Resolucions de problemes

Geometria Diferencial de Corbes i Superfícies

Mario Vilar

17 de juny de 2024

Universitat de Barcelona

Índex

I

Corbes

Exercici 1.1. *Sigui* $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *la corba parametritzada definida per* $\alpha(t) = (t^3 - 2t, t^2 - 2)$.

1. *Determineu si els punts* $(-1,-1)$, $(4,2)$ *i* $(1,2)$ *es troben a la seva traça.*
2. *Trobeu els punts d'intersecció de la traça de* α *amb els eixos de coordenades.*
3. *Trobeu una equació de la forma* $f(x,y) = 0$ *tal que el conjunt de les seves solucions sigui la traça d'* α.
4. *Determineu les rectes tangents a* α *que siguin paral·leles a la recta d'equació* $2x + y + 3 = 0$.
5. *Trobeu l'angle que forma la corba* α *amb la recta d'equació* $y = x - 2$ *en els punts de tall.*

Demostració.

1. No té pèrdua. Intentem trobar els valors de t tals que $(-1,-1)$, $(4,2)$ i $(1,2)$ caiguin dins la imatge de la corba (la traça):
$$t^2 - 2 = -1 \implies t = \pm 1 \text{ i } \alpha(1) = (-1,-1).$$
$$t^2 - 2 = 2 \implies t = \pm 2 \text{ i } \alpha(2) = (4,2).$$
$$t^2 - 2 = 2 \implies t = \pm 2,\ \alpha(2) = (4,2) \text{ i } \alpha(-2) = (-4,2).$$
Amb què per un dels dos valors de t ho compleixi en tenim prou. En el cas de $(1,2)$ hem vist que no ho fa cap dels dos, de manera que $(1,2) \notin \mathrm{Im}(\alpha)$.
2. És clar que hem d'estudiar $\mathrm{Im}(\alpha) \cap \{x = 0\}$ i $\mathrm{Im}(\alpha) \cap \{y = 0\}$. Aleshores:
   2.1. Volem trobar per a quins $\alpha(t)$ tenim $x = 0$. És a dir, $\alpha(t) \in \{x = 0\}$. Cal resoldre $t^3 - 2t = 0$ i obtenim $t = 0, t = \pm\sqrt{2}$; així doncs, $\alpha(0) = (0,-2)$, $\alpha(\sqrt{2}) = (0,0)$ i $\alpha(-\sqrt{2}) = (0,0)$.
   2.2. Anàlogament, $\mathrm{Im}(\alpha) \cap \{y = 0\}$ implica que $t = \pm\sqrt{2}$. Pel que acabem de fer, $\mathrm{Im}(\alpha) \cap \{y = 0\} = \{(0,0)\}$.
3. La corba està formada pels punts $(x,y) = (t^3 - 2t, t^2 - 2)$. Per tant, cal trobar t tal que $x = t^3 - 2t$ i $y = t^2 - 2$. Aïllant, $t = \pm\sqrt{y+2}$ i $x = (\pm\sqrt{y+2})^3 \mp 2\sqrt{y+2} = \pm\sqrt{y+2} \cdot y$. Pel que, elevant al quadrat a banda i banda:
$$x^2 = (y+2) \cdot y^2 \implies f(x,y) = x^2 - (y+2)y^2.$$
Vegem que $\mathrm{Im}(\alpha) \subset \{f(x,y) = 0\}$. En efecte:
$$(t^3 - 2t)^2 - t^2(t^2 - 2)^2 = t^6 + 4t^2 - 4t^4 - t^2(t^4 - 4t^2 + 4) = 0.$$
Anàlogament, comprovem que $\mathrm{Im}(\alpha) \supset \{f(x,y) = 0\}$. Prenent $(x,y) = \alpha(t)$, volem veure que per (x,y) tal que $x^2 = y^2(y+2)$, quin és el t.
$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = y + 2 = t^2 \implies t = \pm\sqrt{y+2} \text{ i } \alpha(\pm\sqrt{y+2}) = (x,y),$$
on $x = (\pm\sqrt{y+2})^3 \mp \sqrt{y+2}$. Com que x és $(y+2)\sqrt{y+2} \mp \sqrt{y+2}$ ens queda $x = \pm y\sqrt{y+2}$.

4. Calculem $\alpha'(t) = (3t^2 - 2, 2t)$. El vector director de la recta és $v = (1, -2)$ i imposem que la pendent de x sigui -2, és a dir, $\frac{2t}{3t^2-2} = -2$.

$$2t = -2(3t^2 - 2) \iff 6t^2 + 2t - 4 = 0 \iff \begin{cases} t = -1 & \implies \alpha(-1) = (1, -1) \\ t = \frac{2}{3} & \implies \alpha(\frac{2}{3}) = (-\frac{28}{27}, -\frac{14}{9}). \end{cases}$$ ■

Exercici 1.2 (Càlcul de la longitud d'arc). *Determineu quines de les corbes següents són 1-regulars. Trobeu, per cada corba, la longitud d'arc entre els punts indicats.*

1. $y = \log x$, *entre 1 i x.*
2. $y = a \cosh \frac{x}{a}$, *entre 0 i x (aquesta corba es diu catenària).*
3. $\alpha(t) = (a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t))$, *entre 0 i $\pi/2$.*
4. $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$, *entre 0 i 2π.*
5. $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$, *entre 0 i t.*

Demostració.

4. No té pèrdua. Apliquem la distributiva i obtenim $\alpha(t) = (a \cos t + at \sin t), a \sin t - at \cos t))$ i derivant:

$$\alpha'(t) = (-a \sin t + a \sin t + at \cos t, a \cos t - a \cos t - at \sin t) = (at \cos t, -at \sin t)$$
$$\implies \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = at.$$

Podem calcular també la longitud:

$$\text{long}(\alpha; 0, x) = \int_0^x at\, dt = \frac{ax^2}{2} \implies \text{long}\left(\alpha; 0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a\pi^2}{8}.$$

L'únic punt singular d'α és $t = 0$.

5. Torna a ser rutinari. Tenim $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$, cal derivar i calcular la longitud:

$$\alpha'(t) = (-3 \sin t \cos^2 t, 3 \cos t \sin^2 t, -2 \sin(2t))$$
$$\text{long}(\alpha; 0, x) = \int_0^x \sqrt{9 \sin^2 t \cos^4 t + 9 \cos^2 \sin^4 t + 4 \sin^2(2t)}\, dt = \int_0^x \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t(9 + 16)}$$
$$= \int_0^x 5 \cdot |\cos t \sin t|\, dt\ .$$

Hem de trobar el valor d'aquesta integral. Per fer-ho dividim l'interval d'integració, per exemple:

$$\text{long}(\alpha; 0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} 5 \cos t \sin t\, dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 5 \cos t \sin t\, dt + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 5 \cos t \sin t\, dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 5 \cos t \sin t\, dt\ .$$

I el resultat d'aquesta integral és 10. La resta d'apartats queden com a exercici. ■

Exercici 1.3 (Canvi de paràmetres). *Demostreu que les corbes parametritzades*

$$\alpha(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta), -\pi < \theta < \pi; \quad \beta(t) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right), -\infty < t < +\infty,$$

tenen la mateixa traça i trobeu la funció de canvi de paràmetre entre θ i t.

Demostració. El canvi és $t = \tan\frac{\theta}{2}$. Això és pot comprovar analíticament fent servir les fórmules del sinus i el cosinus de θ en funció de $t = \tan\frac{\theta}{2}$.

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta\frac{2t}{1+t^2}.$$

Geomètricament es pot veure de la manera següent. Sigui $A = (x, y) = \alpha(\theta)$ un punt de la circumferència de centre $O = (0, 0)$ i radi 1. El triangle amb vèrtexs $A = (x, y)$, O, $B = (-1, 0)$ és isòsceles. Si ω és l'angle $\widehat{ABO}$, aleshores l'angle $\widehat{AOB}$ val $\pi - 2\omega$. Per tant, si $C = (x, 0)$ l'angle $\widehat{COA}$ val $\theta = 2\omega$. Per tant, si $t = \tan\omega = \tan\frac{\theta}{2}$, del triangle rectangle $\triangle ABC$ obtenim $t = \frac{y}{1+x}$,

$$1 = x^2 + y^2 = x^2 + t^2(1+x)^2,$$

i d'aquí l'equació de segon grau en x

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2x + (t^2 - 1) = 0.$$

L'única solució real de la qual és $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Per tant $y = (1+x)t = \frac{2t}{1+t^2}$, i

$$(\cos\theta, \sin\theta) = \alpha(\theta) = (x, y) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right). \qquad \blacksquare$$

Exercici 1.4 (Tractriu)**.** *Sigui $a > 0$ una constant i una corba de paràmetre a que descriu un punt P situat inicialment a les coordenades $(a, 0)$, que és estirat per un altre punt situat inicialment a l'origen de coordenades, que es manté a distància constant a del punt P i que es mou seguint l'eix $0y$. A això ho anomenarem tractriu. Proveu que la tractriu és una corba parametritzada 1-regular a tot arreu llevat d'un punt i trobeu la seva longitud d'arc.*

Demostració. Sigui Q el punt que, sortint de l'origen, es mou seguint l'eix Oy (desplaçant-se cap amunt, per exemple). És útil pensar que hi ha una corda de longitud a que uneix el punt Q amb el punt P i que el punt P és arrossegat pel punt Q estirat per la corda. La corda estarà estirada en tot moment, per tant geomètricament és un segment rectilini de longitud a. Sigui $\alpha : [0, \lambda) \longrightarrow \mathbb{R}$ (per un cert $\lambda > 0$) una corba parametritzada que descriu la trajectòria del punt P (de moment no especifiquem la parametrització, que en tot cas es dedueix de la velocitat —constant o no— a la que es mou el punt Q per l'eix Oy). En tot moment el vector velocitat del punt P és paral·lel al acorda per la qual Q arrossega P. Com que el vector velocitat del punt P és α', tenim la següent condició que caracteritzarà la corba α un cop n'especifiquem la parametrització:

$$\alpha(t) + a \cdot \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \in 0y, \ \forall t \geq 0. \tag{1.1}$$

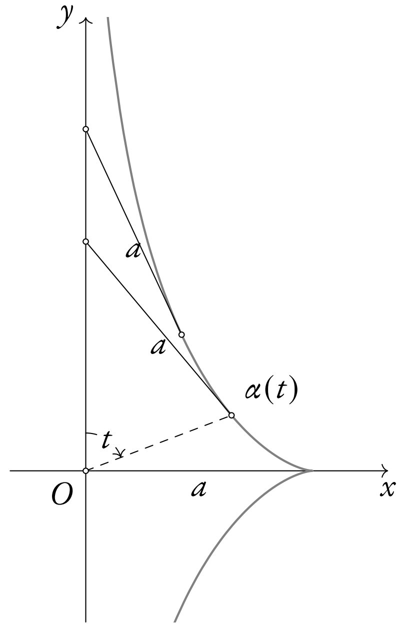

Figura 1: Corba tractiu.

Ens convindrà triar la parametrització d'α respecte a la qual la primera coordenada de α és $a - t$, de tal manera que $\alpha : [0, a) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és de la forma $\alpha(t) = (a - t, f(t))$ per una certa funció $f : [0, a) \longrightarrow \mathbb{R}$, que haurà de satisfer a més que $f(0) = 0$ ja que $\alpha(0) = (a, 0)$, la posició de P al punt inicial. El vector velocitat és $\alpha'(t) = (-1, f'(t))$ de manera que $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$. Ara, (1.1) és equivalent a què la primera coordenada del vector resultant s'anul·li (ja que pertany a Oy) i s'escriu així:

$$a - t - \frac{a}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} = 0.$$

Per simplificar els càlculs suposarem que $a = 1$. De fet, el cas general es pot reduir a aquest aplicant una homotècia de raó a^{-1}, que multiplica les longituds de les corbes per la mateixa raó a^{-1}. Llavors l'equació anterior és equivalent a:

$$\frac{1}{1 - t} = \sqrt{1 + f'(t)^2} \iff f'(t) = \frac{\sqrt{2t - t^2}}{1 - t}.$$

Arribats a aquest punt ja tenim tota la informació necessària per a respondre el problema. La corba α és:

$$\alpha(t) = \left(a - t, \int_0^t \frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x}\, dx\right) \implies \alpha'(t) = \left(-1, \frac{\sqrt{2t - t^2}}{1 - t}\right).$$

És clar que $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ pel que α és 1-regular.

Observació 1.5. Les corbes diferenciables que considerem al curs estan definides en intervals oberts. La corba α, en canvi, està definida a $[0, 1)$. Per tal que el que diem sigui consistent amb el que hem vist al curs cal que eliminem el punt inicial 0 i considerem la restricció de α en $(0, 1)$. Per calcular el paràmetre arc és útil, en canvi, triar com a punt inicial el 0.

Aleshores:

$$\operatorname{long}(0,t;\alpha) = \int_0^t \|\alpha'(t)\|\,dt = \int_0^t \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_0^t \frac{1}{1-x}\,dx = \big[-\log|1-x|\big]_{x=0}^{x=t} = -\log(1-t).$$

Es pot calcular explícitament la integral de la definició fent el canvi $x = 1 - \sqrt{1-y^2}$ tenim $dx = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$ i podem calcular:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\sqrt{2x-x^2}}{1-x}\,dx &= \int_0^{\sqrt{2t-t^2}} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int_0^{\sqrt{2t-t^2}} \frac{y^2}{1-y^2}\,dy \\
&= -\int_0^{\sqrt{2t-t^2}} dy + \int_0^{\sqrt{2t-t^2}} \frac{1}{1-y^2}\,dy \\
&= -\int_0^{\sqrt{2t-t^2}} dy + \int_0^{\sqrt{2t-t^2}} \left(\frac{1}{2(1-y)} + \frac{1}{2(1-y)}\right) dy \\
&= \left[-y - \frac{1}{2}\log(1-y) + \frac{1}{2}\log(1+y)\right]_{y=0}^{y=\sqrt{2t-t^2}} \\
&= -\sqrt{2t-t^2} - \frac{1}{2}\log(1-\sqrt{2t-t^2}) + \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2t-t^2}) \\
&= -\sqrt{2t-t^2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sqrt{2t-t^2}}{1-\sqrt{2t-t^2}}\right).
\end{aligned}$$

En conclusió, la tractriu està parametritzada per la corba següent:

$$\alpha(t) = \left(1-t, -\sqrt{2t-t^2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sqrt{2t-t^2}}{1-\sqrt{2t-t^2}}\right)\right). \qquad \blacksquare$$

Exercici 1.6 (Cicloide). *Un disc de radi a en el pla xy roda uniformement i sense lliscar damunt de l'eix x. La corba que descriu un punt P de la circumferència s'anomena cicloide.*

1. *Proveu que la cicloide es pot parametritzar per $\alpha(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t))$, on t és l'angle que formen CP i CQ, C el centre de la circumferència, Q el punt de contacte de la circumferència amb l'eix Ox i $P = (x,y)$.*
2. *Trobeu els punts singulars de la parametrització α.*
3. *Determineu la funció longitud de l'arc de la cicloide.*

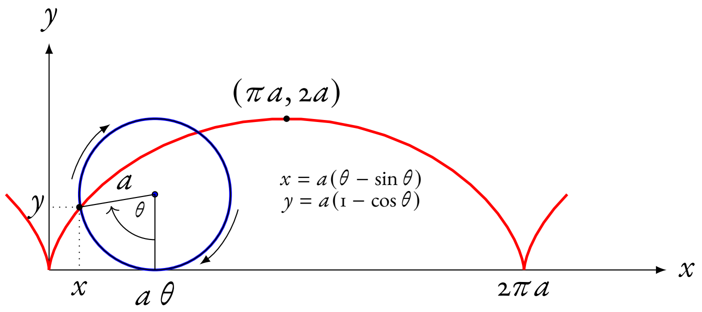

Figura 2: Representació gràfica de la cicloide.

Demostració.

