Universitat de Barcelona

Apunts

Quart Semestre

Topologia (TOP)

Autor:
Mario Vilar

Professor:
Dr. Ricardo García

11 de setembre de 2022

Corregits

Introducció

Primer de tot, es trobarà que hi ha un índex, on hi distingim els diferents apartats ordenats d'una manera certament poc satisfactòria pel que fa a l'ordre cronològic del curs, sinó que he seguit més aviat el meu propi criteri. Hi ha capítols, seccions, subseccions (i fins i tot subsubseccions). Pel que fa al pes d'aquestes estructures en els encapçalaments:

1. el número de l'última secció/subsecció figurarà en cada cantonada superior de pàgina parella (per exemple, *1.2*);
2. el nom del capítol es trobarà a la part dreta de la capçalera de les pàgines parelles (per exemple, "Divisibilitat i nombres primers");
3. el nom de l'última secció/subsecció de la pàgina, a la cantonada dreta superior de les pàgines parelles (per exemple, "Polinomis: algorisme d'Euclides").

A més, hi ha una taula en què es veu fàcilment que s'ha seguit una mena de *sorting-by-color* per poder treballar de manera més eficient amb els diferents tipus d'enunciats matemàtics. En els encapçalaments, aleshores, tenim:

- el número de l'últim teorema, definició... de la pàgina en qüestió es trobarà a les pàgines senars, a la cantonada superior dreta (per exemple, **1.2.3**).

Teorema de prova. *Aquest és un teorema de prova. Els teoremes, les proposicions, els lemes, els corol·laris, les propietats, les conjectures i els processos tindran aquest format.*

Definició de prova. Aquesta és una definició de prova. Les definicions, els exemples i les notacions tindran aquest format.

Remarca de prova. Aquesta és una remarca de prova. Les remarques tindran aquest format.

Figura 1: Els diferents formats d'enunciats.

Índex

Taula de continguts

Capítol 1

Capítol 2

I

Espais mètrics

1.1 Espais mètrics

Definició 1.1.1 (Distància i norma). Sigui $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- Es defineix la *norma* d'x com a

$$\|x\| = +\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}. \tag{1.1.1}$$

- Es defineix la distància entre dos punts $x, y \in \mathbb{R}^n$ com a $d(x,y) = \|x - y\|$. Tenim, per tant, una aplicació $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que satisfà les propietats:
  1. $d(x,y) \geq 0$, per a tot $x, y \in \mathbb{R}^n$.
  2. $d(x,y) = 0$ si, i només si, $x = y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
  3. *Propietat simètrica:* $d(x,y) = d(y,x)$, per a tot $x, y \in \mathbb{R}^n$.
  4. *Desigualtat triangular:* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, per a tot $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Un *espai mètric* és un conjunt $\mathcal{X}$ junt amb una distància d. El designarem per (X, d) i normalment simplificarem la notació a $\mathcal{X}$. Els seus elements s'anomenen *punts*. Formalment, proposem la següent definició.

Definició 1.1.2 (Espai mètric). Un *espai mètric* $(\mathcal{X}, d)$ és un conjunt $\mathcal{X}$ i una aplicació $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ anomenada *distància*, que verifica les següents propietats:

1. $d(x,y) \geq 0$, per a tot $x, y \in \mathcal{X}$.
2. $d(x,y) = 0$ si, i només si, $x = y$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$.
3. *Propietat simètrica:* $d(x,y) = d(y,x)$, per a tot $x, y \in \mathcal{X}$.
4. *Desigualtat triangular:* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, per a tot $x, y \in \mathcal{X}$.

Exemple 1.1.3.

1. *L'espai mètric estàndard*: si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, aleshores $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$ i l'aplicació $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ resulta definir-se com $d(x,y) := \|x - y\|$. D'aquesta manera, es verifiquen totes les propietats anteriors i d és una distància euclidiana:

$$d(x,y) = +\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}. \tag{1.1.2}$$

2. Prenem $X = \mathbb{R}^n$. Definim $p = (p_1, \dots, p_n)$ i $q = (q_1, \dots, q_n)$, i la distància

$$d(p,q) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}. \tag{1.1.3}$$

Aleshores, d és una distància en $\mathbb{R}^n$. Les tres primeres propietats són evidents, i anem per la quarta: donat $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ i tres punts $p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$ i $r = (r_1, \dots, r_n)$:

$$|p_{i_0} - q_{i_0}| \leq |p_{i_0} - r_{i_0}| + |r_{i_0} - q_{i_0}| \leq d(p,r) + d(r,q). \tag{1.1.4}$$

3. La *distància al producte*: si $(\mathcal{X}_1, d_1), \ldots, (\mathcal{X}_n, d_n)$ són espais mètrics i $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$, aleshores l'aplicació $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$d((p_1, \ldots, p_n), (q_1, \ldots, q_n)) = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i(x_i, y_i)\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i(y_i, x_i)\}. \tag{1.1.5}$$

Aleshores, d és una distància en $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_n$ que s'anomena *distància producte.*
4. La *distància discreta* sobre $\mathcal{X}$: $d(x, y) = 0 \iff x = y$ i $d(x, y) = 1 \iff x \neq y$.
5. Posem $I = [0, 1]$ i $X = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{T}^0([0, 1])\}$, i definim la distància

$$d(f, g) = \max_{x \in [0,1]} \{|f(x) - g(x)|\}. \tag{1.1.6}$$

Les tres primeres propietats es demostren fàcilment i quedaria demostrar la desigualtat triangular. Es deixa com a exercici.

1.2 Boles

Definició 1.2.1 (Bola oberta). Sigui $(\mathcal{X}, d)$ un espai mètric, $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, p \in \mathcal{X}$. Es defineix la bola oberta de centre p i de radi $r \in \mathbb{R}^+$ com:

$$B_r(p) = \{q \in \mathcal{X} \mid d(p, q) < r\}. \tag{1.2.1}$$

Definició 1.2.2 (Bola tancada). Sigui $(\mathcal{X}, d)$ un espai mètric, $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, p \in \mathcal{X}$. Es defineix la bola tancada de centre p i de radi $r \in \mathbb{R}^+$ com:

$$B_r(p) = \{q \in \mathcal{X} \mid d(p, q) \leq r\}. \tag{1.2.2}$$

Exemple 1.2.3.

1. Posem $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ i d com la distància euclidiana, amb $p = (0, 0)$ i $r = 1$. Aleshores,

$$B_r(p) = B_1((0, 0)) \tag{1.2.3}$$

és una bola oberta de radi 1 amb centre a l'origen de coordenades p.
2. Considerem $(\mathcal{X}, d)$, essent $\mathcal{X}$ un conjunt amb una distància d que compleix:

$$d(p, q) = \begin{cases} 0, & \text{si } p = q, \\ 1, & \text{si } p \neq q. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

D'aquesta manera, la bola queda definida de la següent manera:

$$B_r(p) = \begin{cases} \{p\}, & \text{si } r \leq 1, \\ \mathcal{X}, & \text{si } r > 1. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

3. Fixat un número primer p es defineix la distància p-àdica de $\mathbb{Z}$, d_p, com:

$$d_p(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ \frac{1}{p^n}, & \text{si } x \neq y, \end{cases} \tag{1.2.6}$$

on n és l'exponent de p en la descomposició en factors primers de $(x - y)$. Les boles de centre x i de radi r són

$$B(x, r) = \{x + p^n q \mid q \in \mathbb{R}\},\ n = \min\{k \mid \frac{1}{p^k} < r\}. \tag{1.2.7}$$

Propietat 1.2.4. *Sigui $(\mathcal{X}, d)$ un espai mètric. Aleshores,*

1. $B_r(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in \mathcal{X}, \forall r > 0$.
2. $$\mathcal{X} = \bigcup_{\substack{x\in\mathcal{X} \\ x\in\mathbb{R}^+}} B_r(x). \tag{1.2.8}$$
3. *Si $y \in B_r(x)$, aleshores existeix $s > 0$ tal que $B_s(y) \subset B_r(x)$.*
4. *La intersecció de dues boles obertes és, o bé, buida, o és reunió de boles obertes.*

Demostració.

1. La primera és directa si sabem que, com a mínim, pertany el centre: $x \in B_r(x) \neq \emptyset$.
2. $\bigcup B_r(x) \subset \mathcal{X}$ per definició de bola. Com que $x \in B_r(x)$, aleshores $\mathcal{X} \subset \bigcup_{x\in\mathcal{X}} B_r(x)$.
3. $y \in B_r(x) \implies \exists s \mid B_s(y) \subset B_r(x)$. Per demostrar aquesta implicació, prenem $s = r - d(x.y) > 0$ i agafem $z \in B_s(y) \implies d(y,z) < s$, volent provar que $z \in B_r(x)$. Evidentment:
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + s = d(x,y) + r - d(x,y) = r. \tag{1.2.9}$$
4. Sigui $\mathbb{A} = B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$. Es dona que
$$y \in \mathbb{A} \implies \exists s_1^y \mid B_{s_1^y}(y) \subset B_{r_1}(x_1) \implies \exists s_2^y \mid B_{s_2^y}(y) \subset B_{r_2}(x_2) \tag{1.2.10}$$
i, per tant, $s^y = \min\{s_1^y, s_2^y\}$, $B_{s^y}(y) \subset \mathbb{A}$. Així:
$$\mathbb{A} = \bigcup_{y\in\mathbb{A}} B_{s^y}(y). \tag{1.2.11}$$

■

1.3 Conjunts

Un obert d'un espai mètric és un subconjunt $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ de boles obertes, i un tancat és un subconjunt $\mathcal{T} \subset \mathcal{X}$ amb complementari $\mathcal{X} \setminus \mathcal{T}$ obert. Formalment, tenim el següent.

Definició 1.3.1 (Subconjunt obert). Sigui $(\mathcal{X}, d)$ un espai mètric. Un subconjunt $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ és un obert de $\mathcal{X}$ si per a tot $x \in \mathcal{U}$ existeix una bola centrada en x continguda en $\mathcal{U}$, és a dir, $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_r(x) \subset \mathcal{U}$.

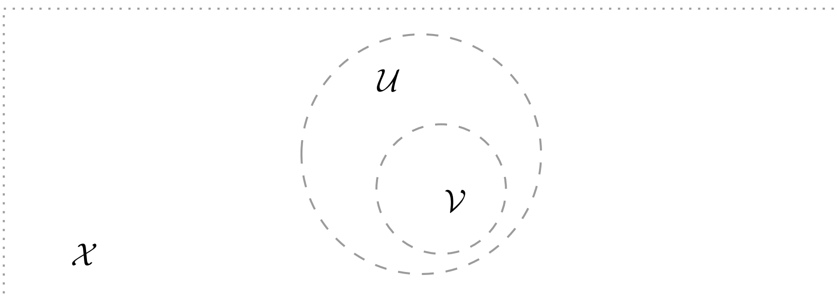


Figura 1.1: Boles obertes, una dins d'una altra, en un conjunt $\mathcal{X}$.

Observació 1.3.2. En altres paraules, per provar que un subconjunt $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ d'un espai mètric $(\mathcal{X}, d)$ és un obert cal provar que tot punt $x \in \mathcal{U}$ està contingut en una bola continguda en $\mathcal{U}$.

Lema 1.3.3. *Un subconjunt $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ és obert si, i només si, per a tot punt $x \in \mathcal{U}$ existeix una bola oberta de centre x obtinguda a $\mathcal{U}$: $B_r(x) \subset \mathcal{U}$.*

Demostració. És conseqüència directa de 1.2.4. Igualment, n'oferim una demostració completa.

$\Longrightarrow$ Si per a tot punt $x \in \mathcal{U}$ existeix una bola de centre x continguda a $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ és unió de boles obertes i, per la definició d'obert, $\mathcal{U}$ és un obert.

$\Longleftarrow$ Si $\mathcal{U}$ és obert i $x \in \mathcal{U}$, existeix una bola que conté x i està continguda en $\mathcal{U}$. La definició d'obert, compte, no diu que aquesta bola hagi d'estar centrada en x, simplement n'indica la pertinença: $x \in B_r(y) \subset \mathcal{U}$. Ara bé, si escollim $\varepsilon \leq r - d(x, y)$, aplicant la desigualtat triangular tenim:

$$z \in B_\varepsilon(x) \implies d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < d(x, y) + \varepsilon < r, \tag{1.3.1}$$

on $d(x, y) \leq r - \varepsilon$. És a dir, $B_\varepsilon(x) \subset B_r(y) \subset \mathcal{U}$.

■

Demostració alternativa. La primera implicació és directa. Per la segona, suposem $\mathcal{U} = \bigcup_i B_{r_i}(p_i)$. Sigui $p \in \mathcal{U}$. Existeix un i_0 tal que $p \in B_{r_i}(p_i)$. Per les propietats, $\exists r_p > 0$ tal que $B_{r_p}(p) \subset B_r(p_i) \subset \mathcal{U}$. ■

Exemple 1.3.4. Agafem $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ i $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1\}$. Notem que en tenim prou amb agafar $\varepsilon = x_0 - 1$.

Quan dues distàncies d_1, d_2 definides en el mateix conjunt $\mathcal{X}$ donen lloc als mateixos oberts parlem de distàncies topològicament equivalents.

Definició 1.3.5 (Distàncies topològicament equivalents). Són aquelles distàncies que compleixen que les boles respecte d_1 siguin unió respecte d_2 i les boles respecte d_2 siguin unió respecte d_1.

Definició 1.3.6 (Distàncies numèricament equivalents). Són aquelles distàncies tals que existeixen constants reals $c_1, c_2 > 0$ tals que, per a tot parell de punts $x, y \in \mathcal{X}$:

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \iff \frac{1}{c_2} d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \frac{1}{c_1} d_2(x, y). \tag{1.3.2}$$

La relació és simètrica. Quan dues distàncies són numèricament equivalents, cada bola respecte una de les distàncies conté una bola amb el mateix centre, respecte a l'altra distància.

Proposició 1.3.7. *Dues distàncies numèricament equivalents són també topològicament equivalents. El recíproc no és cert.*

Demostració. Siguin d_1, d_2 dues distàncies numèricament equivalents en un conjunt $\mathcal{X}$, i siguin $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tals que $c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}$. Per provar que tota bola $B_{d_1}(x, r)$ és unió de boles respecte d_2 considerem un punt d'aquesta bola, $y \in B_{d_1}(x, r)$, i provem que existeix $B_{d_2}(y, \varepsilon) \subset B_{d_1}(x, r)$. En efecte,

$$z \in B_{d_2}(y, \varepsilon) \implies d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z) \leq d_1(x, y) + \frac{1}{c_1} d_2(y, z) < d_1(x, y) + \frac{1}{c_1} \varepsilon. \tag{1.3.3}$$

Per tant, si escollim $\varepsilon < c_1(r - d_1(x,y))$ resulta que $d_1(x,z) < r$ per a tot $z \in B_{d_2}(y,\varepsilon)$. És a dir, $B_{d_2}(y,\varepsilon) \subset B_{d_1}(x,r)$. Com que la relació és simètrica, també és cert que les boles respecte a d_2 són unió de boles respecte d_1. ■

Demostració alternativa. Sigui φ_e l'obert de $(\mathbb{R}^2, d_e)$ i φ_p és l'obert de $(\mathbb{R}^2, d_p)$, essent d_e i d_p la distància euclidiana i la producte, respectivament. Es té que $\varphi_e = \varphi_p$. Sigui $\mathcal{U} \in \varphi_e$. Volem veure que $\mathcal{U} \in \varphi_p$: sigui $x \in \mathcal{U}$. En conseqüència del fet anterior, $B_s^{d_p}(x) \subset B_r^{d_e}(x) \subset \mathcal{U}$. ■

La unió d'oberts és clarament oberta. En canvi, la intersecció d'oberts no té per què ser oberta: ho és per a un nombre finit d'oberts. Pel que fa als tancats, la seva unió és tancada per a un conjunt finit, però la intersecció sí ho és.

Exemple 1.3.8. Sigui $(\mathcal{X}, d)$ un espai mètric i $p \in \mathcal{X}$. Aleshores, $\{p\}$ *no* és obert en el cas de $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ i d és la distància euclidiana. A més, $B_{\frac{1}{2}}(p) = \{p\}$ és obert en cas que $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ i d és la distància discreta.

Proposició 1.3.9. *Sigui $(\mathcal{X}, d)$ un espai mètric. Aleshores,*

1. *Els subconjunts $\emptyset$ i $\mathcal{X}$ són oberts d'$\mathcal{X}$. En altres paraules, $\emptyset \hookrightarrow \mathcal{X}$ i $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X}$.*
2. *Sigui $\{A_i\}_{i \in I}$ una família d'oberts d'$\mathcal{X}$, aleshores la reunió $\bigcup_i A_i$ és un obert d'$\mathcal{X}$.*
3. *Sigui $A_1, \dots, A_n$ una col·lecció finita d'oberts d'$\mathcal{X}$, aleshores la intersecció $\bigcap_i A_i$ és un obert d'$\mathcal{X}$.*

Demostració.

1. El buit és obert perquè no conté cap element. Per a tot $x \in \mathcal{X}$, $B_r(x) \subset \mathcal{X}$, per a qualsevol $r \in \mathbb{R}^+$, així doncs $\mathcal{X}$ és obert.
2. Sigui $x \in \bigcup_i A_i$. Existeix un $i \in I$ tal que $x \in A_i$ i, en ser A_i obert, existeix $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_r(x) \subset A_i \subset \bigcup_i A_i$.
3. Posem $I = \{1, \dots, n\}$. Sigui $x \in \bigcap_i A_i$. Siguin r_i, amb $i = 1 \div n$ reals positius tals que $B_{r_i}(x) \subset A_i$, per a tot $x \in I$. Aleshores, $B_r(x) \subset \bigcap_i A_i$ on $r = \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0$.

■

Observació 1.3.10. En general, la intersecció infinita d'oberts no és un obert. Per exemple, els intervals $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ són oberts de $\mathbb{R}$, però la intersecció de tots ells, al variar n, és $\{0\}$, que no és un obert.

Exemple 1.3.11. Considerem a $\mathbb{R}^n$ la distància

$$d'(x,y) = \min\{d_2(x,y), 1\}, \tag{1.3.4}$$

on d_2 és la distància euclidiana. Les boles obertes de radi ≤ 1 són les mateixes respecte d' i respecte d_2. Si el radi és major que 1, aleshores les boles respecte d' són tot $\mathbb{R}$. Com tota bola respecte d' o d_2 es pot posar com a unió de boles de radis < 1, resulta que d' i d_2 són topològicament equivalents.

Ara bé, d' i d_2 no són numèricament equivalents. En efecte, fixat x hi ha punts y amb $d_2(x,y)$ tan gran com es vulgui, però $d'(x,y) \leq 1, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ i, per tant, no pot existir cap constant c tal que $d_2(x,y) \leq cd'(x,y)$ per a tots els punts y.

1.4
Funcions contínues

Ara aplicarem el concepte de continuïtat en un espai mètric.

Teorema 1.4.1 (Continuïtat sobre un punt en $\mathbb{R}$).

1. *Una funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua en $x \in \mathbb{R}$ si, i només si, $\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0 \mid |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*
2. *Una funció $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és contínua en $x \in \mathbb{R}^n$ si, i només si, $\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0 \mid \|x - y\|_n < \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_m < \varepsilon$.*

Definició 1.4.2 (Continuïtat d'una funció en espais mètrics). Si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació entre espais mètrics direm que f és contínua en x per a cada $x \in E$.

Definició 1.4.3 (Continuïtat en un punt en espais mètrics). Siguin $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ i $(\mathcal{Y}, d_{\mathcal{Y}})$ dos espais mètrics. Una aplicació $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ és contínua en $x \in \mathcal{X}$ si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $d_{\mathcal{X}}(x', x) < \delta$, aleshores $d_{\mathcal{Y}}(f(x'), f(x)) < \varepsilon$. En altres paraules, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)). \tag{1.4.1}$$

O encara, d'una altra forma, $\forall \varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$.

Figura 1.2: Representació de la continuïtat d'una funció entre espais mètrics.

Teorema 1.4.4. *Sigui f una funció entre espais mètrics tal que $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ és contínua si, i només si, per a tot obert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{Y}$, $f^{-1}(\mathcal{U})$ és un obert de $\mathcal{X}$.*

Demostració.

$\implies$ Sigui $\mathcal{U}$ un obert d'$\mathcal{Y}$ i sigui $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$ (volem provar que f^{-1} és un obert de $\mathcal{X}$). Existeix $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(x)) \subset \mathcal{U}$. Per la continuïtat d'$f$, $\exists \delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset \mathcal{U}$. Així, $B_\delta(x) \subset f^{-1}(\mathcal{U})$ i, per tant, $f^{-1}(\mathcal{U})$ és un obert.

$\impliedby$ Sigui $x \in \mathcal{X}$ i $\varepsilon > 0$. $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ és un obert per hipòtesi i, per tant, $\exists \delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, és a dir:

$$f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)). \tag{1.4.2}$$

■

Observació 1.4.5.

1. La continuïtat es pot reformular en termes d'oberts (la distància no apareix explícitament).

2. Els espais mètrics no tenen definits operacions i parlar de suma de funcions mètriques no té gaire sentit. Fixem-nos que el següent sí en té:
   1. Si $f_1, f_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínues, es dona que $f_1 + f_2$ i $f_1 \cdot f_2$ (si $n = 1$) són, també, contínues.
   2. Agafant $f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow H$ contínues, impliquem que $g \circ f$ és contínua.

Proposició 1.4.6. *Sigui $(\mathcal{X}, d)$ un espai mètric i considerem en $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ la distància producte; això és: $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$. Aleshores, d és contínua.*

Demostració. Als apunts. ■

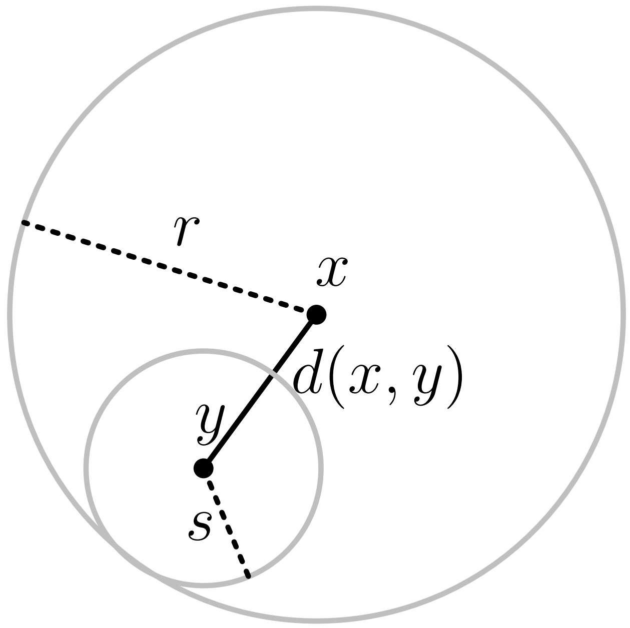


Figura 1.3: Representació gràfica de 1.3.3.

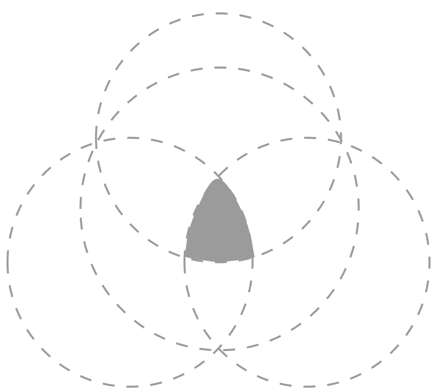


Figura 1.4: Intersecció d'una família finita de conjunts

II

Espais topològics

2.1 ESPAIS TOPOLÒGICS

Notació 2.1.1 (Conjunt de les parts). Si $\mathcal{X}$ és un conjunt, aleshores $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ és el conjunt de les parts d'$\mathcal{X}$.

Exemple 2.1.2. $\mathcal{X} = \{0,1,2\} \implies \mathcal{P}(\mathcal{X}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,2\}, \mathcal{X}\}$.

Si $\mathcal{X}$ és un conjunt, volem definir en $\mathcal{X}$ una noció d'obert semblant a la d'obert en un espai mètric. De manera informal podem proposar:

Definició 2.1.3 (Topologia, informal). És una família de subconjunts no arbitrària que verifica una sèrie de propietats. Sigui $(\mathcal{X}, d)$ un espai mètric:

1. $\emptyset, \mathcal{X}$ són oberts de $(\mathcal{X}, d)$.
2. $\{A_i\}_i$ oberts $\implies \bigcup_i A_i$ obert.
3. $A_1, \dots, A_n$ obert $\implies \bigcap_i A_i$ obert.

Definició 2.1.4 (Topologia). Sigui $\mathcal{X}$ un conjunt tal que $\tau \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Direm que τ és una topologia en $\mathcal{X}$ si es compleix:

1. $\emptyset, \mathcal{X} \in \tau$.
2. Si $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}, \mathcal{U}_i \in \tau \ \forall i \implies \bigcup_i \mathcal{U}_i \in \tau$.
3. $\mathcal{U}_1 \in \tau, \dots, \mathcal{U}_n \in \tau \implies \bigcap_i \mathcal{U}_i = \mathcal{U}_1 \cap \dots \cap \mathcal{U}_n \in \tau$.

Als elements de τ se'ls anomena *oberts* i direm que (X, τ) és un *espai topològic*. Sobre un mateix conjunt $\mathcal{X}$ hi pot haver, en general, moltes topologies diferents.

Exemple 2.1.5.

1. Si $(\mathcal{X}, d)$ és un espai mètric i $\tau_d = \{A \subset \mathcal{X} \mid A \text{ és reunió de boles de } (\mathcal{X}, d)\}$. Direm que τ_d és la topologia associada a la distància d.
2. Sigui $\mathcal{X}$ un conjunt, $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}\}$ és una topologia en $\mathcal{X}$ que anomenarem *topologia trivial* o *topologia grollera* en $\mathcal{X}$.
3. Sigui $\mathcal{X}$ un conjunt, $\tau = \mathcal{P}(x)$ és una topologia en $\mathcal{X}$ que anomenarem *topologia discreta* en $\mathcal{X}$.
4. Si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ i d és la distància euclidiana, τ_d és la *topologia estàndard* o *euclidiana* en $\mathbb{R}^n$.

Observació 2.1.6. És fàcil veure que en un espai mètric un punt sempre és un subespai tancat. En canvi, un punt d'un espai topològic pot ser que no sigui tancat. Per exemple, a la topologia grollera els únics tancats són $\emptyset$ i $\mathcal{X}$.

Definició 2.1.7 (Topologia metritzable). Es diu que una topologia τ en $\mathcal{X}$ és metritzable si existeix una distància d en $\mathcal{X}$ tal que la topologia associada τ és la mateixa que τ_d.

Proposició 2.1.8. *Sigui $\mathcal{X}$ un conjunt tal que el seu cardinal és més gran que 2. La topologia grollera en $\mathcal{X}$ no és metritzable.*

Demostració. Demostrem per reducció a l'absurd: siguin $p, q \in \mathcal{X}$, $p \neq q$, sigui $\varepsilon = d(p,q) > 0$, on d és una distància tal que τ_d és una topologia grollera. Sigui $\mathcal{U} = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p) \in \tau_d$, on τ_d és una topologia grollera. Aleshores:

$$\mathcal{U} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } p \in \mathcal{U} \\ \mathcal{X} & \text{si } q \notin \mathcal{U}. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Arribem a contradicció i la topologia grollera no és metritzable. ■

Proposició 2.1.9. *Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic amb $\mathcal{X}$ finit. $(\mathcal{X}, \tau)$ és metritzable si, i només si, τ és la topologia discreta.*

Demostració.

$\Longrightarrow$ Sigui d la distància discreta. Sigui $a \in \mathcal{X}$ i sigui el nombre real positiu:

$$r = \min\{d(a,x) \mid x \in \mathcal{X},\ x \neq a\}. \tag{2.1.2}$$

Clarament $B(a,r) = \{a\}$ la qual cosa implica que tot subconjunt unitari de $\mathcal{X}$ és obert i, per tant, tots els subconjunts de $\mathcal{X}$ són oberts al ser reunió d'oberts.

$\Longleftarrow$ Sigui τ la topologia discreta i considerem la distància trivial en $\mathcal{X}$:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y, \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Aleshores, per a tot $a \in \mathcal{X}$ tenim que $B(a,1) = \{a\}$ i, per tant, la topologia que determina d és la topologia discreta.

■

Teorema 2.1.10. *Sigui $\mathcal{X}$ un conjunt i τ_1, τ_2 topologies sobre $\mathcal{X}$. Aleshores, $\tau_1 \cap \tau_2$ és una topologia sobre $\mathcal{X}$.*

Demostració. Per demostrar que $\tau_1 \cap \tau_2$ és una topologia en $\mathcal{X}$ cal demostrar que compleix les condicions per ser una topologia:

1. Com $\emptyset, \mathcal{X} \in \tau_1$ i $\emptyset, \mathcal{X} \in \tau_2$, es dona que $\emptyset, \mathcal{X} \in \tau_1 \cap \tau_2$.
2. Ara, sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ una família de conjunts tal que $\mathcal{U}_i \in \tau_1 \cap \tau_2$, per a tot $i \in I$. Aleshores, $\bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \tau_1$ i $\bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \tau_2$. Per tant, $\bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \tau_1 \cap \tau_2$.
3. Sigui ara $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \in \tau_1 \cap \tau_2$. Com abans, $\mathcal{U}_i \in \tau_1$ i $\mathcal{U}_i \in \tau_2$ per a cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Per tant, $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \in \tau_1$ i $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \in \tau_2$. Així doncs, $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \in \tau_1 \cap \tau_2$.

■

Corol·lari 2.1.11. *Sigui $\mathcal{X}$ un conjunt i siguin $\tau_1, \ldots, \tau_m$ en $\mathcal{X}$. Aleshores, $\bigcap_{i=1}^m \tau_i$ és una topologia sobre $\mathcal{X}$.*

Demostració. Siguin $\tau_1, \ldots, \tau_m$ topologies sobre $\mathcal{X}$. Pel teorema anterior, $\tau_1 \cap \tau_2$ és una topologia sobre $\mathcal{X}$. Per inducció resulta que $(\tau_1 \cap \tau_2) \cap \tau_3$ resulta ser una topologia. Per tant, podem dir, de manera totalment anàloga:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} \tau_i \right) \cap \tau_m = \bigcap_{i=1}^{m} \tau_i. \tag{2.1.4}$$

■

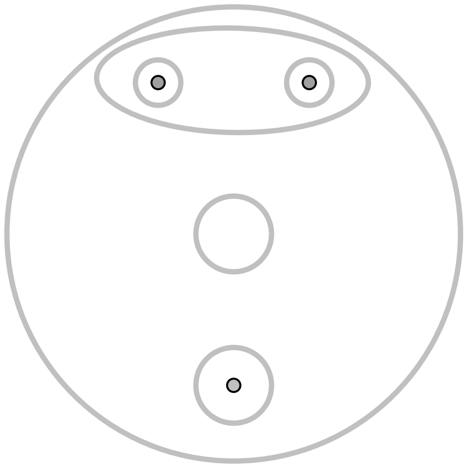


Figura 2.1: $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \mathcal{X}\}$ i $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$.

