcal{U}$. Sigui $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació diferenciable i tal que $F(S_1) \subset S_2$. Proveu que la restricció $S_1 \longrightarrow S_2$ definida per $p \longmapsto F(p)$ és diferenciable.*

Exercici 2.4.13. *La diferenciabilitat en $p \in S_1$ no depèn de l'elecció de cartes. Per tant, $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}) = \psi^{-1} \circ F \circ \tilde{\varphi}$. Si $\psi^{-1}(F(\varphi(u, v))) = \psi(F_1(u, v), F_2(u, v))$, direm que $\psi(F_1(u, v), F_2(u, v))$ és l'expressió local d'F en les cartes $(\mathcal{U}, \varphi)$ i $(\mathcal{V}, \psi)$.*

Proposició 2.4.14. *Sigui $F : S_1 \longrightarrow S_2$ una aplicació contínua entre superfícies regulars i $S_2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ l'inclusió. Aleshores, F és diferenciable (en el sentit de 2.4.8) si, i només si, $f = i \circ F$ és diferenciable (en el sentit de 2.4.2).*

Demostració.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sigui $p \in S_1$ i $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta de S_1 amb $p = \varphi(\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}$. Suposem que $i \circ F \circ \varphi$ és diferenciable en (a, b). Volem arribar a veure que si $(\mathcal{V}, \psi)$ és una carta de S_2 tal que $F(p) \in \psi(\mathcal{V})$ i $F(\varphi(\mathcal{U})) \subset \psi(\mathcal{V})$, aleshores $G = \psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ és diferenciable en (α, β). Suposem que $F(p) = \psi(\alpha', \beta') \in \mathcal{V}'$, vam veure que existeix aquest $\mathcal{V}'$ un entorn obert d'(α', β') en $\mathcal{V}$ i un entorn $\mathcal{W}$ obert d'$F(p)$ en $\mathbb{R}^3$ i una aplicació diferenciable $\rho : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}'$ tal que $\rho \circ \psi_{|\mathcal{V}'} = \mathrm{id}_{\mathcal{V}'}$. En un entorn d'$(\alpha, \beta)$ tindrem:

$$\psi^{-1} \circ F \circ \varphi = \underbrace{\rho}_{\text{diferenciable}} \circ \underbrace{i \circ F \circ \varphi}_{\text{diferenciable}}$$

$\psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ és composició de diferenciables i, per tant, diferenciable en (α, β). En definitiva, $F : S_1 \longrightarrow S_2$ és diferenciable en p.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $F : S_1 \longrightarrow S_2$ és diferenciable en p, tenim que $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ és diferenciable en (α, β). Tenim que $i \circ \psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és diferenciable. Aleshores:

$$(i \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ F \circ \varphi) = i \circ F \circ \varphi \text{ és diferenciable en } (\alpha, \beta). \qquad \blacksquare$$

Proposició 2.4.15. ***No surt***. *La definició anterior no depèn de les bases escollides en el sentit següent. Sigui $\varphi^* : \mathcal{U}^* \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una carta de S_1 i $\psi^* : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una carta de S_2, amb $p = \varphi^*(\alpha^*, \beta^*)$ i $q = \psi^*(a^*, b^*)$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[rrr, "G"] \arrow[dd, "h_1"'] \arrow[dr, "\varphi"] & & & \mathcal{V} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dd, "h_2"] \\
& S_1 \arrow[r, "F"] & S_2 & \\
\mathcal{U}^* \arrow[rrr, "G^*"] \arrow[ur, "\varphi^*"'] & & & \mathcal{V}^* \arrow[ul, "\psi^*"]
\end{tikzcd}$$

On podem posar que $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}$, $(\alpha^*, \beta^*) \in \mathcal{U}^*$, i $(a, b) \in \mathcal{V}, (a^*, b^*) \in \mathcal{V}^*$. A més, h_1, h_2 són aplicacions canvi de cartes i G, G^* queden definides de la forma següent: $G = \psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ i $G^* = (\psi^*)^{-1} \circ F \circ \varphi^*$. Tenim:

$$\begin{tikzcd}
\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \arrow[r, shift left] \arrow[d] & T_p(S_1) \arrow[l, shift left] \arrow[r, "d_{\alpha,\beta}(G)"] \arrow[d, equal] & T_q(S_2) \arrow[d, equal] \\
\langle \varphi^*_{u^*}, \varphi^*_{v^*} \rangle \arrow[r, shift left] & T_p(S_1) \arrow[l, shift left] \arrow[r, dashed, "d_{\alpha^*,\beta^*}(G^*)"] & T_q(S_2)
\end{tikzcd}$$

Hem dit $d_{\alpha,\beta}(G)$ i $d_{\alpha^*,\beta^*}(G^*)$ a $\frac{\partial G_i}{\partial u \partial v}$ i $\frac{\partial G_i^*}{\partial u^* \partial v^*}$, respectivament. Si a més $dh_1 : T_p(S_1) \longrightarrow T_p(S_1)$ i $dh_2 : T_p(S_2) \longrightarrow T_p(S_2)$ són aplicacions de canvi de base, el diagrama commuta; és a dir, $dG^* \circ dh_1 = dG \circ dh_2$.

Suposem que $F : S_1 \longrightarrow S_2$ és diferenciable. Sigui $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta de S_1, $(\mathcal{V}, \psi)$ una carta de S_2 tal que $F(\varphi(\mathcal{U})) \subset \psi(\mathcal{V})$. Aleshores:

$$\tilde{F} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3) = i \circ F \circ \varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$
$$F^{\text{loc}} = (F_1^{\text{loc}}, F_2^{\text{loc}}) = \psi^{-1} \circ F \circ \varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}.$$

Tenim $\tilde{F} = i \circ \psi \circ F^{\text{loc}}$, on $i \circ \psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $F^{\text{loc}} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$. Per als diferencials, si $\psi : (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial u} & \frac{\partial \psi_3}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1^{\text{loc}}}{\partial u} & \frac{\partial F_1^{\text{loc}}}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2^{\text{loc}}}{\partial u} & \frac{\partial F_2^{\text{loc}}}{\partial v} \end{pmatrix}$$

En $q = \psi(u_0, v_0) \in S_2$, podem definir $T_q(S_2) = \langle \psi'_u, \psi'_v \rangle$ i $d_p(\tilde{F}) : T_p(S_1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Posem $d_p(\varphi_u) = \tilde{F}_u \in T_q(S_2)$ i $d_p(\varphi_v) = \tilde{F}_v \in T_q(S_2)$, pel que $d_p(\tilde{F}) = (\tilde{F}_u, \tilde{F}_v)$ (com a vectors columna).

$$\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \rho & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\gamma + \beta_1\rho & \alpha_1\delta + \beta_1\mu \\ \alpha_2\gamma + \beta_2\rho & \alpha_2\delta + \beta_2\mu \\ \alpha_3\gamma + \beta_3\rho & \alpha_3\delta + \beta_3\mu \end{pmatrix}$$
$$\implies \begin{cases} (a, b, c) = \gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ (a', b', c') = \delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \mu(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \end{cases}$$

Així doncs, mentre $F : S_1 \longrightarrow S_2$, $\tilde{F} : S_1 \longrightarrow S_2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ directament. D'aquesta manera, $d_p(F) : T_p(S_1) \longrightarrow T_q(S_2)$, però $d_p(\tilde{F}) : T_p(S_1) \longrightarrow T_q(S_2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

2.5 ORIENTABILITAT

Definició 2.5.1 (Camp normal). Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular. Un camp normal a S és una aplicació diferenciable $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que per a cada $p \in S$ tenim que $N(p) \perp T_p(S)$. Diem que N és *unitari* si per a tot $p \in S$, $\|N_p(S)\| = 1$.

Exemple 2.5.2.

1. Si S és un pla, aleshores N és constant.
2. Si definim $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $p \longmapsto (a, b, c)$. Aleshores, N és un camp normal.
3. Sigui $S = \mathbb{S}^2$ i definim $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $p \longmapsto \vec{p}$; és a dir, enviem $p \in S$ al seu vector posició $\vec{p}$. Aleshores N és també un camp normal.
4. Es pot demostrar que la cinta de Möbius no pot contenir camps unitaris normals.

Definició 2.5.3 (Superfície orientable). Diem que una superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ és *orientable* si existeix un camp normal N de S que és unitari. Direm que S és *orientada* si és orientable i hem escollit un camp normal unitari a S.

Exemple 2.5.4. L'esfera $\mathbb{S}_2$, els plans, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, etc., són orientables. A més, com la cinta de Möbius no pot contenir camps unitaris normals aleshores no és orientable.