1. La corba s'obté suposant que al temps inicial $t = 0$ el punt P es troba a l'origen de coordenades i suposant que el disc va rodant sense lliscar al llarg de l'eix de les x a velocitat constant igual a a. Aleshores, al temps t el disc és tangent a l'eix de les x al punt $Q = (at, 0)$, de tal manera que $C = (at, a)$. El punt P es troba en el punt de la circumferència que resulta de recórrer la vora del disc (que és una circumferència de radi a centrada a C) t radiants en sentit horari (pel que hem de considerar $(-\sin t, -\cos t)$) començant al punt de tangència. Per tant:

$$P = C + a(-\sin t, -\cos t) = (at, a) + (-a\sin t, -a\cos t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t) = \alpha(t).$$

2. Calculem $\alpha'(t) = a(1 - \cos t, \sin t)$ de manera que $\alpha'(t) = 0$ (és a dir, t és un punt singular de α) si, i només si, $\cos t = 1$ i $\sin t = 0$. Això passa exactament quan t és un múltiple enter de 2π.
3. Usant el càlcul anterior obtenim que:

$$\|\alpha'(t)\| = a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = a\sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t} = a\sqrt{2(1-\cos t)}.$$

Usant les identitats $1 = \cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}$ i $\cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}$ obtenim que $1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$ i per tant:

$$\|\alpha'(t)\| = a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$

Com que $\sin\frac{t}{2} \geq 0$ sempre que $t \in [0, 2\pi]$, podem calcular:

$$\operatorname{long}(\alpha; 0, t) = 2a\int_0^t \sin\frac{u}{2}\,du = \left[-4a\cos\frac{u}{2}\right]_{u=0}^{u=t} = 4a\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right).$$

En particular, $\operatorname{long}(\alpha; 0, 2\pi) = 8a$. D'altra banda, com la funció α' és 2π-periòdica, per a tot enter k se satisfà $\operatorname{long}(\alpha; 0, 2k\pi) = 8ka$. Finalment, si t és un nombre real arbitrari, existeix un enter k tal que $t = 2k\pi + s$, on $s \in [0, 2\pi]$. En aquest cas, podríem calcular:

$$\begin{aligned}\operatorname{long}(\alpha; 0, t) &= \operatorname{long}(\alpha; 0, 2k\pi + s)\\ &= \operatorname{long}(\alpha; 0, 2k\pi) + \operatorname{long}(\alpha; 2k\pi, 2k\pi + s) = 8ka + 4a\left(1 - \cos\frac{s}{2}\right).\end{aligned}$$

I amb això ja hem acabat. ■

Exercici 1.7 (Corba de Viviani). *La intersecció de l'esfera $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$, amb el cilindre $(x-a)^2+y^2 = a^2$ s'anomena corba de Viviani.*

1. *Proveu que:*

$$\alpha(u) = \left(a(1+\cos u), a\sin u, 2a\sin\frac{u}{2}\right), \quad -2\pi \leq u \leq 2\pi.$$

és una parametrització de la corba de Viviani.

2. *Proveu que $(2a, 0, 0)$ és un punt doble amb dues tangents diferents.*

3. *Feu el canvi de paràmetre $t = \tan\frac{u}{4}$ i proveu que la nova parametrització és:*

$$\beta(t) = \left(\frac{2a(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}, \frac{4at(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \frac{4at}{1+t^2}\right).$$

Demostració.

1. És fàcil veure que $\mathrm{Im}(\alpha) \subset V$ amb les equacions. El cercle al pla $\langle x, y\rangle$ i de centre $(a,0,0)$ i radi a és $\beta(t) = (a + a\cos t, a\sin t, z(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Volem que $\beta(t)$ estigui a l'esfera:

$$\begin{aligned} &(a + a\cos t)^2 + a\sin^2 t + z(t)^2 = 4a^2 \\ &\iff z(t)^2 = 4a^2 - a^2 - a^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t - 2a^2\cos t = 2a^2(1-\cos t), \end{aligned}$$

pel que $z(t) = \pm 2a\sin\frac{t}{2}$, $t \in [0, 2\pi]$.

2. Imposem $\alpha(u) = (2a, 0, 0)$; aleshores, la segona coordenada ha de complir $\sin u = 0$ implica que $u \in \{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\}$. Fent el mateix amb la tercera coordenada obtenim $\sin\frac{u}{2} = 0$ i, per tant, $u \in \{-2\pi, 0, 2\pi\}$. En particular, $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (2a, 0, 0)$. Calculem el vector tangent i avaluem en $x = 0, 2\pi$:

$$\alpha'(u) = \left(-a\sin u, a\cos u, -a\cos\frac{u}{2}\right) \implies \begin{cases} \alpha'(0) = (0, a, -a) \\ \alpha'(2\pi) = (0, a, a) \end{cases}$$

pel que les tangents són diferents, com volíem veure.

3. El canvi de paràmetre $t = \tan\frac{u}{4}$ és el mateix que $u = 4\arctan t$, i si $u \in (-2\pi, 2\pi)$, clarament $\frac{u}{4} \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i $t \in \mathbb{R}$. Així doncs, $\beta(t) = \alpha(u(t))$ queda com:

$$(a(1{+}\cos(4\arctan t), a\sin(4\arctan t), 2a\sin(2\arctan t))) \overset{?}{\implies} \beta(t) = \left(\frac{2a(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}, \frac{4at(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \frac{4at}{1+t^2}\right).$$

Volem comprovar aquesta inplicació. Suposem $y = \arctan x$; aleshores, $\tan y = x$ pel que $\tan^2 y = x^2$ i $\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = x^2$. Volem posar el cosinus en termes de l'arctan, pel que:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = x^2 \iff \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y} = x^2 \iff x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 y} &\iff \cos^2 y = \frac{1}{x^2+1} \\ &\iff \cos y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

Pel que, efectivament, $\cos y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Anàlogament, $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Ara podem fer el mateix per als següents:

$$\begin{aligned} \cos(2\arctan x) = \cos^2(\arctan x) - \sin^2(\arctan x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}, &\quad \sin(2\arctan x)\frac{2x}{1+x^2}; \\ \cos(4\arctan x) = \frac{1-6x^2+x^4}{(x^2+1)^2}, &\quad \sin(4\arctan x) = \frac{4x(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Substituint aquests resultats, ja hem acabat. ■

Exercici 1.8. *Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba regular, $\alpha'(t) \neq 0$, per a tot $t \in I$. Suposarem que és parametritzada per l'arc. Proveu que si totes les normals d'α passen per un punt fix, aleshores la corba està continguda en una circumferència.*

Demostració. La recta normal a la corba pel punt $\alpha(t)$ és $r_\lambda(t) = \alpha(t) + \langle \vec{n}(t) \rangle = \alpha(t) + \lambda\vec{n}(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Si totes les normals d'una corba regular passen per un punt (de moment no fa falta que sigui fix) P, llavors existeixen $\lambda_t \in \mathbb{R}$ tals que per a tota normal tenim $r_{\lambda_t}(t) = P$:

$$\alpha(t) + \lambda_t\vec{n}(t) = P \iff \alpha(t) = P - \lambda_t\vec{n}(t), \ \forall t.$$

Com que $\|\vec{n}\| = 1$ per a tot $t \in I$ (hem suposat parametritzada per l'arc), tenim:

$$\|P - \alpha(t)\| = \|\lambda_t\vec{n}(t)\| = |\lambda_t| \implies \lambda_t^2 = \|P - \alpha(t)\|^2 = \langle P - \alpha(t), P - \alpha(t)\rangle.$$

Derivant i usant que $\alpha' \perp \vec{n}$ (és a dir, $\langle \alpha', \vec{n}\rangle = 0$),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\lambda_t^2) &= \langle -\alpha'(t), P - \alpha(t)\rangle + \langle P - \alpha(t), -\alpha'(t)\rangle \\ &= 2\langle -\alpha'(t), P - \alpha(t)\rangle = \langle -\alpha'(t), \lambda_t\vec{n}(t)\rangle = -\lambda_t\langle \alpha'(t), \vec{n}(t)\rangle = 0.\end{aligned}$$

Com $\frac{d}{dt}(\lambda_t^2) = 0$, queda que $\lambda_t^2 = r^2$ per a certa r constant. A més,

$$\vec{t}(t) = \alpha'(t) = (P - r\vec{n}(t))' = -r\vec{n}'(t) \stackrel{F}{=} -r(-k\vec{t}) \implies k = \frac{1}{r}.$$

Ja havíem vist que la parametrització de la circumferència ens donava la mateixa curvatura, de manera que la corba està continguda en una circumferència amb centre P i radi r. En certa manera està relacionat amb l'exercici següent. ■

Exercici 1.9. *Sigui α una corba plana parametritzada per l'arc continguda en un disc D de radi R. Suposem que la corba toca la vora del disc per t_0 (i.e. $\|\alpha(t_0)\| = R$). Proveu que $\|k(t_0)\| \geq \frac{1}{R}$. (Indicació: en el punt t_0 el mòdul $\|\alpha(t)\|$ assoleix un màxim.)*

Demostració. Podem posar α en funció del tangent $\vec{t}$ i el normal: siguin f, g dues funcions diferenciables tals que $\alpha(t) = f(t)\vec{t}(t) + g(t)\vec{n}(t)$, llavors:

$$\vec{t}(t) = \alpha'(t) = (f(t)\cdot\vec{t}(t) + g(t)\cdot\vec{n}(t))' = f'(t)\vec{t}(t) + g'(t)\vec{n}(t) + f(t)\vec{t}'(t) + g(t)\vec{n}'(t).$$

Recordem que estem en el pla, així que per les fórmules de Frenet per a corbes planes, $\vec{t}'(t) = k(t)\vec{n}(t)$ i $\vec{n}'(t) = -k(t)\vec{t}(t)$. La idea és escriure $\vec{t}$ com a combinació lineal de $\vec{t}$ i $\vec{n}$ (aquest segon haurà de ser nul):

$$\vec{t}(t) = (f'(t) - k(t)g(t))\vec{t}(t) + (g'(t) + k(t)f(t))\vec{n}(t) \implies \begin{cases} f'(t) - k(t)g(t) = 1 \\ g'(t) + k(t)f(t) = 0 \end{cases}$$

Pel que $f'(t) = 1 + k(t)g(t)$ i $g'(t) = -k(t)f(t)$. Obtenim el següent:

$$\frac{d}{dt}|\alpha|^2 = 2(f(t) \cdot f'(t) + g(t) \cdot g'(t)) = 2f(t).$$

Si $t = t_0$, $\|\alpha\| = R$ és un màxim i $\|\alpha'\| = 0$, $\|\alpha''\| \leq 0$. Així, tenim $f(t_0) = 0$, $f'(t_0) \leq 0$ i $g(t_0) = R$, pel que:

$$f'(t) = 1 + k(t)g(t) \implies 1 + k(t_0)R \leq 0 \implies \|k(t_0) \cdot R\| \geq 1 \implies \|k(t_0)\| \geq \frac{1}{R}. \quad \blacksquare$$

Exercici 1.10 (El·lipse). *Siguin F_1 i F_2 dos punts diferents del pla, $2c = |F_1F_2|$ la distància entre F_1 i F_2 (distància focal), i $a \in \mathbb{R}$ una constant tal que $a > c$. Denotem*

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \text{ (semieix menor)}, \qquad e = \frac{c}{a} < 1 \text{ (excentricitat)}, \qquad p = \frac{b^2}{a} \text{ (paràmetre focal)}.$$

L'el·lipse amb focus F_1 i F_2 i semieix major a és el lloc geomètric dels punts P del pla tals que

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a.$$

1. *Prenent com a pol F_1 i com a origen d'angles la semirecta amb extrem F_1 i que passa per F_2, proveu que l'equació de l'el·lipse en coordenades polars és*

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 - e\cos\theta}.$$

2. *Prenent ara coordenades cartesianes amb origen el punt mig O de F_1F_2 (centre de l'el·lipse) i amb eix Ox en la direcció OF_2, proveu que l'equació de l'el·lipse pren la forma*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

3. *Proveu que*

$$\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t), 0 \leq t \leq 2\pi,$$

és una corba parametritzada regular la traça de la qual és l'el·lipse anterior (el paràmetre t s'anomena angle d'anomalia excèntrica del punt $P = \alpha(t)$).

Exercici 1.11. *Proveu que si les rectes tangents d'una corba 1-regular són perpendiculars a una direcció fixa, aleshores la corba és plana.*

Demostració. Observem que α no és 2-regular, així que no podem utilitzar que α és plana si, i només si, $\tau = 0$. Un candidat és $\pi : \alpha(0) + \langle v \rangle^\perp$. Aleshores, $\alpha(t) \in \pi$ si, i només si $\alpha(t) - \alpha(0) \perp v$. Per $t = 0$ és trivial, ja que $\langle \alpha(0) - \alpha(0), v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0$. Vegem que $g(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(0), v\rangle$ és constant:

$$g'(t) = \langle \alpha'(t), v\rangle = 0 \implies g \text{ és constant} \implies g \equiv 0. \quad \blacksquare$$

Exercici 1.12. *Proveu que si els plans osculadors d'una corba 2-regular passen per un punt fix, aleshores la corba és plana. Concloeu-ne que la trajectòria d'una partícula que es mou en un camp de fores és plana. Apliqueu aquest resultat a les òrbites dels planetes.*

Demostració. Com α és 2-regular, i suposant que estem parametritzats per l'arc (ho podem fer perquè els plans osculadors no depenen de la parametrització), volem veure que $\tau(t) = 0$ per a tot t. Suposem que el punt fix és el $\vec{0}$. Per contradicció, suposem que $\exists t_0 \mid \tau(t_0) \neq 0$. El pla osculador a $\alpha(t)$ és $\pi_t : \alpha(t) + \langle B(t)\rangle^{\perp}$. Sabem que $\vec{0} \in \pi_t \iff \langle \alpha(t) - \vec{0}, B(t)\rangle = 0$. Ara derivem:

$$\underbrace{\langle \alpha'(t), B(t)\rangle}_{\langle T(t), B(t)\rangle = 0} + \langle \alpha(t), B'(t)\rangle = 0 \iff \langle \alpha(t), -\tau N\rangle = 0.$$

A $t = t_0$ sabem que $\tau(t_0) \neq 0$ i, per tant, $\tau(t_0)\langle \alpha(t), N\rangle = 0$ i $\alpha(t) \perp N$. Per tant, tenim que $\alpha(t)$ és ortogonal tant a $B(t)$ (perquè pertany a $\langle B(t)\rangle^{\perp}$) i a N, pel que en tot punt és múltiple de t i.e. $\alpha(t) = \lambda(t_0) \cdot T(t_0)$. També, per a tot t tenim que $\{T, N, B\}$ és una base ortonormal. Fixem-nos que el conjunt $\{t \mid \tau(t) \neq 0\} \subset I$ és un obert, perquè $\{t \mid \tau(t) = 0\}$ és un tancat, per exemple. Per tant, per definició existeix $\varepsilon > 0$ tal que per a tot $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ tenim $\alpha(t) = \lambda(t) \cdot T(t)$. Ara, $\tilde{\alpha} = \alpha|_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}$ és una corba tal que $\vec{0}$ pertany a tota recta tangent, perquè que $\alpha(t) = \lambda(t) \cdot T(t)$ implica que $\alpha(t) - \lambda(t)\alpha'(t) = 0$. Per l'exercici 23, $\tilde{\alpha}$ està en una recta i $\alpha' \wedge \alpha'' = 0$ per a tot $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.

Pel que fa al segon apartat, vegem que una partícula sotmesa a una *força central*[1] té una trajectòria plana. Si posem que $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és la partícula, per Newton:

$$\alpha''(t) = \frac{1}{M} \cdot F(\alpha(t)) = \frac{1}{M} \cdot g(\alpha(t)) \cdot (\alpha(t) - q) \implies q = \frac{M}{g(\alpha(t))} \cdot \alpha''(t) + \alpha(t).$$

Per tant, $q \in \pi_+$ definit per $\alpha(t) + \langle B(t)\rangle^{\perp} \equiv \alpha(t) + \langle \alpha', \alpha''\rangle$, α és plana. ■

Exercici 1.13. *Demostreu que la traça de la corba parametritzada* $\alpha(t) = (a \sin^2 t, b \cos t \sin t, c \cos^2 t)$, $0 < t < 2\pi$ *es troba en un el·lipsoide. Determineu els punts d'intersecció d'*α *amb l'el·lipse* $\beta(u) = (a \sin u, b \cos u, 0)$, $0 < u < 2\pi$, *i els angles de tall de les dues corbes en aquests punts.*

Demostració. Recordem que l'expressió d'un el·lipsoide és $(\frac{x}{\alpha})^2 + (\frac{y}{\beta})^2 + (\frac{z}{\gamma})^2$, tals que $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$. Com que els punts de la traça d'α són $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (a \sin^2 t, b \cos t \sin t, c \cos^2 t)\}$, prenem l'el·lipsoide tal que $\alpha = a$, $\gamma = c$ i $\beta = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

$$\left(\frac{a \sin^2 t}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{b \cos t \sin t}{b}\right)^2 + \left(\frac{c \cos^2 t}{c}\right)^2 = \sin^4 t + 2\cos^2 t \sin^2 t + \cos^4 t = (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 = 1.$$

β potser no és tan fàcil de deduir, fixem-nos que volem desfer-nos de tots els termes que puguem a partir de la identitat $\sin^2 + \cos^2 = 1$. En qualsevol cas, això ens dona que α es troba en aquest el·lipsoide. Pel que fa els

[1] Força central centrada en q vol dir que $F(\vec{x}) = g(\vec{x}) \cdot (\vec{x} - q)$.

punts d'intersecció, $\mathrm{im}(\alpha) \cap \mathrm{im}(\beta)$. $p \in \mathrm{im}(\alpha) \cap \mathrm{im}(\beta) \iff c\cos^2 t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Hem de veure quina expressió prenen tant en α com en β:

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = (a, 0, 0),\ \alpha\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (a, 0, 0)$$
$$\beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = (a, 0, 0),\ \alpha\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (-a, 0, 0)$$

Per tant, descartem $\frac{3\pi}{2}$ i $\mathrm{im}(\alpha) \cap \mathrm{im}(\beta) = \{\frac{\pi}{2}\}$. Els respectius vectors tangents ens donen els angles de tall que volem. Per tant:

$$\alpha'(t) = (2a\cos t\sin t, b\cos^2 t - b\sin^2 t, -2c\sin t\cos t),\ \beta(u) = (a\cos u, -a\sin u, 0).$$

Pel que $\alpha'(\frac{\pi}{2}) = (0, -b, 0)$ i $\beta'(\frac{\pi}{2}) = (0, -b, 0)$. Són paral·lels; per tant, l'angle és zero. ■

Exercici 1.14 (Càlcul de la curvatura d'una corba plana).