2.2 Comparació de topologies

Definició 2.2.1. Direm que una topologia τ_1 és més grollera que τ_2 si $\tau_1 \subset \tau_2$. En tal cas, direm que τ_2 és més fina que τ_1. S'acostuma a indicar per $\tau_1 \prec \tau_2$.

Donat un conjunt $\mathcal{X}$, la topologia més grollera (més petita) en $\mathcal{X}$ és la topologia grollera de 2.1.5 i la topologia més fina (més gran) és la topologia discreta de 2.1.5.

Observació 2.2.2. Per 2.1.5 i la definició anterior tenim que qualsevol topologia τ sobre un conjunt $\mathcal{X}$ compleix que $\tau_g \prec \tau \prec \tau_{discr}$.

2.3 Topologia induïda en un subespai

Definició 2.3.1 (Subespai topològic). Siguin $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic tal que $A \subset \mathcal{X}$. La família $\tau_A = \{\mathcal{U} \cap A \mid \mathcal{U} \in \tau\}$ que està formada per la intersecció de A amb els oberts de $\mathcal{X}$, és la topologia relativa a A o induïda per A. Llavors, diem que (A, τ_A) és espai topològic i que és un subespai de $(\mathcal{X}, \tau)$.

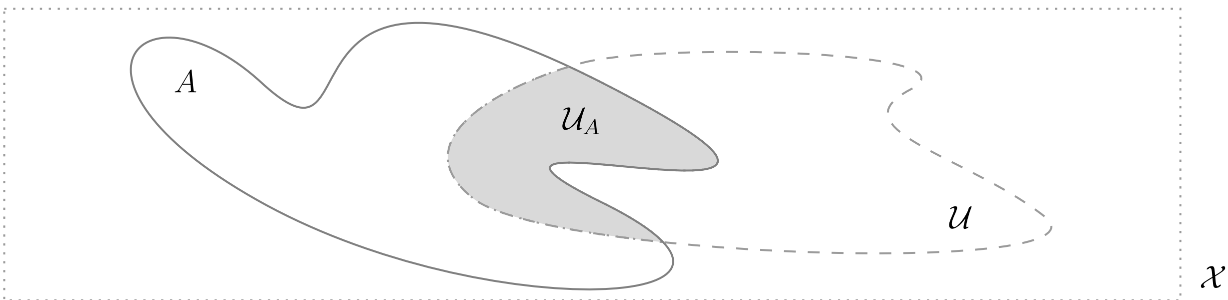


Figura 2.2: Representació gràfica d'un subespai topològic.

Definició 2.3.2 (Distància induïda). Si $(\mathcal{X}, d)$ és un espai mètric i $A \subset \mathcal{X}$, aleshores $d|_{A\times A} : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ és una distància en A, s'anomena distància induïda en A.

Definició 2.3.3 (Topologia induïda). Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic i sigui $A \subset \mathcal{X}$. Aleshores, la família

$$\tau|_A = \{\mathcal{U} \cap A \bigm| \mathcal{U} \in \tau\} \subset \mathcal{P}(A) \tag{2.3.1}$$

és una topologia en A i s'anomena topologia induïda en A per τ.

Proposició 2.3.4. *$\tau|_A$ és, efectivament, una topologia.*

Demostració.

1. Com que $\emptyset \in \tau$, es dona que $\emptyset = \emptyset \cap A \in \tau|_A$. Anàlogament, $X \in \tau \implies A \in \tau|_A$.
2. Sigui $\{\mathcal{U}_i\}_i$, $\mathcal{U}_i \in \tau|_A$. Tindrem que donat $\mathcal{V}_i \in \tau$ se segueix que $\mathcal{U}_i = \mathcal{V}_i \cap A$ i

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i = \bigcup_{i\in I} (\mathcal{V}_i \cap A) = \left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{V}_i\right) \cap A \in \tau|_A. \tag{2.3.2}$$

3. $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n \in \tau|_A$ tindrem $\mathcal{U}_1 = \mathcal{V}_1 \cap A, \dots, \mathcal{U}_n = \mathcal{V}_n \cap A$, amb $\mathcal{V}_i \in \tau$.

$$\mathcal{U}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{U}_n = (\mathcal{V}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{V}_n) \cap A \in \tau|_A. \tag{2.3.3}$$

■

Observació 2.3.5 (Conjunts oberts o tancats). La paraula tancat és poc afortunada, des d'un punt de vista didàctic, perquè pot induir a pensar que obert i tancat són antònims, és a dir, que tancat és el contrari d'obert. Hi pot haver:

1. conjunts que siguin oberts i no siguin tancats;
2. conjunts que siguin tancats i no siguin oberts;
3. conjunts que siguin oberts i també siguin tancats;
4. conjunts que no siguin ni oberts ni tancats.

Exemple 2.3.6.

1. Sigui τ la topologia trivial en $\mathcal{X}$. Aleshores, $\mathcal{X}$ i $\emptyset$ són oberts i tancats de τ:
   - $\mathcal{X} \in \tau \implies \mathcal{X}$ és obert de τ.
   - $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X} = \emptyset \in \tau \implies \mathcal{X}$ és tancat de τ.
   - $\emptyset \in \tau \implies \emptyset$ és obert de τ.
   - $X \setminus \emptyset = \mathcal{X} \implies \emptyset$ és tancat de τ.
2. Sigui τ la topologia estàndard en $\mathbb{R}$. Agafem $A = (-1, 1) = B_1(0) \implies A$ és obert. En canvi, si intentem trobar que A tancat a partir del complementari $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, veiem que no és obert (no podem construir una bola amb centre ± 1) i, per tant, que A no és tancat.

2.4 Tancats, interiors, adherències i fronteres

Observació 2.4.1 (Tancats en subespais). En un espai topològic $(\mathcal{X}, \tau)$, diem que un subconjunt $B \subset \mathcal{X}$ és tancat quan $\mathcal{X} \setminus B \in \tau$. Llavors, els tancats d'$A \subset \mathcal{X}$ són la intersecció d'A amb els tancats d'$\mathcal{X}$.

Exemple 2.4.2. Ja sabem que si $(\mathcal{X}, \tau)$ és l'espai topològic associat a un espai mètric, el conjunt $\mathcal{X} \setminus \{x\}$ és obert per a tot $x \in \mathcal{X}$. Per tant, en aquest cas, els punts són subconjunts tancats.

Observació 2.4.3. Passant al complementari les propietats dels oberts obtenim les propietats següents dels subconjunts tancats:

1. $\emptyset, \mathcal{X}$ són tancats.
2. Si $\{A_i\}_i$ és una família de subconjunts tancats de $\mathcal{X}$, aleshores $\bigcap A_i$ és tancat.
3. Si $\{A_i\}_i$ és una família *finita* de conjunts tancats de $\mathcal{X}$, aleshores $\bigcup A_i$ és tancat.

En més detall:

Proposició 2.4.4. *$\mathcal{T} \subset \mathcal{X}$ és tancat $\iff$ $\mathcal{X} \setminus \mathcal{T} \in \tau$. Si $(\mathcal{X}, \tau)$ és un espai topològic i*

$$\mathscr{C}_\tau = \{\textit{tancats de } (\mathcal{X}, \tau)\}, \tag{2.4.1}$$

aleshores:

1. $\emptyset, \mathcal{X} \in \mathscr{C}_\tau$,
2. *si* $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}, \mathcal{T}_i \in \mathscr{C}_\tau \implies \bigcap_i \mathcal{T}_i \in \mathscr{C}_\tau$;
3. *si* $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n \in \mathscr{C}_\tau \implies A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{C}_\tau$.

Demostració. Vegem primer que les tres propietats es compleixen per $\mathscr{C}_\tau$:

1. $\emptyset = \mathcal{X} \setminus \mathcal{X} \in \mathscr{C}_\tau$, $\mathcal{X} = \mathcal{X} \setminus \emptyset \in \mathscr{C}_\tau$.
2. Com els $\mathcal{T}_i$ són tancats, els podem escriure com a complementari d'un obert. Si tenim $\{\mathcal{T}_i\}_i$, $\mathcal{T}_i \in \mathscr{C}_\tau \implies \mathcal{T}_i = \mathcal{X} \setminus \mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_i \in \tau$. Així:
$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i = \bigcap_{i\in I} (\mathcal{X} \setminus \mathcal{U}_i) = \mathcal{X} \setminus \left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \right) \implies \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i \in \mathscr{C}_\tau. \tag{2.4.2}$$
3. $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n \in \mathscr{C}_\tau \implies \mathcal{T}_i = \mathcal{X} \setminus \mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_i \in \tau$. Ara:
$$\mathcal{T}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{T}_n = (\mathcal{X} \setminus \mathcal{U}_1) \cup \cdots \cup (\mathcal{X} \setminus \mathcal{U}_n) = \mathcal{X} \setminus (\mathcal{U}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{U}_n), \tag{2.4.3}$$
on $\mathcal{U}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{U}_n \in \tau$. Per tant, $\mathcal{T}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{T}_n \in \mathscr{C}_\tau$.

■

Observem que si $(\mathcal{X}, \tau)$ és un espai topològic, el conjunt dels tancats $\mathscr{C} = \{\mathcal{T} \subset \mathcal{X} \mid \mathcal{X} \setminus \mathcal{T} \in \tau\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ també serveix per determinar la topologia. És a dir, donat $\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ tal que els seus elements verifiquen les propietats anteriors, existeix una única topologia sobre $\mathcal{X}$ per a la qual $\mathscr{C}$ és el conjunt de tots els tancats de la topologia.

Proposició 2.4.5. *Si $\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ verifica les tres propietats anteriors, existeix una única topologia τ en $\mathcal{X}$ tal que $\mathscr{C}_\tau = \mathscr{C}$.*

Demostració. Sigui $\tau = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{X} \mid \mathcal{X} \setminus \mathcal{U} \in \mathscr{C}\}$. Cal veure que τ és topologia (exercici). ■

Exemple 2.4.6. En $\mathbb{R}$, amb la topologia usual, $[0, 1)$ no és obert i tampoc és tancat: traçant boles tals que $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ al complementari de $[0, 1)$ i $(-\varepsilon, \varepsilon)$ en $[0, 1)$ es veu.

Definició 2.4.7 (Interior)**.** Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic i sigui $A \subset \mathcal{X}$. L'*interior* del subconjunt A, denotat per $\mathring{A}$, és la reunió dels oberts continguts a A. Per definició, l'interior és un obert contingut a A, en particular, l'obert més gran contingut a A, en el sentit que tot altre obert contingut en A està contingut en $\mathring{A}$. En forma d'equació:

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{\mathcal{U}_i \text{obert} \\ \mathcal{U}_i \subset A}} \mathcal{U}_i. \tag{2.4.4}$$

Definició 2.4.8 (Punt interior)**.** Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic i sigui $A \subset \mathcal{X}$. Diem que un punt $x \in \mathcal{X}$ és *interior* a A si $x \in \mathring{A}$.

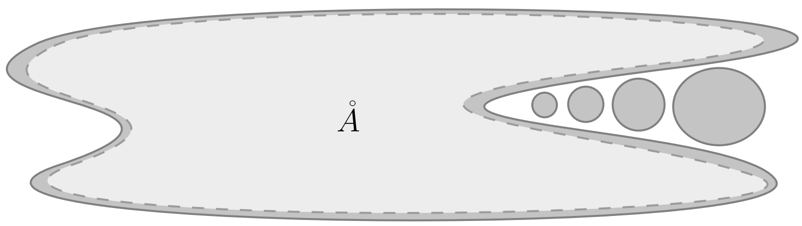


Figura 2.3: L'interior del conjunt A. És una idea general, no del tot acurada.

Definició 2.4.9 (Adherència)**.** Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic i sigui $A \subset \mathcal{X}$. L'adherència del subconjunt A, denotat per $\overline{A}$, és la intersecció dels tancats que contenen A. En particular, $\overline{A}$ és el tancat més petit que conté tot A, en el sentit que tot altre tancat que conté A, també conté a $\overline{A}$. En forma d'equació:

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{\mathcal{T}_i \text{tancat} \\ \mathcal{T}_i \supset A}} \mathcal{T}_i. \tag{2.4.5}$$

Definició 2.4.10 (Punt adherent)**.** Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic i sigui $A \subset \mathcal{X}$. Direm que un punt $x \in \mathcal{X}$ és *adherent* a A si $x \in \overline{A}$.

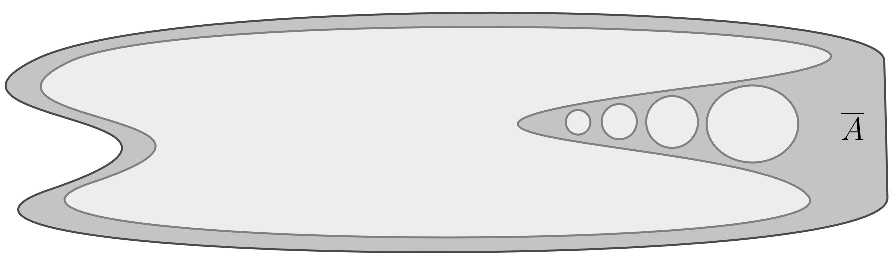


Figura 2.4: L'adherència d'un conjunt A.

Definició 2.4.11 (Frontera)**.** Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic i sigui $A \subset \mathcal{X}$. La *frontera* d'A és:

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}. \tag{2.4.6}$$

Observació 2.4.12.

1. $\mathring{A}$ és un obert de $(\mathcal{X}, \tau)$ i $\overline{A}$ és un tancat de $(\mathcal{X}, \tau)$.

2. Com $A \subset \overline{A}$ i $\mathring{A} \subset A$, tenim $\mathring{A} \subset \overline{A}$.

Exemple 2.4.13. Sigui $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ amb la topologia usual. $A = [0,1)$ no és obert i, doncs, $A \neq \mathring{A}$. Agafem $(0,1)$, que clarament és un subconjunt de $\mathring{A}$, $(0,1) \subset \mathring{A}$, a més que $\mathring{A} \not\subseteq [0,1)$ i, per tant, $\mathring{A} = (0,1)$. Com que $A = [0,1)$ no és tancat, $A \neq \overline{A}$. Ara, $A \subset [0,1] \implies \overline{A} \subset [0,1]$. Per veure la igualtat $\overline{A} = [0,1]$, sol cal destacar que $[0,1) \not\subseteq \overline{A} \subset [0,1]$. Per últim, $\partial A = \{0,1\}$.

Lema 2.4.14. *Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic. L'adherència d'un subconjunt A és el tancat més petit que conté A i l'interior és l'obert més gran contingut a A.*

Demostració. Ja hem vist que $\mathring{A}$ és obert i $\mathring{A} \subset A$. Sigui $\mathcal{U}$ un obert tal que $\mathcal{U} \subset A$. Deduïm per (2.4.4) que $\mathcal{U} \subset \mathring{A}$. El segon apartat queda com exercici. ■

Observació 2.4.15. Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic, $A \subset \mathcal{X}$. Es té que:

1. $A = \mathring{A} \iff A$ és obert,
2. $A = \overline{A} \iff A$ és tancat.

Exemple 2.4.16.

1. Si A és obert, $A = \mathring{A}$ i si és tancat, $A = \overline{A}$.
2. Sigui d la distància habitual a $\mathbb{R}^2$. L'adherència de $B_1((0,0))$ és
$$\overline{B_1((0,0))} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \tag{2.4.7}$$
i la frontera és la circumferència de centre $(0,0)$ i radi 1, la denotem per S^1.
3. Amb la topologia discreta, tot subconjunt és obert i tancat; per tant, per a tot A, $\overline{A} = \mathring{A} = A$ i $\partial A = \emptyset$.

Proposició 2.4.17. *Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic, $x \in \mathcal{X}$ i $A \subset \mathcal{X}$.*

1. *El punt x és adherent a A si, i només si, per a tot obert U amb $x \in \mathcal{U}$, es dona que $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$.*
2. *El punt x és interior a A si, i només si, existeix un obert U tal que $x \in U \subset A$.*

Demostració.

$\implies$ Raonarem per reducció a l'absurd. Suposem que $x \in \overline{A}$, i sigui $\mathcal{U} \in \tau$ tal que $x \in \mathcal{U}$. Veiem que $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$ per absurd. $\mathcal{X} \setminus \mathcal{U}$ seria un conjunt tancat $\mathcal{T}$ tal que $A \subset \mathcal{T}$. Per tant, $\overline{A} \subset \overline{\mathcal{T}} = \overline{A} \subset \mathcal{T}$ i $x \in \overline{A}$ ens dona que $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{U}$. Per tant, $A \not\subset \mathcal{T}$ i existeix $y \in A, y \notin \mathcal{X} \setminus \mathcal{U}$ tal que $y \in \mathcal{U} \implies y \in \mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$.

$\impliedby$ Sigui ara $x \in \mathcal{X}$ tal que per a tot $\mathcal{U} \in \tau$ amb $x \in \mathcal{U}$ i $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$. Si $x \notin \overline{A}$, aleshores $x \in \mathcal{X} \setminus \overline{A}$. Com $\overline{A}$ és tancat, $\mathcal{X} \setminus \overline{A}$ és obert contenint x i, per tant, $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$; contradicció amb $\mathcal{U} \cap \overline{A} = \emptyset$, però, per hipòtesi, $\mathcal{U} \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Així doncs, $x \in \overline{A}$.

$\implies$ Notem que $\mathring{A}$ és obert. Per tant, $x \in \mathcal{U} \subset \mathring{A} \subset A$, amb $\mathcal{U}$ essent un obert.

$\impliedby$ En sentit oposat, si $\mathcal{U}$ és un obert tal que $x \in \mathcal{U} \subset A$, per definició $\mathcal{U} \subset A$ i, així, $\mathring{\mathcal{U}} \subset \mathring{A}$ i $x \in \mathring{A}$.

■

Propietat 2.4.18. *Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic i $A, B \subset \mathcal{X}$ dos subconjunts. Es dona:*

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
2. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
4. $\mathcal{X} \setminus \mathring{A} = \overline{\mathcal{X} \setminus A}$.
5. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{X} \setminus A}$.
6. $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \overset{\circ}{\cup} B)$.

Demostració.

$\boxed{\subseteq}$ Com $A \subset A \cup B$ i $B \subset A \cup B$, tenim que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ i $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Aleshores, $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

$\boxed{\supseteq}$ $\overline{A} \cap \overline{B}$ és tancat i conté $A \cap B$. Per tant, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. En més detall, sigui $x \notin \overline{A} \cup \overline{B} \implies x \notin \overline{A}, x \notin \overline{B}$. Aleshores, per 2.4.17, $\exists \mathcal{U}_1$, obert, tal que $x \in \mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_1 \cap A = \emptyset$ i $\mathcal{U}_2 \cap B = \emptyset$. Com que $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$, tenim que $x \notin \overline{A \cup B}$. Ara, sigui $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Aleshores, $\mathcal{U} \cap (A \cup B) = (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap (A \cup B) \ni x$. Arribem a contradicció, ja que:

1. si $x \in A$, ha de formar part de $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, però no pot formar part de $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$ per hipòtesi.
2. si $x \in B$, ha de formar part de $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, però no pot formar part de $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_2$ per hipòtesi.

1. Com que $A \cap B \subset A$, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$. Com que $A \cap B \subset B$, $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$. Aleshores, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Com que $\overline{A}$ és tancat, coincideix amb la seva adherència.
2. Com que $\mathring{A} \subset A$, tenim que $\mathcal{X} \setminus A \subset \mathcal{X} \setminus \mathring{A}$ i, en ser $\mathcal{X} \subset \mathring{A}$ un tancat, es dona que $\overline{\mathcal{X} \setminus A} \subset \mathcal{X} \setminus \mathring{A}$. Sigui $\mathcal{T}$ un tancat tal que $\mathcal{X} \setminus A \subset \mathcal{T}$. Aleshores, $A \supset \mathcal{X} \setminus \mathcal{T}$ i, per tant, $\mathring{A} \supset \mathcal{X} \setminus \mathcal{T}$. Passant al complementari, obtenim que $\mathcal{X} \setminus \mathring{A} \subset \mathcal{T}$.
3. $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap (X - \mathring{A}) = \overline{A} \cap \overline{(\mathcal{X} \setminus A)}$.
4. A i B estan continguts a $A \cup B$; per tant, $\mathring{A}, \mathring{B} \subset (A \overset{\circ}{\cup} B)$ i $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \overset{\circ}{\cup} B)$. Per veure que la inclusió pot ser estricta, podem agafar $A = [0,1)$ i $B = [1,2]$. Aleshores:

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} = (0,1) \cup (1,2) \subsetneq (A \overset{\circ}{\cup} B) = (0,2). \tag{2.4.8}$$

■

Observació 2.4.19. Quan la família no és finita, la intersecció $\bigcap_j \mathring{A}$ pot no ser oberta i, llavors, pot no coincidir amb $(\bigcap_j A_j)^{\circ}$ Per exemple, a $\mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana, si $A_j = (-1-\frac{1}{j}, 1+\frac{1}{j})$,

$$\bigcap_j \mathring{A}_j = [-\overset{\circ}{1}, 1] = (-1,+1) \subsetneq \bigcap_j \mathring{A}_j = \bigcap_j A_j = [-1,+1]. \tag{2.4.9}$$

Adherència	*Interior*
Si $B \subset A$, $\overline{B} \subset \overline{A}$.	Si $B \subset A$, $\mathring{B} \subset \mathring{A}$.
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.	$\operatorname{int}\{A \cap B\} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$
$\operatorname{adh}\{\bigcup_i B_i\} \supset \bigcup_i \operatorname{adh}\{B_i\}$.	$\operatorname{int}\{\bigcup_i B_i\} \supset \bigcup_i \operatorname{int}\{B_i\}$.
$\operatorname{adh}\{\bigcap_i B_i\} \subset \bigcap_i \operatorname{adh}\{B_i\}$.	$\operatorname{int}\{\bigcap_i B_i\} \subset \bigcap_i \operatorname{int}\{B_i\}$.

Figura 2.5: Taula comparativa entre interior i adherència

2.5 Bases i subbases

Sovint, per definir una topologia en $\mathcal{X}$, no es diu qui és família τ de tots els oberts, sinó que es dona només una subfamília β i es construeixen els oberts $U \in \tau$ com les unions de conjunts de β. És el cas de les boles en els espais mètrics.

Exemple 2.5.1. Sigui $(\mathcal{X}_i, \tau_i), i = 1, 2$, dos espais topològics. Una manera natural de definir una topologia al conjunt producte seria agafar com a oberts els productes cartesians d'oberts dels dos espais:

$$b_{\mathcal{X}} = \{\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \mid \mathcal{U}_1 \in \tau_1, \mathcal{U}_2 \in \tau_2\}. \tag{2.5.1}$$

Ara bé, aquesta família no és una topologia ja que, encara que compleix les dues primeres condicions, però no compleix la tercera; en altres paraules, la unió de conjunts de $b_{\mathcal{X}}$ pot no ser a $b_{\mathcal{X}}$.

Definició 2.5.2 (Topologia producte). Sigui $(\mathcal{X}_i, \tau_i), i = 1, 2$ i $b_{\mathcal{X}} = \{\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \mid \mathcal{U}_1 \in \tau_1, \mathcal{U}_2 \in \tau_2\}$. La *topologia producte* és la família d'unions de conjunts de $b_{\mathcal{X}}$.

Definició 2.5.3 (Base de la topologia). Es diu base de la topologia τ d'un espai $(\mathcal{X}, \tau)$ a una família d'oberts $\beta \subset \tau$ tal que tot obert $\mathcal{U} \in \tau$ és unió d'oberts de β.

Proposició 2.5.4. *Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic. Una subfamília $\beta \subset \tau$ és base de τ si, i només si:*

1. *$\emptyset \in \beta$.*
2. *Per a tot $x \in \mathcal{U}$, amb $\mathcal{U} \in \tau$, existeix un $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset \mathcal{U}$.*

Demostració.

$\Longrightarrow$ Si β és una base i $\mathcal{U}$ un obert, podem posar $\mathcal{U} = \bigcap B_i$, on $B_i \in \beta$. Sigui $x \in \mathcal{U}$, existirà un i tal que $x \in B_i$. Aleshores, $x \in B_i \subset \mathcal{U}$.

$\Longleftarrow$ Recíprocament, sigui $\mathcal{U} \in \tau$ un obert. Volem veure que $\mathcal{U}$ és reunió d'elements de β. Per a cada $x \in \mathcal{U}$ posem B_x per denotar un obert de β tal que $x \in B_x \subset \mathcal{U}$. Per tant, $\mathcal{U} = \bigcup B_x$.

■

Proposició 2.5.5. *Sigui $\mathcal{X}$ un conjunt i sigui $\beta \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Aleshores,*

$$\tau = \left\{ \bigcup_{i \in I} V_i \mid V_i \in \beta \right\} \tag{2.5.2}$$

és una topologia sobre $\mathcal{X}$ (i, per tant, β és una base de τ) si, i només si, es verifiquen les condicions següents:

1. *$\emptyset \in \beta$ i $\mathcal{X} = \bigcup_{\mathcal{V} \in \beta} \mathcal{V}$.*
2. *Per a qualssevol $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in \beta$, $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ és reunió d'elements de β.*

Demostració.

$\Longrightarrow$ Suposem que τ és una topologia i β és una base de τ. Per definició de topologia, $\emptyset, \mathcal{X} \in \tau$ i, per tant, $\emptyset \in \beta$ i $\mathcal{X} = \bigcup \mathcal{V}$. A més, si $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in \beta \subset \tau$, aleshores, $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \in \tau$, per ser τ una topologia. Tindrem, doncs, que $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ és reunió d'elements de β.

$\Longleftarrow$ Recíprocament, la primera condició de topologia es verifica per τ a causa del primer apartat. Si $\mathcal{U}_i \in \tau$ per a tot i, podem posar $\mathcal{U}_i = \bigcup_j V_j$, on $V_j \in \beta$. Així, $\bigcup_i \mathcal{U}_i = \bigcup_i \bigcup_j V_j \in \tau$. Per últim, siguin $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \in \tau$ amb $\mathcal{U}_i = \bigcup_j V_j$, amb $i = 1 \div n$. Aleshores:

$$\bigcup_{i=1 \div n} \mathcal{U}_i = \left(\bigcup_{j \in J_1} V_j \right) \cap \cdots \cap \left(\bigcup_{j \in J_n} V_j \right) = \bigcup_{j_1 \in J_1, \ldots, j_n \in J_n} \mathcal{V}_{j_1} \cap \cdots \cap \mathcal{V}_{j_n}. \tag{2.5.3}$$

Aplicant la segona propietat, $\mathcal{V}_{j_1} \cap \cdots \cap \mathcal{V}_{j_n}$ és reunió d'elements de β i, consegüentment, també ho és $U_1 \cap \cdots \cap U_n$.

■

Proposició 2.5.6. *Sigui $\mathcal{X}$ un conjunt. Una família de subconjunts de $\mathcal{X}$, $\beta \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$, és base d'una topologia en $\mathcal{X}$ si, i només si,*

1. $\emptyset \in \beta$.
2. *Tot $x \in \mathcal{X}$ és a un $B \in \beta$: $x \in B$.*
3. *Per a tot $x \in B_1 \cap B_2$ amb $B_1, B_2 \in \beta$, existeix un $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*

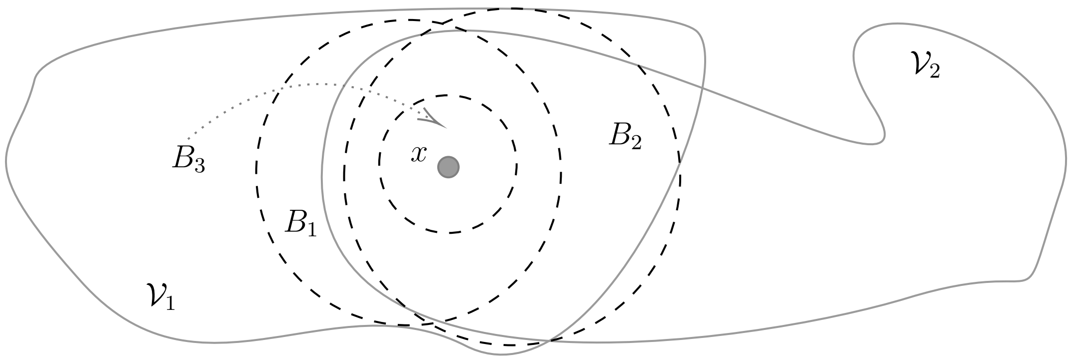


Figura 2.6: Representació d'una base topològica.

Observació 2.5.7. Fixem-nos que 2.5.6.3 i 2.5.5.2 són equivalents. Es deixa com a exercici.

Definició 2.5.8 (Subbase d'una topologia). Un subconjunt $A \subset \tau$ d'una topologia τ, es diu una subbase de τ si tot obert $\mathcal{U} \in \tau$ és unió arbitrària d'interseccions finites d'oberts en A.

Exemple 2.5.9.

1. Sigui $(\mathcal{X}, d)$ un espai mètric. Una base seria $\beta_1 = \{\emptyset\} \cup \{\mathfrak{B}_\varepsilon(x)\}_{x\in\mathcal{X},\varepsilon>0}$.
2. Considerem $(\mathbb{R}^2, d)$, amb d la distància usual. Una base seria $\beta_2 = \{\emptyset\} \cup \{\mathfrak{B}_\varepsilon(x,y)\}_{\varepsilon>0}$.

Proposició 2.5.10. *Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic. Una subfamília $S \subset \tau$ és subbase de τ si, i només si:*

1. *alguna de les interseccions finites d'elements de S és buida;*
2. *per a tot $x \in \mathcal{U} \in \tau$ existeix un nombre finit $S_1, \dots, S_k \in S$ tal que $x \in S_1 \cap \cdots \cap S_k \subset U$.*

Proposició 2.5.11. *Sigui $\mathcal{X}$ un conjunt. Una família de subconjunts de $\mathcal{X}$ és subbase d'alguna topologia de $\mathcal{X}$ si, i només si:*

1. *alguna de les interseccions finites d'elements de S és buida;*
2. *per a tot $x \in \mathcal{X} \in \tau$ existeix un $A \in S$ que el conté: $x \in A$.*

Observació 2.5.12. Qualsevol subconjunt $S \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$, eventualment junt amb $\emptyset$ i $\mathcal{X}$, és subbase d'alguna topologia τ de $\mathcal{X}$. Les subbases apareixen de manera natural quan es vol dotar un conjunt $\mathcal{X}$ d'una topologia en la qual interessa que certs subconjunts siguin oberts.

Proposició 2.5.13. *Sigui $\mathcal{X}$ un conjunt i siguin τ_1, τ_2 dues topologies sobre $\mathcal{X}$. Siguin β_1, β_2 bases de τ_1 i τ_2 respectivament. Aleshores, $\tau_1 \subset \tau_2$ si, i només si, per a tot $\mathcal{U} \in \beta_1$ i per a tot $x \in \mathcal{U}$ existeix $\mathcal{V} \in \beta_2$ tal que $x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.*

Demostració.

$\Longrightarrow$ Siguin $x \in \mathcal{X}$ i $\mathcal{U} \in \beta_1$ tal que $x \in \mathcal{U}$. Com que $\mathcal{U} \in \beta_1 \subset \tau_1 \subset \tau_2$ i β_2 és base, podem posar $\mathcal{U} = \bigcup V_i$, on $V_i \in \beta_2$ algun índex i tindrem $x \in V_i \subset \mathcal{U}$.

