TEXTOS DOCENTS

355

MATRIUS I VECTORS

I. Llerena
R. M. Miró-Roig

Departament d'Àlgebra i Geometria

UNIVERSITAT DE BARCELONA

TEXTOS DOCENTS

355

MATRIUS I VECTORS

I. Llerena
R. M. Miró-Roig

Departament d'Àlgebra i Geometria

Publicacions i Edicions

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Adolf Florensa, s/n; 08028 Barcelona; tel. 934 035 530; fax 934 035 531;
comercial.edicions@ub.edu; www.publicacions.ub.edu

ISBN: 978-84-9168-551-7

Índex

Introducció

Aquestes notes abasten el temari de l'assignatura Matrius i Vectors, que, amb motiu dels nous plans d'estudi, s'ha implementat a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. Aquest text-guia correspon a una assignatura pont entre el batxillerat i un curs clàssic d'àlgebra lineal i està pensat per fomentar en l'alumnat l'hàbit de discórrer i demanar-se el perquè de les coses. Al llarg del curs es pretén que l'alumne adquireixi destresa en la manipulació dels objectes més bàsics de l'àlgebra lineal: vectors i matrius. Els mètodes que aprendrà en aquest curs deixaran l'alumne al llindar de l'àlgebra abstracta.

Així doncs, l'objectiu de l'assignatura no és només l'adquisició dels coneixements i les habilitats en el maneig dels objectes i les tècniques inclosos en el programa; també pretén assolir el desenvolupament progressiu de la capacitat de comprensió de conceptes abstractes, i l'hàbit de rigor en demostracions i resolució de problemes.

El temari s'ha dividit en set capítols i un apèndix en què s'introdueixen nocions bàsiques del programa *Mathematica*. Cada capítol conté una secció dedicada a la utilització d'aquest programa per resoldre les qüestions tractades en el capítol i una sèrie d'exemples resolts amb el programa per tal que l'estudiant vagi adquirint experiència en l'ús d'un programa informàtic. Cada capítol conté també una llarga col·lecció d'exercicis i problemes de dificultat variable. Hem procurat incloure-hi problemes de tots els nivells, per tal que l'alumne s'exerciti gradualment i pugui assolir els objectius desitjats. Els capítols acaben amb una secció, que hem anomenat d'autoavaluació, en la qual, mitjançant una sèrie de qüestions, es pretén que l'alumnat reflexioni sobre l'abast dels conceptes introduïts i les seves implicacions.

Volem agraïr a Gemma Colomé, Elisenda Feliu i Alberto Fernández la lectura atenta que han fet del text i els seus suggeriments, que han estat una contribució inestimable i decisiva per a l'elaboració d'aquest llibre.

Barcelona, febrer del 2010

Símbols lògics i de teoria de conjunts

El llenguatge matemàtic sovint es nodreix de símbols per designar frases o paraules. Fem una llista dels més comuns i que seran d'ús freqüent al llarg d'aquest curs:

$\forall$	per a tot	$\exists$	existeix
$\Longrightarrow$	implica	$\Longleftrightarrow$	si i només si
$:=$	igual per definició	$\square$	fi de la demostració
$\cup$	unió	$\cap$	intersecció
$\subset$	contingut	$\supset$	conté
$\emptyset$	conjunt buit	$\in$	pertany (a un conjunt)
$\setminus$	menys (en conjunts)	$\notin$	no pertany
$\mathbb{N}$	nombres naturals	$\mathbb{Z}$	nombres enters
$\mathbb{Q}$	nombres racionals	$\mathbb{R}$	nombres reals
$\mathbb{C}$	nombres complexos	$\delta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$	delta de Kronecker
$\sum$	suma	$\prod$	producte

El símbol *sumatori* $\sum$ indica una suma que té per sumands l'expressió que segueix al sumatori en variar un índex. La variació d'aquest índex cal indicar-la en el sumatori (llevat que sigui molt evident). Anàlogament per al producte $\prod$. Per exemple:

$$\sum_{i=1}^{5} 2^i = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$$

$$\prod_{i=1}^{5} 2^i = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5.$$

En ocasions, els signes que varien són més d'un. La situació següent es presenta sovint.

Donats els conjunts

$$\{a_1, \ldots, a_k\}, \{b^1, \ldots, b^m\} \quad \text{i} \quad \{c_1^1, c_1^2, \ldots, c_1^k, c_2^1, c_2^2, \ldots, c_2^k, \ldots, c_m^1, \ldots, c_m^k\},$$

tenim

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le m}} a_i c_j^i b^j \\
&= a_1 c_1^1 b^1 + a_1 c_2^1 b^2 + \cdots + a_1 c_m^1 b^m + a_2 c_1^2 b^1 + a_2 c_2^2 b^2 + \cdots + a_k c_m^k b^m \\
&= a_1 \left(\textstyle\sum_{j=1}^m c_j^1 b^j \right) + \cdots + a_k \left(\textstyle\sum_{j=1}^m c_j^k b^j \right) \\
&= \left(\textstyle\sum_{i=1}^k a_i c_1^i \right) b^1 + \cdots + \left(\textstyle\sum_{i=1}^k a_i c_m^i \right) b^m \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^k a_i \left(\textstyle\sum_{j=1}^m c_j^i b^j \right) = \textstyle\sum_{j=1}^m \left(\textstyle\sum_{i=1}^k a_i c_j^i \right) b^j.
\end{aligned}$$

El *producte cartesià* de dos conjunts A i B és el conjunt de parells ordenats

$$A \times B := \{ (a, b) \text{ parell ordenat } \mid a \in A,\ b \in B \}.$$

Més en general, el *producte cartesià* d'una família de conjunts $A_i,\ i = 1, \ldots, n$, és el conjunt de *n-ples* (ordenades) $(a_1, \ldots, a_n)$ amb $a_i \in A_i,\ \forall\, i$. Per exemple,

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} := \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Sovint, el matemàtic fa servir lletres gregues:

lletra	minúscula	majúscula
alfa	α	
beta	β	
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
èpsilon	ϵ o ε	
zeta	ζ	
eta	η	
theta	θ o ϑ	Θ
iota	ι	
kappa	κ	
lambda	λ	Λ
mi	μ	
ni	ν	
csi	ξ	Ξ
pi	π	Π
ro	ρ o ϱ	
sigma	σ	Σ
tau	τ	
ípsilon	υ	Υ
fi	ϕ o φ	Φ
khi	χ	
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω

Les majúscules que no hi apareixen són iguals a lletres del nostre alfabet.

Capítol 1

Matrius i vectors

En aquest primer capítol presentem els principals objectes matemàtics a què està dedicat el curs: les n-ples de nombres reals o complexos, que anomenarem *vectors*, i les taules rectangulars de nombres reals o complexos, que anomenarem *matrius*. Són els objectes que primer apareixen en infinitat de problemes matemàtics i en les seves aplicacions. Per això el seu estudi, i el de les operacions que es fan amb ells, són essencials en qualsevol camp que faci servir eines matemàtiques.

1.1. Els nombres reals i els nombres complexos

Designarem per $\mathbb{R}$ el conjunt de nombres reals. En aquest conjunt tenim definides dues operacions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & ab \end{array}$$

que s'anomenen *suma* i *producte* respectivament. L'operació suma té les propietats següents:

(1) Associativa: $\forall\ a,b,c \in \mathbb{R}$, $(a+b)+c = a+(b+c)$.

(2) Commutativa: $\forall\ a,b \in \mathbb{R},\ a+b = b+a$.

(3) L'element $0 \in \mathbb{R}$ compleix: $\forall\ a \in \mathbb{R},\ a+0 = 0+a = a$. Es diu que 0 és l'*element neutre* de la suma de reals.

(4) $\forall\ a \in \mathbb{R}$, l'element $-a$ compleix $a + (-a) = 0 = (-a) + a$. Es diu que $-a$ és l'*element oposat* d'a.

Observació 1.1.1. Aquestes quatre propietats de la suma s'acostumen a resumir dient que $(\mathbb{R}, +)$ és un *grup commutatiu o abelià*.

L'operació producte té les següents propietats:

(1) Associativa: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$, $(ab)c = a(bc)$.

(2) Commutativa: $\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ ab = ba$.

(3) L'element $1 \in \mathbb{R}$ compleix: $\forall\ a \in \mathbb{R},\ a1 = 1a = a$. Es diu que 1 és l'*element neutre* o *unitat* del producte de reals.

(4) $\forall\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, l'element $\frac{1}{a}$ compleix $a(\frac{1}{a}) = 1 = (\frac{1}{a})a$. Es diu que $\frac{1}{a}$ és l'*element invers* de a, i sovint el denotem a^{-1}. Observeu que 0 no té element invers.

Les operacions suma i producte estan relacionades per la següent propietat:

Distributiva: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b)c = ac + bc$.

Observació 1.1.2. Aquestes propietats de la suma i el producte s'acostumen a resumir dient que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ és un *cos commutatiu*. El conjunt de números racionals $\mathbb{Q}$ amb la seva suma i producte compleixen propietats similars i, per aquest motiu, també es diu que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ és un cos commutatiu.

Designarem per $\mathbb{C}$ el conjunt de parells de nombres reals, i els anomenarem *nombres complexos*. Farem servir la notació següent, on $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a + bi := (a, b), \qquad a := (a, 0), \qquad bi := (0, b), \qquad i := (0, 1).$$

A $\mathbb{C}$ definim dues operacions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}; \\ (a + bi,\ a' + b'i) & \mapsto & (a + a') + (b + b')i \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a + bi,\ a' + b'i) & \mapsto & (aa' - bb') + (ab' + a'b)i \end{array}$$

que s'anomenen *suma* i *producte*, respectivament. En concret, tenim: $i^2 = ii = -1$.

A més a més:

$$a + a' = (a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0), \qquad aa' = (a, 0)(a', 0) = (aa', 0).$$

És a dir, les operacions suma i producte de dos reals $a, a' \in \mathbb{R}$ donen el mateix si les considerem com a reals o com a complexos. Això permet identificar el real $a \in \mathbb{R}$ amb el complex $a = (a, 0) \in \mathbb{C}$ i considerar

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

A $\mathbb{C}$ l'operació suma té les mateixes propietats que la suma a $\mathbb{R}$:

(1) Associativa: $\forall\ z, z', z'' \in \mathbb{C}$, $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.

(2) Commutativa: $\forall\ z, z' \in \mathbb{C},\ z + z' = z' + z$.

(3) L'element $0 \in \mathbb{C}$ compleix: $\forall\ z \in \mathbb{C},\ z + 0 = 0 + z = z$. Es diu que 0 és l'*element neutre* de la suma de complexos.

(4) $\forall\ z = a + bi \in \mathbb{C}$, l'element $-z := (-a) + (-b)i$ compleix $z + (-z) = 0 = (-z) + z$. Es diu que $-z$ és l'*element oposat* de z.

A $\mathbb{C}$ l'operació producte té les propietats següents:

(1) Associativa: $\forall\ z, z', z'' \in \mathbb{C}$, $(zz')z'' = z(z'z'')$.

(2) Commutativa: $\forall\ z, z' \in \mathbb{C},\ zz' = z'z$.

(3) L'element $1 \in \mathbb{C}$ compleix: $\forall\ z \in \mathbb{C},\ z1 = 1z = z$. Es diu que 1 és l'*element neutre* o *unitat* del producte de complexos.

(4) $\forall\ z = a + bi \in \mathbb{C},\ z \neq 0$, l'element $z^{-1} := \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i$ compleix $zz^{-1} = 1 = z^{-1}z$. Es diu que z^{-1} és l'*element invers* d'a. Observeu que 0 no té element invers.

Les operacions suma i producte estan relacionades per la propietat següent:

Distributiva: $\forall\ z, z', z'' \in \mathbb{C}$, $(z + z')z'' = zz'' + z'z''$.

Totes aquestes propietats de les operacions dels números complexos es poden comprovar sense dificultat. Per exemple, comprovem que

$$(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\,i\right)=$$

$$\left(a\,\frac{a}{a^2+b^2}+b\,\frac{b}{a^2+b^2}\right)+\left(-a\,\frac{b}{a^2+b^2}+b\,\frac{a}{a^2+b^2}\right)\,i=1.$$

Observem que, per a tot $z=a+bi\in\mathbb{C}$, tenim $0z=0$, d'on resulta que 0 no pot tenir element invers.

Es diu *conjugat* d'un complex $z=a+bi$ al complex

$$\bar{z}:=a-bi.$$

Es diu *mòdul* d'un complex $z=a+bi$ al número real i positiu

$$\|z\|:=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}.$$

Observació 1.1.3. $(\mathbb{C},+,\cdot)$ també és un cos commutatiu.

1.2. Els espais vectorials $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$

Definició 1.2.1. Una n-pla ordenada de nombres reals; és a dir, un element $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ s'anomena *vector (real).*

Anomenarem *espai vectorial real* $\mathbb{R}^n$ al conjunt

$$\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\mid x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\}$$

junt amb les dues operacions següents:

Suma de vectors. Donats dos vectors $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ es defineix la seva suma com el vector:

$$x+y=(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n):=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Producte d'un real per un vector. Donat un vector $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ i un real $\alpha \in \mathbb{R}$ es defineix el seu producte com el vector:

$$\alpha y = \alpha(y_1, \ldots, y_n) := (\alpha y_1, \ldots, \alpha y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Als elements de $\mathbb{R}$, generalment se'ls anomena *escalars*.

Definició 1.2.2. Una n-pla ordenada de números complexos, és a dir un element $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, s'anomena *vector (complex)*.

Anomenarem *espai vectorial complex* $\mathbb{C}^n$ al conjunt

$$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \mid z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\}$$

junt amb les dues operacions següents:

Suma de vectors. Donats dos vectors $z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ es defineix la seva suma com el vector:

$$z + w = (z_1, \ldots, z_n) + (w_1, \ldots, w_n) := (z_1 + w_1, \ldots, z_n + w_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Producte d'un complex per un vector. Donat un vector $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ i un complex $\alpha \in \mathbb{C}$ es defineix el seu producte com el vector:

$$\alpha w = \alpha(w_1, \ldots, w_n) := (\alpha w_1, \ldots, \alpha w_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Als elements de $\mathbb{C}$, generalment se'ls anomena *escalars*.

Exemple 1.2.3:

1. Si $x = (2, 5), y = (-1, 7) \in \mathbb{R}^2$, aleshores $x + y = (1, 12) \in \mathbb{R}^2$.
2. Si $y = (-1, 7, 0) \in \mathbb{R}^3$ i $\alpha = -2 \in \mathbb{R}$, aleshores $\alpha y = (2, -14, 0) \in \mathbb{R}^3$.
3. Si $z = (2i, 5 - i), w = (-1, i) \in \mathbb{C}^2$, aleshores $z + w = (-1 + 2i, 5) \in \mathbb{C}^2$.
4. Si $w = (-i, 1+i, 0) \in \mathbb{C}^3$ i $\alpha = 2i \in \mathbb{C}$, aleshores $\alpha w = (2, -2+2i, 0) \in \mathbb{C}^3$.

• **Propietats de la suma de vectors reals**:

(1) Associativa: $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $(x+y)+z = x+(y+z)$.

(2) Commutativa: $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n,\ x+y = y+x$.

(3) $\vec{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ compleix: $\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ x+\vec{0} = \vec{0}+x = x$. Es diu que $\vec{0}$ és l'*element neutre* de la suma de vectors.

(4) $\forall\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, el vector $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$ compleix $x + (-x) = \vec{0} = (-x) + x$. Es diu que $-x$ és l'*element oposat* de x.

La demostració d'aquestes propietats es basa en les corresponents propietats de $\mathbb{R}$. La suma a $\mathbb{C}^n$ compleix propietats similars, basades en les corresponents propietats de $\mathbb{C}$.

En particular, tant $(\mathbb{R}^n, +)$ com $(\mathbb{C}^n, +)$ són grups commutatius.

• **Propietats del producte de vectors per escalars**:

(1) Distributiva respecte la suma de vectors: $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ i $\forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$.

(2) Distributiva respecte la suma d'escalars: $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ i $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$.

(3) Pseudoassociativa: $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ i $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

(4) Llei d'identitat: $\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ 1x = x$.

El producte de vectors complexos per un complex té les mateixes propietats. En ambdós casos la comprovació d'aquestes propietats es basa en les propietats de la suma i el producte a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$.

1.3. L'espai vectorial de les matrius

Definició 1.3.1. Una *matriu d'ordre* $m \times n$ amb coeficients a $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) és una caixa formada per mn elements de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) distribuïts en m files i n columnes:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Denotem per a_i^j l'element de la fila j i la columna i, i denotem per $A = (a_i^j)$ la matriu (1.1) i per $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (resp. $M_{m\times n}(\mathbb{C})$) el conjunt de matrius d'ordre $m\times n$ a coeficients reals (resp. complexos).

Exemple 1.3.2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

és una matriu d'ordre 2×4 i, per exemple, $a_3^1 = 3$ i $a_2^2 = 5$.

Observació 1.3.3:

1. Per simplificar l'exposició, d'ara endavant ens referirem quasi exclusivament al cas real, però tot val exactament igual pel cas complex.

2. Nosaltres farem servir la notació que acabem d'introduir, però és també molt comú fer servir la notació $a_{j,i}$ per a indicar l'element que ocupa la fila j, columna i.

• S'anomena *matriu nul·la*, i es denota per 0, la matriu amb tots els seus coeficients zero.

• S'anomena *matriu fila* una matriu d'ordre $1 \times n$ i *matriu columna* una matriu d'ordre $m \times 1$.

• La *transposada d'una matriu* $A = (a_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ és la matriu $A^t = (b_i^j) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ definida per $b_i^j = a_j^i$; és a dir, les files de la matriu transposada són les columnes de la matriu donada. És fàcil comprovar que $(A^t)^t = A$. Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Una matriu $A = (a_i^j) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ que coincideixi amb la seva transposada s'anomena *matriu simètrica*; és a dir,

$$A \quad \text{és simètrica} \quad \Leftrightarrow \quad A = A^t \quad \Leftrightarrow \quad a_i^j = a_j^i, \quad \forall\ i, j.$$

Una matriu $A = (a_i^j) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ que coincideixi amb l'oposada de la seva transposada s'anomena *matriu antisimètrica*; és a dir, si

$$A \quad \text{és antisimètrica} \quad \Leftrightarrow \quad A = -A^t \quad \Leftrightarrow \quad a_i^j = -a_j^i, \quad \forall\ i, j.$$

Considerem, per exemple, les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

A és una matriu simètrica; els elements en posició simètrica respecte la diagonal són iguals. B és una matriu antisimètrica; en aquestes matrius els elements de la diagonal han de ser 0 ja que $a_i^i = -a_i^i$.

• Anomenarem *matriu quadrada d'ordre* n a una matriu d'ordre $n \times n$. En tal cas els coeficients $a_1^1, a_2^2, \dots, a_n^n$ constitueixen la *diagonal principal* o simplement *diagonal*.

• Si els coeficients d'una matriu quadrada A situats per sota la diagonal principal són tots 0, és a dir, $a_i^j = 0$ si $j > i$, es diu que A és *triangular superior.* Si els coeficients d'una matriu quadrada A situats per sobre de la diagonal principal són tots 0, és a dir, $a_i^j = 0$ si $j < i$, es diu que A és *triangular inferior.* Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

A és una matriu triangular superior i B és una matriu triangular inferior.

• Les matrius quadrades que són simultàniament triangulars superiors i inferiors, s'anomenen *matrius diagonals.* Exemple:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

• La matriu diagonal d'ordre n amb tots els coeficients de la diagonal iguals a 1 es denota per I_n i s'anomena *matriu identitat d'ordre* n :

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Definició 1.3.4. S'anomena *espai vectorial de les matrius d'ordre* $m \times n$ el conjunt $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ junt amb les dues operacions següents:

Suma de matrius. Donades dues matrius $A = (a_i^j)$, $B = (b_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es defineix la seva suma sumant coeficient a coeficient; és a dir, $A + B := (a_i^j + b_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o, equivalentment,

$$A + B := \begin{pmatrix} a_1^1 + b_1^1 & a_2^1 + b_2^1 & \cdots & a_n^1 + b_n^1 \\ a_1^2 + b_1^2 & a_2^2 + b_2^2 & \cdots & a_n^2 + b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m + b_1^m & a_2^m + b_2^m & \cdots & a_n^m + b_n^m \end{pmatrix}.$$

Producte d'un real per una matriu. Donada una matriu $A = (a_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i un real $\alpha \in \mathbb{R}$ se'n defineix el producte per $\alpha A = \alpha(a_i^j) := (\alpha a_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o, equivalentment,

$$\alpha A := \begin{pmatrix} \alpha a_1^1 & \alpha a_2^1 & \cdots & \alpha a_n^1 \\ \alpha a_1^2 & \alpha a_2^2 & \cdots & \alpha a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_1^m & \alpha a_2^m & \cdots & \alpha a_n^m \end{pmatrix}.$$

Els elements de $\mathbb{R}$ també s'anomenen *escalars* de l'espai vectorial $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Exemple 1.3.5. Donat l'escalar $-4 \in \mathbb{R}$ i les matrius de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, tenim

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 8 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \qquad -4A = \begin{pmatrix} -4 & -16 & -12 \\ -20 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

• **Propietats de la suma**: La suma de matrius compleix les propietats:

(1) Associativa: $\forall\ A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(2) Commutativa: $\forall\ A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A + B = B + A$.

(3) La matriu nul·la 0 compleix: $\forall\ A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A + 0 = 0 + A = A$. Es diu que 0 és l'*element neutre* de la suma de matrius.

(4) Per a cada matriu $A = (a_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, la matriu $(-1)A$ compleix $A + (-1)A = 0 = (-1)A + A$. Es diu que $(-1)A$ és la *matriu oposada* de A i l'anomenarem $-A$.

La demostració d'aquestes propietats es basa en les corresponents propietats de $\mathbb{R}$.

Observació 1.3.6. Aquestes quatre propietats de la suma s'acostumen a resumir dient que $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +)$ és un *grup commutatiu o abelià*.

• **Propietats del producte per escalars**:

(1) Distributiva respecte de la suma de matrius: $\forall\ A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

(2) Distributiva respecte de la suma d'escalars: $\forall\ A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

(3) Pseudoassociativa: $\forall\ A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

(4) Llei d'identitat: $\forall\ A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $1A = A$.

La demostració d'aquestes propietats es basa en les corresponents propietats de $\mathbb{R}$.

1.4. Producte de matrius

Definició 1.4.1. Donades dues matrius $A = (a_j^i) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $B = (b_k^j) \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, en definim el producte com la matriu:

$$AB := (c_k^i) \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$$

on, per a cada i, k, amb $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq p$,

$$c_k^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i b_k^j = a_1^i b_k^1 + a_2^i b_k^2 + \cdots + a_n^i b_k^n.$$

Exemple 1.4.2. Donades les matrius amb coeficients reals

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}),$$

tenim $AB = \begin{pmatrix} 19 & -1 & -17 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Observació 1.4.3:

1. Observem que per fer el producte AB de dues matrius és necessari que el nombre de columnes de la matriu A sigui el mateix que el nombre de files de la matriu B.

2. Podem adonar-nos de la importància de l'ordre en què es multipliquen dues matrius, considerant el producte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 50 \end{pmatrix}.$$

   Si canviem l'ordre dels factors, tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 14 \\ 15 & 25 & 20 \\ 14 & 20 & 20 \end{pmatrix}.$$

   En aquest exemple, hem pogut fer els productes AB i BA, però no sempre és possible.

3. En general, encara que es puguin fer els dos productes AB i BA, no coincideixen. A l'exemple anterior hem obtingut matrius amb ordre diferent. Però encara que siguin matrius quadrades acostuma a passar que $AB \neq BA$. Per exemple:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   i

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

• **Propietats del producte de matrius**:

(1) Associativa: $A(BC) = (AB)C$, $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ i $C \in M_{p\times k}(\mathbb{R})$.

(2) Distributiva a la dreta: $A(B+C) = AB + AC$, $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.

(3) Distributiva a l'esquerra: $(A+B)C = AC + BC$, $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.

(4) Identitats: $I_m A = A = AI_n, \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(5) Pseudoassociativa: $\alpha(AB) = (\alpha A)B$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.

Observació 1.4.4. El producte no és una operació a $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, simplement perquè no sempre està definit. Ara bé, si $m = n$, aleshores sí que sempre podem multiplicar dues matrius. Les propietats de la suma i el producte a $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es resumeixen dient que $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ és un *anell no commutatiu*, si $n > 1$.

Proposició 1.4.5. *La transposada d'un producte de matrius és el producte de les transposades de les matrius en ordre invers:* $(AB)^t = B^t A^t$, *(sempre que el producte* AB *estigui definit).*

Demostració. Siguin $A = (a_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B = (b_i^j) \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, i siguin $A^t = (\alpha_i^j) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B^t = (\beta_i^j) \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$, amb $\alpha_i^j = a_j^i$, $\beta_i^j = b_j^i$. Per definició de producte de matrius, els coeficients de $AB = (c_i^j)$ són

$$c_i^j = a_1^j b_i^1 + \cdots + a_n^j b_i^n = \alpha_j^1 \beta_1^i + \cdots + \alpha_j^n \beta_n^i = \beta_1^i \alpha_j^1 + \cdots + \beta_n^i \alpha_j^n$$

i aquests són precisament els coeficients de $B^t A^t$.$\square$

1.5. Matrius per blocs

Moltes vegades és còmode considerar una matriu com una caixa formada per una taula de submatrius que s'anomenen *blocs*:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1^1 & \dots & A_r^1 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_1^s & \dots & A_r^s \end{array}\right)$$

on, naturalment, totes les matrius o blocs de la mateixa fila tenen el mateix nombre de files, i totes les situades a la mateixa columna tenen el mateix nombre de columnes.

Exemple 1.5.1:

1.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline R & S \end{array}\right) \qquad \text{amb } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 19 & 20 \end{pmatrix}.$$

2. Donada $A = (a_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, podem considerar cada fila com un bloc i escriure:

$$A = \left(\begin{array}{c} a^1 \\ \hline \vdots \\ \hline a^m \end{array}\right), \qquad a^j = \begin{pmatrix} a_1^j & \dots & a_n^j \end{pmatrix}.$$

O bé considerar cada columna com un bloc:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} a_1 & \dots \quad \dots & a_n \end{array}\right), \qquad a_i = \begin{pmatrix} a_i^1 \\ \vdots \\ a_i^m \end{pmatrix}.$$

Dues matrius del mateix ordre, representades com a matrius de blocs amb els mateixos ordres, poden sumar-se bloc per bloc:

$$A+B = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1^1 & \dots & A_r^1 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_1^s & \dots & A_r^s \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|c} B_1^1 & \dots & B_r^1 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_1^s & \dots & B_r^s \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1^1+B_1^1 & \dots & A_r^1+B_r^1 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_1^s+B_1^s & \dots & A_r^s+B_r^s \end{array}\right).$$

També es poden multiplicar dues matrius per blocs sempre que l'ordre de les matrius ho faci possible:

$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1^1 & \dots & A_r^1 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_1^s & \dots & A_r^s \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} B_1^1 & \dots & B_n^1 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_1^r & \dots & B_n^r \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1^1 & \dots & C_n^1 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline C_1^s & \dots & C_n^s \end{array}\right)$$

amb $C_i^j = A_1^j B_i^1 + \cdots + A_r^j B_i^r$, per a tot $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, s$.

Exemple 1.5.2:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & A \\ \hline 0 & I_s \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & R \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} M & N+AR \\ \hline 0 & R \end{array}\right)$$

1.6. Aplicacions definides per matrius

Un vector $y = (y_1, \dots, y_n)$ és un cas particular de matriu fila, encara que sovint els considerarem també com a matriu columna i, aleshores, hi posarem els índexs com a superíndexs: $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$.

Fixada una matriu $A = (a_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i considerant els vectors de $x \in \mathbb{R}^n$ com a matrius columna, els productes

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 x^1 + \cdots + a_n^1 x^n \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + \dots a_n^m x^n \end{pmatrix}$$

són vectors columna de $\mathbb{R}^m$. És a dir, la matriu A determina una aplicació

$$\begin{array}{rccc} f_A: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \mapsto & f_A(x) := Ax. \end{array}$$

Direm que f_A és l'*aplicació lineal* definida per A.

Molts problemes matemàtics es redueixen a l'estudi del comportament d'una aplicació lineal i, en particular, a trobar els vectors $x \in \mathbb{R}^n$ que s'apliquen en un vector donat $b \in \mathbb{R}^m$:

$$Ax = b.$$

A aquest problema dedicarem el capítol 2 i al capítol 7 estudiarem les aplicacions lineals.

1.7. *Mathematica*: Operacions amb matrius i vectors

Per al *Mathematica* un vector és una llista i una matriu una llista de llistes:

$\{a, b, c\}$	vector (a, b, c)
$\{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}\}$	matriu $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

Aquesta forma d'escriure les matrius es diu StandardForm. Si volem que el *Mathematica* mostri les matrius en la forma tradicional, és a dir com a un quadre de números, hem de fer servir l'ordre MatrixForm:

In[-]:= MatrixForm[$A = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}$]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

També podem configurar el *Mathematica* per tal que sempre ens escrigui les matrius en la forma tradicional escollint aquesta opció al menú Edit/Preferences/Evaluation.

El *Mathematica* opera amb llistes de la mateixa mida element per element i fa el producte d'un número o símbol per una llista, multiplicant cada element de la llista. També aplica qualsevol funció a una llista element per element.

Exemple 1.7.1. Operacions amb llistes:

In[-]:= $u = \{1, 2, 3, 4\}$
$v = \{1, 0, 2, 3\}$
Out[-]= $\{1, 2, 3, 4\}$
$\{1, 0, 2, 3\}$
In[-]:= $u * v$
$u\ v$
Out[-]= $\{1, 0, 6, 12\}$
$\{1, 0, 6, 12\}$
In[-]:= MatrixForm[$A = \{\{0,\ 3,\ 3,\ 1\}, \{-9,\ 3,\ 2,\ 0\}\}$]
MatrixForm[$B = \{\{1,\ 6,\ 10,\ 7\}, \{a,\ -1,\ 5,\ -1\}\}$]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 \\ -9 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 7 \\ a & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

In[-]:= MatrixForm[$A + B$]
MatrixForm[$A * B$]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 13 & 8 \\ -9 + a & 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 18 & 30 & 7 \\ -9a & -3 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

In[-]:= MatrixForm$[5B]$
MatrixForm$[A^2]$
MatrixForm[Sqrt$[A]$]

Out[-]//MatrixForm =
$$\begin{pmatrix} 5 & 30 & 50 & 35 \\ 5a & -5 & 25 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 9 & 1 \\ 81 & 9 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \\ 3i & \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Aquesta regla implica, en concret, que podem multiplicar un vector $(v^1, \ldots, v^n)$ per una matriu amb n files i obtenim

$$(v^1, \ldots, v^n) * \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_k^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1a_1^1 & v^1a_2^1 & \ldots & v^1a_k^1 \\ v^2a_1^2 & v^2a_2^2 & \ldots & v^2a_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v^na_1^n & v^na_2^n & \ldots & v^na_k^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_k^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_k^n \end{pmatrix} * (v^1, \ldots, v^n).$$

Observeu que el *Mathematica* no fa cap distinció entre un vector fila i un vector columna, tots dos són una llista.

El *Mathematica* pot operar matrius (de mides adequades) amb el producte ordinari, multiplicant files per columnes; aleshores s'indica amb un punt.

Exemple 1.7.2. Producte ordinari de matrius:

In[-]:= MatrixForm[$A = \{\{0,\ 3,\ 3,\ 1\}, \{-9,\ 3,\ 2,\ 0\}\}$]
MatrixForm[$B = \{\{1,\ -2\},\ \{-3, 4\},\ \{5, -6\},\ \{-7, 8\}\}$]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 \\ -9 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$$

In[-]:= MatrixForm[$A.B$]
MatrixForm[$B.A$]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 18 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 18 & -3 & -1 & 1 \\ -36 & 3 & -1 & -3 \\ 54 & -3 & 3 & 5 \\ -72 & 3 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

Observeu que passa en multiplicar vectors:

In[-]:= $u = \{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$
$v = \{1,\ 0,\ 2,\ 3\}$

Out[-]= $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$
$\{1,\ 0,\ 2,\ 3\}$

In[-]:= $u.v$

Out[-]= 19

Per a multiplicar un vector columna per un vector fila hem de fer el següent:

In[-]:= MatrixForm[$u = \{\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{5\}\}$]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

In[-]:= MatrixForm[$v = \{\{1,\ 0,\ 2,\ 3\,\}\}$]
Out[-]//MatrixForm = $(1\ 1\ 1\ 1\,)$
In[-]:= MatrixForm[$u.v$]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 9 \\ 5 & 0 & 10 & 15 \end{pmatrix}$

Com hem vist en un exemple anterior, per al *Mathematica* $A^k = A* \overset{k)}{\ldots\ldots} *A$ és la matriu obtinguda elevant a k cada un dels coeficients de A. Per a obtenir una potència amb el producte ordinari s'ha de fer servir la comanda:

MatrixPower[A, n]	potència n-èsima de A

Exemple 1.7.3. Potències de matrius:

In[-]:= $A = \{\{0,\ 1\}, \{1,\ 0\}\}$
Out[-]= $\{\{0,\ 1\}, \{1,\ 0\}\}$
In[-]:= A^2
MatrixPower[A,2]
Out[-]= $\{\{(1,\ 0\}, \{0,\ 1\}\}$

$A[[n]]$	n-èsim element de la llista A
$A[[n,m]]$ o $A[[n]][[m]]$	m-èsim element de la n-èsima llista de A

Exemple 1.7.4. Files i coeficients d'una matriu:

In[-]:=	$A = \{\{0,\ 1,\ 4\}, \{1,\ 2,\ 0\}\}$
Out[-]=	$\{\{0,\ 1,\ 4\}, \{1,\ 2,\ 0\}\}$
In[-]:=	$A[[2]]$
	$A[[1,3]]$
Out[-]=	$\{0,\ 1,\ 4\}$
	4

Altres comandes per construir matrius són:

Transpose[A]	transposada de A
IdentityMatrix[n]	genera la matriu identitat $n \times n$
DiagonalMatrix[*list*]	genera una matriu diagonal, amb *list* a la diagonal
Table[f, $\{j, n\}$]	genera un vector avaluant f per valors $j = 1 \ldots n$
Table[f, $\{k, m\}$, $\{j, n\}$]	genera una matriu $m \times n$ avaluant f per valors $k = 1 \ldots m$, i $j = 1 \ldots n$
Array[a, $\{m,\ n\}$]	genera una matriu simbòlica d'ordre $m \times n$ amb elements $a[i, j]$

Exemple 1.7.5. Tenim

In[-]:= MatrixForm[$A = \{\{0,\ 3,\ 3,\ 1\}, \{-9,\ 3,\ 2,\ 0\}\}$]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 \\ -9 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

In[-]:= MatrixForm[Transpose[A]]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 3 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

In[-]:= MatrixForm[IdentityMatrix[3]]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

In[-]:= MatrixForm[DiagonalMatrix[$\{1, 2, 3, 4\}$]]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

In[-]:= Table[j^2, $\{j, 6\}$]
Out[-]= $\{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36\}$
In[-]:= MatrixForm[Table[j^{k-1}, $\{k, 4\}$, $\{j, 5\}$]]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{pmatrix}$

In[-]:= MatrixForm[Array[a, $\{3, 4\}$]]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} a[1,1] & a[1,2] & a[1,3] & a[1,4] \\ a[2,1] & a[2,2] & a[2,3] & a[2,4] \\ a[3,1] & a[3,2] & a[3,3] & a[3,4] \end{pmatrix}$

In[-]:= MatrixForm[Table[$a[i, j]$, $\{i, 3\}$, $\{j, 4\}$]]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} a[1,1] & a[1,2] & a[1,3] & a[1,4] \\ a[2,1] & a[2,2] & a[2,3] & a[2,4] \\ a[3,1] & a[3,2] & a[3,3] & a[3,4] \end{pmatrix}$

1.8. Exercicis i problemes

1.8.1. Sigui $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostreu que la potència k-èsima de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

és la matriu

$$A^k = \begin{pmatrix} \cos(k\alpha) & -\sin(k\alpha) \\ \sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{pmatrix}.$$

Indicació: Proveu-ho primer per a $k = 2$. Després suposeu que la fórmula és certa per a un cert k i demostreu-ho per a $k + 1$. Haureu de fer servir les fórmules del sinus i cosinus de la suma de dos angles. Aquesta mena de demostracions s'anomena *per inducció completa*.