1. *Trobeu la curvatura d'$\alpha(t) = (3t^2, 3t - t^3)$, en $t = 1$.*
2. *Trobeu la curvatura d'$\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Proveu que la curvatura assoleix els seus extrems en els punts de tall amb els eixos de coordenades (vèrtexs de l'el·lipse).*
3. *Trobeu la curvatura d'$\alpha(t) = (a\cosh t, b\sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$. Proveu que la curvatura assoleix el seu màxim en el punt de tall amb l'eix Ox (vèrtex de l'hipèrbola) i que tendeix a zero en l'infinit.*

Demostració.

1. L'expressió d'α és $\alpha(t) = (3t^2, 3t - t^3)$ i hem de calcular la curvatura en 1. Per la fórmula, necessitem $\alpha'(t), \alpha''(t), \langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle$ i $\|\alpha'(t)\|$.
$$\left.\begin{aligned} \alpha'(t) = (6t, 3 - 3t^2),\ \alpha''(t) = (6, -6t), \\ \alpha'(1) = (6, 0),\ \alpha''(1) = (6, -6) \\ \langle\alpha'(1), \alpha''(1)\rangle = \det(\alpha'(1), \alpha''(1)) = -36,\ \|\alpha'(1)\| = 6. \end{aligned}\right\} k(t) = \frac{\langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} \implies k(1) = -\frac{1}{6}.$$
2. Es pot provar que la família d'el·lipses $\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right\}$ queda parametritzada per $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$ (és un exercici de la llista). Tornem a necessitar tot allò de l'apartat anterior:
$$\begin{aligned} \alpha'(t) = (-a\sin t, b\cos t),\ \alpha''(t) = (-a\cos t, -b\sin t) = -\alpha(t), \\ \langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle = ab\sin^2 t + ab\cos^2 t = ab, \\ \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \sqrt{a^2\sin t - b^2\sin^2 t + b^2} = \sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2}. \end{aligned}$$
   Pel que:
$$k(t) = \frac{\langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{ab}{(\sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2})^3}.$$
   La curvatura depèn de t, i $\max_t k(t) = \min_t \sin^2 t$ (anàlogament $\min_t k(t) = \max_t \sin^2 t$). Els mínims de $\sin^2 t$ són $t = 0, \pi$ i els màxims, $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, pel que els màxims de $k(t)$ són a $t = 0, \pi$ i els mínims, a $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Calculant aquests punts:
$$\alpha(0) = (a, 0),\ \alpha(\pi) = (-a, 0),\ \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, b),\ \alpha\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -b).$$

Que són justament els vèrtexs de la el·lipse.

3. Calculem rutinàriament les successives derivades:

$$\alpha'(t) = (a\sinh(t), b\cosh(t)) = \alpha''(t) \implies \langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle = ab(\sinh^2 t - \cosh^2 t) = ab.$$

L'estratègia és la mateixa que a l'apartat anterior, calculant $k(t)$ veurem que depèn de $\sinh^2(t)$ i el màxim de $k(t)$ serà el mínim de $\sinh^2 t$ i viceversa.

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2\sinh^2(t) + b^2\cosh^2(t)} = \sqrt{(a^2+b^2)\sinh^2(t) + b^2} \implies k(t) = \frac{ab}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

El màxim de $k(t)$ haurà de ser un mínim de $\sinh^2(t)$ (i viceversa), pel que $\min_t k(t)$ és en $t = 0$. Per tant, $k(0) = (a\cos h(0), 0) = (a, 0) \in 0x$, com volíem veure. Per acabar, com $\sinh(t) \xrightarrow{t\to\pm\infty} \pm\infty$, aleshores $\sinh^2(t) \xrightarrow{t\to\pm\infty} +\infty$ i $k(t) \xrightarrow{t\to\pm\infty} 0$. ■

Exercici 1.15. *Siguin $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada 2-regular, $t_0 \in I$ i $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la projecció ortogonal afí de $\mathbb{R}^3$ sobre el pla osculador de α en t_0. Proveu que la curvatura $k(t_0)$ d'α en t_0 és igual a la curvatura en t_0 de la corba plana $\beta = \pi \circ \alpha$. **Nota**: si $p_0 = \alpha(t_0)$ i b_0 és el vector binormal d'α en t_0. Aleshores, $\pi(x) = x - \langle x - p_0, b_0\rangle b_0$.*

Demostració. Si $p_0 = \alpha(t_0)$ i $b_0 = \beta(t_0)$ aleshores, $\pi(x) = x - \langle x - p_0, b_0\rangle \cdot b_0$ i:

$$\beta(t) = \pi\circ\alpha(t) = \alpha(t) - \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), b(t_0)\rangle \cdot b(t_0) = \alpha(t) - (\langle \alpha(t), b(t_0)\rangle - \langle \alpha(t_0), b(t_0)\rangle)\cdot b(t_0)$$

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= \alpha'(t) - (\langle \alpha'(t), b(t_0)\rangle + \underbrace{\langle \alpha(t), b'(t_0)\rangle}_{0} - \underbrace{\langle \alpha'(t_0), b(t_0)\rangle}_{0} - \underbrace{\langle \alpha(t_0), b'(t_0)\rangle}_{0})b(t_0)\\ &= \alpha'(t) - \langle \alpha'(t), b(t_0)\rangle \cdot b(t_0)\end{aligned}$$

$$\beta''(t) = \alpha''(t) - (\langle \alpha''(t), b(t_0)\rangle + \underbrace{\langle \alpha'(t), b'(t_0)\rangle}_{0})b(t_0) = \alpha''(t) - \langle \alpha''(t), b(t_0)\rangle \cdot b(t_0).$$

Recordem que $k_\alpha(t_0) = \frac{\|\alpha'(t_0)\times\alpha''(t_0)\|}{\|\alpha'(t_0)\|^3}$, volem calcular $k_\beta(t_0)$ per demostrar que $k_\alpha(t_0) = k_\beta(t_0)$. Per les fórmules que ja hem calculat,

$$\beta'(t_0) = \alpha'(t_0) - \langle \alpha'(t_0), b(t_0)\rangle \cdot b(t_0) \xrightarrow{b\|\alpha'\times\alpha'',\ \text{en } t_0} \beta'(t_0) = \alpha'(t_0).$$

Anàlogament:

$$\beta''(t_0) = \alpha''(t_0) - \langle \alpha''(t_0), b(t_0)\rangle \cdot b(t_0) \xrightarrow{b\|\alpha'\times\alpha'',\ \text{en } t_0} \beta''(t_0) = \alpha''(t_0).$$

Com $\beta'(t_0) = \alpha'(t_0)$ i $\beta''(t_0) = \alpha''(t_0)$, $k_\beta(t_0) = k_\alpha(t_0)$. ■

Exercici 1.16. *Considerem la corba:*

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}), & \text{si } t > 0;\\ (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0), & \text{si } t < 0;\\ (0,0,0), & \text{si } t = 0.\end{cases}$$

1. *Proveu que α és una corba diferenciable, α és regular per a tot t, i $k(t) \neq 0$ per a $t \neq 0$, $t \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ i $k(0) = 0$.*
2. *Proveu que el límit dels plans osculadors quan $t \longrightarrow 0$ ($t > 0$) és el pla $y = 0$, però el límit quan $t \longrightarrow 0$ ($t < 0$) és el pla $z = 0$. Això confirma la discontinuïtat del vector $\vec{n}(t)$ quan $t = 0$, atès que $k(0) = 0$.*

Demostració.

1. Definirem una funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que si $t > 0$, aleshores $f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$ i si $t \leq 0$, $f(t) = 0$. Aquesta és una funció suau no analítica.

   Definició 1.17 (Funció analítica). Una funció real φ és analítica en un punt $x - 0$ si és infinitament diferenciable en un cert entorn $\mathcal{U}$ d'x_0, en què la seva sèrie de Taylor convergeix i coincideix amb φ. També es caracteritza perquè imposa l'existència d'una sèrie de potències centrada en el punt.

   Notem que si φ és analítica en x_0 serà $C^\infty(\{x_0\})$, però no tota funció $C^\infty(\{x_0\})$ serà analítica. Que és exactament el cas si prenem $\varphi = f$, ja que f és infinitament diferenciable per a tot $t \in \mathbb{R}$ i en particular $f^{(n)}(t) = 0, \forall n \geq 1$; la seva sèrie de Taylor al voltant del zero és idènticament nul·la i per tant en cap entorn de $t = 0$ coincideixen la funció i la sèrie de Taylor.
   En qualsevol cas, podem posar $\alpha(t) = (t, f(-t), f(t))$; per tant, $\alpha \in C^\infty \iff f \in C^\infty$.

   $$\left(e^{-\frac{1}{t^2}}\right)^{(k)} \xrightarrow{t \to 0^+} 0.$$

   Veurem que $\left(e^{-\frac{1}{t^2}}\right)^{(k)} = p_k(\frac{1}{t}) \cdot e^{-\frac{1}{t^2}}$, on p_k és un cert polinomi. Per inducció:

   - Quan $k = 0$, tenim que $\left(e^{-\frac{1}{t^2}}\right)^{(0)} = e^{-\frac{1}{t^2}}$, pel que $p_1(\frac{1}{t}) = 1$.
   - Suposem ara que és cert per a k i volem demostrar-ho per a $k+1$:

   $$\left(e^{-\frac{1}{t^2}}\right)^{(k+1)} = \left(\left(e^{-\frac{1}{t^2}}\right)^{(k)}\right)' = \left(p_k\left(\frac{1}{t}\right) \cdot e^{-\frac{1}{t^2}}\right)' = -\frac{1}{t^2} \cdot p_{k+1}\left(\frac{1}{t}\right) \cdot e^{-\frac{1}{t^2}} + p_k\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(\frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}}\right).$$

   Per tant, $p_k(t) = \frac{1}{t^2} \cdot p_{k+1}\left(\frac{1}{t}\right) \cdot e^{-\frac{1}{t^2}} + p_k\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(\frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}}\right)$. Vegem que $\lim_n \left(e^{-\frac{1}{t^2}}\right)^{(k)} \xrightarrow{t \to 0^+} 0$.

2. En altres paraules, hem de provar que si $t \longrightarrow 0^+$ és el pla $y = 0$ i, en canvi, si $t \longrightarrow 0^-$, és el pla $z = 0$. Recordem que podem escriure el pla osculador com $\alpha(t) + (\alpha' \perp \alpha'')^\perp$.

   $$\alpha'(t) \perp \alpha''(t) = \begin{cases} (0, f''(t), 0), & \text{si } t > 0; \\ (0, 0, 0), & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

   Per a $\varepsilon > 0$, tenim $\pi_\varepsilon = \alpha(\varepsilon) + \langle(0, 1, 0)\rangle^\perp$ i si $\varepsilon \to 0^+$, $\pi_\varepsilon = \{z = 0\}$. Anàlogament, per a $-\varepsilon < 0$ tenim $\pi_{-\varepsilon} = \alpha(-\varepsilon) + \langle(0, 0, 1)\rangle^\perp$ i si $-\varepsilon \to 0^-$, $\pi_{-\varepsilon} = \{z = 0\}$. ∎

Mario Vilar, 2024

Exercici 1.18. *Sigui $\alpha(s)$ una corba 2-regular parametritzada per l'arc, i sigui $\beta(s) = \alpha'(s)$. Proveu que la curvatura k_β i la torsió τ_β de la corba β s'expressen en funció de la curvatura k i la torsió τ de α per a les fórmules següents:*

$$k_1^2 = \frac{k^2 + \tau^2}{k^2}, \quad \tau_1 = \frac{\tau' k - k' \tau}{k(k^2 + \tau^2)}.$$

Deduïu-ne que β és plana si, i només si, $\frac{\tau}{k}$ és constant.

Demostració. L'objectiu d'aquest exercici és acabar aplicant la fórmula de curvatura i a grans trets ens ajudarem de les fórmules de Frenet. Com $\beta(s) = \alpha'(s) = T(s)$, sigui $\beta'(s) = T'(s)$ que, per la fórmula de Frenet per a corbes planes:

$$\begin{aligned}
\beta'(s) &= T'(s) = k_\alpha(s) N(s) \\
\beta''(s) &= T''(s) = k_\alpha(s)' N(s) + k_\alpha(s) N'(s) = k_\alpha(s)' N(s) + k_\alpha(s)(-k_\alpha(s) T(s) + \tau_\alpha(s) B(s)) \\
&= -k_\alpha^2 \cdot T(s) + k'_\alpha(s) N(s) + k_\alpha \tau_\alpha \cdot B(s). \\
\beta'''(s) &= T'''(s) = -3 k_\alpha(s) k'_\alpha(s) + (k''_\alpha(s) + k_\alpha^3(s) - k_\alpha(s)\tau_\alpha^2(s)) N(s) + (2k'_\alpha(s) + k_\alpha(s)\tau'_\alpha(s)) B(t).
\end{aligned}$$

$$(\beta' \times \beta'')(s) = k_\alpha^3(s) B(s) + k_\alpha^2(s) \tau_\alpha(s) T(s) \implies \|\beta' \times \beta''\| = \|(k_\alpha^2 \tau_\alpha, 0, k_\alpha^3)\| = \sqrt{k^6 + k^4 \tau^2}.$$

Per tant, ens queda que $k_\beta(t) = \frac{\sqrt{k^6 + k^4 \tau^2}}{k^3} = \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{k}$, com volíem. La τ queda com exercici. ■

Exercici 1.19. *Proveu que si els plans normals d'una corba 2-regular són paral·lels a una direcció fixa, aleshores la corba és plana.*

Demostració. Recordem que els plans normals $\pi_t : \alpha(t) + \langle T \rangle^\perp$. Aleshores, α és plana si, i només si, $\tau = 0$. $\tau = 0$ si, i només si, $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = 0$. La hipòtesi del problema ens diu que existeix un $\vec{v}$ fix tal que $\vec{v} \parallel \pi_t$:

$$\langle \alpha'(t), \vec{v} \rangle = 0 \implies \langle \alpha''(t), \vec{v} \rangle = 0 \implies \langle \alpha'''(t), \vec{v} \rangle = 0.$$

Per tant, $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ són ortogonals a $\vec{v}$ (estan en el pla $\langle \vec{v} \rangle^\perp$). Si tenim tres vectors continguts en un pla aleshores han de ser linealment dependents, pel que com $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = 0$ ja hem acabat. ■

Exercici 1.20. *Sigui $\alpha(s)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ una corba regular de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc, tal que $k \neq 0$ i $k \neq \tau$. Es defineix:*

$$\beta(s) = \int_0^s (t(u) + b(u))\, du\,.$$

1. *Trobeu un paràmetre arc per a la corba $\beta(s)$.*
2. *Demostreu que la curvatura K de la corba $\beta(s)$ és $K = \frac{1}{2}|k - \tau|$.*
3. *Comproveu que el valor absolut de la torsió de la corba $\beta(s) = |\frac{k+\tau}{2}|$.*

Demostració.

1. No té pèrdua. Considerem $\beta'(s) = T(s)+B(s)$, pel que el paràmetre arc és $\|\beta'(s)\| = \sqrt{\langle T+B, T+B\rangle} = \sqrt{2}$.
2. Recordem que la fórmula és $k_\beta = \frac{\|\beta'\times\beta''\|}{\|\beta'\|^3}$, pel que simplement cal anar calculant, ajudant-nos de les fórmules de Frenet per a corbes en l'espai.

$$\beta''(s) = (\beta'(s))' = T'(s) + B'(s) = kN - \tau N$$
$$\beta'\times\beta'' = (T+B)\times(k-\tau)N = (k-\tau)(T\times N) + (k-\tau)(\underbrace{B\times N}_{-N\times B}) = (k-\tau)B - (k-\tau)T$$
$$k_\beta = \frac{\|\beta'\times\beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \frac{\sqrt{(k-\tau)^2+(k-\tau)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}|k-\tau|}{2\sqrt{2}} = \frac{|k-\tau|}{2}.$$

3. També és bastant rutinari. La fórmula és $\tau_\beta = \frac{\det(\beta',\beta'',\beta''')}{\|\beta'\times\beta''\|^2}$, pel que necessitem fer algunes operacions. Un altre cop, fent ús de les fórmules de Frenet.

$$\begin{aligned}\beta'''(s) &= ((k-\tau)N)' = (k'-\tau')N + (k-\tau)N' = (k'-\tau')N + (k-\tau)(-kT+\tau B)\\ &= -k(k-\tau)T + (k'-\tau')N + (k-\tau)\tau B.\end{aligned}$$
$$\det(\beta',\beta'',\beta''') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -k(k-\tau)\\ 0 & k-\tau & k'-\tau' \\ 1 & 0 & \tau(k-\tau)\end{vmatrix} = -(k-\tau)(\tau(k-\tau)+k(k-\tau)) = (k-\tau)^2(k+\tau).$$

Per tant:
$$\tau_\beta = \frac{\det(\beta',\beta'',\beta''')}{\|\beta'\times\beta''\|^2} = \frac{(k-\tau)^2(k+\tau)}{2(k-\tau)^2} = \frac{k+\tau}{2}.$$ ∎

Exercici 1.21 (Hèlix generalitzada). *El teorema de Lancret. Sigui α una corba 2-regular (no depèn de la parametrització) i a més parametritzada per l'arc. Són equivalents:*

1. *α és hèlix generalitzada.*
2. *$\frac{\tau}{k}$ és constant.*
3. *$w = \tau T + k\beta$ és paral·lel a una direcció fixa.*

Demostració. Primer provarem $2 \Leftrightarrow 3$ i després, $1 \Rightarrow 2$ i $2/3 \Rightarrow 1$.