Observació 2.5.5. *Tota superfície regular és localment orientable.* Suposem que S és una superfície regular, parametritzada tal que $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una carta i $S = \varphi(\mathcal{U})$. Si $p = (\alpha, \beta) \in \mathcal{U}$ aleshores $\varphi(p) \in S$ i podem definir:

$$\begin{array}{rccc} N : & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \varphi(\alpha, \beta) & \longmapsto & \pm \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}\Big|_{(\alpha,\beta)}. \end{array}$$

Observem que $p \longmapsto -N_\varphi(p)$ també és un camp unitari normal.

Proposició 2.5.6. *Siguin* $(\mathcal{U},\varphi)$ *i* $(\mathcal{V},\psi)$ *cartes d'una superfície regular* S. *Aleshores, si* $\varphi(\mathcal{U})\cap\psi(\mathcal{V})=\mathcal{W}\neq\emptyset$. *En* $\mathcal{W}$ *tenim* N_φ *i* N_ψ. *Suposant* $\mathcal{W}$ *connex, tenim els següents casos:*

1. $N_\varphi = N_\psi$.
2. $N_\varphi = -N_\psi$.

$N_\varphi = N_\psi$ *equival a dir que les bases* $\{\varphi_u,\varphi_v\}$ *i* $\{\psi_{u'},\psi_{v'}\}$ *defineixen la mateixa orientació en* $T_p(S)$ *per a cada* $p\in S$. *Si* $h=\varphi^{-1}\psi$, *la matriu de canvi de base* $\{\varphi_u,\varphi_v\}$ *a* $\{\psi_{u'},\psi_{v'}\}$ *és el diferencial d'h i* $d_p(h)$ *té determinant positiu. Simètricament,* $N_\varphi=-N_\psi$ *vol dir que defineixen orientacions oposades.*

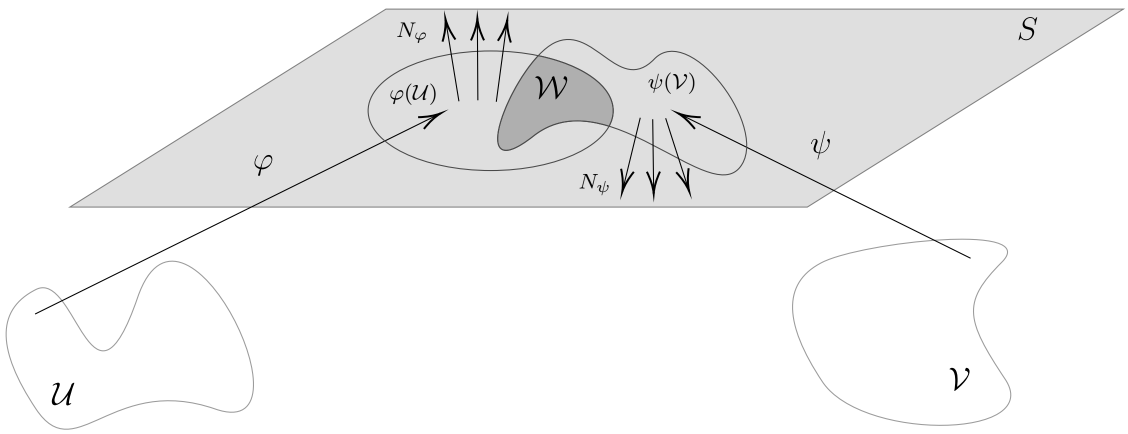


Figura 2.7: Representació gràfica de la proposició.

Observació 2.5.7. Si tenim un atles $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ de S tal que sempre tenim $N_{\varphi_i}=N_{\varphi_j}$ per a tot i,j, aleshores S és orientable.

Podem generalitzar aquest mateix exemple de dos cartes a un atles qualsevol.

Proposició 2.5.8. *Una superfície regular* S *és orientada si, i només si, existeix un atles* $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ *de* S *tal que si* $\varphi_i(\mathcal{U}_i)\cap\varphi_j(\mathcal{U}_j)\neq\emptyset$, *aleshores,* $\det(d(\varphi_j^{-1}\circ\varphi_i))>0$. *Es diu que les cartes d'aquest atles són positives.*

Definició 2.5.9 (Aplicació de Gauss). Si S és una superfície regular orientable, podem trobar $N: S\longrightarrow\mathbb{R}^3$ un camp normal unitari (la imatge de tot punt és un vector de norma 1) i podem considerar $N: S\longrightarrow\mathbb{S}^2$. Es diu que $N: S\longrightarrow\mathbb{S}^2$ és l'aplicació de Gauss. S'escriu també com a $N_p=N(p)$ i si hi ha possibilitat de confusió denotarem $\tilde{N}=N: S\longrightarrow\mathbb{R}^3$.

Observació 2.5.10. En la situació anterior, si $p\in S$ tenim per definició de camp normal que $N: S\longrightarrow\mathbb{S}^2$ és diferenciable i ortogonal a l'espai tangent $T_p(S)$. És a dir, podem considerar $d_p(N): T_p(S)\longrightarrow T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$ i tenim que $T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)=\langle N(p)\rangle^\perp=T_p(S)$. Hem usat que l'espai tangent a una esfera en qualsevol punt és l'ortogonal del vector posició.

Definició 2.5.11 (Operadors forma i de Weingarten)**.** En la situació anterior, podem considerar $d_p(N) : T_p(S) \longrightarrow T_p(S)$ i l'anomenarem operador *forma*. S'anomena operador de Weingarten a $W_p = -d_p(N)$.

Observació 2.5.12. Alguns autors opten per un altre conveni i anomenen operador de Weingarten a $d_p(N)$ (nosaltres no ho farem així). Si en lloc del camp N agafem $-N$, aleshores $d_p(N) = -d_p(N)$.

Exemple 2.5.13.

1. Sigui S un pla en $\mathbb{R}^3$. Aleshores, $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ és una aplicació diferenciable. Com el pla no té curvatura (i.e. el vector normal és constant), $W_p = 0$ per a tot $p \in S$.
2. Sigui $S = \mathbb{S}^2$. Aleshores, $N : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ definit per $p \longmapsto \vec{p}$, $\vec{p}$ el vector posició de p, és l'aplicació identitat (i.e. $N = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^2}$). A més:
$$\left.\begin{array}{cccc} d_p(N) : & T_p(\mathbb{S})^2 & \longrightarrow & T_p(\mathbb{S})^2 \\ & v & \longmapsto & \vec{v} \end{array}\right\} d_p(N) = \mathrm{id}_{T_p(\mathbb{S})^2} \implies W_p = -\,\mathrm{id}_{T_p(\mathbb{S})^2}\,.$$
3. Sigui el cilindre $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Si S és una superfície, en tenim prou amb definir $g(x, y, z) = x^2+y^2-1$ i aplicar el teorema del valor regular a $\nabla g = (2x, 2y, 0)$, que compleix $(0, 0, 0)$ si $(x, y, z) \in S$. Aleshores, $T_{(x,y,z)}(S) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x+\beta y = 0\}$ pel que $T_{(x,y,z)}(S) = \langle(-y, x, 0), (0, 0, 1)\rangle$ i
$$\begin{array}{cccc} N : & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,0) \end{array} \quad \text{és un camp normal unitari}$$
Ara podem considerar que $N = \hat{N}_{|S}$: N és la restricció a S d'una aplicació $\hat{N} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida de la mateixa manera que N, és a dir, $(x, y, z) \longmapsto (x, y, 0)$.
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\hat{N}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, dash, "\simeq"] \\ S \arrow[u] \arrow[r, "N"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$
Com ja hem comentat, l'espai tangent a S és $T_p(S) = \langle(-y, x, 0), (0, 0, 1)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$. El diferencial de $\hat{N}$ en $p = (x, y, z)$ és:
$$d_p(\hat{N}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv A \implies \begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "d_p(\hat{N})"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, dash, "\simeq"] \\ T_p(S) \arrow[u] \arrow[r, "d_p(N)"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

Podem posar $d_p(N(v_1))$ i $d_p(N(v_2))$ a partir del següent:

$$A\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}=1\cdot v_1+0\cdot v_2,\ A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\cdot v_1+0\cdot v_2.$$

Si considerem $N : S \longrightarrow S$ i $d_p(N) : T_p(S) \longrightarrow T_p(S)$ com endomorfismes (clarament $d_P(N(v_1)) = v_1$ i $d_P(N(v_1)) = v_2$), resulta que:

$$d_p(N)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\implies W_p=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Proposició 2.5.14. *Sigui S una superfície regular orientada, $p \in S$, i denotem $W_p : T_p(S) \longrightarrow T_p(S)$ l'endomorfisme de Weingarten. Aleshores si $x, y \in T_p(S)$ tenim $I_p(x, W_p(y)) = I_p(W_p(x), y)$. Es diu que W_p és autoadjunt (respecte I).*[4]