1.8.2. Calculeu totes les potències A^k de la matriu quadrada d'ordre n, $A = (a_i^j)$, que té tots els coeficients zero llevat dels situats just sobre la diagonal. En altres paraules,

$$a_i^j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j + 1, \\ 0, & \text{si } i \neq j + 1. \end{cases}$$

Indicació: Feu-ho primer per a $n = 2, 3 \ldots$ Conjectureu què passarà en general i demostreu-ho de la manera següent: suposeu que és cert per a un cert $n = k$ i proveu-ho per a $n = k + 1$ calculant $A^{k+1} = AA^k$.

1.8.3. Per a cada $n \in \mathbb{N}$ definim una matriu quadrada d'ordre n, $A_n = (a_i^j)$, de la manera següent

$$a_i^j = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j, \\ 1, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Escriviu explícitament la matriu per a $n = 1, 2, 3, 4$.

1.8.4. Per a cada $n \in \mathbb{N}$ definim una matriu quadrada d'ordre n, $A_n = (a_i^j)$, de la manera següent

$$a_i^j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 2, & \text{si } i < j, \\ -2, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Escriviu explícitament la matriu per a $n = 1, 2, 3, 4$.

1.8.5. Considereu les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esbrineu quines de les igualtats són certes i quines no:

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB.$$
$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA.$$
$$(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB.$$
$$(A-B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA.$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 - AB + BA.$$

1.8.6. Calculeu les potències $J^2 = JJ$, $J^3 = J^2J$,..., $J^k = J^{k-1}J$ per a tot $k \in \mathbb{N}$ de la matriu de blocs següent

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right).$$

1.8.7. Calculeu el producte de matrius de blocs següent

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right).$$

1.8.8. Sigui $n \in \mathbb{N}$ i sigui $(A, B) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Calculeu

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right).$$

1.8.9. Donades dues matrius quadrades $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ que commutin (és a dir, tals que $AB = BA$):

(i) Demostreu que

$$(A+B)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} A^{m-j} B^j$$

per a tot $m \in \mathbb{N}$, on $\binom{m}{k} := \frac{m!}{k!(m-k)!}$. *Indicació:* Comproveu-ho per a $m = 2$ i calculeu

$$(A+B)^m = (A+B)(A+B)^{m-1}$$

suposant que la fórmula és certa per a $m-1$. En els càlculs necessitareu provar que
$$\binom{m}{k}+\binom{m}{k+1}=\binom{m+1}{k+1}.$$

(ii) Utilitzeu la fórmula anterior per a calcular totes les potències de la matriu
$$C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Indicació: Expresseu C com a suma d'una matriu diagonal A i una matriu B amb els coeficients 0 llevat de 1 sobre la diagonal.

1.8.10. Sigui $n\in\mathbb{N}$. Demostreu les propietats següents de les matrius transposades:

(i) $\forall\ A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $(A^t)^t=A$.

(ii) $\forall\ A,\ B\in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ (A+B)^t=A^t+B^t$.

(iii) $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$, i $\forall\ A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ (\lambda A)^t=\lambda A^t$.

1.8.11. S'anomena *traça d'una matriu* quadrada $A=(a_i^j)$ la suma dels elements de la seva diagonal $\operatorname{tr}(A):=\sum_i a_i^i$. Demostreu les propietats següents:

(i) $\forall\ A,\ B\in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$.

(ii) $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$ i $\forall\ A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(\lambda A)=\lambda\operatorname{tr}(A)$.

(iii) $\forall\ A,\ B\in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$.

(iv) Si $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ B\in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ i $C\in M_{k\times m}(\mathbb{R})$, aleshores
$$\operatorname{tr}(ABC)=\operatorname{tr}(BCA)=\operatorname{tr}(CAB).$$

En el cas $m=n=k$ es compleix que $\operatorname{tr}(ABC)=\operatorname{tr}(BAC)$?

(v) Proveu que no existeixen matrius $A,\, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tals que

$$AB - BA = I_n.$$

1.8.12. Sigui $A = (a_i^j) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matriu donada pel terme general

$$a_i^j = \begin{cases} 0, & \text{si } i > j, \\ j, & \text{altrament.} \end{cases}$$

(i) Doneu el terme general de la matriu transposada de A.

(ii) Trobeu la traça de A.

D'altra banda, sigui $B = (b_i^j) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matriu donada pel terme general

$$b_i^j = \begin{cases} 0, & \text{si } i + j \neq n + 1, \\ 1, & \text{si } i + j = n + 1. \end{cases}$$

Doneu el terme general de les matrius AB i $A + B$ i escriviu-les en forma matricial.

1.8.13. Donada una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es diu que $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ és una inversa per l'esquerra de A si $BA = I_n$. D'altra banda, es diu que $C \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ és una inversa per la dreta de A si $AC = I_m$. Comproveu que la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

té moltes inverses per la dreta i cap per l'esquerra.

1.8.14. Sigui $n \in \mathbb{N}$ i sigui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(i) Demostreu que les matrius

$$\frac{A + A^t}{2} \text{ i } \frac{A - A^t}{2}$$

són simètrica i antisimètrica, respectivament.

(ii) Demostreu que A es pot expressar de manera única com a suma d'una matriu simètrica i d'una matriu antisimètrica.

1.8.15. Demostreu que una matriu triangular superior $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és *nilpotent* (és a dir, que $A^k = 0$ per a algun $k \in \mathbb{N}$) si, i només si, els coeficients de la diagonal són tots zero.

1.8.16. Una *matriu màgica* és una matriu quadrada en què totes les files, columnes i les dues diagonals sumen un cert valor σ.

(i) Proveu que si $M = (m^i_j \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ és una matriu màgica aleshores $\sigma = 3m^2_2$.

(ii) Proveu que, donats $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, existeix una única matriu màgica $M(a, b, c) \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que
$$m^2_2 = a,\ m^1_1 = a + b,\ m^3_1 = a + c.$$

(iii) Demostreu que el conjunt $\{M(a, b, c) :\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ és el conjunt de totes les matrius màgiques 3×3, i que
$$M(a, b, c) = aM(1, 0, 0) + bM(0, 1, 0) + cM(0, 0, 1).$$

(iv) Construïu una matriu màgica d'ordre tres amb els nombres naturals de l' 1 al 9.

1.8.17. Sigui $A = (a^j_i) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ i $\overline{A} := (\overline{a^j_i})$ la matriu que té com a coeficients els conjugats dels coeficients de A.

(i) Trobeu en funció de A i $\overline{A}$, matrius $R, J \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tals que $A = R + iJ$.

(ii) Observeu que $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Trobeu una matriu real tal que $A^2 = -I_2$.

1.9. Activitats d'autoavaluació

1.9.1. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin.

1. Dues matrius diagonals del mateix ordre sempre commuten.
2. Dues matrius triangulars superiors del mateix ordre sempre commuten.

3. Dues matrius triangulars inferiors del mateix ordre sempre commuten.

4. Una matriu diagonal commuta amb qualsevol altra matriu quadrada del mateix ordre.

5. Dues matrius quadrades del mateix ordre sempre commuten.

1.9.2. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. Si A és una matriu antisimètrica, llavors els coeficients de la diagonal són tots zero.

2. Si A és una matriu simètrica, llavors els coeficients de la diagonal són tots zero.

3. A és antisimètrica $\Leftrightarrow A^t = -A$.

1.9.3. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines són falses. Demostreu les primeres i doneu un contraexemple de les falses.

1. $AB = AC \Rightarrow B = C$.

2. $A + B = A + C \Rightarrow B = C$.

3. $\alpha A = \alpha B,\ \alpha \neq 0 \Rightarrow A = B$.

4. $\alpha A = \beta A$, $A \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$.

1.9.4. Sigui $n \in \mathbb{N}$ i siguin $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Demostreu les afirmacions que siguin certes i doneu un contraexemple de les falses.

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

2. $tr(A \cdot B) = tr(A) \cdot tr(B)$.

1.9.5. Per què hem explicat que hi ha dues propietats distributives del producte de matrius respecte de la suma i, en canvi, només ens hem referit a una propietat distributiva en el cas dels reals?

Capítol 2

Sistemes d'equacions lineals

La resolució d'equacions és essencial en qualsevol àrea científica o tècnica, però també un dels problemes de més difícil resolució en general. No és aquest el cas de les equacions lineals per a les quals es coneixen perfectament mètodes de resolució, com a mínim a nivell teòric. L'objectiu d'aquest tema és donar un algorisme eficient per resoldre sistemes d'equacions lineals: el mètode de Gauss-Jordan.

Encara que ens referirem sempre a equacions amb coeficients reals, tot el que fem és vàlid per a coeficients complexos i per a coeficients racionals.

2.1. Solucions d'un sistema d'equacions lineals

Una *equació lineal* amb n incògnites és una expressió del tipus

$$a_1x^1 + \cdots + a_nx^n = b,$$

on els *coeficients* a_i i el terme independent b són nombres reals.

Un sistema d'equacions lineals (o sistema lineal) amb n incògnites és un conjunt de m equacions lineals:

$$(*)\left\{\begin{array}{rcl} a_1^1x^1 + \cdots + a_n^1x^n & = & b^1 \\ a_1^2x^1 + \cdots + a_n^2x^n & = & b^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^mx^1 + \cdots + a_n^mx^n & = & b^m \end{array}\right. .$$

Donat el sistema de m equacions lineals amb n incògnites:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1^1 x^1 + \cdots + a_n^1 x^n & = & b^1 \\ a_1^2 x^1 + \cdots + a_n^2 x^n & = & b^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m x^1 + \cdots + a_n^m x^n & = & b^m \end{array}\right. ,$$

anomenem *matriu associada al sistema*, a la matriu d'ordre $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix},$$

i anomenem *matriu ampliada* a la matriu d'ordre $m \times (n+1)$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}.$$

Si tots els termes independents b^i del sistema (*) són zero, diem que el sistema és *homogeni*.

Podem escriure el sistema (*) en la forma matricial

$$Ax = b, \qquad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}.$$

El sistema $Ax = 0$ s'anomena *sistema homogeni associat a $Ax = b$.*

Exemple 2.1.1. El sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + y - 2z & = & 2 \\ 3x + y + z & = & -1 \end{array}\right.$$

té matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i matriu ampliada

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Anomenem *solució* del sistema (*) una n-pla $(c^1, \ldots, c^n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ac = b$, on c és la matriu columna amb coeficients c^i. És a dir,

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_1^1 c^1 + \cdots + a_n^1 c^n & = & b^1 \\ a_1^2 c^1 + \cdots + a_n^2 c^n & = & b^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m c^1 + \cdots + a_n^m c^n & = & b^m \end{array}\right. .$$

Exemple 2.1.2. El sistema d'equacions lineals

$$\left\{\begin{array}{lcr} x + y - 2z & = & 2 \\ 3x + y + z & = & -1 \end{array}\right.$$

admet com a solució $(-3/2,\ 7/2,\ 0)$. Però $(-3/2,\ 7/2,\ 0)$ no és l'única solució ja que, per exemple, $(0,\ 0,\ -1)$ és també solució d'aquest sistema d'equacions lineals.

Anomenem *solució general* d'un sistema d'equacions lineals al conjunt de totes les seves solucions. Dos sistemes d'equacions lineals són *sistemes equivalents* si tenen exactament les mateixes solucions, és a dir, si tenen la mateixa solució general.

Exemple 2.1.3. Els sistemes

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + y & = & 0 \\ x - y & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{i} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x + 2y & = & 0 \\ x - 5y & = & 0 \end{array}\right.$$

són equivalents, ja que tots dos tenen com a única solució $x = y = 0$.

Resoldre un sistema d'equacions lineals és trobar totes les seves solucions, o determinar que no en té cap. Segons el nombre de solucions, els sistemes d'equacions lineals es classifiquen en:

(1) *Sistema compatible*: té alguna solució.
   (1.1.) *Sistema compatible determinat*: té una única solució.
   (1.2.) *Sistema compatible indeterminat*: té més d'una solució.

(2) *Sistema incompatible*: no té solució.

Un mètode per resoldre un sistema d'equacions lineals és transformar-lo en un altre d'equivalent les solucions del qual siguin fàcils de trobar, com passa, per exemple, si la matriu del nou sistema és escalonada. En la secció que segueix estudiarem com reduir una matriu a forma escalonada, i més endavant ho aplicarem a la resolució d'un sistema d'equacions lineals.

2.2. Reducció d'una matriu a una forma escalonada

En aquesta secció transformarem, aplicant successivament transformacions elementals, una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ en una matriu escalonada reduïda.

Definició 2.2.1. Donada una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, anomenem *pivot* d'una fila (resp. columna) de A el primer element no nul d'aquesta fila (resp. columna), si és que existeix. La matriu A es diu que és *escalonada per files* (resp. *escalonada per columnes*) si compleix:

(1) Si A té files (resp. columnes) compostes enterament per zeros, aquestes estan agrupades a la part inferior (resp. són les últimes columnes) de la matriu.

(2) El pivot de cada fila (resp. columna) no nul·la és 1.

(3) El pivot de cada fila (resp. columna) no nul·la està a la dreta (resp. més avall) del de la fila (resp. columna) anterior.

(4) Els elements que apareixen a la mateixa columna (resp. fila) que el pivot d'una fila (resp. columna) i per sota seu (resp. a la seva dreta) són tots zeros.

Diem que la matriu A és una matriu *escalonada reduïda per files* (resp. *escalonada reduïda per columnes*) si, a més a més de ser escalonada, compleix:

(4') Els elements que hi ha a la mateixa columna (resp. fila) que el pivot d'una fila (resp. columna) són tots zeros.

Exemple 2.2.2. Considerem les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A i B no són escalonades; la matriu C és escalonada per files i la matriu D és escalonada reduïda per files.

Per transformar una matriu A en una matriu escalonada reduïda per files (resp. columnes) farem servir només alguns tipus de transformacions, anomenades *transformacions elementals* de files (resp. columnes), i que són les següents:

(1) Intercanviar la posició de dues files (resp. columnes).

(2) Multiplicar tots els elements d'una fila (resp. columna) per un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

(3) Sumar a una fila (resp. columna) una altra multiplicada per un escalar.

Definició 2.2.3. Direm que dues matrius A i B són *equivalents per files* (resp. *equivalents per columnes*), i ho denotarem $A \sim_f B$ (resp. $A \sim_c B$), si es pot passar d'una a l'altra mitjançant transformacions elementals per files (resp. columnes).

Dues matrius equivalents han de tenir necessàriament el mateix ordre. A més a més, la relació de ser equivalents per files (resp. columnes) compleix les propietats següents: donades les matrius arbitràries $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

(1) Reflexiva: $A \sim_f A$ (resp. $A \sim_c A$).

(2) Simètrica: $A \sim_f B \Leftrightarrow B \sim_f A$ (resp. $A \sim_c B \Leftrightarrow B \sim_c A$).

(3) Transitiva: $A \sim_f B$ i $B \sim_f C \Rightarrow A \sim_f C$ (resp. $A \sim_c B$ i $B \sim_c C \Rightarrow A \sim_c C$).

Les relacions que compleixen aquestes tres propietats s'anomenen *relacions d'equivalència*.

Ara ja podem demostrar el resultat central d'aquesta secció.

Teorema 2.2.4. *Tota matriu A és equivalent per files (resp. columnes) a una matriu escalonada reduïda per files (resp. columnes).*

Demostració. Per demostrar-ne l'existència explicitarem un algorisme que ens permet, mitjançant transformacions elementals per files (resp. columnes), passar d'una matriu A a una matriu escalonada reduïda per files (resp. columnes):

(1) Es porta al primer lloc una fila (resp. columna) amb el primer coeficient no nul; si tots són zero, es considera el segon coeficient, i així successivament.

(2) Si la primera fila (resp. columna) té pivot a, es multiplica per $1/a$ i s'obté pivot 1.

(3) Es fa zero el primer coeficient de cada una de les files (resp. columnes) restants, sumant a cada fila la primera fila (resp. columna) multiplicada per un escalar convenient.

(4) Es deixa fixa la primera fila (resp. columna) i s'apliquen els passos 1 - 3 a les files restants (resp. columnes) amb el segon coeficient. I així successivament fins a aconseguir una matriu escalonada per files (resp. columnes).

(5) Amb el pivot 1 de cada fila (resp. columna) no nul·la es fa zero el terme corresponent de les files (resp. columnes) anteriors, i s'obté una matriu escalonada reduïda per files (resp. columnes). □

Definició 2.2.5. Donada una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, anomenem *forma escalonada reduïda per files* (resp. *columnes*) de A a una matriu escalonada reduïda per files (resp. columnes) que s'obté de A per transformacions elementals de files (resp. columnes).

Exemple 2.2.6. La forma escalonada reduïda per files de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & -7 & 19 \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

En efecte, designem per F_j la fila j de la matriu i fem les següents transformacions

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & -7 & 19 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \\ \sim_f \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim_f}{F_1 - 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 21 \end{pmatrix} \underset{\sim_f}{-\tfrac{1}{3}F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 + F_3 \\ F_2 - F_3 \\ \sim_f \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Proposició 2.2.7. Donades dues matrius A i B escalonades reduïdes per files (resp. columnes) tals que $A \sim_f B$ (resp. $A \sim_c B$), aleshores $A = B$.

Demostració. Suposem que $A \sim_f B$ i procedim per inducció sobre el nombre de columnes. Si les dues matrius tenen una columna el resultat és cert, ja que les úniques possibilitats són

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = B \qquad \text{o} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = B.$$

Suposem que el resultat és cert per a matrius amb $n-1$ columnes i demostrem que aleshores també és cert per a matrius amb n columnes.

Siguin A, B dues matrius escalonades reduïdes amb n columnes, $A \sim_f B$. Les transformacions que passen de A a B passen de la matriu A' formada per les $n-1$ primeres columnes de A a la matriu B' formada per les $n-1$ primeres columnes de B. Per hipòtesi d'inducció podem suposar $A' = B'$. Sigui r el nombre de files no nul·les de $A' = B'$:

$$A' = B' = \left(\begin{array}{c} A'' \\ \hline 0 \end{array}\right), \qquad A = \left(\begin{array}{c|c} & a_n^1 \\ A'' & \vdots \\ & a_n^r \\ \hline & a_n^{r+1} \\ 0 & 0 \\ & \vdots \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} & b_n^1 \\ A'' & \vdots \\ & b_n^r \\ \hline & b_n^{r+1} \\ 0 & 0 \\ & \vdots \end{array}\right).$$

Si r és el nombre de files no nul·les de $A' = B'$, la fila $r+1$ de A i B té tots els elements zeros llevat de potser l'últim, a_n^{r+1} i b_n^{r+1} que són 0 o 1; la resta de files són de zeros.

$A \sim_f B$ implica que les files de B s'obtenen com a combinació lineal de les files de A amb coeficients no tots zeros; és a dir, per a tota fila j de B tenim números $k_1^j, \ldots, k_n^j$, no tots zeros, tals que:

$$b_i^j = k_1^j a_i^1 + \cdots + k_{r+1}^j a_i^{r+1}, \quad \forall\ i.$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & a_k^1 & \ldots & \ldots & a_n^1 & b_n^1 \\
0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & a_k^2 & \ldots & \ldots & a_n^2 & b_n^2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & a_i^j = 1 & \ldots & a_k^j = 0 & \ldots & a_k^j & \ldots & \ldots & a_n^j & b_n^j \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & a_k^\ell & \ldots & \ldots & a_n^\ell & b_n^\ell \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
\hline
0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & a_n^{r+1} & b_n^{r+1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots
\end{array}\right)$$

Cas 1. Si $a_n^{r+1} = 1$, la resta de coeficients d'aquesta columna són zeros: $a_n^\ell = 0$, per a tot $\ell \neq r+1$.

Per a cada una de les files $j \leq r$, sigui i la columna que té el pivot en aquesta fila; és a dir, $a_i^j = 1$, $a_i^\ell = 0$ si $\ell \neq j$. Llavors:

$$0 = a_i^{r+1} = b_i^{r+1} = k_1^{r+1} a_i^1 + \cdots + k_{r+1}^{r+1} a_i^{r+1} = k_j^{r+1}, \quad \forall\ j \leq r$$

i $k_{r+1}^{r+1} \neq 0$.

Per tant, $b_n^{r+1} = k_{r+1}^{r+1} a_n^{r+1} = k_{r+1}^{r+1} \neq 0$ i $b_n^{r+1} = 1$.
Com que A i B són les dues matrius escalonades reduïdes, la resta de l'última columna és de zeros en les dues matrius: $b_n^j = a_n^j = 0$, per a tot $j \neq r+1$.

Cas 2. $a_n^{r+1} = 0$. Com que també tenim que $B \sim_f A$, el cas 1 ens diu que $b_n^{r+1} = 0$.

Com en el cas 1, per a cada una de les files $j \leq r$, sigui i la columna que té el pivot en aquesta fila; és a dir, $a_i^j = 1$, $a_i^\ell = 0$ si $\ell \neq j$. En aquest cas,

$$1 = a_i^j = b_i^j = k_1^j a_i^1 + \cdots + k_r^j a_i^r = k_j^j.$$

Sigui ara $k \neq n$ la columna amb el pivot a una fila $\ell \neq j$. Aleshores, $a_k^\ell = 1,\ a_k^s = 0$ si $\ell \neq s$. Per tant,

$$0 = a_k^j = b_k^j = k_1^j a_k^1 + \cdots + k_r^j a_k^r = k_\ell^j.$$

D'on resulta $b_n^j = k_1^j a_n^1 + \cdots + k_r^j a_n^r = k_j^j a_n^j = a_n^j$ per a tot $j \leq r$.

Suposem ara que A i B són dues matrius escalonades reduïdes per columnes i que $A \sim_c B$. Aleshores, A^t i B^t són matrius reduïdes per files: $A^t \sim_f B^t$. Per tant, $A^t = B^t$ i també $A = B$.$\square$

2.3. El mètode de Gauss-Jordan

En aquesta secció explicarem el mètode de Gauss-Jordan per resoldre un sistema d'equacions lineals. La idea és substituir el sistema d'equacions lineals donat per un altre d'equivalent més simple. Començarem amb un exemple.

Exemple 2.3.1. Considerem el sistema d'equacions lineals

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+2y+3z & = & 5 \\ x+4y+5z & = & 7 \\ 2x+4y+4z & = & 6 \end{array}\right. .$$

Si restem a la segona equació la primera i a la tercera equació la primera multiplicada per 2, obtenim el sistema d'equacions lineals equivalent:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+2y+3z & = & 5 \\ 2y+2z & = & 2 \\ -2z & = & -4 \end{array}\right. .$$

Si multipliquem per $1/2$ la segona equació i per $-1/2$ la tercera, obtenim el sistema equivalent d'equacions lineals següent:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+2y+3z & = & 5 \\ y+z & = & 1 \\ z & = & 2 \end{array}\right. .$$

Si restem a la segona equació la tercera obtenim:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + 2y + 3z & = & 5 \\ y & = & -1 \\ z & = & 2 \end{array}\right. .$$

Finalment, si restem a la primera equació tres vegades la tercera equació i dues vegades la segona, obtenim la solució del sistema d'equacions lineals donat:

$$\left\{\begin{array}{ccccr} x & & & = & 1 \\ & y & & = & -1 \\ & & z & = & 2 \end{array}\right. .$$

Observeu que la nostra estratègia per resoldre l'anterior sistema d'equacions lineals ha estat obtenir successivament sistemes d'equacions lineals equivalents al de partida, cada vegada més senzills, fins a arribar a un sistema molt fàcil de resoldre. Seguirem la mateixa estratègia en el cas general, fent servir només els següents tipus de transformacions, anomenats *operacions elementals*:

(1) Multiplicar una equació lineal del sistema per un escalar no nul.

(2) Intercanviar l'ordre de dues equacions lineals del sistema.

(3) Sumar a una equació lineal del sistema una altra de les equacions del sistema multiplicada per un escalar no nul.

Tots aquests canvis són permesos ja que:

Proposició 2.3.2. *Si en un sistema d'equacions lineals s'intercanvia l'ordre de dues de les equacions, es multiplica una equació per un escalar no nul o se suma a una equació del sistema una altra equació multiplicada per un escalar, s'obté un sistema d'equacions lineals equivalent.*

Demostració. La primera i segona afirmació són clares. Provarem la tercera. Per a això considerem el sistema d'equacions lineals

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_1^1 x^1 + \cdots + a_n^1 x^n & = & b^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^i x^1 + \cdots + a_n^i x^n & = & b^i \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^j x^1 + \cdots + a_n^j x^n & = & b^j \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m x^1 + \cdots + a_n^m x^n & = & b^m \end{array} \right.$$

i el que s'obté en sumar λ vegades l'equació j a l'equació i

$$(**) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} a_1^1 x^1 + \cdots + a_n^1 x^n & = & b^1 \\ \vdots & & \vdots \\ (a_1^i + \lambda a_1^j) x^1 + \cdots + (a_n^i + \lambda a_n^j) x^n & = & b^i + \lambda b^j \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^j x^1 + \cdots + a_n^j x^n & = & b^j \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m x^1 + \cdots + a_n^m x^n & = & b^m \end{array} \right. .$$

Per demostrar que són equivalents s'ha de provar que tenen el mateix conjunt de solucions. Suposem que $(c^1, \cdots, c^n) \in \mathbb{R}^n$ és solució de (*) i comprovem que també és solució de (**). Per ser $(c^1, \cdots, c^n)$ solució de (*) tenim:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1^1 c^1 + \cdots + a_n^1 c^n & = & b^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^i c^1 + \cdots + a_n^i c^n & = & b^i \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^j c^1 + \cdots + a_n^j c^n & = & b^j \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m c^1 + \cdots + a_n^m c^n & = & b^m \end{array} \right. .$$

Multiplicant per λ la j-èsima igualtat, i sumant-la a la i-èsima, obtenim

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_1^1c^1+\cdots+a_n^1c^n & = & b^1 \\ \vdots & & \vdots \\ (a_1^i+\lambda a_1^j)c^1+\cdots+(a_n^i+\lambda a_n^j)c^n & = & b^i+\lambda b^j \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^jc^1+\cdots+a_n^jc^n & = & b^j \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^mc^1+\cdots+a_n^mc^n & = & b^m \end{array}\right. .$$

És a dir, $(c^1,\cdots,c^n)$ és solució de (**). Recíprocament, si $(d^1,\cdots,d^n)$ és solució de (**), tenim

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_1^1d^1+\cdots+a_n^1d^n & = & b^1 \\ \vdots & & \vdots \\ (a_1^i+\lambda a_1^j)d^1+\cdots+(a_n^i+\lambda a_n^j)d^n & = & b^i+\lambda b^j \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^jd^1+\cdots+a_n^jd^n & = & b^j \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^md^1+\cdots+a_n^md^n & = & b^m \end{array}\right. .$$

Restant a la i-èsima igualtat λ vegades la j-èsima, obtenim

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_1^1d^1+\cdots+a_n^1d^n & = & b^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^id^1+\cdots+a_n^id^n & = & b^i \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^jd^1+\cdots+a_n^jd^n & = & b^j \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^md^1+\cdots+a_n^md^n & = & b^m \end{array}\right. .$$

És a dir, $(d^1,\cdots,d^n)$ és també solució de (*). $\square$

Corol·lari 2.3.3. *Sigui* $Ax = b$ *un sistema d'equacions lineals. Sigui* $(\overline{A} \mid \overline{b})$ *una matriu equivalent per files a* $(A \mid b)$*, en particular la matriu escalonada reduïda per files. Aleshores els sistemes*

$$Ax = b \qquad i \qquad \overline{A}x = \overline{b}$$

tenen les mateixes solucions. $\square$

El mètode de Gauss-Jordan. El mètode de Gauss-Jordan és un algoritme que transforma, aplicant successivament operacions elementals, qualsevol sistema d'equacions lineals no trivial, en un sistema amb matriu ampliada escalonada reduïda. Els passos que s'han de fer són:

Pas 1. Es canvia l'ordre de les equacions i es porta a la primera posició una equació amb coeficient de la incògnita x^1 no nul.
Pas 2. Es divideix la primera equació pel coeficient de x^1 i s'obté així el coeficient 1 per a x^1.
Pas 3. S'elimina la incògnita x^1 de les altres equacions, restant a cada una d'elles la primera multiplicada per un escalar adequat.

Un cop realitzats els tres primers passos, el sistema d'equacions lineals donat

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \cdots + a_n^1x^n & = & b^1 \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \cdots + a_n^2x^n & = & b^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \cdots + a_n^mx^n & = & b^m \end{array}\right.$$

s'ha transformat en un d'equivalent del tipus:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^1 + b_2^1x^2 + \cdots + b_n^1x^n & = & c^1 \\ b_2^2x^2 + \cdots + b_n^2x^n & = & c^2 \\ \vdots & & \vdots \\ b_2^mx^2 + \cdots + b_n^mx^n & = & c^m \end{array}\right. .$$

Fixem la primera equació i repetim els passos 1-3 amb el sistema format per les restants equacions. Podria ser que en aquestes equacions la incògnita x^2 no tingui mai coeficient $\neq 0$; en aquest cas canviem l'ordre de les incògnites passant x^2 a l'última posició. Per simplicitat, suposarem en la notació que no ha estat necessari canviar l'ordre de les incògnites.

Iterem el procés fins a arribar a un sistema amb matriu ampliada escalonada o *sistema d'equacions escalonat*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^1 + c_2^1 x^2 + \cdots + c_r^1 x^r + \cdots + c_n^1 x^n & = & d^1 \\ x^2 + \cdots + c_r^2 x^r + \cdots + c_n^2 x^n & = & d^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x^r + \cdots + c_n^r x^n & = & d^r \end{array}\right.$$

en el qual l'ordre de les incògnites podria no ser l'inicial.

Exemple 2.3.4. Al sistema d'equacions lineals

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 0 \\ & & & & z & - & 5t & = & 1 \\ x & + & 2y & & & - & 3t & = & 2 \end{array}\right.$$

el resultat de restar la primera equació de la tercera és

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 0 \\ & & & & z & - & 5t & = & 1 \\ & & & & z & - & 4t & = & 2 \end{array}\right. .$$

Passant la incògnita y a l'últim lloc i restant la segona equació a la tercera, queda

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & z & + & t & + & 2y & = & 0 \\ & & z & - & 5t & & & = & 1 \\ & & & & t & & & = & 1 \end{array}\right. .$$

Anomenem *incògnites principals* les que apareixen com a primera incògnita en alguna equació del sistema escalonat i anomenem *incògnites lliures* les restants. El que unes incògnites siguin principals o lliures depèn de l'ordre inicial en què hem escrit les incògnites. A l'exemple anterior, la incògnita lliure és y, però si l'ordre inicial hagués estat y, x, z, t, la incògnita lliure seria x.

Amb transformacions elementals podem obtenir ara un sistema amb la matriu ampliada reduïda per files, en el qual cada incògnita principal apareix només en una equació. D'aquesta manera s'obté un *sistema d'equacions escalonat reduït*.

Discussió i resolució de sistemes escalonats reduïts. Hem explicat com, a partir d'un sistema qualsevol d'equacions lineals, en podem obtenir un d'equivalent escalonat reduït. Es poden donar els casos següents:

Cas 1. El sistema d'equacions escalonat reduït conté una equació del tipus $0 = b$ amb $b \neq 0$. En aquest cas el sistema és incompatible.

Cas 2. Si totes les incògnites són principals, el sistema escalonat reduït és de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x^1 & & & & = & b^1 \\ & x^2 & & & = & b^2 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & x^n & = & b^n \end{array} \right. .$$

En aquest cas el sistema és compatible determinat.

Cas 3. Si existeixen incògnites lliures i el sistema escalonat reduït és de la forma (variant si és necessari l'ordre de les incógnites)

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x^1 & & & +c^1_{r+1}x^{r+1} + \cdots + c^1_n x^n & = & d^1 \\ & x^2 & & +c^2_{r+1}x^{r+1} + \cdots + c^2_n x^n & = & d^2 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & x^r & +c^r_{r+1}x^{r+1} + \cdots + c^r_n x^n & = & d^r \end{array} \right. ,$$

les incògnites principals es poden aïllar en funció de les lliures i obtenim

$$\left\{ \begin{array}{ccl} x^1 & = & -c^1_{r+1}x^{r+1} - \cdots - c^1_n x^n + d^1 \\ x^2 & = & -c^2_{r+1}x^{r+1} - \cdots - c^2_n x^n + d^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x^r & = & -c^r_{r+1}x^{r+1} - \cdots - c^r_n x^n + d^r \end{array} \right. .$$

El sistema és compatible indeterminat. La solució general del sistema l'obtenim assignant valors arbitraris a cada una de les incògnites lliures $x^{r+1}, \cdots, x^n$.

Escrivint la solució general com a vector columna, tenim

$$\begin{pmatrix} -c^1_{r+1}x^{r+1} - \cdots - c^1_n x^n + d^1 \\ \vdots \\ -c^r_{r+1}x^{r+1} - \cdots - c^r_n x^n + d^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^1 \\ \vdots \\ d^r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c^1_{r+1} \\ \vdots \\ -c^r_{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x^{r+1} + \cdots + \begin{pmatrix} -c^1_n \\ \vdots \\ -c^r_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} x^n.$$

La primera matriu columna de la dreta és una solució particular del sistema; correspon a agafar valors zero per a les variables lliures: $x^{r+1} = \cdots = x^n = 0$.

El sistema homogeni associat correspon al cas $b^1 = \cdots = b^m = 0$, i aleshores $d^j = 0$ per a tot j. Els vectors de l'expressió de la dreta, excepte el primer, són solucions del sistema homogeni; corresponen a agafar valors zero per a totes les variables lliures menys una que pren el valor 1.

La solució general del sistema s'obté sumant a la solució particular $(d^1, \ldots, d^r, 0, \ldots, 0)$ la solució general del sistema homogeni associat. La proposició que segueix ens diu que això és cert per a qualsevol solució particular.

Proposició 2.3.5:

(i) La solució general d'un sistema $Ax = b$ d'equacions lineals compatible s'obté sumant a una solució particular qualsevol, les solucions del sistema homogeni associat $Ax = 0$.

(ii) Existeixen solucions del sistema homogeni $Ax = 0$, $s_1, \ldots, s_{n-r}$, tals que la solució general d'aquest sistema és el conjunt

$$\{\, \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_{n-r} s_{n-r} \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{R} \,\}.$$

Demostració. (i) Sigui $s = (s^1, \ldots, s^n)$ una solució particular arbitrària del sistema: $As = b$. Volem veure que la solució general del sistema $Ax = b$ conté les sumes de s i una solució del sistema homogeni associat, i només aquests elements.

En efecte, si $y = (y^1, \ldots, y^n)$ és una solució del sistema homogeni associat, és a dir, si $Ay = 0$, tindrem: $A(s + y) = As + Ay = b$. Per tant, $s + y$ serà una solució.

Comprovem ara que totes les solucions són d'aquest tipus: suma de la solució particular s i una solució del sistema homogeni. En efecte, sigui s' una altra solució,

$$s' = s + (s' - s), \quad \text{i} \quad A(s' - s) = As' - As = b - b = 0.$$

Per tant, $(s' - s)$ és una solució del sistema homogeni associat.