$\Longleftarrow$ Sigui $\mathcal{U} \in \tau_1$ ($\mathcal{U} = \emptyset \implies \mathcal{U} \in \tau_2$). Per a tot $x \in \mathcal{U}$, existirà un obert $\mathcal{U}_x \in \beta_1$ tal que $x \in \mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}$. Per hipòtesi, trobem un obert $V_x \in \beta_2$ tal que $x \in V_x \subset \mathcal{U}_x$. Per tant, $\mathcal{U} = \bigcup V_x \in \tau_2$.

■

Corol·lari 2.5.14. *Sigui $(\mathcal{X}, d)$ un espai mètric i sigui $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ un subconjunt. Aleshores, la topologia τ_1 associada a la distància induïda sobre $\mathcal{Y}$ és la mateixa que la topologia τ_2, obtinguda induint la topologia associada a $(\mathcal{X}, d)$ al subconjunt $\mathcal{Y}$.*

Demostració. Una base de la topologia τ_1 s'obté agafant les boles per a la distància induïda:

$$\beta_1 = \{B_r^{d_\mathcal{Y}}(y) = B_r^d(y) \cap \mathcal{Y} \mid y \in \mathcal{Y},\ r \in \mathbb{R}^+\}, \tag{2.5.4}$$

on $d_\mathcal{Y}$ és la distància induïda. Per a τ_2 una base és

$$\beta_2 = \{B_r^d(x) \cap \mathcal{Y} \mid x \in \mathcal{X},\ r \in \mathbb{R}^+\}. \tag{2.5.5}$$

Clarament, $\beta_1 \subset \beta_2$. Per tant, $\tau_1 \subset \tau_2$. Veiem ara que $\tau_2 \subset \tau_1$. Sigui $y \in \mathcal{Y}$ i sigui $U = B_r^d(x) \cap \mathcal{Y} \in \beta_2$ tal que $y \in \mathcal{U}$. Com es va veure per 1.3.1, existeix un $s > 0$ tal que $B_s^d(y) \subset B_r^d(x)$. Per tant, $y \in B_s^d(y) \cap \mathcal{Y} \subset \mathcal{U}$. ■

2.6 Entorns i axiomes de numerabilitat

2.6.1 Entorns

Definició 2.6.1 (Entorn). Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic i sigui $x \in \mathcal{X}$. Un *entorn* d'x és un subconjunt $E \subset \mathcal{X}$ tal que $x \in \mathring{E}$. És a dir, un subconjunt $E \subset \mathcal{X}$ tal que existeix un obert $\mathcal{U} \in \tau$ amb $x \in \mathcal{U} \subset E$. Si E és obert, diem que E és un *entorn obert* de x.

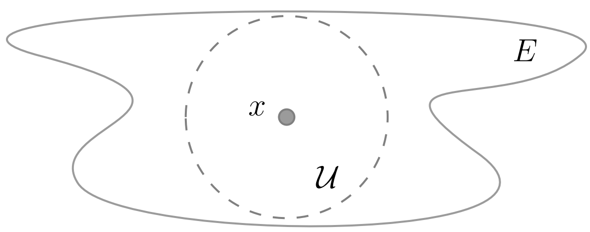


Figura 2.7: Un entorn E d'x en $\mathcal{X}$.

Exemple 2.6.2.

1. En un espai mètric, les boles són entorns dels seus punts. Més en general, en un espai topològic tot obert és un entorn dels seus punts.

2. A $\mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana, el subconjunt $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ amb $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, és un entorn de 0, però no ho és de $\frac{1}{n}$.

Definició 2.6.3 (Base d'entorn o sistema d'entorns). Diem que $\mathfrak{B}_p$ és una base d'entorn de p si $\mathfrak{B}_p \subset \mathcal{P}(x)$ tal que els entorns de $\mathfrak{B}_p$ són entorns de p i, a més, si E és un entorn de p existeix $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_p$ tal que $p \in \mathfrak{B} \subset E$. Equivalentment, sigui $x \in \mathcal{X}$, s'anomena *sistema d'entorns de* x la família de tots els entorns de x. Una *base d'entorns* de x és una família $\{N_i\}$ d'entorns de x tal que per a tot entorn E de x existeix i tal que $N_i \subset E$.

Exemple 2.6.4. En un espai mètric, les boles $\{B_{\frac{1}{n}}(x) \mid n > 0\}$ formen una base d'entorns oberts de x.

2.6.2 Numerabilitat

Definició 2.6.5 (Finitud). Un conjunt A és infinit si no és finit. Es diu que és infinit-numerable si existeix una correspondència bijectiva $f : A \longrightarrow \mathbb{Z}^+$.

Definició 2.6.6 (Numerable). Es diu que un conjunt és numerable si és o bé finit o bé infinit-numerable.

Teorema 2.6.7. *Sigui B un conjunt no buit. Aleshores, són equivalents:*

1. *B és numerable.*
2. *Existeix una funció exhaustiva $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow B$.*
3. *Existeix una funció injectiva $g : B \longrightarrow \mathbb{Z}^+$.*

Demostració.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Suposem que B és numerable. Si B és infinit-numerable, existeix una bijecció $f : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow B$ per definició i el resultat és directe. Si B és finit, existeix una bijecció $h : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow B$ per a algun $n \geq 1$ (recordem que $B \neq \emptyset$). Podem, aleshores, estendre h a una aplicació exhaustiva $f : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow B$ definint:

$$f(i) = \begin{cases} h(i), & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ h(1), & \text{si } i > n. \end{cases} \tag{2.6.1}$$

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Sigui $f : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow B$ una funció exhaustiva. Definim $g : B \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ mitjançant l'aplicació:

$$g(b) = \min\{f^{-1}(\{b\})\}. \tag{2.6.2}$$

Com f és exhaustiva, $f^{-1}(\{b\})$ és no buit i, per tant, g està ben definida. La aplicació g és injectiva, ja que si $b \neq b'$, els conjunts $f^{-1}(\{b\})$ i $f^{-1}(\{b'\})$ són disjunts i, per tant, els seus mínims són distints.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Sigui $g : B \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ una aplicació injectiva: volem provar que B és numerable. Podem obtenir una bijecció de B amb un subconjunt de $\mathbb{Z}_+$. Així, per demostrar el resultat, és suficient amb provar que tot subconjunt de $\mathbb{Z}^+$ és numerable. Per tant, sigui C un subconjunt de $\mathbb{Z}_+$.

Si C és finit, és numerable per definició. Així doncs, hem de demostrar que tot subconjunt infinit C de $\mathbb{Z}_+$ és infinit-numerable. Els elements de C es poden ordenar fàcilment en una successió infinita; simplement, es prendria el conjunt $\mathbb{Z}_+$ amb el seu ordre habitual, eliminant els elements de $\mathbb{Z}_+$ que no són a C.

■

Lema 2.6.8. *Si C és un subconjunt infinit de $\mathbb{Z}_+$, aleshores C és infinit-numerable.*

Corol·lari 2.6.9. *Un subconjunt d'un conjunt numerable és numerable.*

Les bases d'entorns permeten remetre a una col·lecció "més reduïda"d'entorns d'un punt les propietats topològiques locals. Estudiant els entorns de zero a $\mathbb{R}$ és fàcil arribar a la conclusió que no existeixen en general bases d'entorns finites. Tanmateix, sí que existeixen bases d'entorns numerables per a tot punt d'un espai mètric.

Definició 2.6.10 (Primer axioma de numerabilitat). Un espai topològic d'$\mathcal{X}$ verifica el primer axioma de numerabilitat si per a tot punt p de $\mathcal{X}$ existeix una base d'entorns de p que és numerable.

Proposició 2.6.11. *Si un punt x d'un espai topològic té una base d'entorns numerable, aleshores té una base d'entorns oberts $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tal que:*

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots B_{n-1} \supset B_n \supset B_{n+1} \supset \cdots \ni x. \tag{2.6.3}$$

Demostració. Sigui $\{N_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable d'entorns de x. Per ser els N_j entorns, existeixen oberts $\mathcal{U}_j$ amb $x \in \mathcal{U}_j \subset N_j$. Definim: $B_n = \mathcal{U}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{U}_n$. ■

Proposició 2.6.12. *Si $(\mathcal{X}, \tau)$ és un espai topològic i $\tau = \tau_d$ (distància en $\mathcal{X}$), aleshores $(\mathcal{X}, \tau)$ verifica el primer axioma de numerabilitat.*

Exemple 2.6.13. Tot espai mètric verifica el primer axioma de numerabilitat. Si deixem de banda el punt de vista local, podem demanar l'existència de bases numerables. Per exemple, a $\mathbb{R}^n$ amb la topologia usual disposem de bases numerables:

$$\beta = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(q) \mid q \in \mathbb{Q}^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, \tag{2.6.4}$$

on $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ és el subconjunt numerable dels punts amb coordenades racionals.

Definició 2.6.14 (Segon axioma de numerabilitat). Un espai topològic verifica que existeix una base numerable.

Exemple 2.6.15.

1. $\mathbb{R}^n$ amb la topologia usual.
2. Veiem que un conjunt no numerable $\mathcal{X}$ amb la topologia discreta no verifica el segon axioma de numerabilitat: si $p \in \mathcal{X}$, aleshores $\{p\}$ és un obert i és reunió d'elements de la base, és a dir, $\{p\} = \bigcup_i \mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{B}_i \in \beta$. Per tant, $\exists i \mid \mathfrak{B}_i = \{p\}$. Així podem construir una aplicació injectiva Φ tal que:

$$\left.\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{X} & \hookrightarrow & \beta \\ & p & \longmapsto & \{p\} \end{array}\right\} \xrightarrow{\mathcal{X} \text{ no numerable}} \beta \text{ no numerable.} \tag{2.6.5}$$

Observació 2.6.16. Recordem que la topologia discreta és l'associada a la mètrica discreta. Per tant, $\mathcal{X}$ és un espai mètric i verifica el primer axioma de numerabilitat.

Proposició 2.6.17. *Si un espai topològic verifica el segon axioma de numerabilitat, aleshores verifica el primer.*

Demostració. Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic tal que existeix una base $\beta = \{\mathcal{U}_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \tau$ numerable. Veiem que, per a tot punt $x \in \mathcal{X}$:

$$E_x = \{\mathcal{U}_i \mid x \in \mathcal{U}_i\} \subset \beta \tag{2.6.6}$$

és una base d'entorns de $\mathcal{X}$. Sigui $\mathcal{U} \in \tau$ tal que $x \in \mathcal{U}$. Aleshores, $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}_i$. Existirà un i tal que $x \in \mathcal{U}_i$. Per tant, $x \in \mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}$ i $\mathcal{U}_i \in E_x$. Com que $E_x \subset \beta$ i β és numerable, E_x és numerable. Per tant, $\mathcal{X}$ verifica el primer axioma de numerabilitat. ■

Proposició 2.6.18. *La unió numerable de conjunts numerables és numerable. En altres paraules,*

$$\{C_i\}_{i\in I}, \left.\begin{array}{c} C_i \text{ numerable} \\ I \text{ numerable} \end{array}\right\} \implies \bigcup_{i\in I} C_i \text{ numerable.} \tag{2.6.7}$$

Demostració. Prenem τ com la topologia amb la distància euclidiana, i $q \in \mathbb{Q}$, agafem C_q i β de la següent manera:

$$\begin{aligned} C_q = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(q) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, \\ \beta = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} C_q. \end{aligned} \tag{2.6.8}$$

Volem veure que

$$\beta' = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(q) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{Q} \right\}, \tag{2.6.9}$$

és una base d'oberts de $(\mathbb{R}, \tau)$. Hem de veure que si $\mathcal{U}$ és obert i $p \in \mathcal{U}$, existeix $\mathcal{V} \in \beta'$ tal que $p \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Si $\mathcal{U}$ és obert i $p \in \mathcal{U}$, aleshores $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(p-\varepsilon, p+\varepsilon) \subset \mathcal{U}$ i $\exists q \in \mathbb{Q}\ \exists n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$p \in \left(q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}\right) \subset (p - \varepsilon, p + \varepsilon). \tag{2.6.10}$$

■

Teorema 2.6.19. *El producte finit de conjunts numerables és numerable.*

Exercici 2.6.20. *Considerem la següent família de subconjunts de $\mathbb{R}^2$:*

$$\beta = \{\emptyset\} \cup \{(a,b) \times \{c\} \mid a < b,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}. \tag{2.6.11}$$

1. *Demostreu que β és base per a una topologia τ_β en $\mathbb{R}^2$. Compareu τ_β amb la topologia euclidiana de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Calculeu l'interior i l'adherència dels subconjunts $\{0\} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \{0\}$ i $(0,1) \times (0,1)$ en $(\mathbb{R}^2, \tau_\beta)$.*
3. *Verifica $(\mathbb{R}^2, \tau_\beta)$ el primer axioma de numerabilitat? En verifica el segon?*
4. *Sigui $A = \{1\} \times \mathbb{R}$ i sigui τ_A la topologia subespai en A, induïda per τ_β. Demostreu que per a tot espai topològic $(\mathcal{X}, \tau)$ qualsevol aplicació $f : (A, \tau_A) \longrightarrow (\mathcal{X}, \tau)$ és contínua.*

Demostració. Separem la demostració en els diferents apartats.

1. Tenim que $\mathbb{R}^2$ correspon a la unió infinita de conjunts:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{r,c\in\mathbb{R}} (r-1, r+1) \times \{c\}. \tag{2.6.12}$$

A més, si intersequem dos elements de β obtenim que:

$$((a,b) \times \{c\}) \cap ((a',b') \times \{c'\}) \tag{2.6.13}$$

és el conjunt buit si $c \neq c'$ i és el conjunt $(\max\{a,a'\}, \min\{b,b'\}) \times \{c\}$ si $c = c'$. Per tant, es compleixen les condicions per què β sigui base d'una topologia en $\mathbb{R}^2$. De fet, és la topologia producte de la topologia euclidiana en el primer factor i la topologia discreta en el segon.

La topologia τ_β és més fina que la topologia euclidiana en $\mathbb{R}^2$, ja que

$$(a,b) \times (c,d) = \bigcup_{x\in(c,d)} (a,b) \times \{x\}, \tag{2.6.14}$$

i els oberts del tipus $(a,b) \times (c,d)$ són una base de la topologia euclidiana. A més, aquestes topologies no són iguals; es pot demostrar directament, tot i que en essència és conseqüència immediata del tercer apartat, ja que la topologia euclidiana verifica els dos axiomes de numerabilitat.

- El conjunt $\{0\} \times \mathbb{R}$ és un tancat, ja que el seu complementari $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ és obert, ja que:

$$(\mathbb{R} \times \{0\}) \times \mathbb{R} = \left(\bigcup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ n\in\mathbb{N}}} (-n,0) \times \{x\} \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ n\in\mathbb{N}}} (0,n) \times \{x\} \right). \tag{2.6.15}$$

  El seu interior és buit, ja que si $(0,x)$ fos un punt interior aleshores hauria d'existir un ε tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{x\} \subset \{0\} \times \mathbb{R}$, la qual cosa és absurda.
- De la mateixa manera, $\mathbb{R} \times \{0\}$ és obert i tancat.
- Finalment, el conjunt $(0,1) \times (0,1)$ és obert, ja que:

$$(0,1) \times (0,1) = \bigcup_{x\in(0,1)} (0,1) \times \{x\}. \tag{2.6.16}$$

  La seva adherència és $\overline{(0,1) \times (0,1)} = [0,1] \times (0,1)$.

2. Es tracta d'una topologia que prové d'una mètrica (doncs és el producte de dos espais mètrics). Per tant, verifica el primer axioma de numerabilitat. Alternativament, una base numerable d'entorns de (x,y) és:

$$B_{(x,y)} = \left\{ \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) \times \{y\} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}. \tag{2.6.17}$$

No es verifica el segon axioma. Si β és una base d'oberts d'aquesta topologia aleshores, per definició de base, per a cada $r \in \mathbb{R}$ ha d'existir un $U_r \in \beta$ tal que

$$(0,r) \in U_r \subset (-1,1) \times \{r\}. \tag{2.6.18}$$

A més, $U_r \neq U_s$ si $r \neq s$ doncs, en aquell cas, $(0,r) \notin U_s$. Per tant, l'aplicació f

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \beta \\ & r & \longmapsto & U_r \end{array} \tag{2.6.19}$$

és injectiva i, així, β no és numerable.

3. Hi haurà prou amb provar que la topologia induïda en A és la topologia discreta, ja que qualsevol aplicació definida en un espai topològic amb la topologia discreta és contínua. Sigui $(1,x) \in A$, aleshores $(0,2) \times \{x\} \in \tau_\beta$ és obert de $\mathbb{R}^2$ i $\{(1,x)\} = ((0,2) \times \{x\}) \cap A$ és un obert d'A. Com els punts d'A són oberts en A i qualsevol conjunt és reunió dels seus elements, la topologia induïda en A és la discreta.

■

III

Aplicacions contínues

3.1 Definició i propietats

Definició 3.1.1 (Continuïtat en un punt)**.** Sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicació entre dos espais topològics $(\mathcal{X}, \tau_{\mathcal{X}}), (\mathcal{Y}, \tau_{\mathcal{Y}})$ i sigui $x_0 \in \mathcal{Y}$. Diem que f és contínua en x_0 si per a cada entorn $\mathcal{V}$ de $f(x_0)$ en $\mathcal{Y}$, existeix $\mathcal{U}$ entorn d'x_0 en $\mathcal{X}$ tal que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$.

Definició 3.1.2 (Aplicació contínua)**.** Sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicació entre dos espais topològics $(\mathcal{X}, \tau_{\mathcal{X}}), (\mathcal{Y}, \tau_{\mathcal{Y}})$. Diem que f és contínua si per a tot obert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{Y}$, $f^{-1}(\mathcal{U})$ és un obert de $\mathcal{X}$.

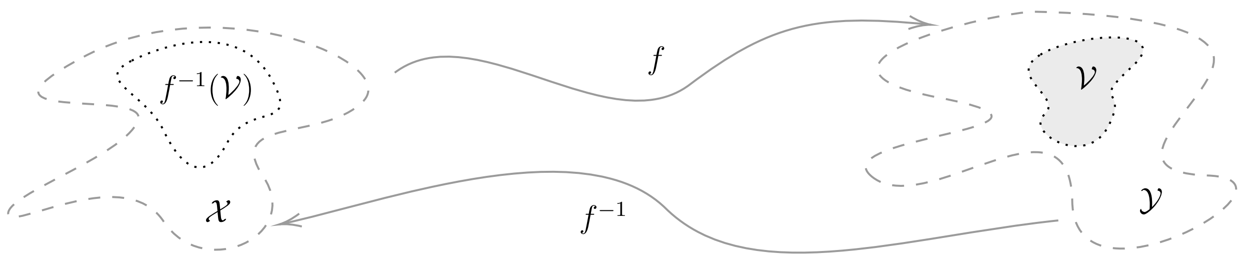


Figura 3.1: Concepte de continuïtat en un espai topològic.

Proposició 3.1.3. *Sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicació entre espais topològics i sigui β una base de la topologia de $\mathcal{Y}$. Aleshores, f és contínua si, i només si, per a tot obert $\mathcal{U} \subset \mathcal{Y}$ de β, $f^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{X}$ és obert.*

Demostració.

$\Longrightarrow$ Sigui $\mathcal{U} \subset \mathcal{Y}$ un obert i sigui $x \in f^{-1}(\mathcal{U}) \implies f(x) \in \mathcal{U}$. Per continuïtat, $\exists$ un entorn $\mathcal{V}$ de x tal que $f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U} \iff x \in \mathring{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V} \subset f^{-1}(\mathcal{U})$. Per tant, $x \in \mathring{f^{-1}}(\mathcal{U})$ i, per tant, $f^{-1}(\mathcal{U})$ és un obert.

$\Longleftarrow$ Sigui $\mathcal{U}$ un obert de $\mathcal{Y}$. Per definició de base, $\mathcal{U} = \bigcap_i \mathcal{U}_i$ on $\mathcal{U}_i \in \beta$. Aleshores, $f^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_i f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ és reunió d'oberts i, per tant, és obert.

$\Longleftarrow$ Alternativament, sigui $x \in \mathcal{X}$ i sigui $\mathcal{V}$ un entorn de $f(x)$. Tenim que $\mathring{\mathcal{V}}$ és obert i, per tant, $x \in f^{-1}(\mathring{\mathcal{V}})$ és un obert. Aleshores, si $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathring{\mathcal{V}}) \ni x$ tenim que $\mathcal{U}$ és un entorn de $\mathcal{X}$:

$$f(\mathcal{U}) = f(f^{-1}(\mathring{\mathcal{V}})) \subset \mathring{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}. \tag{3.1.1}$$

■

Exemple 3.1.4.

1. Siguin τ_1, τ_2 dues topologies sobre un conjunt $\mathcal{X}$. L'aplicació identitat $\mathbb{I} : (\mathcal{X}, \tau_1) \longrightarrow (\mathcal{X}, \tau_2)$ és contínua si, i només si, τ_1 és més fina que τ_2.

2. Si $(\mathcal{X}, \tau_\mathcal{X})$ és un espai topològic i si $\tau_\mathcal{Y}$ és la topologia grollera sobre un conjunt $\mathcal{Y}$, aleshores qualsevol aplicació $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ és contínua:

$$\left.\begin{array}{r} f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \\ f^{-1}(\mathcal{Y}) = \mathcal{X} \end{array}\right\} \implies f \text{ és contínua.} \tag{3.1.2}$$

3. Si $\tau_\mathcal{X}$ és la topologia discreta sobre $\mathcal{X}$, i si $(\mathcal{Y}, \tau_\mathcal{Y})$ és un espai topològic, aleshores qualsevol aplicació $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ és contínua.
4. Les aplicacions constants són contínues: sigui $f : (\mathcal{X}, \sigma) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \tau)$ constant, tal que $f(x) = y_0 \in \mathcal{Y}, \forall x \in \mathcal{X}$ i sigui $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ obert:

$$f^{-1}(\mathcal{V}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } y_0 \notin \mathcal{V}, \\ \mathcal{X}, & \text{si } y_0 \in \mathcal{V}. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

5. Sigui $f : (\mathcal{X}, \sigma) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \tau)$, amb σ la topologia grollera i τ la topologia discreta. Suposem que f no és constant.

$$\left.\begin{array}{c} \exists x_1 \in \mathcal{X} \;\middle|\; f(x_1) = y_1, \\ \exists x_2 \in \mathcal{X} \;\middle|\; f(x_2) = y_2. \\ A = \{y_1\},\ A \text{ obert.} \end{array}\right\} \quad f \text{ contínua} \implies f^{-1}(\{y_1\}) = \begin{cases} \emptyset!! \impliedby x_1 \in f^{-1}(\{y_1\}) \\ \mathcal{X}!! \impliedby x_2 \notin f^{-1}(\{y_1\}) \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Proposició 3.1.5. *Siguin $(\mathcal{X}, \sigma)$ i $(\mathcal{Y}, \tau)$ dos espais topològics. Sigui $\beta \subset \tau$ és una base d'oberts. Aleshores:*

$$f \textit{ contínua} \iff f^{-1}(\mathcal{V}) \in \tau,\ \forall \mathcal{V} \in \beta. \tag{3.1.5}$$

A més, una aplicació f entre espais topològics és contínua si, i només si, l'antiimatge de tot subconjunt tancat és tancada.

Demostració.

$\boxed{\implies}$ Per definició de continuïtat.

$\boxed{\impliedby}$ Sigui $\mathcal{W}$ un obert de $\mathcal{Y}$. Aleshores:

$$\mathcal{W} = \bigcup_{i \in I} V_i,\ V_i \in \beta \implies f^{-1}(\mathcal{W}) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i),\ f^{-1}(V_i) \in \sigma \implies f^{-1}(\mathcal{W}) \text{ obert.} \tag{3.1.6}$$

Pel que fa a la segona part de l'enunciat, resulta de la igualtat

$$f^{-1}(\mathcal{Y} \setminus \mathcal{T}) = \mathcal{X} \setminus f^{-1}(\mathcal{T}), \tag{3.1.7}$$

on $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ és una aplicació entre espais topològics i $\mathcal{T}$ és un tancat d'$\mathcal{Y}$. ■

Proposició 3.1.6. *La composició d'aplicacions contínues és contínua.*

Demostració. Siguin $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ i $g : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ aplicacions contínues entre espais topològics i sigui $\mathcal{U}$ un obert de $\mathcal{Z}$. Aleshores, $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U}))$ és un obert d'$\mathcal{X}$ per ser f, g contínues. Per tant, si $f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U}))$ és obert, $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{W})$ és obert. ■

Proposició 3.1.7. *Sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicació entre espais topològics. Sigui $\mathcal{Z} = f(\mathcal{X}) \subset \mathcal{Y}$ dotat de la topologia induïda per $\mathcal{Y}$. Definim $\overline{f} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Z}$, l'aplicació $\overline{f}(x) = f(x)$, per a tot $x \in \mathcal{X}$. Aleshores:*

1. *f és contínua si, i només si, $\overline{f}$ és contínua.*
2. *Si f és contínua i A és un subconjunt de $\mathcal{X}$, amb la topologia induïda, $f|_A : A \longrightarrow \mathcal{Y}$ és contínua.*

Demostració.

1. $\Longleftarrow$ Observem que l'aplicació inclusió $j : \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ és contínua (ja que la topologia en $\mathcal{Z}$ és la induïda). Per tant, $f = j \circ \overline{f}$ és contínua:

   $\Longrightarrow$ Sigui $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}$ un obert. Per definició de la topologia induïda, existeix un obert $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ tal que $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap \mathcal{Z}$. Aleshores:

$$\left(\overline{f}^{-1}\right)(\mathcal{U}) = \left(\overline{f}^{-1}\right)(\mathcal{V} \cap f(\mathcal{X})) = f^{-1}(\mathcal{V}). \tag{3.1.8}$$

   Com que:

$$\begin{gathered} f^{-1}(\mathcal{U}) = \{x \in \mathcal{X} \mid \overline{f}(x) = f(x) \in \mathcal{U}\}. \\ f^{-1}(\mathcal{V}) = \{x \in \mathcal{X} \mid \overline{f}(x) = f(x) \in \mathcal{V}\} = \{x \in \mathcal{X} \mid \overline{f}(x) = f(x) \in \mathcal{U}\}. \end{gathered} \tag{3.1.9}$$

   On en la segona igualtat hem usat que els punts que pertanyen a $\mathcal{V}$ no són imatge de res, pel que si van a parar a $\mathcal{V}$ estan a $\mathcal{U}$, el que implica que les antiimatges són iguals. Per tant, $f^{-1}(\mathcal{V})$ i $f^{-1}(\mathcal{U})$ coincideixen i les dos són oberts en ser f contínua.
2. La restricció $f|_A$ s'obté fent la composició $A \hookrightarrow \mathcal{X}$ i f. Per tant, la restricció resulta contínua sempre que f ho sigui.

■

[Lle13] agrupa la majoria de proposicions en una sola a tall de, sembla ser, un resum:

Proposició 3.1.8. *Sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicació entre dos espais topològics, $(\mathcal{X}, \tau_{\mathcal{X}})$ i $(\mathcal{Y}, \tau_{\mathcal{Y}})$. Siguin $\beta_{\mathcal{Y}}$ i $S_{\mathcal{Y}}$ una base i una subbase, respectivament, de $\tau_{\mathcal{Y}}$. Les següents condicions són equivalents:*

1. *f és contínua.*
2. *f és contínua en tot $x \in \mathcal{X}$.*
3. *Per tot tancat $\mathcal{T} \subset \mathcal{Y}$, $f^{-1}(\mathcal{T})$ és tancat a $\mathcal{X}$.*
4. *Per a tot $\mathcal{U} \in \beta_{\mathcal{Y}}$, la antiimatge $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_{\mathcal{X}}$.*
5. *Per a tot $\mathcal{U} \in S_{\mathcal{Y}}$, la antiimatge $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_{\mathcal{X}}$.*

3.2 Homeomorfismes

Definició 3.2.1 (Homeomorfisme). Una aplicació entre espais topològics és un homeomorfisme si és bijectiva, contínua i amb inversa contínua. Dos espais topològics són homeorfs si existeix un homeomorfisme entre ells.

Proposició 3.2.2. *Sigui $f : (\mathcal{X}, \tau_{\mathcal{X}}) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \tau_{\mathcal{Y}})$ contínua i bijectiva. f^{-1} és contínua si, i només si, les imatges per f dels oberts són obertes: $\mathcal{U} \in \tau_{\mathcal{X}}$ implica que $f(\mathcal{U}) \in \tau_{\mathcal{Y}}$.*

Demostració. Per ser f bijectiva, per a tot $\mathcal{U}$, $f(\mathcal{U}) = (f^{-1})^{-1}(\mathcal{U})$. Per tant, el que f transformi oberts en oberts equival a què la imatge per f^{-1} de qualsevol obert sigui un obert, és a dir, que f^{-1} sigui contínua. ■

Observació 3.2.3. La condició d'inversa contínua no és supèrflua. Per exemple, si $\mathcal{X} = (0,1], \mathcal{Y} = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ i $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ és l'aplicació $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, aleshores f contínua i bijectiva, però tindrem problemes amb la inversa: $g = f^{-1} : S^1 \longrightarrow (0,1]$. Fixem-nos:

$$g \text{ contínua} \implies \exists \mathcal{U} \text{ entorn d'}(0,1) \text{ en } S^1 \mid g(\mathcal{U}) \subset (1-\varepsilon, 1]. \tag{3.2.1}$$

i $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ no és un obert de $\mathcal{Y}$ i, per tant, no és un homeomorfisme.

Exemple 3.2.4. D'homeomorfismes a $(\mathbb{R}, \tau_e)$:

1. $\mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ és homeomorfa per l'aplicació $f(x) = e^x$ i $f^{-1}(t) = \ln(t)$.
2. $(0,1) \longrightarrow (a,b)$ tal que $a < b$. Podem agafar $g(t) = tb + (1-t)a$ i $g^{-1}(u) = \frac{u-a}{b-a}$.
3. $(0, +\infty) \longrightarrow (0,1)$. Aquests dos espais topològics són homeomorf per l'aplicació h que descrivim a continuació: $h(t) = \frac{t}{1+t}$ i $h^{-1}(u) = \frac{u}{1-u}$.

Exemple 3.2.5. D'homeomorfismes a $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$

- Donats $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ i $c < d$, tenim que $(a,b) \cong (c,d)$. L'aplicació $f : (a,b) \longrightarrow (c,d)$ definida per $f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$ és contínua, bijectiva i la seva inversa, $f^{-1}(y) = \frac{b-a}{d-c}(y-c)$ també és contínua. Per tant, tenim $[a,b] \cong [c,d]$, però $[a,b] \not\cong (c,d)$, ja que no hi pot haver $f : [a,b] \longrightarrow (c,d)$ contínua i bijectiva; com que $[a,b]$ és tancat i acotat, això implicaria que f té màxim absolut, és a dir, que $\exists t_0 \in [a,b] \mid f(t_0) \geq f(t)$, per a tot $t \in [a,b]$, fet absurd donat que $f(t_0) \in (c,d)$, que no té element màxim.
- Generalitzant el punt anterior, podem veure que per a qualsevol $n \geq 1$ dues boles obertes a $\mathbb{R}^n$ són homeomorfes: siguin $B_\varepsilon(p)$ i $B_\delta(q)$ dues boles d'$\mathbb{R}^n$. L'homeomorfisme en aquest cas és $f : B_\varepsilon(p) \longrightarrow B_\delta(q)$ definit per $f(x) = q + \frac{\delta}{\varepsilon}(x-p)$ amb inversa $f^{-1}(y) = p + \frac{\varepsilon}{\delta}(y-q)$. I aquest homeomorfisme també ens permetria veure que $\overline{B_\varepsilon(p)} \cong \overline{B_\delta(q)}$. Cal remarcar que les boles obertes de dimensions diferents no poden ser homeomorfes entre elles.