Demostració. Sigui $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta de S, $p \in \varphi(\mathcal{U})$. Com I_p és $\mathbb{R}$-bilineal i W_p és $\mathbb{R}$-lineal, i com $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ és base de $T_p(S)$ hi ha prou amb considerar el cas $x = \varphi_u$, $y = \varphi_v$. En general tindríem que $x = \alpha\varphi_u + \beta\varphi_v$ i $y = \gamma\varphi_u + \delta\varphi_v$. No només això, sinó que:

$$W_p(y) = \gamma W_p(\varphi_u) + \delta W_p(\varphi_v) I_p(x, W_p(y)) = I_p(\alpha\varphi_u + \beta\varphi_v, \gamma W_p(\varphi_u) + \delta W_p(\varphi_v)).$$

Hauríem de revisar els casos $(x, y) \in \{(\varphi_u, \varphi_u), (\varphi_v, \varphi_u), (\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_v, \varphi_v)\}$. Fixem-nos que:

$$\begin{aligned}I_p(\alpha\varphi_u + \beta\varphi_v, W_p(y)) &= \alpha I_p(\varphi_u, \gamma W_p(\varphi_u) + \delta W_p(\varphi_v)) + \beta I_p(\varphi_v, \gamma W_p(\varphi_u) + \delta W_p(\varphi_v))\\&= \alpha\gamma I_p(\varphi_u, W_p(\varphi_u)) + \alpha\delta I_p(\varphi_u, W_p(\varphi_v))\\&+ \beta\gamma I_p(\varphi_v, W_p(\varphi_u)) + \beta\delta I_p(\varphi_v, W_p(\varphi_v))\end{aligned}$$

Substituint $x = \varphi_u$, $y = \varphi_v$, queda demostrat el que dèiem. En la carta $(\mathcal{U}, \varphi)$, N tindrà components $(N_1(u, v), N_2(u, v), N_3(u, v))$ i la matriu de $d_p(N) : T_p(S) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ és:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial u}&\frac{\partial N_1}{\partial v}\\\frac{\partial N_2}{\partial u}&\frac{\partial N_2}{\partial v}\\\frac{\partial N_3}{\partial u}&\frac{\partial N_3}{\partial v}\end{pmatrix},\quad \left.\begin{aligned}N_u &= (\tfrac{\partial N_1}{\partial u}, \tfrac{\partial N_2}{\partial u}, \tfrac{\partial N_3}{\partial u}) = \alpha\varphi_u + \beta\varphi_v = d_p(N(\varphi_u))\\N_v &= (\tfrac{\partial N_1}{\partial v}, \tfrac{\partial N_2}{\partial v}, \tfrac{\partial N_3}{\partial v}) = \gamma\varphi_u + \delta\varphi_v = d_p(N(\varphi_v))\end{aligned}\right\}$$

Pel que la matriu de la primera forma fonamental queda:

$$I_p=\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\\beta&\delta\end{pmatrix}.$$

Sigui $x = \varphi_u, y = \varphi_v$. Volem provar que $\langle\varphi_u, W(\varphi_v)\rangle = \langle W(\varphi_u), \varphi_v\rangle$ (com a producte escalar). Hi ha prou amb veure que $\langle\varphi_u, dN(\varphi_v)\rangle = \langle dN(\varphi_u), \varphi_v\rangle$, que equival a veure $\langle\varphi_u, N_v\rangle = \langle N_u, \varphi_v\rangle$. Sabem que $N_p \in (T_p(S))^\perp$. Com $N \perp \varphi_u$, aleshores $\langle N, \varphi_u\rangle = 0$. Derivant respecte v:

$$\langle N_v, \varphi_u\rangle + \langle N, \varphi_{uv}\rangle = 0, \quad \varphi_{uv} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}.$$

[4] A vegades es diu també que és *simètric*, ja que en base ortonormal la seva matriu és simètrica.

Com $N \perp \varphi_v$ també, podem fer el mateix (derivem respecte u):

$$\langle N_u, \varphi_v\rangle + \langle N, \varphi_{vu}\rangle = 0, \quad \varphi_{vu} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial v \partial u}.$$

i per l'igualtat $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ és fàcil veure que $\langle N_v, \varphi_u\rangle = \langle N_u, \varphi_v\rangle$. ■

Teorema 2.5.15 (Teorema espectral per a operadors autoadjunts). *Sigui $(E, \langle,\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espai vectorial euclidià i sigui $f : E \longrightarrow E$ una aplicació autoadjunta. Aleshores, f diagonalitza en una base ortonormal respecte $\langle,\rangle$.*

Definició 2.5.16 (Curvatures i direccions principals). Sigui S una superfície regular orientada, $p \in S$. Aleshores:

1. W_p és diagonalitzable i als VAPs de W_p se'ls anomena *curvatures principals* de S en p. Si v és VEP de W_p es diu que $\langle v\rangle$ és una direcció principal de curvatura.
2. Si $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una corba diferenciable, $c(I) \subset S$ i $\langle c'(t)\rangle$ és una direcció de curvatura principal per a tot $t \in I$, es diu que c és una línia de curvatura de S.
3. Anomenem *curvatura de Gauss* de S en p a $K(p)$, el producte de les curvatures principals en P i que correspon al determinant de l'operador de Weingarten en p. És a dir, $K(p) = \det W_p$.
4. Anomenem *curvatura mitjana* de S en p a:

$$H(p) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(W_p)),$$

Observació 2.5.17. Si la orientació de S ve donada per $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, aleshores $-N$ defineix una orientació de S (s'anomena *oposada* a l'anterior).

N	$-N$
k_1	$-k_1$
$k(p)$	$k(p)$
$H(p)$	$-H(p)$

És a dir, que si canviem l'orientació de S la curvatura de Gauss resta invariant i la curvatura mitjana canvia de signe. Per tant, la curvatura de Gauss no depèn de la orientació triada i es pot considerar per a qualsevol superfície regular (donat $p \in S$, triem qualsevol orientació en un entorn coordinat de p). Recordem que $d(-N) = -dN$.

Definició 2.5.18 (El·líptic/hiperbòlic/parabòlic/pla). Diem que:

1. p és el·líptic si $K(p) > 0$.
2. p és hiperbòlic si $K(p) < 0$.
3. p és parabòlic si $K(p) = 0$, $W_p \neq 0$.
4. p és pla si $W_p \equiv 0$.

Exemple 2.5.19. Sigui $S = \mathbb{S}^2_{\mathbb{R}} = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, orientem la superfície segons el camp normal $N : S \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $N(x, y, z) = \frac{1}{R}(x, y, z)$. Si prenem $p = (x, y, z) \in S$ amb $y \neq 0$ aleshores $T_p(S) = \langle(-y, x, 0), (0, -z, y)\rangle$. L'operador W_p amb $p \in S$ té matriu:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

i per tant és una homotècia de raó $\frac{1}{R}$, pel que també $dN : T_p(S) \longrightarrow T_p(S)$ és una homotècia de raó $\frac{1}{R}$. Dit d'una altra manera, l'operador de Weingarten és una homotècia de raó $-\frac{1}{R}$ amb matriu com la de (2.2). I per tant:

1. Les curvatures principals són $-\frac{1}{R}$ i $-\frac{1}{R}$ (tenim un únic VAP). Qualsevol subespai de $T_p(S)$ de dimensió 1 és una direcció de la curvatura principal i, en conseqüència, qualsevol corba en S és una línia de curvatura principal.
2. La curvatura de Gauss és $\frac{1}{R^2}$.
3. La curvatura mitjana és:
$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{R} + \left(-\frac{1}{R}\right)\right) = -\frac{1}{R}.$$
4. Tots els punts de S són el·líptics. Com la matriu és d'una homotècia, qualsevol corba serà una línia de curvatura sobre una esfera.

Exemple 2.5.20. Sigui $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ un cilindre i $p = (x, y, z) \in S$. Ja vam veure que en la base $\{(-y, x, 0), (0, 0, 1)\}$ la matriu de l'operador de Weiergarten W_p és:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i, per tant, tenim:

1. Les curvatures principals són -1 i 0.
2. La curvatura de Gauss és 0.
3. La curvatura mitjana és $H = \frac{1}{2}(-1 + 0) = -\frac{1}{2}$.
4. Les direccions principals són les generades per $\langle w\rangle \subset T_p(S)$ amb w un vector propi de W_p, és a dir, $\langle(-y, x, 0)\rangle, \langle(0, 0, 1)\rangle$.
5. Segons la classificació feta a 2.5.18 veiem que tots els punts del cilindre són parabòlics.