(ii) Amb les notacions de més amunt, podem agafar, per exemple,

$$s_i = \begin{pmatrix} -c^1_{r+i} \\ \vdots \\ -c^r_{r+i} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, n-r,$$

on l'1 és a la fila $r + i$.$\square$

2.4. Rang d'una matriu

Definició 2.4.1. Es defineix el *rang d'una matriu* $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, i es denota per $\mathrm{rg}(A)$, el nombre de files no nul·les de la seva forma escalonada reduïda per files.

Més endavant demostrarem que el rang d'una matriu A coincideix amb el de la seva transposada i, per tant, el nombre de files no nul·les de la matriu escalonada reduïda per files d'A coincideix amb el nombre de columnes no nul·les de la seva matriu reduïda per columnes.

Exemple 2.4.2. La forma escalonada reduïda per files de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -3 & -7 & -5 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\mathrm{rg}(A) = 3$.

2.5. El teorema de Rouché-Frobenius

El teorema següent dóna un criteri perquè un sistema d'equacions lineals sigui compatible i, en aquest cas, perquè també sigui determinat.

Teorema 2.5.1. *Un sistema d'equacions lineals*

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1^1x^1+\cdots+a_n^1x^n & = & b^1 \\ a_1^2x^1+\cdots+a_n^2x^n & = & b^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^mx^1+\cdots+a_n^mx^n & = & b^m \end{array}\right.$$

és compatible si, i només si, $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(A|b)$. *El sistema és compatible determinat si, i només si,* $\mathrm{rg}(A)=n$.

Demostració. Observem primer que, si $(\overline{A}|\overline{b})$ és la forma escalonada reduïda per files de la matriu ampliada $(A|b)$ aleshores la matriu $\overline{A}$ que s'obté eliminant l'última columna de $(\overline{A}|\overline{b})$ és la forma escalonada reduïda per files de la matriu A associada al sistema.

Analitzem quan el sistema serà compatible. El sistema d'equacions lineals donat és compatible si, i només si, a la seva forma escalonada reduïda no apareix l'equació $0=b$ amb $0\neq b\in\mathbb{R}$; és a dir, si, i només si, $(\overline{A}|\overline{b})$ i $\overline{A}$ tenen el mateix nombre de files no nul·les. Per tant, $\mathrm{rg}(\overline{A}|\overline{b})=\mathrm{rg}(\overline{A})$. Però sabem que $\mathrm{rg}(A|b)=\mathrm{rg}(\overline{A}|\overline{b})$ i $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(\overline{A})$. Per tant, el sistema és compatible si, i només si, $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(A|b)$.

Analitzem quan el sistema serà compatible determinat. Si $\mathrm{rg}(A|b)=\mathrm{rg}(A)=r$, existeixen r incògnites principals, i el sistema és compatible determinat si, i només si, el nombre d'incògnites n i el nombre d'incògnites principals és el mateix, és a dir, $r=n$.□

2.6. *Mathematica*: Resolució de sistemes d'equacions

RowReduce[A]	Redueix A per files mitjançant l'algorisme de Gauss-Jordan
MatrixRank[A]	Rang de la matriu A

Exemple 2.6.1. Reducció de matrius per files:

In[-]:= MatrixForm[$A=\{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\}\}$]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

In[-]:= RowReduce[A]

Out[-]= $\{\{1, 0, -1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 0, 0\}\}$

In[-]:= MatrixForm[%]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

In[-]:= MatrixRank[A]

Out[-]= 2

Les comandes per resoldre sistemes d'equacions lineals són:

Solve[$A.\{x1, \ldots, xn\} == b, \{x1, \ldots, xn\}$]	dóna la solució general
NullSpace[A]	dóna generadors del sistema $Ax = 0$
LinearSolve[A, b]	dóna *una* solució del sistema $Ax = b$

Aquí *generadors* del sistema homogeni $Ax = 0$ vol dir solucions $s_1, \ldots, s_k$ tals que tota altra solució és del tipus: $s = \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_k s_k$.

Exemple 2.6.2. Considerem el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} 34x & +39y & +41z & +28t & = & 32 \\ 39x & -36y & +11z & +17t & = & -8 \\ 23x & +71y & +73z & -19t & = & 21 \\ -11x & +32y & +32z & -47t & = & -11 \end{array}\right. .$$

El podem resoldre de diferents maneres:

I. Busquem una solució particular i les solucions del sistema homogeni:

In[-]:= MatrixForm[$A = \{\{34, 39, 41, 28\}, \{39, -36, 11, 17\}, \{23, 71, 73, -19\},$
$\{-11, 32, 32, -47\}\}$]

Out[-]= $\begin{pmatrix} 34 & 39 & 41 & 28 \\ 39 & -36 & 11 & 17 \\ 23 & 71 & 73 & -19 \\ -11 & 32 & 32 & -47 \end{pmatrix}$

In[-]:= NullSpace[A]

Out[-]= $\{\{-130559,\ 69744,\ -127082,\ 69595\}\}$
In[-]:= LinearSolve[$A, \{32, -8, 21, -11\}$]
Out[-]= $\{1, 1, -1, 0\}$

$(1, 1, -1, 0)$ és una solució particular. Les solucions del sistema homogeni són $\{\, \lambda(-130559,\ 69744,\ -127082,\ 69595) \mid \forall\ \lambda \,\}$. Per tant, la solució general és:

$\{\, (x, y, z, t) \mid x = 1{-}130559\lambda, \quad y = 1{-}69744\lambda, \quad z = -1{+}127082\lambda, \quad t = 69595\lambda \,\}$.

II. Calculem la matriu escalonada reduïda per files de la matriu ampliada:

In[-]:= MatrixForm[$AA = \{\{34, 39, 41, 28, 32\}, \{39, -36, 11, 17, -8\},$
$\{23, 71, 73, -19, 21\}, \{-11, 32, 32, -47, -11\}\}$]

Out[-]= $$\begin{pmatrix} 34 & 39 & 41 & 28 & 32 \\ 39 & -36 & 11 & 17 & -8 \\ 23 & 71 & 73 & -19 & 21 \\ -11 & 32 & 32 & -47 & -11 \end{pmatrix}$$

In[-]:= MatrixForm[RowReduce[AA]]

Out[-]= $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 130559/69595 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 69744/69595 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -(127082/69595) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solució general és:

$$x = 1 - \frac{130559}{69595}t, \quad y = 1 - \frac{60744}{69595}t, \quad z = -1 + \frac{127082}{69595}t.$$

III. Resolució directa amb la comanda Solve:

In[-]:= $A = \{\{34, 39, 41, 28\}, \{39, -36, 11, 17\}, \{23, 71, 73, -19\},$
$\{-11, 32, 32, -47\}\}$
Out[-]:= $\{\{34, 39, 41, 28\}, \{39, -36, 11, 17\}, \{23, 71, 73, -19\}, \{-11, 32, 32, -47\}\}$
In[-]:= $v = \{32, -8, 21, -11\}$

Out[-]= $\{32, -8, 21, -11\}$
In[-]:= Solve[$A.\{x, y, z, t\} == v, \{x, y, z, t\}$]
Out[-]= $\{\{x- > 1 - \frac{(130559\,t)}{69595},\ y- > 1 - \frac{(69744\,t)}{69595},\ z- > -1 + \frac{(127082\,t)}{69595}\}\}$

Exemple 2.6.3. Si apareixen paràmetres, el *Mathematica* els interpreta com a valors *generals* diferents de qualsevol número, inclòs el 0. Considerem, per exemple, el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x + y - z & = 3 \\ x + my + z & = 3 \\ 3x + y - mz & = 4 \end{array}\right.$$

In[-]:= $A = \{\{2, 1, -1\}, \{1, m, 1\}, \{3, 1, -m\}\}$
Out[-]= $\{\{2, 1, -1\}, \{1, m, 1\}, \{3, 1, -m\}\}$
In[-]:= NullSpace[A]
Out[-]= { }
In[-]:= LinearSolve[$A, \{3, 3, 4\}$]
Out[-]= $\{\frac{-1+3m}{2m}, \frac{3}{2m}, \frac{1}{2m}\}$

Per a valors generals de m el sistema és compatible determinat i $(\frac{-1+3m}{2m}, \frac{3}{2m}, \frac{1}{2m})$ és l'única solució.

Obtenim el mateix si fem:

In[-]:= Solve[$A.\{x, y, z\} == \{3, 3, 4\}, \{x, y, z\}$]
Out[-]= $\{\{x \to -\frac{1-3m}{2m},\ y \to \frac{3}{2m},\ z \to \frac{1}{2m}\}\}$

Clarament, aquesta solució no val si $m = 0$. Aquest valor cal estudiar-lo per separat:

In[-]:= $A0 = A\,/.\ m- > 0$
Out[-]= $\{\{2, 1, -1\}, \{1, 0, 1\}, \{3, 1, 0\}\}$
In[-]:= NullSpace[$A0$]
Out[-]= $\{\{-1, 3, 1\}\}$
In[-]:= LinearSolve[$A0, \{3, 3, 4\}$]
Out[-]= LinearSolve[$\{\{2, 1, -1\}, \{1, 0, 1\}, \{3, 1, 0\}\}, \{3, 3, 4\}$]

Aquesta última línia vol dir que no ha trobat cap solució. També podem fer

In[-]:= Solve[$A0.\{x, y, z\} == \{3, 3, 4\}, \{x, y, z\}$]
Out[-]= { }

Per tant, per a $m = 0$, el sistema és incompatible.

Observem que aquests càlculs no ens asseguren que no hi hagi valors particulars de $m \neq 0$ per als quals el sistema no sigui compatible determinat. Efectivament, mirem què passa si $m = 2$:

In[-]:= $A2 = A/.\ m- > 2$
Out[-]= $\{\{2, 1, -1\}, \{1, 2, 1\}, \{3, 1, -2\}\}$
In[-]:= NullSpace[$A2$]
Out[-]= $\{\{1, -1, 1\}\}$
In[-]:= LinearSolve[$A2, \{3, 3, 4\}$]
Out[-]: $\{1, 1, 0\}$

O també

In[-]:= Solve[$A2.\{x, y, z\} == \{3, 3, 4\}, \{x, y, z\}$]
Out[-]= $\{\{x \to 1 + z,\ y \to\ 1 - z\}\}$

Per tant, per a $m = 2$ el sistema és compatible indeterminat i podem escollir z com a variable arbitrària. Això acaba la discusió del sistema.

Per estudiar la compatibilitat i els graus de llibertat del sistema per a tots els valors que pot prendre m cal estudiar els rangs de A i de la matriu ampliada en funció de m, cosa que no fa el *Mathematica*. Més endavant, quan estudiem determinants i la seva relació amb els rangs, podrem resoldre aquest problema.

2.7. Exercicis i problemes

2.7.1. Calculeu les matrius escalonades per files i per columnes de les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 9 & -29 & 23 \\ -16 & -24 & 89 & -66 \\ 4 & 6 & -21 & 16 \\ 10 & 15 & -55 & 41 \end{pmatrix}.$$

2.7.2. Discutiu i resoleu els sistemes d'equacions lineals següents:

$$\begin{cases} x-3y+2z=6 \\ 2x+y-5z=-4 \\ 2x-13y+13z=28 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y+2z=6 \\ 2x+y-5z=-4 \\ 2x-13y+13z=14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y+2z=0 \\ 2x+y-5z=0 \\ 2x-13y+13z=0. \end{cases}$$

Resoleu els que siguin compatibles i escriviu la solució general com a suma d'una solució particular i una solució del sistema homogeni associat.

2.7.3. Resoleu el sistema $\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ x+y+3z=4 \\ 5x-y+az=10 \end{cases}$ per als paràmetres a per als quals hi hagi més d'una solució.

2.7.4. Considerem el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x+z=a \\ y+t=b \\ x+2y+3z+4t=c \\ 2x+y+4z+3t=d \end{cases}.$$

Determineu quines condicions han de complir els paràmetres a, b, c, d per tal que el sistema sigui: (i) incompatible; (ii) compatible determinat; (iii) compatible indeterminat, amb un grau de llibertat; (iv) compatible indeterminat amb dos graus de llibertat; (v) compatible indeterminat amb més de dos graus de llibertat.

2.7.5. Per a cada un dels sistemes d'equacions lineals que segueixen, trobeu quines condicions han de complir els paràmetres $a, b, c \in \mathbb{R}$ per tal que siguin compatibles i, en aquest cas, trobeu la solució general.

$$\begin{cases} 3x+2y+z=a \\ 5x+3y+3z=b \\ x+y-z=c \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y+z=a \\ 5x+3y+4z=b \\ x+y-z=c \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+3z+4t=a \\ x-2z+3t=a \\ -x+4y+12z-t=b \\ 3x-2y-11z+8t=c \end{cases}.$$

2.7.6. Discutiu i resoleu, en els casos compatibles, els sistemes d'equacions lineals següents:

$$(i)\begin{cases} ax+y+z=a \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a \end{cases} \qquad (ii)\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x+my+z=3 \\ 3x+y-mz=4 \end{cases}$$

$$(iii)\begin{cases} 2x-ay=1 \\ -x+2y-az=1 \\ -y+2z=1 \end{cases} \qquad (iv)\begin{cases} x+3y=2a \\ x+y=5 \\ 2ax+6y=a+3 \end{cases}$$

$$(v)\begin{cases} x+my+z=1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+y+z=m+1 \end{cases} \qquad (vi)\begin{cases} x+y-z=2 \\ ax+y+z=1 \\ x-y+3z=-3 \\ 4x+2y=a. \end{cases}$$

2.7.7. Determineu per a quins valors dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$ és incompatible el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} ax+(a-3)y+z=2 \\ bx+(2b+5)y+2z=3 \end{cases} .$$

2.7.8. Discutiu el sistema d'equacions lineals $Ax=b$ on

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} 4 \\ \beta \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.7.9. Determineu per a quins valors de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el sistema d'equacions lineals $Ax=b$, on

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ -\lambda-\mu \end{pmatrix}$$

és compatible per a tots els valors de λ, μ, diferents del cas $\lambda=\mu=0$.

2.7.10. Determineu quines condicions han de complir els paràmetres a, b, c, d, e per tal que poguem escollir com a variables principals x, y en el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} y + az + bt = 0 \\ -x + cz + dt = 0 \\ ax + cy - et = 0 \\ bx + dy + ez = 0 \end{cases}.$$

2.7.11. Discutiu, segons els valors dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$, el rang de la matriu d'ordre $(n+1) \times (n+2)$ següent:

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & a \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a & a \\ a & a & a & \dots & a & 1 & b \end{pmatrix}.$$

2.7.12. Determineu un polinomi de tercer grau $p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3$ tal que

$$p(1) = 5, \qquad p(-1) = 3, \qquad p(2) = 9, \qquad p(-2) = 16.$$

2.7.13. Sigui $Ax = b$ un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites, del qual sabem que (i) $A \neq 0$; (ii) $(1, 2, 2)$ i $(0, 1, 1)$ són solucions; (iii) $(0, a, b)$ només és solució si $a = b = 1$. Trobeu les solucions del sistema.

2.7.14. Sigui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$a_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i > j \\ -1 & \text{si} \quad i < j \end{cases}.$$

Demostreu que $\mathrm{rg}(A) = n$ si n és parell, i que $\mathrm{rg}(A) = n - 1$ si n és senar.

2.8. Activitats d'autoavaluació

2.8.1. Sigui $Ax = 0$ un sistema lineal homogeni amb m equacions i n incògnites. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines falses. Demostreu les que siguin certes i poseu un contraexemple de les que siguin falses.

1. Si $m = n$ el sistema és compatible determinat.
2. Si $m = n$ el sistema és compatible indeterminat.
3. Si $m = n$ el sistema és incompatible.
4. Si $m > n$ el sistema és compatible determinat.
5. Si $m > n$ el sistema és compatible indeterminat.
6. Si $m > n$ el sistema és incompatible.
7. Si $m < n$ el sistema és compatible determinat.
8. Si $m < n$ el sistema és compatible indeterminat.
9. Si $m < n$ el sistema és incompatible.

Tingueu en compte que una afirmació és certa si ho és sempre, i és falsa si hi ha algun cas en què no és certa, encara que en altres casos particulars pugui ser certa.

2.8.2. Sigui $Ax = b$ un sistema amb m equacions i n incògnites. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines falses. Demostreu les que siguin certes i poseu un contraexemple de les que siguin falses.

1. Si $m = n$ el sistema és compatible determinat.
2. Si $m = n$ el sistema és compatible indeterminat.
3. Si $m = n$ el sistema és incompatible.
4. Si $m > n$ el sistema és compatible determinat.
5. Si $m > n$ el sistema és compatible indeterminat.
6. Si $m > n$ el sistema és incompatible.
7. Si $m < n$ el sistema és compatible determinat.
8. Si $m < n$ el sistema és compatible indeterminat.
9. Si $m < n$ el sistema és incompatible.

2.8.3. Sigui $Ax = b$ un sistema compatible determinat. Existeix una matriu columna $c \neq b$ tal que

1. el sistema $Ax = c$ sigui incompatible?
2. el sistema $Ax = c$ sigui compatible indeterminat?

Justifiqueu les respostes.

2.8.4. El sistema d'equacions lineals $Ax = b$ té m equacions i és compatible determinat. Quantes incògnites pot tenir?

2.8.5. És cert que un sistema amb una única equació té sempre solució? Demostreu-ho si és cert i poseu un contraexemple si no ho és.

2.8.6. El conjunt de punts $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ solució d'una equació $ax + by + cz + d = 0$, amb algun dels coeficients a, b, c diferent de 0, s'anomena un *pla* de $\mathbb{R}^3$. Considerem els tres plans:

$$\pi : \ ax+by+cz+d = 0, \quad \pi' : \ a'x+b'y+c'z+d' = 0, \quad \pi'' : \ a\text{"}x+b\text{"}y+c\text{"}z+d\text{"} = 0.$$

1. Quines condicions han de complir $a, b, c, d, a', b', c', d'$ per tal que π i π' siguin paral·lels? (és a dir, no es tallin).
2. Pot passar que la intersecció de dos dels plans sigui un punt?
3. Pot passar que la intersecció dels tres plans sigui un punt?
4. Pot passar que la intersecció dels tres plans sigui una recta?
5. Pot passar que la intersecció dels tres plans sigui buida, però que dos dels plans sempre es tallin?

Quan la resposta sigui negativa, demostreu-ho; quan la resposta sigui afirmativa, doneu-ne un exemple.

2.8.7. Estudieu les possibles posicions relatives de: (i) dues rectes del $\mathbb{R}^2$; (ii) m rectes de $\mathbb{R}^2$.

2.8.8. Escriviu una matriu d'ordre 4 que tingui rang 2 i sigui simultàniament

1. Escalonada reduïda per files i escalonada reduïda per columnes.
2. Escalonada per files i per columnes.

2.8.9. Al *Mathematica* no tenim cap comanda que ens trobi la matriu escalonada reduïda per columnes d'una matriu A. Quines comandes podem combinar per tal que ens la calculi?

2.8.10. Sigui $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrius de rang r i s respectivament. És cert que aleshores

1. $A + B$ té rang $r + s$?
2. AB té rang $\min(r, s)$?

Capítol 3

Matriu inversa i matrius elementals

En aquest capítol introduïm la noció d'inversa d'una matriu quadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ i donem un algorisme per calcular-la, si existeix. També estudiem les matrius elementals i demostrem que una matriu és invertible si, i només si, és producte de matrius elementals. Per acabar, estudiem la factorització LU d'una matriu.

3.1. Matriu inversa

Definició 3.1.1. Anomenem *matriu inversa* d'una matriu quadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriu B si

$$AB = I_n = BA.$$

Una *matriu regular* o *invertible* és una matriu que té inversa.

Exemple 3.1.2. Les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ són inverses una de l'altra. En efecte, $AB = BA = I_3$.

• Si existeix, la matriu inversa d'una matriu A és única. En efecte, si B i C són dues inverses d'A, tindrem

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

Designarem per A^{-1} a l'única inversa d'A, si existeix.

• No totes les matrius quadrades tenen inversa. Més endavant veurem els criteris perquè una matriu quadrada tingui inversa.

• Si una matriu A té inversa, no pot existir cap altra matriu $B \neq 0$, quadrada o no, tal que $AB = 0$. En efecte,

$$AB = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = I_nB = B.$$

Anàlogament, $CA = 0$ implica $C = 0$.

• Si $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ són dues matrius invertibles, es compleix:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3.2. Càlcul de la matriu inversa

Una manera de calcular la matriu inversa d'una matriu quadrada $A = (a_i^j)$ d'ordre n, és la següent: busquem la matriu escalonada equivalent per files a la matriu

$$(A \,|\, I_n).$$

Si el rang de A és n, la matriu escalonada és del tipus $(I_n \,|\, B)$ i B resulta ser la matriu inversa de A. Si el rang de A és menor que n, la matriu A no té inversa.

Primer il·lustrarem el mètode amb un exemple i després demostrarem que és correcte.

Exemple 3.2.1. Per buscar la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si és que existeix, procedim a escalonar la matriu $(A \,|\, I_n)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_2 - F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Si multipliquem per A podem comprovar que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Passem a justificar el mètode. Partim d'una matriu $A = (a_i^j)$, d'ordre n, i busquem una matriu $B = (x_i^j)$ tal que $AB = I_n$. La columna i-èsima de B és solució del sistema

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_1^1 x_i^1 + \cdots + a_n^1 x_i^n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^i x_i^1 + \cdots + a_n^i x_i^n & = & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n x_i^1 + \cdots + a_n^n x_i^n & = & 0 \end{array} \right.$$

que podem resoldre pel mètode de Gauss-Jordan, escalonant la matriu $(A \,|\, e_i)$, on e_i és una matriu columna de zeros, llevat un 1 a la fila i. Per a les distintes columnes de B, s'obtenen sistemes la matriu dels quals és A; tan sols varien els termes independents. Això permet resoldre tots els sistemes simultàniament, incorporant a la matriu que hem d'escalonar totes les columnes e_i

$$(A \,|\, e_1 | \ldots | e_n) \;=\; (A \,|\, I_n).$$

Si existeix una matriu inversa, aquesta és única i tots els sistemes (*) són compatibles determinats i, per tant, $\mathrm{rg}(A) = n$. Aleshores, la matriu escalonada reduïda de $(A \mid I_n)$ és del tipus $(I_n \mid B)$ i el sistema (*) és equivalent al sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_i^1 & = & b_i^1 \\ \quad\ddots & & \vdots \\ \qquad x_i^j & = & b_i^j \\ \qquad\quad\ddots & & \vdots \\ \qquad\qquad x_i^n & = & b_i^n \end{array} \right. .$$

Això demostra que $B = (b_i^j)$ compleix $AB = I_n$. Per poder dir que B és la matriu inversa de A hem de provar que també $BA = I_n$. Ho farem en dos passos:

1. Suposem que la matriu que s'obté escalonant $(A^t \mid I_n)$ és $(I_n \mid C)$. En aquest cas, $A^t C = I_n$. La transposada d'un producte és el producte de les transposades en ordre invers, i la transposada de la identitat és ella mateixa. Per tant, $C^t A = I_n$.

2. Provem ara que $C^t = B$. En efecte,

$$C^t = C^t I_n = C^t(AB) = (C^t A)B = I_n B = B,$$

i, en particular, $BA = I_n$.

3.3. Matrius elementals

En aquestes notes, denotarem per E_i^j la matriu amb tots els seus coeficients 0, llevat un 1 situat a la columna i, fila j. Qualsevol matriu $A = (a_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es pot expressar de manera única com a una suma de matrius d'aquest tipus, multiplicades per escalars:

$$A = a_1^1 E_1^1 + a_2^1 E_2^1 + \cdots + a_n^m E_n^m \;=\; \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} a_i^j E_i^j .$$

Exemple 3.3.1: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2E_1^1 + 3E_2^1 + 5E_3^1 + 1E_1^2 - E_3^2.$

Definició 3.3.2. Es diuen *matrius elementals* les matrius dels tipus següents:

$$P_{i,j} := I_n - E_i^i - E_j^j + E_i^j + E_j^i = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{j-i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-j} \end{array}\right)$$

$S_{i,j}(a) := I_n + aE_j^i$, és a dir, segons $i > j$ o $i < j$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_{j-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{i-j-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i} \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{j-i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-j} \end{array}\right)$$

$$M_i(a) := I_n + (a-1)E_i^i = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i} \end{array}\right) \text{ amb } a \neq 0.$$

Exemple 3.3.3:

$$P_{1,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3(8) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_{1,4}(8) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Totes les matrius elementals són invertibles i les inverses també són matrius elementals

$$(P_{i,j})^{-1} = P_{i,j}, \qquad (S_{i,j}(a))^{-1} = S_{i,j}(-a), \qquad (M_i(a))^{-1} = M_i(a^{-1}).$$

• Donades les matrius $A = (a_i^j) \in M_{n\times k}$ i $B = (b_i^j) \in M_{m\times n}$, multiplicar per les matrius elementals produeix els efectes següents:

$P_{i,j}A$ permuta les files i, j de A.
$BP_{i,j}$ permuta les columnes i, j de B.

$S_{i,j}(a)A$ suma a la fila i de A la fila j multiplicada per a.
$BS_{i,j}(a)$ suma a la columna j de B la columna i multiplicada per a.

$M_i(a)A$ multiplica la fila i de A per a.
$BM_i(a)$ multiplica la columna i de B per a.

Observem que aquestes transformacions són precisament les que fem quan reduïm una matriu a forma escalonada (secció 2.2.) per files o per columnes. Això demostra la proposició següent.

Proposició 3.3.4. *La forma escalonada reduïda per files d'una matriu A s'obté multiplicant A per l'esquerra per un producte de matrius elementals. Anàlogament, la forma escalonada reduïda per columnes d'una matriu B s'obté multiplicant B per la dreta per un producte de matrius elementals.* $\square$

Corol·lari 3.3.5. *Una matriu és invertible si, i només si, és producte de matrius elementals.*

Demostració. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és invertible, es pot reduir per files a la identitat. És a dir, existeixen matrius elementals $E_1, \dots, E_k$ tals que

$$E_1 \dots E_k A = I_n \quad \Rightarrow \quad A = E_k^{-1} \dots E_1^{-1}$$

i les matrius E_i^{-1} són elementals, per ser inverses de matrius elementals.

Recíprocament, suposem que A és producte de matrius elementals:

$$A = E_1 \dots E_m \quad \Rightarrow \quad E_m^{-1} \dots E_1^{-1} A = I_n.$$

I això ens diu que A es pot reduir per files a la matriu identitat, i és, per tant, invertible. $\square$

3.4. Matrius equivalents

A la secció 2.2. hem definit matrius equivalents per files i matrius equivalents per columnes. Ara podem redefinir aquestes relacions de la manera següent:

Definició 3.4.1. Direm que dues matrius $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ són *equivalents per files*, $A \sim_f B$, si existeix una matriu invertible $P \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ tal que $PA = B$. Anàlogament, A i B són *equivalents per columnes*, $A \sim_c B$, si existeix una matriu invertible $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $AQ = B$. Finalment, dues matrius $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ són *equivalents*, $A \sim B$, si existeixen matrius invertibles $P \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ i $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tals que $PAQ = B$.

Proposició 3.4.2. *Tota matriu és equivalent a una matriu del tipus* $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, *on r és el rang de A.*

Demostració. Suposem que $\operatorname{rg}(A) = r$. Existeix una matriu invertible P tal que

$$PA = \left(\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

llevat de l'ordre de les columnes. Podem ara reduir per columnes i obtenim una matriu $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.$\square$

3.5. La factorització LU

Definició 3.5.1. Una *factorització LU* d'una matriu quadrada A és l'expressió de A com a producte d'una matriu L triangular inferior amb uns a la diagonal, i una matriu triangular superior U: $A = LU$.

Exemple 3.5.2. No totes les matrius admeten una factorització LU. Per exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad b = 0,\ ab = 1$$

i això és impossible.

Vegeu [1] per a una condició necessària i suficient perquè una matriu invertible tingui una factorització LU.

• Sigui L una matriu triangular inferior amb uns a la diagonal. Restant la primera fila multiplicada per un factor convenient a cada una de les files inferiors, podem anul·lar tots els elements d'aquesta columna llevat del primer. De la mateixa manera, podem anul·lar la resta d'elements per sota la diagonal i obtenir la matriu identitat. Cada un d'aquests canvis equival a multiplicar per l'esquerra per una matriu de tipus $S_{i,j}(a)$ amb $j < i$. És a dir,

$$E_1 \dots E_k L = I_n.$$

En particular, $L^{-1} = E_1 \dots E_k$.

• Si A té una descomposició $A = LU$, amb les notacions anteriors, tindrem que

$$E_1 \dots E_k A = U.$$

On E_i és una matriu elemental del tipus $S_{i,j}(a)$. És a dir, amb només transformacions del tipus sumar una fila multiplicada per un factor a una inferior, podem obtenir una matriu triangular superior. Això ens dóna una manera de factoritzar una matriu A, sempre que sigui possible.

Hem demostrat la proposició següent.

Proposició 3.5.3. *Una matriu A admet una descomposició LU si podem reduir-la a una forma triangular superior U per transformacions consistents a sumar a una fila un altra de superior multiplicada per un factor, és a dir, multiplicant per l'esquerra per matrius del tipus $S_{i,j}(a)$, amb $i > j$.* $\square$

Exemple 3.5.4. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. Fem transformacions de files per obtenir una matriu triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_4 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_4-3F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U.$$

Aquestes transformacions equivalen a multiplicar A per l'esquerra per

$$M = S_{4,3}(-3)S_{4,2}(-1)S_{3,1}(1)S_{2,1}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$MA = U$. Per tant, $A = LU$ amb

$$L = M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposició 3.5.5:

(i) Si A és invertible, la descomposició $A = LU$ és única.

(ii) Per a tota matriu A existeix una matriu P producte de matrius elementals del tipus $P_{i,j}$ tal que PA admet una factorització LU.

La demostració d'aquesta proposició està indicada en les activitats d'autoavaluació (3.8.7.) i (3.8.8.).

La factorització LU proporciona un mètode computacionalment eficient per resoldre un sistema $Ax = b$ d'equacions lineals. Consisteix a fer la factorització $A = LU$. Si ordenem les equacions convenientment, sempre és possible. Aleshores, resolem successivament els sistemes:

$$Ly = b \qquad \text{i} \qquad Ux = y.$$

El primer es pot resoldre per substitució de $y^1 = b^1$ a la segona equació. Això ens dóna el valor de y^2, i així successivament en ordre creixent. El segon sistema es resol de forma anàloga, ara en ordre decreixent.

3.6. *Mathematica*: Matrius invertibles. Descomposició LU

Inverse[A]	Inversa de A
LUDecomposition[A]	Descomposició LU de A, permutant files si cal.

Exemple 3.6.1. Matriu inversa

In[-]:= $A = \{\{3,1,2\},\{0,0,-1\},\{4,1,1\}\}$
Out[-]= $\{\{3,1,2\},\{0,0,-1\},\{4,1,1\}\}$
In[-]:= MatrixForm[%]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

In[-]:= Inverse[A]
Out[-]= $\{\{-1,-1,1\},\{4,5,-3\},\{0,-1,0\}\}$
In[-]:= MatrixForm[%]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Observem què obtenim amb la comanda LUDecomposition:

In[-]:= $A = \{\{3,1,2\},\{0,0,-1\},\{4,1,1\}\}$
Out[-]:= $\{\{3,1,2\},\{0,0,-1\},\{4,1,1\}\}$
In[-]:= LUDecomposition[A]
Out[-]= $\left\{\left\{\{3,1,2\},\{\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\},\{0,0,-1\}\right\},\{1,3,2\},1\right\}$

L'últim nombre dóna informació sobre la sensibilitat amb què la solució de $Ax = b$ varia quan varia b; nosaltres no ens n'ocuparem. Abans hi ha un vector que indica l'ordre amb què s'han agafat les files per fer la descomposició LU. En aquest exemple s'han permutat la segona i la tercera fila; observeu que si no es fa primer aquest canvi, la matriu no té descomposició LU (veure l'activitat d'autoavaluació 3.8.8.). La matriu que el *Mathematica* dóna en primer lloc està formada per la matriu U i la matriu L sense els termes de la diagonal, que sabem que són tots uns; concretament $U + (L - I)$. Per tant, en aquest exemple tindrem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.7. Exercicis i problemes

3.7.1. En cas d'existir, trobeu la matriu inversa de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 17 & -15 & -2 \\ 7 & -7 & -1 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

i expresseu-la com a producte de matrius elementals.

3.7.2. Trobeu la inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i expresseu-la com a producte de matrius elementals.

3.7.3. (i) Sigui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^k = 0$. (Es diu aleshores que A és *nilpotent.*) Comproveu que

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} = \sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

En particular, observeu que $I_n - A$ és invertible.

(ii) Sigui $A = (a_i^j)$ la matriu donada pel terme general següent:

$$a_i^j = \begin{cases} 1, & \text{si } i - j = 1, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Demostreu que és nilpotent i calculeu $(I_n - A)^{-1}$.

3.7.4. S'anomena *projecció* una matriu quadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ si compleix $A^2 = A$. Demostreu que A o és la identitat o no és invertible.

3.7.5. Sigui A una matriu quadrada d'ordre n.

(i) Suposeu que A verifica

$$p_0 I_n + p_1 A + p_2 A^2 + \cdots + p_k A^k = 0$$

per certs reals $p_0, p_1, \ldots, p_k$. Proveu que si $p_0 \neq 0$, la matriu A és invertible.

(ii) Comproveu que la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

compleix $(A - I_4)^2 = 0$. Feu-ho servir per calcular A^{-1} sense fer pràcticament cap càlcul.

3.7.6. Trobeu la factorització LU de les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ -4 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 8 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 10 & -8 & -9 \\ 15 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & -2 & 9 \\ -2 & -3 & 1 & -4 \\ -1 & 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

3.8. Activitats d'autoavaluació

3.8.1. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. Sigui $Ax = b$ un sistema compatible i determinat amb m equacions i n incògnites, $m \geq n$, aleshores la matriu A és invertible.
2. Si A i B són dues matrius invertibles, aleshores $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.
3. Si A i B són matrius invertibles i $AB = BA$, aleshores $A^{-1}B = BA^{-1}$ i $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. Si A és una matriu invertible tal que $A^2 - 2A + I = 0$, aleshores $A^{-1} = 2I - A$.

3.8.2. És única la descomposició d'una matriu invertible com a producte de matrius elementals? Justifiqueu la resposta.

3.8.3. Calculeu el producte $E_i^j E_h^k$ pels diferents valors dels índexs. Demostreu que la matriu inversa de $S_{i,j}(a)$ és $S_{i,j}(-a),\ i \neq j$, fent servir la definició $S_{i,j}(a) = I_n + aE_j^i$.

3.8.4. Trobeu condicions necessàries i suficients per tal que $P_{i,j}P_{k,h} = P_{k,h}P_{i,j}$.

3.8.5. Esbrineu quines de les igualtats següents són certes. Justifiqueu la resposta.

$$P_{i,j}P_{j,k} = P_{j,k}P_{i,k} \qquad\qquad P_{i,j}P_{j,k} = P_{j,i}P_{i,k}$$

$$P_{i,j}M_i(a) = M_i(a)P_{i,j} \qquad\qquad P_{i,j}M_i(a) = M_j(a)P_{i,j}$$

3.8.6. Proveu que

1. $P_{i,j}S_{i,j}(a) = S_{j,i}(a)P_{i,j}$, per a tot i, j.
2. $P_{i,k}S_{i,j}(a) = S_{i,j}(a)P_{j,k}$, per a tot $k \neq i, j$.
3. $P_{h,k}S_{i,j}(a) = S_{i,j}(a)P_{h,k}$, per a tot $h, k \neq i, j$.

