Matrius i vectors (grup de matí)

Curs 2018–2019

8.1 Fórmula de Grassmann

Anem a demostrar la igualtat següent, anomenada *fórmula de Grassmann*:

Teorema 8.1. *Donats dos subespais F i G d'un espai vectorial E de dimensió finita, es compleix*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Demostració. Suposem que $\dim F = k$ i $\dim G = \ell$. Si $k = 0$, llavors tenim $F = \{0\}$, $F + G = G$, $F \cap G = \{0\}$ i la fórmula es compleix; i si $\ell = 0$, passa el mateix.

Escollim una base $v_1, \ldots, v_k$ de F i una base $w_1, \ldots, w_\ell$ de G. Aleshores

$$F + G = \langle v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_\ell \rangle. \tag{8.1}$$

Per tant, $\dim(F+G) = k + m$ amb $0 \le m \le \ell$.

Podem reduir el conjunt de generadors de (8.1) fins que $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_m$ sigui una base de $F + G$ (canviant, si cal, l'ordre de $w_1, \ldots, w_\ell$). És possible anar eliminant vectors de la base de G perquè en qualsevol relació de dependència entre els vectors de (8.1) els coeficients dels vectors $w_1, \ldots, w_\ell$ no poden ser tots zero, ja que $v_1, \ldots, v_k$ són linealment independents.

Com que $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_m$ és una base de $F + G$, els vectors $w_{m+1}, \ldots, w_\ell$ són combinacions lineals d'ells:

$$\begin{aligned} w_{m+1} &= a^1_{m+1} v_1 + \cdots + a^k_{m+1} v_k + b^1_{m+1} w_1 + \cdots + b^m_{m+1} w_m \\ &\vdots \\ w_\ell &= a^1_\ell v_1 + \cdots + a^k_\ell v_k + b^1_\ell w_1 + \cdots + b^m_\ell w_m. \end{aligned}$$

Si canviem $w_{m+1}, \ldots, w_\ell$ per

$$\begin{aligned} w'_{m+1} &= w_{m+1} - (b^1_{m+1} w_1 + \cdots + b^m_{m+1} w_m) \\ &\vdots \\ w'_\ell &= w_\ell - (b^1_\ell w_1 + \cdots + b^m_\ell w_m), \end{aligned}$$

resulta que $w_1, \ldots, w_m, w'_{m+1}, \ldots, w'_\ell$ segueix essent una base de G, i ara tenim que $w'_{m+1}, \ldots, w'_\ell$ també són vectors de F, ja que

$$\begin{aligned} w'_{m+1} &= a^1_{m+1} v_1 + \cdots + a^k_{m+1} v_k \\ &\vdots \\ w'_\ell &= a^1_\ell v_1 + \cdots + a^k_\ell v_k. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Per tant, $\langle w'_{m+1}, \ldots, w'_\ell \rangle \subseteq F \cap G$. Si comprovem la inclusió contrària, resultarà que $\dim(F \cap G) = \ell - m$, tal com ens calia demostrar.

Sigui doncs u un vector de $F \cap G$ qualsevol. Com que $u \in F$ i $u \in G$, podem escriure

$$u = c^1 v_1 + \cdots + c^k v_k$$
$$u = d^1 w_1 + \cdots + d^m w_m + d^{m+1} w'_{m+1} + \cdots + d^\ell w'_\ell.$$

Tenint en compte (8.2), la segona expressió es pot reescriure com

$$u = d^1 w_1 + \cdots + d^m w_m + e^1 v_1 + \cdots + e^k v_k$$

per a alguns nombres reals $e^1, \ldots, e^k$. Aleshores, restant-hi la primera expressió,

$$0 = d^1 w_1 + \cdots + d^m w_m + (e^1 - c^1) v_1 + \cdots + (e^k - c^k) v_k. \tag{8.3}$$

Com que $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_m$ són linealment independents, tots els coeficients en l'expressió (8.3) són iguals a zero. En particular $d^1 = 0, \ldots, d^m = 0$. Per tant,

$$u = d^{m+1} w'_{m+1} + \cdots + d^\ell w'_\ell$$

i això demostra que $u \in \langle w'_{m+1}, \ldots, w'_\ell \rangle$, tal com ens calia. $\square$

8.2 Suma directa

Quan $F \cap G = \{0\}$, es diu que la suma $F + G$ és una *suma directa* i es denota per $F \oplus G$. Llavors la fórmula de Grassmann ens diu que

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

La propietat fonamental de la suma directa és la següent:

Proposició 8.2. *Donats dos subespais F i G d'un espai vectorial E, es compleix $F \cap G = \{0\}$ si i només si tot vector $u \in F + G$ es pot escriure de manera única com $u = v + w$ amb $v \in F$ i $w \in G$.*

Demostració. Suposem primer que $F \cap G = \{0\}$ i suposem que hi ha un vector u que s'escriu com $u = v + w$ amb $v \in F$ i $w \in G$ i també com $u = v' + w'$ amb $v' \in F$ i $w' \in G$. Llavors

$$0 = u - u = (v + w) - (v' + w') = (v - v') + (w - w').$$

Per tant, $v - v' \in F \cap G$, la qual cosa implica que $v - v' = 0$, d'on $v = v'$. Llavors també $w - w' = 0$ i d'aquí $w = w'$.

Recíprocament, si tot vector de $F + G$ es descompon com suma d'un vector de F i un vector de G de manera única, podem considerar un vector $u \in F \cap G$ qualsevol i escriure'l com $u = u + 0 = 0 + u$. Aleshores, per hipòtesi, $u = 0$. $\square$

Quan $F \oplus G = E$, es diu que G és un subespai *suplementari* de F (i que F és un subespai suplementari de G). Qualsevol subespai F d'un espai vectorial E admet algun suplementari, que en general no és únic. Per demostrar-ho, escollim una base $v_1, \ldots, v_k$ de F i completem aquesta base a una base $v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n$ de E. Aleshores $G = \langle w_{k+1}, \ldots, w_n \rangle$ és un suplementari de F, ja que $\dim G = n - k$ i la fórmula de Grassmann ens assegura que $F \cap G = \{0\}$.