$2 \Leftrightarrow 3$ Provarem les dues implicacions.

$\Rightarrow$ Suposem que $\frac{\tau}{k}$ és constant. Aleshores, $\tilde{w} = \frac{1}{k}w = \frac{\tau}{k}T + B$ és paral·lel a w. Estudiem $\tilde{w}$:

$$(\tilde{w})' = \left(\frac{\tau}{k}\right)' T + \frac{\tau}{k}T' + B' = \frac{\tau}{k}(kN) + (-\tau N) = 0.$$

En altres paraules, $(\tilde{w})' = 0$ i $\tilde{w}$ és un vector constant. I, per tant, w és paral·lel a una direcció fixa $\tilde{w}$.

$\Leftarrow$ Suposem que $w = \tau T + kB$ és paral·lel a una direcció fixa $\vec{v}$. Aleshores, $w = h(t) \cdot \vec{v}$ per a certa funció $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Per tant:

$$w' = h'(t) \cdot \vec{v} + h(t) \cdot \underbrace{\vec{v}'}_{0} = h'(t) \cdot \vec{v}.$$

És a dir, $w' \parallel w$ per a tot t. Això passa si, i només si, $w \times w' = 0$. Ara bé, d'altra banda:

$$w' = \tau' T + \tau T' + k' B + kB' = \tau' T + \tau(kN) + k'B + k(-\tau N) = \tau T + k' B,$$

pel que:

$$w \times w' = (\tau T + kB) \times (\tau' T + k' B) = \tau\tau'(T \times T) + \tau k'(T \times B) + k\tau'(B \times T) + kk'(B \times B) = (k\tau' - \tau k)N,$$

Com $w \times w' = 0$, aleshores $k\tau' - \tau k = 0$, és a dir, $\left(\frac{\tau}{k}\right)' = \frac{\tau' k - \tau k'}{k^2} = 0$ i $\frac{\tau}{k}$ ha de ser constant.

1 $\Rightarrow$ 2 Suposem que α és hèlix generalitzada. Prenem $\vec{v}$ tal que generi aquesta direcció i a més $\|\vec{v}\| = 1$. Sabem que l'angle entre $\alpha^2(t)$ i $\vec{v}$ és constant si, i només si:

$$\cos(\theta_0) = \frac{\langle T, \vec{v} \rangle}{\|T\| \cdot \|\vec{v}\|} \text{ i } \langle T, \vec{v} \rangle = C \in \mathbb{R}.$$

Derivant, i aplicant que $T' = kN$ amb $k \neq 0$ (perquè α és 2-regular):

$$\langle T', \vec{v} \rangle + \langle T, \vec{v}' \rangle = 0 \implies k\langle N, \vec{v} \rangle = 0 \implies \langle N, \vec{v} \rangle = 0. \tag{1.2}$$

Derivant una vegada més,

$$\langle N', \vec{v} \rangle = 0 \iff \langle -kT + \tau B, \vec{v} \rangle = 0 \iff -k\langle \tau, \vec{v} \rangle + \tau \langle B, \vec{v} \rangle = 0 \iff \frac{\tau}{k} = \frac{c}{\langle B, \vec{v} \rangle}.$$

Falta veure que $\langle B, \vec{v} \rangle$ és constant:

$$\langle B', \vec{v} \rangle = \langle B', \vec{v} \rangle = \tau \langle N, \vec{v} \rangle \overset{(1.2)}{=} 0.$$

Per tant, $\langle B, \vec{v} \rangle$ és constant i $\frac{\tau}{k}$ és constant.

2/3 $\Rightarrow$ 1 Sabem que $\tilde{w} = \frac{\tau}{k} T + B$ és constant. Volem veure que α és hèlix generalitzada. Vegem doncs que $\widehat{\alpha' \tilde{w}}$ és constant; és a dir:

$$\cos(\widehat{\alpha' \tilde{w}}) = \frac{\langle T, \tilde{w} \rangle}{\|T\| \cdot \|\tilde{w}\|} = \frac{\langle T, \frac{\tau}{k} T \rangle + \langle T, B \rangle}{\|T\| \cdot \|\tilde{w}\|} = \frac{\frac{\tau}{k} \langle T, T \rangle}{\|T\| \cdot \|\tilde{w}\|} \xrightarrow[\frac{\tau}{k} \text{ és constant}]{\langle T, T \rangle = \|T\|^2 = 1} \left\| \frac{\tau}{k} T + B \right\| \text{ és constant.}$$

Per tant, $\widehat{\alpha' \tilde{w}}$ és constant. ■

2

Llista 2

Definició 2.1. Una família uniparamètrica de rectes a $\mathbb{R}^3$ és una família $\{L_v\}_{v\in I}$ on $I \subset \mathbb{R}$ i L_v és una recta; tals que existeixen aplicacions diferenciables

Exercici 2.2 (Con circular). *Sigui ω constant, $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$. Proveu que*

$$\varphi(u, v) = u(\sin\omega\cos v, \sin\omega\sin v, \cos\omega), u \neq 0, v \in \mathbb{R}$$

és una superfície parametritzada regular i la seva traça és

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = z^2\tan^2\omega\right\} \setminus \{(0, 0, 0)\},$$

el con circular menys el vèrtex. Proveu que tots els plans tangents passen pel vèrtex i les normals tallen l'eix OZ formant un angle constant.

Demostració. Definim $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal com planteja l'enunciat i $\mathcal{U} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$, un obert de $\mathbb{R}^2$ (tot $\mathbb{R}^2$ excepte la recta $x = 0$). $\varphi \in C^\infty$ perquè $\sin\omega\cos v, \sin\omega\sin v, \cos\omega \in C^\infty$, pel que $C = \varphi(u, v), u \neq 0, v \in \mathbb{R}$ és superfície parametritzada. Per veure que és regular simplement ens cal veure que $\operatorname{rang}(\nabla\varphi) = 2$ a tot punt. Calculem les derivades φ_u, φ_v i calculem $\varphi_u \times \varphi_v$ per comprovar que són linealment independents:

$$\varphi_u = (\sin\omega\cos v, \sin\omega\cos v, \cos\omega), \;\; \varphi_v = (-u\sin\omega\sin v, u\sin\omega\cos v, 0).$$

$$\begin{aligned}
\varphi_u \times \varphi_v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin\omega\cos v & \sin\omega\cos v & \cos\omega \\ -u\sin\omega\sin v & u\sin\omega\cos v & 0 \end{vmatrix} \\
&= u(-\sin\omega\cos\omega\cos v, -\cos\omega\sin\omega\sin v, \sin^2\omega\cos^2 v + \sin^2\omega\sin^2 v) \\
&= (u\cdot(-\sin\omega\cos\omega\cos v), u\cdot(-\cos\omega\sin\omega\sin v), u\sin^2\omega)
\end{aligned}$$

Com $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin\omega \neq 0$ i la tercera component mai no s'anul·la, per a qualsevol $(u, v) \in \mathcal{U}$. Per tant, $\|\varphi_u \times \varphi_v\| \neq 0$ i φ és regular. Pel que fa a la traça, sigui $(x, y, z) \in S$, és a dir, que compleix $x^2 + y^2 = z^2\tan^2\omega$. Definim $\tilde{u} = \frac{z}{\cos\omega}$:

$$\tilde{u}^2 = \frac{z^2}{\cos^2\omega} = \frac{x^2 + y^2}{\tan^2\omega\cos^2\omega} \implies x^2 + y^2 = \tilde{u}^2\sin^2\omega.$$

Per tant, (x, y) està en un cercle de radi $|\tilde{u}| \cdot \sin\omega$ i existeix $\tilde{v}$ tal que $(x, y) = |\tilde{u}| \cdot \sin\omega(\cos\tilde{u}, \sin\tilde{v})$. Com és indiferent quin angle prenem per a parametritzar $\tilde{u}$ li podem treure el valor absolut. És a dir, que $(x, y, z) = \varphi(\tilde{u}, \tilde{v})$ i $(x, y, z) \in \operatorname{im}(\varphi)$. Provem que tots els plans tangents passen pel vèrtex:

$$T_{(u,v)}(\varphi) = \varphi(u, v) + \langle\varphi_u, \varphi_v\rangle = \varphi(u, v) + \langle\varphi_u \times \varphi_v\rangle^\perp.$$

Volem veure que $0 \in T_{(u,v)}(\varphi) \iff \langle\varphi(u, v), \varphi_u \times \varphi_v\rangle = 0$.

$$\begin{aligned}
\langle\varphi(u, v), \varphi_u \times \varphi_v\rangle &= u^2(-\sin^2\omega\cos\omega\cos^2 v - \sin^2\omega\cos\omega\sin^2 v + \cos\omega\sin^2\omega) \\
&= u^2\sin^2\omega(\cos\omega(-\cos^2 v - \sin^2 v + 1)) = 0
\end{aligned}$$

Finalment, observem que:

$$\phi(u,v) + (\cos\omega)^{-1} \cdot \phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v) = (0,0,(\cos\omega)^{-1} \cdot u),$$

cosa que demostra que totes les rectes normals tallen l'eix OX. Per acabar, cal comprovar que l'angle de tall entre les rectes normals i l'eix OZ és constant. Prenent l'angle de tall entre dues rectes que es tallen dins del rang $[0, \frac{\pi}{2}]$, el cosinus d'aquest angle és:

$$\frac{|\langle \phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v), (0,0,1)\rangle|}{\|\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v)\|} = \frac{|u \sin^2\omega|}{|u \sin\omega|} = \sin\omega,$$

que és constant (observem que hem escrit $|\sin\omega| = \sin\omega$ perquè $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$). Com l'aplicació $\cos : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0,1]$ és injectiva, podem concloure que l'angle de tall és constant. ■

Exercici 2.3. *Siguin $a, b, c > 0$. Proveu que*

$$\varphi(u,v) = (a\cosh u \cos v, b\cosh u \sin v, c\sinh u), \quad u \in \mathbb{R}, 0 < v < 2\pi$$

és una superfície parametritzada regular i la seva traça està continguda en la quàdrica d'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Trobeu la intersecció d'aquesta superfície amb el pla $z = 0$ i proveu que els plans tangents de φ en aquests punts són verticals.

Demostració. Primer hem de provar que $\phi(u,v)$ descriu una superfície parametritzada regular. En efecte, sigui $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$, que és un obert (producte cartesià d'oberts en la topologia euclidiana) i a més $\varphi \in C^\infty$, ja que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^\infty$ també. En particular, la regularitat es troba comprovant que $\text{rang}(\nabla\varphi) = 2$ a tot punt. Ho fem com a l'exercici anterior, calculant φ_u, φ_v i $\varphi_u \times \varphi_v$. Se satisfà

$$\phi_u(u,v) = (a\sinh u \cos v, b\sinh u \sin v, c\cosh u), \quad \phi_v(u,v) = (-a\cosh u \sin v, b\cosh u \cos v, 0)$$

i, per tant,

$$\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v) = \left(-bc\cosh^2 u \cos v, -ac\cosh^2 u \sin v, ab\sinh u \cosh u\right).$$

Com que $\cosh u \neq 0$ i $(\cos v, \sin v) \neq (0,0)$ per a qualssevol u, v[2], resulta que almenys una de les dues primeres coordenades de $\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v)$ és diferent de zero. Per tant, $\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v) \neq 0$ per a qualsevol $(u,v) \in \Omega$, cosa que demostra que ϕ és regular. Per comprovar que $\phi(\Omega)$ està continguda dins la quàdrica d'equació:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

[2] Per una banda, és evident que $(\cos v, \sin v) \neq (0,0)$ perquè mai no tindrem $\cos v = 0, \sin v = 0$ simultàniament. D'altra banda, si no hem treballat mai amb $\cosh u$ una simple consulta al Geogebra ens val per afirmar, efectivament, que $\cosh u \neq 0$.

és suficient veure que les funcions coordenades de ϕ satisfan l'equació que defineix la quàdrica. Ara bé,

$$\begin{aligned}\frac{(a\cosh u\cos v)^2}{a^2}+\frac{(b\cosh u\sin v)^2}{b^2}-\frac{(c\sinh u)^2}{c^2}&=(\cosh u\cos v)^2+(\cosh u\sin v)^2-\sinh^2 u\\&=\cosh^2 u-\sinh^2 u=1,\end{aligned}$$

amb la qual cosa hem demostrat el que volíem. La intersecció de ϕ amb el pla $z=0$ és la restricció de ϕ a $\phi^{-1}(\{z=0\})$. Però

$$\phi^{-1}(\{z=0\})=\{(u,v)\in\Omega \mid c\sinh u=0\}=\{0\}\times(0,2\pi).$$

Finalment volem veure que per a tot $p\in\phi^{-1}(\{z=0\})$ el pla tangent $T_p^{\text{vect}}\phi$ és vertical, és a dir, conté el vector $(0,0,1)$. Però si $u=0$ aleshores $\phi_u(0,v)=(0,0,c\cosh u)$, que és un vector diferent de zero i paral·lel a $(0,0,1)$. Això demostra que si $p=(0,v)$ aleshores $T_p^{\text{vect}}\phi$ és vertical. ∎

Exercici 2.4.

1. *Proveu que si totes les rectes normals d'una superfície parametritzada regular connexa són paral·leles a una direcció fixa, llavors la traça d'aquesta superfície està continguda en un pla.*
2. *Proveu que si totes les rectes normals afins d'una superfície parametritzada regular connexa passen per un punt fix, llavors la traça d'aquesta superfície està continguda en una esfera.*

Demostració.

1. Sigui $\phi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^3$ una superfície parametritzada regular connexa (és a dir, ϕ és diferenciable i $\operatorname{rang}(\phi_u,\phi_v)=2$, Ω és un obert *connex* de $\mathbb{R}^2$). Que totes les rectes *normals* a la superfície siguin paral·leles a una direcció fixa vol dir que existeix un vector $w\in\mathbb{R}^3$, $w\neq(0,0,0)$, tal que $\langle\phi_u(p),w\rangle=\langle\phi_v(p),w\rangle=0$ per a qualsevol $p\in\Omega$[3]. En aquest cas,

   $$\left.\begin{array}{llll} f: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (u,v) & \longmapsto & \langle\phi,w\rangle\end{array}\right\}\ f_u=\langle\phi_u,w\rangle+\underbrace{\langle\phi,w_u\rangle}_{0}=\langle\phi_u,w\rangle,\ f_v=\langle\phi_v,w\rangle+\underbrace{\langle\phi,w_v\rangle}_{0}=\langle\phi_v,w\rangle$$

   Per tant, $\nabla f=(0,0)$. f és localment constant i com Ω és connex, necessàriament f ha de ser constant. És a dir, existeix una constant c tal que $\phi(\Omega)$ està continguda dins de $\Pi:=\{q\in\mathbb{R}^3 \mid \langle q,w\rangle=c\}$[4]. Ara bé, el conjunt Π és un pla, pel que ja hem acabat.
2. Sigui $\phi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^3$ una superfície parametritzada regular i connexa, i suposem que totes les rectes normals afins de ϕ passen per un punt fix. Composant ϕ amb una translació podem suposar que totes les rectes normals afins passen per l'origen. Aquesta última condició es pot escriure així:

   $$\langle\phi(p),\phi_u(p)\rangle=\langle\phi(p),\phi_v(p)\rangle=0,\ \forall p\in\Omega.$$

[3] Estem imposant que en cadascuna de les components els vectors tangents ϕ_u,ϕ_v siguin perpendiculars a w, que és *paral·lel* a qualsevol de les rectes normals (i.e. té la mateixa direcció que aquestes).
[4] El candidat natural és $\pi:\varphi(u_0,v_0)+\langle w\rangle^{\perp}$.