3.8.7. Sigui A una matriu invertible. Aleshores A té una única factorització LU.
Indicació: Veieu que si $A = LU$ és una factorització LU i A és invertible, U també és invertible. Aleshores, si $LU = A = L_1U_1$, tenim que $L_1^{-1}L = U_1U^{-1}$.

3.8.8. Donada una matriu invertible A existeix sempre una matriu P producte de matrius elementals del tipus $P_{i,j}$ tal que PA admet una descomposició LU.
Indicació: El problema que ens podem trobar quan escalonem la matriu A

$$A \rightsquigarrow S_1A \rightsquigarrow S_2S_1A \cdots \rightsquigarrow S_\ell \dots S_1A$$

és que arribem a una fila F_j no nul·la i que el seu pivot sigui a una columna posterior a la del pivot de una fila F_k amb $k > j$. Això es pot solucionar amb un canvi de files, és a dir, multiplicant per l'esquerra per $P_{j,k}$. Les igualtats de la qüestió (3.8.6.) ens permeten multiplicar primer A per $P_{i,j}$, i després $P_{i,j}A$ per $S_\ell \dots S_1$.

3.8.9. Es diu matriu *permutació* a una matriu P si té tots els coeficients zeros llevat d'un 1 a cada fila i un 1 a cada columna. Proveu que una matriu A és una matriu permutació si, i només si, és producte de matrius elementals del tipus $P_{i,j}$.

3.8.10. Proveu les afirmacions següents:

1. El producte de dues permutacions és una permutació.
2. La identitat és una permutació.
3. La inversa d'una permutació és una permutació.

3.8.11. Escriviu de dues maneres diferents

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

com a producte de matrius $P_{i,j}$.

3.8.12. Donada una matriu A suposeu que existeixen les matrius B i C tals que CA i AB són matrius identitat. Proveu que aleshores A ha de ser quadrada i $B = C = A^{-1}$.

Capítol 4

Determinants

En aquest capítol associarem a cada matriu quadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ un nombre real, $\det(A)$, anomenat el determinant de A, i n'estudiarem les propietats. De $\det(A)$, en donarem dues definicions i demostrarem que són equivalents. Entre les propietats més importants veurem que una matriu A és invertible si, i només si, $\det(A) \neq 0$ i donarem un mètode alternatiu per calcular el rang d'una matriu no necessàriament quadrada.

4.1. Primera definició i exemples

Definició 4.1.1 (I). Donada una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, s'anomena *menor d'ordre* k de A la matriu quadrada d'ordre k formada pels elements de A situats en k files i k columnes prefixades.

Sigui $A = (a_i^j)$ una matriu quadrada d'ordre n, s'anomena *menor adjunt de l'element* a_i^j de A la matriu quadrada d'ordre $(n-1)$ que s'obté suprimint la fila j i la columna i de A. El designarem per A_i^j.

Exemple 4.1.2. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 9 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

Fixant les files $\{2, 4\}$ i les columnes $\{1, 3\}$, obtenim el menor d'ordre 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fixant les files $\{1,3,4\}$ i les columnes $\{1,2,4\}$, obtenim un menor d'ordre 3, que és el menor adjunt de l'element a_3^2:

$$A_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ -1 & 9 & -8 \end{pmatrix}.$$

Hi ha diferents maneres de definir el determinant d'una matriu. Nosaltres en donarem dues.

Definició 4.1.3 (I). Si $A = (a_1^1)$ és una matriu quadrada d'ordre 1, definim

$$\det(A) = a_1^1.$$

En general, suposant ja definits els determinants de matrius d'ordre $(n-1)$, definim el *determinant d'una matriu* $A = (a_i^j)$ d'ordre n com la suma dels coeficients de la primera fila a_i^1 multiplicats per $(-1)^{i+1}$ i pel determinant del seu menor adjunt:

$$\det(A) = a_1^1 \det(A_1^1) + \cdots + (-1)^{i+1} a_i^1 \det(A_i^1) + \cdots + (-1)^{1+n} a_n^1 \det(A_n^1).$$

La notació usual és

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Per a matrius d'ordre 2 tenim

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 \det(a_2^2) - a_2^1 \det(a_1^2) = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2.$$

Per a matrius d'ordre 3 tenim

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} &= a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_2^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_3^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} \\ &= a_1^1(a_2^2 a_3^3 - a_2^3 a_3^2) - a_2^1(a_1^2 a_3^3 - a_1^3 a_3^2) + a_3^1(a_1^2 a_2^3 - a_1^3 a_2^2) \\ &= a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 - a_1^3 a_2^2 a_3^1. \end{aligned}$$

Definició 4.1.4. Donada una matriu quadrada A, s'anomena *adjunt* de l'element a_i^j

$$Ad(A)_i^j := (-1)^{i+j} \det(A_i^j).$$

Per definició, el determinant d'una matriu quadrada $A = (a_i^j)$ és el producte dels elements de la primera fila pels seus adjunts

$$\det(A) = a_1^1 Ad(A)_1^1 + a_2^1 Ad(A)_2^1 + \cdots + a_n^1 Ad(A)_n^1.$$

Exemple 4.1.5:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 9 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-8) = -24.$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -8 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -8 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$$= 3(-8) - 1(8) - 4(-8) = 0.$$

3. **Matrius triangulars inferiors**. En aquest cas el determinant resulta ser el producte dels coeficients de la diagonal:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n.$$

Ho provarem per inducció. Per a $n = 1$, tenim $\det(a_1^1) = a_1^1$. En el cas general, suposant que és cert per a matrius triangulars inferiors d'ordre $(n-1)$, tenim

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^1 & a_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 (a_2^2 \dots a_n^n).$$

En particular, el determinant de la matriu identitat és $+1$.

4.2. Segona definició

Definició 4.2.1 (II). El determinant d'una matriu quadrada A és la seva imatge per una aplicació

$$\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

que compleix les condicions següents:

1. És *multilineal*, que vol dir que si una columna és suma de dues, el determinant és suma dels determinants amb cada una de les columnes:

$$\begin{aligned}&\det(a_1 \mid \cdots \mid a'_i + a"_i \mid \cdots \mid a_n) = \\ &\qquad = \det(a_1 \mid \cdots \mid a'_i \mid \cdots \mid a_n) + \det(a_1 \mid \cdots \mid a"_i \mid \cdots \mid a_n),\end{aligned}$$

   i si es multiplica una columna per un escalar, el determinant queda multiplicat per aquest escalar:

$$\det(a_1 \mid \cdots \mid \lambda a_i \mid \cdots \mid a_n) = \lambda \det(a_1 \mid \cdots \mid a_i \mid \cdots \mid a_n).$$

2. És *alternada*, que vol dir que si s'intercanvia la posició de dues columnes, el determinant canvia de signe:

$$\det(a_1 \mid \cdots \mid a_i \mid \cdots \mid a_j \mid \cdots \mid a_n) = -\det(a_1 \mid \cdots \mid a_j \mid \cdots \mid a_i \mid \cdots \mid a_n).$$

3. $\det(I_n) = 1$.

4.3. Equivalència de les dues definicions

Teorema 4.3.1. *La definició de determinant donada a 4.1.1 compleix les propietats de la definició 4.2.1.*

Demostració. Les condicions 1 i 3 es compleixen clarament per a matrius d'ordre 1, i la condició 2 es comprova fàcilment per a matrius d'ordre 2. Procedirem, doncs, per inducció.

Siguin $A = (a_1 \mid \cdots \mid a'_i + a"_i \mid \cdots \mid a_n)$, $A' = (a_1 \mid \cdots \mid a'_i \mid \cdots \mid a_n)$ i $A" = (a_1 \mid \cdots \mid a"_i \mid \cdots \mid a_n)$. Volem provar que $\det(A) = \det(A') + \det(A")$.

Entre els adjunts dels elements a la primera fila d'aquestes matrius tenim, per hipòtesis d'inducció, les relacions:

$$A_i^1 = (A')_i^1 = (A")_i^1, \qquad Ad(A)_k^1 = Ad(A')_k^1 + Ad(A")_k^1, \quad \text{si } k \neq i.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \textstyle\sum_{h=1}^n a_h^1 Ad(A)_h^1 = \sum_{k\neq i} a_k^1 \left(Ad(A')_k^1 + Ad(A")_k^1\right) + \left((a')_i^1 + (a")_i^1\right) Ad(A)_i^1 \\ &= \left(\textstyle\sum_{k\neq i} a_k^1 Ad(A')_k^1 + (a')_i^1 Ad(A')_i^1\right) + \left(\textstyle\sum_{k\neq i} a_k^1 Ad(A")_k^1 + (a')_i^1 Ad(A")_i^1\right) \\ &= \det(A') + \det(A"). \end{aligned}$$

Siguin $A = (a_1 \mid \cdots \mid a_i \mid \cdots \mid a_n)$ i $B = (a_1 \mid \cdots \mid \lambda a_i \mid \cdots \mid a_n)$. Volem provar que $\det(B) = \lambda \det(A)$. Entre els adjunts dels elements a la primera fila d'aquestes dues matrius tenim, per hipòtesis d'inducció, les relacions:

$$A_i^1 = B_i^1, \qquad Ad(B)_k^1 = \lambda Ad(A)_k^1 \quad \text{si } k \neq i.$$

Per tant,

$$\det(B) = \sum_{k\neq i} a_k^1 Ad(B)_k^1 + (\lambda a_i^1) Ad(B)_i^1 = \sum_{k\neq i} a_k^1 \lambda Ad(A)_k^1 + (\lambda a_i^1) Ad(A)_i^1 = \lambda \det(A).$$

Siguin $A = (a_1 \mid \cdots \mid a_i \mid \ldots a_j \mid \cdots \mid a_n)$ i $B = (a_1 \mid \cdots \mid a_j \mid \ldots a_i \mid \cdots \mid a_n)$, $i < j$. Volem provar que $\det(B) = -\det(A)$. Per hipòtesis d'inducció tenim

$$Ad(B)_k^1 = -Ad(A)_k^1, \qquad k \neq i, j$$

Per altra banda, el menor A_i^1 coincideix amb B_j^1 llevat que la columna a_j, que a A_i^1 ocupa el lloc $(j-1)$ (hem suprimit una columna anterior), a B_j^1 ocupi el lloc i. Per tant, fent $(j-i-1)$ intercanvis de posició de columnes, podem passar de A_i^1 a B_j^1 i, per hipòtesis d'inducció, tenim

$$\begin{aligned} Ad(A)_i^1 &= (-1)^{1+i} \det(A_i^1) = (-1)^{1+i} \left((-1)^{j-i-1} \det(B_j^1)\right) \\ &= -(-1)^{j-1} \det(B_j^1) = -Ad(B)_j^1. \end{aligned}$$

Analogament s'obté $Ad(A)^1_j = -Ad(B)^1_i$. Per tant,

$$\begin{aligned}\det(B) &= \textstyle\sum_{k\neq i,j} a^1_k Ad(A)^1_k + a^1_i Ad(A)^1_i + a^1_j Ad(A)^1_j \\ &= \textstyle\sum_{k\neq i,j} a^1_k \left(-Ad(B)^1_k\right) + a^1_i \left(-Ad(B)^1_j\right) + a^1_j \left(-Ad(B)^1_i\right) \\ &= -\det(B),\end{aligned}$$

tenint en compte que a_i, a_j són les columnes j, i, respectivament, de B.

L'última condició que cal provar és $\det(I_n) = 1$. La matriu I_n té tots els termes de la primera fila 0, llevat el primer que és 1. El menor adjunt d'aquest element és I_{n-1} i per hipòtesis d'inducció tenim

$$\det(I_n) = \det(I_{n-1}) = 1. \square$$

Corol·lari 4.3.2. *Sigui* $A = (a^j_i) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(i) Si A té una columna de zeros, $\det(A) = 0$.

(ii) Si A té dues columnes iguals, $\det(A) = 0$.

(iii) Si sumem una combinació lineal de la resta de columnes a una columna, el determinant no varia.

Demostració:

(i) Si la columna i de $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_i & \dots & a_n\end{pmatrix}$ és de zeros, $a_i = 0$,

$$\begin{aligned}\det A &= \det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & 0a_i & \dots & a_n\end{pmatrix} \\ &= 0\det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_i & \dots & a_n\end{pmatrix} = 0.\end{aligned}$$

(ii) Si dues columnes de A són iguals, $a_i = a_j$,

$$\begin{aligned}\det A &= \det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_i & \dots & a_j & \dots & a_n\end{pmatrix} \\ &= -\det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_j & \dots & a_i & \dots & a_n\end{pmatrix} = -\det A\end{aligned}$$

i, per tant, $\det(A) = 0$.

(iii) Si sumem a una columna a_i de A una combinació lineal de la resta de columnes,

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_i + \sum_{j\neq i} \lambda^j a_j & \dots & a_n \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_i & \dots & a_n \end{pmatrix} + \sum_{j\neq i} \lambda^j \det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_j & \dots & a_n \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_i & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

ja que tots els determinants del sumatori tenen dues columnes iguals. $\square$

Exemple 4.3.3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{C_2-2C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{vmatrix} \overset{C_3-3C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 15.$$

Exemple 4.3.4. Volem calcular el determinant d'una matriu quadrada $A = (a_i^j)$ que té zeros a la diagonal i tots els altres coeficients són 1:

$$a_i^i = 0, \ \forall\, i, \qquad a_i^j = 1, \ \forall\, i \neq j.$$

Pot passar que la matriu sigui d'un ordre molt gran, o simplement que vulguem conèixer el resultat per a qualsevol ordre n. En qualsevol cas, és fàcil observar que sumant totes les columnes a la primera obtenim

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Restem ara la primera columna a totes les altres

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}.$$

4.4. Permutacions i determinant

S'anomena *permutació d'ordre* n una matriu d'ordre $n \times n$ amb tots els coeficients 0 llevat d'un coeficient 1 a cada fila i un coeficient 1 a cada columna. En particular, les matrius elementals $P_{i,j}$ són permutacions, i s'anomenen *transposicions*. A més a més, com que fent intercanvis de files podem passar d'una matriu permutació a la identitat, resulta que tota permutació és producte de matrius elementals $P_{i,j}$.

El conjunt de permutacions d'ordre n amb el producte és un grup que designarem amb la notació S_n.

Ara demostrarem que totes les descomposicions d'una mateixa permutació en producte de transposicions tenen o bé un nombre parell de factors o bé un nombre senar. Per això recordem que multiplicar per la dreta una matriu quadrada A per una matriu elemental equival a una transformació de Gauss de les columnes. El teorema 4.3.1. i els seus corol·laris ens diuen com canvia el determinant de A amb aquestes transformacions. Concretament tenim:

$$\det(AP_{i,j}) = -\det(A), \quad \det(AM_i(a)) = a\det(A), \quad \det(AS_{i,j}(a)) = \det(A).$$

En particular, agafant $A = I_n$ obtenim

$$\det(P_{i,j}) = -1, \qquad \det(M_i(a)) = a, \qquad \det(S_{i,j}(a)) = 1.$$

I comparant amb les expressions de més amunt, tenim que, per a tota matriu elemental E,

$$\det(AE) = \det(A)\det(E).$$

Proposició 4.4.1. *Totes les descomposicions d'una permutació com a producte de transposicions tenen o bé un nombre parell de factors o bé un nombre senar.*

Demostració. En efecte, siguin $\tau_1 \dots \tau_k = \tau_1' \dots \tau_h'$ dos productes de transposicions. Les transposicions són matrius elementals i, per tant, el determinant d'aquests productes és el producte dels determinants dels factors:

$$\det(\tau_1 \dots \tau_k) = (-1)^k = \det(\tau_1' \dots \tau_h') = (-1)^h. \square$$

S'anomena *signe d'una permutació* σ el seu determinant i el denotarem $\epsilon(\sigma)$. Per tant, el signe és $+1$ si és producte d'un nombre parell de transposicions i és -1 si és producte d'un nombre senar de transposicions.

Sigui σ una matriu permutació. Farem servir la següent notació:

$$\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Observem que $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ són els mateixos números $(1, \ldots, n)$ amb un altre ordre. D'aquesta forma, σ es por considerar també com una aplicació bijectiva:

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Tota matriu permutació determina una aplicació bijectiva del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$ i tota aplicació bijectiva del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$ determina una matriu permutació. El producte de matrius permutació correspon a la composició de les corresponents bijeccions.

Les permutacions permeten escriure el determinant d'una forma compacta, que donen en la següent proposició.

Proposició 4.4.2. *Per a tota matriu* $A = (a_i^j) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$*, tenim*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \ldots a_n^{\sigma(n)}.$$

Demostració. $\det(A)$ és la imatge de la matriu A per a una aplicació

$$\det : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

multilineal alternada amb $\det(I_n) = 1$. Cada una de les columnes a_i d'una matriu $A = (a_i^j)$ es pot escriure en la forma

$$a_i = \begin{pmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \\ \vdots \\ a_i^n \end{pmatrix} = a_i^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_i^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_i^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = a_i^1 e_1 + a_i^2 e_2 + \cdots + a_i^n e_n.$$

Les propietats de l'aplicació $\det$ ens permeten els següents càlculs:

$$\begin{aligned}
\det(a_1 \mid \cdots \mid a_n) &= \det\left(\textstyle\sum_{j_1=1}^n a_1^{j_1} e_{j_1} \mid \cdots \mid \sum_{j_n=1}^n a_n^{j_n} e_{j_n}\right) && \text{propietat multilineal} \\
&= \textstyle\sum_{j_1,\dots,j_n} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} \det(e_{j_1} \mid \cdots \mid e_{j_n}) && \text{propietat alternada} \\
&= \textstyle\sum_{j_1,\dots,j_n} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} \det(e_{j_1} \mid \cdots \mid e_{j_n}) && j_1,\dots,j_n \text{ diferents} \\
&= \textstyle\sum_{\sigma} a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)} \det(e_{\sigma(1)} \mid \cdots \mid e_{\sigma(n)}) && \sigma \text{ permutació amb } \sigma(i) = j_i \\
&= \textstyle\sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)} \det(e_1 \mid \cdots \mid e_n) && \epsilon(\sigma) = \text{signe de } \sigma \\
&= \textstyle\sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)} && \text{ja que } (e_1 \mid \cdots \mid e_n) = I_n. \square
\end{aligned}$$

4.5. Més propietats dels determinants

Proposició 4.5.1. *El determinant d'una matriu coincideix amb el determinant de la seva transposada.*

Demostració. Sigui $A = (a_i^j)$ una matriu quadrada i $A^t = (b_i^j)$ la seva transposada, és a dir, $b_i^j = a_j^i$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \textstyle\sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) b_1^{\sigma(1)} \dots b_n^{\sigma(n)} = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)}^1 \dots a_{\sigma(n)}^n \\
&= \textstyle\sum_{\rho=\sigma^{-1}} \epsilon(\rho) a_1^{\rho(1)} \dots a_n^{\rho(n)} = \det(A).
\end{aligned}$$

A l'última igualtat hem fet servir que si $sigma$ recorre totes les permutacions, la seva inversa ρ també recorre totes les permutacions. A més a més, si $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ és una descomposició de σ com a producte de transposicions, $\rho = \tau_k \dots \tau_1$ és una descomposició de ρ com a producte de transposicions i, per tant, totes dues tenen el mateix signe: $\epsilon(\rho) = \epsilon(\sigma)$.$\square$

Corol·lari 4.5.2. *Tota propietat dels determinants referents a les files és certa també per a les columnes i viceversa. En particular, si E és una matriu elemental*

$$\det(EA) = \det(E)\det(A).$$

Demostració. Tota propietat per a files de A^t és una propietat per a columnes de A i viceversa. Per a l'última afirmació només cal observar que, si E és una matriu elemental, E^t també és una matriu elemental. Per tant,

$$\det(EA) = \det\left((EA)^t\right) = \det(A^tE^t) = \det(A^t)\det(E^t) = \det(A)\det(E).\square$$

Teorema 4.5.3. *Una matriu quadrada A és invertible si, i només si,* $\det(A) \neq 0$.

Demostració. Si A és invertible, és producte de matrius elementals: $A = E_1 \dots E_m$. Com acabem de veure, el determinant d'un producte per una matriu elemental és el producte dels determinants:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(E_1 \dots E_m) = \det(E_1 \dots E_{m-1})\det(E_m) = \\ &= \dots = \det(E_1)\dots\det(E_m) \neq 0 \end{aligned}$$

i és no nul perquè tots els determinants de matrius elementals són diferents de 0.

Si A no és invertible es pot reduir per columnes a una matriu B amb almenys una fila de zeros. Per tant,

$$0 = \det B = \det(E_1)\dots\det(E_k)\det(A) \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 0,$$

ja que les matrius elementals tenen determinants diferents de $0.\square$

Teorema 4.5.4. *Si* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demostració. Si A és invertible, la podem expressar com a producte de matrius elementals $A = E_1 \dots E_k$. Com que, si una de les matrius és elemental, ja hem vist que el determinant del producte és producte de determinants, tenim

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1 \dots E_k B) = (\det(E_1)\det(E_2 \dots E_k B)) = \dots \\ &= \det(E_1)\dots\det(E_k)\det(B) = \det(A)\det(B). \end{aligned}$$

Si A no és invertible, pel teorema anterior (4.5.3.), $\det(A) = 0$. A més a més, existeixen matrius elementals E_i tals que $E_1 \dots E_k A = C$ té una fila de zeros. Aleshores $E_1 \dots E_k AB = CB$ també té una fila de zeros i

$$\det(E_1 \dots E_k AB) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(AB) = 0.$$

Per tant, $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B).\square$

4.6. Càlcul de la matriu inversa per adjunts

Proposició 4.6.1. *Per a tota matriu* $A = (a_i^j) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, *i tot* $j \leq n$,

$$\det(A) = a_1^j Ad(A)_1^j + \cdots + a_i^j Ad(A)_i^j + \cdots + a_n^j Ad(A)_n^j.$$

Aquesta expressió s'anomena *desenvolupament per la fila* j *del* $\det(A)$.

Demostració. Sigui B la matriu obtinguda a partir de A passant la fila j a la primera posició. Per a tot i, tenim:

$$B_i^1 = A_i^j, \quad \text{d'on} \quad Ad(B)_1^j = (-1)^{j-1} Ad(A)_i^j.$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{j-1}\det(B) \\
&= (-1)^{j-1}\left(b_1^1 Ad(B)_1^1 + \cdots + b_i^1 Ad(B)_i^1 + \cdots + b_n^1 Ad(B)_n^1\right) \\
&= a_1^j Ad(A)_1^j + \cdots + a_i^j Ad(A)_i^j + \cdots + a_n^j Ad(A)_n^j. \square
\end{aligned}$$

Proposició 4.6.2. *Per a tota* $A = (a_i^j) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, *i tot* $i \leq n$,

$$\det(A) = a_i^1 Ad(A)_i^1 + \cdots + a_i^j Ad(A)_i^j + \cdots + a_i^n Ad(A)_i^n.$$

Aquesta expressió s'anomena *desenvolupament per la columna* i *del* $\det(A)$.

Demostració. Sabem que $\det(A) = \det(A^t)$. L'expressió de l'enunciat és el desenvolupament per la fila i de la matriu A^t. $\square$

Aquests resultats ens diuen que la suma dels productes dels coeficients d'una columna (o d'una fila) pels seus adjunts és el determinant de la matriu. En canvi, si multipliquem els elements d'una columna i pels adjunts d'una altra columna $k \neq i$, el resultat és 0:

$$a_i^1 Ad(A)_k^1 + \cdots + a_i^j Ad(A)_k^j + \cdots + a_i^n Ad(A)_k^n = 0.$$

En efecte, aquest és el desenvolupament per la columna k del determinant d'una matriu idèntica a A, llevat que la columna k ha estat substituïda per la columna i; en particular, té dues columnes iguals i el seu determinant és 0.

Anàlogament, si multipliquem els elements d'una fila i pels adjunts d'un altra fila k, $i \neq k$, el resultat és 0:

$$a_1^i Ad(A)_1^k + \cdots + a_j^i Ad(A)_j^k + \cdots + a_n^i Ad(A)_n^k = 0.$$

Aquestes expressions demostren el següent resultat.

Proposició 4.6.3. *Sigui* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *amb* $\det(A) \neq 0$. *La matriu inversa* A^{-1} *és la transposada de la matriu formada pels adjunts dividida per* $\det(A)$. *És a dir,*

$$A^{-1} = \frac{\left(Ad(A)_i^j\right)^t}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} Ad(A)_1^1 & Ad(A)_1^2 & \dots & Ad(A)_1^n \\ Ad(A)_2^1 & Ad(A)_2^2 & \dots & Ad(A)_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Ad(A)_n^1 & Ad(A)_n^2 & \dots & Ad(A)_n^n \end{pmatrix} . \square$$

Exemple 4.6.4. Si $ad - bc \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4.7. Regla de Laplace

Proposició 4.7.1. *Sigui* $A = \left(\begin{array}{c|c} B & M \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$, *on* $B = (b_i^j)$ *i* $C = (c_i^j)$ *són matrius quadrades d'ordre* k *i* h *respectivament, i* $M = (m_i^j) \in M_{k\times h}(\mathbb{R})$. *Aleshores*

$$\det \left(\begin{array}{c|c} B & M \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det B \cdot \det C.$$

Demostració. Farem inducció sobre k. Si $k = 1$, de la definició de determinant resulta que

$$det \left(\begin{array}{c|c} b_1^1 & M \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = b_1^1 \det C,$$

ja que $\det C$ és l'adjunt de b_1^1.

Suposem l'enunciat cert per a $(k-1)$. Aleshores,

$$\det A = \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} b_1^1 & \dots & b_k^1 & m_1^1 & \dots & m_h^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^k & \dots & d_k^k & m_1^k & \dots & m_h^k \\ \hline 0 & \dots & 0 & c_1^1 & \dots & c_h^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_1^h & \dots & c_h^h \end{array} \right) = b_1^1 Ad(A)_1^1 + \cdots + b_1^k Ad(A)_1^k.$$

Aplicant ara la hipòtesi d'inducció, tenim que $Ad(A)_1^j = Ad(B)_1^j \cdot \det C$, per a $j = 1, \dots, k$, d'on resulta

$$\det A = \left(b_1^1 Ad(B)_1^1 + \cdots + b_1^k Ad(B)_1^k \right) \det C = \det B \det C. \square$$

4.8. Determinants i rang

A la secció 2.4., hem definit el rang d'una matriu A com el nombre de files no nul·les de la matriu escalonada reduïda per files de A. Ara veurem que el rang és també el nombre de columnes no nul·les de la matriu escalonada reduïda per columnes i donarem un mètode pràctic de trobar el rang d'una matriu A.

Proposició 4.8.1. *Si la matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ té un menor d'ordre r amb determinant diferent de 0 i tots els seus menors d'ordre superior tenen determinant 0, el mateix és cert per al producte de A per qualsevol matriu elemental, per l'esquerra o per la dreta.*

Demostració. $P_{i,j}A$ té els mateixos menors que A llevat d'una possible permutació de files. Per tant, si la propietat és certa per a A també ho és per a $P_{i,j}A$.

$M_i(a)A$ té els mateixos menors que A llevat d'una possible fila multiplicada per $a \neq 0$. Per tant, si la propietat és certa per a A també ho és per a $M_i(a)A$.

Els menors de $S_{i,j}(\lambda)A$ són els menors de A si hem suprimit la fila i. Si no hem suprimit ni la fila i ni la fila j, aleshores els menors de $S_{i,j}(\lambda)A$ coincideixen amb els menors de A en els que hem sumat a una de les files una altra multiplicada per λ. Si no s'ha suprimit la fila i però sí la fila j, tenim:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1}^{j_1} & \dots & a_{i_k}^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_1}^{i} + \lambda a_{i_1}^{j} & \dots & a_{i_k}^{i} + \lambda a_{i_k}^{j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_1}^{j_k} & \dots & a_{i_k}^{j_k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1}^{j_1} & \dots & a_{i_k}^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_1}^{i} & \dots & a_{i_k}^{i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_1}^{j_k} & \dots & a_{i_k}^{j_k} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{i_1}^{j_1} & \dots & a_{i_k}^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_1}^{j} & \dots & a_{i_k}^{j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_1}^{j_k} & \dots & a_{i_k}^{j_k} \end{vmatrix}.$$

En el segon determinant de la dreta no apareix la fila i de A i, per tant, és el determinant d'un menor de $S_{i,j}(\lambda)A$, llevat potser d'una permutació de les files. Per tant, si és diferent de 0, $S_{i,j}(\lambda)A$ també té un menor d'aquest ordre amb determinant diferent de 0; si és igual a 0, aleshores, el determinant de l'esquerra és igual al determinant d'un menor de A. Això vol dir que els determinants dels menors d'ordre k de $S_{i,j}(\lambda)A$ són tots 0 si, i només si, els determinants de tots els menors d'ordre k de A són 0.

Arguments similars, canviant files per columnes, valen per als productes per la dreta de A i una matriu elemental. $\square$

Corol·lari 4.8.2. *El rang d'una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ coincideix amb el més gran dels ordres dels menors amb determinant diferent de zero.* $\square$

Corol·lari 4.8.3. *El rang d'una matriu no depèn de les transformacions per files o per columnes que fem per trobar la matriu escalonada reduïda.* $\square$

Corol·lari 4.8.4. *Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, aleshores* $\mathrm{rg}(A) \leq \min(m, n)$. $\square$

Corol·lari 4.8.5. *El rang d'una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ coincideix amb el rang de la seva transposada:* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^t)$. $\square$

Exemple 4.8.6. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 18 \\ 4 & -3 & 11 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si volem calcular el seu rang aplicant el corol·lari 4.8.2., haurem de calcular els determinants dels deu menors d'ordre 3. Tots resulten ser 0. En canvi $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Per tant, A té rang 2.

Hi ha una manera més curta de veure que el rang de A és 2. N'hi ha prou de comprovar que els menors d'ordre tres que contenen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ tenen determinant 0. Els 20 han quedat reduïts a 4. Per a matrius més grans l'estalvi pot ser molt major.

Calculem, doncs, els determinants dels menors formats per les dues primeres files i cada una de les restants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 5a + 3b - c = 0, \qquad \text{si } (a,b,c) = \begin{cases} (3,1,18) & \text{fila 3} \\ (4,-3,11) & \text{fila 4} \\ (-2,3,-1) & \text{fila 5} \\ (1,-1,2) & \text{fila 6} \end{cases}.$$

Naturalment, si (a,b,c) és una de les dues primeres files, aquest determinant també és 0. Per tant, els coeficients de l'última columna compleixen sempre $c = 5a + 3b$, és a dir, si C_i és la columna i:

$$C_3 = 5C_1 + 3C_2.$$

Hem obtingut l'última columna com a funció lineal de les primeres. En particular, qualsevol menor d'ordre tres té determinant 0, malgrat que no sigui un dels quatre que hem calculat.

Proposició 4.8.7. *Sigui* $A = (a_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *i suposem que el menor format per les* k *primeres files i* k *primeres columnes té determinant diferent de* 0*:*

$$M := \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \dots & a_k^k \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_k^1 & a_{k+1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^k & \dots & a_k^k & a_{k+1}^k \\ a_1^j & \dots & a_k^j & a_{k+1}^j \end{vmatrix} = 0, \qquad \forall\, j$$

la columna $(k+1)$ *de* A *és funció lineal de les anteriors i, en particular, tots els menors d'ordre* $(k+1)$ *formats per aquestes columnes tenen determinant* 0.

Demostració. Desenvolupant per l'última fila, tenim

$$0 = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_k^1 & a_{k+1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^k & \dots & a_k^k & a_{k+1}^k \\ a_1^j & \dots & a_k^j & a_{k+1}^j \end{vmatrix} = a_1^j M_1 + \cdots + a_k^j M_k + a_{k+1}^j M, \qquad \forall\ j.$$

Els coeficients $M_1, \dots, M_k, M$ són determinants de menors adjunts d'elements de l'última fila, per tant, no contenen aquesta fila i no depenen de j. A més a més, $M \neq 0$ i

$$C_{k+1} = -\frac{M_1}{M}\, C_1 - \cdots - \frac{M_k}{M}\, C_k,$$

on C_i és la columna i.$\square$

4.9. Sistemes d'equacions lineals. Regla de Cramer

Considerem el sistema d'equacions lineals $Ax = b$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n & = & b^1 \\ & \vdots & \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \cdots + a_n^n x^n & = & b^n \end{array} \right.$$

i suposem que $\det(A) \neq 0$. La seva única solució és $x = A^{-1}b$. Fent servir l'expressió de la matriu inversa de la proposició 4.6.3. s'obté

$$x^j = \frac{Ad(A)_j^1 b^1 + \cdots + Ad(A)_j^n b^n}{\det(A)}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

El numerador és el desenvolupament per la columna j d'una matriu idèntica a la matriu A llevat que la columna j ha estat substituïda per la columna b. És a dir,

$$x^j = \frac{\det(\, a_1 \,|\, \dots \,|\, a_{j-1} \,|\, b \,|\, a_{j+1} \,|\, \dots \,|\, a_n \,)}{\det(A)}, \qquad j = 1, \dots, n,$$

on a_i indica la columna i de A. Aquesta expressió es coneix com a *regla de Cramer*.

Suposem ara que $Ax = b$ és un sistema d'equacions lineals arbitrari

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n & = & b^1 \\ \vdots & & \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n & = & b^m \end{array}\right.$$

i sigui $r = \operatorname{rg}(A)$. Canviant l'ordre de les equacions i de les incògnites si és necessari, podem suposar que

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \vdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tots els menors d'ordre $(r+1)$ de A tenen determinant 0 i, per tant, les files $j > r$ són combinació de les anteriors (proposició 4.8.7.). Si el sistema és compatible també $\operatorname{rg}(A|b) = r$, les últimes equacions són combinació lineal de les anteriors i el nostre sistema té les mateixes solucions que el format només per les r primeres equacions. Ho podem escriure en la forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r & = & b^1 - a_{r+1}^1 x^{r+1} - \cdots - a_n^1 x^n \\ \dots & & \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r & = & b^r - a_{r+1}^r x^{r+1} - \cdots - a_n^r x^n \end{array}\right. .$$

Per a cada conjunt de valors que donem a les incògnites $x^{r+1}, \dots, x^n$ aquest sistema admet una única solució. Aplicant la regla de Cramer s'obté, $\forall\, j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} x^j \;=\; & \frac{\det(a_1|\dots|b|\dots|a_r)}{\det(a_1|\dots|a_r)} - \frac{\det(a_1|\dots|a_{r+1}|\dots|a_r)}{\det(a_1|\dots|a_r)}\, x^{r+1} - \dots \\ & - \frac{\det(a_1|\dots|a_n|\dots|a_r)}{\det(a_1|\dots|a_r)}\, x^n, \end{aligned}$$

on ara les a_i i b són matrius columnes amb r files.

Aquesta manera d'estudiar un sistema d'equacions lineals pot ser més còmoda que Gauss-Jordan, quan es tracta d'estudiar la compatibilitat d'un sistema amb paràmetres.

Exemple 4.9.1. Considerem el sistema d'equacions lineals $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & a \\ -y+z & = & 0 \\ 5x+7y+bz & = & 5 \end{array}\right.$.

El determinant de la seva matriu és

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & b \end{vmatrix} = 18 - b.$$

Si $b = 18$, la matriu del sistema té rang 2. Per tal que el sistema sigui compatible, la matriu ampliada ha de tenir també rang 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 5(a-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

Si $b = 18,\ a \neq 1$, el sistema és incompatible.
Si $b = 18,\ a = 1$, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat, és a dir, una de les variables pot agafar valors arbitraris:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+2y & = & 1-3z \\ -y & = & -z \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = 1-5z, \quad y = z.$$

Si $b \neq 18$, el sistema és compatible determinat:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & b \end{vmatrix}}{18-b} = \frac{25 - a(b+7)}{18-b}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & b \end{vmatrix}}{18-b} = \frac{5(a-1)}{18-b}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 5 \end{vmatrix}}{18-b} = \frac{5(a-1)}{18-b}.$$

4.10. *Mathematica*: Determinants

Det[A]	Determinant de A
MatrixRank[A]	Rang de A
Minors[A, k]	Una matriu dels menors d'ordre k de A

Exemple 4.10.1. Ara comprovarem, en un cas concret, que el determinant d'una matriu és zero si una fila és suma de les altres. Escollim tres files aleatòriament. Ho podem fer així:

In[-]:= A=Table[Random[Real, {-100,100}], {3}, {4}]

Hem introduït una funció nova. Per saber-ne més, consulteu l'ajuda del *Mathematica*.