Definició 3.2.6 (Aplicació oberta). Sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicació entre espais topològics. Diem que f és oberta si per a tot obert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$, aleshores $f(\mathcal{U})$ és un obert d'$\mathcal{Y}$. Diem que f és tancada si per a tot tancat $\mathcal{T}$ de $\mathcal{X}$, $f(\mathcal{T})$ és un tancat de $\mathcal{Y}$.

Proposició 3.2.7. *Sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicació entre espais topològics. Són equivalents:*

1. *f és un homeomorfisme,*
2. *f és bijectiva, contínua i oberta,*
3. *f és bijectiva, contínua i tancada.*

Demostració.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Suposem que f és un homeomorfisme i sigui $\mathcal{U}$ un obert de $\mathcal{X}$. Per la bijecció $f(\mathcal{U}) = (f^{-1})^{-1}(\mathcal{U})$. Com que f^{-1} és contínua, obtenim que $f(\mathcal{U})$ és un obert. Per tant, f és oberta.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Suposem que f és contínua, bijectiva i oberta, i sigui $\mathcal{T}$ un tancat de $\mathcal{X}$. En ser f bijectiva, $f(\mathcal{T}) = \mathcal{Y} \setminus f(\mathcal{X} \setminus \mathcal{T})$. Com que f és oberta, $f(\mathcal{X} \setminus \mathcal{T})$ és un obert i, per tant, $f(\mathcal{T})$ és un tancat.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Suposem ara que f és bijectiva, contínua i tancada. Per veure que f és un homeomorfisme és suficient veure que f^{-1} és contínua. Sigui $\mathcal{T}$ un tancat de $\mathcal{X}$. Tenim que $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{T}) = f(\mathcal{T})$, que és un tancat en ser f tancada. Per tant, f^{-1} és contínua.

■

Si f és un homeomorfisme, hi ha una bijecció entre els oberts de $\mathcal{X}$ i els de $\mathcal{Y}$ que preserva unions, interseccions, etc. i fa que els dos espais tinguin les mateixes propietats que depenguin exclusivament dels oberts.

Definició 3.2.8 (Propietat topològica)**.** Es diu que una propietat d'un espai topològic $\mathcal{X}$ és una *propietat topològica* si es preserva per homeomorfismes. És a dir, la propietat és certa per a tots els espais homeomorfes a $\mathcal{X}$.

Observació 3.2.9.

1. Els axiomes de numerabilitat són invariants per homeomorfisme.
2. Si f és un homeomorfisme entre dos espais topològics $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ i $A \subset \mathcal{X}$, aleshores A i $f(A)$ són homeomorfs i també ho són $\mathcal{X} \setminus A$ i $f(\mathcal{X} \setminus A)$.

Un exemple útil d'homeomorfisme és l'anomenada p*rojecció estereogràfica*, que permet provar $\mathbb{S}^n \setminus \{p\} \approx \mathbb{R}^n$ per tot $n \geq 1$. Per al cas $n = 2$, podem fixar l'eix $z = 0$:

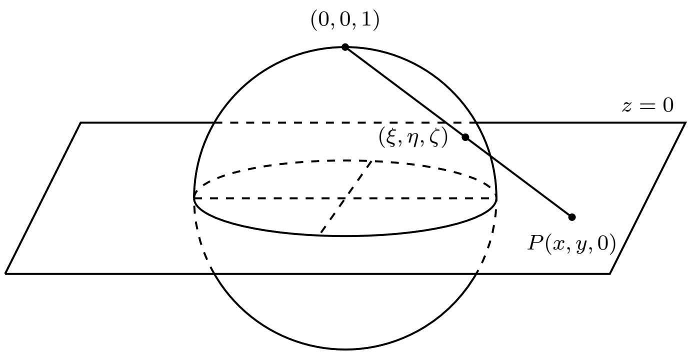


Figura 3.2: Representació de la projecció estereogràfica per a $z = 0$.

Si tracéssim una funció diferent de P, tal que $f : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ veuríem que és, en efecte, un homeomorfisme com el descrit amb la seva inversa corresponent:

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right), \; f^{-1}(u,v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right). \tag{3.2.2}$$

Per a n arbitrari es pot generalitzar:

$$\begin{aligned} f(x_0, \ldots, x_n) &= \left(\frac{x_0}{1-x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{1-x_n} \right) \\ f^{-1}(t_1, \ldots, t_n) &= \left(\frac{2t_0}{1+\sum_{i=0}^{n-1} t_i^2}, \ldots, \frac{2t_{n-1}}{1+\sum_{i=0}^{n-1} t_i^2}, \ldots, \frac{\sum_{i=0}^{n-1} t_i^2 - 1}{1+\sum_{i=0}^{n-1} t_i^2} \right). \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

3.3

Funcions contínues, recobriments i successions

Definició 3.3.1 (Recobriment)**.** Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic. Un *recobriment* d'$\mathcal{X}$ és una família de subconjunts $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}$ tal que

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i. \tag{3.3.1}$$

1. Si $\mathcal{X}_i$ és obert per a tot $i \in I$ diem que és un recobriment obert i
2. si $\mathcal{X}_i$ és tancat per a tot $i \in I$, diem que és un recobriment tancat.

Exemple 3.3.2. Considerant $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, podem escriure el recobriment de $\mathcal{X}$ com $\mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = (-\infty, 1) \cup (-1, +\infty)$ o bé $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (i, i+2)$.

Proposició 3.3.3. *Siguin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ dos conjunts i sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicació. Si $\{\mathcal{X}_i\}_{i \in I}$ és un recobriment de $\mathcal{X}$, les restriccions*

$$f_i : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{Y} \tag{3.3.2}$$

verifiquen

$$f_{i_{\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_{i'}}} = f_{i'_{\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_{i'}}}, \ \forall i, i' \in I. \tag{3.3.3}$$

Recíprocament, donades aplicacions $\{f_i\}_{i \in I}, f_i : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{Y}$ que verifiquen les condicions, existeix una única aplicació de conjunts $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ tal que f_i és $f|_{\mathcal{X}_i}$ per a tot $i \in I$. En altres paraules, si f és contínua, f_i és contínua per a tot $i \in I$.

Exemple 3.3.4. Sigui $\mathcal{X} = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \{x\}$ amb $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicació. Aleshores, $f|_{\{x\}} : \{x\} \longrightarrow \mathcal{Y}$ és constant implica que és contínua.

Proposició 3.3.5. *Siguin ara $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espais topològics. Suposem $f_i : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{Y}$ és contínua per a tot $i \in I$. Aleshores:*

1. *si el recobriment és tancat i finit, f és contínua;*
2. *si el recobriment és obert, f és contínua.*

Demostració.

1. Suposem $\mathcal{X} = \bigcup_i^n \mathcal{T}_i$, tancats de $\mathcal{X}$, i $f|_{\mathcal{T}_i}$ contínues per a tot $i = 1 \div n$. Sigui $\mathcal{T}$ un tancat de $\mathcal{Y}$. Aleshores:

$$f^{-1}(\mathcal{T}) = f^{-1}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} = f^{-1}(\mathcal{T}) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(f^{-1}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{T}_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} f_{|\mathcal{T}_i}^{-1}(\mathcal{T}). \tag{3.3.4}$$

Com que $f_{|\mathcal{T}_i}^{-1}$ és un tancat de $\mathcal{X}_i$, que és un tancat de $\mathcal{X}$, $f_i^{-1}(\mathcal{T})$ és tancat de $\mathcal{X}$ i $f^{-1}(\mathcal{T})$, en ser una reunió finita de tancats, és tancat.

2. Sigui $\mathcal{U}$ un obert de $\mathcal{Y}$. Aleshores:

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{X} = f^{-1}(\mathcal{U}) \cap \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \right) = \bigcup_{i \in I} (f^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{X}_i) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{U}), \tag{3.3.5}$$

on hem usat 3.3.6. Com que $f_i^{-1}(\mathcal{U})$ és un obert de $\mathcal{X}_i$ i $\mathcal{X}_i$ és obert, tenim que $f_i^{-1}(\mathcal{U})$ és un obert de $\mathcal{X}$. Així, $f^{-1}(\mathcal{U})$ és obert.

■

Proposició 3.3.6 (Transitivitat de la obertura). *Sigui $\mathcal{X}$ espai topològic. Si $A \subset \mathcal{X}$ és un obert de $\mathcal{X}$ i $\mathcal{U} \subset A$ és un obert en A, aleshores $\mathcal{U}$ és un obert en $\mathcal{X}$. A més, existeix un obert $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{U} = A \cap \mathcal{V}$ és un obert de $\mathcal{X}$.*

Corol·lari 3.3.7. *En el cas d'un recobriment tancat, la condició de finitud és una condició necessària.*

Exemple 3.3.8. Per exemple, siguin $\mathcal{X} = [0,1]$ i $\mathcal{X}_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ amb $n > 0$ i $\mathcal{X}_\infty = \{0\}$. Sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'aplicació que és la identitat a $(0,1]$ i que verifica $f(0) = 1$. Aquesta aplicació no és contínua i, en canvi, $f_n := f|_{\mathcal{X}_n}, f_\infty := f|_{\mathcal{X}_\infty}$ són contínues i

$$f_{n_{|\mathcal{X}_n \cap \mathcal{X}_m}} = f_{m_{|\mathcal{X}_n \cap \mathcal{X}_m}}, \ \forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \tag{3.3.6}$$

Definició 3.3.9 (Successió). Una successió en un conjunt $\mathcal{X}$ és una aplicació $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{X}$. També es pot descriure com un conjunt ordenat $x_1, x_2, \ldots$ d'elements d'$\mathcal{X}$ indexats per $\mathbb{N}$, és a dir, on $f(n) = x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Recordem que una successió (x_n) de punts d'un espai topològic es convergent si existeix un punt $x \in \mathcal{X}$ tal que tot entorn $\mathcal{U}$ de x conté tots els termes de la successió a partir d'un lloc. Formalment:

Definició 3.3.10 (Successió convergent en un espai topològic). Una successió (x_n) de punts d'un espai topològic es diu que és una *successió convergent* si existeix un punt $x \in \mathcal{X}$ tal que per a tot entorn $\mathcal{U}$ de x existeix un n_0 tal que, per a tot $n \geq n_0$ es té $x_n \in \mathcal{U}$. x és el *punt límit de la successió.*

Exemple 3.3.11. Una successió pot tenir molts límits. Per exemple, en el cas de la topologia grollera tota successió convergeix a tots els punts.

1. Si la topologia és la discreta, una successió convergeix a un punt x si, i només si, la successió és constantment x a partir d'algun lloc.
2. En el cas d'espais mètrics les successions tenen, com a màxim, un únic límit.

Si l'espai compleix el primer axioma de numerabilitat, els tancats i les aplicacions contínues es poden caracteritzar per les següents propietats que generalitzen dos resultats que ja hem vist per espais mètrics.

Proposició 3.3.12.

1. *Si un subconjunt $A \subset \mathcal{X}$ és tancat i una successió (a_n) de punts d'A convergeix a un punt $x \in \mathcal{X}$, aleshores $x \in A$.*
2. *Si $\mathcal{X}$ compleix el primer axioma de numerabilitat i el subconjunt $A \subset \mathcal{X}$ compleix que totes les successions convergents de punts en A tenen el punt límit en A, aleshores A és tancat.*

Demostració.

1. Si (a_n) amb $a_n \in A$, per a tot n, convergent a x, tot entorn de x conté punts de la successió i, per tant, conté punts d'A. Això vol dir que $x \in \overline{A} = A$, per ser A tancat.
2. Per demostrar la segona afirmació, veurem que tot punt adherent a A, $x \in \overline{A}$, és a A. En efecte, sigui $B_0 \supset B_1 \supset \cdots \ni x$ una base numerable d'entorns de x. Per ser $x \in \overline{A}$ podem escollir punts $a_n \in B_n \cap A$. La successió (a_n) convergeix a x i, per hipòtesi, això implica que $x \in A$.

■

Proposició 3.3.13.

1. *Si $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ és contínua i (x_n) és una successió de $\mathcal{X}$ convergent a un punt x, aleshores $(f(x_n))$ convergeix a $f(x)$.*

2. *Suposem que $\mathcal{X}$ compleix el primer axioma de numerabilitat. Si una aplicació $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ compleix que per a tota successió (x_n) de $\mathcal{X}$ convergent a un punt x, la successió $(f(x_n))$ convergeix a $f(x)$, aleshores f és contínua en x.*

Demostració.

1. Suposem que $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ és contínua i que (x_n) convergeix a $x \in \mathcal{X}$. Per a tot entorn obert $\mathcal{U} \ni f(x)$ la antiimatge $f^{-1}(\mathcal{U})$ és un entorn obert de x. Com que x és límit de (x_n), existirà un n_0 tal que $x_n \in f^{-1}(\mathcal{U})$ per a tot $n \geq n_0$. D'aquí resulta que $f(x_n) \in \mathcal{U}$ per a tot $n \geq n_0$, de tal manera que la successió $(f(x_n))$ convergeix a $f(x)$.
2. Suposem ara que $\mathcal{X}$ compleix el primer axioma de numerabilitat, i suposem ara que $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ no és contínua en x. Això vol dir que hi ha un entorn $\mathcal{U} \ni f(x)$ tal que cap entorn de x s'aplica dins d'$\mathcal{U}$. Sigui $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una base d'entorns numerables de x tal que $B_n \supset B_{n+1}$ per a tot n. A cada B_n escollim un punt x_n que no tingui la seva imatge a $\mathcal{U}$. Aleshores, la successió (x_n) convergeix a x, però la successió $(f(x_n))$ no convergeix a $f(x)$. Això demostra la segona afirmació de l'enunciat.

■

Es pot definir la convergència d'una successió de funcions $f_n : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ entre espais topològics a una certa funció $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ demanant que per a cada punt $x \in \mathcal{X}$ la successió $(f_n(x))$ tingui límit $f(x)$. Ara bé, amb aquesta definició, la continuïtat de les funcions f_n no assegura la continuïtat d'f.

En els espais mètrics es pot definir una condició de convergència més forta de forma que la funció límit de funcions contínues sigui contínua:

Definició 3.3.14 (Uniformement convergent). Sigui $f_n : (\mathcal{X}, \tau) \longrightarrow (M, d)$, $n \in \mathbb{N}$ una successió de funcions d'un espai topològic en un espai mètric. Es diu que la successió (f_n) és *uniformement convergent* a una funció $f : \mathcal{X} \longrightarrow M$ si per a tot real $\varepsilon > 0$ existeix un enter positiu n_0 tal que:

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \ \forall n > n_0, \ \forall x \in \mathcal{X}. \tag{3.3.7}$$

Teorema 3.3.15. *Si $f_n : (\mathcal{X}, \tau) \longrightarrow (M, d)$ és una successió de funcions contínues d'un espai topològic en un espai mètric, que convergeix uniformement a una funció $f : \mathcal{X} \longrightarrow M$, aleshores f és contínua.*

Demostració. Hem de provar que, donat un obert $\mathcal{U}$ de M, $f^{-1}(\mathcal{U})$ és obert; és a dir, per a tot $x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})$, hem de construir un entorn E de x_0 que s'apliqui dins d'$\mathcal{U}$. Per ser $\mathcal{U}$ obert, existeix una bola $B(f(x_0), \varepsilon) \subset \mathcal{U}$; construirem E que s'apliqui dins d'aquesta bola.

Per la convergència uniforme, existeix N tal que per a tot $n \geq N$ i tot $x \in \mathcal{X}$, $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Per la continuïtat de f_N, existeix un entorn E de x_0 tal que $f_N(E) \subset B(f_N(x_0), \frac{\varepsilon}{3})$. Aleshores, per a tot $z \in E$, tenim que:

$$d(f(z), f(x_0)) \leq d(f(z), f_N(z)) + d(f_N(z), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{3.3.8}$$

El primer i el tercer sumands són menors que $\frac{\varepsilon}{3}$ per l'elecció de N; el segon sumand és menor que $\frac{\varepsilon}{3}$ per l'elecció de E. ■

Per acabar el capítol, donarem una altra demostració de com un espai és tancat en funció de si el complementari és obert:

Teorema 3.3.16. *Sigui $A \subset \mathcal{X}$ un subconjunt qualsevol d'un espai mètric. Es compleix que A és tancat si, i només si, $\mathcal{X} \setminus A$ és obert.*

Demostració. Suposem que A és tancat i que $\mathcal{X} \setminus A$ no és obert, i buscarem una contradicció.

Per això, prenem $p \in \mathcal{X} \setminus A$ i suposem $\nexists \varepsilon > 0 \bigm| B_\varepsilon(p) \subset \mathcal{X} \setminus A$. En particular, prenent $\varepsilon = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$, tindrem que cal que existeixi $x_n \in A \cap B_{\frac{1}{n}}(p), \forall n \in \mathbb{N}$. Llavors, tenim una successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'elements d'A tal que $x_n \to p$, $p \notin A$, cosa que contradiu la hipòtesi que A és tancat, de manera que caldrà que $\mathcal{X} \setminus A$ sigui obert.

Recíprocament, suposem que $\mathcal{X} \setminus A$ és obert i sigui $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió d'elements d'A tal que $x_n \to p$, $p \in \mathcal{X}$. Suposem que $p \notin A$ (és a dir, $p \in \mathcal{X} \setminus A$), i buscarem una contradicció. Del fet que la successió convergeixi a p, tenim que $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_\varepsilon(p)$ per tot $n \geq n_0$. Així doncs, com que tot x_n és un element d'A, qualsevol bola oberta centrada a p contindrà algun element d'A, cosa que no pot passar ja que hem suposat que $\mathcal{X} \setminus A$ és un conjunt obert. Concloem, doncs, que caldrà que A sigui tancat, tal com volíem veure. ■

Exercici 3.3.17. *Sigui (M, d) un espai mètric. Donats $p \in M$ i $r > 0$, considerem els següents subconjunts de M:*

- $B_r(p) = \{q \in M \bigm| d(p, q) < r\}$.
- $\overline{B_r(p)}$ *l'adherència en M de $B_r(p)$*
- $BC_r(p) = \{q \in M \bigm| d(p, q) \leq r\}$.

Cal que:

1. *Demostreu que $BC_r(p)$ és un tancat de M i que $\overline{B_r(p)} \subset BC_r(p)$ per a tot $p \in M$ i per a tot $r > 0$.*
2. *Si $M = \{0\} \cup (1, +\infty)$ i considerem en M la mètrica induïda per la mètrica euclidiana estàndard en $\mathbb{R}$, determineu $p \in M$ i $r > 0$ tals que $\overline{B_r(p)} \neq BC_r(p)$.*
3. *Per als valors de p i r determinats en l'apartat anterior, calcular l'interior i la frontera de $BC_r(p)$.*

Demostració. Dividirem la demostració en els tres apartats que se'ns demana:

1. Si $q \notin BC_r(p)$, aleshores $d(p, q) > r$. Sigui $s = d(p, q) - r > 0$. Aleshores, si $z \in BC_r(p) \cap B_s(q)$ tenim que:
$$d(p, q) \leq d(p, z) + d(z, q) < d(p, q) - r + r = d(p, q). \tag{3.3.9}$$
I no podem tenir $d(p, q) < d(p, q)$. Davant d'aquesta contradicció, $BC_r(p) \cap B_s(q) = \emptyset$ i, d'aquí, $q \notin \overline{BC_r(p)}$. Aleshores, $BC_r(p)$ és tancat. A més, $B_r(p) \subset BC_r(p)$ i $\overline{B_r(p)}$ és el menor tancat que conté a $B_r(p)$ i tenim que $\overline{B_r(p)} \subset BC_r(p)$.
2. Si $z \in BC_r(p) \setminus \overline{B_r(p)}$, aleshores $d(z, p) = r$ i ha d'existir un entorn $(z - \varepsilon, z + \varepsilon)$ de z tal que $d(x, p) \geq r$ per a tot $x \in (z - \varepsilon, z + \varepsilon)$. Com la distància és la restricció de la distància euclidiana, això solament pot ocórrer si $z = 0$. Dit d'una altra manera, o bé $BC_r(p) = \overline{B_r(p)}$ o bé $BC_r(p) = \overline{B_r(p)} \cup \{0\}$. Així:
   - Si $p = 0$, aleshores $\overline{B_r(p)} = BC_r(p)$.
   - Si $r = p > 1$, tenim que $0 \in BC_r(p) \setminus \overline{B_r(p)}$.
   - Si $p > 1$ i $p > r$, aleshores $0 \notin BC_r(p)$ i, per tant, $\overline{B_r(p)} = BC_r(p)$.
   - Si $r > p > 1$, aleshores $0 \in B_r(p)$ i $\overline{B_r(p)} = BC_r(p)$.

   Els valors demanats són els p, r amb $r = p > 1$.

3. Si $r = p > 1$, aleshores $BC_r(p) = \{0\} \cup (1, 2p]$. L'interior d'aquest subconjunt de M és $\{0\} \cup (1, 2p)$ i, per tant, la frontera és $\{2p\}$.

■

IV

Construcció d'espais topològics

4.1 Topologies inicials

Induïm una topologia en $\mathcal{Y}$ mitjançant l'aplicació $\mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$, canviant la inclusió per una aplicació arbitrària $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ es defineix la topologia:

$$\tau_f^{ini} = \{f^{-1}(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \text{ és un obert de } \mathcal{X}\}. \tag{4.1.1}$$

Aquesta topologia és la més grollera sobre $\mathcal{Y}$ que fa contínua l'aplicació f. Generalitzem al cas d'n aplicacions

$$f_i : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}_i,\ i = 1 \div n,\ \mathcal{U} \text{ obert} \longmapsto f^{-1}(\mathcal{U}), \tag{4.1.2}$$

on $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ són espais topològics.

Definició 4.1.1 (Topologia inicial)**.** Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic, $\mathcal{Y}$ un conjunt i $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ una aplicació. S'anomena *topologia inicial* en $\mathcal{Y}$ respecte f a la topologia:

$$\tau_f^{ini} = \{f^{-1}(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \in \tau\}. \tag{4.1.3}$$

Demostració. Es compleix que:

1. $\mathcal{Y} = f^{-1}(\mathcal{X}), \emptyset = f^{-1}(\emptyset)$.
2. Si $\{f^{-1}(\mathcal{U}_i)\}_{i\in I}$, aleshores $\bigcup f^{-1}(\mathcal{U}_i) = f^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_i) \in \tau_f^{ini}$, ja que $\bigcup \mathcal{U}_i \in \tau_f^{ini}$.
3. $f^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(\mathcal{V}) = f^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \in \tau_f^{ini}$.

■

Definició 4.1.2 (Topologia inicial en un conjunt)**.** Siguin $(\mathcal{X}_1, \sigma_1), \ldots, (\mathcal{X}_n, \sigma_n)$. La *topologia inicial* sobre $\mathcal{Y}$ respecte de les aplicacions $f_1, \ldots, f_n$ és la topologia que té com a base:

$$\beta_{\mathcal{Y}} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\mathcal{U}_i) \mid \mathcal{U}_i \text{ obert de } \mathcal{X}_i,\ i = 1 \div n \right\}. \tag{4.1.4}$$

Observació 4.1.3. Observem que $\beta_{\mathcal{Y}}$ verifica les condicions d'una base:

1. $\emptyset \in \beta_{\mathcal{Y}}$ per definició i $\mathcal{Y} = f_i^{-1}(\mathcal{X}_i)$ amb $i = 1 \div n$:

$$\begin{gathered} \emptyset = f_1^{-1}(\emptyset) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(\emptyset) \in \beta_{\mathcal{Y}} \\ \mathcal{Y} = f_1^{-1}(\mathcal{X}_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(\mathcal{X}_n) = \mathcal{Y} \cap \cdots \cap \mathcal{Y}. \end{gathered} \tag{4.1.5}$$

2. La intersecció de dos elements de $\beta_{\mathcal{Y}}$ és de $\beta_{\mathcal{Y}}$. Per tant, és reunió d'elements de $\beta_{\mathcal{Y}}$: si tenim $A = f_1^{-1}(\mathcal{U}_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(\mathcal{U}_n) \in \beta_{\mathcal{Y}}$ i $B = f_1^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(V_n) \in \beta_{\mathcal{Y}}$ aleshores:

$$A \cap B = f_1^{-1}(\mathcal{U}_1 \cap V_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(\mathcal{U}_n \cap V_n). \tag{4.1.6}$$

Exemple 4.1.4. La topologia induïda en un subconjunt d'un espai topològic és la topologia inicial respecte de l'aplicació inclusió.

Observació 4.1.5. Per construcció, totes les aplicacions f_i amb $i = 1 \div n$ són contínues quan es considera sobre $\mathcal{Y}$ aquesta topologia: $f_{i_0} : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}_{i_0}$ tal que $\mathcal{U}_{i_0} \subset \mathcal{X}_{i_0}$ i

$$f_{i_0}^{-1}(\mathcal{U}_{i_0}) = f_1^{-1}(\mathcal{X}_1) \cap \cdots \cap f_{i_0}^{-1}(\mathcal{U}_{i_0}) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(\mathcal{X}_n) \in \beta, \tag{4.1.7}$$

on $f_1^{-1}(\mathcal{X}_1), f_n^{-1}(\mathcal{X}_n) = \mathcal{Y}$.

Això també es podia haver aconseguit dotant a $\mathcal{Y}$ de la topologia discreta, però suposaria prendre més oberts dels necessaris. De fet:

Proposició 4.1.6. *La topologia inicial és la topologia més grollera amb la qual les aplicacions $f_1, \ldots, f_n$ són contínues.*

Demostració. Sigui τ_f^{ini} una topologia sobre $\mathcal{Y}$ tal que $f_1, \ldots, f_n$ són contínues. Aleshores, per a tot obert $\mathcal{U}_i$ de $\mathcal{X}_i$, $f_i^{-1}(\mathcal{U}_i) \in \tau_f^{ini}$. Utilitzant els axiomes d'una topologia obtenim que reunions arbitràries d'oberts de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_f^{ini} \implies \beta \subset \tau_f^{ini} \implies \tau_f \subset \tau_f^{ini}. \tag{4.1.8}$$

Així, aquesta topologia és més fina que la topologia inicial. ■

Exemple 4.1.7. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $t \mapsto (\sin(t), e^t + 27t^{12})$ és contínua ja que les seves components són contínues.

Observació 4.1.8. La construcció de la topologia inicial es pot fer en el cas que es disposi d'un conjunt arbitrari d'aplicacions $f_i : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}_i$, $i \in I$ definit.

$$\beta_{\mathcal{Y}} = \left\{ \bigcap_{j=i_1}^{i_n} f_j^{-1}(\mathcal{U}_j) \,\middle|\, \mathcal{U}_j \text{ obert de } \mathcal{X}_j \right\}. \tag{4.1.9}$$

Proposició 4.1.9. *Siguin $(\mathcal{X}_1, \sigma_1), (\mathcal{X}_n, \tau_n)$ espais topològics, i sigui τ_f^{ini} la topologia inicial de $\mathcal{Y}$ respecte de les aplicacions $f_i : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}_i$, $i \in I$. Sigui $\mathcal{Z}$ un espai topològic. Una aplicació $\varphi : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Y}$ és contínua si, i només si, totes les composicions $f_i \circ \varphi$, $i \in I$ són contínues.*

Demostració. Si φ és contínua, aleshores $f_i \circ \varphi$, $i \in I$ són contínues. Recíprocament, suposem que f_i amb $i \in I$ són contínues. Podem comprovar la continuïtat de φ utilitzant els oberts de la base donada abans. Com que:

$$\varphi^{-1}\left(\bigcap_{j=i_1}^{i_n} f_j^{-1}(\mathcal{U}_j)\right) = \left(\bigcap_{j=i_1}^{i_n} (\varphi^{-1} \circ f_j^{-1})(\mathcal{U}_j)\right) = \left(\bigcap_{j=i_1}^{i_n} (f_j \circ \varphi)^{-1}(\mathcal{U}_j)\right), \tag{4.1.10}$$

on tots els elements de la intersecció són oberts de $\mathcal{Z}$. Per tant, per qualssevol oberts $\mathcal{U}_i$ de $\mathcal{X}_i$, amb $i = 1 \div n \in I$, obtenim que φ és contínua. ■

4.2
Productes

Siguin $(\mathcal{X}, \tau_\mathcal{X}), (\mathcal{Y}, \tau_\mathcal{Y})$ dos espais topològics. Volem definir una topologia sobre el producte cartesià $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. És natural demanar que amb aquesta topologia les projeccions:

$$\begin{aligned} p_\mathcal{X} &: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}, \\ p_\mathcal{Y} &: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}; \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

siguin aplicacions contínues.

Definició 4.2.1 (Topologia producte)**.** La topologia producte sobre $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ és la topologia inicial respecte de les projeccions. Una base de la topologia és

$$\beta_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} = \{p_\mathcal{X}^{-1}(\mathcal{U}) \cap p_\mathcal{Y}^{-1}(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \mid \mathcal{U} \in \tau_\mathcal{X},\ \mathcal{V} \in \tau_\mathcal{Y}\}. \tag{4.2.2}$$

Observació 4.2.2 (Topologia producte per a espais finits)**.** De manera idèntica es defineix la topologia producte quan es té un nombre finit d'espais topològics $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$: la topologia producte en $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ és la inicial respecte de $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \longrightarrow \mathcal{X}$, i anàlogament per $p_\mathcal{Y}$.

Exemple 4.2.3.

1. Sigui $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana. La topologia producte $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ és la que té com a oberts reunions arbitràries de subconjunts de la forma $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ amb $a_1 \leq b_1$ i $a_2 \leq b_2$. Per tant, coincideix amb la topologia euclidiana d'$\mathbb{R}^2$. En particular, no tots els oberts són de la forma $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Anàlogament, la topologia producte sobre $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ és la topologia euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$.
2. Suposem que tenim dos espais mètrics $(\mathcal{X}, d), (\mathcal{Y}, d)$. Volem posar una topologia per al producte cartesià i tenim dues possibilitats: la topologia associada amb

$$\left.\begin{aligned} (\mathcal{X}, d) &\longmapsto \tau_d \\ (\mathcal{Y}, d') &\longrightarrow \tau_{d'} \end{aligned}\right\} \tau_{prod} \text{ topologia producte en } \mathcal{X} \times \mathcal{Y}. \tag{4.2.3}$$

   L'altra possibilitat resulta:

$$\left.\begin{aligned} (\mathcal{X}, d) \\ (\mathcal{Y}, d') \end{aligned}\right\} \longmapsto (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, d_{prod}) \implies \text{topologia associada a } d_{prod} \tag{4.2.4}$$

3. Posem:

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{Z} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[urr, bend left, "\varphi\circ f_1"] \arrow[drr, bend right, "\varphi\circ f_2"'] & \mathcal{Y} \arrow[ur, bend right, "f_1"] \arrow[r] \arrow[dr, bend left, "f_n"'] & \vdots \\ & & \mathcal{X}_n \end{tikzcd} \tag{4.2.5}$$

   Si ho extrapolem a una casuística concreta per al producte, en aquest cas, $n = 2$:

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{Z} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[urr, bend left, "\varphi\circ f_1"] \arrow[drr, bend right, "\varphi\circ f_2"] & X_1 \times \mathcal{X}_2 \arrow[ur, bend right, "f_1"] \arrow[dr, bend left, "f_2"] & \\ & & \mathcal{X}_2 \end{tikzcd} \tag{4.2.6}$$

D'aquesta manera, φ és contínua si, i només si, $\alpha(z)$ és contínua i $\beta(z)$ és contínua.