Exemple 2.5.21. Considerem una *horse saddle*. Sigui $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y^2 - x^2\}$, que és una superfície regular donat que és el graf de l'aplicació diferenciable $(x, y) \longmapsto y^2 - x^2$. Per tant, $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$, on φ és la carta:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, v^2 - u^2) \end{aligned}$$

Prenem com a orientació l'aplicació $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ amb

$$N(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \cdot (-2x,-2y,1)$$

Suposem $p = (0,0,0) = \varphi(0,0) \in S$. Una base de $T_p(S)$ és $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$[5]. El diferencial de N vindrà donat per les derivades respecte de x, y de les components de:

$$N(x,y,z) = \left(\frac{-2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{-2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \right).$$

Per tant, si fem el càlcul i avaluem en $x = y = 0$, obtenim $\frac{\partial N}{\partial u}(0,0) = (2,0,0)$ i $\frac{\partial N}{\partial v}(0,0) = (0,-2,0)$, pel que trobem que la matriu de l'aplicació $d_P(N) : T_p(S) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en la base φ_u, φ_v és:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ara, per a obtenir la matriu de l'aplicació $d_p(N) : T_p(S) \longrightarrow T_p(S)$ calculem les imatges dels vectors de la base $T_p(S)$ per $d_p(N)$. És a dir, $d_{(0,0)}N(\varphi_u) = (2,0,0)$ i $d_{(0,0)}N(\varphi_v) = (0,-2,0)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_1 + 0v_2 + 0v_3 \in T_p(S).$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0v_1 + (-2)v_2 + 0v_3 \in T_p(S).$$

Per tant, la matriu de l'operador forma $d_p(N) : T_p(S) \longrightarrow T_p(S)$ és:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \implies W_p = -d_p(N) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies K(p) = -4, H(p) = 0,$$

p és un punt hiperbòlic i les direccions principals de la curvatura són $\langle (1,0,0) \rangle$ i $\langle (0,1,0) \rangle$.

Exemple 2.5.22. Tornarem a fer el mateix exemple, aquest cop canviant l'expressió de signe. Sigui $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$. És superfície regular donat que és el graf de $(x,y) \longmapsto x^2 - y^2$. Té una carta $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(u,v) \longmapsto (u,v,u^2-v^2)$. En particular, $p = (0,0,0) = \varphi(0,0)$. Alternativament, podem definir:

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & z - x^2 + y^2 \end{array}$$

Pel criteri del gradient, tenim una altra manera de veure que és superfície regular, ja que $S = f^{-1}(\{0\})$. Aleshores, per a $q \in S$ qualsevol, tenim que $T_q(S) = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$, pel que φ_u i φ_v queden

[5] $T_p(S) = \ker d_{(0,0)}F = \ker(0,0,1) = \langle (1,0,0),(0,1,0) \rangle$, pel criteri del gradient.

definits de la manera següent: $\varphi_u = (1,0,2u)_{|(0,0)} = (1,0,0) = e_1$ i $\varphi_v = (0,1,-2v)_{|(0,0)} = (0,1,0) = e_2$. Una orientació de S ve donada per $\tilde{N} : S \longleftarrow \mathbb{R}^3$:

$$\tilde{N} : (x,y,z) \in S \longmapsto \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2-1}}(-2x,2y,1).$$
$$(u,v) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2u,2v,1) = \tilde{N}(u,v).$$

La matriu de la diferencial del normal $\tilde{N}$, és a dir $d\tilde{N}$, queda com:

$$d\tilde{N} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-2u}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-2u}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-2v}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-2v}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}(1) & \frac{\partial}{\partial v}(1) \end{pmatrix}_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{|(0,0)}.$$

Per tant, l'anterior és la matriu de $d_{(0,0)}\tilde{N} : T_p(S) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}_{|(0,0)}$ de $T_p(S)$. Com a conseqüència immediata,

$$\left.\begin{matrix} d_{(0,0)}\tilde{N}(\varphi_{u_{|(0,0)}}) = (2,0,0) \\ d_{(0,0)}\tilde{N}(\varphi_{v_{|(0,0)}}) = (0,-2,0) \end{matrix}\right\} \in T_p(S),$$

perquè de fet teníem $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ i $dN : T_p(S) \longrightarrow T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$. Això vol dir que:

$$\left.\begin{matrix} d_p(\tilde{N}(1,0,0)) & = (2,0,0) = 2e_1 = 2\varphi_u + 0\varphi_v \\ d_p(\tilde{N}(0,1,0)) & = (0,-2,0) = -2e_2 = -2\varphi_v + 0\varphi_u. \end{matrix}\right\} \in T_p(S).$$

Ara, és clar que l'operador de Weingarten pren la forma:

$$W_p = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.6 Segona forma fonamental

Definició 2.6.1. Sigui $(E, \langle\cdot\rangle)$ un espai vectorial euclidià. Sigui $f : E \longrightarrow E$ $\mathbb{R}$-lineal i autoadjunta ($\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$). Podem definir:

$$\begin{aligned} \beta_f : \; & E \times e \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longrightarrow \langle f(x), y\rangle \end{aligned}$$

que és una forma bilineal simètrica en E.

Definició 2.6.2 (Segona forma fonamental). Sigui S una superfície regular orientada. Sigui $p \in S$. Prenem $E = T_p(S)$, $\langle\cdot\rangle$ com la primera forma fonamental i $f = W_p$. Anomenem segona forma fonamental de S en φ a:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_p : \; & T_p(S) \times T_p(S) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (v,w) \longmapsto \mathbb{I}_p(v,w) = I_p(v, W_p(w)). \end{aligned}$$

Sigui $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta de S. Tenim la base φ_u, φ_v de $T_p(S)$. Tradicionalment, la matriu de Gram de $\mathbb{I}_p$ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es denota per:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Definició 2.6.3 (Curvatura de c). Sigui S una superfície regular orientada per un camp normal unitari $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Sigui $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba diferenciable, 2-regular i parametritzada per l'arc. Suposem també que $c(I) \subset S$. Denotem per $k_c(s) \neq 0$ a la curvatura de c en s.

Com c està parametritzat per l'arc, $\|c'(s)\| = 1$, $c'(s) \in T_{c(s)}(S)$ és unitari. Tenim que $c''(s) = k_c(s) \cdot N_c(s)$, ja que:

$$\langle c'(s), c'(s) \rangle = 1 \implies \langle c''(s), c'(s) \rangle = 0 \implies c''(s) \perp c'(s). \tag{2.3}$$

Definició 2.6.4 (Triedre de Darboux). Tenim una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ formada pels vectors $\{c'(s), N_{c(s)}, N_{c(s)} \times c'(s)\}$[6], que s'anomena *triedre de Dardoux* en $c(s)$. Per (2.3), $c''(s) = k_{\text{nor}}(s) \cdot N_{c(s)} + k_g(s) \cdot (N_{c(s)} \times c'(s))$.

Definició 2.6.5 (Curvatura normal/geodèsica). Direm que $k_n(s)$ és la curvatura normal de S en $c(s)$ en la direcció donada per $c'(s)$. Direm que $k_g(s)$ és la curvatura geodèsica de la corba c en $c(s)$.

Propietat 2.6.6 (de k_{nor} i k_{geo}).

1. *Teorema de Pitàgores:* $k_{nor}^2 + k_{geo}^2 = k_c^2$.

$$\|c''\|^2 = k_{geo}^2 + k_{nor}^2 \xrightarrow{c''(s)=k_c(s)\cdot n_c(s)} \|c''\|^2 = k_c^2.$$

2. $k_{nor} = \langle c'', N_{c(s)} \rangle$ *i* $k_{geo} = \langle c''(s), N_{c(s)} \times c'(s) \rangle$.
3. *Si prenem* $-s$ *com a paràmetre en* c*, tenim que* $k_{nor} \longmapsto k_{nor}$ *i* $k_{geo} \longmapsto -k_{geo}$.
4. *Si prenem* $-N$ *en lloc d'*N*,* $k_{nor} \longmapsto -k_{nor}$ *i* $k_{geo} \longmapsto -k_{geo}$.

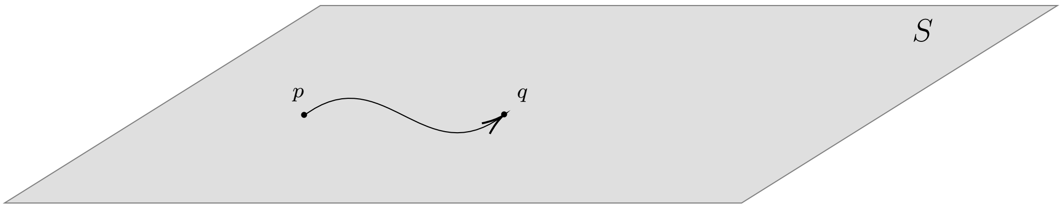
Definició 2.6.7. Si $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *no* està parametritzada per l'arc, sigui $h : I \longrightarrow J$ un canvi de variable tal que $\gamma = c \circ h^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sí està parametritzada per l'arc. Es defineix $k_{\text{nor},c}(t) = k_{\text{nor},\gamma}(h(t))$ i $k_{\text{geo},c}(t) = k_{\text{geo},\gamma}(h(t))$.