Afegim ara, com a quarta fila, la suma de les tres primeres:

In[-]:= B={A[[1]], A[[2]], A[[3]], A[[1]]+A[[2]]+A[[3]]}

Calculeu el determinant: Det[B]. Segurament no us donarà 0. Què ha passat?

Proveu-ho amb una matriu amb coeficients enters:

In[-]:= A=Table[Random[Integer, -100,100], {3}, {4}]

Ara sí que el resultat és 0. Per què?

Exemple 4.10.2. Esbrineu l'ordre en el qual el *Mathematica* ens dóna els menors d'una matriu:

In[-]:= MatrixForm[Table[$a[i,j]$, $\{i,3\}$, $\{j,4\}$]]

Out[-]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} a[1,1] & a[1,2] & a[1,3] & a[1,4] \\ a[2,1] & a[2,2] & a[2,3] & a[2,4] \\ a[3,1] & a[3,2] & a[3,3] & a[3,4] \end{pmatrix}$

In[-]:= Minors[%]

...

4.11. Exercicis i problemes

4.11.1. Trobeu per a quins valors dels paràmetres les matrius següents tenen inversa i calculeu-la:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & a & a & a \\ a & 3 & a & a \\ a & a & 3 & a \\ a & a & a & 3 \end{pmatrix}.$$

4.11.2. Discutiu, segons els valors dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$, el rang de les matrius

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & a^2 & 1+a^2 \\ 2 & 2 & 2+2a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.11.3. Torneu a discutir els sistemes dels exercicis 2.7.5. i 2.7.6. del capítol 2, amb les eines d'aquest capítol.

4.11.4. Sigui

$$A_n := \begin{pmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Proveu que $\det A_n = b^{n-1}(na+b)$.

4.11.5. Resoleu l'equació

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

[No cal desenvolupar el determinant!]

4.11.6. Calculeu el determinant:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ -a & 0 & a & \cdots & a \\ -a & -a & 0 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

4.11.7. Considereu les matrius $A_n, B_n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ següents:

$$B_n := \begin{pmatrix} b & b & b & \dots & b & b \\ a & b & b & \dots & b & b \\ -b & a & b & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -b & -b & -b & \dots & b & b \\ -b & -b & -b & \dots & a & b \end{pmatrix}, \qquad A_n := \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ -b & a & b & \dots & b \\ -b & -b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b & -b & -b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Proveu que

$$\det B_n = (-1)^{n+1} b(a-b)^{n-1}, \quad \text{i} \quad \det A_n = (a+b)\det A_{n-1} - b(a-b)^{n-1}.$$

Deduïu que $\det A_n = \frac{1}{2}\left((a+b)^n + (a-b)^n\right)$.

4.11.8. Calculeu el determinant següent per a $n \geq 2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n+1 & \dots & 2n-3 & 2n-2 \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix}.$$

4.11.9. Calculeu els determinants següents:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ a & x & a & \dots & a & a \\ a & a & x & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & x & a \\ a & a & a & \dots & a & x \end{vmatrix}.$$

4.11.10. Sigui m un enter positiu. Per a cada enter $n,\ 0 \leq n \leq m$, calculeu el determinant de la següent matriu d'ordre $n+1$:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m+1}{0} & \dots & \binom{m+n}{0} \\ \binom{m}{1} & \binom{m+1}{1} & \dots & \binom{m+n}{1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \binom{m}{n} & \binom{m+1}{n} & \dots & \binom{m+n}{n} \end{pmatrix}.$$

Indicació: Proveu que $\det(A_{n+1}) = \det(A_n)$ fent servir la igualtat: $\binom{k-1}{j-1} + \binom{k-1}{j} = \binom{k}{j}$.

4.11.11. Determinant de Vandermonde. Demostreu que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(a_j - a_i).$$

Indicació: Resteu a cada fila l'anterior multiplicada per a_1. El determinant que queda és igual al producte $(a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1)$ per un determinant de Vandermonde $(n-1) \times (n-1)$.

4.11.12. Sigui $n \in \mathbb{N}$.

(i) Donats $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ nombres enters, calculeu

$$D_n := \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 & \dots & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 & \dots & \dots & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3 + b_3 & b_3 & \dots & b_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \dots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-1} & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & b_n & \dots & \dots & b_n & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

(ii) Suposem que $n = 6$, que $a_1 = \cdots = a_6 = 1$ i que $b_k := x^k$ per a cada $1 \leq k \leq 6$. Trobeu un enter x tal que $D_6 = 127$.

4.11.13. Considereu el determinant d'ordre n:

$$A_n := \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

(i) Demostreu que $A_n = aA_{n-1} - b^2A_{n-2}$.

(ii) Trobeu A_n en funció de a i b.

Indicació: Demostreu que

$$A_n - pA_{n-1} = q(A_{n-1} - pA_{n-2}) \quad \text{i} \quad A_n - qA_{n-1} = p(A_{n-1} - qA_{n-2})$$

on p, q són les arrels de $x^2 - ax + b^2 = 0$; és a dir $a = p + q,\ b^2 = pq$.

(iii) Comproveu que en el cas $a = 1, b = i$ la llei de recurrència és $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$. Les successions generades per aquesta llei s'anomenen *successions de Fibonacci*. Trobeu el terme general en aquest cas en funció dels valors inicials A_0 i A_1.

4.11.14. Sigui $n \in \mathbb{N}$ i sigui $A_n = (a_i^j) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matriu donada de la manera següent:

$$a_i^j = \begin{cases} 0, \text{ si } i+j \text{ és senar,} \\ i+j-1, \text{ si } i+j \text{ és parell.} \end{cases}$$

(i) Escriviu A_n en forma matricial i demostreu que és simètrica.

(ii) Calculeu $\det(A_n)$ i $\operatorname{rg}(A_n)$.

(iii) Trobeu A_n^{-1} sempre que sigui possible.

4.11.15. Considerem la matriu $A = (a_i^j) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ amb $a_i^j = \min\{i, j\}$.

(i) Doneu la forma matricial de A i calculeu-ne el determinant per a tot $n \geq 1$.

(ii) Demostreu que A és invertible per a tot $n \geq 1$ i trobeu A^{-1}.

4.11.16. Demostreu que si una matriu quadrada d'ordre n, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ té tots els seus coeficients iguals a $+1$ o a -1, aleshores $\det(A)$ és divisible per 2^{n-1}.
Indicació: Sumeu totes les columnes a la primera.

4.11.17. Siguin A i B matrius quadrades del mateix ordre. Demostreu que

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right) = \det(A+B)\det(A-B).$$

4.11.18. Siguin P, Q, R, S matrius quadrades del mateix ordre, i sigui

$$M = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right).$$

Suposem P invertible. Trobeu una matriu

$$N = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right), \qquad \text{tal que} \qquad NM = \left(\begin{array}{c|c} I & P^{-1}Q \\ \hline 0 & S - RP^{-1}Q \end{array}\right).$$

Proveu ara que

$$\begin{array}{lcl} PR = RP & \Longrightarrow & \det M = \det(PS - RQ) \\ PQ = QP & \Longrightarrow & \det M = \det(SP - RQ) \end{array}.$$

4.11.19. Considerem la matriu $A = (a_i^j) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ amb

$$a_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+1,\ j \text{ parell} \\ 0 & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

(i) Doneu la forma matricial de A i calculeu-ne el determinant per a tot $n \geq 1$.

(ii) Calculeu les potències A^k per a tot $n \geq 1$, $k \geq 0$.

(iii) Calculeu $(I_n + A)^{321}$ per a tot $n \geq 1$.

4.12. Activitats d'autoavaluació

4.12.1. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. Si tots els menors d'ordre 3 d'una matriu $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ tenen determinant 0, aleshores $\mathrm{rg}(A) \leq 2$.

2. El determinant de la suma de dues matrius quadrades d'ordre n és la suma dels determinants de cada una d'elles.

4.12.2. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. Una matriu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és invertible si, i només si, té rang màxim.

2. Cap matriu $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ té rang 4.

3. Donada una matriu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es compleix que $\mathrm{rg}(A^2) \geq rg(A)$.

4.12.3. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. Si A és una matriu quadrada d'ordre n i a un nombre real, aleshores $\det(aA) = a\det(A)$.

2. Si A és una matriu quadrada d'ordre n i a un nombre real, aleshores $\det(AM_i(a)) = a \cdot \det(A)$.

3. Si A és una matriu quadrada d'ordre n i a un nombre real, aleshores $\det(S_{i,j}(a)A) = a \cdot \det A$.

4.12.4. Proveu que, donada una matriu A quadrada d'ordre n i rang r, existeixen matrius invertibles P i Q tals que

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

4.12.5. Sigui $n \in \mathbb{N}$ i siguin $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Demostreu que $\mathrm{rg}(AB) = n$ si i només si $\mathrm{rg}(A) = n$ i $\mathrm{rg}(B) = n$.

4.12.6. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin.

1. Si A és una matriu antisimètrica d'ordre n, aleshores

   (a) $\det(A) = 0$ sempre.

   (b) $\det(A) = 0$ si n és senar.

   (c) $\det(A) = 0$ si n és parell.

2. Si A és una matriu simètrica d'ordre n, aleshores

   (a) $\det(A) = 1$ sempre.

(b) $\det(A) = 0$ sempre.

(c) $\det(A)$ pot prendre qualsevol valor.

4.12.7. Sigui $n \in \mathbb{N}$ i sigui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ no nul·la tal que $A^t = \lambda A$ per a algun $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostreu que $\lambda = \pm 1$ (és a dir, o bé A és simètrica o bé A és antisimètrica).

4.12.8. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. Si A és una matriu quadrada nilpotent d'ordre n (és a dir, $A^k = 0$ per a un cert enter k), aleshores $\det(A) = 0$.
2. Si A és una matriu quadrada idempotent d'ordre n (és a dir, $A^2 = I_n$), aleshores $\det(A) = 0$.
3. Si A és una matriu quadrada amb coeficients enters i $\det A$ = -1, aleshores A^{-1} també té coeficients enters.

Capítol 5

Bases de $\mathbb{R}^n$

Sovint, en les aplicacions, les n-ples de reals representen les coordenades de certs punts, o els paràmetres de què depenen certs fenòmens. Ara bé, els mateixos punts o fenòmens poden representar-se amb diferents n-ples si es varien les unitats o els sistemes de referència. En aquest capítol ens ocuparem del marc teòric que ens permet expressar un vector per diferents n-ples i canviar d'una a altra representació segons convingui.

5.1. Independència lineal

Sigui $e_i = (0, \ldots, \overset{i)}{1}, \ldots, 0)$ el vector amb tots els coeficients 0 llevat d'un 1 en la posició i. Qualsevol vector $u = (u^1, \ldots, u^n) \in \mathbb{R}^n$ es pot escriure en la forma

$$u = (u^1, \ldots, u^n) = u^1 e_1 + \cdots + u^n e_n.$$

Expressem aquest fet dient que u és combinació lineal dels vectors e_i. La definició que segueix generalitza aquest concepte.

Definició 5.1.1. Es diu *combinació lineal* de $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ amb *coeficients* $\lambda^1, \ldots, \lambda^k \in \mathbb{R}$ al vector

$$\lambda^1 u_1 + \cdots + \lambda^k u_k.$$

Denotarem $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ el conjunt de tots els vectors de $\mathbb{R}^n$ que són combinació lineal de $u_1, \ldots, u_k$; és a dir,

$$\langle u_1, \ldots, u_k \rangle := \{\lambda^1 u_1 + \cdots + \lambda^k u_k \mid \lambda^i \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 5.1.2:

1. El vector $(4,5,3) \in \mathbb{R}^3$ és combinació lineal dels vectors $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ i $(1,1,1)$:
$$(4,5,3) = -(1,0,0) + 2(1,1,0) + 3(1,1,1).$$

2. El vector $(0,0,0)$ és combinació lineal dels vectors $(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$ i $(1,0,-1)$:
$$(0,0,0) = (1,-1,0) + (0,1,-1) - (1,0,-1).$$

3. Hem començat aquesta secció observant que qualsevol vector de $\mathbb{R}^n$ és combinació lineal dels vectors $e_1, \ldots, e_n$. En aquest cas, la manera d'expressar-lo és única. Però no sempre és així; per exemple:
$$\begin{aligned}(5,-1,-4) &= 3(1,-1,0) + 2(0,1,-1) + 2(1,0,-1) \\ &= 4(1,-1,0) + 3(0,1,-1) + 1(1,0,-1)\end{aligned}.$$

Observem que si un vector es pot expressar de dues maneres diferents com a combinació lineal de $u_1, \ldots, u_k$

$$\lambda^1 u_1 + \cdots + \lambda^k u_k = \mu^1 u_1 + \cdots + \mu^k u_k \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^1 - \mu^1) u_1 + \cdots + (\lambda^k - \mu^k) u_k = \vec{0}$$

aleshores el vector $\vec{0}$ és combinació lineal de $u_1, \ldots, u_k$, amb coeficients diferents de zero. Això motiva la definició següent.

Definició 5.1.3. Un conjunt de vectors $\{ u_1, \ldots, u_k \} \subset \mathbb{R}^n$ és *linealment independent* si
$$\lambda^1 u_1 + \cdots + \lambda^k u_k = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda^1 = \cdots = \lambda^k = 0.$$
En cas contrari direm que el conjunt $\{ u_1, \ldots u_k \}$ és *linealment dependent*.

Exemple 5.1.4:

1. El conjunt de vectors $\{ (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ és linealment independent, ja que:
$$\begin{aligned}\lambda(1,0,0) + \mu(1,1,0) + \nu(1,1,1) &= (\lambda+\mu+\nu,\ \mu+\nu,\ \nu) = (0,0,0) \\ &\Rightarrow \nu = \mu = \lambda = 0.\end{aligned}$$

2. En canvi, el conjunt de vectors $\{(1,-1,0),\ (0,1,-1),\ (1,0,-1)\}$ no és linealment independent perquè la combinació lineal
$$(1,-1,0)\ +\ (0,1,-1)\ -\ (1,0,-1)\ =\ (0,0,0)$$
és el vector $(0,0,0)$ sense tenir els coeficients 0.

3. Un vector $(c^1,\dots,c^n)\in\mathbb{R}^n$ és linealment independent si, i només si, és diferent de $\vec{0}$.

Proposició 5.1.5. *Un conjunt de vectors $\{u_1,\dots,u_k\}\subset\mathbb{R}^n$ és linealment independent si, i només si, tot vector que s'expressa com a combinació lineal d'ells ho fa d'una única manera; és a dir,*
$$\lambda^1u_1+\cdots+\lambda^ku_k=\mu^1u_1+\cdots+\mu^ku_k \quad\Rightarrow\quad \lambda^1=\mu^1,\dots,\lambda^k=\mu^k.$$

Demostració. Suposem primer que $\{u_1,\dots,u_k\}$ són linealment independents i que
$$\lambda^1u_1+\cdots+\lambda^ku_k=\mu^1u_1+\cdots+\mu^ku_k \quad\Rightarrow\quad (\lambda^1-\mu^1)u_1+\cdots+(\lambda^k-\mu^k)u_k=\vec{0}.$$
Per ser aquests vectors linealment independents, tots els coeficients són 0, és a dir, $\lambda^i=\mu^i$ per a tot i.

Suposem ara que l'expressió d'un vector com a combinació dels vectors $u_1,\dots,u_k$ és única. En particular,
$$\lambda^1u_1+\cdots+\lambda^ku_k=\vec{0}=0u_1+\cdots+0u_k \quad\Rightarrow\quad \lambda^1=0,\dots,\lambda^k=0.$$
És a dir, el conjunt $\{u_1,\dots,u_k\}$ és linealment independent. $\square$

Proposició 5.1.6. *Sigui $\{v_1,\dots,v_k\}$ un conjunt de vectors de $\mathbb{R}^n$ linealment independent. Donat $u\in\mathbb{R}^n$, el conjunt $\{v_1,\dots,v_k,u\}$ és linealment independent si, i només si, $u\notin\langle v_1,\dots,v_k\rangle$.*

Demostració. L'enunciat equival a dir que
$$u\in\langle v_1,\dots,v_k\rangle \quad\Leftrightarrow\quad \{v_1,\dots,v_k,u\}\quad \text{és linealment dependent.}$$

Suposem que $u \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, és a dir, que

$$u = \lambda^1 v_1 + \cdots + \lambda^k v_k, \qquad \text{d'on} \quad u - \lambda^1 v_1 - \cdots - \lambda^k v_k = \vec{0}$$

que és una combinació lineal en la qual el coeficient de u és $1 \neq 0$. Per tant, $\{v_1, \ldots, v_k, u\}$ és linealment dependent.

Suposem ara que $\{v_1, \ldots, v_k, u\}$ són linealment dependents. Aleshores, existeix una combinació lineal $\mu u + \lambda^1 v_1 + \cdots + \lambda^k v_k = \vec{0}$, amb no tots els coeficients zero. En particular, $\mu \neq 0$, ja que si $\mu = 0$, tindríem

$$\lambda^1 v_1 + \cdots + \lambda^k v_k = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda^1 = \cdots = \lambda^k = 0$$

perquè $\{v_1, \ldots, v_k\}$ són linealment independents, i tots els coeficients serien 0, contra l'hipòtesi. Però si $\mu \neq 0$, tindrem $u = -\frac{\lambda^1}{\mu} v_1 + \cdots - \frac{\lambda^k}{\mu} v_k \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.$\square$

5.2. Rang i independència lineal de vectors

Considerem un conjunt de vectors de $\mathbb{R}^n$

$$v_1 = (v_1^1, \ldots, v_1^n)\,,\; \ldots\,,\; v_k = (v_k^1, \ldots, v_k^n).$$

Per tal de veure si són linealment independents hem de comprovar si existeixen reals $\lambda^1, \ldots, \lambda^k \in \mathbb{R}$ tals que

$$\lambda^1 v_1 + \cdots + \lambda^k v_k = \vec{0}, \quad \text{és a dir,} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda^1 v_1^1 + \cdots + \lambda^k v_k^1 & = & 0 \\ \ldots & & \\ \lambda^1 v_1^n + \cdots + \lambda^k v_k^n & = & 0 \end{array} \right. \tag{5.1}$$

Evidentment, la solució $\lambda^1 = \cdots = \lambda^k = 0$ sempre existeix. Si no existeix cap altra solució, els vectors són linealment independents; en cas contrari, els vectors són linealment dependents.

El sistema (5.1) és homogeni amb matriu

$$A = \begin{pmatrix} v_1^1 & \ldots & v_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^n & \ldots & v_k^n \end{pmatrix}$$

i té una única solució si, i només si, $\mathrm{rg}(A) = k$. Això implica, en particular, que $k \leq n$.

El sistema (5.1) té solucions no nul·les si, i només si, $\mathrm{rg}(A) = r < k$. En aquest cas poden agafar-se convenientment $(k - r)$ de les incògnites $\lambda^1, \ldots, \lambda^k$ arbitràriament i, en particular, no nul·les. Hem provat així el resultat:

Proposició 5.2.1. *El conjunt de vectors $\{v_1, \ldots, v_k\}$ és linealment independent si, i només si, la matriu $(v_1 \mid \cdots \mid v_k)$, que té com a columnes aquests vectors, té rang k. En particular, $k \leq n$.* $\square$

Proposició 5.2.2. *Donat un conjunt de vectors $\{v_1, \ldots, v_m\}$, existeix un subconjunt linealment independent $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}\}$, tal que $\langle v_1, \ldots, v_m\rangle = \langle v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}\rangle$.*

Demostració. Sigui $r = \mathrm{rg}(v_1 \mid \cdots \mid v_m)$ i siguin $j_1, \ldots, j_r$ les columnes que intervenen en un menor d'ordre r amb determinant diferent de zero. Aleshores, $\mathrm{rg}(v_{j_1} \mid \cdots \mid v_{j_r}) = r$ i, per tant, aquests vectors són linealment independents. La resta de columnes són combinacions lineals d'aquestes r columnes i, de manera equivalent, la resta de vectors són combinacions lineals dels vectors $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}\}$ (proposició 4.8.7.). En particular, tota combinació lineal dels vectors $v_1, \ldots, v_m$ és combinació lineal dels vectors $v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}$, és a dir, $\langle v_1, \ldots, v_m\rangle \subset \langle v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}\rangle$. La inclusió en l'altre sentit és evident i, per tant, els dos conjunts són iguals. $\square$

Exemple 5.2.3. Donats els vectors de $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1, 1, 0, 2)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$, $v_3 = (-1, 2, 0, 1)$, $v_4 = (1, 4, -1, 4)$, $v_5 = (0, 0, 0, 1)$ i $v_6 = (1, 1, 1, 1)$, volem veure quins subconjunts són linealment independents i com s'expressa la resta de vectors com a combinació lineal d'ells.

Considerem la matriu formada per aquests vectors:

$$A = (v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid v_4 \mid v_5 \mid v_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El menor format per les tres primeres columnes i les tres primeres files té determinant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, i per tant el conjunt $\{\, v_1,\, v_2,\, v_3 \,\}$ és linealment independent.

Agafant les quatre primeres columnes de A es té

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Això ens diu que el conjunt $\{\, v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4 \,\}$ no és linealment independent. Naturalment, cap conjunt que contingui aquests quatre vectors no pot ser linealment independent.

Les columnes 1,2,3 i 5 de A tenen determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

i per tant $\{\, v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_5 \,\}$ és un conjunt de vectors linealment independent. Com que el nombre màxim de vectors linealment independents a $\mathbb{R}^4$ és quatre, si afegim v_6, el conjunt $\{\, v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_5,\, v_6 \,\}$ serà linealment dependent.

Sigui B la submatriu de A formada per les columnes 1,2,3,5. Els coeficients de l'expressió de v_4 i v_6 com a combinació lineal de $v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_5$:

$$\lambda_i^1 v_1 + \lambda_i^2 v_2 + \lambda_i^3 v_3 + \lambda_i^5 v_5 = v_i, \qquad i = 4, 6$$

són les solucions dels sistemes d'equacions lineals $Bx = v_4$ i $Bx = v_6$. Si apliquem el mètode de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

obtenim $v_4 = 2v_1 - v_2 + v_3,\;\; v_6 = v_1 + v_2 - 2v_5$.

Hi ha altres subconjunts del conjunt de vectors donat que també són linealment independents, que es corresponen amb altres submatrius 4×4 de A amb determinant diferent de zero.

5.3. Bases de $\mathbb{R}^n$

Definició 5.3.1. S'anomena *base* de $\mathbb{R}^n$ a qualsevol conjunt de vectors $\{u_1, \ldots, u_k\}$ tal que

1. $\{u_1, \ldots, u_k\}$ és linealment independent.

2. $\mathbb{R}^n = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$, és a dir, tot vector de $\mathbb{R}^n$ és combinació lineal de $\{u_1, \ldots, u_k\}$. Es diu aleshores que $\{u_1, \ldots, u_k\}$ *generen* $\mathbb{R}^n$.

Exemple 5.3.2. El conjunt $\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_i = (0, \ldots, \overset{i)}{1}, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^n$ que s'anomena *base canònica* de $\mathbb{R}^n$.

Anem a demostrar que totes les bases de $\mathbb{R}^n$ tenen n vectors. De fet, demostrarem més coses: a tot conjunt de $k \leq n$ vectors linealment independents li podem afegir $(n-k)$ vectors i formar una base.

Proposició 5.3.3. *Donat un conjunt de vectors $\{u_1, \ldots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ linealment independent, existeix un conjunt amb n vectors linealment independent i que conté el conjunt donat.*

Demostració. Si $\{u_1, \ldots, u_k\}$ és un conjunt de vectors linealment independent, hem vist a la proposició 5.2.1. que $k \leq n$; per tant

$$A = (u_1 | \ldots | u_k) = \begin{pmatrix} u_1^1 & \ldots & u_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^n & \ldots & u_k^n \end{pmatrix}, \qquad u_i = \begin{pmatrix} u_i^1 \\ \vdots \\ u_i^n \end{pmatrix}$$

té un menor d'ordre k amb determinant diferent de zero. Siguin $j_1 < \cdots < j_k$ els índexs de les files que formen aquest menor i siguin $\{i_1, \ldots, i_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_k\}$ amb $i_1 < \cdots < i_{n-k}$ els índexs de les restants files. Llavors, en desenvolupar $\det(e_{i_1} | \ldots | e_{i_{n-k}} | u_1 | \ldots | u_k)$ per les primeres columnes, es van suprimint les files

$i_1, \dots, i_{n-k}$ i queda

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & u_1^{i_1} & \dots & u_k^{i_k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & u_1^{i_{n-k}} & \dots & u_k^{i_{n-k}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1^{j_i} & \dots & u_k^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{j_k} & \dots & u_k^{j_k} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Això prova que el conjunt de vectors $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-k}}, u_1, \dots, u_k\}$ és linealment independent.$\square$

Exemple 5.3.4. Considerem els vectors $v_1 = (1,2,1,-1)$, $v_2 = (3,6,2,-2)$. El menor, format per les files 1 i 3 de la matriu

$$(v_1 \mid v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{és} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Per tant, afegint els vectors $e_2 = (0,1,0,0)$ i $e_4 = (0,0,0,1)$, obtenim un conjunt $\{v_1, v_2, e_2, e_4\}$ linealment independent.

Proposició 5.3.5. *A $\mathbb{R}^n$, tots els conjunts amb n vectors linealment independents són base.*

Demostració. Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ és un conjunt linealment independent de vectors de $\mathbb{R}^n$, $\det(u_1|\dots|u_n) \neq 0$. Donat qualsevol altre vector $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ els coeficients de

$$v = \lambda^1 u_1 + \dots + \lambda^n u_n$$

són les solucions del sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 u_1^1 + \dots + \lambda^n u_n^1 & = & v^1 \\ \dots & & \\ \lambda_1 u_1^n + \dots + \lambda^n u_n^n & = & v^n \end{array} \right. ,$$

la matriu del qual té el determinant que acabem de veure que és diferent de zero i, per tant, és un sistema compatible determinat amb solució única.$\square$

Si combinem les proposicions 5.3.3. i 5.3.5., obtenim el corol·lari següent.

Corol·lari 5.3.6. *Tot conjunt* $\{u_1, \dots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *de vectors linealment independents pot prolongar-se fins a obtenir una base* $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ *de* $\mathbb{R}^n$. $\square$

Exemple 5.3.7. Els vectors $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ són linealment independents i, per tant, formen una base.

De quines altres maneres podem completar els vectors $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ fins a obtenir una base? Amb qualsevol vector (a,b,c) tal que

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = b - c \neq 0.$$

En particular, es pot agafar $e_2 = (0,1,0)$ i també $e_3 = (0,0,1)$, però no $e_1 = (1,0,0)$.

Proposició 5.3.8. *Totes les bases de* $\mathbb{R}^n$ *tenen exactament* n *vectors.*

Demostració. Sigui $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. En particular, són vectors linealment independents. Si $k < n$, podem afegir vectors a aquest conjunt fins a obtenir una base $\{u_1, \dots, u_n\}$. En particular, $u_{k+1} \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, en contra del fet que $\{u_1, \dots, u_k\}$ generin $\mathbb{R}^n$. $\square$

Corol·lari 5.3.9. *Si* $\langle u_1, \dots, u_m \rangle = \mathbb{R}^n$*, llavors* $m \geq n$.

Demostració. La proposició 5.2.2. ens diu que existeix un subconjunt de vectors linealment independents: $\{u_{j_1}, \dots, u_{j_k}\} \subset \{u_1, \dots, u_m\}$, tals que

$$\langle u_{j_1}, \dots, u_{j_k} \rangle = \langle u_1, \dots, u_m \rangle = \mathbb{R}^n.$$

En particular, $\{u_{j_1}, \dots, u_{j_k}\}$ és una base de $\mathbb{R}^n$ i ha de tenir n elements. Per tant, $n = k \leq m$. $\square$

5.4. Coordenades d'un vector

Definició 5.4.1. Donada una base ordenada $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$, és a dir, una base en la qual hem fixat un ordre dels seus vectors, sabem que tot vector $v \in \mathbb{R}^n$ s'expressa de manera única com a combinació lineal

$$v = \lambda^1 u_1 + \cdots + \lambda^n u_n.$$

Anomenarem *coordenades de* v *en la base* $\mathcal{B}$ la n-pla de coeficients, i escriurem

$$v = (\lambda^1, \ldots, \lambda^n)_{\mathcal{B}} \quad \text{o simplement} \quad v = (\lambda^1, \ldots, \lambda^n).$$

Exemple 5.4.2:

1. Les coordenades de $v = (v^1, \ldots, v^n)$ en la base ordenada $(e_1, \ldots, e_n)$ són $v^1, \ldots, v^n$, ja que
$$v = v^1 e_1 + \cdots + v^n e_n.$$
$(e_1, \ldots, e_n)$ s'anomena *base canònica de* $\mathbb{R}^n$.
2. Les coordenades del vector $v = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ són $(3, 2, 1)$ en la base canònica, i són $v = (1, 1, 1)$ en la base $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ ja que
$$(3, 2, 1) = (1, 1, 1) + (1, 1, 0) + (1, 0, 0).$$

5.5. Canvis de base

En aquesta secció veurem com, donat un vector $w \in \mathbb{R}^n$ per les seves coordenades en una base ordenada $\mathcal{B}_u = (u_1, \ldots, u_n)$

$$w = \lambda^1 u_1 + \cdots + \lambda^n u_n, \qquad w = (\lambda^1, \ldots, \lambda^n)_{\mathcal{B}_u}, \tag{5.2}$$

podem trobar les seves coordenades en una altra base ordenada $\mathcal{B}_v = (v_1, \ldots, v_n)$

$$w = \mu^1 v_1 + \cdots + \mu^n v_n, \qquad w = (\mu^1, \ldots, \mu^n)_{\mathcal{B}_v}. \tag{5.3}$$

Suposem que les coordenades dels vectors v_i, $1 \leq i \leq n$, en la primera base són

$$v_i = a_i^1 u_1 + \cdots + a_i^n u_n, \qquad v_i = (a_i^1, \ldots, a_i^n)_{\mathcal{B}_u}.$$

Substituint a (5.3) s'obté

$$\begin{aligned} w &= \mu^1\left(\textstyle\sum_{j=1}^n a_1^j u_j\right) + \cdots + \mu^n\left(\textstyle\sum_{j=1}^n a_n^j u_j\right) \\ &= \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \mu^i a_i^1\right) u_1 + \cdots + \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \mu^i a_i^n\right) u_n. \end{aligned}$$

Comparant amb (5.2) s'obté

$$\lambda^j = \sum_{i=1}^n \mu^i a_i^j,\ \forall j \quad \text{és a dir} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda^1 &=& a_1^1\mu^1 + \cdots + a_n^1\mu^n \\ \dots \\ \lambda^n &=& a_1^n\mu^1 + \cdots + a_n^n\mu^n \end{array} \right. . \tag{5.4}$$

La matriu d'aquest sistema és

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

i el seu determinant és sempre diferent de zero, ja que el sistema (5.4) té solució única, i el seu rang és màxim, és a dir, la matriu és invertible. La forma matricial d'aquest sistema és

$$w_{\mathcal{B}_u} = A w_{\mathcal{B}_v}, \qquad w_{\mathcal{B}_u} = \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{pmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}_v} = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^n \end{pmatrix}.$$

La matriu A ens permet trobar les coordenades $w = (\lambda^1, \dots, \lambda^n)_{\mathcal{B}_u}$ a partir de les coordenades $w = (\mu^1, \dots, \mu^n)_{\mathcal{B}_v}$ i s'anomena *matriu del canvi de la base $\mathcal{B}_v$ a $\mathcal{B}_u$*.

Per passar de les coordenades $w = (\mu^1, \dots, \mu^n)_{\mathcal{B}_v}$ a les coordenades $w = (\lambda^1, \dots, \lambda^n)_{\mathcal{B}_u}$ podem fer servir la matriu inversa

$$w_{\mathcal{B}_v} = A^{-1} w_{\mathcal{B}_u},$$

és a dir, A^{-1} és la matriu del canvi de la base $\mathcal{B}_u$ a $\mathcal{B}_v$. En particular, les columnes de A^{-1} són les coordenades dels vectors u_i en la base $\mathcal{B}_v$.

Exemple 5.5.1. Considerem $\mathbb{R}^3$ la base canònica $\mathcal{B}_e = (e_1, e_2, e_3)$ i la base

$$\mathcal{B}_v = (\, v_1 = (-1, 2, 3),\ v_2 = (0, 1, -1),\ v_3 = (0, 1, -2)\,)\,.$$

Les matrius del canvi de base són

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

amb A la matriu de canvi de $\mathcal{B}_v$ a $\mathcal{B}_e$. Per tant, si $w = (a,b,c)_{\mathcal{B}_e}$,

$$A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 7a + 2b + c \\ -5a - b - c \end{pmatrix},$$

i $w = (-a, 7a + 2b + c, -5a - b - c)_{\mathcal{B}_v}$.

Considerem una tercera base

$$\mathcal{B}_u = (\, u_1 = (1,1,1),\, u_2 = (1,1,0),\, u_3 = (1,0,0)\,)\,.$$

Les matrius del canvi de base amb la canònica són

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $w = (c, b-c, a-b)_{\mathcal{B}_u}$.

Les coordenades dels vectors u_i en la base $\mathcal{B}_v$ s'obtenen multiplicant per la matriu A^{-1} les seves coordenades en la base $\mathcal{B}_e$. Per tant, la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_u$ a $\mathcal{B}_v$ és

$$\big(A^{-1}u_1 \mid A^{-1}u_2 \mid A^{-1}u_3\big) = A^{-1}B.$$

5.6. Relacions de dependència lineal en bases arbitràries

Sabem com deduir si uns vectors de $\mathbb{R}^n$ són linealment independents i, en cas de no ser-ho, com expressar un vector com a combinació lineal de la resta. Ara bé, hem suposat sempre que els vectors ens han estat donats com a n-ples de $\mathbb{R}^n$, és a dir, que en coneixem les coordenades en la base canònica. Anem a veure ara que podem fer servir exactament els mateixos mètodes treballant amb les coordenades en qualsevol altra base de $\mathbb{R}^n$.

Proposició 5.6.1. *Siguin* $v_i = (v_i^1, \dots, v_i^n)$*, per a* $i = 1, \dots, k$*, les coordenades dels vectors* $v_i \in \mathbb{R}^n$ *en una base* $\mathcal{B}_u = (u_1, \dots, u_n)$*. Els vectors* $v_1, \dots, v_k$ *són linealment independents si, i només si,*

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_k^n \end{pmatrix} = k.$$

Demostració. Sigui A la matriu del canvi de la base $(u_1, \dots, u_n)$, en què estan expressats els vectors $v_1, \dots, v_k$, en la base canònica. És a dir, les coordenades de v_i en la base canònica són els coeficients de la matriu columna $A\begin{pmatrix} v_i^1 \\ \vdots \\ v_i^n \end{pmatrix}$. La matriu

$$A\begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_k^n \end{pmatrix} = B$$

té per columnes les coordenades dels vectors $v_1, \dots, v_k$ en la base canònica i aquests són linealment independents si, i només si, $\operatorname{rg} B = k$. La matriu A és invertible i, per tant, producte de matrius elementals; multiplicar per elles equival a fer transformacions elementals i no canvia el rang. Per tant,

$$v_1, \dots, v_k \quad \text{linealment independents} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_k^n \end{pmatrix} = \operatorname{rg} B = k. \square$$

Observem també que les coordenades en una base $(u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ de la suma de dos vectors són la suma de les coordenades d'aquests vectors:

$$v = a^1 u_1 + \dots + a^n u_n, \ w = b^1 u_1 + \dots + b^n u_n \quad \Rightarrow$$

$$v + w = (a^1 + b^1) u_1 + \dots + (a^n + b^n) u_n.$$

Si multipliquem un vector per un escalar λ, les seves coordenades queden multiplicades pel mateix escalar:

$$v = a^1 u_1 + \dots + a^n u_n, \ \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda v = \lambda a^1 u_1 + \dots + \lambda a^n u_n.$$

En general, les coordenades d'una combinació lineal de vectors són la combinació lineal amb els mateixos coeficients de les n-ples coordenades. És a dir:

• Per trobar les possibles combinacions lineals entre uns vectors tant podem fer servir les seves coordenades en la base canònica com en qualsevol altra base.