Proposició 4.2.4. *Les projeccions són aplicacions contínues quan es dota el producte cartesià de la topologia producte. A més, la topologia producte és la més grollera amb la qual les projeccions són contínues.*

En el cas del producte d'una família infinita d'espais topològics, les unions de productes d'un obert de cada un dels espais és una topologia que es diu la *topologia de caixes.* Ara bé, aquesta topologia té inconvenients, un dels més evidents és que una aplicació:

$$f : \mathcal{Y} \longrightarrow \prod_{j\in J} \mathcal{X}_j. \tag{4.2.7}$$

pot no ser contínua encara que totes les $f_k = p_k \circ f$ siguin contínues, on $p_k : \prod_{j\in J} \mathcal{X}_j \longrightarrow \mathcal{X}_k$ és la projecció sobre la k-èsima coordenada.

Proposició 4.2.5. *Siguin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ espais topològics i siguin $f : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{X}$, $g : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Y}$ dues aplicacions. L'aplicació:*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{Z} & \longrightarrow & \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \\ & z & \longmapsto & (f(z), g(z)) \end{array} \tag{4.2.8}$$

és contínua si, i només si, f i g són contínues.

4.3 Topologies finals

Quan es té una aplicació $f : (\mathcal{X}, \tau) \longrightarrow \mathcal{Y}$ d'un espai topològic en un conjunt interessa, a vegades, dotar a $\mathcal{Y}$ d'una topologia que faci f contínua. Evidentment, si dotem $\mathcal{Y}$ de la topologia grollera, f serà contínua. Però interessa considerar oberts de $\mathcal{Y}$ tots els conjunts possibles; per això, escollim la topologia que fa f contínua.

Definició 4.3.1. Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic i sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicació. La topologia final respecte de f és:

$$\tau_f^{fin} = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{Y} \mid f^{-1}(\mathcal{U}) \text{ és obert}\}. \tag{4.3.1}$$

Es veu fàcilment que τ_f és una topologia:

1. $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ obert en $\mathcal{X}$, de tal manera que $\emptyset \in \tau_f^{fin}$. Anàlogament, $\mathcal{X} = f^{-1}(\mathcal{Y})$, $\mathcal{X}$ obert en $\mathcal{X}$ i, doncs, $\mathcal{X} \in \tau_f^{fin}$.
2. A més, si $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ és una col·lecció de subconjunts de $\mathcal{Y}$ tals que $f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ és obert per a tot $i \in I$, aleshores:

$$f^{-1}(\mathcal{U}_i) \text{ obert}, \forall i \implies f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{U}_i) \text{ és obert} \implies \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \in \tau_f^{fin}, \tag{4.3.2}$$

i si I és finit,

$$\mathcal{U}_i \in \tau_f^{fin} \implies f^{-1}(\mathcal{U}_i) \text{ obert} \implies f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{U}_i) \text{ és obert}. \tag{4.3.3}$$

Proposició 4.3.2. *La topologia final és la més fina que fa contínua l'aplicació f.*

Demostració. Per construcció de la topologia final, f és contínua. Sigui τ una altra topologia sobre $\mathcal{Y}$ amb aquesta propietat, és a dir, tal que $f : (\mathcal{X}, \tau') \longrightarrow (\mathcal{Y}, \tau)$ és contínua. Aleshores, per a tot $\mathcal{U} \in \tau$ es dona que $f^{-1}(\mathcal{U})$ és un obert. Per tant, $\mathcal{U} \in \tau_f^{fin}$ i $\tau \subset \tau_f^{fin}$. ■

Generalitzem al cas de n aplicacions $f_i : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{Y}$, $i = 1 \div n$, on $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ són espais topològics. Definim la topologia final sobre $\mathcal{Y}$ de la forma següent:

Definició 4.3.3 (Topologia final). Siguin $f_i : (\mathcal{X}_i, \tau_i) \longrightarrow \mathcal{Y}$ aplicacions d'espais topològics $(\mathcal{X}_i, \tau_i), i \in I$ en un conjunt $\mathcal{Y}$. La *topologia final* en $\mathcal{Y}$ induïda per aquest conjunt d'aplicacions és la topologia de $\mathcal{Y}$ més fina que fa contínues totes les f_j:

$$\tau_{f_1 \div f_n} = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{Y} \mid f_i^{-1}(\mathcal{U}) \text{ obert de } \mathcal{X}_i, \ \forall i \in I = \{1 \div n\}\}. \tag{4.3.4}$$

Proposició 4.3.4. *Siguin $f_i : (\mathcal{X}_i, \tau_i) \longrightarrow \mathcal{Y}$ aplicacions d'espais topològics $(\mathcal{X}_i, \tau_i), i \in I$ en un conjunt $\mathcal{Y}$. Denotem per τ_f^{fin} la topologia final a $\mathcal{Y}$. Una aplicació $g : (\mathcal{Y}, \tau_f^{fin}) \longrightarrow (\mathcal{Z}, \rho)$ és contínua si, i només si, totes les composicions $g \circ f_i$ són contínues.*

Demostració.

$\Longrightarrow$ Si g és contínua, com que f_i és contínua, la composició $g \circ f_i$ és contínua.

$\Longleftarrow$ Suposem ara que, per a tot i, $g \circ f_i$ és contínua, i sigui $\mathcal{U}$ un obert de $\mathcal{Z}$. Aleshores, $(g \circ f_i)^{-1}(\mathcal{U}) = f_i^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U}))$ és obert i, per la definició de topologia final, $g^{-1}(\mathcal{U})$ és un obert si, i només si, $f_i^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U}))$ és contínua. Per tant, g és contínua.

■

Proposició 4.3.5. *Siguin $f_i : (\mathcal{X}_i, \tau_i) \longrightarrow \mathcal{Y}$ aplicacions d'espais topològics $(\mathcal{X}_i, \tau_i), i \in I$ en un conjunt $\mathcal{Y}$. Si una topologia τ a $\mathcal{Y}$ compleix que una aplicació $g : (\mathcal{Y}, \tau) \longrightarrow (\mathcal{Z}, \rho)$ és contínua si, i només si, ho són totes les composicions $g \circ f_j$, aleshores τ és la topologia final.*

Demostració. Considerem els diagrames, per a tot j:

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & (Y, \tau) \arrow[d, "\mathbb{I}_1"] \\ & (Y, \tau_f^{fin}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & (Y, \tau_f^{fin}) \arrow[d, "\mathbb{I}_2"] \\ & (Y, \tau) \end{tikzcd}$$

En el primer diagrama, la $\mathbb{I}_1$ és contínua per la hipòtesi sobre τ, ja que la composició $\mathbb{I}_1 \circ f_j = f_j$ és contínua. Això ens diu que τ és més fina que τ_f^{fin}. En el segon diagrama, $\mathbb{I}_2$ és contínua per la definició de τ_f, ja que la composició $\mathbb{I}_2 \circ f_j = f_j$ és contínua. Això ens diu que τ_f és més fina que τ. Per tant, $\tau = \tau_f^{fin}$. ■

4.4 Identificacions i quocients

Definició 4.4.1 (Identificació). Siguin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espais topològics. Direm que $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ és una identificació si f és contínua, exhaustiva i la topologia de $\mathcal{Y}$ és la topologia final respecte d'f.

Exemple 4.4.2.

1. $\mathcal{X}$ espai topològic, $\mathcal{Y}$ conjunt i $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ exhaustiva. Si posem en $\mathcal{Y}$ la topologia τ_f, aleshores f és una identificació.
2. Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic i sigui $\sim$ una relació d'equivalència en $\mathcal{X}$. Podem considerar $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}/\sim$ tal que $p \mapsto [p]$. Si en $\mathcal{X}/\sim$ posem la topologia final respecte π, π és la identificació.

Definició 4.4.3 (Topologia quocient). Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic, $\mathcal{Y}$ un conjunt i $\varphi : \mathcal{X} \twoheadrightarrow \mathcal{Y}$ és una aplicació exhaustiva. La topologia quocient a $\mathcal{Y}$ és la topologia que té per oberts els subconjunts $\mathcal{U} \subset \mathcal{Y}$ que tenen la propietat que $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ és un obert de $\mathcal{X}$. Si considerem $\mathcal{Y}$ com espai topològic amb aquesta topologia, direm que $\mathcal{Y}$ té la topologia quocient per φ.

Proposició 4.4.4. *La topologia quocient τ és, efectivament, una topologia.*

Demostració. Demostrem les propietats que la fan una topologia:

1. $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ és, en efecte, contínua.
2. La topologia quocient τ és la topologia més fina sobre $\mathcal{Y}$ que fa $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ sigui contínua.
3. $\mathcal{T} \subset \mathcal{Y}$ és un tancat si, i només si, $\varphi^{-1}(\mathcal{T})$ és tancat de $\mathcal{X}$.
4. Sigui $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ una aplicació. Es compleix que f és contínua si, i només si, $f \circ \varphi$ és contínua.

■

De fet, tota aplicació exhaustiva és equivalent al pas al quocient per una relació d'equivalència. En efecte, suposem que $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ és una aplicació exhaustiva. Definim a $\mathcal{X}$ la relació d'equivalència $a \sim b$ si, i només si, $f(a) = f(b)$. Sigui $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}/\sim$ el pas al quocient. Existeix una única aplicació bijectiva $h : \frac{\mathcal{X}}{\sim} \longrightarrow \mathcal{Y}$ tal que $f = \pi \circ h$.

Definició 4.4.5 (Topologia amb pas al quocient). Si $\mathcal{X}$ és un espai topològic i $\sim$ és una relació d'equivalència en $\mathcal{X}$, la topologia en $\mathcal{X}/\sim$ final respecte $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}/\sim$ s'anomena topologia quocient.

Definició 4.4.6 (Aplicació oberta o tancada). Siguin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espais topològics, $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$:

1. Es diu que f és oberta si per a cada $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ obert es té que $f(\mathcal{U})$ és obert de $\mathcal{Y}$.
2. Es diu que f és tancada si per a cada $\mathcal{T} \subset \mathcal{X}$ tancat es té que $f(\mathcal{T})$ és tancat de $\mathcal{Y}$.

Proposició 4.4.7. *Siguin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espais topològics i $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicació contínua i exhaustiva. Aleshores:*

1. *f oberta $\implies$ f identificació.*
2. *f tancada $\implies$ f identificació.*

Demostració. Volem veure que la topologia de $\mathcal{Y}$ és la topologia final respecte f. Això vol dir que un cert $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ és obert si, i només si, $f^{-1}(\mathcal{V})$ un obert en $\mathcal{X}$, per assolir la definició de topologia final.

1. Per veure que $\mathcal{V}$ és un obert de $\mathcal{Y}$, suposant que $f^{-1}(\mathcal{V})$ és obert en $\mathcal{X}$ i f és oberta, $f(f^{-1}(\mathcal{V}))$ obert en $\mathcal{Y}$. Aleshores, $f(f^{-1}(\mathcal{V})) = \mathcal{V}$, ja que $(\subseteq)$ $\exists z \in f^{-1}(\mathcal{V})$ tal que $f(z) \in \mathcal{V}$ i $f(z) = y$, de tal manera que $y \in \mathcal{V}$. $(\supseteq)$ es dona perquè f és exhaustiva: sigui $y \in \mathcal{V}$, com que f és exhaustiva, $y = f(z)$ i

$$f(z) = y \in \mathcal{V} \implies z \in f^{-1}(\mathcal{V}) \implies f(z) \in f(f^{-1}(\mathcal{V})). \tag{4.4.1}$$

2. Suposem f tancada, novament per ser exhaustiva tenim que

$$f(\mathcal{X} \setminus f^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{Y} \setminus \mathcal{U}. \tag{4.4.2}$$

Així, $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{U}$ és tancat i, per tant, $\mathcal{U}$ és obert.

■

Observació 4.4.8. Posem una aplicació $g : A \longrightarrow B$ tal que $\mathcal{W} \subset B$. Si g és contínua, $\mathcal{W}$ és obert si, i només si, $g^{-1}(\mathcal{W})$ és obert. A més, si la topologia de B és la final respecte g, $\mathcal{W}$ és obert si, i només si, $g^{-1}(\mathcal{W})$ és obert.

Exemple 4.4.9. Sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicació contínua, exhaustiva. Definim en $\mathcal{X}$ la relació $\mathcal{X} \sim_f \mathcal{Y} \iff f(x) = f(y)$ que resulta ser d'equivalència. Podem considerar $\mathcal{X}/\sim_f$ amb la topologia quocient (final respecte $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}/\sim_f$).

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{Y} \\ \mathcal{X}/\sim_f \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \tag{4.4.3}$$

φ està ben definida. Com f és contínua, $\varphi : \mathcal{X}/\sim_f \longrightarrow \mathcal{Y}$ és contínua. A més:

1. φ és injectiva, ja que f ho és:

$$\varphi([x]) = \varphi([y]) \implies f(x) = f(y) \implies x \sim_f y \implies [x] = [y]. \tag{4.4.4}$$

2. φ és oberta si f és una identificació.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{Y} \\ \mathcal{X}/\sim_f \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \tag{4.4.5}$$

Si f és identificació, cal veure que $f^{-1}(\varphi(\mathcal{U}))$ és un obert de $\mathcal{X}$, però $f^{-1}(\varphi(\mathcal{U})) = \pi^{-1}(\mathcal{U})$ és obert ja que és contínua.

Si $x \in \mathcal{X}$ és un espai topològic i $A \subset \mathcal{X}$, tenim una relació d'equivalència. Si $x, y \in \mathcal{X}$, aleshores $x \sim y \iff x = y$ o bé $x, y \in A$. Es considera en $\mathcal{X}/\sim_A$ la topologia quocient i se sol denotar $\mathcal{X}/A$.

Exemple 4.4.10 (La circumferència unitat, $\mathbb{S}^1$). Considerem a $(\mathbb{R}, \tau_e)$ el subespai $\mathcal{X} = [0,1]$. Veurem que donada la relació d'equivalència $\sim$ a $\mathcal{X}$ definida per $0 \sim 1$ (és a dir, $[0] = [1] = \{0,1\}$, mentre que $[t] = \{t\}, \forall t \in (0,1)$), es compleix que $\frac{\mathcal{X}}{\sim} \cong \mathbb{S}^1$.

Caldrà donar un homeomorfisme entre $\mathcal{X}/\sim$ i $\mathbb{S}^1$ per veure que l'aplicació $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ definida per $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ és una identificació. Observem que $f(0) = f(1) = (1,0)$ i que f és injectiva en l'interval obert $(0,1)$. Construïm llavors l'homeomorfisme $\overline{f}$ que faci que el diagrama següent commuti:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{S}^1 \\ \mathcal{X}/\sim \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Definim $\overline{f}$ com $\overline{f}([x]) = f(x)$ per cada $x \in \mathcal{X}/\sim$; aquesta és una bona definició ja que $[0] = [1]$ i $f(0) = f(1)$. Per veure, a més, que $\overline{f}$ és un homeomorfisme, comprovem que satisfà el següent:

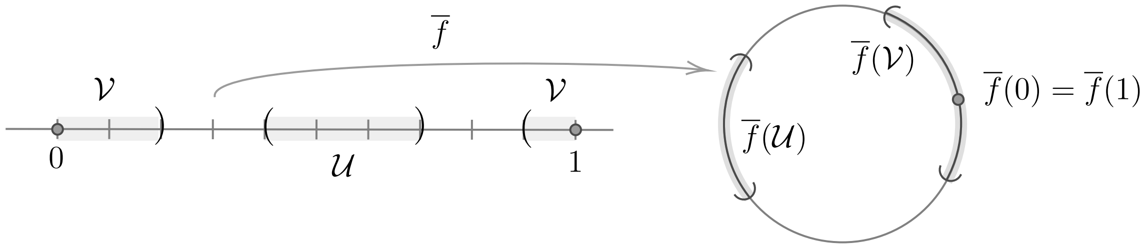


Figura 4.1: Representació de les imatges per $\overline{f}$.

1. És contínua: això és cert per la propietat característica de la topologia quocient. En aquest cas concret, tenim que f és contínua i $\overline{f} \circ \pi = f$.
2. És bijectiva ja que f és injectiva en $(0, 1)$ i $f(0) = f(1)$.
3. Veure que $\overline{f}^{-1}$ és contínua és equivalent a provar que per tot $\mathcal{U}$ obert a $\mathcal{X}/\sim$ tenim que $\overline{f}(\mathcal{U})$ és obert a $\mathbb{S}^1$. Serà suficient comprovar tal propietat per una base de la topologia quocient.

Els oberts com $\mathcal{U}$ (que no contenen 0) i els que són com $\mathcal{V}$ (que sí que contenen el 0) formen base de la topologia quocient a $\mathcal{X}/\sim$. Podem veure, en efecte, que les seves imatges per $\overline{f}$ són oberts a $\mathbb{S}^1$.

Exemple 4.4.11 (El cilindre unitat)**.** $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Prenem $\mathcal{X} = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, i considerem la relació d'equivalència $\sim$ a $\mathcal{X}$ definida per $(0, y) \sim (1, y)$, $\forall y \in [0, 1]$. Veurem que $\frac{\mathcal{X}}{\sim} \cong \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$; per això, prenem una aplicació $\overline{f} : \frac{\mathcal{X}}{\sim} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ contínua i bijectiva, que de fet podem construir de manera anàloga a l'aplicació del mateix nom usada a l'exemple anterior, i comprovarem que, a més, és oberta:

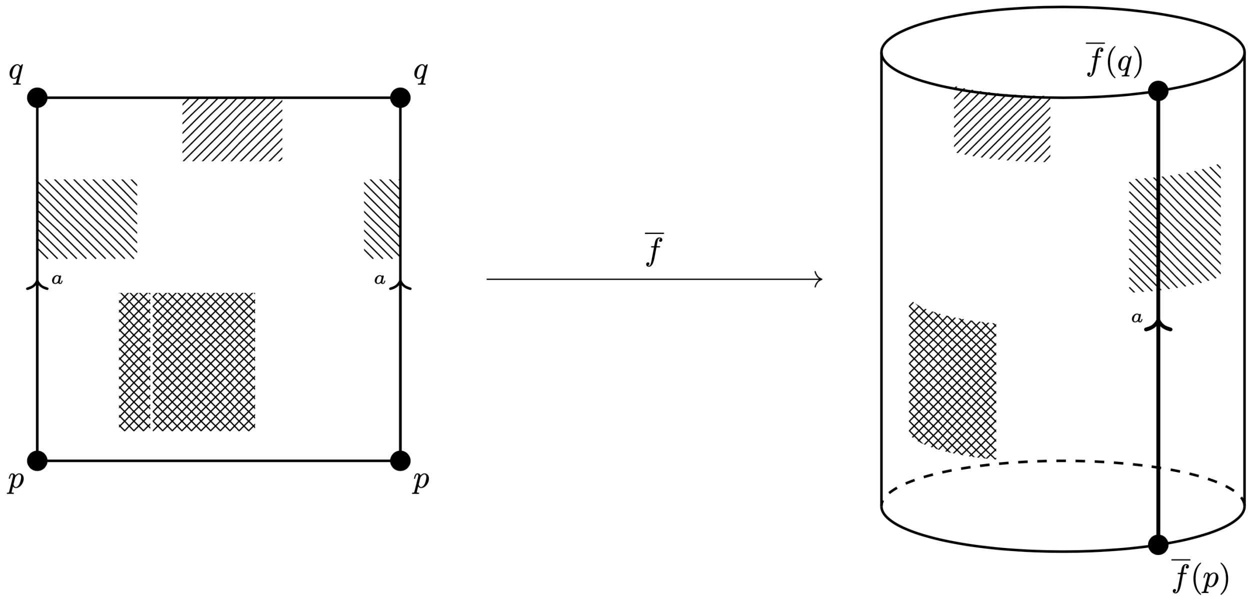


Figura 4.2: Al dibuix podem veure com es comporten diversos tipus d'oberts de $\mathcal{X}/\sim$ quan se'ls aplica $\overline{f}$. Font: [Jan18].

Cal destacar, però, que els oberts que hem representat no formen una base de la topologia quocient a $\mathcal{X}/\sim$.

Observació 4.4.12. La topologia producte a $\mathcal{X}$ coincideix amb la topologia induïda per $\mathbb{R}^2$. A més, la topologia quocient a $\mathcal{X}/\sim$ coincideix amb la topologia producte a $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ i també amb la topologia induïda per $\mathbb{R}^3$ en aquest últim espai.

Exemple 4.4.13 (El tor). Prenem $\mathcal{X} = [0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$ i considerem la relació d'equivalència $\sim$ a $\mathcal{X}$ definida per $(x,0) \sim (x,1)$, $\forall x \in (0,1)$ i $(0,y) \sim (1,y)$, $\forall y \in (0,1)$. Veurem que $\mathcal{X}/\sim \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, que és la superfície d'un tor. Com en el cas anterior, caldria mostrar que $\overline{f}$ envia una base d'oberts de $\mathcal{X}/\sim$ a una base d'oberts de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

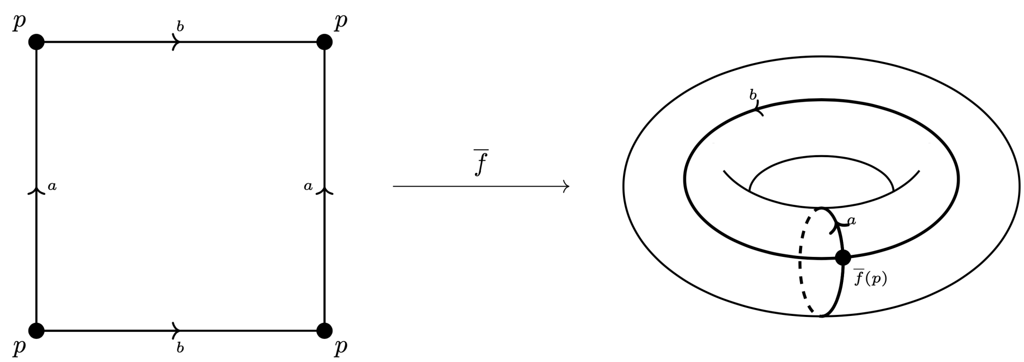


Figura 4.3: El tor. Font: [Jan18].

Exemple 4.4.14 (La cinta de Möbius). Prenem un cop més $\mathcal{X} = [0,1]\times[0,1]$. L'espai quocient $\mathcal{X}/\sim$, on $\sim$ és la relació d'equivalència definida per $(0,y) \sim (1,1-y)$ per a tot $y \in (0,1)$ és una cinta de Möbius.

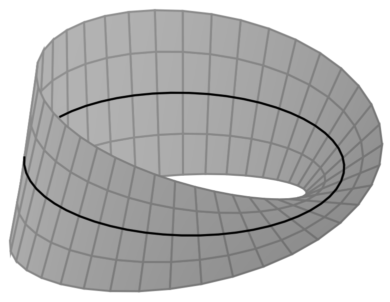


Figura 4.4: La cinta de Möbius

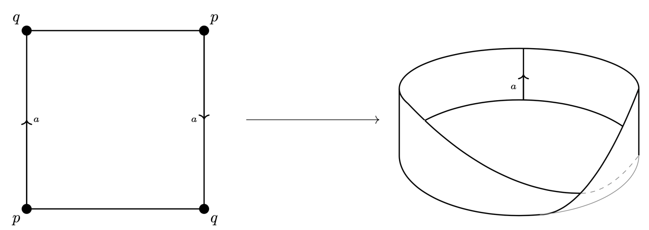


Figura 4.5: Construcció de Möbius. Font: [Jan18].

Exemple 4.4.15 (L'ampolla de Klein). L'espai quocient $\mathcal{X}/\sim$ on $\mathcal{X} = [0,1] \times [0,1]$ i $\sim$ és la relació d'equivalència en $\mathcal{X}$ definida per $(x,0) \sim (x,1)$, $\forall x \in (0,1)$ i $(0,y) \sim (1,1-y)$, $\forall y \in (0,1)$ s'anomena ampolla de Klein. L'ampolla de Klein no es pot posar a $\mathbb{R}^3$, però sí a $\mathbb{R}^4$. L'ampolla és l'objecte que s'obté en unir dues cintes de Möbius per la vora.

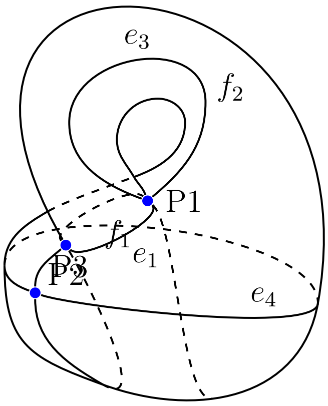


Figura 4.6: Una ampolla de Klein.

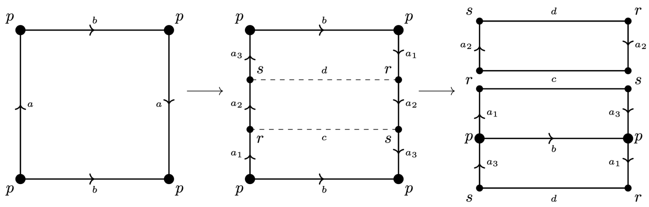


Figura 4.7: Construcció de l'ampolla de Klein. Font: [Jan18].

Lema 4.4.16. *Sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una identificació. Aleshores, $\mathcal{Y}$ és homeomorf a $\mathcal{X}/\sim$.*

Demostració. Per definició de la relació d'equivalència, tenim una aplicació de conjunts injectiva: $\varphi : \mathcal{X}/\sim \longrightarrow \mathcal{Y}$ tal que $f = \varphi \circ \pi$, on $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}/\sim$. A més, com que f és exhaustiva, tenim que φ és exhaustiva i, per tant, bijectiva. Com que $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{X}/\sim$ tenen les topologies finals, per a un subconjunt $\mathcal{U}$ de $\mathcal{Y}$ tenim: $\mathcal{U}$ és obert si, i només si, $f^{-1}(\mathcal{U}) = \pi^{-1}(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))$ és obert si, i només si, $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ és obert. Així doncs, φ és un homeomorfisme. ■

V

Propietats de separació

5.1

Espais de Fréchet i Hausdorff

Definició 5.1.1 (Fréchet). Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic. Direm que $\mathcal{X}$ és de Fréchet (o és T_1) si es compleix que per a cada $p \neq q \in \mathcal{X}$ existeix $\mathcal{U}$ obert tal que $p \in \mathcal{U}$ i $q \notin \mathcal{U}$.

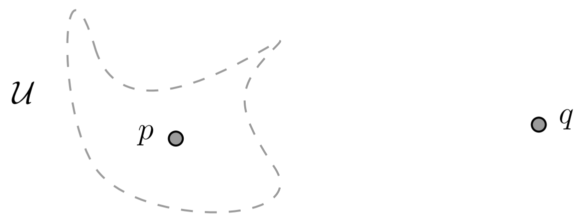


Figura 5.1: Fréchet

Exemple 5.1.2.

1. Suposem un espai mètric $(\mathcal{X}, d)$ i τ_d una topologia associada a d. Aleshores, podem agafar $B_r(p)$ amb $r = \frac{d(x,y)}{2}$, de manera que $p \in B_r(p)$ però $q \notin B_r(p)$. En canvi, $(\mathcal{X}, \tau_d)$ és de Fréchet.
2. $(\mathcal{X}, \tau_{grol})$ no és de Fréchet.

Proposició 5.1.3. *Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic. $\mathcal{X}$ és de Fréchet si, i només si, per a tot $p \in \mathcal{X}$, $\{p\}$ és tancat.*

Demostració.

$\Longrightarrow$ Sigui $p \in \mathcal{X}$ i sigui $q \in \overline{\{p\}}$. Si $\mathcal{U}$ és obert i $q \in \mathcal{U}$, aleshores $p \in \mathcal{U}$. Si $p \neq q$, com $\mathcal{X}$ és de Fréchet, $\exists \mathcal{V}$ obert amb $q \in \mathcal{V}$ tal que $p \notin \mathcal{V}$, arribant a una contradicció.

$\Longleftarrow$ Siguin $p, q \in \mathcal{X}$, $p \neq q$. Tenim que $\mathcal{X} \setminus \{q\}$ és un obert amb $p \in \mathcal{X} \setminus \{q\}$ i $q \notin \mathcal{X} \setminus \{q\}$.

■

Observació 5.1.4.

1. Si la topologia en $\mathcal{X}$ prové d'una distància, aleshores $\mathcal{X}$ és de Fréchet. *Si $p \neq q$, sigui $r = \frac{d(p,q)}{2}$, $p \in B_r(p)$, $q \notin B_r(q)$.*
2. Si $\mathcal{X}$ té la topologia grollera i el cardinal d'$\mathcal{X}$ és més gran o igual a 2, $\mathcal{X}$ no és de Fréchet.
3. Si $\mathcal{X}$ és homeomorf a $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{X}$ és de Fréchet, $\mathcal{Y}$ és de Fréchet.
4. Sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicació que és contínua (però no és un homeomorfisme) amb $\mathcal{X}$ de Fréchet, $\mathcal{Y}$ no és de Fréchet. A la vegada, *donada $id : (\mathcal{X}, \tau_{dis}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \tau_{gro})$, és contínua $(\mathcal{X}, \tau_d)$ és de Fréchet i $(\mathcal{X}, \tau_g)$ no ho és.*

Definició 5.1.5 (Hausdorff). Direm que un espai topològic $\mathcal{X}$ és de Hausdorff si per a cada $p, q \in \mathcal{X}$ amb $p \neq q$, existeixen oberts $\mathcal{U} \ni p$ i $\mathcal{V} \ni q$ tal que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

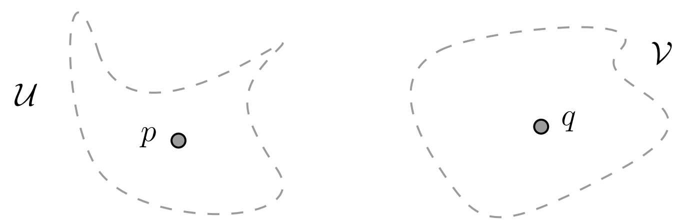


Figura 5.2: Hausdorff

Observació 5.1.6. $\mathcal{X}$ de Hausdorff implica que $\mathcal{X}$ és de Fréchet, però no a l'inrevés, és a dir, que el recíproc no es compleix sempre.

Exemple 5.1.7.