Exercici 2.6.8. *Si* $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *és una corba 2-regular continguda en una superfície regular* S *(no necessàriament parametritzada per l'arc). Aleshores:*

$$k_{nor}(t) = \frac{\langle c''(t), N_{c(t)} \rangle}{\|c'(t)\|^2}, \ k_g(t) = \frac{\langle c''(t), N_{c(t)} \times c'(t) \rangle}{\|c'(t)\|^3}.$$

[6] El vector $N_{c(s)}$ és el vector normal a la superfície S en $c(s)$.

Definició 2.6.9 (Geodèsica). Sigui S una superfície regular, $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba 2-regular, $c(I) \subset S$. Si per a cada $t \in I$ es té que $k_g(t) = 0$, g és una geodèsica.



Proposició 2.6.10. *Sigui $F : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació diferenciable. Sigui $p \in S$ i $d_p(F) : T_p(S) \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Sigui $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $c(I) \subset S$ una corba. Aleshores, $d_p(F(c'(s)) = \frac{d}{dt}(F(c(s)))$.*

Demostració. Sigui S una superfície regular, $F : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable i $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta de S tal que:

$$\begin{array}{rccl} F \circ \varphi : & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (F_1(u,v), F_2(u,v), F_3(u,v)) \end{array}$$

Suposem que $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una corba diferenciable, $c(I) \subset \varphi(\mathcal{U})$. Si $s \in I$, recordem que $c(s) = \varphi(\alpha(s), \beta(s))$ és l'expressió local en el punt s (cf. 2.5) i $c'(s) = \alpha'(s)\varphi_u + \beta'(s)\varphi_v$. Podem considerar, doncs:

$$\begin{array}{rccl} F \circ c : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & s & \longmapsto & (F_1(\alpha(s), \beta(s)), F_2(\alpha(s), \beta(s)), F_3(\alpha(s), \beta(s))) \end{array}$$

Considerem la respectiva derivada respecte s, és a dir, $\frac{d}{ds}(F(c(s)))$:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial u} \cdot \alpha'(s) + \frac{\partial F_1}{\partial v} \cdot \beta'(s), \frac{\partial F_2}{\partial u} \cdot \alpha'(s) + \frac{\partial F_2}{\partial v} \cdot \beta'(s), \frac{\partial F_3}{\partial u} \cdot \alpha'(s) + \frac{\partial F_3}{\partial v} \cdot \beta'(s)\right)$$
$$= \left(\frac{\partial F_1}{\partial u}, \frac{\partial F_2}{\partial u}, \frac{\partial F_3}{\partial u}\right) \cdot \alpha'(s) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial v}, \frac{\partial F_2}{\partial v}, \frac{\partial F_3}{\partial v}\right) \cdot \beta'(s).$$

Es pot veure fàcilment que $\frac{d}{ds}(F(c(s))) = d_p(F(c'(s)))$:

$$dF(c'(s)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \\ \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'(s) \\ \beta'(s) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial u}, \frac{\partial F_2}{\partial u}, \frac{\partial F_3}{\partial u}\right) \cdot \alpha'(s) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial v}, \frac{\partial F_2}{\partial v}, \frac{\partial F_3}{\partial v}\right) \cdot \beta'(s). \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.6.11 (de Meusnier). *Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular orientada, $p \in S$, sigui $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba 2-regular tal que $c(I) \subset S$ i $p = c(s_0)$, $s_0 \in I$. Aleshores, $k_{nor}(s_0) = \mathbb{I}_p(c'(s_0), c'(s_0))$. En particular, totes les corbes amb el mateix vector tangent en $p \in S$ tenen la mateixa curvatura normal en p.*

Demostració. Com tot $s \in I$, tenim $c(I) \subset C$ sabem que $\langle N(c(s)), c'(s)\rangle = 0$ ($\forall s \in I$). Podem suposar que $s_0 = 0$ i que c està parametritzada per l'arc. Si derivem $\langle N(c(s)), c'(s)\rangle = 0$ i avaluem en 0, tenim, via 2.6.10:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle N(c(s)), c'(s)\rangle'_{|s=0} = \langle N'(c(s)), c'(s)\rangle_{|s=0} + \langle N(c(s)), c''(s)\rangle_{|s=0} \\ &= \langle d_p(N'(c'(0)), c'(0)\rangle + k_{\text{nor}}(p) = k_{\text{nor}}(p) - \mathbb{I}_p(c'(0), c'(0)). \end{aligned}$$

I, per tant, $k_{\text{nor}}(p) - \mathbb{I}_p(c'(0), c'(0))$, com volíem veure. ■

Procés 2.6.12 (Càlcul de la segona forma fonamental). *Sigui S una superfície regula orientada i $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta* ***local****. Sigui*

$$\mathbb{I}_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

la segona forma fonamental de S. Podem establiar una relació entre els coeficients de la segona i la primera forma fonamental:

$$e = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}, \ f = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}}, \ g = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}},$$

on E, F, G són els coeficients de la primera forma fonamental.

Demostració. Podem suposar que S és una superfície regular orientada. Sigui $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta positiva i:

$$\begin{array}{rccc} N: & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \end{array} \qquad (u,v) \in \mathcal{U},\ p = \varphi(u,v).$$

Sigui $x = \alpha\varphi_u + \beta\varphi_v \in T_p(S)$. Definim $\mathbb{I}_p(x,x) = \langle dN(x), x\rangle$ i ja vam veure que $dN(\varphi_u) = N_u$ i $dN(\varphi_v) = N_v$. Ara, usant la definició de x tenim:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_p(x,x) &= -\langle \alpha N_u + \beta N_v, \alpha\varphi_u + \beta\varphi_v\rangle \\ &= -\big(\alpha^2\langle N_u, \varphi_u\rangle + \alpha\beta\langle N_u, \varphi_v\rangle + \beta\alpha\langle N_v, \varphi_u\rangle + \beta^2\langle N_v, \varphi_v\rangle\big) \\ &= -\big(\alpha^2\langle N_u, \varphi_u\rangle + \alpha\beta\langle N_u, \varphi_v\rangle + \beta\alpha\langle N_u, \varphi_v\rangle + \beta^2\langle N_v, \varphi_v\rangle\big) \\ &= -\big(\alpha^2\langle N_u, \varphi_u\rangle + 2\alpha\beta\langle N_u, \varphi_v\rangle + \beta^2\langle N_v, \varphi_v\rangle\big) \end{aligned} \tag{2.4}$$

on hem usat que $\langle N_u, \varphi_v\rangle = \langle N_v, \varphi_u\rangle$[7]. D'altra banda, la matriu de Gram de la segona forma fonamental és:

$$\mathbb{I}_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \implies \mathbb{I}_p(x,x) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = e\alpha^2 + 2f\alpha\beta + g\beta^2$$

[7] Això és perquè $N \perp T_p(S)$, si derivem $\langle N, \varphi_u\rangle = 0$ respecte a v i derivem $\langle N, \varphi_v\rangle = 0$ respecte u obtenim la igualtat.

Aplicant (2.4), obtenim:

$$e = -\langle N_u, \varphi_u\rangle = \langle N, \varphi_{uu}\rangle = \left\langle \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}, \varphi_{uu}\right\rangle = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}},$$
$$f = -\langle N_u, \varphi_v\rangle = \langle N, \varphi_{uv}\rangle = -\langle N_v, \varphi_u\rangle = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}},$$
$$g = -\langle N_v, \varphi_v\rangle = \langle N, \varphi_{vv}\rangle + = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

on hem tornat a fer servir que, derivant $\langle N, \varphi_u\rangle = 0$ i $\langle N, \varphi_v\rangle = 0$ s'obté que $\langle N_u, \varphi_u\rangle + \langle N, \varphi_{uu}\rangle = 0$, $\langle N_v, \varphi_u\rangle + \langle N, \varphi_{vu}\rangle = 0$ i $\langle N_v, \varphi_v\rangle + \langle N, \varphi_{vv}\rangle = 0$. Hem usat, a més, que en un espai euclidià:

$$\|e_1 \times e_2\|^2 = \|e_1\|^2 \cdot \|e_2\|^2 - \langle e_1, e_2\rangle^2 \ (\dim = 2), \quad \langle e_1 \times e_2, e_3\rangle = \det(e_1, e_2, e_3).$$ ■

Proposició 2.6.13 (Equacions de Weingarten). *Sigui S superfície regular orientada, $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta d'S positiva,*

$$\mathbb{I}_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} e = -\langle N_u, \varphi_u\rangle \\ f = -\langle N_u, \varphi_v\rangle \\ g = -\langle N_v, \varphi_v\rangle \end{matrix} \quad N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}. \tag{2.5}$$

Sigui $A = dN$ definida pels vectors $N_u = dN(\varphi_u)$ i $N_v = dN(\varphi_v)$ com a columnes, és a dir,

$$A : T_p(S) \longrightarrow T_p(S),\ dN = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad N_u = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \text{ i } N_v = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v.$$

Aleshores,

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2},\ a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2},\ a_{12} = \frac{fF - gE}{EG - F^2},\ a_{22} = \frac{gF - fG}{EG - F^2};$$

que són les anomenades equacions de Weingarten.