Suposant que les igualtats anterior se satisfan, sigui $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció $g = \langle \phi, \phi \rangle$. Les derivades parcials de g són $g_u = 2\langle \phi, \phi_u \rangle = 0$ i $g_v = 2\langle \phi, \phi_v \rangle = 0$. Per tant, podem concloure que g és idènticament zero, és localment constant i com Ω és connex aleshores g és constant. Existeix una constant c tal que $\phi(\Omega)$ està continguda dins $S = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \langle q, q \rangle = c\}$. Observem que si $\Omega \neq \emptyset$ aleshores $c \geq 0$ forçosament, ja que si no S seria el conjunt buit; d'altra banda, com ϕ és regular no pot ser una aplicació constant i, per tant, la inclusió $\phi(\Omega) \subset S$ implica que S té més d'un punt, cosa que implica que $c > 0$. Per tant, si $\Omega \neq \emptyset$, S és una esfera de radi $\sqrt{c} > 0$. ∎

Exercici 2.5. *Proveu que el subconjunt S de $\mathbb{R}^3$ definit per l'equació $(x-y)^3 + y^5 + (z+x)^4 = 2$ és una superfície regular. Proveu que el punt $P = (1,1,0)$ és de S i trobeu el pla tangent a S en P.*

Definició 2.6 (Valor regular). Sigui $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ un obert i sigui $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Direm que $t \in \mathbb{R}$ és un valor regular d'f si $\forall q \in f^{-1}(t)$ se satisfà que $(f_x(q), f_y(q), f_z(q)) \neq (0,0,0)$.

Teorema 2.7 (Teorema del valor regular). *Sigui $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ un obert i sigui $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Si $t \in \mathbb{R}$ és un valor regular d'f, aleshores el conjunt $S := f^{-1}(t)$ és una superfície regular. A més a més,*

$$T_p(S) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid f_x(p)\alpha + f_y(p)\beta + f_z(p)\gamma = 0\}. \tag{2.1}$$

Demostració. La funció $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $F(x,y,z) = (x-y)^3 + y^5 + (z+x)^4$ és clarament diferenciable. Volem aplicar el criteri del gradient, pel que $\nabla F \neq (0,0,0)$ i a més no podem trobar (x, y, z) tal que $F(x,y,z) \neq 2$ (i.e. $S = F^{-1}(2)$):

$$\left.\begin{array}{r} F_x(x,y,z) = 3(x-y)^2 + 4(z+x)^3, \\ F_y(x,y,z) = -3(x-y)^2 + 5y^4, \\ F_z(x,y,z) = 4(z+x)^3, \\ F(x,y,z) = 2 \end{array}\right\} \nabla F = (0,0,0) \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y = 0 \\ z + x = 0 \end{cases} \implies x = y = z = 0,$$

però $F(0,0,0) = 0 \neq 2$. Pel teorema del valor regular, $S = F^{-1}(2)$ és una superfície regular. Com $F(1,0,0) = 2$, evidentment $(1,1,0) \in S$, com volíem veure. Finalment, el pla tangent (vectorial) a S en P es pot calcular com a (2.1):

$$T_p(S) = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid F_x(p)\alpha + F_y(p)\beta + F_z(p)\gamma = 0\} = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid 4\alpha + 5\beta + 4\gamma = 0\}.$$ ∎

Exercici 2.8. *Sigui S el paraboloide hiperbòlic d'equació $z = x^2 - y^2$.*

1. *Proveu que S és una superfície regular i que*

$$\varphi(u,v) = (u+v, u-v, 4uv),$$
$$\psi(s,t) = (s\cosh t, s\sinh t, s^2), s \neq 0$$

són cartes de S.

2. *Determineu el canvi de paràmetres $h = \varphi^{-1} \circ \psi$.*

Proposició 2.9 (Criteri fàcil de carta). *Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular i sigui $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superfície parametritzada. Suposem que se satisfà:*

1. $\phi(\Omega) \subset S$,
2. ϕ *és injectiva,*
3. ϕ *és regular.*

Aleshores, (Ω, ϕ) és una carta d'S.

Demostració.

1. Hem d'usar el teorema del valor regular, pel que definirem $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$.
$$\nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (2x, -2y, -1) \neq (0, 0, 0),\ \forall x, y.$$
Per tant, per a tot $t \in \mathbb{R}$ tenim que $\forall q \in F^{-1}(t)$, $(F_x(q), F_y(q), F_z(q)) \neq (0, 0, 0)$ (i.e. tot $t \in \mathbb{R}$ és regular). En particular, S és un paraboloide hiperbòlic donat per $x^2 - y^2 - z = 0$ i $S = F^{-1}(0)$, pel que S és una superfície regular.
2. Usarem en ambdós casos el criteri fàcil de carta, 2.9.
   2.1. $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la superfície parametritzada $\phi(u, v) = (u+v, u-v, 4uv)$[5]. Vegem que $\phi(\Omega) \subset S$; sigui, doncs, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ qualsevol:
$$(u + v)^2 - (u - v)^2 = (u + v + u - v) \cdot (u + v - u + v) = 4uv,\ \ \phi(u, v) \in S.$$
   Vegem que ϕ és injectiva. Efectivament, si $\phi(u, v) = \phi(u', v')$, igualant les primera coordenades deduïm que $u + v = u' + v'$ i igualant les segones obtenim $u - v = u' - v'$. Per tant:
$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}((u + v) + (u - v)) = \frac{1}{2}((u' + v') + (u' - v')) = u', \\ v &= \frac{1}{2}((u + v) - (u - v)) = \frac{1}{2}((u' + v') - (u' - v')) = v'. \end{aligned}\right\}\ (u, v) = (u', v').$$
   Finalment, per veure que ϕ és regular calculem les seves derivades parcials:
$$\phi_u = (1, 1, 4v),\ \ \phi_v = (1, -1, 4u),\ \ \phi_u \times \phi_v = (4u + 4v, 4v - 4u, -2).$$
   Llavors, la tercera coordenada de $\phi_u \times \phi_v$ és constant igual a -2 i, per tant, $\phi_u \times \phi_v$ no s'anul·la enlloc. Això demostra que ϕ és regular.
   2.2. Sigui ara $\Omega = (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R}$ i $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ la superfície parametritzada $\psi(s, t) = (s \cosh t, s \sinh t, s^2)$. Apliquem novament el criteri fàcil de carta. La inclusió $\psi(\Omega) \subset S$ és conseqüència de la igualtat $(s \cosh t)^2 - (s \sinh t)^2 - s^2 = 0$. Per la injectivitat observem que si $\psi(s, t) = \psi(s', t')$

[5] Ho és perquè $\Omega = \mathbb{R}^2$ és un *clopen* i $\phi \in C^\infty$, tota component és infinitament diferenciable

on $(s,t),(s',t') \in \Omega$ aleshores igualant les terceres coordenades obtenim $s' = \pm s$. Com que $\cosh t > 0$ i $\cosh t' > 0$, igualant les primeres coordenades deduïm que s i s', que són diferents de zero, tenen el mateix signe. Per tant, $s' = s$. Llavors comprant les segones coordenades i dividint per $s = s'$ obtenim $\sinh t = \sinh t'$. Com que la funció $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és injectiva deduïm que $t = t'$. Per tant la injectivitat està demostrada. Finalment, per veure que ψ és regular calculem

$$\psi_s = (\cosh t, \sinh t, 2s),\ \ \psi_t = (s\sinh t, s\cosh t, 0),\ \ \psi_s \times \psi_t = (-2s^2\cosh t, 2s^2\sinh t, s),$$

de manera que la tercera coordenada de $\psi_s \times \psi_t$ és igual a s. Com que per tots els punts $(s,t) \in \Omega$ se satisfà $s \neq 0$, deduïm que ψ és regular. De l'expressió de ϕ es dedueix immediatament que si $(x,y,z) \in S$ aleshores:

$$\phi^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right).$$

Per tant:

$$\left(\phi^{-1} \circ \psi\right)(s,t) = \left(s \cdot \frac{\cosh t + \sinh t}{2}, s \cdot \frac{\cosh t - \sinh t}{2}\right) = \left(s \cdot \frac{e^t}{2}, s \cdot \frac{e^{-t}}{2}\right). \qquad \blacksquare$$

Exercici 2.10. *Siguin $a \neq 0$ i S el subconjunt de $\mathbb{R}^3$ definit per l'equació*

$$x \sin\frac{z}{a} = y\cos\frac{z}{a}$$

1. *Proveu que S és una superfície regular.*
2. *Proveu que*

$$\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av), (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

és una carta global de S. (És a dir, S és un helicoide recte.)

Definició 2.11 (Carta global). És una carta local on, a més, imposem que ϕ és exhaustiva (no només $\phi(\Omega) \subset S$, sinó que $\phi(\Omega) = S$).

Demostració.

1. Sigui $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x\sin\frac{z}{a} = y\cos\frac{z}{a}\}$. Volem veure que S és regular, pel que definim $F(x,y,z) = x\sin\frac{z}{a} - y\cos\frac{z}{a}$ i $S = F^{-1}(0)$. Vegem que 0 és un valor regular:

$$\partial F = \left(\sin\frac{z}{a}, -\cos\frac{z}{a}, \frac{x}{a}\cos\frac{z}{a} + \frac{y}{a}\sin\frac{z}{a}\right).$$

Com no existeix $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\cos\alpha = \sin\alpha = 0$, no hi ha cap valor d'$(x,y,z)$ per al qual les derivades parcials $F_x(x,y,z)$ i $F_y(x,y,z)$ s'anul·lin alhora. En conclusió, tot $t \in \mathbb{R}$ és valor regular d'F. Pel teorema del valor regular, $S = F^{-1}(0)$ és superfície regular.

2. Per veure que la superfície parametritzada $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$ és una carta de S usarem el criteri fàcil de carta. Cal veure que $\varphi(\mathbb{R}^2) \subset S$, que φ és injectiva i φ és regular. Primerament, la inclusió $\varphi(\mathbb{R}^2) \subset S$ es dedueix de:

$$F(u\cos v, u\sin v, av) = u\cos v \sin\frac{av}{a} - u\sin v\cos\frac{av}{a} = u\cos v\sin v - u\sin v\cos v = 0.$$

Per la injectivitat, suposem:

$$(u\cos v, u\sin v, av) = \varphi(u,v) = \varphi(u',v') = (u'\cos v', u'\sin v', av').$$

Comparant les terceres coordenades obtenim $v = v'$. Llavors, si $\cos v = \cos v'$ és diferent de zero, comparant les primeres coordenades i dividint per $\cos v = \cos v'$ obtenim $u = u'$. Si $\sin v = \sin v'$ és diferent de zero, comparant les segones coordenades i dividint per $\sin v = \sin v'$ deduïm també $u = u'$. Com $\cos v$ i $\sin v$ no es poden anul·lar simultàniament, almenys un dels dos arguments anteriors funcionarà i, per tant, en qualsevol cas podem afirmar que $u = u'$. Amb això la injectivitat està demostrada, finalment cal veure que φ és regular. Calculem-ne les derivades parcials:

$$\varphi_u = (\cos v, \sin v, 0),\ \ \varphi_v = (-u\sin v, u\cos v, a),\ \ \varphi_u \times \varphi_v = (a\sin v, -a\cos v, u).$$

Per tant, la primera i la segona coordenada de $\varphi_u \times \varphi_v$ no poden ser simultàniament zero. És a dir, $(\varphi_u \times \varphi_v)(u,v) \neq 0$ per a tots els $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Queda, doncs, demostrat que φ és regular.

3. Cal veure que φ és exhaustiva. Suposem que (x,y,z) satisfà $F(x,y,z) = x\sin\frac{z}{a} - y\cos\frac{z}{a} = 0$. Volem trobar $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x,y,z) = \varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$. Igualant les terceres coordenades, forçosament $v = \frac{z}{a}$. Suposem que $\cos v \neq 0$, $\sin v \neq 0$. Aleshores:

$$u\cos v = x,\ \ u\sin v = y \implies u = \frac{x}{\cos\frac{z}{a}},\ \ u = \frac{y}{\sin\frac{z}{a}}.$$
$$\frac{x}{\cos v} = \frac{x}{\cos\frac{z}{a}} = \frac{y}{\sin\frac{z}{a}} = \frac{y}{\cos v},$$

on a la segona igualtat hem usat l'anul·lació de $F(x,y,z)$. Per tant, en qualsevol cas estem assignant un únic valor a u. Vegem que amb aquests valors de u, v se satisfà que $\varphi(u,v) = (x,y,z)$. La igualtat entre terceres coordenades és immediata. La igualtat entre les primeres (resp. segones) coordenades és immediata si $\cos v \neq 0$ (resp. $\sin v \neq 0$). Ara, si $\cos v = \cos\frac{z}{a} = 0$; llavors, de $F(x,y,z) = 0$ es dedueix que $x\sin\frac{z}{a} = x = 0$ i, per tant, la primera coordenada de $\varphi(u,v)$ que és zero coincideix amb z. Amb un argument similar demostrem que si $\sin v = \sin\frac{z}{a} = 0$; aleshores, la segona coordenada de $\phi(u,v)$ coincideix amb y. ∎

Exercici 2.12. *Considerem el següent subconjunt de* $\mathbb{R}^3$: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$.

1. *Demostreu que S és una superfície regular.*

2. *Demostreu que per a tot $\theta \in \mathbb{R}$ l'aplicació $\phi_\theta : (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida per:*

$$\phi_\theta(u, v) = (\cos(\theta + u), \sin(\theta + u), 0) + v(-\sin(\theta + u), \cos(\theta + u), 1)$$

és una carta de S i trobeu $\theta_1, \ldots, \theta_k$ de manera que:

$$S = \phi_{\theta_1}((-\pi, \pi) \times \mathbb{R}) \cup \cdots \cup \phi_{\theta_k}((-\pi, \pi) \times \mathbb{R}).$$

3. *Demostreu que per a cada punt $p \in S$ es podem trobar dues rectes diferents $r_1, r_2 \subset S$ tals que $p \in r_1 \cap r_2$.*

Demostració.

1. Farem servir un altre cop el teorema del valor regular. Sigui $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ tal que $S = F^{-1}(\{1\})$ i comprovem que $\nabla F(x, y, z) \neq 0$, per a tot $(x, y, z) \in S$. Efectivament:

$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, -2z), \ \nabla F(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff (x, y, z) = (0, 0, 0) \notin S.$$

Com $(0, 0, 0) \notin S$, aleshores 1 és un valor regular i pel teorema del valor regular, $S = F^{-1}(0)$ és superfície regular.

2. Utilitzem el criteri fàcil de carta, 2.9, per veure que $\phi_\theta : \Omega := (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una carta (local) de S. Primerament, $\operatorname{im}(\phi_\theta) \subset S$, ja que:

$$\begin{aligned} F(\phi_\theta(u, v)) &= F(\cos(\theta + u) - v\sin(\theta + u), \sin(\theta + u) + v\cos(\theta + u), v) \\ &= (\cos(\theta + u) - v\sin(\theta + u))^2 + (\sin(\theta + u) + v\cos(\theta + u))^2 - v^2 \\ &= \sin^2(\theta + u) + \cos^2(\theta + u) + v^2(\sin^2(\theta + u) + \cos^2(\theta + u)) \\ &+ 2v(\sin(\theta + u) \cdot \cos(\theta + u) - \sin(\theta + u) \cdot \cos(\theta + u)) - v^2 = 1. \end{aligned}$$

Vegem ara que ϕ_θ és regular, on simplement ens falta veure que $\phi_u \times \phi_v \neq (0, 0, 0)$ (això implicarà que l'angle entre els dos no valgui zero i $\operatorname{rang}(\nabla\phi_\theta) = 2$).

$$\left.\begin{array}{c} \phi_u = (-\sin(\theta + u) - v\cos(\theta + u), \cos(\theta + u) - v\sin(\theta + u), 0), \\ \phi_v = (-\sin(\theta + u), \cos(\theta + u), 1), \\ \phi_u \times \phi_v = (\cos(\theta + u) - v\sin(\theta + u), \sin(\theta + u) + v\cos(\theta + u), \cdot), \end{array}\right\}$$

la tercera coordenada és llarga de calcular i tampoc juga un paper molt important en el resultat. Si $\phi_u \times \phi_v = 0$, en particular les dues primeres coordenades valen zero, però:

$$\cos(\theta + u) - v\sin(\theta + u) = \sin(\theta + u) + v\cos(\theta + u) \implies \cos(\theta + u) = \sin(\theta + u) = 0,$$

però tal cosa és impossible. Per tant, $\phi_u \times \phi_v \neq 0$ i per a tot $(u, v) \in \Omega$ ϕ_θ és regular. Se'ns demana ara trobar $\theta_1, \ldots, \theta_k$ de manera que:

$$S = \phi_{\theta_1}((-\pi, \pi) \times \mathbb{R}) \cup \cdots \cup \phi_{\theta_k}((-\pi, \pi) \times \mathbb{R}) = \operatorname{im}(\phi_{\theta_1}) \cup \cdots \cup \operatorname{im}(\phi_{\theta_k}).$$

Demostrarem que, de fet, que:

$$S = \phi_0((-\pi,\pi)\times\mathbb{R}) \cup \phi_\pi((-\pi,\pi)\times\mathbb{R}) = \mathrm{im}(\phi_{\theta_0}) \cup \mathrm{im}(\phi_{\theta_\pi}).$$

Estenem ϕ_0, definint $\tilde{\phi}_0 : [-\pi,\pi]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Vegem que $\mathrm{im}(\tilde{\phi}_0) = S$. Sigui (x,y,z) un punt qualsevol en S, volem trobar $(u,v) \mid \tilde{\phi}_0(u,v) = (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v) = (x,y,z)$; per tant, imposem $v = z$ i trobem u:

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos u + z\sin u \\ y &= \sin u + z\cos u \end{aligned}\right\} \implies \cos u = \frac{x+2y}{1+z^2},\ \sin u = \frac{y-zx}{1+z^2}.$$

Per tant, existeix un u tal que $(\cos u, \sin u)$ té norma 1. Comprovem-ho:

$$\left(\frac{x+zy}{1+z^2}\right)^2 + \left(\frac{y-zx}{1+z^2}\right)^2 = \frac{(x^2+y^2)(1+z^2)}{(1+z^2)^2} \overset{(x,y,z)\in S}{=} \frac{(1+z^2)^2}{(1+z^2)^2} = 1.$$

Si estenem la definició de ϕ_0 a una aplicació $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, com hem fet amb $\tilde{\phi}_0$ aleshores obtenim una aplicació exhaustiva. Però llavors deixarà de ser injectiva i, per tant, no serà una carta. En definitiva, tot $(x,y,z) \in S$ és a $\mathrm{im}(\tilde{\phi}_0)$. Si $(x,y,z) = \tilde{\phi}_0(u,v)$, $u \in (-\pi,\pi)$ implica que $(x,y,z) \in \mathrm{im}(\phi_0)$. Si $(x,y,z) = \tilde{\phi}_0(\pm\pi, v)$, aleshores $(x,y,z) = \phi_\pi(0,v)$ i, per tant, $S = \mathrm{im}(\phi_0) \cup \mathrm{im}(\phi_\pi)$.