Exemple 5.6.2. Agafem les tres bases de l'exemple (5.5.1.) i els vectors $w_1 = (3,2,1)$, $w_2 = (0,1,2)$, $w_3 = (1,0,-1)$. Aquestes són les seves coordenades en la base canònica (e_1, e_2, e_3). Fent servir aquestes coordenades podem veure que dos qualssevol d'ells són linealment independents però no els tres. Tenim la relació: $w_1 = 2w_2 + 3w_3$.

Considerem ara les coordenades de w_1, w_2, w_3 en la base (v_1, v_2, v_3). Fent servir la matriu A donada a l'exemple 5.5.1.,

$$\big(A^{-1}w_1 \mid A^{-1}w_2 \mid A^{-1}w_3\big) = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 26 & 4 & 6 \\ -18 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

És a dir,

$$w_1 = (-3, 26, -18)_{\mathcal{B}_v}, \quad w_2 = (0, 4, -3)_{\mathcal{B}_v}, \quad w_3 = (-1, 6, 1)_{\mathcal{B}_v}.$$

En aquest cas, si procedim com a la proposició 4.8.7., tenim

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 26 & 4 & 6 \\ w_1^j & w_2^j & w_3^j \end{vmatrix} = 4w_1^j - 8w_2^j - 12w_3^j = 0, \quad \forall\, j \quad \Rightarrow \quad w_1 = 2w_2 + 3w_3.$$

Obtindrem el mateix, naturalment, si fem servir la base $\mathcal{B}_u = (u_1, u_2, u_3)$. Les coordenades de w_1, w_2, w_3 en aquesta base són les columnes de la matriu

$$\big(B^{-1}w_1 \mid B^{-1}w_2 \mid B^{-1}w_3 =\big)\, B^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ w_1^j & w_2^j & w_3^j \end{vmatrix} = w_1^j - 2w_2^j - 3w_3^j = 0 \quad \forall\, j \quad \Rightarrow \quad w_1 = 2w_2 + 3w_3.$$

5.7. *Mathematica*: Independència lineal i coordenades

Les comandes MatrixRank, Solve i LinearSolve permeten, donat un conjunt de vectors $\{v_1, \ldots, v_k\}$, trobar un subconjunt linealment independent $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_h}\}$ tal que $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle = \langle v_{j_1}, \ldots, v_{j_h}\rangle$ i expressar la resta de vectors com a combinació lineal dels vectors d'aquest subconjunt.

Exemple 5.7.1. Considerem els vectors:

```
In[-]:=     v1={1,−1,2,3,4}
            v2={2,0,1,−1,0}
            v3={−1,−1,1,4,4}
            v4={0,0,0,1,2}
            v5={4,−2,5,6,10}
            v6={1,1,0,0,1}
            v7={3,2,1,−2,1}
Out[-]=     {1,−1,2,3,4}
            ...
```

Clarament v1 i v2 no són linealment dependents. Mirem si ho són els tres primers:

```
In[-]:=     MatrixRank[{v1,v2,v3}]
Out[-]=     2
In[-]:=     LinearSolve[Transpose[{v1,v2}], v3]
Out[-]=     {1,−1}
```

És a dir, v3 = v1 $-$ v2.

```
In[-]:=     MatrixRank[{v1,v2,v4}]
Out[-]=     3
In[-]:=     MatrixRank[{v1,v2,v4,v5}]
Out[-]=     3
In[-]:=     LinearSolve[Transpose[{v1,v2,v4}], v5]
Out[-]=     {2,1,1}
```

És a dir, v5 = 2 v1 + v2 + v4.

In[-]:=	MatrixRank[{v1,v2,v4,v6}]
Out[-]=	4
In[-]:=	MatrixRank[{v1,v2,v4,v6,v7}]
Out[-]=	5

En particular, aquests vectors formen una base de $\mathbb{R}^5$.
Busquem les coordenades de $u = (5, 4, 3, 2, 1)$ en aquesta base:

In[-]:=	LinearSolve[Transpose[{v1,v2,v4,v6,v7}], {5,4,3,2,1}]
Out[-]=	{ $\frac{18}{7}, -2, -8, \frac{48}{7}, -\frac{1}{7}$ }

Per tant, u = $\frac{18}{7}$v1 $-$ 2 v2 $-$ 8v4 + $\frac{48}{7}$ v6 $-$ $\frac{1}{7}$ v7.

5.8. Exercicis i problemes

5.8.1. Demostreu que $\{(0, 1, -2, 1), (1, 1, 2, -1), (1, 0, 0, 1), (2, 2, 0, -1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$. Expresseu el vector $(4, 2, -1, 5)$ en aquesta base.

5.8.2. Determineu a i b per tal que els vectors

$$(1, 1, 0, a),\ (3, -1, b, -1),\ (-3, 5, a, -4) \in \mathbb{R}^4$$

siguin linealment dependents. Expresseu, en aquests casos, un d'ells com a combinació lineal dels altres.

5.8.3. Siguin $u_1 = (a, 5, 1)$, $u_2 = (0, 2, -2)$, $u_3 = (2, 0, b) \in \mathbb{R}^3$. Determineu tots els subconjunts de $\{u_1, u_2, u_3\}$ que són linealment independents, segons el valors dels paràmetres. En cada cas, esbrineu quins de la resta de vectors es poden posar com a combinació lineal dels del subconjunt i, en cas afirmatiu, trobeu-ne aquesta combinació lineal.

5.8.4. Siguin $u_1, u_2, \cdots, u_k \in \mathbb{R}^n$ vectors linealment independents. Definim

$$v_1 = u_1, \quad v_j = u_1 - \sum_{i=2}^{j} u_i \quad \text{per } 2 \leq j \leq k.$$

Estudieu si els vectors $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ són linealment independents.

5.8.5. Siguin $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}^n$ vectors tals que les ternes

$$\{u_1, u_2, u_3\}, \quad \{u_1, u_2, u_4\}, \quad \{u_1, u_3, u_4\}, \quad \{u_2, u_3, u_4\}$$

són linealment independents. Podem assegurar que els vectors $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ són linealment independents?

5.8.6. Sigui u_1, u_2, u_3, u_4 una base de $\mathbb{R}^4$. Estudieu si els vectors $w_1 = u_1 - u_3 + 2u_4$, $w_2 = 2u_1 + 3u_2 + u_3 + u_4$, $w_3 = u_1 + 3u_2 + 2u_3 - u_4$ i $w_4 = u_1 + u_2 + u_4$ són linealment independents. Extraieu-ne el màxim nombre de linealment independents i construïu una base de $\mathbb{R}^4$ que contingui els vectors escollits.

5.8.7. Determineu per a quins valors de $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ els vectors $u_1 = (x, x^2, x^3, x^4)$, $u_2 = (y, y^2, y^3, y^4)$, $u_3 = (z, z^2, z^3, z^4)$ i $u_4 = (t, t^2, t^3, t^4)$ són linealment dependents.

5.8.8. A $\mathbb{R}^n$ considerem els vectors $u_1 = (1, 1, 0, \cdots, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1, 0, \cdots, 0, 0)$, $\cdots$, $u_{n-1} = (0, 0, \cdots 1, 1)$, $u_n = (1, 0, \cdots, 0, 1)$. Determineu per a quins valors de n són linealment independents.

5.8.9. Designem per $\mathcal{B}_e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^4$.

(i) Comproveu que els vectors

$$u_1 = (1, 2, 3, 4),\ u_2 = (1, 2, -3, 0),\ u_3 = (3, 1, 2, 1),\ u_4 = (3, 1, 1, 1)$$

formen una base de $\mathbb{R}^4$, que denotarem per $\mathcal{B}_u$.

(ii) Escolliu dos dels vectors de la base $\mathcal{B}_u$, u_k, u_h, de forma que $\mathcal{B} = \{u_k, u_h, e_3, e_4\}$ sigui també una base de $\mathbb{R}^4$.

(iii) Trobeu les coordenades dels altres dos vectors de $\mathcal{B}_u$ en la base $\mathcal{B}$ que hagueu escollit a (ii).

5.8.10. Calculeu les coordenades del vector $(6, 9, 14)$ en les bases de $\mathbb{R}^3$:

(i) (e_1, e_2, e_3),

(ii) $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$,

(iii) $((1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3))$.

5.8.11. A $\mathbb{R}^3$ considerem les bases

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 0))$$

i

$$\mathcal{B}_2 = ((2, 1, 1), (1, 1, 1), (1, -1, 1)).$$

Calculeu la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$. Calculeu les coordenades en la base $\mathcal{B}_1$ del vector que en la base $\mathcal{B}_2$ té coordenades $(3, -2, 2)$.

5.8.12. Comproveu que $\mathcal{B}_1 = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 10)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$. Doneu la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a $\mathcal{B}_1$.

5.8.13. Considerem (e_1, e_2, e_3) una base de $\mathbb{R}^3$.

(i) Demostreu que els vectors $u_1 = e_1$, $u_2 = e_1 - e_2$ i $u_3 = e_1 - e_3$ formen una base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Trobeu les coordenades dels vectors $w_1 = 6e_1 - 2e_2 - 3e_3$, $w_2 = 3e_1 - e_2 - e_3$ i $w_3 = 2e_1 - e_2$ en la base $\mathcal{B}_u = (u_1, u_2, u_3)$.

5.8.14. Designem per $\mathcal{B}_e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^4$.

(i) Donats els vectors

$$v_1 = (1, 2, 3, b),\ v_2 = (3, 2, 1, 0),\ v_3 = (1, 0, a, 0)$$

escolliu valors per a i b, de manera que $\{v_1, v_2, v_3, e_3\}$ sigui una base de $\mathbb{R}^4$ però $\{v_1, v_2, v_3, e_4\}$ no sigui base.

(ii) Determineu si el vector $u = (1, 1, 1, 1)$ és al subespai $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ amb els valors de a i b que hagueu escollit a (i).

(iii) Trobeu les coordenades de u en la base (v_1, v_2, v_3, e_3).

5.8.15. Els vectors $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (1, 2, -1)$ i $u_3 = (1, -1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ tenen coordenades

$$u_1 = (1, 2, -1)_{\mathcal{B}}, \quad u_2 = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}, \qquad u_3 = (1, -1, 0)_{\mathcal{B}}$$

en una base desconeguda $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$. Trobeu v_1, v_2 i v_3.

5.8.16. De la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ coneixem els vectors $u_1 = (1, 2, 3)$ i $u_2 = (0, 5, 6)$ però no el tercer vector u_3. En canvi sabem que el vector $w = (1, 1, 1)$ té també aquestes mateixes coordenades en la base $\mathcal{B}$: $w = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$. Trobeu u_3.

5.9. Activitats d'autoavaluació

5.9.1. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. m vectors de $\mathbb{R}^n$, amb $m > n$, sempre són generadors de $\mathbb{R}^n$.
2. m vectors de $\mathbb{R}^n$, amb $m < n$, sempre són generadors de $\mathbb{R}^n$.
3. m vectors de $\mathbb{R}^n$, amb $m > n$, sempre són linealment independents.
4. m vectors de $\mathbb{R}^n$, amb $m < n$, sempre són linealment independents.
5. n vectors de $\mathbb{R}^n$ sempre són base de $\mathbb{R}^n$.

5.9.2. Esbrineu quines de les següents afirmacions són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. Si tots els subconjunts propis de vectors de $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ són linealment independents, aleshores S és també linealment independent.
2. Si $u \in \langle v_1, \ldots, v_s \rangle \subset \mathbb{R}^n$, aleshores $v_1 \in \langle u, v_2, \ldots, v_s \rangle$.
3. Si $u \in \langle v_1, \ldots, v_s \rangle \subset \mathbb{R}^n$ i $u \notin \langle v_2, \ldots, v_s \rangle$, aleshores $v_1 \in \langle u, v_2, \ldots, v_s \rangle$.

4. Si $\{u_1, \ldots, u_r\}$ és un conjunt de vectors linealment independent a $\mathbb{R}^n$ i $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_r u_r$, aleshores $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$.

5.9.3. Esbrineu quines de les següents afirmacions són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és una matriu de rang k, aleshores k columnes qualssevols de A formen un conjunt de vectors linealment independent.

2. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és una matriu de rang k, aleshores existeixen k columnes de A que formen un conjunt de vectors linealment independent.

5.9.4. Siguin v_1, v_2 dos vectors linealment independents de $\mathbb{R}^n$, amb $n > 2$. Quants vectors v_3 existeixen tals que $\{v_1, v_2, v_3\}$ sigui linealment independent?

5.9.5. Siguin $v_1, \ldots, v_k$ vectors linealment independents de $\mathbb{R}^n$. Esbrineu quines de les següents afirmacions són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, aleshores $Av_1, \ldots, Av_k$ són linealment independents.

2. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és invertible, aleshores $Av_1, \ldots, Av_k$ són linealment independents.

3. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és una matriu tal que els vectors $Av_1, ..., Av_k$ són linealment dependents, aleshores $\mathrm{rg}(A) < k$.

4. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és una matriu tal que els vectors $Av_1, ..., Av_k$ són linealment dependents, aleshores $\mathrm{rg}(A) < n$.

5. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és una matriu tal que els vectors $Av_1, ..., Av_k$ són linealment independents, aleshores A és invertible.

Capítol 6

Subespais vectorials

En aquest capítol introduïm la noció de subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ i les operacions bàsiques amb subespais vectorials, basant-nos en la teoria de sistemes d'equacions lineals desenvolupada prèviament.

6.1. Subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$

Definició 6.1.1. Un subconjunt H no buit de l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ s'anomena *subespai vectorial* si per a cada $u, v \in H$ i cada $a, b \in \mathbb{R}$ es compleix $au + bv \in H$.

Si H és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$, llavors les combinacions lineals de vectors de H són a H; és a dir, si $a^1, \cdots, a^s \in \mathbb{R}$ i $u_1, \cdots, u_s \in H$, aleshores $a^1 u_1 + \cdots + a^s u_s \in H$.

Exemple 6.1.2:

1. $\mathbb{R}^n$ i $\{\vec{0}\}$ són subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$.
2. El conjunt $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 + 4x_2 + 7x_4 = 0, \quad 5x_3 = 7x_1\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$.
3. El conjunt $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 1\}$ no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$. En efecte, $u = (1, 0, 0), v = (0, 0, 1) \in B$ però $u + v = (1, 0, 1) \notin B$.
4. El conjunt $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$. En efecte, $u = (1, 0), v = (0, 1) \in C$ però $u + v = (1, 1) \notin C$.

Definició 6.1.3. Sigui E un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. Direm que un conjunt de vectors $S = \{v_1, \cdots, v_s\}$ *generen* E o són un *sistema de generadors* de E si $E = \langle v_1, \cdots, v_s \rangle$; és a dir, per a tot $x \in E$ existeixen escalars $a^1, \cdots, a^s \in \mathbb{R}$ tals que $x = a^1 v_1 + \cdots + a^s v_s$.

Exemple 6.1.4:

1. El conjunt de vectors

$$\{(1,1,1,1,0),(1,1,1,0,1),(1,1,0,1,1),(1,0,1,1,1),(0,1,1,1,1)\}$$

és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^5$. En efecte, donat qualsevol vector $v = (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5$, existeixen escalars $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tals que

$$v = a(1,1,1,1,0)+b(1,1,1,0,1)+c(1,1,0,1,1)+d(1,0,1,1,1)+e(0,1,1,1,1).$$

Podem agafar: $a = \frac{1}{4}(x + y + z + t - 3u)$, $b = \frac{1}{4}(x + y + z + u - 3t)$, $c = \frac{1}{4}(x+y+t+u-3z)$, $d = \frac{1}{4}(x+z+t+u-3y)$, i $e = \frac{1}{4}(y+z+t+u-3x)$.

2. El conjunt de vectors $\{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)\}$ és un sistema de generadors del subespai vectorial

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

de $\mathbb{R}^4$. En efecte, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \quad \Leftrightarrow \quad x_4 = -x_1 - x_2 - x_3$ i

$$(x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2 - x_3) = -x_2(1,-1,0,0) - x_3(1,0,-1,0)$$
$$+(x_1 + x_2 + x_3)(1,0,0,-1).$$

Observeu que $\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$ és un altre sistema de generadors de E.

3. El conjunt de vectors $\{(1,-1/2,-1/2,0),(1,0,-1,0)\}$ no és un sistema de generadors del subespai vectorial

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

de $\mathbb{R}^4$. En efecte, el vector $(1,0,0,-1) \in E$ no es pot expressar com a combinació lineal dels vectors $(1,-1/2,-1/2,0)$ i $(1,0,-1,0)$, és a dir, no existeixen escalars $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $(1,0,0,-1) = a(1,-1/2.-1/2,0) + b(1,0,-1,0)$, ja que aleshores a i b serien solucions del sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} 1 &= a+b \\ 0 &= -1/2a \\ 0 &= -1/2a-b \\ -1 &= 0 \end{cases}$$

que és incompatible.

4. El conjunt de vectors $\{(1,-1),(-1/2,0),(0,-1)\}$ és un sistema de generadors de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$. En efecte, per a tot vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x,y) = 0(1,-1) - 2x(-1/2,0) - y(0,-1).$$

Proposició 6.1.5. Donats vectors $v_1, \cdots, v_s \in \mathbb{R}^n$, el conjunt de vectors

$$\langle v_1, \cdots, v_s \rangle = \{\sum_{i=1}^{s} a^i v_i \mid a^i \in \mathbb{R}\}$$

generat pels vectors $v_1, \cdots, v_s$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Demostració:

1. $v, w \in \langle v_1, \cdots, v_s \rangle \quad \Rightarrow \quad \exists\ a^i, b^i \in \mathbb{R},\ v = \sum_{i=1}^s a^i v_i,\ w = \sum_{i=1}^s b^i v_i \quad \Rightarrow$ $v + w = \sum_{i=1}^s (a^i + b^i) v_i \quad \Rightarrow \quad v + w \in \langle v_1, \cdots, v_s \rangle$.

2. $v \in \langle v_1, \cdots, v_s \rangle,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \exists\ a^i, b^i \in \mathbb{R},\ v = \sum_{i=1}^s a^i v_i,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$ $\lambda v = \sum_{i=1}^s \lambda a^i v_i, \Rightarrow \quad \lambda v \in \langle v_1, \cdots, v_s \rangle. \square$

Proposició 6.1.6. *Donat un subespai H de $\mathbb{R}^n$, $H \neq \{\vec{0}\}$, existeix sempre un conjunt finit de generadors linealment independents de H.*

Demostració. Per hipòtesi, H té algun vector diferent de $\vec{0}$. Sigui $v_1 \in H,\ v_1 \neq \vec{0}$. Tenim $\langle v_1 \rangle \subset H$. Poden passar dues coses:

$$H = \langle v_1 \rangle \qquad \text{o} \qquad \exists\ v_2 \in H \setminus \langle v_1 \rangle,\ v_2 \neq \vec{0}.$$

En el segon cas, els vectors v_1, v_2 són linealment independents. Poden passar dues coses:

$$H = \langle v_1, v_2 \rangle \qquad \text{o} \qquad \exists\ v_3 \in H \setminus \langle v_1, v_2 \rangle,\ v_3 \neq \vec{0}.$$

En el segon cas, els vectors v_1, v_2, v_3 són linealment independents. De nou poden passar dues coses:

$$H = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \qquad \text{o} \qquad \exists\ v_4 \in H \setminus \langle v_1, v_2, v_3 \rangle,\ v_4 \neq \vec{0}.$$

Iterem el procés tantes vegades com sigui necessari. Com que a $\mathbb{R}^n$ el nombre màxim de vectors linealment independents és n, el procés ha d'acabar.$\square$

Proposició 6.1.7. *Siguin $v_1, \ldots, v_s \in \mathbb{R}^n$ i $w_1, \ldots, w_t \in \mathbb{R}^n$ dues famílies de vectors linealment independents. Suposem que $\langle v_1, \ldots, v_s \rangle = \langle w_1, \ldots, w_t \rangle$, és a dir, generen el mateix subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. Aleshores, $s = t$.*

Demostració. Demostrarem que $t \leq s$. Per a això expressem els vectors w_j en funció dels vectors v_i i obtenim:

$$w_j = \sum_{i=1}^{s} a_j^i v_i \text{ per a tot } 1 \leq j \leq t.$$

A continuació ampliem (veure el corol·lari 5.3.6.) els vectors $v_1, \ldots, v_s$ de $\mathbb{R}^n$ fins a obtenir una base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_s, u_{s+1}, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Calculem les coordenades dels vectors $w_1, \ldots, w_t$ en aquesta base:

$$w_j = \sum_{i=1}^{s} a_j^i v_i + \sum_{i=s+1}^{n} 0 u_i \text{ per a tot } 1 \leq j \leq t.$$

Per ser $w_1, \ldots, w_t$ vectors de $\mathbb{R}^n$ linealment independents, tenim

$$t = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_t^1 \\ a_1^2 & \cdots & a_t^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^s & \cdots & a_t^s \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_t^1 \\ a_1^2 & \cdots & a_t^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^s & \cdots & a_t^s \end{pmatrix}.$$

Per tant, $t \leq s$. Anàlogament, $s \leq t$ i concloem que $s = t$.$\square$

Definició 6.1.8. Sigui E un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. Anomenem *base* de E qualsevol conjunt de generadors $v_1, \ldots, v_s$ de E que siguin vectors linealment independents.

Observem que, aplicant la proposició 6.1.7., deduïm que dues bases d'un mateix subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$ tenen el mateix nombre d'elements i, per tant, la següent definició té sentit.

Definició 6.1.9. Sigui E un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. Anomenem *dimensió* de E el nombre de vectors d'una base de E i ho denotem $\dim(E)$.

Exemple 6.1.10:

1. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
2. Els vectors $(1, -1, 0)$ i $(1, 0, -1)$ són base del subespai vectorial $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$ i, per tant, $\dim(E) = 2$.

Proposició 6.1.11. *Sigui E un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. Es compleix:*

$$\dim(E) \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Demostració. Sigui $e = \dim(E)$ i escollim $(v_1, \ldots, v_e)$ una base de E. En particular, $v_1, \ldots, v_e$ són vectors de $\mathbb{R}^n$ linealment independents, i hem vist a la proposició 5.2.1. que el seu nombre ha de ser $e \leq n$.$\square$

6.2. Generadors i equacions de subespais vectorials

Fixada una base $(w_1, \cdots, w_n)$ de $\mathbb{R}^n$, tot subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$ es pot presentar, essencialment, de dues maneres: donant les seves *equacions paramètriques* o donant les seves *equacions implícites*. En aquesta secció analitzarem com obtenir-les a partir d'un sistema de generadors de E, i com deduir-ne la dimensió.

• **Equacions paramètriques d'un subespai vectorial.** Fixem una base $(w_1, \cdots, w_n)$ de $\mathbb{R}^n$ i un sistema de generadors $S = \{v_1, \cdots, v_d\}$ d'un subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$. Cada vector v_j, $1 \leq j \leq d$, s'escriu: $v_j = \sum_{i=1}^n a_j^i w_i$. Així, un vector $v = \sum_{i=1}^n x_i w_i \in \mathbb{R}^n$ és a E si, i només si, existeixen escalars $a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{R}$ tals que

$$\sum_{i=1}^n x_i w_i = v = \sum_{j=1}^d a_j v_j = \sum_{j=1}^d a_j \sum_{i=1}^n a_j^i w_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^d a_j^i a_j \right) w_i.$$

Per tant, $v \in E$ si, i només si, existeixen escalars $a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{R}$ tals que

$$x_i = \sum_{j=1}^d a_j^i a_j, \quad \forall i, 1 \leq i \leq n. \tag{6.1}$$

Les equacions (6.1) es diuen *equacions paramètriques* de E i donant valors als escalars $a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{R}$ s'obtenen les coordenades de tots els vectors de E. A partir de les equacions paramètriques de E es poden obtenir generadors de E; només cal assignar el valor 1 a a_1 i 0 a la resta de a_i per recuperar v_1 i, anàlogament per a $v_2, \cdots, v_d$. En forma matricial, les equacions (6.1) s'escriuen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_d^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_d^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}.$$

A més a més, la dimensió de E és el nombre de vectors linealment independents de S:

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_d^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_d^n \end{pmatrix}.$$

Observació 6.2.1. Un subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$ pot estar generat per diferents conjunts de vectors i tenir, per tant, diferentes equacions paramètriques. És recomanable escollir generadors linealment independents per tal que la matriu A tingui un nombre mínim de columnes.

Exemple 6.2.2. Fixem una base (w_1, w_2, w_3, w_4) de $\mathbb{R}^4$ i anem a calcular la dimensió i les equacions paramètriques del subespai vectorial E de $\mathbb{R}^4$ generat per $v_1 = w_1 + w_3$, $v_2 = w_1 + w_4$ i $v_3 = 2w_1 - w_2 + w_3$. Com hem vist, un vector $u = \sum_{i=1}^4 x_i w_i \in E$ si, i només si, existeixen escalars $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tals que

$$\begin{array}{rcl} u & = & \sum_{j=1}^3 a_j v_j = a_1(w_1 + w_3) + a_2(w_1 + w_4) + a_3(2w_1 - w_2 + w_3) \\ & = & (a_1 + a_2 + 2a_3)w_1 + (-a_3)w_2 + (a_1 + a_3)w_3 + a_2 w_4. \end{array}$$

Per tant, les equacions paramètriques de E són:

$$\begin{cases} x_1 &= a_1 + a_2 + 2a_3 \\ x_2 &= -a_3 \\ x_3 &= a_1 + a_3 \\ x_4 &= a_2 \end{cases}.$$

A més a més,

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

i, per tant, $\dim(E) = 3$.

• **Equacions implícites d'un subespai vectorial.** Fixem una base $(w_1, \cdots, w_n)$ de $\mathbb{R}^n$ i un sistema de generadors $S = \{v_1, \cdots, v_r\}$ linealment independents d'un subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$. Cada vector v_j, $1 \leq j \leq r$, s'escriu: $v_j = \sum_{i=1}^n a_j^i w_i$. Suposem per simplificar que

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0.$$

Un vector $v = \sum_{i=1}^n x_i w_i \in \mathbb{R}^n$ és a E si, i només si, $v \in \langle v_1, \cdots, v_r \rangle$ o, equivalentment,

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_r^n \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 & a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & a_1^n & \cdots & a_r^n \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

i, segons demostrem a la proposició (4.8.7.), això equival a:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_r & a_1^r & \cdots & a_r^r \\ x_j & a_1^j & \cdots & a_r^j \end{vmatrix} = 0 \quad \forall j,\ r+1 \leq j \leq n. \tag{6.3}$$

Les $n - r$ equacions lineals (6.3) reben el nom d'*equacions implícites* de E respecte la base $(w_1, \cdots, w_n)$.

Exemple 6.2.3. Fixem una base (w_1, w_2, w_3, w_4) de $\mathbb{R}^4$ i anem a calcular la dimensió i les equacions implícites del subespai vectorial E de $\mathbb{R}^4$ generat per $v_1 = w_1 + w_3$, $v_2 = w_1 + w_4$ i $v_3 = 2w_1 - w_2 + w_3$. Com que

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$

el vector $v = \sum_{i=1}^{4} x_i w_i \in \mathbb{R}^4$ és a E si, i només si,

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 & 2 \\ x_2 & 0 & 0 & -1 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Aquesta condició equival a:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & 2 \\ x_2 & 0 & 0 & -1 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, el vector $v = \sum_{i=1}^{4} x_i w_i \in \mathbb{R}^4$ és a E si, i només si, les seves coordenades compleixen l'equació

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

Aquesta última equació és l'equació implícita del subespai E i E té dimensió 3.

• Base i dimensió d'un subespai vectorial a partir de les seves equacions implícites. Acabem d'obtenir les equacions implícites d'un subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$ a partir d'un sistema de generadors. Tenim així donat el subespai com a conjunt de solucions d'un sistema homogeni. Abordarem ara el procés invers: veurem que donat un sistema homogeni arbitràri, les seves solucions són les coordenades dels vectors d'un cert subespai E i n'obtindrem la seva dimensió i una base.

Sigui E el subconjunt de $\mathbb{R}^n$ format per tots els vectors $v = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$ solucions del sistema d'equacions lineals

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1^1 x_1 + \cdots + a_n^1 x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m x_1 + \cdots + a_n^m x_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{6.4}$$

per a certa matriu $A = (a_i^j)$. La suma de dues solucions és solució, i el producte d'una solució per un escalar és solució. Per tant, E és un subespai vectorial. Sigui $r = \mathrm{rg}(A)$ i suposem que $\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0$. El vector $v = \sum_{i=1}^n x_i w_i$ és a E si, i només si, compleix

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1^1 x_1 + \cdots + a_n^1 x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r x_1 + \cdots + a_n^r x_n & = & 0 \end{array} \right. ;$$

és a dir, les últimes $m - r$ equacions de E són supèrflues. Podem escriure el sistema resultant de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1^1 x_1 + \cdots + a_r^1 x_r & = & -(a_{r+1}^1 x_{r+1} + \cdots + a_n^1 x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r x_1 + \cdots + a_r^r x_r & = & -(a_{r+1}^r x_{r+1} + \cdots + a_n^r x_n) \end{array} \right. .$$

Resolent el sistema, obtenim les incògnites $x_1, \ldots, x_r$ com a funció lineal de $x_{r+1}, \ldots, x_n$. És a dir,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & b_1^1 \lambda_{r+1} + \cdots + b_{n-r}^1 \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_r & = & b_1^r \lambda_{r+1} + \cdots + b_{n-r}^r \lambda_n \\ x_{r+1} & = & \lambda_{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & \lambda_n \end{array} \right.$$

que són unes equacions paramètriques de E. Per construir a partir d'elles una base i calcular la dimensió de E les escriurem en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & \cdots & b_{n-r}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1^r & \cdots & \cdots & b_{n-r}^r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Com que el determinant del menor format per les últimes $n-r$ files és diferent de zero, totes les columnes són independents, $\dim(E) = n-r$ i una base de E és $(z_1, \cdots, z_{n-r})$ amb $z_j = \sum_{i=1}^{r} b_j^i w_i + w_{r+j}$ per a tot $1 \le j \le n-r$.

Exemple 6.2.4. Fixem $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ una base de $\mathbb{R}^5$ i considerem el subespai vectorial E de $\mathbb{R}^5$ definit per les equacions implícites

$$E : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_4 - x_5 & = & 0 \\ x_3 - x_4 - x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 - 2x_5 & = & 0 \end{array} \right. .$$

La matriu associada al sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{té rang 3, ja que} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Per tant, $\dim(E) = 5 - \operatorname{rg}(A) = 2$. Els vectors $v = \sum_{i=1}^{5} x_i w_i$ de E compleixen

$$E : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_3 & = & x_4 \\ x_2 & = & -x_4 + x_5 \\ x_3 & = & x_4 + x_5 \\ x_4 & = & x_4 \\ x_5 & = & x_5 \end{array} \right.$$

i E té com a equacions paramètriques

$$E : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 2\lambda_4 + \lambda_5 \\ x_2 & = & -\lambda_4 + \lambda_5 \\ x_3 & = & \lambda_4 + \lambda_5 \\ x_4 & = & \lambda_4 \\ x_5 & = & \lambda_5 \end{array} \right. .$$

Una base de E és $(2e_1 - e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_2 + e_3 + e_5)$.

6.3. Suma i intersecció de subespais i les seves dimensions

En aquesta secció estudiem la suma i la intersecció de subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$. Incloem també la fórmula de Grassmann que relaciona les dimensions de la suma i la intersecció de dos subespais vectorials.

• **Intersecció de subespais vectorials.** Sigui $\{V_j\}_{j\in I}$ una col·lecció arbitrària de subespais de $\mathbb{R}^n$. La seva intersecció

$$V = \bigcap_{j\in I} V_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in V_j \ \text{ per a tot } j \in I\}$$

és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. En efecte, donats $x, y \in \bigcap_{j\in I} V_j$ i $a, b \in \mathbb{R}$, el vector $ax + by$ és a V_j, ja que V_j és subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. Com que això és cert per a tot índex $j \in I$, es té que $ax + by \in \bigcap_{j\in I} V_j$.

A la pràctica, per calcular la intersecció $U \cap V$ de dos subespais vectorials U, V de $\mathbb{R}^n$ només cal reunir les equacions implícites de U i V en un únic sistema. En general, obtindrem un sistema en el qual podrem eliminar equacions, perquè algunes poden ser combinacions lineals de les restants.

Exemple 6.3.1. Considerem a $\mathbb{R}^6$ els subespais

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_4 + x_5 + x_6 = 0\}$$

i

$$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mid x_1 + x_4 = 0, \quad x_1 + x_5 - x_6 = 0, \quad x_3 = 0\}.$$

Reunim les equacions implícites dels dos subespais en un únic sistema d'equacions:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 &=& 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 &=& 0 \\ x_1 + x_4 &=& 0 \\ x_1 + x_5 - x_6 &=& 0 \\ x_3 &=& 0 \end{array}\right. .$$

De manera equivalent,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 &=& 0 \\ x_1 + x_4 &=& 0 \\ x_3 &=& 0 \\ x_5 &=& 0 \\ x_1 - x_6 &=& 0 \end{array}\right. .$$

Per tant, $U \cap V$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^6$ de dimensió 1 i una base de $U \cap V$ és $(1, -1, 0, -1, 0, 1)$.

La unió de subespais vectorials E i F no és, en general, un subespai vectorial. Ho veiem a l'exemple següent.

Exemple 6.3.2. Considerem a $\mathbb{R}^2$ els subespais $E = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ i $F = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$. Els vectors $(1, 0)$ i $(0, 1)$ són a $E \cup F$, però la seva suma $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ no és a $E \cup F$. Per tant $E \cup F$ no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

• **Suma de subespais vectorials.** Siguin $F_1, \ldots, F_k$ subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$. Anomenen *suma dels subespais vectorials* $F_1, \ldots, F_k$ el conjunt

$$F_1 + \cdots + F_k = \{v_1 + \cdots + v_k \mid v_j \in F_j, \quad \forall\, j = 1, \ldots k\}.$$

És fàcil comprovar que $F_1 + \cdots + F_k$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ i que qualsevol altre subespai vectorial que contingui $F_1 \cup \cdots \cup F_k$ ha de contenir també $F_1 + \cdots + F_k$. En aquest sentit es diu que $F_1 + \cdots + F_k$ és el *menor* subespai vectorial que conté $F_1 \cup \cdots \cup F_k$, o que és el *subespai vectorial generat* pels subespais vectorials F_j, $j = 1, \ldots, k$.