1. Si la topologia en $\mathcal{X}$ prové d'una distància, aleshores $\mathcal{X}$ és de Hausdorff. *Si* $p \neq q \implies d(p,q) > 0$ *i* $r = \frac{d(p,q)}{2}$ *i* $\mathcal{U} = B_r(p)$ *i* $\mathcal{V} = B_r(q)$.
2. Si $\mathcal{X}$ té la topologia discreta, aleshores és de Hausdorff.
3. Si $\mathcal{X}$ té la topologia grollera, no és de Hausdorff.
4. Si $\mathcal{X}$ és un conjunt infinit, $\tau = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{X} \setminus \mathcal{U} \text{ finit}\} \cup \{\emptyset\}$ i $(\mathcal{X}, \tau)$ és de Fréchet i $(\mathcal{X}, \tau)$ no és de Hausdorff. Donats p, q tal que $p \neq q$, prenem $\mathcal{U} = \mathcal{X} \setminus \{q\} \ni p$ i $\mathcal{U} \not\ni q$. $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ i $\mathcal{U} \neq \emptyset, \mathcal{U} \neq \mathcal{X}, \mathcal{V} \neq \emptyset$ i $\mathcal{V} \neq \mathcal{X}$. Aleshores,

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset \impliedby (X \setminus (\mathcal{U} \cap \mathcal{V})) = (\mathcal{X} \setminus \mathcal{U}) \cup (\mathcal{X} \setminus \mathcal{V}) \text{ finit.} \tag{5.1.1}$$

Observació 5.1.8. Hi ha espais topològics en els quals aquesta propietat no es compleix. Per exemple, un espai $\mathcal{X}$ amb més d'un punt que tingui la topologia grollera no complirà la propietat de Hausdorff. Un espai infinit amb la topologia cofinita tampoc no complirà la propietat de Hausdorff.

Proposició 5.1.9. *Si $\mathcal{X}$ és de Hausdorff i $A \subset \mathcal{X}$, aleshores A és de Hausdorff. De la mateixa manera, si $\mathcal{X}$ és de Fréchet i $A \subset \mathcal{X}$, aleshores A és de Fréchet.*

Demostració. Sigui $\mathcal{X}$ de Hausdorff i sigui $A \subset \mathcal{X}$ un subconjunt. Siguin $p, q \in A$, amb $p \neq q$. Existeixen $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ oberts de $\mathcal{X}$ tals que $p \in \mathcal{U}$ i $q \in \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{U}' &= \mathcal{U} \cap A \text{ obert d'}A, \\ q \in \mathcal{V}' &= \mathcal{V} \cap A \text{ obert d'}A. \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

D'aquesta manera, $\mathcal{U}'$ i $\mathbb{V}'$ són oberts disjunts d'A. Per Fréchet es procediria de forma anàloga. ■

Proposició 5.1.10. *Si $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ són de Hausdorff, aleshores $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ és de Hausdorff. Anàlogament, si $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ són de Fréchet, aleshores $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ és de Fréchet.*

Demostració. Siguin $(p_1, q_1) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ i $(p_2, q_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. A més, suposem que $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$. Suposem que $p_1 \neq p_2$, com $\mathcal{X}$ és de Hausdorff, existeixen $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ oberts de $\mathcal{X}$ tals que $p \in \mathcal{U}$, $q \in \mathcal{V}$ i $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Calculant la intersecció:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \ni (p_1, q_1), \\ \mathcal{V} \times \mathcal{Y} \ni (p_2, q_2). \end{aligned}\right\} \implies (\mathcal{U} \times \mathcal{Y}) \cap (\mathcal{V} \times \mathcal{Y}) = (\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \times \mathcal{Y} = \emptyset, \tag{5.1.3}$$

ja que la intersecció entre aquests dos oberts és nul·la. S'aplicaria un raonament totalment anàleg per trobar el mateix resultat en espais Fréchet. ■

Proposició 5.1.11. *Sigui* $(\mathcal{X}, \tau)$ *un espai topològic i sigui:*

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mid y = x\} \tag{5.1.4}$$

la diagonal. Aleshores, $\mathcal{X}$ *és de Hausdorff si, i només si,* Δ *és un tancat de* $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$*.*

Demostració. Δ és tancat si, i només si, tot punt $(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \setminus \Delta$ és interior a $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \setminus \Delta$. Com que els oberts de la forma producte d'oberts formen una base de la topologia producte, $(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \setminus \Delta$ és interior si, i només si, existeixen oberts $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ i $\mathcal{V}$ de $\mathcal{Y}$ tals que $(x,y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \setminus \Delta$. Aquesta condició és equivalent a la de Hausdorff, ja que:

$$(U \times \mathcal{V}) \cap \Delta = \{(x,x) \mid x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}\}. \tag{5.1.5}$$

■

5.2 Espais regulars i normals

Definició 5.2.1 (Espai regular). Un espai topològic $\mathcal{X}$ és regular si per a cada tancat $F \subset \mathcal{X}$ i cada $p \notin F$ existeixen oberts $\mathcal{U} \ni p$ i $\mathcal{V} \supset F$ tals que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

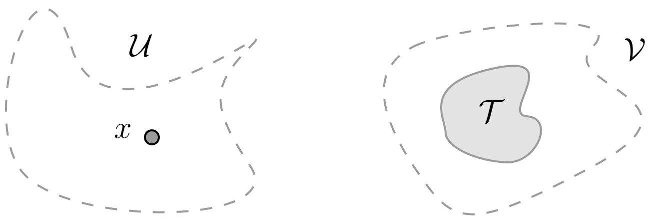


Figura 5.3: Espai regular

Definició 5.2.2 (Espai normal). Un espai topològic $\mathcal{X}$ és normal si per a tota parella F_1, F_2 de tancats disjunts de $\mathcal{X}$ $(F_1 \cap F_2 = \emptyset)$. Existeixen $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ oberts de $\mathcal{X}$ tals que $\mathcal{U} \supset F_1$, $\mathcal{V} \supset F_2$ i $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

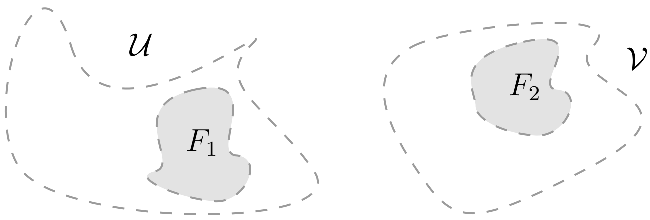


Figura 5.4: Espai normal

Observació 5.2.3. Un espai topològic amb la topologia grollera és normal i, en canvi, si té més d'un punt, no és de Hausdorff. Ara bé, si a més de normal és de Fréchet, aleshores és de Hausdorff. En altres paraules, si un espai topològic $\mathcal{X}$ és de Fréchet, aleshores per a aquest espai es compleix que:

$$\text{espai normal} \implies \text{espai regular} \implies \text{Hausdorff}. \tag{5.2.1}$$

Proposició 5.2.4. *Tot espai mètric és regular i normal.*

Demostració. Sigui $\mathcal{X}$ un espai mètric. Volem provar que $\mathcal{X}$ és normal, agafarem dos tancats de $\mathcal{X}$ que siguin disjunts. Siguin F_1, F_2 tancats de $\mathcal{X}$, amb $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

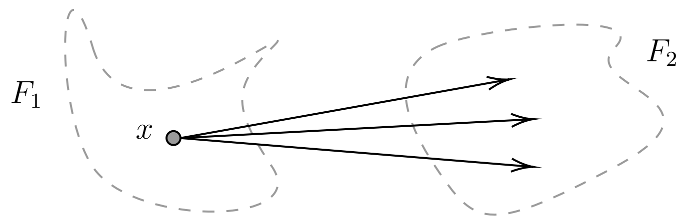


Figura 5.5: Il·lustració de suport per a aquesta demostració.

Sigui $x \in F_1$. Sigui $r_x = \inf\{d(x,y) \mid y \in F_2\} = d(x, F_2)$. Es té que $r_x > 0$, ja que si fos $r_x = 0$ aleshores $x \in \overline{F}_2 = F_2$ (hem utilitzat que donats A i p, es dona que $d(p, A) = 0 \iff p \in \overline{A}$). Anàlogament, si $y \in F_2$, $r_y = d(y, F_1) > 0$. Ara, siguin:

$$\begin{aligned} F_1 \subset \mathcal{U} &= \bigcup_{x \in F_1} B_{\frac{r_x}{2}}(x), \\ F_2 \subset \mathcal{V} &= \bigcup_{y \in F_2} B_{\frac{r_y}{2}}(y). \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Suposem que existeix $p \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Aleshores, $\exists x \in F_1$ tal que $d(p,x) < \frac{r_x}{2}$ i $\exists y \in F_2$ tal que $d(p,y) < \frac{r_y}{2}$. Per tant:

$$\frac{r_x + r_y}{2} > d(p,x) + d(p,y) \geq d(x,y) \geq \frac{r_x + r_y}{2}, \tag{5.2.3}$$

la qual cosa és una contradicció. En la última desigualtat hem usat que

$$\left.\begin{array}{l} d(x,y) \geq r_x \\ d(x,y) \geq r_y \end{array}\right\} \implies 2 \cdot d(x,y) \geq \frac{r_x + r_y}{2}. \tag{5.2.4}$$

■

Lema 5.2.5 (Lema d'Urysohn). *Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$ un espai topològic. $\mathcal{X}$ és normal si, i només si, per a tota parella F_1, F_2 de tancats disjunts de $\mathcal{X}$ existeix una aplicació contínua $f : \mathcal{X} \longrightarrow [0,1]$ tal que $F_1 = f^{-1}(\{0\})$ i $F_2 = f^{-1}(\{1\})$.*

Demostració. Suposem que, donats dos tancats disjunts A, B, existeix una aplicació $f : \mathcal{X} \longrightarrow [0,1]$ tals que $f(A) = 0$ i $f(B) = 1$. Aleshores, $\mathcal{U} = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ i $\mathbb{V} = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ són oberts disjunts que contenen A i B, respectivament. Per tant, $\mathcal{X}$ és normal.

Suposem ara que $\mathcal{X}$ és normal i A, B dos tancats disjunts de $\mathcal{X}$. Posem $\mathcal{U}_1 = \mathcal{X} \setminus B$. Tenim $A \subset \mathcal{U}_1$ i, per ser $\mathcal{X}$ un espai normal, existeix un obert $\mathcal{U}_0$ tal que $A \subset \mathcal{U}_0 \subset \overline{\mathcal{U}_0} \subset \mathcal{U}_1$. Aplicant, de nou, la propietat de normalitat, tenim que existeix un obert $\mathcal{U}_{\frac{1}{2}}$ tal que:

$$\mathcal{U}_0 \subset \overline{\mathcal{U}_0} \subset \mathcal{U}_{\frac{1}{2}} \subset \overline{\mathcal{U}_{\frac{1}{2}}} \subset \mathcal{U}_1. \tag{5.2.5}$$

De nou per la propietat de normalitat, existeixen oberts $\mathcal{U}_{\frac{1}{4}}$ i $\mathcal{U}_{\frac{3}{4}}$ tals que:

$$\mathcal{U}_0 \subset \overline{\mathcal{U}_0} \subset \mathcal{U}_{\frac{1}{4}} \subset \overline{\mathcal{U}_{\frac{1}{4}}} \subset \mathcal{U}_{\frac{3}{4}} \subset \overline{\mathcal{U}_{\frac{3}{4}}} \subset \mathcal{U}_1. \tag{5.2.6}$$

De la mateixa manera, existeixen oberts $\mathcal{U}_{\frac{1}{8}}, \mathcal{U}_{\frac{3}{8}}, \mathcal{U}_{\frac{5}{8}}, \mathcal{U}_{\frac{7}{8}}$ tals que:

$$\mathcal{U}_0 \subset \overline{\mathcal{U}_0} \subset \mathcal{U}_{\frac{1}{8}} \subset \overline{\mathcal{U}_{\frac{1}{8}}} \subset \mathcal{U}_{\frac{1}{4}} \subset \overline{\mathcal{U}_{\frac{1}{4}}} \subset \mathcal{U}_{\frac{3}{8}} \subset \overline{\mathcal{U}_{\frac{3}{8}}} \subset \mathcal{U}_{\frac{1}{2}} \subset \cdots \subset \mathcal{U}_{\frac{7}{8}} \subset \overline{\mathcal{U}_{\frac{7}{8}}} \subset \mathcal{U}_1. \tag{5.2.7}$$

Iterant el procés obtenim, per a tot $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$ amb $m \leq 2^n$ oberts $\mathcal{U}_{\frac{m}{2^n}}$ tals que:

$$\mathcal{U}_0 \subset \overline{\mathcal{U}_0} \subset \cdots \subset \mathcal{U}_{\frac{m}{2^n}} \subset \overline{\mathcal{U}_{\frac{m+1}{2^n}}} \subset \cdots \subset \mathcal{U}_1 = \mathcal{X} \setminus B. \tag{5.2.8}$$

Definim ara $f : \mathcal{X} \longrightarrow [0,1]$ per $f(x) = \inf\{t \mid x \in \mathcal{U}_t\}$. Si $x \notin B$ i posem $f(x) = 1$ si $x \in B$. Clarament, $f(A) = 0$ i $f(B) = 1$.

Per acabar la demostració, només ens resta veure que f és contínua i ho farem veient que les antiimatges d'oberts de la subbase $\{[0,a), (b,1], \forall a, b \in (0,1]\}$ són obertes. En efecte: $f^{-1}([0,a)) = \bigcup_{t<a} \mathcal{U}_t$, que és obert pel fet de ser unió d'oberts. Per veure que $f^{-1}((b,1])$ és obert, provarem que el complementari és tancat:

$$\mathcal{X} \setminus f^{-1}((b,1]) = f^{-1}([0,1] \setminus (b,1]) = \{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \leq b\} = \bigcap_{t>b} \mathcal{U}_t \subset \bigcap_{t>b} \overline{\mathcal{U}_t}. \tag{5.2.9}$$

L'última inclusió és una igualtat. En efecte, donat $\overline{\mathcal{U}_t}$ amb $t > b$, per a tota s tal que $b < t < s < 1$:

$$\mathcal{U}_t \subset \overline{\mathcal{U}_t} \subset \mathcal{U}_s \implies \overline{\mathcal{U}_t} \subset \bigcap_{s>t} \mathcal{U}_s \subset \bigcap_{s>b} \mathcal{U}_s \implies \bigcap_{t>b} \overline{\mathcal{U}_t} \subset \bigcap_{s>b} \mathcal{U}_s. \tag{5.2.10}$$

I el subconjunt $\mathcal{X} \setminus f^{-1}((b,1])$ és tancat. ■

Aquest lema es pot interpretar com un teorema d'extensió: assegura l'existència d'una extensió a tot l'espai de la funció $f : A \cup B \longrightarrow [0,1]$ que pren el valor 0 sobre un tancat A i el valor 1 sobre un altre tancat B.

Els teoremes que garanteixen l'existència d'extensions d'aplicacions són molt important, perquè donen lloc a resultats interessants, però no són gens trivials de demostrar i, en general, no són certs.

Teorema 5.2.6. *$\mathcal{X}$ és normal si, i només si, tota aplicació contínua definida en un subespai tancat $A \subset \mathcal{X}$ tal que $f : A \longrightarrow [-a,a]$ té una extensió contínua $F : \mathcal{X} \longrightarrow [-a,a]$.*

Demostració. No es troba dins el temari de l'assignatura. Es pot consultar completa a [Lle13]. ■

VI

Espais compactes

6.1 Espais compactes i recobriments

Definició 6.1.1 (Recobriment obert)**.** Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic i sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ una família d'oberts de $\mathcal{X}$. Direm que és un recobriment obert de $\mathcal{X}$ si $\mathcal{X} = \bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i$. De fet, si I és finit direm que el recobriment és finit i si I és infinit, el recobriment resulta infinit.

Definició 6.1.2 (Subrecobriment)**.** Suposem que $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ és un recobriment obert d'un espai topològic $\mathcal{X}$. Un subrecobriment de $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ és una subfamília $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in J}$, $J\subset I$ tal que $\mathcal{X} = \bigcup_{i\in J}\mathcal{U}_i$.

Definició 6.1.3 (Espai compacte)**.** Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic. Direm que és un espai compacte si per a tot recobriment obert $\mathscr{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{X}$, existeix un recobriment $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in J}$ de $\mathscr{U}$ finit (és a dir, J és un conjunt finit tal que $J\subset I$).

Exemple 6.1.4.

1. Agafem un conjunt $\mathcal{X}\neq\emptyset$ i la topologia τ la topologia grollera en $\mathcal{X}$. Suposem que $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ és un recobriment d'$\mathcal{X}$. Aleshores:
$$\mathcal{X} = \bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i \implies \exists i_0\in I \mid \mathcal{U}_{i_0} = \mathcal{X}. \tag{6.1.1}$$
2. Agafem un conjunt $\mathcal{X}\neq\emptyset$ i la topologia τ la topologia discreta en $\mathcal{X}$. Si $\mathcal{X}$ és infinit, $\mathcal{X} = \bigcup_{x\in\mathcal{X}}\{x\}$. Si existeix un subrecobriment finit,
$$\mathcal{X} = \{x_{i_1}\}\cup\cdots\cup\{x_{i_r}\} = \{x_{i_1},\dots,x_{i_r}\}. \tag{6.1.2}$$
Com això és una contradicció, a causa de la infinitud del conjunt, ja hem acabat. Suposem ara que $\mathcal{X}$ és finit, amb $\mathcal{X} = \{x_1,\dots,x_r\}$. Així doncs, $\mathcal{X} = \bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i$ és un recobriment obert.
$$\left.\begin{array}{c}\exists i_1\in I \mid x_{i_1}\in\mathcal{U}_{i_1}\\ \vdots\\ \exists i_r\in I \mid x_{i_r}\in\mathcal{U}_{i_r}\end{array}\right\} \implies \mathcal{X} = \bigcup_{j=i_1}^{i_r}\mathcal{U}_j. \tag{6.1.3}$$
3. $\mathcal{X}\neq\emptyset$ conjunt, $\tau = \{\mathcal{U}\subset\mathcal{X} \mid \mathcal{X}\setminus\mathcal{U} \text{ és finit}\}\cup\{\emptyset\}$. Suposem que $\mathcal{X} = \bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_i$ oberts. Aleshores, $\exists i_0\in I \mid \mathcal{X}\setminus\mathcal{U}_{i_0}$, $\mathcal{X}\setminus\mathcal{U}_{i_0} = \{x_1,\dots,x_r\}$ és finit.

Lema 6.1.5. *Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic. Són equivalents:*

1. *$\mathcal{X}$ és un conjunt compacte.*
2. *Per a cada família $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ de tancats de $\mathcal{X}$ tals que $\bigcap_{i\in I}\mathcal{T}_i = \emptyset$, existeix $J\subset I$ finit tal que $\bigcap_{i\in J}\mathcal{T}_i = \emptyset$.*

Demostració.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Sigui $\{\mathcal{T}_i\}$ una família de tancats tal que $\bigcap_{i\in I}\mathcal{T}_i = \emptyset$.

$$\mathcal{X} = \mathcal{X} \setminus \bigcap_{i\in I}\mathcal{T}_i = \bigcap_{i\in I}(\mathcal{X}\setminus\mathcal{T}_i). \tag{6.1.4}$$

Com $\mathcal{X}$ és compacte:

$$\mathcal{X} = (\mathcal{X}\setminus\mathcal{T}_{i_1}) \cup \cdots \cup (\mathcal{X}\setminus\mathcal{T}_{i_k}) = \mathcal{X}\setminus(\mathcal{T}_{i_1}\cap\mathcal{T}_{i_k}) \implies \bigcap_{j=i_1}^{i_k}\mathcal{T}_j = \emptyset. \tag{6.1.5}$$

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$ Exercici.

■

Proposició 6.1.6. *Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic compacte. Així, $\mathcal{T}\subset\mathcal{X}$ és un tancat. Aleshores, $\mathcal{T}$ és un compacte.*

Demostració. Sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ un recobriment obert de $\mathcal{T}$, de manera que $\mathcal{T} = \bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i$. Existeixen V_i, $i\in I$ oberts de $\mathcal{X}$ tal que: $\mathcal{U}_i = \mathcal{T}\cap V_i$. Tenim que:

$$\mathcal{X} = \left(\bigcup_{i\in I} V_i\right)\cup(\mathcal{X}\setminus\mathcal{T}). \tag{6.1.6}$$

Com $\mathcal{X}$ és compacte:

$$\mathcal{X} = \mathcal{V}_{i_1}\cup\cdots\cup\mathcal{V}_{i_r}\cup(\mathcal{X}\setminus\mathcal{T}). \tag{6.1.7}$$

Si $x\in\mathcal{T}$, $\exists\mathcal{V}_i \bigm| x\in\mathcal{V}_i,\ i\in\{1,\ldots,r\}$. Aleshores, $\mathcal{T}\subset\mathcal{V}_{i_1}\cup\cdots\cup\mathcal{V}_{i_r}$ i:

$$\mathcal{T} = (\mathcal{V}_{i_1}\cup\cdots\cup\mathcal{V}_{i_r})\cap\mathcal{T} = (\mathcal{V}_{i_1}\cap\mathcal{T})\cup\cdots\cup(\mathcal{V}_{i_r}\cap\mathcal{T}). \tag{6.1.8}$$

Existeix, doncs, una família finita que recobreix el tancat. ■

Proposició 6.1.7. *Sigui $f:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{Y}$ una aplicació contínua. Si $\mathcal{X}$ és compacte, aleshores $f(x)$ és compacte. La imatge d'un compacte per una aplicació contínua és un compacte.*

Demostració. Canviant $\mathcal{Y}$ per $f(x)$, podem suposar que f és exhaustiva. Aleshores, f és contínua i exhaustiva, i $\mathcal{X}$ és compacte. Sigui $\{\mathcal{V}_i\}_{i\in I}$ una família d'oberts de $\mathcal{Y}$. En conseqüència:

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{V}_i) \text{ obert de } \mathcal{X} \implies \mathcal{X} = \bigcup_{j=i_1}^{i_r} f^{-1}(\mathcal{V}_j). \tag{6.1.9}$$

Si $y\in\mathcal{Y}$, existeix $x\in\mathcal{X}$ tal que $f(x)=y$. $\exists k\in\{1,\ldots,r\}$ tal que $x\in f^{-1}(\mathcal{V}_{i_k}) \implies y = f(x)\in\mathcal{V}_{i_k}$. Aleshores:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{V}_{i_1}\cup\cdots\cup\mathcal{V}_{i_r}. \tag{6.1.10}$$

■

Lema 6.1.8. *Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic i sigui $\mathcal{Y}\subset\mathcal{X}$. Aleshores, són equivalents:*

1. *$\mathcal{Y}$ és compacte*
2. *Per a cada família $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ d'oberts de $\mathcal{X}$ tal que*

$$\mathcal{Y}\subset\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i \implies \exists J\subset I \text{ finit} \bigm| \mathcal{Y}\subset\bigcup_{j\in J}\mathcal{U}_j. \tag{6.1.11}$$

Demostració.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Sigui $\mathcal{Y} \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ oberts d'$\mathcal{X}$. Aleshores, $\mathcal{Y} = \bigcup_{i\in I}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{Y})$ i $\mathcal{Y}$ compacte vol dir que:

$$\mathcal{Y} = (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{Y}) \cup \cdots \cup (\mathcal{U}_n \cap \mathcal{Y}) = (\mathcal{U}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n) \cap \mathcal{Y} \implies \mathcal{Y} \subset \mathcal{U}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n. \quad (6.1.12)$$

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$ És aplicar el mateix procediment anàlogament però cap a l'altre costat.

■

Lema 6.1.9 (Lema del tub). *Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic i $\mathcal{Y}$ un espai topològic compacte. Per a cada $x_0 \in \mathcal{X}$ i per a cada E entorn de $\{x_0\} \times \mathcal{Y}$ en $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ existeix un entorn obert $\mathcal{U}$ de x_0 en $\mathcal{X}$ tal que*

$$\{x_0\} \times \mathcal{Y} \subset \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \subset E. \quad (6.1.13)$$

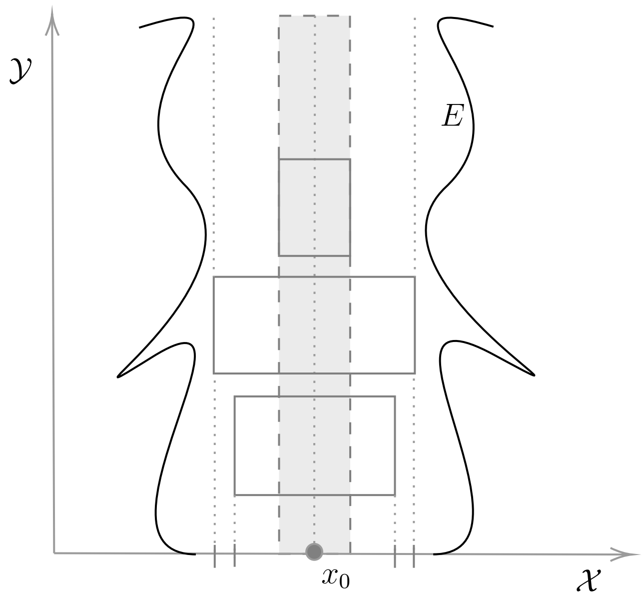


Figura 6.1: Representació gràfica del resultat.

Demostració. Podem suposar que E és obert. Per a cada $y \in \mathcal{Y}$ podem escollir un entorn de $\mathcal{U}_y$ de $y \in \mathcal{Y}$ V_y de x_0 en $\mathcal{X}$ tals que $(x_0, y) \in V_y \times \mathcal{U}_y \subset E$. Tenim que $\mathcal{Y} = \bigcup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{U}_y$. Aleshores:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{U}_{y_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{y_k}. \quad (6.1.14)$$

Ara, sigui $\mathcal{V}_{y_1} \cap \cdots \cap \mathcal{V}_{y_k}$ és obert de $\mathcal{X}$, $x_0 \in \mathcal{V}$. Vegem que $\mathcal{V} \times \mathcal{Y} \subset E$. Sigui $(x, y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Y} \implies x \in \mathcal{V}, y \in \mathcal{Y}$. Com que $y \in \mathcal{Y}$ existeix $i_0 \in \{1, \ldots, k\} \bigm| y \in \mathcal{V}_{y_{i_0}}$. En particular, com que $x \in \mathcal{V} = \mathcal{V}_{y_1} \cap \cdots \cap \mathcal{V}_{y_k} \implies x \in \mathcal{V}_{y_{i_0}}$. Per tant, $(x, y) \in \mathcal{V}_{y_{i_0}} \times \mathcal{U}_{y_{i_0}} \in E$. Per tant, $\mathcal{V} \times \mathcal{Y} \subset E$. ■

Observació 6.1.10. Fals si $\mathcal{Y}$ no és compacte. Per exemple, siguin $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ i sigui E el complementari del conjunt $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| xy = 1\}$. Aleshores, no existeix un entorn $\mathcal{U}$ del 0 a $\mathbb{R}$, com sí succeeix en el lema.

Corol·lari 6.1.11. *Si $\mathcal{Y}$ és compacte, $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ és una aplicació tancada.*

Demostració. Sigui $\mathcal{T} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ un tancat. Volem veure que $\rho(\mathcal{T})$ és tancat en $\mathcal{X}$. Sigui $x_0 \in \mathcal{X} \setminus \rho(\mathcal{T})$. Per tant, $E = (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \setminus \mathcal{T}$ és obert de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Ara, pel lema del tub, existeix $\mathcal{U}$ entorn de x_0 en $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{U} \times \mathcal{Y} \subset E = \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \setminus \mathcal{T}$. En conseqüència, $x_0 \in \mathcal{U} \subset \mathcal{X} \setminus \rho(\mathcal{T})$. Així, $\mathcal{X} \setminus \rho(\mathcal{T})$ és obert $\implies \rho(\mathcal{T})$ és tancat. ■

Teorema 6.1.12 (Teorema de Tykonoff). *Si $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ és un espai topològic i $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ és compacte si, i només si, $\mathcal{X}_i$ és compacte per a tot $i = 1 \div n$.*

Demostració.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sigui $\rho_i : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \longrightarrow \mathcal{X}_i$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i$ són contínues i exhaustives. Per tant, $\mathcal{X}_i$ és compacte.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Solament ens cal considerar el cas $n = 2$ i ho podem generalitzar per inducció sobre n.

$$(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2) \times \mathcal{X}_3 \text{ compacte,} \tag{6.1.15}$$

ja que A, B compacte $\implies A \times B$ compacte. Suposem que $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ són compactes. Volem veure que $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ és compacte. Sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ un recobriment obert de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Aleshores, si $x_0 \in \mathcal{X}$ tenim que $\{x_0\} \times \mathcal{Y} \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$. D'aquí, $\{x_0\} \times \mathcal{Y} \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{i_n} = E$. Pel lema del tub, existeix un entorn obert $\mathcal{W}_{x_0}$ de x_0 tal que $\mathcal{W}_{x_0} \times \mathcal{Y} \subset E$. Tenim que $\{W_x\}_{x \in \mathcal{X}}$ formen un recobriment obert de $\mathcal{X}$. Com que $\mathcal{X}$ és compacte:

$$\mathcal{X} = \mathcal{W}_{x_1} \cup \cdots \cup \mathcal{W}_{x_n}, \quad x_i \in \mathcal{X}. \tag{6.1.16}$$

Considerem la reunió dels $\mathcal{U}$ que recobreixen $\mathcal{W}_{x_1}, \dots, \mathcal{W}_{x_n} \times \mathcal{Y}$ (és una subfamília finita de $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$). Finalment, donat $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$:

$$\left.\begin{matrix} x \in \mathcal{X} \\ y \in \mathcal{Y} \end{matrix}\right\} \implies \left.\begin{matrix} \exists i \in I \mid x \in \mathcal{W}_{x_i} \\ (x, y) \in \mathcal{W}_{x_i} \times \mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}, \end{matrix}\right\} \tag{6.1.17}$$

on Z és la unió finita d'oberts $\mathcal{U}$ de la subfamília escollida. Per tant, $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \bigcup \mathcal{U}_i$.

■

6.2 El teorema de Heine-Borel

Definició 6.2.1 (Espai de Hausdorff compacte). Sigui $(\mathcal{X}, \tau)$, on τ és la topologia grollera i $\#\mathcal{X} \geq 2$. $(\mathcal{X}, \tau)$ és un espai de Hausdorff compacte si $\mathcal{X}$ és compacte i de Hausdorff, $\exists i_0 \in I$ tal que $\mathcal{U}_{i_0} = \mathcal{X}$.