3. Sabem que $p = \tilde{\phi}_0(u_0,v_0)$.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_0(u,v) &= (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v), \\ \tilde{\phi}(u_0,v) &= (\cos u_0, \sin u_0, 0) + v(-\sin u_0, \cos u_0, 1). \end{aligned}$$

Per tant, és una recta $r_1 : (\cos u_0, \sin u_0, 0) + \langle(-\sin u_0, \cos u_0, 1)\rangle$ (equivalentment, $r_1 : (\cos u_0, \sin u_0, 0) + \lambda(-\sin u_0, \cos u_0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$) tal que $r_1 \subset S$ i $p \in r_1$ si prenem $\lambda = v_0$. Recordem que $\mathrm{im}(\tilde{\phi}_0 \subset S$ perquè:

$$(\cos u - v\sin v)^2 + (\sin u + v\cos u)^2 = v^2 + 1.$$

Considerem ara $r_2 : (\cos u_0, \sin u_0, 0) + \lambda(\sin u_0, -\cos u_0, 1)$. Es pot comprovar que $r_2 \subset S$ i $p \in r_2$, prenent $\lambda = -v_0$. ■

Observació 2.13. Sigui $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superfície parametritzada i $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba. α està a φ si existeix una corba $\beta : I \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(t) = \varphi(\beta(t))$. $\beta(t) = (u(t), v(t))$ són les coordenades de α en φ.

Exercici 2.14. *Siguin S la superfície regular d'equació $z^2 + y - x^3 = 0$, φ la parametrització de S definida per $\varphi(u,v) = (u, u^3 - v^2, v)$ i $\alpha(t) = (e^t, e^{3t} - t^2, t)$.*

1. *Proveu que la corba parametritzada α està continguda en S i trobeu les coordenades d'α respecte de φ.*
2. *Trobeu les components d'α' en la base φ_u, φ_v del pla tangent a S. Existeix algun punt d'α en què α' sigui paral·lel a φ_u?*

Demostració.

1. Hem de veure que α és a S (en altres paraules, que si $(x, y, z) \in \alpha$, aleshores $(x, y, z) \in S$) i trobar β. Imposem $\varphi(u(t), v(t)) = \alpha(t)$, pel que $(u, u^3 - v^2, v) = (e^t, e^{3t} - t, t)$ i $\beta(t) = (e^t, t)$.
2. Ara se'ns demana trobar les components d'α' en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ del pla tangent a S. Observem que $\alpha(t) = \varphi(\beta(t)) = \varphi(u(t), v(t))$ i:

$$\alpha'(t) = u'(t) \cdot \varphi_u(u(t), v(t)) + v'(t) \cdot \varphi_v(u(t), v(t)).$$

Per tant, els coeficients d'$\alpha(t)$ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ són $u'(t) = e^t$ i $v'(t) = 1$. No existeix cap punt d'α tal que α' sigui paral·lel a φ_u perquè la component φ_v d'α' és sempre 1. ■

Exercici 2.15. *Sigui $\varphi(u, v) = (a \cos v, a \sin v, u)$, per a tot $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.*

1. *Proveu que φ és una superfície parametritzada regular tal que la seva traça és el cilindre $x^2 + y^2 = a^2$.*
2. *Trobeu els coeficients de la primera forma fonamental.*
3. *Proveu que la traça de l'hèlice $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ està continguda dins la imatge φ i trobeu funcions u, v tal que $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$.*
4. *Trobeu la longitud de la corba α de l'apartat anterior entre $t = 0$ i $t = 2\pi$ utilitzant la primera forma fonamental.*

Demostració.

1. És clar que φ és diferenciable. Derivant φ, veiem que $\varphi_u = (0, 0, 1)$ i $\varphi_v = (-a \sin v, a \cos v, 0)$. A més a més, $\operatorname{rang}(\nabla\varphi) = 2$, ja que:

$$\begin{vmatrix} -a \sin v & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} a \cos v & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

no es poden anul·lar simultàniament, ja que això implicaria que $\sin v = \cos v = 0$. Per tant, φ és regular. Ara hem de provar que $\operatorname{im}(\varphi) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = a^2\} = C_a$.

- $\subseteq$ Donat $(x, y, z) \in C_a$, volem veure $\{(u, v) \mid \varphi(u, v) = (x, y, z)\}$, així que ho imposem; per tant, a la tercera coordenada tenim que $u = z$. A més:

$$a \cos v = x,\ a \sin v = y \implies \cos v = \frac{x}{a},\ \sin v = \frac{y}{a}.$$

  Pel que $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{a})^2 = 1$, com volíem veure.
- $\supseteq$ Exercici (pel que sembla).

2. Calcular la primera forma fonamental, I_φ, és bastant rutinari:

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1,\ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0,\ G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = a^2 \implies I_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

3. En altres paraules, hem de comprovar que $\mathrm{im}(\varphi) \subset C_\alpha$ i trobar funcions $u(t), v(t)$ tals que $\alpha(t) = (u(t), v(t))$. Per tant, imposem $\varphi(u,v) = \alpha(t)$:

$$(a\cos v(t), a\sin v(t), u(t)) = (a\cos t, a\sin t, bt) \implies \begin{cases} \cos v(t) = \cos t \\ \sin v(t) = \sin t \\ u(t) = bt \end{cases}$$

   Queda clar que $v(t) = t + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ i prenent $k = 0$, $\beta(t) = (u(t), v(t)) = (bt, t)$.

4. Finalment, sabem que $\|\alpha'(t)\|^2 = \langle \beta'(t), I_p(\beta(t)) \cdot \beta'(t) \rangle$, pel que:

$$\beta'(t) = (b, 1),\ \|\alpha'(t)\|^2 = (b, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$
$$l(\alpha; 0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = 2\pi(a^2 + b^2).$$

   I ja hem acabat. ■

Exercici 2.16. *Sigui φ la superfície parametritzada regular:*

$$\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2),\ 0 < u,\ 0 < v < 2\pi.$$

1. *Trobeu els coeficients E, F, G de la primera forma fonamental.*
2. *Trobeu l'angle que formen les corbes $v = u + 1$, $v = 3 - u$ en el seu punt de contacte.*
3. *Trobeu la longitud de la corba $u = 3$, per a v tal que $\frac{\pi}{2} \leq v \leq \pi$.*

Demostració.

1. Derivant no té cap dificultat. Trobem que $\varphi_u = (\cos v, \sin v, 2u)$ i $\varphi_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$, mentre que $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 + 4u^2$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$ i $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = u^2$. Així doncs:

$$I_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

2. D'altra banda, $r_1 : v = u + 1$ i $r_2 : v = 3 - u$ en el seu punt d'intersecció. Aquest punt és $\alpha(1) = \beta(1)$, i se'ns demana calcular el cosinus de l'angle amb el qual es tallen les corbes $\varphi(\alpha(t)) = \tilde{\alpha}(t)$ i $\varphi(\beta(t)) = \tilde{\beta}(t)$ quan $t = 1$. La recta r_1 és $\alpha(t) = (t, t+1)$ i $\beta(s) = (s, 3 - s)$ (que no té per què ser el mateix paràmetre que t). Intersequem $u + 1 = 3 - u$, pel que obtenim $(u,v) = (1,2)$ al punt $(\alpha(1), \beta(1)) = (u,v) = (1,2)$. Pel que definim volem saber:

$$\cos(\measuredangle(\tilde{\alpha}(1), \tilde{\beta}(1))) = \frac{\langle \tilde{\alpha}'(1), \tilde{\beta}'(1) \rangle}{\|\tilde{\alpha}'(1)\| \cdot \|\tilde{\beta}'(1)\|}.$$

   Calculant $\langle \tilde{\alpha}'(1), \tilde{\beta}'(1) \rangle$,

$$\langle \tilde{\alpha}'(1), \tilde{\beta}'(1) \rangle = \langle \alpha'(1), I_\varphi(\beta(1)) \cdot \beta'(1) \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4.$$

També cal veure que:

$$\|\tilde{\alpha}(1)\| = \|\varphi_u(1,2) + \varphi_v(1,2)\| = \sqrt{E(1,2) + 2F(1,2) + G(1,2)} = \sqrt{6},$$
$$\|\tilde{\beta}(1)\| = \|\varphi_u(1,2) - \varphi_v(1,2)\| = \sqrt{E(1,2) - 2F(1,2) + G(1,2)} = \sqrt{6}.$$

Per tant, $\cos(\measuredangle(\tilde{\alpha}(1), \tilde{\beta}(1))) = \frac{2}{3}$.

3. Sigui $\eta(t) = (3, t)$. Se'ns demana calcular la longitud de la corba $\varphi(\nu(t)) = \tilde{\nu}(t)$ entre $t = \frac{\pi}{2}$ i $t = \pi$. Per la regla de la cadena se satisfà $\tilde{\eta}'(t) = \varphi_v(\eta(t))$, de manera que $\|\tilde{\eta}'(t)\| = \sqrt{G(\eta(t))} = 3$. Per tant,
$$\operatorname{long}\left(\tilde{\eta}; \frac{\pi}{2}, \pi\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 3\, du = \frac{3\pi}{2}. \qquad \blacksquare$$

Exercici 2.17 (Helicoide recte). *Sigui φ l'helicoide recte definit per $\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Proveu que:*

1. *φ és una superfície regular reglada amb generatrius $v = v_0$.*
2. *El pla tangent a φ al llarg d'una generatriu $v = v_0$ conté aquesta generatriu, i si $\theta(u)$ denota l'angle que forma el pla tangent a φ en un punt (u, v_0) de la generatriu amb l'eix Oz, llavors $\tan\theta(u)$ és proporcional a la distància u del punt $\varphi(u, v_0)$ a l'eix Oz.*
3. *Proveu que φ és una superfície no cilíndrica i trobeu el seu paràmetre de distribució així com la seva línia d'estricció.*

Demostració.

1. Hem de veure que l'helicoide és reglat amb generatrius $\{v = v_0\}$. Veiem que $\varphi(u,v) = (0,0,av) + u(\cos v, \cos v, 0) = \alpha(v) + u \cdot w(v)$, pel que φ és reglada. Les generatrius són $L_{v_0} = \{v = v_0\}$.
2. Hem de provar que el pla tangent afí a φ en un punt L_{v_0} conté la generatriu. Fixat v_0, un punt arbitrari de L_{v_0} és $p = \varphi(u, v_0) = (0,0,av_0) + u(\cos v_0, \sin v_0, 0)$. El pla tangent queda com:
$$\left.\begin{array}{r}\varphi_u(u,v_0) = (\cos v_0, \sin v_0, 0)\\ \varphi_v(u,v) = (-u\sin v_0, u\cos v_0, a)(\varphi_u \times \varphi_v)(u,v_0) = (a\sin v_0, -a\cos v_0, u)\end{array}\right\}$$
$$\implies \pi_{u,v_0} = p + \langle (a\sin v_0, -a\cos v_0, u)\rangle^{\perp}.$$
Volem veure que $L_{v_0} \subset \pi_{u,v_0}$. Sigui $q \in L_{v_0}$,
$$q = \varphi(\tilde{u}, v_0) = (0,0,av_0) + \tilde{u}(\cos v_0, \sin v_0, 0).$$
Sabem que $q \in \pi_{u,v_0} \iff q - p \perp (a\sin v_0, -a\cos v_0, u)$. Aleshores:
$$\langle a - p, \varphi_u \times \varphi_v(u,v_0)\rangle = \langle(\tilde{u} \times u)(\cos v_0, \sin v_0, 0), (a\sin v_0, -a\cos v_0, u)\rangle = (\tilde{u} - u)\cdot 0 = 0.$$
3. Si $\theta(u)$ és l'angle entre el pla tangent a φ en (u, v_0) i l'eix Oz, demostrar que $\tan(u)$ és proporcional a u. Recordem que l'angle entre una recta i un pla és el suplementari $\frac{\pi}{2} - \theta$ de l'angle $\alpha(u)$ entre la recta

i el vector normal a π. Teníem que un vector normal al pla π_{u,v_0} és $\vec{n} = (a\sin v_0, -a\cos v_0, u)$ i un vector director de Oz és $(0,0,1)$. Per tant:

$$\cos(\alpha(u)) = \frac{\langle (a\sin v_0, -a\cos v_0, u), (0,0,1)\rangle}{\|\vec{n}\|} = \frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}.$$

Com $\theta(u) = \frac{\pi}{2} - \alpha(u) \implies \sin(\theta(u)) = \cos(\alpha(u))$ i, per tant, $\sin(\theta(u)) = \frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}$. Així doncs, passem a la tangent:

$$\sin^2(\theta(u)) = \frac{u^2}{a^2+u^2},\ \cos^2(\theta(u)) = 1 - \sin^2(\theta(u)) = \frac{a^2}{a^2+u^2},\ \tan^2(\theta(u)) = \frac{u^2}{a^2},$$

pel que $\tan(\theta(u)) = \pm\frac{1}{a}\cdot u$, el que volíem veure. ■

Exercici 2.18. *Trobeu la superfície reglada que té per generatrius les rectes que intersequen les rectes* $\{x = 0, z + a = 0\}$, $\{y = 0, z = a\}$ *i la circumferència* $\{x^2 + y^2 = r^2, z = 0\}$.

Demostració. Se'ns demana trobar una superfície reglada que té per generatrius les rectes que intersequen $r_1 : \{x = 0, z = -a\}$, $r_2 : \{y = 0, z = a\}$, $C : \{x^2 + y^2 = r^2, z = 0\}$. Plantegem les equacions paramètriques:

$$r_1 : (0,0,-a) + \lambda(1,0,0),\ \ r_2 : (0,0,a) + \mu(0,1,0).$$

Donat un $p = (x, y, 0) \in C$, siguin $q_1 \in r_1$ i $q_2 \in r_2$ tals que la recta $q_1 \vee q_2$ conté p. Escrivim q_1 i q_2 com a punts arbitraris, és a dir, $q_1 = (\lambda, 0, -a)$ i $q_2 = (\mu, 0, a)$. És a dir, $r_p = q_1 + \langle q_2 - q_1\rangle = (0, \lambda, -a) + \gamma(\mu, -\lambda, 2a)$ i imposem $p = (x, y, 0) \in r_p$ amb tercera coordenada $0 = -a + 2\gamma a$ i $\gamma = \frac{1}{2}$. Així:

$$\left.\begin{array}{r} x = \frac{1}{2}\mu \implies \mu = 2x \\ y = -\frac{1}{2}\lambda \implies \lambda = -2y \end{array}\right\}\ q_1 = (0, -2y, -a),\ \ q_2 = (2x, 0, a).$$ ■

Exercici 2.19. *Sigui S un subconjunt d'$\mathbb{R}^3$ amb la propietat de què per a cada $p \in S$ existeix un obert $p \in \mathcal{V} \subset S$ tal que $\mathcal{V}$ és una superfície. Aleshores, S és una superfície.*

Demostració. Sigui $p \in S$ i provem que per a cada p existeix una parametrització. Per hipòtesi, existeix un obert $\mathcal{V} \subset S$ de p que és una superfície. Per tant, existeix $X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{W} \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ una parametrització per a la superfície $\mathcal{V}$. Vegem que $X : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{W}$ també és una parametrització d'S. Observem que X és un homeomorfisme (transitivitat de les topologies induïdes), $X : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és diferenciable i el rang de la derivada és 2 (és una qüestió local).