Teorema 6.3.3. Fórmula de Grassmann. *Siguin E_1 i E_2 dos subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$. Es compleix:*

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2). \tag{6.5}$$

Demostració. Siguin $m = \dim(E_1 \cap E_2)$, $r = \dim(E_1)$, $s = \dim(E_2)$ i $t = \dim(E_1 + E_2)$. Volem veure que $t = r + s - m$. Escollim un base $(v_1, \ldots, v_m)$ de $E_1 \cap E_2$ i l'ampliem fins a obtenir una base $\mathcal{B}_1 = (v_1, \ldots, v_m, u_{m+1}, \ldots, u_r)$ de E_1 i una base $\mathcal{B}_2 = (v_1, \ldots, v_m, w_{m+1}, \ldots, w_s)$ de E_2.

Tot seguit provarem que $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m, u_{m+1}, \ldots, u_r, w_{m+1}, \ldots, w_s)$ és base de $E_1 + E_2$. Cal veure que aquests vectors són linealment independents i que generen $E_1 + E_2$. Provarem primer que generen $E_1 + E_2$. Agafem $x \in E_1 + E_2$ i el posem com a suma $x = y + z$ d'un vector $y \in E_1$ i un vector $z \in E_2$. Com que $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ són sistemes de generadors de E_1 i E_2 respectivament, existeixen escalars $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ i $b_1, \dots, b_s \in \mathbb{R}$ tals que

$$y = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i + \sum_{i=m+1}^{r} a_i u_i, \qquad z = \sum_{i=1}^{m} b_i v_i + \sum_{i=m+1}^{s} b_i w_i.$$

I sumant, obtenim:

$$\begin{aligned} x &= y + z = \textstyle\sum_{i=1}^{m} a_i v_i + \sum_{i=m+1}^{r} a_i u_i + \sum_{i=1}^{m} b_i v_i + \sum_{i=m+1}^{s} b_i w_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} (a_i + b_i) v_i + \sum_{i=m+1}^{r} a_i u_i + \sum_{i=m+1}^{s} b_i w_i \end{aligned}.$$

Per tant, $\mathcal{B}$ és un sistema de generadors de $E_1 + E_2$.

Provem ara que els vectors de $\mathcal{B}$ són vectors linealment independents. Agafem una combinació lineal

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i + \sum_{i=m+1}^{r} \beta_i u_i + \sum_{i=m+1}^{s} \gamma_i w_i = \vec{0}.$$

El vector

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i + \sum_{i=m+1}^{r} \beta_i u_i = - \sum_{i=m+1}^{s} \gamma_i w_i \in E_1 \cap E_2.$$

Per tant, existeixen escalars $\delta_1, \dots, \delta_m$ tals que $x = \sum_{i=1}^{m} \delta_i v_i$. Llavors

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i v_i + \sum_{i=m+1}^{s} \gamma_i w_i = \vec{0}.$$

Per ser $\mathcal{B}_2$ base de E_2 els coeficients han de ser nuls: $\delta_1 = \cdots = \delta_m = \gamma_1 \cdots = \gamma_s = 0$. En particular, $x = 0$ i

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i + \sum_{i=m+1}^{r} \beta_i u_i = \vec{0}.$$

Per ser $\mathcal{B}_1$ base de E_1, els vectors de $\mathcal{B}_1$ són linealment independents i $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$, la qual cosa prova que $\mathcal{B}$ és linealment independent. Resumint,

$$\dim(E_1 + E_2) = r + s - m = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2). \square$$

Exemple 6.3.4. Considerem a $\mathbb{R}^4$ els subespais vectorials

$$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

i

$$E_2 = \langle (1,1,1,0), (1,1,0,0), (-1,-1,1,0) \rangle.$$

Tot seguit en calcularem la suma i la intersecció. Observem que $\dim(E_1) = 3$, $\mathcal{B}_1 = ((0,0,0,1), (1,-1,0,0), (1,0,-1,0))$ és una base de E_1; $\dim(E_2) = 2$ i $\mathcal{B}_2 = ((1,1,0,0), (0,0,1,0))$ és una base de E_2. Tot vector de E_2 és de la forma $v = a(1,1,0,0) + b(0,0,1,0) = (a,a,b,0)$. Per tant, les equacions paramètriques de E_2 són:

$$E_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & a \\ x_2 & = & a \\ x_3 & = & b \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Eliminant paràmetres obtenim unes equacions implícites de E_2: $x_1 - x_2 = 0$ i $x_4 = 0$. Així doncs, les equacions implícites de $E_1 \cap E_2$ són:

$$E_1 \cap E_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Tenim que $\dim(E_1 \cap E_2) = 1$ i $\mathcal{B} = ((1,1,-2,0))$ és una base de $E_1 \cap E_2$. Aplicant la fórmula de Grassmann obtenim

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

D'on resulta que $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^4$.

6.4. Suma directa

Direm que la suma $F_1 + \cdots + F_k$ de subespais vectorials $F_1, \ldots, F_k$ de $\mathbb{R}^n$ és una *suma directa* si es compleix

$$\dim(F_1 + \cdots + F_2) = \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_k).$$

En aquest cas, la denotarem $F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$.

Proposició 6.4.1. *Siguin $F_1, \dots, F_k$ subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$. Són equivalents:*

(1) $F_1 + \cdots + F_k$ *és una suma directa.*

(2) $u_1 + \cdots + u_k = v_1 + \cdots + v_k$ *amb* $u_j, v_j \in F_j \quad \forall j$, *implica* $u_j = v_j \quad \forall j$.

(3) $u_1 + \cdots + u_k = \vec{0}$ *amb* $u_j \in F_j \quad \forall j$, *implica* $u_j = \vec{0} \quad \forall j$.

Demostració. Observem primer que si $\mathcal{B}_j = (v_{j,1}, \dots, v_{j,n_j})$ és una base de F_j amb n_j vectors, aleshores
$$F_1 + \cdots + F_k = \langle \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k \rangle$$
i, per tant, $\dim(F_1 + \cdots + F_k) \leq n_1 + \cdots + n_k$.

($1 \Rightarrow 3$). Provarem que si no es compleix (3), tampoc es compleix (1). En efecte, suposem que $u_1 + \cdots + u_k = \vec{0}$ amb $u_j \in F_j \quad \forall j$ i $u_h \neq \vec{0}$. Aleshores,
$$u_h = -u_1 - \cdots - u_{h-1} - u_{h+1} - \cdots - u_k \in \langle \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{h-1} \cup \mathcal{B}_{h+1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k \rangle.$$

Podem escollir la base $\mathcal{B}_h$ de manera que $u_h \in \mathcal{B}_h$. Per tant, tota combinació lineal de vectors de $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ és també combinació lineal de vectors $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k \setminus \{u_h\}$ i
$$F_1 + \cdots + F_k = \langle \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k \setminus \{u_h\} \rangle \;\Rightarrow\; \dim(F_1 + \cdots + F_k) < \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_k).$$

($3 \Rightarrow 1$). N'hi ha prou amb veure que els vectors $v_{1,1}, \dots, v_{1,n_1}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,n_k}$ són linealment independents. Suposem que tenim una combinació lineal de tots ells $\sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ 1 \leq i \leq n_j}} \alpha_{j,i} v_{j,i} = \vec{0}$:
$$\vec{0} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ 1 \leq i \leq n_j}} \alpha_{j,i} v_{j,i} = \sum_{1 \leq i \leq n_1} \alpha_{1,i} v_{1,i} + \cdots + \sum_{1 \leq i \leq n_k} \alpha_{k,i} v_{k,i}.$$

La condició 3 ens diu que tots els sumatoris de l'ultima expressió són 0, és a dir, per a tot $j = 1, \dots, k$:
$$\sum_{1 \leq i \leq n_j} \alpha_{j,i} v_{j,i} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{j,i} = 0, \;\; \forall\, i = 1, \dots, n_j.$$

Per tant, tots els coeficients de la combinació inicial són 0, com volíem demostrar.

($2 \Rightarrow 3$). Aquest resultat és clar, ja que si tenim $u_1 + \cdots + u_k = \vec{0} = \vec{0} + \cdots + \vec{0}$, la condició 2 ens diu que $u_j = \vec{0}$, per a tot j.

($3 \Rightarrow 2$). $u_1 + \ldots u_k = v_1 + \cdots + v_k \;\Rightarrow\; (u_1 - v_1) + \ldots (u_k - v_k) = \vec{0}$. Aleshores, la condició 3 ens diu que $u_j - v_j = \vec{0}$ per a tot j, és a dir, $u_j = v_j$ per a tot j.$\square$

Exemple 6.4.2:

1. La suma dels subespais $F_1 = \langle(1,0,0)\rangle$, $F_2 = \langle(0,1,0)\rangle$ i $F_3 = \langle(0,0,1)\rangle$ és $\mathbb{R}^3$. En efecte, donat un vector arbitrari (x,y,z), el podem posar com a suma

$$(x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z),$$

$$(x,0,0) \in F_1,\ (0,y,0) \in F_2,\ (0,0,z) \in F_3.$$

   Per tant, $\dim(F_1 + F_2 + F_3) = 3 = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3$, i la suma d'aquests tres subespais és directa: $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = \mathbb{R}^3$.

2. Considerem els subespais $F_1 = \langle(1,0,0)\rangle$, $F_2 = \langle(0,1,0)\rangle$, i $F_3 = \langle(1,1,0)\rangle$. La tercera coordenada de qualsevol suma de vectors d'aquests subespais és 0. Per tant,

$$F_1 + F_2 + F_3 = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

   té dimensió 2, i la suma no és directa.

Proposició 6.4.3. *La suma de dos subespais és directa si, i només si, la seva intersecció és* $\{\vec{0}\}$.

Demostració. Per la fórmula de Grassmann (teorema 6.5), si la suma $E + F$ és directa, $\dim(E \cap F) = 0$ i l'únic subespai de dimensió 0 és $\{\vec{0}\}$.$\square$

Dos subespais vectorials E_1 i E_2 de $\mathbb{R}^n$ es diuen *subespais complementaris o suplementaris* si $\mathbb{R}^n$ és suma directa de E_1 i E_2, $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$, és a dir, si $\mathbb{R}^n = E_1 + E_2$ i $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$. En aquest cas,

$$\dim(E_1) + \dim(E_2) = n.$$

Exemple 6.4.4:

1. La suma dels subespais $E_1 = \langle(1,1,0)\rangle$ i $E_2 = \langle(1,0,1)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$ és directa, ja que $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ però no són complementaris ja que $\mathbb{R}^3 \neq E_1 + E_2$.
2. Els subespais $E_1 = \langle(1,1,0),(1,0,1)\rangle$ i $E_2 = \langle(1,0,0)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$ són complementaris; és a dir, $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$. En efecte, $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ i $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

6.5. *Mathematica*: Subespais vectorials

Sigui F un subespai vectorial donat per un conjunt de generadors $F = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$.

• Per calcular $\dim F$ podem fer servir la comanda MatrixRank:

In[-]:= MatrixRank[{v1,..., vk}]

• Per trobar una base de $F \subset \mathbb{R}^n$ podem fer servir RowReduce:

In[-]:= RowReduce[{v1,..., vk}]

Les files no nul·les de la matriu obtinguda formen una base de F.

• Els coeficients d'un sistema d'equacions de F estan donats per

In[-]:= NullSpace[{v1,..., vk}]

En efecte, amb aquesta comanda obtenim $d = n - \mathrm{rg}(v_1 \mid \cdots \mid v_k) = n - \dim F$ vectors linealment independents:

$$(c_1^1, \ldots, c_n^1),\ (c_1^2, \ldots, c_n^2), \ldots, (c_1^d, \ldots, c_n^d)$$

que compleixen

$$\begin{pmatrix} v_1^1 & \ldots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_k^1 & \ldots & v_k^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^j \\ \vdots \\ c_n^j \end{pmatrix} = 0, \quad \forall\, j \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1^1 c_1^j + \cdots + v_1^n c_n^j = 0 \\ \ldots \\ v_k^1 c_1^j + \cdots + v_k^n c_n^j = 0 \end{array} \right. \qquad \forall\, j.$$

Per tant, cada un dels vectors $v_i = (v_1^1, \ldots, v_1^n)$ és solució del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1^1 x^1 + \cdots + c_n^1 x^n = 0 \\ \ldots \\ c_1^d x^1 + \cdots + c_n^d x^n = 0 \end{array} \right. .$$

És a dir, els vectors de F són solucions d'aquest sistema. Ara bé, la matriu d'aquest sistema és de rang d i, per tant, les solucions formen un subespai vectorial de dimensió $n - d = \dim F$, que haurà de ser F. Per tant, aquestes són unes equacions de F.

• Si $Ax = 0$ són equacions d'un subespai vectorial,

In[-]:= NullSpace[A],

ens dóna una base d'aquest subespai vectorial.

Exemple 6.5.1. Sigui F el subespai vectorial generat pels vectors:

In[-]:=	v1= $\{1, -1, 2, 3, 4\}$ v2= $\{2, 0, 1, -1, 0\}$ v3= $\{-1, -1, 1, 4, 4\}$ v4= $\{0, 0, 0, 1, 2\}$
Out[-]=	$\{1, -1, 2, 3, 4\}$ $\{2, 0, 1, -1, 0\}$ $\{-1, -1, 1, 4, 4\}$ $\{0, 0, 0, 1, 2\}$
In[-]:=	MatrixRank[{v1,v2,v3,v4}]
Out[-]=	3
In[-]:=	RowReduce[{v1,v2,v3,v4}]
Out[-]=	$\{\{1, 0, \frac{1}{2}, 0, 1\},\ \{0, 1, -\frac{3}{2},\ 0, 3\},\ \{0, 0, 0, 1, 2\},\ \{0, 0, 0, 0, 0\}\}$
In[-]:=	NullSpace[{v1,v2,v3,v4}]
Out[-]=	$\{\{-1, -3, 0, -2, 1\},\ \{-1, 3, 2, 0, 0\}\}$

$(1, 0, \frac{1}{2}, 0, 1),\ (0, 1, -\frac{3}{2}, 0, 3)$ és una base de F. Unes equacions són:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 2t - u = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \end{array} \right. .$$

6.6. Exercicis i problemes

6.6.1. En cada un dels casos següents tenim un subconjunt $V \subset \mathbb{R}^n$ que no és subespai vectorial. Demostreu-ho trobant, en cada cas, una combinació lineal de vectors de V que no sigui a V:

(i) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,2)\}$.

(ii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x+3y=1\}$.

(iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, xy=0\}$.

(iv) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2+3y=0\}$.

(v) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 2x+y-2=\sqrt{2}z\}$.

6.6.2. Quins dels següents subconjunts són subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$?

(i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+3y+yz=0\}$.

(ii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2+3y=0\}$.

(iii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 2x+y=\sqrt{2}x\}$.

6.6.3. Determineu la dimensió, una base i unes equacions implícites dels subespais generats per les següents famílies de vectors de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
A &= \{(1,3,2),\ (1,0,-1)\ (2,-3,5)\} \subset \mathbb{R}^3,\\
B &= \{(0,2,-1),(4,3,-2),(4,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^3,\\
C &= \{(1,2,1,3),(2,1,4,3),(1,3,2,1)\} \subset \mathbb{R}^4,\\
D &= \{(1,2,-1,1),(3,-1,2,1),(2,-3,-3,0),(4,1,-5,2)\} \subset \mathbb{R}^4.
\end{aligned}$$

6.6.4. Calculeu la dimensió del subespai de $\mathbb{R}^n$ generat pels vectors següents:

$$u_1=(1,1,0,\dots,0),\quad u_2=(0,1,1,0,\dots,0),\dots,u_{n-1}=(0,0,\dots,1,1),$$
$$u_n=(1,0,\dots,0,1).$$

6.6.5:

(i) Demostreu que $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$. Calculeu la dimensió de E, trobeu una base de E i les equacions paramètriques de E respecte de la base canònica de $\mathbb{R}^4$.

(ii) Sigui F el subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ generat per $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ i $v_3 = (1, 0, 0, 1)$. Trobeu les equacions implícites i una base de F.

(iii) Calculeu la dimensió i una base de $E + F$ i de $E \cap F$.

6.6.6. Considerem el subespai vectorial F de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 2, 2, 6)$, $(0, 2, 4, 4)$ i el subespai G generat per $(1, 0, -1, 2)$, $(2, 3, 0, 1)$. Determineu les dimensions, una base i equacions implícites dels subespais F, G, $F + G$, $F \cap G$.

6.6.7. Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ i considerem els subespais vectorials E i F de $\mathbb{R}^4$ definits per les equacions implícites:

$$E : \left\{ \begin{array}{rcl} bx_1 - bx_2 + x_4 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right. \qquad F : \left\{ \begin{array}{rcl} 2(a-1)x_1 + (1-a)x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

(i) Calculeu la dimensió i bases de E i de F.

(ii) Esbrineu si existeixen valors de a i b tals que $E = F$.

(iii) Determineu per a quins valors de a i b es compleix: $E \neq F$ i $E + F \neq \mathbb{R}^4$.

6.6.8. Considereu els següents subespais de $\mathbb{R}^4$:

$$F := \langle (1, 0, 1, 0),\, (0, 2, 1, 0) \rangle, \quad G = \{ (x, y, z, t)\,;\, x - z = y = 0\,\}.$$

Trobeu dimensions, bases i equacions implícites dels subespais F, G, $F \cap G$ i $F + G$.

6.6.9. Considerem el següents vectors de $\mathbb{R}^6$:

$$\begin{array}{lll} u_1 := (1, 1, 0, 0, 0, 0), & u_2 := (1, 0, 1, 0, 0, 0), & u_3 := (1, 0, 0, 1, 0, 0), \\ v_1 := (0, 1, 1, 0, 0, 0), & v_2 := (0, 1, 0, 1, 0, 0), & v_3 := (0, 1, 0, 0, 1, 0), \\ w_1 := (0, 0, 1, 1, 0, 0), & w_2 := (0, 0, 1, 0, 1, 0), & w_3 := (0, 0, 1, 0, 0, 1). \end{array}$$

Siguin

$$F := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \quad G := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \quad H := \langle w_1, w_2, w_3 \rangle.$$

Trobeu bases de $(F \cap G) + H$, de $(F \cap H) + G$ i de $(H \cap G) + F$.

6.6.10. Considerem a $\mathbb{R}^4$ els subespais vectorials donats per

$$\begin{aligned} H &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x-y+z=0,\ y+z+t=0,\ x+2z+t=0\,\}, \\ F_a &= \langle\,(1,1,2,1),\ (0,2,0,1),\ (-1,3,a,1)\,\rangle. \end{aligned}$$

(i) Trobeu bases de cada un d'ells, segons els valors del paràmetre a.

(ii) Trobeu equacions per F_a, segons els valors de a.

(iii) Trobeu els subespais $H \cap F_a$ i $H + F_a$ en cada cas. Doneu-los per equacions implícites i determineu bases de cada un d'ells.

6.6.11. Trobeu quines condicions ha de complir un vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ per tal que

$$\mathbb{R}^3 = \langle (1,2,0),\ (1,0,-1)\rangle \oplus \langle (a,b,c)\rangle.$$

6.6.12. Considerem, per a cada $a \in \mathbb{R}$, el conjunt de vectors $E_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax-y+z=0\}$.

(i) Demostreu que, per a tot a, E_a és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Determineu per a quins valors de a es compleix $\mathbb{R}^3 = E_a \oplus \langle (1,1,1)\rangle$.

6.6.13. Considereu els següents subespais de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{ll} F := \langle (1,0,1,0)\rangle, & G := \langle (1,0,0,0)\rangle, \\ H := \langle (1,0,-1,1)\rangle, & I := \langle (2,0,0,1)\rangle. \end{array}$$

Comproveu quines de les sumes dos a dos i tres a tres són sumes directes i quines no.

6.6.14. Designem per $\mathcal{B}_e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^4$.

(i) Trobeu valors de a i b per tal que el subespai $F = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, generat per

$$v_1 = (1,2,3,4),\ v_2 = (1,2,1,1),\ v_3 = (a,b,2,3)$$

tingui dimensió 2.

(ii) Escolliu una base de F i amplieu-la a una base de $\mathbb{R}^4$.

(iii) Sigui $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^4$ que heu escollit a (ii). Determineu les coordenades dels vectors de la base canònica en la base $\mathcal{B}$.

6.6.15. Siguin F, G i H subespais de l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$. Demostreu o doneu contraexemples de cada una de les afirmacions següents:

(i) $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

(ii) $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$.

(iii) $\dim (F \cap (G + H)) = \dim(F \cap G) + \dim(F \cap H) - \dim(F \cap G \cap H)$.

6.6.16. Siguin $F_1, \ldots, F_k$ subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$. Demostreu que

$$\sum_{i=1}^{k} \dim F_i - (k-1)n \leq \dim(F_1 \cap \cdots \cap F_k)$$

6.7. Activitats d'autoavaluació

6.7.1. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin.

1. Dos subespais $E, F \subset \mathbb{R}^4$ de dimensió 2 tenen sempre intersecció diferent de $\{\vec{0}\}$.
2. Dos subespais de dimensió 1 de $\mathbb{R}^3$ no són mai complementaris.
3. Dos subespais de dimensió 2 de $\mathbb{R}^4$ sempre són complementaris.
4. Un subespai de dimensió $n-1$ de $\mathbb{R}^n$ té un únic complementari.
5. Un subespai de dimensió 3 de $\mathbb{R}^4$ té una infinitat de complementaris.
6. Dos subespais de $\mathbb{R}^4$ de dimensió 2 complementaris tenen intersecció $\{\vec{0}\}$.

6.7.2. Siguin H, L dos subespais vectorials diferents de dimensió $n-1$ de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Demostreu que tot vector de $\mathbb{R}^n$ és suma d'un vector de H i un de L.

6.7.3. Proveu que un subconjunt $H \subset \mathbb{R}^n$ és un subespai vectorial si, i només si, compleix les dues condicions:

1. $u, v \in H \Rightarrow u + v \in H$.
2. $u \in H,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in H$.

6.7.4. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. Si W i V són subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$ tals que $\dim W = \dim V$, aleshores $W = V$.
2. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.
3. Si $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ són dos subespais vectorials tals que $\dim F_2 = 3$ i $\dim F_1 = 1$, aleshores $\mathbb{R}^4 = F_1 + F_2$.
4. Si $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ són dos subespais vectorials tals que $\dim F_2 = 3$ i $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$, aleshores $\mathbb{R}^4 = F_1 + F_2$.
5. Si $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ són dos subespais vectorials tals que $\dim F_2 = 3$, $\dim F_1 = 1$ i F_1 no està inclòs en F_2, aleshores $\mathbb{R}^4 = F_1 + F_2$.

Capítol 7

Aplicacions lineals

Aquest capítol està dedicat a l'estudi de les aplicacions lineals de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Estudiarem la representació matricial de les aplicacions lineals, les seves propietats, els diferents tipus d'aplicacions lineals i la seva estreta relació amb els sistemes d'equacions lineals.

7.1. Aplicacions definides per matrius

Suposem fixades una matriu $A = (a_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, i bases $(u_1, \cdots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$, i $(v_1, \ldots, v_m)$ de $\mathbb{R}^m$. En les expressions matricials, cada vector es representa per la matriu columna formada per les seves coordenades en la base escollida. Multiplicar per la matriu A defineix una aplicació

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \mapsto f(v) = Av = \begin{pmatrix} a_1^1 v^1 + \cdots + a_n^1 v^n \\ \vdots \\ a_1^m v^1 + \cdots + a_n^m v^n \end{pmatrix}.$$

Exemple 7.1.1. Agafem la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, i les bases canòniques a $\mathbb{R}^3$ i a $\mathbb{R}^2$. En aquest cas,

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad (x, y, z) \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 3x + z \end{pmatrix}.$$

Per exemple, $f((1, 1, 1)) = (4, 4)$.

Sembla clar que si agafem unes altres bases, l'aplicació f no consisteix a multiplicar per A. Agafem, en aquest exemple, les bases

$$(u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (1,1,0),\ u_3 = (1,0,0)) \subset \mathbb{R}^3, \quad (v_1 = (7,2),\ v_2 = (3,1)) \subset \mathbb{R}^2.$$

Siguin P i Q les matrius del canvi d'aquestes bases a les bases canòniques. És a dir, P és la matriu les columnes de la qual són les coordenades dels vectors u_i en la base canònica, i Q és la matriu les columnes de la qual són les coordenades dels vectors v_i en la base canònica.

Les coordenades del vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ en la base (u_1,u_2,u_3) s'obtenen multiplicant per la matriu P^{-1}:

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{pmatrix}.$$

En particular, les coordenades del vector $(1,1,1)$ són, en aquesta base, $(1,0,0)$. La seva imatge és el vector $(4,4)$ que en la base (v_1,v_2) té coordenades

$$Q^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Però

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -8 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

En altres paraules, l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ només consisteix a multiplicar per A si els vectors estan expressats en les bases prefixades, que, en aquest exemple, són les canòniques.

El que sí passa és que l'aplicació f consisteix sempre a multiplicar per una matriu, encara que aquesta canvia en canviar de bases. En efecte, en canviar de base, les coordenades d'un vector v passen a ser $P^{-1}v$ i les coordenades de la seva imatge Av passen a ser $Q^{-1}Av$. Existeix una matriu que passa de $P^{-1}v$ a $Q^{-1}Av$:

$$\left(Q^{-1}AP\right)\,(P^{-1}v) \;=\; Q^{-1}Av.$$

En les noves bases, la matriu que passa de les coordenades d'un vector a les de la seva imatge és $Q^{-1}AP$.

Les aplicacions que estudiarem en aquest capítol són les que consisteixen a multiplicar per una matriu, però una matriu diferent segons les bases en les quals treballem. Per això, les definirem d'una altra manera que demostrarem que és equivalent; les definirem per dues propietats que les caracteritzen.

7.2. Definició d'aplicació lineal

Definició 7.2.1. Una aplicació $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és lineal si compleix:

(1) $f(v+u) = f(v) + f(u)$, per a tot parell de vectors $v, u \in \mathbb{R}^n$.

(2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$, per a tot vector $v \in \mathbb{R}^n$ i tot escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 7.2.2:

1. Les aplicacions definides multiplicant per una matriu són lineals.
2. L'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f((x,y)) = (x+1, y, x-2y)$ no és lineal.
3. L'aplicació $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f((x,y,z)) = (x^2, y, 0)$ no és lineal.
4. L'aplicació $Id_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que aplica cada vector en ell mateix és lineal i s'anomena *aplicació identitat*.

Teorema 7.2.3. *Donada una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i fixades bases $(u_1, \ldots, u_n)$ en $\mathbb{R}^n$ i $(v_1, \ldots, v_m)$ en $\mathbb{R}^m$, existeix una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, i només una, tal que*

$$f(v) = Av, \qquad \forall\ v \in \mathbb{R}^n.$$

En aquesta expressió, v i $f(v)$ són les matrius columna formades per les coordenades d'aquests vectors.

Demostració. Si realment existeix A, en particular, ha de complir

$$f(u_i) = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^1 \\ \vdots \\ a_i^m \end{pmatrix}.$$

És a dir, la columna i-èsima ha d'estar formada per les coordenades del vector $f(u_i) = a_i^1 v_1 + \cdots + a_i^m v_m$. Això determina l'única matriu que pot complir la condició de l'enunciat. Falta comprovar que aquesta matriu realment transformi qualsevol vector w en la seva imatge per f. Efectivament, siguin $(w^1, \ldots, w^n)_{\mathcal{B}}$ les coordenades de w en la base $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$. Hem de comprovar que les coordenades de $f(w)$ s'obtenen multiplicant per A. En efecte, per ser f lineal

$$f(w) = f(w^1 u_1 + \cdots + w^n u_n) = w^1 f(u_1) + \cdots + w^n f(u_n)$$

i, tenint en compte que $f(u_i) = a_i^1 v_1 + \cdots + a_i^m v_m$:

$$f(w) = \sum_{i=1}^n w^i f(u_i) = \sum_{i=1}^n w^i \left(\sum_{j=1}^m a_i^j v_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_i^j w^i \right) v_j .$$

Les coordenades de $f(w)$ són, efectivament, els coeficients de la matriu columna $A \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$.$\square$

Definició 7.2.4. S'anomena *matriu d'una aplicació lineal* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en les bases $(u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ i $(v_1, \ldots, v_m)$ de $\mathbb{R}^m$ la matriu que té per columnes les coordenades dels vectors $f(u_i)$ en la base $(v_1, \ldots, v_m)$; és a dir,

$$\text{si} \quad f(u_i) = \sum_{1 \le j \le m} a_i^j v_j \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}$$

és la matriu de f en aquestes bases.

Exemple 7.2.5. L'aplicació

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f((x, y, z)) = (3x + 2y - z, x - y + 4z)$$

és lineal ja que consisteix en multiplicar per una matriu

$$\begin{pmatrix} 3x + 2y - z \\ x - y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Exemple 7.2.6. Considerem l'aplicació identitat $Id_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i una base $\mathcal{B}_v = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Agafant aquesta base tant per expressar els vectors de l'espai de sortida com les seves imatges, la matriu de Id_n és la matriu identitat I_n.

Suposem ara que expressem les imatges en la base $\mathcal{B}_u = (u_1, \ldots, u_n)$ i que A és la matriu de Id_n en aquestes bases

$$\begin{array}{ccc} Id_n : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (v_i) & & (u_i) \end{array}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Les columnes de A són les coordenades dels vectors $v_i = Id_n(v_i)$ en la base $\mathcal{B}_u = (u_1, \ldots, u_n)$, és a dir, la matriu del canvi de la base $\mathcal{B}_v$ a la base $\mathcal{B}_u$. La imatge d'un vector $w = \mu^1 v_1 + \cdots + \mu^n v_n$ és aquest mateix vector expressat en l'altra base: $w = \lambda^1 u_1 + \cdots + \lambda^n u_n$.

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^n \end{pmatrix}$$

és la mateixa relació que hem deduït a la secció (5.5.).

7.3. Nucli i imatge d'una aplicació lineal

Definició 7.3.1. S'anomena *imatge* d'una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ al conjunt de vectors de $\mathbb{R}^m$ que són imatge per f d'un vector de $\mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{Im} f := \{ v \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, u \in \mathbb{R}^n, \;\; f(u) = v \}.$$

Proposició 7.3.2. *La imatge d'una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és el subespai vectorial generat per les imatges per f d'una base de $\mathbb{R}^n$.*

Demostració. Es pot provar directament que $\operatorname{Im} f$ és un subespai vectorial usant la definició d'aplicació lineal.

1. $v_1, v_2 \in \operatorname{Im} f \quad \Rightarrow \quad \exists u_1, u_2, \; f(u_1) = v_1, \; f(u_2) = v_2 \quad \Rightarrow \quad f(u_1 + u_2) = v_1 + v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in \operatorname{Im} f.$

2. $v \in \operatorname{Im} f,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \exists u,\ f(u) = v,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(\lambda u) = \lambda v \quad \Rightarrow$ $\lambda v \in \operatorname{Im} f$.

Demostrarem ara que, si $(u_1, \ldots, u_n)$ és una base de $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{Im} f = \langle f(u_1), \ldots, f(u_n)\rangle$, la qual cosa, en particular, torna a demostrar que $\operatorname{Im} f$ és un subespai vectorial.

1. $\operatorname{Im} f \subset \langle f(u_1), \ldots, f(u_n)\rangle$.

   En efecte, $v \in \operatorname{Im} f \quad \Rightarrow \quad \exists u = \lambda^1 u_1 + \cdots + \lambda^n u_n,\ f(u) = v \quad \Rightarrow \quad v = \lambda^1 f(u_1) + \cdots + \lambda^n f(u_n) \quad \Rightarrow \quad v \in \langle f(u_1), \ldots, f(u_n)\rangle$.

2. $\operatorname{Im} f \supset \langle f(u_1), \ldots, f(u_n)\rangle$.

   En efecte, $v \in \langle f(u_1), \ldots, f(u_n)\rangle \quad \Rightarrow \quad v = \lambda^1 f(u_1) + \cdots + \lambda^n f(u_n) = f(\lambda^1 u_1 + \cdots + \lambda^n u_n) \quad \Rightarrow \quad v \in \operatorname{Im} f$.

Les dues inclusions demostren la igualtat dels dos conjunts.$\square$

Corol·lari 7.3.3. *Si A és la matriu de f en unes certes bases,* $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(A)$.

Demostració. Amb les notacions de la proposició anterior tenim que la matriu de f és $A = (f(u_1) \mid \cdots \mid f(u_n))$. Per tant, $\operatorname{rg}(A) = \dim\langle f(u_1), \ldots, f(u_n)\rangle = \dim \operatorname{Im} f$.$\square$

Definició 7.3.4. S'anomena *rang d'una aplicació lineal* f la dimensió del subespai imatge. Ho denotarem per $\operatorname{rg}(f)$.

Exemple 7.3.5. Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f((x, y, z)) = (3x + z,\ 2x + y,\ x + 2y - z) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La matriu és de rang 2 i la segona i la tercera columnes són linealment independents. D'altra banda, la imatge de f és

$$\operatorname{Im} f = \langle (3,2,1),\ (0,1,2),\ (1,0,-1)\rangle = \langle (0,1,2),\ (1,0,-1)\rangle \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg}(f) = 2.$$

Definició 7.3.6. S'anomena *nucli* d'una aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ el conjunt de vectors de $\mathbb{R}^n$ amb imatge el vector $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{Nuc} f := \{\, u \in \mathbb{R}^n \mid f(u) = \vec{0}\,\}.$$

Proposició 7.3.7. *El nucli d'una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$.*

Demostració:

1. $u_1, u_2 \in \operatorname{Nuc} f \quad \Rightarrow \quad f(u_1) = \vec{0} = f(u_2) \quad \Rightarrow \quad f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad u_1 + u_2 \in \operatorname{Nuc} f$.

2. $u \in \operatorname{Nuc} f,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(u) = \vec{0},\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(\lambda u) = \lambda f(u) = \vec{0}.\square$

Si A és la matriu de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en les bases $(u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ i $(v_1, \ldots, v_m)$ de $\mathbb{R}^m$, el nucli de f és el conjunt de vectors les coordenades dels quals, en la base $(u_1, \ldots, u_n)$, són les solucions del sistema homogeni d'equacions lineals $Ax = 0$.

Exemple 7.3.8. Considerem l'aplicació $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f((x,y,z)) = (3x+z,\ 2x+y,\ x+2y-z) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

El nucli està format pels vectors $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que són solució del sistema d'equacions

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+z & = & 0 \\ 2x+y & = & 0 \\ x+2y-z & = & 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = -2x \\ z = -3x \end{array} \right. .$$

És a dir,

$$\operatorname{Nuc} f = \{\, (x, -2x, -3x) \mid x \in \mathbb{R}\,\} = \langle (1,-2,-3) \rangle.$$

Observem que, en aquest exemple, $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(A) = 2$ i $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Nuc} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

L'observació que hem fet al final de l'exemple anterior és general: si A és la matriu d'una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} A, \qquad \dim \operatorname{Nuc} f = \dim\{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = 0\,\} = n - \operatorname{rg} A$$

fet que demostra el resultat següent.

Proposició 7.3.9. *Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal. Aleshores,*

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Nuc} f = n. \square$$

7.4. Monomorfismes, epimorfismes i isomorfismes

Definició 7.4.1. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal. Direm que f és un *monomorfisme* si és injectiva; és a dir,

$$f(u) = f(w) \quad \Rightarrow \quad u = w \quad \forall u, w.$$

Direm que f és un *epimorfisme* si és exhaustiva; és a dir,

$$\forall\ v \in \mathbb{R}^m, \quad \exists\, u \in \mathbb{R}^n, \quad \text{tal que} \ \ f(u) = v.$$

Direm que f és un *isomorfisme* si és bijectiva, és a dir, si és injectiva i exhaustiva.

Anomenem *endomorfisme* una aplicació lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, i *automorfisme* un endomorfisme bijectiu.

Per la mateixa definició, f és epimorfisme si, i només si, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^m$. En aquest cas, la proposició (7.3.9.) ens diu que $m \leq n$.

Proposició 7.4.2. *Una aplicació lineal f és monomorfisme si, i només si,* $\operatorname{Nuc} f = \{\vec{0}\}$.