Demostració. El problema que se'ns planteja ara és calcular la matriu de $W_p = -d_p(N)$ a partir d'E, F, G i e, f, g. Sigui $A = dN$ definida pels vectors $N_u = dN(\varphi_u)$ i $N_v = dN(\varphi_v)$ com a columnes. Com hem vist a (2.5), podem posar $-f = \langle N_u, \varphi_v\rangle = -\langle N, \varphi_{uv}\rangle$, $-e = \langle N_u, \varphi_u\rangle = -\langle N, \varphi_{uu}\rangle$ i $-g = \langle N_v, \varphi_v\rangle = -\langle N, \varphi_{vv}\rangle$. Així doncs:

$$-f = \langle N_u, \varphi_v\rangle = \langle a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v, \varphi_v\rangle = a_{11}\langle \varphi_u, \varphi_v\rangle + a_{21}\langle \varphi_v, \varphi_v\rangle = a_{11}F + a_{21}G.$$
$$-f = \langle N_v, \varphi_u\rangle = a_{12}E + a_{22}F$$
$$-e = a_{11}E + a_{21}F$$
$$-g = a_{12}F + a_{22}G$$

En altres paraules, relacionem els coeficients de l'operador forma amb els de la primera i segona forma fonamental. En altres paraules:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \iff -I_p = A^T \cdot \mathbb{I}_p.$$

En aquest sentit, podem aïllar $A^T = A^{-1}$ (és diagonal), pel que queda:

$$A^T = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Fent tots els càlculs corresponents, tenim:

$$a_{11} = \frac{fF-eG}{EG-F^2},\ a_{21} = \frac{eF-fE}{EG-F^2},\ a_{12} = \frac{fF-gE}{EG-F^2},\ a_{22} = \frac{gF-fG}{EG-F^2};$$

com volíem veure. ■

Exercici 2.6.14. *Demostrar que la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana compleixen, respectivament:*

$$K(p) = \det W_p = -\det d_p(N) = \frac{eg-f^2}{EG-F^2},\ H(p) = \frac{eG-2fF+gE}{2(EG-F^2)}.$$

Exemple 2.6.15.

1. Sigui $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$. Recordem que el graf d'una funció S és una superfície parametritzada regular que es recobreix amb una única carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ (cf. 2.2.3), que ve definida per:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u,v,uv) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \varphi_u = (1,0,v), & \varphi_v = (0,1,u), & \\ \varphi_{uu} = (0,0,0), & \varphi_{uv} = (0,0,1), & \varphi_{vv} = (0,0,0). \end{array}$$

D'aquí podem calcular $E = 1+v^2$, $F = uv$ i $G = 1+u^2$, i

$$e = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}} = 0,\ g = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}} = 0,\ f = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$

pel que les matrius de la primera i segona forma fonamental queden de la següent manera:

$$I_p = \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix},\ \mathbb{I}_p = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La curvatura de Gauss és $K(u,v) = \frac{-1}{(1+u^2+v^2)^2} < 0$ i, per tant, tots els punts són hiperbòlics. Finalment, la curvatura mitjana pren la forma:

$$H(u,v) = -\frac{uv}{(1+u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

2. Sigui la carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ tal que $\mathcal{U} = (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ i $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definit de la següent forma, amb $u \in (0,2\pi), v \in (0,2\pi)$ i $a > b$:

$$\varphi(u,v) = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u).$$

Les derivades φ_u i φ_v són fàcils de calcular i són les següents:

$$\varphi_u = (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u),\ \varphi_v = (-(a+b\cos u)\sin v, (a+b\cos u)\cos v, 0).$$

Per tant, podem calcular $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = b^2$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$ i $E = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = (a + b\cos v)^2$. Aleshores:

$$e = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = b,\ g = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \cos u(a{+}b\cos u),\ f = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = 0.$$

La curvatura de Gauss queda:

$$K(u,v) = \frac{\cos u}{b(a + b\cos u)} > 0,\ \text{ja que } a + b\cos u = 0 \iff \cos u = \frac{-a}{b} \notin [-1,1].$$

El signe de K depèn de $\cos u$. Si $\cos u = 0$, aleshores $K = 0$; per tant, els valors corresponents $u = \frac{\pi}{2}$ o bé $u = \frac{3\pi}{2}$, seran punts parabòlics. Si $\cos u < 0$, $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ i $K < 0$ (regió de punts hiperbòlics). Finalment, si $\cos u > 0$, $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i $K > 0$ (regió de punts el·líptics).

2.7 Símbols de Christoffel

Sigui S una superfície regular, orientada i $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta de S, $N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$. Donat $p \in \varphi(\mathcal{U})$, tenim que la referència (*triedre*) $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ (ometem el punt p per no sobrecarregar la notació). Si la derivem respecte u, v, tenim:

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_{uu} = \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + \ell_1 N & N_u = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \\ \varphi_{uv} = \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + \ell_2 N & N_v = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v \\ \varphi_{vu} = \Gamma^1_{21}\varphi_u + \Gamma^2_{21}\varphi_v + \hat{\ell}_2 N & \\ \varphi_{vv} = \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + \ell_3 N & \end{array}\right| \qquad dN = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Tenim que Γ^k_{ij}, $\ell_1, \ell_2, \hat{\ell}_2, \ell_3$ són funcions diferenciables en $\mathcal{U}$, a_{ij} són els coeficients de la matriu de l'operador dN.

Definició 2.7.1 (Símbols de Christoffel). A les funcions Γ^k_{ij} se les anomena *símbols de Christoffel* d'S en la carta $(\mathcal{U}, \varphi)$.

Notació 2.7.2. Se sol identificar $1 \longmapsto u$ i $2 \longmapsto v$, de manera que Γ^2_{12} es correspon amb Γ^v_{uv}.

Propietat 2.7.3. *Tenim:*

1. $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ *i, per tant,* $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21}$ *i* $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21}$. *De la mateixa manera,* $\hat{\ell}_2 = \ell_2$.
2. $e = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \ell_1$, $f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \ell_2$ *i* $g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = \ell_3$.

3. *$\langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$, i això és el mateix que $\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$. De la mateixa manera, $\langle \varphi_v, \varphi_{uu} \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$ i això és el mateix que $\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G$.*

$$\begin{aligned} E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle &\implies E_u = 2\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle \implies \frac{1}{2} E_u = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F. \\ &\implies E_v = 2\langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle \implies \frac{1}{2} E_v = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F. \\ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle &\implies \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle \implies F_u - \frac{1}{2} E_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G. \end{aligned}$$

Així doncs, podem escriure vuit equacions en les incògnites Γ_{ij}^k (en falten sis) i les podem agrupar de dos en dos i ens queden quatre sistemes de dos equacions amb dues incògnites.

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

En tots els casos, el determinant de la matriu del sistema és $EG - F^2 \neq 0$, pel que existeix una única solució. Podem escriure les solucions de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u & \frac{1}{2} E_v & F_v - \frac{1}{2} G_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u & \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix}.$$

2.8 Isometries i teorema egregi de Gauss

Definició 2.8.1 (Difeomorfime, isometria). Siguin S_1, S_2 dues superfícies regulars. Direm que un difeomorfisme $F : S_1 \longrightarrow S_2$ és una isometria si per a cada $p \in S_1$, $d_p(F) : T_p(S_1) \longrightarrow T_{F(p)}(S_2)$ és una isometria[8], és a dir, si $v, w \in T_p(S_1)$, aleshores:

$$I_p^{S_1}(v, w) = I_{F(p)}^{S_2}(d_p(F(v)), d_p(F(w))).$$

Definició 2.8.2 (Isometria local). Siguin S_1, S_2 dues superfícies regulars i sigui $p \in S_1$ i $\mathcal{V}$ un entorn obert de p en S_1. Una aplicació diferenciable $F : \mathcal{V} \longrightarrow S_2$ és una isometria local en p si existeix $\mathcal{V}' \subset S_2$ un entorn obert de $F(p)$ en S_2 i l'aplicació $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ tal que $q \longmapsto F(q)$ és una isometria en el sentit anterior.