Lema 6.2.2. *Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic de Hausdorff i sigui $K \subset \mathcal{X}$ un subespai compacte. Per a cada $p \in \mathcal{X} \setminus K$ existeixen oberts $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ d'$\mathcal{X}$ tals que $p \in \mathcal{U}, K \subset \mathcal{V}$ i $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.*

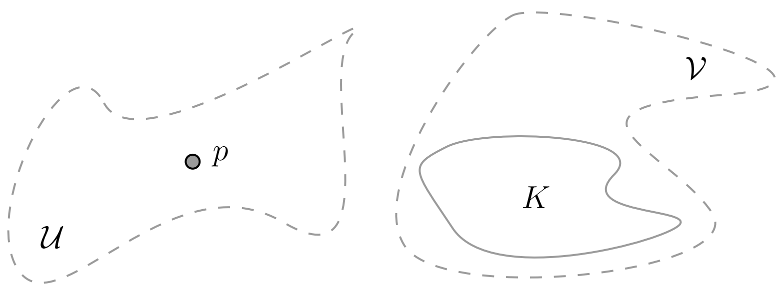


Figura 6.2: Representació del lema

Demostració. Agafem $p \in \mathcal{X} \setminus K$ i $q \in K$. Com $\mathcal{X}$ és Hausdorff, existeixen:

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{U}_q \ni p \\ V_q \ni q \end{matrix}\right\}, \ \mathcal{U}_q \cap V_q = \emptyset. \tag{6.2.1}$$

Tenim que $K \subset \bigcup_{q \in K} \mathcal{V}_q \implies K \subset \mathcal{V}_{q_1} \cup \cdots \cup \mathcal{V}_{q_n} = \mathcal{V}$. Prenem, també: $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{q_1} \cap \cdots \cap \mathcal{U}_{q_n} \ni p$, tal que $\mathcal{U}$ és obert. Ara, raonem que la intersecció $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ és buida, per reducció a l'absurd. Si $z \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, $z \in \mathcal{U}$ i també $z \in \mathcal{V}$:

$$z \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \implies \begin{cases} z \in \mathcal{V} & \implies \quad \exists i_0 \mid z \in \mathcal{V}_{q_{i_0}} \\ z \in \mathcal{U} & \implies \quad z \in \mathcal{U}_{q_{i_0}} \end{cases} \tag{6.2.2}$$

Però com que $\mathcal{U}_q \cap V_q = \emptyset$, arribem a una contradicció i $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. ■

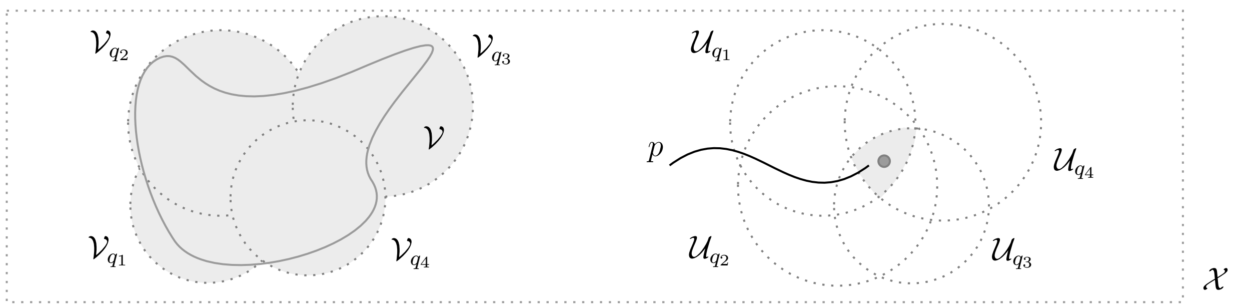


Figura 6.3: Representació de la demostració que hem seguit.

Proposició 6.2.3. *Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic de Hausdorff. Si $K \subset \mathcal{X}$ i K és un compacte, K és un tancat d'$\mathcal{X}$.*

Demostració. Per demostrar que K és un tancat, vegem que $\mathcal{X} \setminus K$ és obert. Sigui $p \in \mathcal{X} \setminus K$. Pel lema anterior, tenim que existeix un $\mathcal{U} \ni p$ obert i un $\mathcal{V} \supset K$ obert, tal que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Aleshores, $p \in \mathcal{U} \subset \mathcal{X} \setminus K \implies \mathcal{X} \setminus K$ és obert. ■

Teorema 6.2.4 (Teorema de Heine-Borel). *Sigui $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ on en $\mathbb{R}^n$ la topologia és l'habitual. Aleshores, $\mathcal{X}$ és compacte si, i només si, $\mathcal{X}$ és tancat i acotat.*

Demostració.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Per la proposició anterior, $\mathcal{X}$ també és tancat. Ens falta veure que $\mathcal{X}$ és acotat. Considerem:

$$\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>0}} (\mathcal{X} \cap B_n(0)) = (\mathcal{X} \cap B_{n_1}(0)) \cup \cdots \cup (\mathcal{X} \cap B_{n_k}(0)) = \mathcal{X} \cap \left(\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>0}} B_n(0) \right). \tag{6.2.3}$$

Sigui ara $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Aleshores, $\mathcal{X} = \mathcal{X} \cap B_{n_0}(0)$ i, per tant, $\mathcal{X} \cap B_{n_0}(0)$. En altres paraules, $\mathcal{X}$ està acotat per la bola oberta.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sigui un $\mathcal{X}$ tancat i acotat. En particular, existeixen $a, b \in \mathbb{R} \mid a < b$ i $\mathcal{X} \subset [a, b]$. Aleshores, posem $[0, 1]$, i cal provar que és compacte.

$$[0,1] \text{ compacte} \implies [a,b] \text{ compacte} \implies [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \text{ compacte.} \tag{6.2.4}$$

Sigui $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ tancat i acotat. $\mathcal{X}$ acotat $\implies \mathcal{X} \subset B_r(0)$. Prenem $N \in \mathbb{N}$ i $N \gg 0$. Aleshores:

$$\begin{gathered} \mathcal{X} \subset B_r(0) \subset [-N, N] \times \cdots \times [-N, N] \subset \mathbb{R}^n \\ \implies [-N, N] \times \cdots \times [-N, N] \text{ tancat i compacte} \implies \mathcal{X} \text{ compacte.} \end{gathered} \tag{6.2.5}$$

Sigui $\mathcal{A} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ recobriment obert de $[0, 1]$. Considerem:

$$\mathscr{C} = \{x \in (0, 1] \mid [0, x] \text{ es pot escriure amb un nombre finit d'oberts d'}\mathcal{A}\}. \tag{6.2.6}$$

Volem provar que $1 \in \mathscr{C}$. Tenim que $\mathscr{C} \neq \emptyset$, ja que $\exists \mathcal{U}_i \in \mathcal{A} \mid 0 \in \mathcal{U}_i$. Això implica que existeix $\varepsilon > 0 \mid [0, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_i$, ja que els intervals oberts són base.

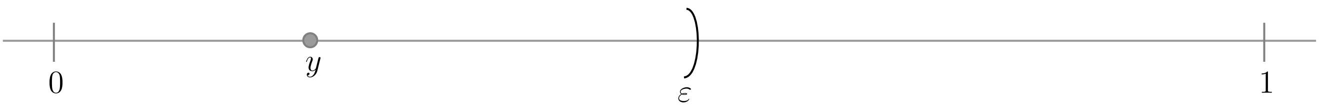


Figura 6.4: Representació de la recta real per al teorema de Heine-Borel.

Sigui $y \in (0, \varepsilon)$. Si considerem $[0, y] \subset [0, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_i$, aleshores $y \in \mathscr{C} \neq \emptyset$. Sigui $c = \sup \mathscr{C}$ i ens cal veure que $c \in \mathscr{C}$, és un màxim i, a més, $c = 1$.

$$\exists \mathcal{U}_{i_0} \mid c \in \mathcal{U}_{i_0} \implies \exists \varepsilon > 0 \mid (c - \varepsilon, c] \subset \mathcal{U}_{i_0}. \tag{6.2.7}$$

Triant qualsevol $y \in \mathscr{C}$ es fa palès que sempre hi haurà un z entre y i c. Per reducció a l'absurd veiem que $c = 1$. Suposant que $c < 1$ és el màxim, sigui $\mathcal{U}_{i_1} \ni c$. Aleshores, $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset \mathcal{U}_{i_1}$ i $\max \mathscr{C} = c < c + \frac{\varepsilon}{2} \in \mathscr{C}$, és a dir, que hem arribat a una contradicció i $c = 1$.

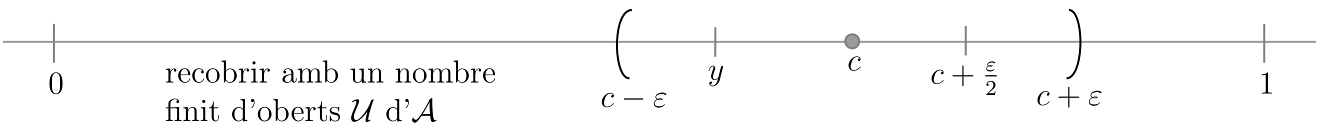


Figura 6.5: Segona representació de la recta real per al teorema de Heine-Borel.

■

Observació 6.2.5. El teorema de Heine-Borel no es compleix per als espais mètrics i espais vectorials topològics. Això porta a considerar classes d'espais on aquest teorema és cert. Aquests espais s'anomenen *espais amb la propietat Heine-Borel.*

Exemple 6.2.6. Per provar que $A_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ és un espai compacte, necessitem demostrar que A_n és tancat i acotat. Primerament, $A_n \subset B_2(0)$ i per tant és acotat. Per veure que és tancat, agafem l'aplicació $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \longmapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Per tant, $A_n = g^{-1}(\{1\})$ és tancat ja que $\{1\}$ és un tancat i aquesta antiimatge també ho és.

Proposició 6.2.7. *Sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ tal que és una aplicació contínua. Si $\mathcal{X}$ és compacte i $\mathcal{Y}$ és de Hausdorff, aleshores f és tancada.*

Observació 6.2.8. Si tenim una funció $f : A \longrightarrow B$ i volem que f sigui un homeomorfisme necessitem que f sigui bijectiva i f contínua, a més que f^{-1} sigui contínua. Si A és compacte i B és de Hausdorff, la última condició esdevé equivalent a què f sigui tancada.

Demostració. Sigui $\mathcal{T} \subset \mathcal{X}$ un tancat i $\mathcal{X}$ compacte. Aleshores, $\mathcal{T}$ és compacte. Recordant que f és contínua, $f(\mathcal{T})$ és compacte. Com que $f(\mathcal{T}) \subset \mathcal{Y}$ i $\mathcal{Y}$ és de Hausdorff, tot subconjunt compacte és de Hausdorff. Així, $f(\mathcal{T})$ és un tancat en $\mathcal{Y}$. ■

Proposició 6.2.9. *Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic compacte i Hausdorff. Aleshores, $\mathcal{X}$ és normal (i regular).*

Demostració. Siguin $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{X}$ tancats tals que $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \emptyset$. Sigui ara $p \in \mathcal{T}_1$ tal que $p \notin \mathcal{T}_2$. Com $\mathcal{X}$ és de Hausdorff, $\exists \mathcal{U}_p, \mathcal{V}_p$ oberts tals que $\mathcal{U}_p \ni p$ i $\mathcal{V}_p \supset \mathcal{T}_2$ i $\mathcal{U}_p \cap \mathcal{V}_p = \emptyset$. Tenim que:

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{T}_1 \subset \bigcup_{p \in \mathcal{T}_1} \mathcal{U}_p \\ \mathcal{T}_1 \text{ compacte i } \mathcal{T}_2 \text{ Hausdorff} \end{array}\right\} \implies \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{U}_{p_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{p_k} \tag{6.2.8}$$

Posem ara $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{p_1} \cap \cdots \cap \mathcal{V}_{p_k} \supset \mathcal{T}_2$, de manera que $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ seran oberts de $\mathcal{X}$. Hem de veure que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, i ho farem per reducció a l'absurd. Sigui $z \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$:

$$\left.\begin{array}{c} z \in \mathcal{U} \implies z \in \mathcal{U}_{p_i} \\ z \in \mathcal{V} \implies z \in \mathcal{V}_{p_i} \end{array}\right\} \implies z \in \mathcal{U}_{p_i} \cap \mathcal{V}_{p_i}. \tag{6.2.9}$$

Però $\mathcal{U}_{p_i} \cap \mathcal{V}_{p_i} = \emptyset$. Amb aquesta contradicció, arribem al resultat que volíem. ■

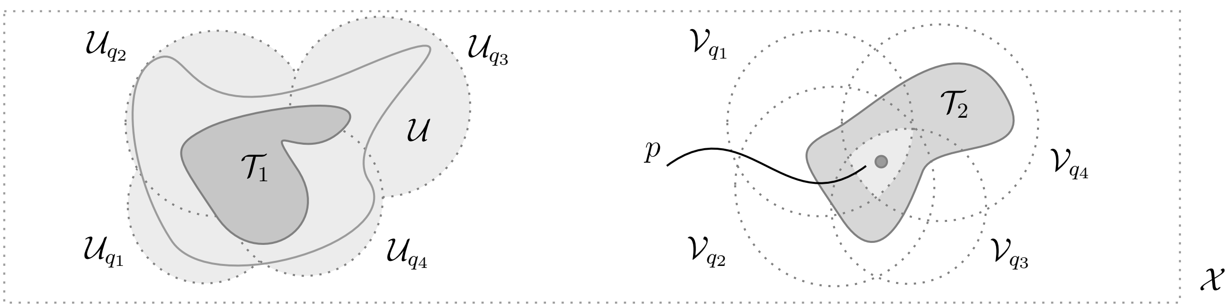


Figura 6.6: Il·lustració de la demostració.

6.3

Espais mètrics compactes

Definició 6.3.1 (Seqüencialment compacte**).** Sigui $(\mathcal{X}, d)$ un espai mètric. Direm que $\mathcal{X}$ és seqüencialment compacte si per a cada successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathcal{X}$ existeix una subsuccessió parcial convergent:

$$\{x_{n_k}\}_k \to \alpha \in \mathcal{X}. \tag{6.3.1}$$

Teorema 6.3.2. *$(\mathcal{X}, d)$ és seqüencialment compacte si, i només si, $\mathcal{X}$ és compacte.*

Demostració. Aquesta demostració es basa en el lema del nombre de Lebesgue, que veurem a una assignatura posterior. Així, queda fora del nivell del curs. ∎

VII

Espais localment compactes i compactificacions

7.1

Espai localment compacte

Definició 7.1.1 (Espai localment compacte)**.** Direm que un espai topològic $\mathcal{X}$ és localment compacte si $\mathcal{X}$ és de Hausdorff i per a cada $p \in \mathcal{X}$ existeix K_p entorn compacte de p en $\mathcal{X}$.

Exemple 7.1.2.

1. Si $\mathcal{X}$ és compacte i de Hausdorff, aleshores $\mathcal{X}$ és localment compacte.
2. Sigui $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{R}$. Tota bola tancada és localment compacta. Posem, per exemple, $K_p = [p-1, p+1]$.
3. Sigui $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ i $p \in \mathbb{R}^n$. Aleshores, $K_p = \{q \in \mathbb{R}^n \mid d(q,p) \leq 1\}$ per a tot p és un entorn compacte de p en $\mathcal{X}$.
4. Sigui un espai topològic $(\mathcal{X}, \tau)$ amb τ la topologia discreta. Aleshores, $\mathcal{X}$ és localment compacte amb $K_p = \{p\}$.

Proposició 7.1.3. *Sigui $\mathcal{X}$ localment compacte i $\mathcal{T} \subset \mathcal{X}$ tancat. Aleshores, $\mathcal{T}$ és localment compacte.*

Demostració. Sigui $L_p = K_p \cap \mathcal{T}$. Així doncs, L_p és tancat de K_p i, donat que K_p és un entorn compacte de p en $\mathcal{X}$, aleshores L_p és un compacte. Com que $\mathcal{X}$ és Hausdorff, $\mathcal{T}$ també ho és. A més, L_p és entorn de p en $\mathcal{T}$ (exercici). D'aquesta manera, $\mathcal{T}$ és localment compacte. ■

Proposició 7.1.4. *Sigui $\mathcal{X}$ localment compacte. Si $x \in \mathcal{X}$, existeix una base d'entorns compactes d'x en $\mathcal{X}$.*

Demostració. Sigui $\mathcal{U}$ un entorn obert de x en $\mathcal{X}$. Sigui K un entorn compacte de x. Volem provar que $\exists E$ entorn de x tal que $E \subset \mathcal{U}$ amb E compacte. Aleshores, $\mathcal{U} \cap K$ és un obert de K, de manera que $\mathcal{T} = K \setminus (K \cap \mathcal{U})$ és un tancat de K i, a més, $x \notin \mathcal{T}$.

K serà, així, compacte i de Hausdorff, i $\mathcal{T} \subset K$ tancat. Sigui $x \in K \mid x \notin \mathcal{T}$. Aleshores, existeixen $W_x, \mathcal{W}_\mathcal{T}$ oberts de K tals que $x \in W_x$ i $W_x \cap \mathcal{W}_\mathcal{T} = \emptyset$ per a $\mathcal{T} \subset \mathcal{W}_\mathcal{T}$. Ara, $K \setminus \mathcal{W}_\mathcal{T} \supset W_x$ implica que $K \setminus \mathcal{W}_\mathcal{T}$ és entorn de x en K. Si juntament amb això usem que K és entorn de x en $\mathcal{X}$, $K \setminus \mathcal{W}_\mathcal{T}$ és entorn de x en $\mathcal{X}$.

Finalment, $K \setminus \mathcal{W}_\mathcal{T}$ és compacte perquè K és compacte i és tancat en K. A més, $K \setminus \mathcal{W}_\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$, donat que $y \in K$ i $y \in \mathcal{W}_\mathcal{T} \supset \mathcal{T} \implies y \notin \mathcal{T} = K \setminus (K \cap \mathcal{U})$, de tal manera que $y \in \mathcal{U}$. ■

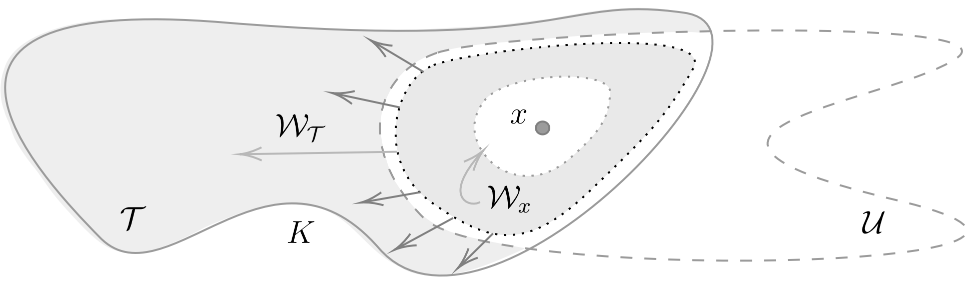


Figura 7.1: Ajuda gràfica per a la demostració de l'existència de base d'entorns.

Corol·lari 7.1.5. *Si $\mathcal{X}$ és localment compacte, $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ obert, aleshores $\mathcal{U}$ és localment compacte.*

Demostració. Sigui $\mathcal{X}$ localment compacte (aleshores, és de Hausdorff). $\mathcal{U}$ és de Hausdorff ja que l'agafem de tal manera que $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$. Sigui $x \in \mathcal{U}$. Per la proposició anterior existeix E entorn compacte d'x en $\mathcal{X}$ tal que $x \in E \subset \mathcal{U}$. ∎

Proposició 7.1.6. *Si $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ són localment compactes, aleshores $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ és localment compacte.*

Demostració. $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ és de Hausdorff. Si $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$:

$$\left.\begin{array}{l}\exists E_x \text{ entorn compacte de } x \text{ en } \mathcal{X}\\ \exists E_y \text{ entorn compacte de } y \text{ en } \mathcal{Y}.\end{array}\right\} \Longrightarrow E_x \times E_y \ni (x, y). \tag{7.1.1}$$

A més, $E_x \times E_y$ és compacte perquè E_x i E_y són ambdós compactes. I, per acabar, $E_x \times E_y$ és entorn de (x, y) en $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. ∎

7.2
Compactificacions

Definició 7.2.1. Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic. Una compactificació de $\mathcal{X}$ és un espai topològic $\mathcal{X}^*$ compacte i Hausdorff i una aplicació contínua $h : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}^*$ tal que:

1. L'aplicació $\mathcal{X} \longrightarrow h(\mathcal{X})$, $x \longmapsto h(x)$ és un homeomorfisme.
2. $\overline{h(\mathcal{X})} = \mathcal{X}^*$.

Exemple 7.2.2.

1. Sigui $\mathcal{X} = (0, 1)$. Volem demostrar que $\mathcal{X}^* = [0, 1]$ és compacte. Agafem:
$$\begin{array}{cccc} h: & (0,1) & \longrightarrow & [0,1] \\ & t & \longmapsto & t \end{array} \tag{7.2.1}$$
$\overline{h(0, 1)} = [0, 1]$, és a dir, $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$.
2. Ara agafem $h : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)))$. Tenim que $h(0, 1) = \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}$. A més:
$$\overline{h} : (0,1) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\overline{h} \text{ és contínua}\\ \overline{h} \text{ és bijectiva}\\ \overline{h} \text{ és oberta}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{h} \text{ és homeomorfa.} \tag{7.2.2}$$
($\overline{h}$ identificació $\Longrightarrow$ $\overline{h}$ homeomorfa). D'aquesta manera, $\overline{h((0, 1))} = \mathbb{S}^1$.

3. Tenim que la projecció estereogràfica $pe : \mathbb{S}^1\{(0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ és un homeomorfisme. Sigui $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ i $X^* = \mathbb{S}^1$. Definim $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $i : \mathbb{S}^1 \setminus \{(0,1)\} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la inclusió, de manera que $h = i \circ (pe)^{-1}$.

Definició 7.2.3 (Compactificació d'Alexandrov). Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic localment compacte i no compacte. Es diu que una compactificació $h : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}^*$ de $\mathcal{X}$ és d'Alexandrov si $\mathcal{X}^* \setminus h(x)$ té solament un element (el denotarem com ∞). En altres paraules, $\mathcal{X}^* \setminus h(x) = \{\infty\}$.

Teorema 7.2.4 (Teorema d'Alexandrov). *Sigui $\mathcal{X}$ localment compacte i no compacte. Existeix una compactificació d'Alexandrov de $\mathcal{X}$ que, a més, és única (excepte per als homeomorfismes).*

Demostració. Denotem $\tau_\mathcal{X}$ la topologia de $\mathcal{X}$. Prenem el conjunt $\mathcal{X}^* = \mathcal{X} \cup \{\infty\}$, tal que $\infty \notin \mathcal{X}$. En $\mathcal{X}^*$ definim la topologia següent: $\tau_{\mathcal{X}^*} = \tau_\mathcal{X} \cup \{\mathcal{X} \setminus K \mid K \subset \mathcal{X} \text{ és un compacte}\}$. Observem que $\mathcal{X}^* \setminus K = (\mathcal{X} \setminus K) \cup \{\infty\}$.

1. $\emptyset \in \tau_\mathcal{X} \subset \tau_{\mathcal{X}^*}$. A més, com que $\mathcal{X}^* = \mathcal{X}^* \setminus \emptyset$ i $\emptyset$ és un compacte, aleshores $\mathcal{X}^* \in \tau_{\mathcal{X}^*}$.
2. Sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ una família, tal que $\mathcal{U}_i \in \tau_{\mathcal{X}^*}$. Volem veure que això implica que $\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \in \tau_{\mathcal{X}^*}$.
   - Si $\mathcal{U}_i \in \tau_\mathcal{X}$, per a tot $i \in I$, aleshores $\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \in \tau_\mathcal{X} \subset \tau_{\mathcal{X}^*}$.
   - Si $\exists i_0 \in I$ tal que $\mathcal{U}_{i_0} \notin \tau_\mathcal{X}$. Escrivim $I = I_1 \cup I_2$, on:

$$\begin{gathered} \text{si } i \in I_1 \implies \mathcal{U}_i \in \tau_\mathcal{X} \\ \text{si } i \in I_2 \implies \mathcal{U}_i = \mathcal{X}^* \setminus \mathcal{C}_i,\ \mathcal{C}_i \subset \mathcal{X} \text{ compacte, ja que } i_0 \in I_2. \\ \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i = \bigcup_{i\in I_1} \mathcal{U}_i \cup \bigcup_{i\in I_2} (\mathcal{X}^* \setminus \mathcal{C}_i) = \bigcup_{i\in I_1} \mathcal{U}_i \cup (\mathcal{X}^* \setminus \bigcap_{i\in I_2} \mathcal{C}_i). \end{gathered} \tag{7.2.3}$$

   Aleshores, $\bigcap_{i\in I_2} \mathcal{C}_i$ és un compacte. Ara, aplicant que $A \cup (Y \setminus B) = Y \setminus (B \setminus A)$ per conjunts qualssevol $A, B \subset Y$,

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i = \mathcal{X}^* \setminus \left(\bigcap_{i\in I_2} \mathcal{C}_i \setminus \bigcup_{i\in I_1} \mathcal{U}_i \right) \tag{7.2.4}$$

   és un compacte d'$\mathcal{X}$, ja que la primera intersecció és un compacte i $\bigcup_{i\in I_1} \mathcal{U}_i \in \tau_\mathcal{X}$.
3. $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_{\mathcal{X}^*} \implies \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \tau_{\mathcal{X}^*}$.
   - Si $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_\mathcal{X} \implies \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \tau_\mathcal{X} \subset \tau_{\mathcal{X}^*}$.
   - Si $\mathcal{V} = \mathcal{X}^* \setminus K$ i $\mathcal{U} \in \tau_\mathcal{X}$, aleshores:

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U} \cap (\mathcal{X}^* \setminus K) = \overbrace{\mathcal{U}}^{\in \tau_\mathcal{X}} \cap \underbrace{(\mathcal{X} \setminus K)}_{K \in \tau_\mathcal{X}} \in \tau_\mathcal{X}, \tag{7.2.5}$$

   ja que $K \subset \mathcal{X}$ és compacte i de Hausdorff.
   - Si $\mathcal{U} = \mathcal{X}^* \setminus K_1$ i $\mathcal{V} = \mathcal{X}^* \setminus K_2$, aleshores $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{X}^* \setminus (K_1 \cup K_2) \in \tau_{\mathcal{X}^*}$,ja que $K_1 \cup K_2$ és compacte.

Ja hem provat que $\tau_{\mathcal{X}^*}$ és una topologia. Ara, definim: $h : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}^* = \mathcal{X} \cup \{\infty\}$, de tal manera que $\rho \longmapsto \rho$:

1. h és contínua:

$$U \in \tau_{\mathcal{X}^*} \implies \begin{cases} \mathcal{U} \in \tau_\mathcal{X} \implies h^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \in \tau_\mathcal{X} \\ \mathcal{U} = \mathcal{X}^* \setminus K \xrightarrow{K \text{ compacte}} h^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{X} \setminus K \in \tau_\mathcal{X}. \end{cases} \tag{7.2.6}$$

2. $(\mathcal{X}^*, \tau^*_{\mathcal{X}})$ és compacte: suposem que $\mathcal{X}^* = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_i \in \tau_{\mathcal{X}^*}$. Existeix $i_0 \in I$ tal que $\infty \in \mathcal{U}_{i_0} \implies \mathcal{U}_{i_0} \in \mathcal{X}^* \setminus K$.

$$K = \bigcup_{i\in I} (\mathcal{U}_i \cap K) \xrightarrow{K \text{ compacte}} \begin{array}{l} K = (\mathcal{U}_{i_1} \cap K) \cap \cdots \cap (\mathcal{U}_{i_r} \cap K) \\ \mathcal{X}^* = \mathcal{U}_{i_0} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{i_r}. \end{array} \tag{7.2.7}$$

3. $(\mathcal{X}^*, \tau_{\mathcal{X}^*})$ és de Hausdorff. Siguin $p, q \in \mathcal{X}^*$ tal que $p \neq q$.
   - Si $p, q \in \mathcal{X}$ existeix $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_{\mathcal{X}} \subset \tau_{\mathcal{X}^*}$ tal que $p \in \mathcal{U}$ i $q \in \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.
   - Si $p \in \mathcal{X}$ i $q = \infty$, $\exists \mathcal{T}$ compacte tal que $p \in \mathring{\mathcal{T}}$:

$$\mathcal{X}^* \setminus \mathcal{T} \ni \infty = q. \tag{7.2.8}$$

   Així doncs, $\tau_{\mathcal{X}^*}$ és topologia en $\mathcal{X}^*$ i $h : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}^*$ és compacte i de Hausdorff.

4. $h : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}^*$ és un homeomorfisme: agafem $h : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}^* \cup \{\infty\} = \mathcal{X}^*$. Per una banda, h és contínua i $\mathcal{X} \longrightarrow h(\mathcal{X})$ és bijectiva. Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ és obert, aleshores $h(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \in \tau_{\mathcal{X}} \subset \tau_{\mathcal{X}^*}$ i, com que $\mathcal{U} \subset h(\mathcal{X})$, $\mathcal{U}$ és un obert de $h(\mathcal{X})$. Per tant, h és un homeomorfisme.
5. Volem veure que $\overline{h(\mathcal{X})} = \mathcal{X}^*$. Notem que $\overline{h(\mathcal{X})} \neq \mathcal{X}$.

$$\left.\begin{array}{r} \overline{h(\mathcal{X})} \text{ és tancat en } \mathcal{X}^* \\ \mathcal{X}^* \text{ és compacte} \end{array}\right\} h(x) \text{ és compacte, però } \mathcal{X} \text{ no.} \tag{7.2.9}$$

   Recordem que $\mathcal{X}$ no és compacte, i que $\mathcal{X}^*$ i $\mathcal{X}$ difereixen en un únic punt. Ara, sigui com sigui:

$$\mathcal{X} \xrightarrow{h} h(\mathcal{X}) \subsetneq \overline{h(\mathcal{X})} \subset \mathcal{X} = h(\mathcal{X}) \cup \{\infty\} \implies \overline{h(\mathcal{X})} = \mathcal{X}^*. \tag{7.2.10}$$

■

Lema 7.2.5. *Sigui $\mathcal{X}$ localment compacte i no compacte. $(\mathcal{X}, h)$ la compactificació anterior. A més, sigui $(\mathcal{X}^+, g)$ una compactificació de $\mathcal{X}$ tal que $g(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}^*$ és un obert. Existeix $f : \mathcal{X}^* \longrightarrow \mathcal{X}^*$ contínua tal que:*

1. $$\begin{tikzcd} X^* \arrow[rr, "f"] & & X^* \\ & X \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "h=f\circ g"'] & \end{tikzcd}$$
2. $f(\mathcal{X}^* \setminus g(\mathcal{X})) = \{\infty_{\mathcal{X}^+}\}$

Demostració.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{X}^* & \longrightarrow & \mathcal{X}^* \\ & a & \longmapsto & h(x) \text{ si } a = g(x) \\ & a & \longmapsto & +\infty \text{ si } a \in \mathcal{X}^* \setminus g(x) \end{array} \tag{7.2.11}$$

Si demostrem que f és contínua, ja hem acabat. Si $\mathcal{U} \subset \tau_{\mathcal{X}}$, aleshores $f^{-1}(\mathcal{U}) = g(h^{-1}(\mathcal{U}))$. Com que $g : \mathcal{X} \longrightarrow g(\mathcal{X})$ és un homeomorfisme i $g(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}^+$ és un obert, tenim que $f^{-1}(\mathcal{U})$ és un obert. Si $\mathcal{U} = \mathcal{X}^* \setminus \mathcal{C}$, un $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ és un compacte:

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{X}^+ \setminus f^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{X}^+ \setminus g(h^{-1}(\mathcal{C})). \tag{7.2.12}$$

Com que $g(h^{-1}(\mathcal{C}))$ és compacte a $\mathcal{X}^+$, és tancat i, per tant, el seu complementari és obert. ■

Corol·lari 7.2.6. *Suposem $\mathcal{X}^* \setminus g(x) = \{\infty_{\mathcal{X}^*}\}$. Aleshores, f és un homeomorfisme.*

$$\begin{tikzcd}
\infty_{\mathcal{X}^+} \in \mathcal{X}^* \arrow[rr, "f"] & & \mathcal{X}^* \\
& \mathcal{X} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Demostració. Pel teorema anterior tenim que f és contínua. Com que també és bijectiva i tancada, f és un homeomorfisme. ■

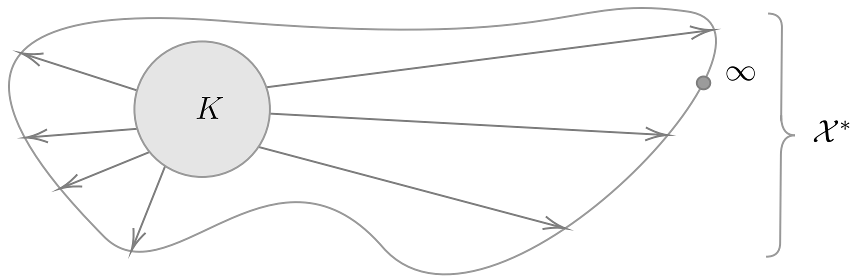


Figura 7.2: Alexandrov

VIII

Propietats de connexió

8.1
Espais arc-connexos

Definició 8.1.1 (Camí). Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic. Un camí en $\mathcal{X}$ amb origen $p \in \mathcal{X}$ i final $q \in \mathcal{X}$ és una aplicació contínua $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma(1) = q$.