L'únic que queda per provar és que $\mathcal{W}$ és un obert en S, però això és cert ja que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V} \subset S$ és un obert d'$\mathcal{V}$ i $\mathcal{V}$ també ho és d'S. ■

3 Llista 3

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació. f és diferenciable si, i només si, $f \circ \varphi : \mathcal{U}_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és diferenciable per a tota carta $(\mathcal{U}, \varphi)$. A més, $df|_p : T_p(S) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és l'única aplicació lineal tal que:

$$df|_p(\varphi_u) = \frac{\partial f_\circ \varphi}{\partial u}, \; df|_p(\varphi_v) = \frac{\partial f_\circ \varphi}{\partial v}. \tag{3.1}$$

Exercici 3.1. *Sigui V un obert de $\mathbb{R}^3$, S una superfície regular continguda a V, i $F : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació diferenciable. Demostreu que la restricció $f := F|_S : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és diferenciable. A més, per a tot $p \in S$:*

$$d_p f = \left(d_p F\right)_{|T_p S}$$

***Aplicació del resultat anterior**: Siguin V un obert de $\mathbb{R}^3$, $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable, $a \in f(V)$ un valor regular de f i $S = f^{-1}(a)$. Demostreu que $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida per*

$$N(\mathbf{x}) = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x})}{|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})|}$$

és una aplicació diferenciable tal que $N(\mathbf{x})$ és un vector normal unitari de S en $\mathbf{x}$, per a tot $\mathbf{x} \in S$.

Demostració. Sigui $S \subset V$ una superfície regular, definim $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f(p) = F(p)$.

1. Volem veure que f és diferenciable. Sigui $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una carta de S. Tenim $f \circ \varphi = F \circ \varphi$. Però $F \circ \varphi$ és composició d'aplicacions diferenciables entre oberts de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^m$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathcal{V} \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

   Com a conclusió, f és diferenciable.

2. Volem veure que $\forall p \in S$, tenim que $d_p(f) = d_p(F)|_{T_p(S)}$; per això, veurem que $d_p(F)|_{T_p(S)}$ satisfà (3.1). Sigui $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta de S tal que $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$d_p(F(\varphi_u)) = \frac{\partial (F \circ \varphi)}{\partial u} = \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial u}$$
$$d_p(F(\varphi_v)) = \frac{\partial (F \circ \varphi)}{\partial v} = \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial v}$$

   $d_p(F)$ actua en una base $\{\varphi_u, \varphi_v\}|_p$ igual que $d_p(f)$, pel que $d_p(F)|_{T_p(S)} = d_p(f)$.

3. Sigui $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable de $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$, $S = f^{-1}(a)$ on a és un valor regular (i.e. S és superfície regular continguda en $\mathcal{V}$). Volem veure que N definit com:

$$\begin{aligned} N : \; S &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\longmapsto \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}. \end{aligned}$$

és diferenciable i $N(p)$ és un vector normal unitari de S en p. Sigui $\mathcal{U} = \{p \in \mathcal{V} \mid \nabla f(p) \neq (0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$, que és un obert de $\mathcal{V}$ ja que és el complementari d'un tancat. Aleshores, $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definit de la següent manera està ben definit (el gradient mai no s'anul·la):

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \frac{\nabla f(x,y,z)}{\|\nabla f(x,y,z)\|}. \end{array}$$

A més, $S \subset \mathcal{U}$. Pel primer apartat, $F|_S = N$ és diferenciable. Sabem (pel Teorema del Gradient) que $T_p(S) = \langle \nabla f_p \rangle^\perp$ i $N(p) \parallel \nabla f$ i $N(p)$ és normal a S en p i $\|N(p)\| = 1$. ∎

Exercici 3.2. *Proveu que la diferencial de l'aplicació normal d'un pla o d'una esfera és una homotècia amb raó constant. Recíprocament, proveu que si S és una superfície connexa tal que la diferencial de N en cada punt és una homotècia, aleshores la raó de la homotècia no depèn del punt i S està continguda en un pla o en una esfera.*

Demostració.

$\Rightarrow$ Donada una superfície S connexa, posem el camp normal $N : S \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Si S és un pla, $N(p) = \vec{v}$ per un vector unitari $\vec{v}$ i N és constant, a més que $d_p(N) \equiv 0$ (es pot formalitzar per cartes). Si S és una esfera $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, aleshores $N(x,y,z) = \pm\frac{(x,y,z)}{r} \in \mathbb{R}^3$. Fixem-nos que $N = F|_S$ on $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(x,y,z) \longmapsto \frac{(x,y,z)}{r}$, pel que F és diferenciable. Com F és lineal, $dF = F$ i $d_p(N) = dF|_{T_p(S)}$ i per tant és una homotècia de raó $\frac{1}{r}$.

$\Leftarrow$ Per hipòtesi, existeix una aplicació $\lambda : S \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $v \in T_p(S)$ compleix $d_p(N(v)) = \lambda(p) \cdot v$. En cap moment hem dit, però, que λ sigui diferenciable. Per veure que λ és constant, vegem que ho és (diferenciable) i que $d_p(\lambda) = 0$, per a tot $p \in S$. Sigui una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de S tal que $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, compatible amb l'orientació donada per N (cf. Teoria) i $\mathcal{U}$ sigui connex. Per tant,

$$\begin{aligned} \tilde{N}(u,v) &= (N \circ \varphi)(u,v) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \\ \frac{\partial \tilde{N}}{\partial u} &= \frac{\partial N \circ \varphi}{\partial u} = dN|_{\varphi(u,v)}(\phi_u(u,v)) = \lambda(\varphi(u,v)) \cdot \phi_u(u,v) \\ \frac{\partial \tilde{N}}{\partial v} &= \frac{\partial N \circ \varphi}{\partial v} = dN|_{\varphi(u,v)}(\phi_v(u,v)) = \lambda(\varphi(u,v)) \cdot \phi_v(u,v). \end{aligned}$$

Fixem-nos que si agafem $\mu = \lambda \circ \varphi$, se satisfà $\tilde{N}_u = \mu\varphi_u$ i $\tilde{N}_v = \mu\varphi_v$, i tenim $\mu = \frac{\langle \tilde{N}_u, \phi_u \rangle}{\langle \phi_u, \phi_u \rangle}$ i, per tant, μ és diferenciable. Com φ era arbitrària, λ és diferenciable. Notem que:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{uv} &= \frac{\partial \tilde{N}_u}{\partial v} = \frac{\partial \mu}{\partial v} \cdot \phi_u(u,v) + \mu \cdot \phi_{uv}(u,v), \\ \tilde{N}_{vu} &= \frac{\partial \tilde{N}_v}{\partial u} = \frac{\partial \mu}{\partial u} \cdot \phi_v(u,v) + \mu \cdot \phi_{vu}(u,v). \end{aligned}$$

Com $\tilde{N}_{uv} = \tilde{N}_{vu}$ i $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, restant les dues igualtats anteriors obtenim:

$$\frac{\partial \mu}{\partial v}\phi_u - \frac{\partial \mu}{\partial u}\phi_v = 0.$$

$\{\phi_u, \phi_v\}$ són base, aleshores $\frac{\partial \mu}{\partial u} = 0$ i $d\mu = 0$; $\frac{\partial \mu}{\partial v} = 0$ i $d\lambda = 0$. I amb això hem demostrat que la homotècia és constant. ∎

Exercici 3.3. *Sigui S la gràfica de $z = x^2 + ay^2 - y^3$, i $p = (0,0,0) \in S$. Classifiqueu, segons les curvatures media i de Gauss, el punt p en funció del paràmetre $a \in \mathbb{R}$.*

Exercici 3.4. *Sigui S la gràfica d'una funció $z = h(x,y)$ tal que $h(0,0) = 0$ i $dh_{(0,0)} = 0$. Sigui $p = (0,0,0)$ i suposem que S està orientada de manera que $N(p) = (0,0,1)$. Proveu que, en la base $\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ de T_pS, la matriu de l'endomorfisme d_pN és la matriu hessiana de $-h$ en $(0,0)$.*

Demostració. Tenim la carta global $(\mathcal{U}, \varphi)$, definida per $\varphi(u,v) = (u, v, h(u,v))$; podem obtenir fàcilment les derivades parcials $\varphi_u = (1, 0, h_u)$ i $\varphi_v = (0, 1, h_v)$, pel que $\varphi_u \times \varphi_v = (-h_u, h_v, 1)$. Aleshores,

$$\tilde{N}(u,v) = N \circ \varphi(u,v) = \frac{(-h_u, h_v, 1)}{\|(-h_u, h_v, 1)\|} = \frac{(-h_u, h_v, 1)}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}, \quad N(p) = \tilde{N}(0,0) = (0,0,1).$$

Resulta que amb això podem dir que φ és compatible amb la orientació. Se satisfà que $p = (0,0,0) = \varphi(0,0)$. Per calcular la matriu de $d_p(N)$ en la base $\varphi_u(0,0) = (1,0,0)$ i $\varphi_v(0,0) = (0,1,0)$ hem d'escriure $\tilde{N}_u(0,0)$ i $\tilde{N}_v(0,0)$ com a combinació lineal dels vectors $\varphi_u(0,0), \varphi_v(0,0)$. Definit $g(u,v) = \|\varphi_u \times \varphi_v\|$, se satisfà:

$$\tilde{N}_u = \frac{(-h_{uu}, -h_{vu}, 0) \cdot g - (-h_u, -h_v, 1)\frac{\partial g}{\partial u}}{g^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{2h_u h_{uu} + 2h_v h_{vu}}{2g}.$$

Com $h_u(0,0) = h_v(0,0) = 0$ per hipòtesi obtenim $\varphi_u(0,0) = (1,0,0)$ i $\varphi_v(0,0) = (0,1,0)$ i també:

$$g(0,0) = \sqrt{1 + h_u^2(0,0) + h_v^2(0,0)} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 0,$$

i per tant

$$N_u(0,0) = (-h_{uu}(0,0), -h_{vu}(0,0), 0) = -h_{uu}(0,0)\varphi_u(0,0) - h_{vu}(0,0)\varphi_v(0,0).$$
$$N_v(0,0) = (-h_{uv}(0,0), -h_{vv}(0,0), 0) = -h_{uv}(0,0)\varphi_u(0,0) - h_{vv}(0,0)\varphi_v(0,0).$$

Per tant, la matriu de $d_p(N)$ en base e_1, e_2 és:

$$\begin{pmatrix} -h_{uu}(0,0) & -h_{vu}(0,0) \\ -h_{uv}(0,0) & -h_{vv}(0,0) \end{pmatrix} = -H_{e_h}(0,0).$$ ∎

Exercici 3.5. *Sigui S una superfície de revolució i suposem que:*

$$\varphi(u,v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u)), \quad u_0 < u < u_1, \ 0 < v < 2\pi, \ a(u) > 0,$$

és una carta de S. Notem $c(u) = \|(a'(u), b'(u))\|$, sigui $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$. Proveu les següents fórmules:

$$k_1(u,v) = \frac{a'b'' - a''b'}{c^3}(u) = k_\alpha(u), \quad k_2 = \frac{b'}{ac}, \quad K = \frac{b'(a'b'' - a''b')}{ac^4}, \quad H = \frac{a'b'' - a''b'}{2c^3} + \frac{b'}{2ac}$$

on $k_\alpha(u)$ és la curvatura d'α. Concloure que $K(\varphi(u,v)) = 0$ si $k_\alpha(u) = 0$, en canvi si $k_\alpha(u) \neq 0$, el signe de $K(\varphi(u,v))$ depèn de la concavitat de la corba $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$ en relació a l'eix Oz. Proveu que els punts d'inflexió de la corba α tals que la tangent és horitzontal formen un paral·lel de punts plans.

Demostració. Derivant,

$$
\begin{aligned}
&\varphi_u = (a'\cos v, a'\sin v, b'),\ \ \varphi_v = (-a\sin v, a\cos v, 0),\ \ \tilde{N} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-b'\cos v, -b'\sin v, a')}{c} \\
&\tilde{N}_u = \frac{1}{c^2}\left(-b''\cos v\cdot c + b'\cos v\frac{a'a''+b'b''}{c}, -b''\sin v\cdot c + b'\sin v\frac{a'a''+b'b''}{c}, a''c - a'\frac{a'a''+b'b''}{c}\right) \\
&\quad = \left(\frac{b'a''-b''a'}{c^3}\right)\varphi_u \\
&\tilde{N}_v = \frac{1}{c}(b'\sin v, -b'\cos v, 0) = -\frac{b'}{ac}\varphi_v
\end{aligned}
$$

Els valors propis són:

$$
\begin{aligned}
k_1(u,v) &= \frac{b'a''-b''a'}{c^3} = k_\alpha(u),\ \ k_2(u,v) = -\frac{b}{ac}, \\
k_3(u,v) &= \frac{b'(a'b''-b'a'')}{ac^4},\ \ H(u,v) = -\frac{1}{2}\left(\frac{b'a''-b''a'}{c^3} - \frac{b'}{ac}\right).
\end{aligned}
$$

Concloem que si $K(\varphi(u,v)) = k_\alpha(u) = 0$, aleshores $k_1(u,v) = 0$ i per tant $k(u,v) = 0$. Si ara posem $k_\alpha(u) \neq 0$ i definim la corba $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$. Els punts d'inflexió de la corba (on $k_\alpha(u) = 0$) on la corba és horitzontal ($b' = 0$) corresponen a punts plans de la superfície.

$$
\left.\begin{aligned} k_1(u,v) = 0 \\ k_2(u,v) = 0 \end{aligned}\right\} \implies k = 0,\ H = 0 \implies \varphi(u,v) \text{ és un punt pla.} \qquad \blacksquare
$$

Exercici 3.6. *Proveu que si un pla és tangent a una superfície regular orientable al llarg d'una corba, llavors els punts d'aquesta corba tenen curvatura de Gauss nul·la. Concloure a partir d'això que les superfícies desenvolupables tenen curvatura de Gauss igual a zero.*

Demostració. La idea seria veure que $K(\alpha(t)) = 0$ per a tot $t \in \mathbb{R}$, i volem veure que $\alpha'(t)$ és un vector propi de $d_{\alpha(t)}(N)$. Sigui $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ l'aplicació de Gauss i definim $N \circ \alpha : I \longrightarrow \mathbb{S}^2$. Com que el pla π és tangent a S en tot punt $\alpha(t)$, N és constant al llarg d'α (si es vol, $T_{\alpha(t)}(S) = \pi$, per a tot t); és a dir, $N(\alpha(t))$ és constant. Derivant, $d_{\alpha(t)}(N(\alpha'(t))) = \vec{0}$. α és 1-regular, pel que $\alpha'(t) \neq 0$ i el rang és $\operatorname{rang}(d_{\alpha(t)}(N)) < 2$, per a tot $t \in I$. Per tant, $\det(d_{\alpha(t)}(N)) = 0$ i $K(\alpha(t)) = 0$.

A partir d'això, se'ns demana concloure que les superfícies desenvolupables tenen curvatura de Gauss igual a zero. Val la pena recordar la següent definició (no la numerem).

Definició. Sigui $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ un obert, definida per $\varphi(u,v) = \alpha(u) + v \cdot w(u)$. És desenvolupable si $\forall u_0$ el vector normal de φ és constant al llarg de la generatriu $L_{u_0} = \{\varphi(u_0, v) \mid v \in \mathbb{R}\}$.

Donat (u_0, v_0), està a la corba $L_{u_0}(v) = \varphi(u_0, v)$, que està continguda en un pla tangent a S, $\varphi(u_0, v_0) + \langle N(u_0, v_0)\rangle^\perp$. $\blacksquare$

Exercici 3.7. *Sigui S una superfície regular orientable. Proveu que si $\alpha : I \longrightarrow S$ és una corba 1-regular d'S formada per punts plans d'S, llavors α és una corba plana. Exemple: sobre $\varphi(u,v) = ((1+u)\cos v, v(1+u)\sin v, u^4)$ la corba coordenada $u=1$ està formada per punts plans.*

Demostració. La idea d'aquesta demostració passa per veure que N no varia al llarg d'α, és a dir, $d_{\alpha(t)}N(\alpha'(t)) = \vec{0}$, per a tot t. Sigui $A(t)$ la matriu de $d_{\alpha(t)}(N)$ en base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ per a certa carta $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que conté $\alpha(t)$. Sabem que $k(\alpha(t)) = \det(A(t))$ i $H(\alpha(t)) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(A(t))$. Que $\det(A(t)) = 0$ implica que 0 és valor propi i $\operatorname{tr}(A(t)) = 0$, la suma dels VAPs, ens diu que 0 és VAP de multiplicitat 2. Ara bé, $d_{\alpha(t)}(N)$ és un endomorfisme simètric; per tant, diagonalitza i $d_{\alpha(t)}(N)$ és idènticament zero. Com a conclusió, resulta que $d_{\alpha(t)}(N(\alpha'(t)))$, per a tot t, pel que N no varia al llarg de la corba.