Definició 2.8.3 (Localment isomètrics). Amb la notació de la definició 2.8.2, si per a cada $p \in S_1$ existeix una isometria local $F : \mathcal{V} \longrightarrow S_2$ en p i per a cada $q \in S_2$ existeix una isometria local $G : \mathcal{W} \longrightarrow S_1$ en q es diu que S_1, S_2 són localment isomètriques.

[8] Evidentment, no estem definint la noció d'isometria a partir de la mateixa. En teoria, se suposa que ho vam veure a Àlgebra Lineal.

Observació 2.8.4. Quina és la diferència, doncs, entre isometria local i global? Tota local és global? És evident que si dues superfícies són isomètriques també són localment isomètriques, però no a l'inrevés. A continuació un exemple de què el recíproc és fals.

Exemple 2.8.5. $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ són localment isomètrics però no són isomètrics (no són homeomorfes, ho veurem en més detall a Topologia Global). Vegem que són localment isomètriques: sigui una carta en S_2 definida per:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (0,2\pi) & \longrightarrow & S_2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\cos u, \sin u, v) \end{array}$$

Per a calcular la primera forma fonamental d'S_2, tenim que $\varphi_u = (-\sin u, \cos u, 0)$ i $\varphi_v = (0,0,1)$, pel que $E = 1, F = 0, G = 1$. Per a tot punt d'S_2 tenim que:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

En $\mathbb{R}^2$, amb la mètrica estàndard (la base és $\{(1,0),(0,1)\}$), la primera forma I coincideix amb la de (2.6). Construïm un difeomorfisme F entre un obert del pla i un del cilindre, que en aquest cas ens valdrà prendre l'aplicació carta (i.e. $F = \varphi : S_1 \longrightarrow S_2$). Sigui $p = (u,v) \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V} \subset S_1$ un entorn obert de p. Definim $\tilde{F} : S_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació diferenciable tal que:

$$d_{(u,v)}\tilde{F} = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on la base està formada pels vectors columna. Hem de veure que en l'espai tangent es conserva la mètrica, seguint amb $F = \varphi : S_1 \longrightarrow S_2$:

$$d_{(u,v)}(F) : T_p(S_1) \longrightarrow T_{F(p)}(S_2)$$

Proposició 2.8.6 (Fórmula de Gauss). *Sigui S una superfície regular orientada i $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta coordenada de S. Aleshores:*

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 = -EK_S, \ -E > 0. \tag{2.7}$$

Γ_{ij}^k són els símbols de Christoffel en $(\mathcal{U}, \varphi)$, $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$ i K_S és la curvatura de Gauss.

Demostració. Tenim que $(\varphi_{uu})_v = (\varphi_{uv})_u$. Com:

$$\varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v + eN, \ \varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + fN \text{ i } \varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + fN. \tag{2.8}$$

podem posar:

$$(\varphi_{uu})_v = \Gamma_{11}^1\varphi_{uv} + (\Gamma_{11}^1)_v\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_{vv} + (\Gamma_{11}^2)_v\varphi_v + e_vN + eN_v.$$
$$(\varphi_{uv})_u = \Gamma_{12}^1\varphi_{uu} + (\Gamma_{12}^1)_u\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_{vu} + (\Gamma_{12}^2)_u\varphi_v + f_uN + fN_u.$$

Igualant les dues expressions, ja que $(\varphi_{uu})_v = (\varphi_{uv})_u$, i agrupant els coeficients de φ_u, φ_v en termes de (2.8)[9], podem igualar els coeficients de φ_v a banda i banda de la igualtat:

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + ea_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + fa_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u$$
$$\iff ea_{22} - fa_{21} = \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{11}^2)_v$$

Finalment, com

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2},\ a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2},$$

obtenim:

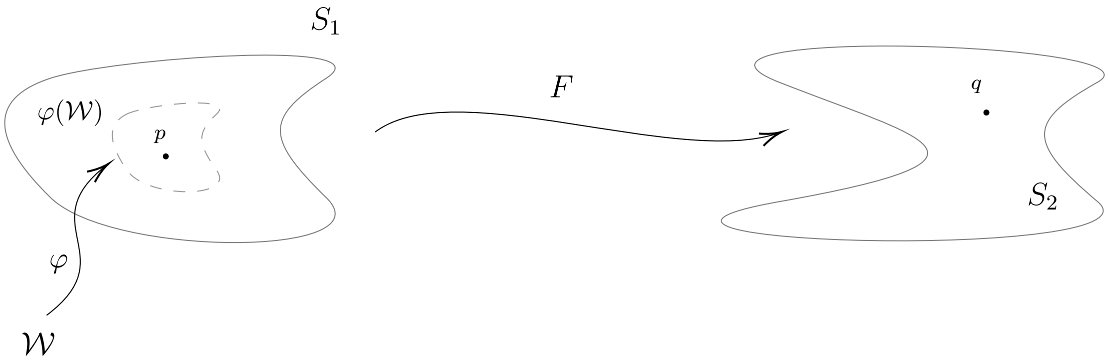
$$\frac{1}{EG - F^2}(e(fF - gE) - f(eF - fE)) = -E\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -EK.$$

I, com volíem:

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 = -EK.$$ ■

Teorema 2.8.7 (Egregi de Gauss). *Siguin S_1, S_2 superfícies regulars, $p \in S_1$, $\mathcal{V}$ un entorn obert de S_1 i $F : \mathcal{V} \longrightarrow S_2$ una isometria local en p. Aleshores, $K_{S_1}(p) = K_{S_2}(F(p))$ (és a dir, que les isometries locals conserven la curvatura de Gauss).*

Demostració. Posem $q = F(p)$, sigui $(\mathcal{W}, \varphi)$ una carta coordenada de S_1, $p \in \varphi(\mathcal{W})$ tal que $\varphi(\mathcal{W}) \subset \mathcal{V}$. Denotem $\psi = F \circ \varphi$.



Aleshores, $F(\varphi(\mathcal{W}))$ és un obert de S_2 (ja que $F : \mathcal{V} \longrightarrow S_2$ és una isometria local). Si $(a, b) \in \mathcal{W}$, $p = \varphi(a, b)$ tenim:

$$\frac{\partial}{\partial u}(F \circ \varphi) = \frac{\partial \psi}{\partial u} = \psi_u \implies (\psi_u)_{|(a,b)} = d_p(F) \circ (\varphi_u)_{|(a,b)} = d_p(F(\varphi_u)_{|(a,b)}),$$

pel que $d_p(F) : T_p(S_1) \longrightarrow T_{F(p)}(S_2)$. Anàlogament, $\psi_v = d_p(F(\varphi_v))$.

Amb tot, $(\mathcal{W}, \psi)$ és una carta en S_2 i $q \in \psi(\mathcal{W})$, ja que $\psi : \mathcal{W} \longrightarrow \psi(\mathcal{W})$ és un homeomorfisme[10] i $\{\psi_u, \psi_v\}$ són linealment independents[11]. Els coeficients de la primera forma fonamental I_p

[9] També usem que $N_u = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$ i $N_v = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$.
[10] Perquè $\varphi : \mathcal{W} \longrightarrow \varphi(\mathcal{W})$ ho és i F és una isometria local.
[11] Perquè $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ ho són i $d_p(F)$ és un isomorfisme.

de S_1 en la carta $(\mathcal{W}, \varphi)$ surten del fet que F és una isometria (ometem (a, b) per a no carregar la notació):

$$E_{S_1}(p) = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle d_p(F(\varphi_u)), d_p(F(\varphi_u)) \rangle = \langle \psi_u, \psi_u \rangle = E_{S_2}(q),$$

que són les coeficients de $I_{F(p)}$ de S_2 respecte de la carta $(\mathcal{W}, \psi)$. En la segona igualtat és on hem usat que F és una isometria local. Anàlogament,

$$F_{S_1}(p) = F_{S_2}(q),\ G_{S_1}(p) = G_{S_2}(q).$$

Usant (2.7),

$$K = -\frac{1}{E} \cdot \underbrace{\left((\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} \right)}_{\text{es calcula en termes de la primera fórmula fonamental}}.$$

Ens acaba sortint que $K_{S_1}(p) = K_{S_2}(q)$. ■

Definició 2.8.8 (Corba regular a trossos). Es diu que una corba $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una corba diferenciable a trossos si existeix $\Sigma \subset I$ finit tal que per a cada component arc-connexa J de $I \setminus \Sigma$, l'aplicació $\gamma_{|J} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és diferenciable .

Observació 2.8.9. Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és diferenciable, $a, b \in I$ i $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b)$, tenim:

$$\operatorname{long}(\gamma; p, q) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_{[a,b]\setminus\Sigma} \|\gamma'(t)\|\, dt\,.$$

Hem usat que Σ és finit, el conjunt és de mesura zero; pel que no cal tenir-lo en compte per a calcular la integral.