Demostració. Observem que

$$f(u) = f(w) \quad \Leftrightarrow \quad f(u - w) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad u - w \in \operatorname{Nuc} f.$$

Per tant, el fet que existeixin vectors diferents amb la mateixa imatge equival al fet que en el nucli hi hagi vectors diferents de $\vec{0}$.$\square$

• Si una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és monomorfisme, la proposició (7.3.9.) ens diu que $n \leq m$.

• Si una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és isomorfisme, llavors $n = m$.

7.5. Composició d'aplicacions lineals

Proposició 7.5.1. *Si les aplicacions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ són lineals, la composició,*

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^s, \quad \textit{definida per} \quad (g \circ f)(u) = g\left(f(u)\right),$$

és lineal. A més a més, si A i B són les matrius de f i g, respectivament, en les bases $(u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$, $(v_1, \ldots, v_m)$ de $\mathbb{R}^m$ i $(w_1, \ldots w_s)$ de $\mathbb{R}^s$, aleshores BA és la matriu de $g \circ f$ en les bases $(u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ i $(w_1, \ldots w_s)$ de $\mathbb{R}^s$.

Demostració. Siguin $u = (\lambda^1, \ldots, \lambda^n)$ les coordenades d'un vector de $\mathbb{R}^n$ en la base $(u_1, \ldots, u_n)$. Aleshores,

$$A \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{pmatrix}$$ són les coordenades de $f(u)$ en la base $(v_1, \ldots, v_m)$ de $\mathbb{R}^m$, i

$$BA \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{pmatrix}$$ són les coordenades de $g(f(u))$ en la base $(w_1, \ldots w_s)$ de $\mathbb{R}^s$.

Així doncs, l'aplicació $g \circ f$ equival a multiplicar les coordenades del vector per la matriu BA. Per tant, $g \circ f$ és lineal i BA és la seva matriu en les bases de l'enunciat. $\square$

Exemple 7.5.2. Considerem les dues aplicacions lineals

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2, \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, y - z) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, 2x, x + 2y). \end{array}$$

La composició és l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & g\left(f(x,y,z)\right) = g(x+y, y-z) \\ & & = (x+y, y-z, 2x+2y, x+3y-2z). \end{array}$$

Les matrius de f i g són

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

respectivament. La matriu de $g \circ f$ és

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfisme i designem per f^{-1} l'*aplicació inversa*, és a dir, l'aplicació que a cada $v \in \mathbb{R}^n$ li fa correspondre l'únic vector u tal que $f(u) = v$. Es compleix

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id_n,$$

on Id_n és l'aplicació identitat, és a dir, l'aplicació que envia cada vector a ell mateix. Observem que f^{-1} és l'única aplicació que compleix aquesta propietat, ja que si g també la complís, $g \circ f = Id_n = f \circ g$, tindríem

$$g = g \circ Id_n = g \circ f \circ f^{-1} = Id_n \circ f^{-1} = f^{-1}.$$

D'altra banda, si A és la matriu de f en unes certes bases, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f = n$ i, per tant, A és invertible. Sigui g l'aplicació lineal amb matriu A^{-1} en les bases indicades:

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \\ (u_i) & & (v_i) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A^{-1}} & \mathbb{R}^n \\ (v_i) & & (u_i) \end{array}$$

les composicions

$$\begin{array}{ccc} g \circ f : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (u_i) & & (u_i) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f \circ g : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (v_i) & & (v_i) \end{array}$$

tenen matriu $A^{-1}A = I_n$ i $AA^{-1} = I_n$ i, per tant, són la identitat. Això significa que g és la inversa de f. Hem demostrat el resultat següent.

Proposició 7.5.3. *L'aplicació inversa d'un isomorfisme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és un isomorfisme. Si A és la matriu de f agafant la base $(u_1, \ldots, u_n)$ a l'espai de sortida i la base $(v_1, \ldots, v_n)$ a l'espai d'arribada, la matriu de l'isomorfisme invers és A^{-1} si agafem la base $(v_1, \ldots, v_n)$ a l'espai de sortida i la base $(u_1, \ldots, u_n)$ a l'espai d'arribada.* $\square$

Exemple 7.5.4. L'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donada per

$$f(x, y, z) = (x - 2y - z,\ -3y + z, 2x + z)$$

és una aplicació lineal amb matriu A invertible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per tant, f és un isomorfisme i la aplicació inversa és l'aplicació lineal amb matriu A^{-1}.

7.6. Canvi de bases

Volem ara estudiar com canvia la matriu d'una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en canviar les bases.

Sigui A la matriu de f en les bases $\mathcal{B}_u = (u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ i $\mathcal{B}_v = (v_1, \ldots, v_m)$ de $\mathbb{R}^m$. Sigui B la matriu de f en les bases $\mathcal{B}_{\tilde{u}} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ i $\mathcal{B}_{\tilde{v}} = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_m)$ de $\mathbb{R}^m$.

Evidentment necessitem conèixer la relació entre les diferentes bases. Sigui

$$\tilde{u}_i = p_i^1 u_1 + \cdots + p_i^n u_n,\ \forall\ i = 1, \ldots, n,$$

$$\tilde{v}_j = q_j^1 v_1 + \cdots + q_j^m v_m,\ \forall\ j = 1, \ldots, m$$

i siguin P i Q les matrius que tenen per columnes aquestes coordenades, és a dir, les matrius dels canvis de base.

Una manera còmoda de deduir una relació entre aquestes matrius és aprofitar el que sabem sobre la composició d'aplicacions lineals. Concretament, considerem la composició $f = Id_m \circ f \circ Id_n$:

$$\begin{array}{ccccccc} f : \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Id_n} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{Id_m} & \mathbb{R}^m \\ (\tilde{u}_i) & & (u_i) & & (v_j) & & (\tilde{v}_j). \end{array}$$

En les bases especificades, la matriu de Id_n és P, i la matriu de Id_m és Q^{-1}. Per tant,

$$B = Q^{-1}AP$$

és la matriu de f en les bases $(\tilde{u}_i)$ i $(\tilde{v}_j)$. I aquesta és precisament l'expressió que ja havíem deduït en la primera secció d'aquest capítol.

Exemple 7.6.1. Considerem l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y, z) = (3x - y + 2z,\, x + y - 3z) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

on els vectors estan expressats en les bases canòniques $\mathcal{B}_e$ i $\mathcal{B}_{e'}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$, respectivament. Tot seguit trobarem la matriu de f en les bases

$$\begin{array}{l} \mathcal{B}_w = \{\, w_1 = (1,1,0),\ w_2 = (0,1,1),\ w_3 = (1,11,4)\,\} \quad \text{de } \mathbb{R}^3 \text{ i} \\ \mathcal{B}_{w'} = \{\, w'_1 = (1,1),\ w'_2 = (1,-2)\,\} \quad \text{de } \mathbb{R}^2. \end{array}$$

La matriu de la identitat $Id_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en les bases $\mathcal{B}_w$ i $\mathcal{B}_e$, és a dir, la matriu del canvi de la base $\mathcal{B}_w$ a la base $\mathcal{B}_e$ és: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

La matriu de la identitat $Id_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en les bases $\mathcal{B}_{w'}$ i $\mathcal{B}_{e'}$, és a dir, la matriu del canvi de la base $\mathcal{B}_{w'}$ a la base $\mathcal{B}_{e'}$ és: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

La matriu de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ en les bases $\mathcal{B}_w$ i $\mathcal{B}_{w'}$, és:

$$Q^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particular, tenim $f(w_1) = 2w_1'$, $f(w_2) = w_2'$, $f(w_3) = \vec{0}$. Evidentment, aquestes igualtats són vàlides en les coordenades inicials:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7.7. Aplicacions lineals i sistemes d'equacions

Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal i A la seva matriu en unes certes bases. Existeix una estreta relació entre l'estudi de f i l'estudi dels sistemes d'equacions lineals amb matriu A. Són dos punts de vista de les mateixes qüestions.

• Buscar $\mathrm{Nuc}\, f$ equival a resoldre el sistema homogeni $Ax = 0$.

• Buscar els vectors la imatge dels quals és un vector $b \in \mathbb{R}^m$ equival a buscar l'anti-imatge de b per f; equivalentment a resoldre el sistema $Ax = b$.

• Si $u \in \mathbb{R}^n$ s'aplica en b, $f(u) = b$, el conjunt de vectors la imatge dels quals és b s'obté sumant a u els vectors de $\mathrm{Nuc}\, f$.

• El sistema $Ax = b$ és compatible si, i només si, $b \in \mathrm{Im}\, f$. Com que la imatge de f està generada pels vectors columna de A, això equival al fet que b sigui combinació lineal d'aquestes columnes, és a dir, que $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(A|b)$.

• Mirem què passa si es canvia la base de l'espai $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{array}{ccccc} f : \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{Q} & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & Ax = b & \mapsto & QAx = Qb \end{array}.$$

Q és la matriu del canvi de base, en particular, és invertible i, per tant, és producte de matrius elementals. El pas del sistema $Ax = b$ al sistema $QAx = Qb$ és equivalent al mètode de Gauss-Jordan de resolució d'un sistema d'equacions lineals.

• Mirem què passa si es canvia la base de l'espai $\mathbb{R}^n$

$$f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{P} \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m.$$

P és la matriu del canvi de base, és invertible i, per tant, producte de matrius elementals. Les columnes de AP generen la imatge de f, igual que les columnes de A. Passar de A a AP equival a fer en A transformacions elementals per columnes, i podem fer-les de forma que AP sigui una matriu escalonada amb un cert nombre d'elles linealment independents i la resta de columnes de zeros. Les columnes no nul·les formen una base de $\operatorname{Im} f$.

Exemple 7.7.1. Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ amb matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

en un certa base. La reducció per columnes:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{C_3+3C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{2}C_1 \\ C_3 - \frac{7}{2}C_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ens diu que $\operatorname{Im} f = \langle\, (0,1,1),\ (-1,0,2)\,\rangle$.

7.8. *Mathematica*: Aplicacions lineals

Per estudiar bases del nucli i de la imatge d'una aplicació es fan servir les comandes NullSpace i RowReduce.

Exemple 7.8.1. Sigui $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ una aplicació lineal amb matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & -9 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un cop introduïda la matriu A fem:

In[-]:=	NullSpace[A]
Out[-]=	$\{\{23, 5, -10, 0, 4\}, \{2, 0, -1, 1, 0\}\}$
In[-]:=	RowReduce[Transpose[A]]
Out[-]=	$\{\{1, 0, 0, 1\}, \{0, 1, 0, -3\}, \{0, 0, 1, 2\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\}$

Per tant,

$$\text{Nuc}\, f =< (23, 5, -10, 0, 4), (2, 0, -1, 1, 0) >$$

$$\text{Im}\, f =< (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -3), (0, 0, 1, 2) >$$

7.9. Exercicis i problemes

7.9.1. Determineu quines de les següents aplicacions de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ són lineals:

$$\begin{array}{ll} (x, y, z) \mapsto x - 2y + z & \qquad (x, y, z) \mapsto 2x^2 - y \\ (x, y, z) \mapsto x - y + 1 & \qquad (x, y, z) \mapsto xyz \end{array}$$

7.9.2. Demostreu que l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donada per:

$$f(x, y, z) = (2x - y, x - y + z, x - z)$$

és lineal, escriviu la seva matriu en les bases usuals de $\mathbb{R}^3$ i trobeu bases del nucli i de la imatge.

7.9.3. Sigui (e_1, e_2, e_3) una base de $\mathbb{R}^3$ i considerem els vectors:

$$u_1 = e_1, \;\; u_2 = e_1 - e_2, \; u_3 = e_1 - e_3.$$

(i) Demostreu que els vectors u_1, u_2, u_3 formen una base de $\mathbb{R}^3$ i poseu com a combinació d'aquesta base els vectors:

$$w_1 = 6e_1 - 2e_2 - 3e_3, \quad w_2 = 3e_1 - e_2 - e_3, \quad w_3 = 2e_1 - e_2.$$

(ii) Sigui f l'endomorfisme que en la base (e_1, e_2, e_3) té per matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculeu les coordenades de $f(w_1)$, $f(w_2)$ i $f(w_3)$ en la base (e_1, e_2, e_3).

(iii) Determineu la matriu de f en la base (u_1, u_2, u_3) i calculeu les imatges dels vectors $f(w_1), f(w_2), f(w_3)$ en aquesta base.

7.9.4. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f(x,y,z) = ((3-m)x + 2y - mz, 2x + 2my - z, (m-1)x + 2(m-1)y + (1-m)z).$$

Determineu el rang de f i bases de $\operatorname{Nuc} f$ i $\operatorname{Im} f$ segons els valors de m.

7.9.5. Considerem l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que té per matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comproveu que $((1,0,0),\ (1,1,0),\ (2,0,1))$ i $((3,1),\ (2,0))$ són bases de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ respectivament, i trobeu la matriu de f en aquestes bases.

7.9.6. Sigui (v_1, v_2, v_3) una base de $\mathbb{R}^3$ i sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfisme tal que

$$\operatorname{Nuc} f =< v_1 + v_2 >, \quad f(v_3) = v_1 \quad \text{i} \quad f(v_1) = v_1 + v_2.$$

(i) Trobeu la matriu de f en la base (v_1, v_2, v_3).

(ii) Calculeu $f(4v_1 - v_2 + 2v_3)$

(iii) Estudieu el nucli i la imatge de f, f^2 i f^3.

7.9.7. Sigui v_1, v_2, v_3, v_4 una base de $\mathbb{R}^4$. De l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sabem que

$$\operatorname{Nuc} f =< v_1 - v_2 + 2v_3 + v_4,\ v_2 - v_3 + 3v_4 >,$$

$$f(v_3) = 2v_1 - v_2 + 5v_3 - v_4, \quad f(v_4) = -v_2 - v_3 + 3v_4.$$

(i) Trobeu la matriu de f en la base donada i una base de $\operatorname{Im} f$.

(ii) Calculeu $\operatorname{Nuc} f \cap \operatorname{Im} f$ i esbrineu si $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Nuc} f \oplus \operatorname{Im} f$.

7.9.8. Sigui $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal amb matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & a & 0 \\ -1 & b & 1 \end{pmatrix}$. Determineu $\operatorname{Nuc} f$ i $\operatorname{Im} f$, segons els valors dels paràmetres a i b. Demostreu que, per a qualsevol valor dels paràmetres a i b, $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Nuc} f \oplus \operatorname{Im} f$.

7.9.9. Considerem les aplicacions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definides per

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 0) \qquad g : (x, y) \mapsto (x, x + y, x - y).$$

(i) Trobeu les matrius de f, g i de les composicions gf i fg.

(ii) Comproveu que $\operatorname{Nuc} f \subset \operatorname{Nuc} gf$ i que $\operatorname{Im} gf \subset \operatorname{Im} g$. Són estrictes aquestes inclusions?

7.9.10. Doneu exemples d'aplicacions lineals $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que compleixin cadascuna de les condicions següents (si n'existeixen):

(i) $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Nuc} f$

(ii) $\operatorname{Nuc} f \subset \operatorname{Im} f$

(iii) $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Im} f$

(iv) $\operatorname{Nuc} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$

7.9.11. Sigui $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ una aplicació lineal. Demostreu que

$$\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Im} f \quad \Longleftrightarrow \quad f^2 = 0, \;\text{ i }\; \operatorname{rg} f = n.$$

7.9.12. Demostreu que existeix una única aplicació lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(1, 1, 0) = (2, -1, 3, 2)$, $f(1, 0, 1) = (1, 1, 0, 1)$ i $f(0, 1, 1) = (1, 0, 1, 1)$. Doneu la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$. Trobeu bases i calculeu la dimensió de $\operatorname{Nuc}(f)$ i de $\operatorname{Im}(f)$.

7.9.13:

(i) Siguin $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ aplicacions lineals. Demostreu que

$$\dim \operatorname{Nuc} gf = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim(\operatorname{Nuc} g \cap \operatorname{Im} f).$$

(ii) Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicació lineal. Demostreu que, per a tot enter positiu r,

$$\dim \operatorname{Nuc} f \le \dim \operatorname{Nuc} f^r \le r \dim \operatorname{Nuc} f.$$

7.9.14. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicació lineal. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que siguin falses.

(i) $\operatorname{Nuc} f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$.

(ii) $\dim(\operatorname{Nuc} f \cap \operatorname{Im} f) \leq \frac{n}{2}$.

(iii) $\dim(\operatorname{Nuc} f \cap \operatorname{Im} f) = n - \dim(\operatorname{Nuc} f + \operatorname{Im} f)$.

7.9.15. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicació lineal. Demostreu que

$$\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nuc} f^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{R}^n = \operatorname{Nuc} f \oplus \operatorname{Im} f \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2.$$

7.9.16. Sigui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriu quadrada d'ordre n. Demostreu que les afirmacions següents són equivalents:

(i) A és nilpotent; és decir, $A^k = 0$ per cert enter k.

(ii) $A^n = 0$.

(iii) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^2) = \cdots = \operatorname{tr}(A^n) = 0$.

7.9.17. Siguin $a, b \in \mathbb{R}$, $u = (1-a, a, 1-a) \in \mathbb{R}^3$ i f un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ donat per

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, 2x + 2z, bx + y + 3z).$$

(i) Trobeu la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Doneu bases del Nucli de f i de la Imatge de f.

(ii) Determineu els valors de a i b per tal que $\operatorname{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ i $u \in \operatorname{Im}(f)$.

(iii) Trobeu una base d'un subespai vectorial $H \neq \mathbb{R}^3$ tal que $f(H) = \operatorname{Im}(f)$.

7.10. Activitats d'autoavaluació

7.10.1. Esbrineu quines de les següents afirmacions són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. Tota aplicació lineal $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és injectiva.
2. Tota aplicació lineal $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és exhaustiva.
3. Si la composició de dues aplicacions lineals és un isomorfisme, almenys una d'elles ho és.
4. Tota aplicació lineal no nul·la $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és injectiva.
5. Tota aplicació lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ transforma vectors linealment independents en vectors linealment independents.
6. Tota aplicació lineal injectiva $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ transforma vectors linealment independents en vectors linealment independents.

7.10.2. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. Donades dues matrius $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, es compleix que $\mathrm{rg}(AB) = \max(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$.
2. Donades dues matrius $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, es compleix que $\mathrm{rg}(AB) = \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$.
3. Donades dues matrius $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, si $\mathrm{rg}(AB) = 0$, aleshores $\mathrm{rg}(A) = 0$ o $\mathrm{rg}(B) = 0$.
4. Donada una matriu quadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$, aleshores $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^k)$ per a tot enter positiu k.

7.10.3. Demostreu:

1. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ és una aplicació lineal tal que $f^m = 0$ per a cert enter $m \geq 1$, aleshores $\dim \mathrm{Nuc}(f) \geq 1$.

2. Si $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ és una aplicació lineal tal que $f^2 = -Id_6$, aleshores $\mathrm{Nuc}(f) = \vec{0}$.

3. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és una aplicació lineal tal que $f^2 = -Id_n$, aleshores n ha de ser parell.

4. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicació lineal; sigui A la matriu associada a f agafant la base $(u_1, ..., u_n)$ tant a l'espai de sortida com al d'arribada; i sigui B la matriu associada a f agafant la base $(v_1, ..., v_n)$ tant a l'espai de sortida com al d'arribada. Aleshores, $\det(A) = \det(B)$.

7.10.4. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin.

1. L'aplicació identitat de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ té com a matriu associada sempre la matriu identitat.

2. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicació lineal i $(e_1, \dots, e_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$, aleshores $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ és una base de $\mathbb{R}^n$.

3. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal i $(e_1, \dots, e_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$, aleshores $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ generen $\mathbb{R}^m$.

4. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal exhaustiva i $(e_1, \dots, e_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$, aleshores $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ és una base de $\mathbb{R}^m$.

7.10.5. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal i $(e_1, \dots, e_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(e_1), \dots, f(e_n)$ és una base de $\mathbb{R}^m$. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. f és un epimorfisme, però no necessàriament un monomorfisme.

2. f és un isomorfisme.

3. f és un monomorfisme, però no necessàriament un epimorfisme.

7.10.6. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal i $(e_1, \dots, e_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(e_1), \dots, f(e_n)$ són linealment independents. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. f és un epimorfisme, però no necessàriament un monomorfisme.
2. f és un monomorfisme, però no necessàriament un epimorfisme.
3. f és un isomorfisme.

7.10.7. Siguin $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dues aplicacions lineals tals que $f \circ g = Id_m$. Esbrineu quines de les afirmacions següents són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que no ho siguin:

1. f és un monomorfisme i g és un epimorfisme.
2. f i g són epimorfismes.
3. g és un monomorfisme i f és un epimorfisme.
4. f i g són monomorfismes.
5. $n < m$.
6. $n = m$.
7. $n > m$.

Apèndix A

Introducció al *Mathematica*

El *Mathematica* és un programa informàtic per fer matemàtiques. Té moltes possibilitats però nosaltres el farem servir només per fer càlculs numèrics i simbòlics amb vectors i matrius. En aquest apèndix fem una introducció general al programa; a cada un dels capítols hi ha les comandes específiques de la matèria del capítol.

A.1. Els documents notebook

Engegueu l'ordinador i col·loqueu el ratolí sobre la icona del *Mathematica*. Feu doble clic. Dalt de tot apareix el nom del programa, el document actiu en cada moment i la barra amb els menús. A sota hi ha el document amb què treballarem. Rep el nom de *notebook*. Ara està en blanc i, com que encara no l'hem salvat, posa: Untitled-1*.

Cliqueu en la barra de menús Windows / Show Toolbar perquè aparegui aquesta barra.

Tot el contingut d'un notebook està distribuït en *cel·les* de diferents tipus, marcades amb unes línies blaves a la dreta. El tipus de cel·la és la primera informació que ens dóna la barra superior i, per defecte és una cel·la Input. Aquestes són les cel·les on s'escriuen les operacions que volem que faci el programa i les que apareixen automàticament quan comencem a escriure si no ens hem colocat abans dins una altra cel·la.

Escriviu, per exemple, 2+2, i demaneu al *Mathematica* que executi l'operació.

Perquè el *Mathematica* executi una comanda heu de prémer, simultàniament, Majúscules+Enter, o bé l'Intro del teclat numèric.

Observeu les cel·les que s'han creat. La cel·la en què hem escrit és una cel·la Input i el *Mathematica* ha escrit In[1]:= davant la nostra comanda. La cel·la en què el *Mathematica* escriu el resultat és una cel·la Output i el *Mathematica* escriu Out[1]= davant del resultat. Les dues cel·les són dins d'una tercera cel·la, marcada amb una altra línia blava a la dreta. En general, una cel·la en pot contenir moltes altres formant *grups* de cel·les. Observeu les diferències entre les línies blaves que les marquen.

Per crear una nova cel·la, situeu el cursor just a sota d'alguna cel·la ja creada; veureu que apareix una línia horitzontal i el cursor pren la forma d'un segment horitzontal parpellejant. Premeu Enter o comenceu a escriure i es crearà una nova cel·la.

Per esborrar una cel·la, seleccioneu-la fent clic amb el ratolí a la seva línia blava de la dreta. A continuació, premeu la tecla Supr (Delete).

Les parelles de cel·les Input-Output queden numerades per l'ordre en què s'executen. Si tornem amb el cursor a una cel·la Input i en modifiquem el contingut, aleshores el prefix In[k]:= desapareix. Si la tornem a executar, ella i la corresponent cel·la Output prenen el nombre següent a l'últim executat (que pot estar en el notebook molt més avall).

En el nostre document volem que no només hi hagi una llista d'ordres donades al programa i els seus resultats, sinó també incloure-hi explicacions i distribuir-lo en seccions i apartats. Per això escollim a la barra superior altres tipus de cel·les: Title, Section, Text, etc. En cada cas es formaran els corresponents grups de cel·les que contindran en el seu interior les que anem creant. Podem canviar la mida de la lletra, la font, el color etc. amb el menú Format. El menú Palettes permet augmentar les opcions del teclat.

Podem ocultar un grup de cel·les fent un doble clic sobre la seva línia blava de la dreta. D'aquesta forma veurem només la primera cel·la del grup. Per tornar-lo a obrir, només cal fer doble clic sobre la seva línia blava.

Per guardar un *notebook* cliqueu la corresponent icona de la barra superior o el menú File / Save As. Quedarà guardat on escolliu amb el sufix .nb. És convenient salvar el fitxer de tant en tant durant la sessió de treball perquè un accident no ens faci perdre tot el que hem fet fins en aquest moment.

A l'hora d'imprimir el document podem escollir que s'imprimeixen o no les ratlles de la dreta que indiquen les cel·les, i els prefixos In[n]:=, Out[n]:=, a File/ PrintingSettings/PrintingOptions.

A.2. Nombres i operacions aritmètiques

El *Mathematica* treballa amb quatre tipus de nombres: enters, racionals, reals i complexos. La unitat complexa s'escriu I.

Les operacions aritmètiques entre números s'indiquen per:

a+b	suma	a-b	resta
a*b ó `a␣b`	producte	a/b	divisió
a^b	potència	Sqrt[a]	arrel quadrada

El signe ␣ indica que s'ha de deixar un espai.

El *Mathematica* interpreta tots els nombres com a exactes, llevat dels decimals que els interpreta com a aproximació d'un real. La part entera i la part decimal d'un nombre estan separades per un punt (no per una coma). Un enter seguit d'un punt és interpretat com a decimal. Amb dades exactes, el *Mathematica* produeix resultats exactes; amb dades decimals, resultats aproximats.

Exemple A.2.1. Executeu les operacions següents:

3/4	3./4	3/4 + 5/4	2/4 + 3/5	(1+3 I)/(2 - I)	(1.+3 I)/(2 - I)
1.3^2	(13/10)^2	10^1.2	10^(6/5)	Sqrt[2]	Sqrt[2.]

Podem fem servir parèntesis per fixar l'ordre en què volem efectuar les operacions. El *Mathematica* té un ordre per defecte que podeu observar fent, per exemple,

2 + 6 / 3 + 3^2   (2+6)/3+3^2   (2+6/3+3)^2   …

Les comandes següents són útils per operar amb complexos:

Re[z]	part real de z
Im[z]	part imaginària de z
Conjugate[z]	conjugat de z
Abs[z]	mòdul de z
Arg[z]	argument de z
ComplexExpand[*expr*]	desenvolupa *expr*

Exemple A.2.2. Calculeu el nombre complex

$$\frac{(1-i)^{13}(2+2i)}{(\sqrt{3}-i)^6}.$$

Observeu el resultat obtingut. Apliqueu-li ComplexExpand:

ComplexExpand[(1 - I)ˆ13*(2 + 2*I)/ (Sqrt[3] - I)ˆ6)]

Pi	π;	E	e;	Degree	$\pi/180$

Exemple A.2.3. Executeu: Pi; 2*Pi; 2.*Pi, i observeu les diferències.

Per obtenir un valor aproximat d'una expressió *expr* cal escriure

expr //N o N[*expr*]	amb la precisió per defecte
N[*expr*, n]	amb una precisió de n dígits

Exemple A.2.4. Executeu les comandes següents:

`2^100`	1/3 + 2/7	462/62	N[Pi]
`2^100` //N	1/3 + 2/7 //N	462/62 //N	N[Pi,40]
20 Degree	20 Degree //N	N[462/62, 20]	N[Sqrt[2]]

A.3. Utilització de resultats anteriors

%	últim resultat generat
%%	penúltim resultat generat
%%...% (k vegades)	k-èsim resultat generat prèviament
%n	resultat en Out[n]

Exemple A.3.1. Executeu successivament:

7ˆ2 ; % + 1 ; 3 % + %ˆ2 + %% ; %2 + %3 .

A.4. Variables

Una variable és un *nom* que s'assigna a un valor (númeric o simbòlic); aquest *nom* pot tenir una o diverses lletres i/o nombres. S'introdueix amb el signe igual:

In[1]:=	x=4	In[2]:=	pi=N[Pi,10]
Out[1]=	4	Out[2]=	3.141592654

A partir de la seva introducció, sempre que escrivim x, el *Mathematica* llegirà 4 i sempre que escrivim pi el *Mathematica* entendrà la seva aproximació de 10 dígits. Si assignem a x un nou valor (per exemple, $x = 4.6$), l'antic quedarà oblidat. Si volem eliminar una variable x hem de posar:

Clear[x]

També podem assignar a una variable una *llista* de valors. Qualsevol operació que s'aplica a una llista, el *Mathematica* l'executa amb cadascun dels valors de la llista.

In[1]:=	a={3, Sqrt[5], 3.01, 1 + 3 I}
Out[1]=	$\{3, \sqrt{5}, 3.01, 1 + 3i\}$
In[2]:=	a^2 + 1
Out[2]=	{10, 6, 10.0601, -7+6 I }

Important. Els noms de funcions o unitats pròpies del *Mathematica* estan protegits i, si intentem fer-los servir, obtindrem un missatge d'advertència. Entre ells, les lletres C i D. Donat que totes les funcions del *Mathematica* comencen per majúscula, convé que tots els noms de variables o funcions que definim comencin per minúscula.

A.5. Algunes funcions del *Mathematica*

Sqrt[x]	$\sqrt{x}$	Exp[x]	e^x	n!	$n!$
Sin[x]	$\sin x$	Cos[x]	$\cos x$	Tan[x]	$\tan x$

Important. En funcions amb diferents valors, com ara Sqrt, ArcSin, ...etc., el *Mathematica* dóna només *un* valor. Per exemple, a la comanda Sqrt[4] el *Mathematica* respon 2, encara que -2 també és una arrel quadrada de 2.

Es pot demanar al *Mathematica* informació sobre una funció escrivint el nom de la funció i clicant F1 (s'obre una pantalla d'ajuda). També és possible obtenir informació sobre una funció o sobre un grup de funcions de la manera següent:

?*Nom*	informació sobre la funció *Nom*
??*Nom*	més informació sobre *Nom*
?Aaaa*	informació sobre les funcions que comencen per Aaaa
?*aaa	informació sobre les que acaben en aaa

Exemple A.5.1. Demaneu informació sobre:
Factor*, GCD, LCM, Mod, Divisors, Quotient, PrimeQ.

A.6. Avaluació

El *Mathematica* treballa també amb expressions algebraiques. En particular, pot avaluar una expressió *expr* substituint un dels símbols de *expr* per un cert *valor*. Procedirem de la manera següent:

expr /. x $->$ *val*	sustitueix x per *val* a *expr*
expr /.$\{x->\mathit{xval}, y->\mathit{yval}\}$	sustitueix x per *xval* i y per *yval* a *expr*

Exemple A.6.1. Suposem que volem avaluar l'expressió $x^3-6x^2+11x-6$ per diferents valors de x. El que resulta més còmode és assignar una variable a aquest polinomi:

In[1]:=	p=x^3 - 6 x^2 + 11 x - 6
Out[1]=	$-6+11x-6x^2+x^3$
In[2]:=	p /. x $->$ 0.5
Out[2]=	-1.875

A.7. Càlcul simbòlic

Les transformacions de les expressions algebraiques es fan amb les comandes següents:

Expand[*expr*]	multiplica productes i potències
ExpandAll[*expr*]	aplica Expand a tot arreu
Factor[*expr*]	redueix a producte de factors
Together[*expr*]	escriu com una única fracció
Apart[*expr*]	separa amb termes amb denominadors simples
Cancel[*expr*]	elimina factors comuns de numerador i denominador
Simplify[*expr*]	intenta escriure *expr* de la forma més curta
Collect[*expr*, x]	agrupa per potències de x

Exemple A.7.1. Apliqueu aquestes funcions a les expressions algebraiques

$$(x^3 - 2x)(x^2 + x + 2) + (-x^3 + x + 2), \qquad x(x-1)(x^2 + x + 1) + x(x+1) + 1,$$
$$\frac{(-1+x)^2(2+x)}{(2+x)^2(1+x)}, \qquad \frac{(-1+x)^2(2+x)}{(-3+x)^2(1+x)}$$

Observeu que el *Mathematica* no dóna cap factorització del primer polinomi, però sí que factoritza el segon. Pregunteu-li per què (?Factor).

A.8. Resolució d'equacions

Dues expressions separades per un doble signe igual, *expr1* == *expr2*, representen una equació pel *Mathematica*. La comanda

Solve[*expr1* == *expr2*, x]	troba les solucions per x

Exemple A.8.1. Resoleu les equacions

$$\begin{array}{lll} x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0, & x^2 + 2x - 7 = 0, & x^4 - 5x^2 - 3 = 0, \\ x^5 - 4x + 2 = 0, & x^6 = 1, & \sin x = 1. \end{array}$$

Observeu-ne els resultats. Recordeu que el *Mathematica* sempre dóna resultats exactes, cosa que justifica alguns dels resultats obtinguts. Per tal d'obtenir resultats aproximats, podeu fer servir NSolve o expressar els coeficients com a decimals (afegint-hi un punt). En el cas de l'equació $x^6 = 1$ demaneu l'argument de les solucions (abans haureu de substituir $(-1)^{\frac{1}{2}}$ per I). En el cas de l'última equació, el *Mathematica* us adverteix que possiblement no us està donant totes les solucions.

El *Mathematica* també resol varies equacions, respecte a varies variables.

Solve[{*expr1* == *expr2*, *expr3* == *expr4*,... }, {x_1,x_2,... }]

Exemple A.8.2. Resoleu els següents sistemes d'equacions respecte de les variables x, y:

$$\left\{ \begin{array}{ll} ax + y & = 0 \\ 2x + (1-a)y & = 0 \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{ll} ax + y & = 0 \\ 2x + (3-a)y & = 0 \end{array} \right. ,$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + y & = a \\ ax - y & = 0 \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x^2 + y^2 & = 1 \\ x + 3y & = 0 \end{array} \right. .$$

Observeu que el *Mathematica* considera els paràmetres com si fossin valors generals i no té en compte el comportament de valors particulars.

Bibliografia

ARVESÚ, J.; ÁLVAREZ, R.; MARCELLÁN, F. (1999). *Álgebra lineal y aplicaciones*. Madrid: Síntesis DL.

FLAQUER, J.; OLAIZOLA, J.; OLAIZOLA, J. (2004). *Curso de álgebra lineal*. Pamplona: EUNSA.

GAMBOA, J. M.; RODRÍGUEZ, M.ª B. (2003). *Álgebra matricial*. Madrid: Anaya, Base Universitaria.

MERINO, L. M.; SANTOS, E. (2006). *Álgebra lineal: con métodos elementales*. Madrid: Thomson.

MORENO, J. M. (1990). *Una introducción al álgebra lineal elemental*. 2a ed. Bellaterra: UAB.

Índex analític

TEXTOS DOCENTS

355

Aquest manual correspon a una assignatura pont entre el batxillerat i un curs clàssic d'Àlgebra Lineal. Està pensat per ajudar l'alumne a fer el pas entre la manipulació d'objectes concrets i els objectes i els mètodes que tenen una presentació més abstracta. Així, doncs, en el decurs dels capítols l'alumne adquirirà destresa en l'ús dels conceptes més bàsics de l'Àlgebra Lineal: vectors i matrius.

L'objectiu és fomentar el desenvolupament progressiu de la capacitat de comprensió d'un text matemàtic i el rigor en les demostracions i la resolució de problemes. Cada capítol conté problemes de dificultat variable i una autoavaluació, en la qual es vol fer reflexionar sobre l'abast dels conceptes introduïts i les seves implicacions.

Cal el coneixement d'algun programa informàtic per a la resolució de problemes d'Àlgebra Lineal. Per això en cada capítol s'ha inclòs un apartat dedicat a l'ús del programa Mathematica, amb una sèrie d'exemples resolts. L'obra es clou amb un índex analític que incorpora els conceptes bàsics del programa.

www.publicacions.ub.edu

Amb el suport de

Generalitat de Catalunya
Departament d'Innovació, Universitats i Empresa

Publicacions i Edicions

UNIVERSITAT DE BARCELONA