Definició 8.1.2 (Espai arc-connex). Un espai topològic $\mathcal{X}$ és arc-connex si per a cada, $p, q \in \mathcal{X}$ existeix un camí $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ amb origen en p i final en q.

Exemple 8.1.3.

1. $\mathbb{R}^2$ és arc-connex: $p, q \in \mathbb{R}^2$ i $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $t \longmapsto tq(1-t)p$ contínua. Fixem-nos que $\gamma(0) = p$ i $\gamma(1) = q$ de manera que tenim un camí i l'espai és arc-connex.
2. Anàlogament, deduïm que $\mathbb{R}^n$ és arc-connex $\forall u \geq I$.
3. Sigui $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i suposem que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ és arc-connex. Aleshores, $\exists \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ contínua i $\gamma(0) = -1$ i $\gamma(1) = 1$, la qual cosa és una contradicció pel teorema de Bolzano.
4. En canvi, $\mathbb{R}^n\{(0,\dots,0)\}$ si $n \geq 2$ si és arc-connex.

Observació 8.1.4. D'aquí deduïm que la recta real no és homeomorfa al pla $\mathbb{R}^2$ ni a cap $\mathbb{R}^n$ amb $n \geq 2$. Si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és homeomorfisme, φ indueix un homeomorfisme tal que:

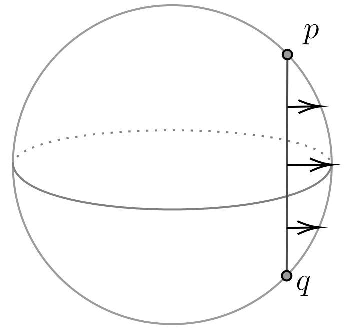
$$\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\text{no arc-connex}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(0)\}}_{\text{sí arc-connex}}. \tag{8.1.1}$$

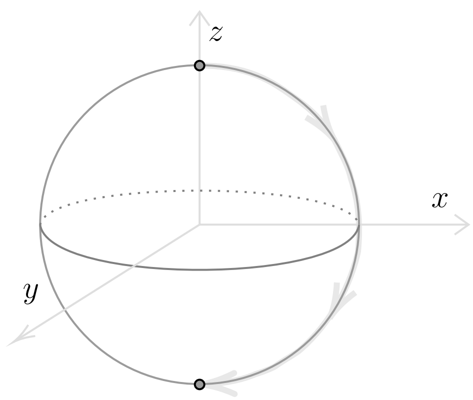
Proposició 8.1.5. *$\mathbb{S}^n = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}$ és arc-connex ($n \geq 1$).*

Demostració. Siguin $p, q \in \mathbb{S}^n$.

- Si $p \neq -q$, prenem $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^n$ tal que $t \longmapsto \frac{tq+(1-t)p}{\|tq+(1-t)p\|}$.
- Si $p = -q$, podem imposar que $p = (0,\dots,1)$ i $q = (0,\dots,-1)$.

■





Proposició 8.1.6. *Si $\mathcal{X}$ és arc-connex i $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua, aleshores $\mathcal{Y}$ és arc-connex. En particular, un espai homeomorf a un espai arc-connex també és arc-connex.*

Demostració. Prenem $f(\mathcal{X})$ en lloc de $\mathcal{Y}$ i podem suposar f exhaustiva. Siguin $p, q \in \mathcal{Y}$ de manera que podem definir $p_1 \in \mathcal{X} \mid \varphi(p_1) = p$ i $q_1 \in \mathcal{X} \mid \varphi(q_1) = q$. Com que $\mathcal{X}$ és arc-connex existeix $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ contínua tal que $\gamma_1(0) = p_1$ i $\gamma_1(1) = q_1$. Si $\gamma = f \circ \gamma_1$ és contínua:

$$\begin{aligned}\gamma(0) = f(p_1) = p.\\ \gamma(1) = f(q_1) = q.\end{aligned} \tag{8.1.2}$$

Aleshores, $f \circ \gamma$ és un camí d'inici p i final q. ■

Proposició 8.1.7. *Siguin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espais topològics. $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \iff \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ són arc-connexs.*

Demostració.

$\Longrightarrow$ Com que les projeccions $\pi_1 : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ i $\pi_2 : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ són contínues, i com que si un espai és arc-connex i la funció associada és contínua, $\mathcal{Y}$ és arc-connex.

$\Longleftarrow$ Siguin

$$\begin{aligned}p_1 = (x_1, y_1) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}\\ p_2 = (x_2, y_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}.\end{aligned} \tag{8.1.3}$$

Existeixen $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ contínua tal que $\gamma(0) = x_1$ i $\gamma(1) = x_2$. Sigui ara $\sigma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{Y}$ contínua tal que $\sigma(0) = y_1$ i $\sigma(1) = y_2$.

$$\begin{array}{rccc}\delta : & [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{X} \times \mathcal{Y}\\ & t & \longmapsto & (\gamma(t), \sigma(t))\end{array} \tag{8.1.4}$$

és contínua $\delta(0) = p_1$ i $\delta(1) = p_2$.

■

8.2 Components arc-connexes

Definició 8.2.1 (Relació de connexió). Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic. Definim $p \sim q \iff \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ contínua tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma(1) = q$. En altres paraules, diem que dos punts estan connectats si existeix un camí amb punt inicial p i final q.

Lema 8.2.2. *$\sim$ és una relació d'equivalència.*

Demostració.

1. Reflexiva ($p \sim p$): $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ és contínua tal que $t \longmapsto p$.
2. Simètrica ($p \sim q \implies q \sim p$) Sigui $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ contínua tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma(1) = q$. Prendrem $\delta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que $t \longmapsto \gamma(1-t)$ i amb això ja hem acabat.
3. Transitivitat: amb tot això, tal i com ja hem fet, existeix $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma(1) = q$ i $\exists \delta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que $\delta(0) = 1$ i $\delta(1) = r$. Finalment, $\exists \varepsilon : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que $\varepsilon(0) = p$ i $\varepsilon(1) = r$ definida de tal manera que:

$$t \longmapsto \begin{cases}\gamma(2t) \text{ si } t \in [0, \frac{1}{2}],\\ \delta(2t-1) \text{ si } t \in [\frac{1}{2}, 1].\end{cases} \tag{8.2.1}$$

Tenim que ε és contínua i $\varepsilon(0) = p$ i $\varepsilon(1) = r$.

■

Definició 8.2.3 (Component arc-connexa). Si $\mathcal{X}$ és un espai topològic, aleshores donat $p \in \mathcal{X}$ denotarem:

$$\mathrm{ca}(p) = \{q \in \mathcal{X} \mid q \sim p\}. \tag{8.2.2}$$

l'anomenarem component arc-connexa de p.

Exemple 8.2.4.

- Ja sabem pels mètodes vistos fins ara que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no és un espai arc-connex. Igualment, podem definir:

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \supset \mathrm{ca}(1) = (0, +\infty), \mathbb{R} \setminus \{0\} \supset \mathrm{ca}(-1) = (-\infty, 0). \tag{8.2.3}$$

- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{ca}(\frac{1}{2})$ en $\mathbb{Q}$. Si $x \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{1}{2} \sim x$ i existeix $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{Q}$ contínua tal que $0 \longmapsto \frac{1}{2}$ i $1 \longmapsto x$. Però això no és cert pel teorema de Bolzano. Per tant, $\mathrm{ca}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ en $\mathbb{Q}$. De fet, $\mathbb{Q}$ amb la topologia induïda per $\mathbb{R}$ ens dona que $\mathrm{ca}(q) = \{q\}$ per a tot $q \in \mathbb{Q}$.

Proposició 8.2.5. *Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic, $x \in \mathcal{X}$. Aleshores, $\mathrm{ca}(x)$ és el major subespai arc-connex de $\mathcal{X}$ que conté x.*

Demostració.

1. $\mathrm{ca}(x)$ és arc-connexa. Si $y \in \mathrm{ca}(x)$ i $x \in \mathrm{ca}(x)$, es dona que $y \sim x$ i $z \sim x$, respectivament, i per la transitivitat de la relació, $y \sim z$.
2. Sigui $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ arc-connex tal que $x \in \mathcal{C}$. Volem veure que $\mathscr{C} \subset \mathrm{ca}(x)$. Sigui $y \in \mathcal{C}$, existeix $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{C}$ contínua tal que $\gamma(0) = y$ i $\gamma(1) = x$. Aleshores, existeix $\tilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = y$ i $\tilde{\gamma}(1) = x$. Per tant, $y \sim x$ i, finalment, $y \in \mathrm{ca}(x)$.

■

8.3

Espais connexos

Definició 8.3.1 (Espai connex). Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic. $\mathcal{X}$ és un espai connex si no es pot expressar com unió disjunta de dos oberts no buits, és a dir, si $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ són oberts tals que $\mathcal{X} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ i $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ o bé $\mathcal{U} = \emptyset$ o bé $\mathcal{V} = \emptyset$.

Exemple 8.3.2.

- Tenim $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Aleshores, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ és no connex.
- Suposem $\mathbb{R} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ i $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ amb $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ oberts. Definim:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto -1 \text{ si } t \in \mathcal{U},\ t \longmapsto 1 \text{ si } t \in \mathcal{V}. \tag{8.3.1}$$

Pel teorema de Bolzano, hauria d'existir un t tal que $f(t) = 0$, però per construcció els únics dos valors de la imatge poden ser -1 i 1. Per tant, arribem a una contradicció i $\mathbb{R}$ és connex.

Exercici 8.3.3. *Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic. $\mathcal{X}$ és connex si, i només si, els únics subconjunts $A \subset \mathcal{X}$ tals que A és obert i tancat en $\mathcal{X}$ són $A = \emptyset$ i $A = \mathcal{X}$.*

Proposició 8.3.4. *Si $\mathcal{Y}$ és un espai topològic tal que $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, són equivalents:*

1. *$\mathcal{X}$ és connex.*
2. *Per a cada $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ oberts de $\mathcal{Y}$, si*

$$\mathcal{X} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V},\ \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{X} = \emptyset \implies \mathcal{X} \subset \mathcal{U} \text{ o } \mathcal{X} \subset \mathcal{V}. \tag{8.3.2}$$

Demostració.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Suposem que $\mathcal{X}$ és connex i $\mathcal{X} \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, i $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{X} = \emptyset$. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{X} = (\mathcal{X} \cap \mathcal{U}) \cup (\mathcal{X} \cap \mathcal{V}) \\ \text{oberts de } \mathcal{X} \\ (\mathcal{X} \cap \mathcal{U}) \cap (\mathcal{X} \cap \mathcal{V}) = \emptyset \end{array}\right\} \xrightarrow{\mathcal{X} \text{ connex}} \mathcal{X} \cap \mathcal{U} = \emptyset \text{ o bé } \mathcal{X} \cap \mathcal{V} = \emptyset. \tag{8.3.3}$$

Així, es poden donar dos casos: si $\mathcal{X} \cap \mathcal{V} = \mathcal{X}$, aleshores $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$. En canvi, si $\mathcal{X} \cap \mathcal{U} = \mathcal{X}$, aleshores $\mathcal{X} \subset \mathcal{U}$.

■

Proposició 8.3.5. *Siguin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espais topològics. Sigui $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicació contínua i $\mathcal{X}$ és connex. Aleshores, $f(x)$ és connexa.*

Demostració. Podem suposar que f és exhaustiva, de manera que $f : x \longmapsto f(x)$. Suposem que $\mathcal{Y} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, amb $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ oberts, tals que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Tenim que $\mathcal{X} = f^{-1}(\mathcal{U}) \cup f^{-1}(\mathcal{V})$ i $f^{-1}(\mathcal{U}), f^{-1}(\mathcal{V})$ oberts de $\mathcal{X}$, tals que $f^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(\mathcal{V}) = \emptyset$. Així:

$$\begin{cases} f^{-1}(\mathcal{U}) = \emptyset \implies \mathcal{U} = \emptyset. \\ f^{-1}(\mathcal{V}) = \emptyset \implies \mathcal{V} = \emptyset. \end{cases} \tag{8.3.4}$$

I ja hem acabat la demostració. ■

Proposició 8.3.6. *Suposem que $\mathcal{X}$ és un espai topològic i sigui $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ un recobriment de $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{X}_i$ és connex, per a tot $i \in I$. Suposem que $\exists i_0 \in I$ tal que $\mathcal{X}_{i_0} \cap \mathcal{X}_i \neq \emptyset, \forall i \in I$. Aleshores, $\mathcal{X} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i$ és connex.*

Demostració. Suposem que $\mathcal{X} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, oberts de $\mathcal{X}$ tals que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Per a cada $i \in I$, $\mathcal{X}_i = (\mathcal{X}_i \cap \mathcal{U}) \cup (\mathcal{X}_i \cap \mathcal{V})$ oberts de $\mathcal{X}_i$. Com que $\mathcal{X}_i$ és connex per a tot i, $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{U} = \emptyset$ (i, per tant, $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{V}$) o bé $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{V} = \emptyset$ (de tal manera que $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{U}$).

En particular, $\mathcal{X}_{i_0} \subset \mathcal{U}$ o bé $\mathcal{X}_{i_0} \subset \mathcal{V}$. Suposem que $\mathcal{X}_{i_0} \subset \mathcal{U}$ i volem veure que $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{U}$ per a tot $i \in I$. Suposem que $\exists \mathcal{X}_{i_1} \subset \mathcal{V} \implies \emptyset \neq \mathcal{X}_{i_0} \cap \mathcal{X}_{i_1} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Arribem a contradicció i veiem, clarament que $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{U}$ per a tot $i \in I$.

Per tant, ja tenim que $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{U}$ per a tot $i \in I$. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{X} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i \subset \mathcal{U} \\ \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset \end{array}\right\} \implies \mathcal{V} = \emptyset. \tag{8.3.5}$$

■

Proposició 8.3.7. *Siguin $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ espais topològics. Aleshores, $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ és connex si, i només si, $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ són connexes. En altres paraules, el producte cartesià és connex si tots els seus factors ho són.*

Demostració.

$\Longrightarrow$ Agafant $\pi_i : \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n \longrightarrow \mathcal{X}_i$, $\mathcal{X}_i$ és connex.

$\Longleftarrow$ Suposem que $n = 2$ (en general, podrem aplicar inducció). Anomenem $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}$ i $\mathcal{X}_2 = \mathcal{Y}$.

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \left(\bigcup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{X} \times \{y\} \right) \cup (\{x_0\} \times \mathcal{Y}), \ x_0 \in \mathcal{X}. \tag{8.3.6}$$

Aleshores, tenim el producte cartesià escrit com una unió de connexes, unit a $\{x_0\} \times \mathcal{Y} = \mathcal{X} \times \{y\} \cap \{x_0\} \times \mathcal{Y} \ni (x_0, y)$, el qual també és connex. Per tant, $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ és connex.

■

Proposició 8.3.8. *Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic arc-connex. Aleshores, $\mathcal{X}$ és connex.*

Demostració. Sigui $\mathcal{X}$ arc-connex. Sigui $x_0 \in \mathcal{X}$. Si $x \in \mathcal{X}$, existeix $\gamma_{\mathcal{X}} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ contínua tal que $0 \longmapsto x_0$ i $1 \longmapsto x$. Aleshores:

$$\mathcal{X} = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \gamma_{\mathcal{X}}([0,1]) \cup \{x_0\}. \tag{8.3.7}$$

Suposem ara que $[0,1]$ és connex. Tindrem que $\gamma_{\mathcal{X}}([0,1])$ és connex i que $x_0 \in \gamma_{\mathcal{X}}([0,1])$.

Ens falta veure que $[0,1]$ és connex. Suposem que $[0,1] = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ oberts tals que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Sigui $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$t \longmapsto \begin{cases} -1 \text{ si } t \in \mathcal{U} \\ \ \ 1 \text{ si } t \in \mathcal{V} \end{cases} \tag{8.3.8}$$

Pel teorema de Bolzano, arribem a contradicció. ■

Observació 8.3.9. Apliquem el teorema de Bolzano en el següent sentit: suposem que podem escriure $[0,1]$ com $[0,1] = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, amb $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Ara definim f tal que $\mathcal{U} \longmapsto 1$ i $\mathcal{V} \longmapsto -1$. Si $\mathcal{U} \neq \emptyset \ni t_0$ i $\mathcal{V} \neq \emptyset \ni t_1$, hi ha algun i tal que $f(t_i) = 0$.

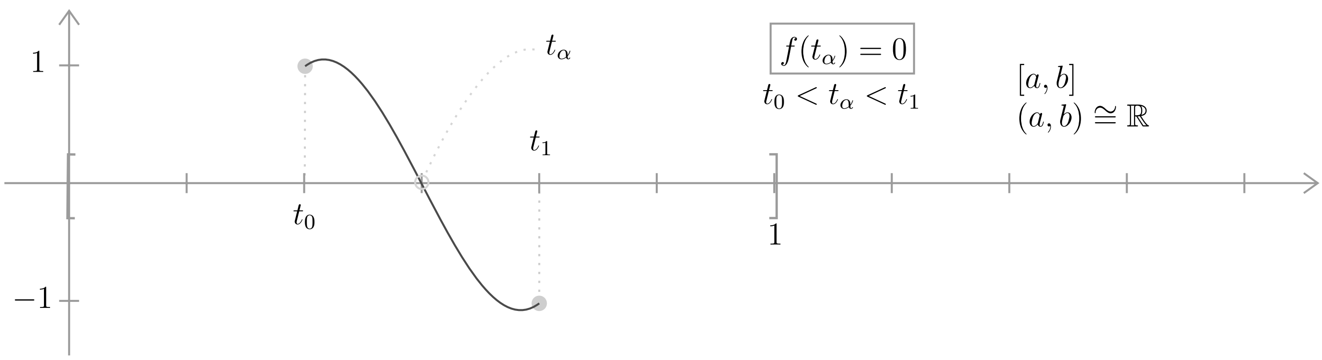


Figura 8.1: Representació d'una funció f contínua que ens serveixi per a l'observació.

Exemple 8.3.10. Sigui $\mathcal{X} = \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\} \cup \{(\frac{1}{t}, \sin(t)), t \in (0,+\infty)\} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$. $\mathcal{X}$ és connex i $\mathcal{X}$ no és arc-connex.

Corol·lari 8.3.11. *Si $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ són espais topològics arc-connexos, llavors $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ també és un espai arc-connex.*

Proposició 8.3.12. *Suposem que $\mathcal{Y}$ es un espai topològic. $A \subset \mathcal{Y}$ és connex i $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ tal que $A \subset \mathcal{X} \subset \overline{A}$. Aleshores, $\mathcal{X}$ és connex.*

Corol·lari 8.3.13. *Si A és connex, aleshores $\overline{A}$ és connex.*

Demostració. Suposem que $\mathcal{X}$ és no connex. Aleshores, existeixen dos oberts $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ oberts de $\mathcal{Y}$ tals que $\mathcal{X} \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$, $\mathcal{V} \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$ i $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{X} = \emptyset$. Per tant:

$$\begin{aligned} A &= (\underbrace{A \cap \mathcal{U}}_{\text{obert d'}A}) \cap (\underbrace{A \cap \mathcal{V}}_{\text{obert d'}A}) \\ \emptyset &= (A \cap \mathcal{U}) \cap (A \cap \mathcal{V}) \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{X} = \emptyset. \end{aligned} \tag{8.3.9}$$

Com A és connex, aleshores: si $A \cap \mathcal{U} = \emptyset \implies A \subset \mathcal{V}$ i, en canvi, si $A \cap \mathcal{V} = \emptyset \implies A \subset \mathcal{U}$. Suposem ara que $A \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Aleshores, $A \subset \mathcal{Y} \setminus \mathcal{U}$ i, com $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{U}$ és un tancat de $\mathcal{Y}$, aleshores $\overline{A} \subset \mathcal{Y} \setminus \mathcal{U} \iff \overline{A} \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Arribem a contradicció amb la següent línia:

$$\mathcal{X} \subset A \implies \underbrace{\mathcal{U} \cap \mathcal{X}}_{\neq \emptyset} \subset \mathcal{U} \cap A \subset \underbrace{\mathcal{U} \cap \overline{A}}_{= \emptyset}. \tag{8.3.10}$$

Per tant, $\mathcal{X}$ és connex. ∎

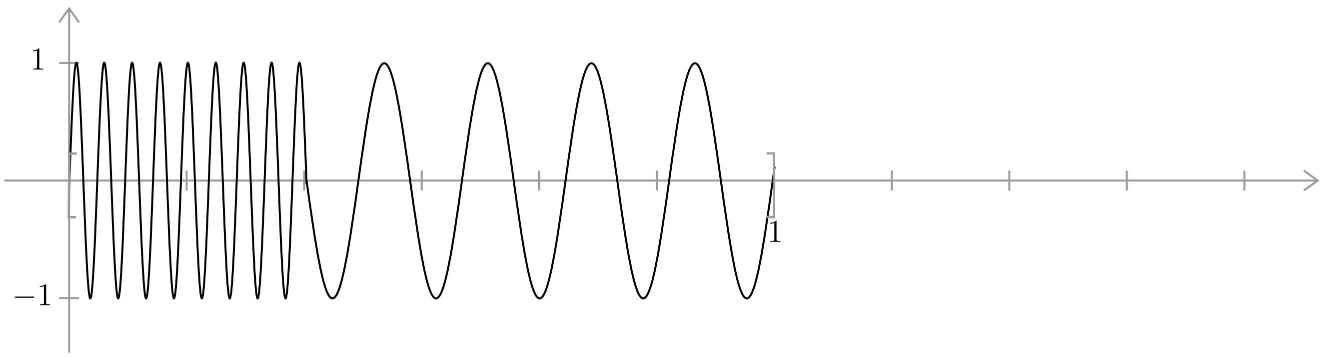


Figura 8.2: Il·lustració de l'exemple 8.3.10.

Proposició 8.3.14. *Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic. Definim la relació*

$$x \approx y \iff \exists \mathcal{C} \subset \mathcal{X} \text{ connex} \,\big|\, x \in \mathcal{C}, y \in \mathcal{C}. \tag{8.3.11}$$

Aquesta relació és d'equivalència.

Demostració.

1. $x \approx x$ ja que $\{x\}$ és connex.
2. $x \approx y \implies y \approx x$ (és reflexiva).
3. $x \approx y$ implica que existeix $\mathcal{C}$ connex tal que $x, y \in \mathcal{C}$. Al seu torn, si $y \approx z$ aleshores existeix D connex tal que $y, z \in D$.

Com $\mathcal{C}, D$ són connexes i $\mathcal{C} \cap D \neq \emptyset$, $\mathcal{C} \cup D$ és connex i $x \approx z$, ja que $x \in \mathcal{C}$ i $z \in D$. ∎

Definició 8.3.15 (Component connexa). Donat un espai topològic $\mathcal{X}$ tal que $x \in \mathcal{X}$, denotem:

$$c(x) = \{y \in \mathcal{X} \,\big|\, y \approx x\}. \tag{8.3.12}$$

Se l'anomena la component connexa de $\mathcal{X}$ que conté a x. És el subespai connex més gran que conté a x.

Proposició 8.3.16. *Sigui $\mathcal{X}$ un espai topològic. Aleshores, $c(x)$ és el major subespai connex de $\mathcal{X}$ que conté x. D'aquí, $c(x)$ és un tancat de $\mathcal{X}$.*

Demostració. Si $y \in c(x) \implies y \approx x \implies \exists A_y \text{connex} \mid x, y \in A_y$. A més, $A_y \subset c(x)$. Aleshores, $c(x) = \bigcup_{y \in c(x)} A_y \implies c(x)$ és connex. Si $\mathcal{T}$ és connex i $x \in \mathcal{T}$, $\forall y \in \mathcal{T}$ es dona que $y \approx x \implies \mathcal{T} \subset c(x)$. ■

Observació 8.3.17. En general, les components connexes no són obertes. *Per exemple,* $\mathcal{X} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n > 0\}$. *Aleshores,* $c(0) = \{0\}$. *Si* $\frac{1}{n} \in c(0)$ *i* $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *tal que* $0 < r < \frac{1}{n}$ *i*

$$\begin{Bmatrix} x \in c(0) \\ x < r \end{Bmatrix} \cup \begin{Bmatrix} x \in c(0) \\ x > r \end{Bmatrix} \tag{8.3.13}$$

Arribem a contradicció.

Definició 8.3.18 (Localment connex). Un espai topològic $\mathcal{X}$ és localment connex si per a cada $x \in \mathcal{X}$ existeix una base d'entorns $\mathfrak{B}_x$ de x tal que els elements de $\mathfrak{B}_x$ són connexes.

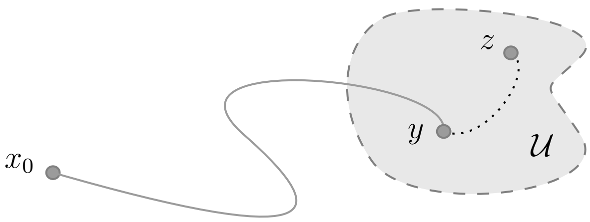
Proposició 8.3.19. *Si $\mathcal{X}$ és connex i localment arc-connex, aleshores $\mathcal{X}$ és arc-connex.*

Demostració. Sigui $x_0 \in \mathcal{X}$. Considerem

$$\mathscr{O} = \{y \in \mathcal{X} \mid y \sim x_0\}, \tag{8.3.14}$$

és a dir, existeix $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ contínua tal que $\gamma(0) = x_0$ i $\gamma(1) = y$. Provem:

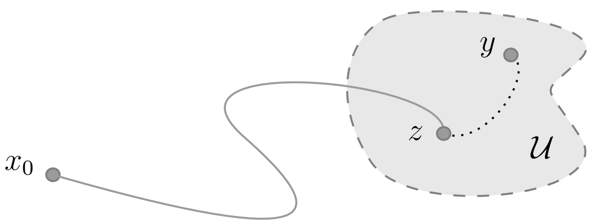
1. $\mathscr{O} \neq \emptyset$: provem que $x_0 \in \mathscr{O}$
2. $\mathscr{O}$ és obert: ho demostrem gràficament de la manera següent.



$\mathcal{U}$ entorn arc-connex de y
$\mathcal{U} \subset \mathscr{O}$

Figura 8.3: Demostració gràfica de què $\mathscr{O}$ és obert.

3. $\mathscr{O}$ és tancat: vegem que $\mathcal{X} \setminus \mathscr{O}$ és obert. Ho tornem a demostrar gràficament: si $y \in \mathcal{X} \setminus \mathscr{O} \implies y \not\sim x_0$. Usant que $\mathcal{U}$ és arc-connex, si $\mathcal{U} \ni y$, $\forall x \in \mathcal{U} \mid z \not\sim x_0$. Així, $y \in \mathcal{U} \subset \mathcal{X} \setminus \mathscr{O}$.



$\mathcal{U}$ entorn arc-connex de y
$\mathcal{X} \setminus \mathscr{O}$ és obert

Figura 8.4: Demostració gràfica de què $X \setminus \mathscr{O}$ és obert.

Com compleix les tres condicions, $\mathscr{O} = \mathcal{X}$ i $\mathcal{X}$ és arc-connex. ■

Observació 8.3.20.

$$\begin{gathered}\left\{\begin{matrix}\mathcal{X} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}\\ \mathcal{U}, \mathcal{V} \text{ oberts}\\ \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset\end{matrix}\right\} \implies \left\{\begin{matrix}\mathcal{U} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{V}\\ \mathcal{V} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{U}\end{matrix}\right\} \implies \mathcal{U} = \emptyset,\ \mathcal{V} = \emptyset\\ \begin{cases}\mathcal{X} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}\\ \mathcal{U}, \mathcal{V} \text{ tancats}\\ \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset\end{cases} \implies \mathcal{U} = \emptyset,\ \mathcal{V} = \emptyset.\end{gathered} \tag{8.3.15}$$

Exercici 8.3.21. *$\mathcal{X}$ és connex si, i només si, $\forall A \subset \mathcal{X}, \emptyset \neq A \neq \mathcal{X}$ i $\partial A \neq \emptyset$.*

Demostració.

$\boxed{\implies}$ Tenim que:

$$\begin{gathered}\mathcal{X} = \underbrace{\overline{A}}_{\text{tancat}} \cup \underbrace{\overline{\mathcal{X} \setminus A}}_{\text{tancat}}\\ \partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{X} \setminus A}.\end{gathered} \tag{8.3.16}$$

Si $\partial A = \emptyset$, aleshores $\mathcal{X}$ és reunió de dos oberts disjunts, i:

$$\begin{cases}\overline{A} = \mathcal{X},\ \overline{\mathcal{X} \setminus A} = \emptyset \implies \mathcal{X} \setminus A = \emptyset \implies \mathcal{X} = A\\ \overline{A} = \emptyset,\ \overline{\mathcal{X} \setminus A} = \mathcal{X} \implies A = \emptyset.\end{cases} \tag{8.3.17}$$

Per tant, $\partial A \neq \emptyset$.

$\boxed{\impliedby}$ Suposem que $\mathcal{X} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, tal que $\mathcal{T}_i$ són tancats. Aleshores, $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \emptyset$ i $\mathcal{T}_1 \neq \emptyset$ i $\mathcal{T}_2 \neq \emptyset$. Si $\mathcal{T}_1 \neq \emptyset$ i $\mathcal{T}_2 = \mathcal{X} \setminus \mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_1$ no pot ser $\mathcal{X}$. Aleshores:

$$\emptyset \neq \partial\mathcal{T}_1 = \overline{\mathcal{T}_1} \cap \overline{\mathcal{X} \setminus \mathcal{T}_1} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \emptyset. \tag{8.3.18}$$

Per tant, $\mathcal{X}$ és connex.

■

Bibliografia

[Lle13] Irene Llerena. *Topologia*. Universitat de Barcelona, febr. de 2013.

[Agu17] J. Aguadé i Bover. *Apunts d'un curs de topologia elemental*. Universitat Autònoma de Barcelona, 2017. isbn: 9788469705414. url: `https://books.google.es/books?id=3yk5ygEACAAJ`.

[Jan18] Martí Jané Bellerín. *Topologia, 2017-2018*. Apunts de l'assignatura *Topologia*. Universitat de Barcelona, 2018.

[PR21] Pere Pascual Gainza i Agustín Roig Martí. *Topologia*. Edicions UPC, 2021.

[Mun] James R Munkres. *Topología*. Prentice-Hall, M.

Índex terminològic