Definició 2.8.10. Sigui S una superfície regular, $p, q \in S$. Aleshores, podem definir una distància:

$$d_S(p, q) = \int \left\{ \operatorname{long}(\gamma; p, q) \mid \gamma \text{ és una corba diferenciable a trossos, } \gamma \subset S,\ p, q \in \gamma \right\}$$

Exercici 2.8.11. *L'aplicació d és una distància en S.*

Idea de la demostració. Totes les propietats són immediates llevat de veure que si $d_S(p, q) = 0$, aleshores $p = q$. Per provar això, observem que $d_S(p, q) \leq \|p - q\|$, on $\|\cdot\|$ és la norma euclidiana en $\mathbb{R}^3$. ■

Lema 2.8.12. *Sigui S una superfície regular, $p \in S$ i $v \in T_p(S)$. Suposem també que tenim una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ d'S de manera que $p = \varphi(a, b) \in \varphi(\mathcal{U})$. Tindrem que $T_p(S)$ té base $\{(\varphi_u)_{|(a,b)}, (\varphi_v)_{|(a,b)}\}$; per tant, $v = \alpha\varphi_u + \beta\varphi_v$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sigui $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ la corba*

$\gamma(t) = \varphi((a,b) + t(\alpha,\beta))$ està ben definida per a ε prou petit, ja que en tal cas podem assegurar que $(a,b) + t(\alpha,\beta) \in \mathcal{U}$ per a tot $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Per tant:

$$\|v\| = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} d_S(p, \gamma(t)).$$

En altres paraules, prenent distàncies sobre la superfície podem conèixer la curvatura de Gauss.

Demostració. Observem que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} d_S(p,\gamma(t)) \geq \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\|\gamma(t) - \gamma(0)\| = \left\|\lim_{t\to 0}(\gamma(t) - \gamma(0))\right\| = \|\gamma'(0)\| = \|v\|.$$

Ens queda que $\gamma(t) = \varphi((a,b) + t(\alpha,\beta)) = \varphi(a + t\alpha, b + t\beta)$ i $\gamma'(0) = \alpha\varphi_u + \beta\varphi_v = v$. Per tant,

$$\frac{1}{t} d_S(\gamma(t), p) \leq \frac{1}{t}\,\mathrm{long}(\gamma; \gamma(t), \gamma(0)) = \frac{1}{t}\int_0^t \|\gamma'(t)\|\, dt = \frac{1}{t}\cdot t \cdot \|v\| = \|v\|. \tag{2.9}$$

Això ens dona que $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} d_S(p,\gamma(t)) \leq \|v\|$[12]. Ajuntant-ho amb (2.9), $\|v\| = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} d_S(p,\gamma(t))$, com volíem. ∎

Observació 2.8.13. Recordem que podem passar de norma a producte escalar a través d'un resultat d'Àlgebra Lineal:

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle v+w, v+w\rangle - \langle v,v\rangle - \langle w,w\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right).$$

En el nostre cas (S és superfície regular, $p \in S$ i $E = T_p(S)$ i $\langle\cdot\rangle$ és la primera forma fonamental) tenim que la distància d_S determina la primera forma fonamental i, per tant, la curvatura de Gauss. Si es pogués fer un mapa d'una regió d'una esfera respectant totes les distàncies, aleshores la curvatura de Gauss d'un pla i d'una esfera haurien de ser iguals, i ja sabem que això no és cert.

[12] La funció $F : t \longmapsto \frac{1}{t}\int_0^t \|\gamma'(s)\|\, ds$ és una primitiva de $t \longmapsto \|\gamma'(t)\|$ i el límit a la dreta de la desigualtat anterior és la derivada de F en $t = 0$, per la regla de Barrow.

A

Recordatori de conceptes

A.1
Càlcul i anàlisi

Definició A.1.1 (Diferencial). Siguin $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ i $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ oberts, sigui:

$$\begin{array}{rcl} G: \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ x & \longmapsto & (G_1(x), \ldots, G_m(x)) \end{array}$$

una aplicació, on $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Si G és diferenciable en $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{U}$, aleshores el diferencial de G en a és la matriu jacobiana:

$$\mathrm{Jac}(G)(a) = d_a(G) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{|a}.$$

Observació A.1.2. Recordem també que si $H : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ és diferenciable en $G(a)$, aleshores $H \circ G$ és diferenciable en a i es verifica (regla de la cadena per funcions de diverses variables):

$$d_a(H \circ G) = d_{G(a)}(H) \cdot d_a(G).$$

Teorema A.1.3 (de la funció inversa). *Sigui $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un obert i*

$$\begin{array}{rcl} F: \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (F_1(x), \ldots, F_n(x)) \end{array}$$

una aplicació diferenciable, on $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Si $x_0 \in \mathcal{U}$ és tal que el determinant de la matriu jacobiana:

$$\mathrm{Jac}(F)(x_0) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{|x_0}$$

és no nul, aleshores existeixen entorns oberts $\mathcal{W}$ de x_0 en $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ de $F(x_0)$ en $\mathbb{R}^n$ tals que $F(\mathcal{W}) \subset \mathcal{V}$ i l'aplicació $\mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}$ tal que $x \longmapsto F(x)$ és un difeomorfisme (diferenciable, injectiva i amb inversa diferenciable).

Teorema A.1.4. *Sigui*

$$\begin{array}{rcl} F: \mathbb{R}^{n+m} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x, y) & \longrightarrow & F(x,y) = (F_1(x,y), \ldots, F_m(x,y)) \end{array}$$

una aplicació diferenciable, on $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_m)$. Sigui $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ tal que $F(x_0, y_0) = \mathbf{0}$. Suposem que la matriu

$$\mathrm{Jac}(F, y)(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{|(x_0,y_0)}$$

te determinant no nul. Aleshores existeix un obert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \in \mathcal{U}$ i existix un obert $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ tal que $y_0 \in \mathcal{V}$ de manera que, per a tot $x_1 \in \mathcal{U}$, existeix un únic $y_1 \in \mathcal{V}$ tal que $F(x_1, y_1) = 0$.

A més, la funció $g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ definida per $x_1 \longmapsto y_1$ és diferenciable i verifica $g(x_0) = y_0$.

Teorema A.1.5 (d'existència i unicitat de solucions de sistemes de EDOS). *Sigui $I \subset \mathbb{R}$ un interval obert, sigui $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un obert, sigui $F : \mathcal{U} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació diferenciable. Per a cada $(x_0, t_0) \in \mathcal{U} \times I$ existeix un interval obert $J \subset I$ tal que $t_0 \in J$ i existeix una funció $x : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que verifiquen:*

1. *La funció x és solució de l'equació diferencial $x'(t) = F(x(t), t)$, on $' = \frac{d}{dt}$, amb la condició inicial $x(t_0) = x_0$.*
2. *Si $J' \subset I$ és un interval obert i $y : J' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és una altra solució de l'equació diferencial anterior, que verifica la mateixa condició inicial, aleshores $J' \subset J$ i, a més, $y = x_{|J'}$.*

Si la funció F és de la forma $F(x, y) = A(t) \cdot x + b(t)$, on $A(t) : I \longrightarrow M(n, \mathbb{R})$ és una matriu quadrada de funcions diferenciables i $b(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és un vector de funcions diferenciables, aleshores $J = I$.

A.2 Producte vectorial

Recordem que el producte vectorial de dos vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$ i $v = (v_1, v_2, v_3)$, $u, v \in \mathbb{R}^3$, és per definició el vector $w = (w_1, w_2, w_3)$ que satisfà la següent igualtat entre polinomis:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = w_1 x + w_2 y + w_3 z.$$

En termes concrets,

$$u \times v = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1). \tag{A.1}$$

Les propietats bàsiques dels determinants impliquen immediatament que el producte vectorial defineix una operació bilineal i antisimètrica $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (l'antisimetria vol dir que $u \times v = -v \times u$). A més, se satisfà:

$$u \times v = 0 \iff u, v \text{ són linealment dependents.}$$

També se satisfà la següent fórmula per a qualssevol $u, v, w \in \mathbb{R}^3$:

$$\det(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle,$$

on $\det(u, v, w)$ denota el determinant de la matriu 3×3 que té per columnes els vectors u, v, w. Aquesta fórmula es dedueix immediatament de (A.1), substituint x, y, z per les coordenades w_1, w_2, w_3 de w i tenint present que el determinant d'una matriu quadrada no canvia si rotem cíclicament les files o si transposem la matriu. El producte vectorial només existeix en dimensió 3.

Proposició A.2.1. *Sigui $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació bilineal exhaustiva i antisimètrica tal que $B(u, v) = 0$ si, i només si, u, v són linealment dependents. Aleshores, $n = 3$.*

Bibliografia

[BL23] Thomas F. Banchoff i Stephen Lovett. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. 3a ed. CRC Press, 2023. isbn: 9781032281094, 9781032047782, 9781003295341.