Definim $\pi : \alpha(t_0) + \langle N(\alpha(t_0))\rangle^\perp$, pel que donat $\alpha(t)$, cal demostrar que $\alpha(t) \in \pi$. Sigui $g(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N(\alpha(t_0))\rangle = 0$, que clarament compleix $g(t_0) = 0$. Derivant,

$$g'(t) = \langle \alpha'(t), N(\alpha(t_0))\rangle \overset{6}{=} \langle \alpha'(t), N(\alpha(t))\rangle = 0. \qquad \blacksquare$$

Exercici 3.8 (Superfícies reglades no cilíndriques i curvatura de Gauss). *Sigui $\varphi(u,v) = \alpha(u) + v\cdot w(u)$ una superfície reglada no cilíndrica tal que $\|w\| = 1$ i $\langle \alpha', w'\rangle = 0$. Sigui $\lambda = \frac{[\alpha', w, w']}{\|w'\|^2}$.*

1. *Trobeu la primera forma fonamental de φ i proveu que $EG - F^2 = (\lambda^2 + v^2)\|w'\|^2$.*
2. *Trobeu els coeficients f, g de la segona forma fonamental i proveu que $K(u,v) = -\frac{\lambda^2(u)}{(\lambda^2(u)+v^2)^2}$.*
3. *Proveu que si S és una superfície el·líptica llavors S no pot ser reglada.*

Demostració.

1. Sabem que $\|w\|^2 = \langle w, w\rangle = 1$ i derivant $\langle w', w\rangle = 0$. Derivant, ara sobre φ, $\varphi_u = \alpha'(u) + v\cdot w'(u)$ i $\varphi_v = w(u)$. Si seguim derivant, $\varphi_{uu} = \alpha''(u) + vw''(u)$, $\varphi_{uv} = w'(u)$ i $\varphi_{vv} = 0$. Amb tot, podem calcular $EG - F^2$:

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u\rangle = \langle \alpha' + vw', \alpha' + vw'\rangle = \|\alpha\|^2 + v^2\|w'\|^2.$$

$$F = \langle \alpha' + vw', w\rangle = \langle \alpha', w\rangle + v\langle w', w\rangle = \langle \alpha', w\rangle.$$

$$G = \langle w, w\rangle = \|w\|^2 = 1.$$

$$EG - F^2 = \|\alpha'\|^2 + v^2\|w'\|^2 - \langle \alpha', w\rangle^2 = \left(\frac{\|\alpha'\|^2 - \langle \alpha', w\rangle^2}{\|w'\|^2} + v^2\right)\|w'\|^2.$$

Definim $\tilde{T} = \frac{(\|\alpha'\|^2 - \langle \alpha', w\rangle^2)}{\|w'\|^2}$. Sabem que $[\alpha', w, w'] = \langle \alpha' \times w, w'\rangle$. Tenim w, w' linealment independents[7], $\langle \alpha', w'\rangle = 0$ (per hipòtesi de l'enunciat) i $\langle w, w'\rangle = 0$ (ho hem vist al principi). Tot plegat $\alpha' \times w$ és paral·lel a w' i això implica que $\alpha' \times w$ és perpendicular a $w' \times w$. D'altra banda, com $\langle w, w\rangle = 1$

[6] Usem que N és constant al llarg de α, i.e. $N(\alpha(t_0)) = N(\alpha(t))$ per a tot t. En la següent igualtat, cal observar que $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}(S) = \langle N(\alpha(t))\rangle^\perp$.

[7] Justament pel fet que la superfície és reglada i no cilíndrica, ja que aquesta última condició ens dona $w \times w' \neq 0$.

(ho hem vist al principi) i $\|w\| = 1$, se satisfà $\|w' \times w\| = \|w'\|^2$. Prenent el vector unitari $\frac{w'}{\|w'\|}$, podríem haver posat:

$$\alpha' \times w = \frac{\langle \alpha' \times w, w' \rangle}{\|w'\|^2} \cdot w' = \frac{\|\alpha' \times w\|}{\|w'\|} \cdot w' = \lambda \|w'\|^2 \implies \|\alpha' \times w\|^2 = \lambda^2 \|w'\|^2.$$

I combinant els càlculs anteriors, $EG - F^2 = (\lambda^2 + v^2) \cdot \|w'\|^2$.

Observació 3.9. També podríem haver proposat, gràcies a la fórmula de Lagrange:

$$\|\alpha' \times w\|^2 = \langle \alpha' \times w, \alpha' \times w \rangle = \begin{vmatrix} \langle \alpha', \alpha' \rangle & \langle \alpha', w \rangle \\ \langle \alpha', w \rangle & \langle w, w \rangle \end{vmatrix} = \|\alpha'\|^2 - \langle \alpha', w \rangle^2.$$

Per tant,

$$\tilde{T} = \frac{\|\alpha'\|^2 - \langle \alpha', w \rangle^2}{\|w'\|^2} = \frac{\langle \alpha' \times w, \alpha' \times w \rangle}{\|w'\|^2} = \lambda.$$

Com volíem veure.

2. Recordem que la segona forma fonamental s'escriu com:

$$\mathbb{I}_\varphi = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}, \; e = \frac{[\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu}]}{\sqrt{EG - F^2}}, \; f = \frac{[\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv}]}{\sqrt{EG - F^2}}, \; g = \frac{[\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv}]}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Ara, $\varphi_u = \alpha' + vw'$, $\varphi_v = w(u)$, $\varphi_{uv} = w'(u)$ i $\varphi_{vv} = 0$, pel que:

$$\begin{aligned} g &= 0 \\ f &= \frac{[\alpha' + vw', w, w']}{\sqrt{\lambda^2 + v^2} \cdot |w'|} = \frac{[\alpha', w, w']}{\sqrt{\lambda^2 + v^2} \cdot \|w'\|} = \frac{\|w'\|^2 \cdot \lambda}{\sqrt{\lambda^2 + v^2} \cdot \|w'\|} = \frac{\lambda \cdot \|w'\|}{\sqrt{\lambda^2 + v^2}}. \end{aligned}$$

Sabem $K(u,v) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\lambda^2 \|w'\|}{(\lambda^2 + v^2)^2} \leq 0$.

3. Observem que el segon apartat implica que no pot ser reglada en el sentit del primer apartat. Demostrarem que si S és el·líptica, no pot contenir cap segment de recta. Suposem que existeix un segment de recta $\alpha : [0, \varepsilon] \longrightarrow S$, on $\alpha(t) = p + t\vec{v}$ (p un punt de la recta i $\vec{v}$ el vector director de la mateixa). Per a un $\varepsilon > 0$ prou petit, podem suposar que $\alpha(t) \in \operatorname{im}(\varphi)$ per una carta de S. Tenim $\alpha'(t) = v$ i com $\alpha(t) \in S$ per a tot t,

$$\begin{aligned} &\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}(S) \iff \langle \alpha'(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0 \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \langle v, \partial_t(N(\alpha(t))) \rangle = 0 \\ &\iff \langle v, d_{\alpha(t)}(N(\alpha'(t))) \rangle = 0 \iff \langle v, d_{\alpha(t)}(N(v)) \rangle = 0 \iff -\mathbb{I}_{\alpha(t)}(v,v) = 0. \end{aligned}$$

Ara, com usem $-\mathbb{I}_{\alpha(t)}(v,v) = 0$ per veure que $K(\alpha(t)) \not> 0$?

Proposició 3.10 (Equacions de Weingarten). *La matriu de $d_{\alpha(t)}(N)$ en base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ és:*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = -I_\varphi^{-1} \cdot \mathbb{I}_\varphi.$$

Sabem que $\det(I_\varphi) > 0$ i, a més, que $\mathbb{I}_\varphi$ no és definida positiva, ni definida negativa (els vaps de $\mathbb{I}_\varphi$ satisfan $\lambda\mu \leq 0$), pel que $\det(\mathbb{I}_\varphi) \leq 0$.

Observació 3.11. Quan prenem determinants d'una matriu, el signe «menys» de davant, no multiplica el determinant! Quan estem en dimensió 2, tenim que el determinant de $-A$ és el determinant de la mateixa matriu A (ja que és com multiplicar dues files per -1, i per tant el -1 surt dues vegades).

Vist aquest petit detall, acabem l'argument. Com el determinant de la primera forma fonamental és positiu, el determinant de la segona forma fonamental ≤ 0, i el signe menys no s'ha de tenir en compte en calcular el determinant, deduïm que el determinant de l'endomorfisme de Wiengarten ha de ser ≤ 0. Per tant, la superfície no pot ser reglada. ■

Exercici 3.12. *Siguin S i M les superfícies definides per les cartes $\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \log u)$ ($0 < u, 0 < v < 2\pi$) i $\psi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ ($0 < u, 0 < v < 2\pi$), respectivament. Proveu que l'expressió de la curvatura de Gauss en les coordenades (u,v) d'ambdues superfícies és la mateixa, però no tenen els mateixos coeficients de la primera forma fonamental.*

Demostració. El primer seria calcular la primera forma fonamental de φ i ψ, respectivament.

1. Calculem $\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$:

$$
\begin{array}{ccc}
\varphi_u = (\cos v, \sin v, \frac{1}{u}) & \varphi_v = (-u\sin v, u\cos v, 0) & \\
\varphi_{uu} = (0,0,-\frac{1}{u^2}) & \varphi_{uv} = \varphi_{vu} = (-\sin v, \cos v, 0) & \varphi_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0) \\
E = 1 + \frac{1}{u^2} & F = 0 & G = u^2
\end{array}
$$

   Per tant,

$$
e = \frac{-\frac{1}{u}}{\sqrt{u^2+1}},\ g = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\ f = 0 \implies K_\varphi = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(u^2+1)^2}.
$$

2. Anàlogament, podem trobar $\psi_u, \psi_v, \psi_{uu}, \psi_{uv}, \psi_{vv}$:

$$
\begin{array}{ccc}
\psi_u = (\cos v, \sin v, 0) & \psi_v = (-u\sin v, u\cos v, 1) & \\
\psi_{uu} = (0,0,0) & \psi_{uv} = \psi_{vu} = (-\sin v, \cos v, 0) & \psi_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0) \\
E = 1 & F = 0 & G = u^2 + 1
\end{array}
$$

   Per tant,

$$
e = 0,\ f = \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}} \implies K_\psi = \frac{-f^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(u^2+1)^2}.
$$

   Evidentment, l'expressió de la curvatura de Gauss en les coordenades (u,v) d'ambdues superfícies és la mateixa, però no tenen els mateixos coeficients de la primera forma fonamental. ■

Exercici 3.13. *Sigui $a > 0$. Trobeu la curvatura de Gauss i la curvatura mèdia de l'helicoide recte $\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$.*

Demostració. Calculem les derivades parcials de φ:

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (\cos v, \sin v, 0) \quad \varphi_v = (-u\sin v, u\cos v, a) \\ \varphi_{uu} &= 0 \qquad\qquad \varphi_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0) \qquad \varphi_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0). \end{aligned}$$

Per tant, els coeficients de la primera forma fonamental són $E = 1$, $F = 0$, $G = u^2+v^2$ i tot plegat $EG - F^2 = u^2 + a^2$. Els coeficients de la segona forma fonamental són $e = 0$, $f = -\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}$ i $g = 0$. Per tant, la curvatura de Gauss és:

$$k = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{a^2}{(u^2+a^2)^2}.$$

I la curvatura mitjana és:

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{0\cdot G - 2f\cdot 0 + 0\cdot E}{2(u^2+a^2)} = 0. \qquad \blacksquare$$

Exercici 3.14. *Trobeu les línies de curvatura i les línies asimptòtiques de l'helicoide recte.*

Observació 3.15. Si S és una superfície regular orientada amb aplicació de Gauss $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ i $\alpha : I \longrightarrow S$ és una corba, es diu que α és una línia de curvatura si per a tot $t \in I$ existeix un nombre real ξ tal que $d_{\alpha(t)}(N(\alpha'(t))) = \xi\alpha'(t)$.

Demostració. Definim $\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$, $a > 0$. Pel que fa a la curvatura, busquem $\alpha : I \longrightarrow S$ tal que $\alpha'(t)$ és un VEP de $d_{\alpha(t)}(N)$. En definitiva, volem $d_{\alpha(t)}(N(\alpha'(t))) = \zeta(t)\cdot\alpha'(t)$. Es pot trobar (de fet, ja ho hem fet en algun exercici anterior) que $E = 1$, $F = 0$, $G = u^2 + a^2$, $e = 0$, $f = \frac{-a}{\sqrt{u^2+a^2}}$, $g = 0$. Les equacions de Wiengarten corresponen a:

$$\begin{aligned} A = (d(N))_{\varphi_u,\varphi_v} = -I_\varphi^{-1}\cdot \mathbb{I}_\varphi &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2+a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ \frac{a}{(\sqrt{u^2+a^2})^3} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diagonalitzem, busquem els VAPs:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \frac{a^2}{(u^2+a^2)^2} \implies \lambda = \frac{\pm a}{u^2+a^2},\ \lambda_1 = \frac{a}{u^2+a^2},\ \lambda_2 = \frac{-a}{u^2+a^2}.$$

Pel que fa al vector propi de VAP λ_1, resolem $(A - \lambda Id|\vec{0})$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{a}{u^2+a^2} & \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ \frac{a}{(\sqrt{u^2+a^2})^3} & \frac{a}{u^2+a^2} \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{L_2 + \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}L_1}{}} \begin{pmatrix} -\frac{a}{u^2+a^2} & \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pel que la primera equació queda $-\frac{a}{u^2+a^2}x + \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}y = 0$ i per tant $x = \sqrt{u^2+a^2}\,y$. El vector propi de VAP λ_2 és $v_2 = (\sqrt{u^2+a^2}, -1)$. Donada una corba α en coordenades $(u(t), v(t))$ han de satisfer:

$$u'(t) = \sqrt{u(t)^2 + a^2},\ v'_\pm(t) = \pm 1 \implies u(t) = a\sin h(t + c_0),\ v(t) = \pm t + c_1,$$

c_0, c_1 són constants (condicions inicials de la EDOS). Això són les línies de curvatura, $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Pel que fa a les línies asimptòtiques, són corbes $\beta : J \longrightarrow S$ que satisfan $\langle \beta'(t), d_{\beta(t)}(N(\beta'(t)))\rangle = 0$, per a tot $t \in J$. Equivalentment, si $\beta'(t) = \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v$,

$$\begin{pmatrix}\lambda & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e & f\\ f & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 e + 2\lambda\mu f + \mu^2 g = 0.$$

Per càlculs anteriors, $e = g = 0$ i $f \neq 0$, pel que ens queda $\lambda\mu = 0$; és a dir, o bé $\lambda = 0$ o bé $\mu = 0$. Per tant, les línies asimptòtiques de S són de la forma $\beta(t) = \varphi(t, c_0)$ i $\beta(t) = \varphi(c_1, t)$. ∎

Exercici 3.16. *Trobeu la curvatura geodèsica dels paral·lels d'una superfície de revolució.*

Definició. Sigui $\alpha : I \longrightarrow S$ tal que $\alpha \subset S$. El triedre de Darboux $\langle \vec{t}, N, V = t \times N\rangle$. El vector curvatura d'$\alpha$ està definit per $\vec{K} = K_\alpha \times \vec{n} \in \langle N, V\rangle$. Per tant, $\vec{K} = K_n \cdot N + K_g \cdot V$, on K_n és la curvatura normal i K_g és la geodèsica. Per fórmules rellevants trobem:

$$K_n = \frac{\langle \alpha'', N\rangle}{\|\alpha'\|^2},\ K_g = \frac{[\alpha', \alpha'', N]}{\|\alpha'\|^3}.$$

Demostració. Sigui la superfície de revolució $\varphi(u, v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u))$, $a > 0$ i $(\alpha')^2 + (\beta')^2 \neq 0$. Un paral·lel és $\alpha_{u_0}(t) = (a(u_0)\cos t, a(u_0)\sin t, b(u_0))$ i les successives derivades:

$$\alpha'_{u_0}(t) = (-a(u_0)\sin t, a(u_0)\cos t, 0),\ \alpha''_{u_0}(t) = (-a(u_0)\cos t, -a(u_0)\sin t, 0)$$

En particular, $\|\alpha'\| = a$, per a tot t. Derivem φ respecte u i v:

$$\varphi_u = (a'\cos v, a'\sin v, b'),\ \varphi_v = (-a\sin v, a\cos v, 0).$$

Per tant:

$$N_\varphi = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{1}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}(-b'\cos v, -b'\sin v, a').$$

I podem calcular el determinant $[\alpha'_0, \alpha''_0, \alpha'''_0]$

$$[\alpha'_0, \alpha''_0, \alpha'''_0] = \begin{vmatrix}-a(v_0)\sin t & -a(v_0)\cos t & *\\ a(v_0)\cos t & -a(v_0)\sin t & *\\ 0 & 0 & \frac{a'(v_0)}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}}\end{vmatrix} = \frac{a'\cdot a^2}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}} \implies K_g = \frac{a'(v_0)}{a\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}.$$

Acabada de trobar $K_g = \frac{a'(v_0)}{a\sqrt{(a')^2+(b')^2}}$, ja hem acabat. ∎

Referències

[BL23] Thomas F. Banchoff i Stephen Lovett. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. 3a ed. CRC Press, 2023. ISBN: 9781032281094, 9781032047782, 9781003295341.