Matrius i vectors (grup de matí)

Curs 2018–2019

2.1 Dimensió d'un espai vectorial

Recordem que una *base* (finita) d'un espai vectorial E és un conjunt ordenat $v_1, \dots, v_n$ de vectors linealment independents que generen E.

Exemple 2.1. El conjunt

$$e_1 = (1,0,0,\dots,0,0), \quad e_2 = (0,1,0,\dots,0,0), \quad \dots, \quad e_n = (0,0,0,\dots,0,1)$$

és una base de $\mathbb{R}^n$. S'anomena la *base canònica* de $\mathbb{R}^n$. Les components d'un vector qualsevol $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ en aquesta base són $a_1, \dots, a_n$.

El fet següent és fonamental per al desenvolupament de l'àlgebra lineal:

Teorema 2.2. *Si $v_1, \dots, v_n$ i $w_1, \dots, w_m$ són dues bases d'un espai vectorial E, llavors $n = m$.*

Demostració. Podem suposar que $m \geq n$ sense perdre generalitat (ja que, si no fos així, canviaríem de nom els vectors donats). Suposem, més concretament, que $m > n$ i arribarem a una contradicció.

Com que $\{v_1, \dots, v_n\}$ és un conjunt de generadors de E, podem escriure

$$\begin{aligned} w_1 &= a_1^1 v_1 + \cdots + a_1^n v_n \\ w_2 &= a_2^1 v_1 + \cdots + a_2^n v_n \\ &\cdots \\ w_m &= a_m^1 v_1 + \cdots + a_m^n v_n \end{aligned}$$

per a alguns nombres reals a_i^j. Com que $w_1, \dots, w_m$ són linealment independents, la igualtat

$$x_1 w_1 + \cdots + x_m w_m = 0 \tag{2.1}$$

només es pot complir per a $x_1 = 0, \dots, x_m = 0$. Ara bé, si escrivim (2.1) com

$$x_1(a_1^1 v_1 + \cdots + a_1^n v_n) + \cdots + x_m(a_m^1 v_1 + \cdots + a_m^n v_n) = 0$$

podem reordenar-ho com

$$(x_1 a_1^1 + \cdots + x_m a_m^1) v_1 + \cdots + (x_1 a_1^n + \cdots + x_m a_m^n) v_n = 0.$$

Com que els vectors $v_1, \dots, v_n$ són linealment independents, s'ha de complir que

$$\begin{aligned} x_1 a_1^1 + \cdots + x_m a_m^1 &= 0 \\ x_1 a_1^2 + \cdots + x_m a_m^2 &= 0 \\ &\cdots \\ x_1 a_1^n + \cdots + x_m a_m^n &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Si pensem això com un sistema d'equacions lineals amb les incògnites $x_1, \ldots, x_m$, resulta que aquest sistema té n equacions i m incògnites. Com que el sistema és homogeni, és compatible. Com que $m > n$, el sistema té com a mínim $m-n$ graus de llibertat (on $m-n \geq 1$). Per tant, podem donar el valor 1 a qualsevol variable lliure i el valor 0 a les restants variables lliures, i d'aquesta manera obtindrem una solució no trivial del sistema (2.2); és a dir, una solució amb $x_i \neq 0$ per a algun i. Aquest fet contradiu la hipòtesi que els vectors $w_1, \ldots, w_m$ són linealment independents. $\square$

El nombre de vectors d'una base qualsevol d'un espai vectorial E s'anomena la *dimensió* de E i es denota per $\dim E$. Per exemple, $\dim \mathbb{R}^n = n$. L'espai vectorial $E = \{0\}$ té dimensió 0.

El raonament que acabem de fer per demostrar el teorema demostra, més generalment, que si $\dim E = n$ llavors qualsevol conjunt $\{w_1, \ldots, w_m\}$ amb $m > n$ és necessàriament un conjunt de vectors linealment dependents.

És natural preguntar si tot espai vectorial E té alguna base. En aquest curs només estem considerant bases formades per un nombre finit de vectors i per tant només estudiarem espais vectorials de dimensió finita. No tots els espais vectorials tenen dimensió finita; per exemple, l'espai vectorial $\mathbb{R}[x]$ dels polinomis en una variable x amb coeficients reals no té cap base finita (però sí que en té una d'infinita: $1, x, x^2, x^3, \ldots$, en el sentit que qualsevol polinomi és una combinació lineal finita d'aquest conjunt infinit de polinomis linealment independents).

Teorema 2.3. *Si $v_1, \ldots, v_k$ és un conjunt qualsevol de vectors linealment independents d'un espai vectorial E de dimensió n, llavors existeixen vectors $v_{k+1}, \ldots, v_n$ tals que $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ és una base de E.*

Demostració. Ja hem vist que, si $k > n$, llavors els vectors $v_1, \ldots, v_k$ no poden ser linealment independents. Per tant, podem afirmar que $k \leq n$.

Si els vectors $v_1, \ldots, v_k$ generen E, llavors formen base per definició i ja hem acabat (en aquest cas, $k = n$ i el conjunt de vectors que hi afegim és buit). Si no generen E, podem considerar el subespai $F = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ format per totes les combinacions lineals de $v_1, \ldots, v_k$. Com que $F \neq E$, podem escollir algun vector $v_{k+1} \in E$ tal que $v_{k+1} \notin F$. Aleshores $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$ és un conjunt de vectors linealment independents, ja que en una hipotètica relació de dependència

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} = 0$$

no pot ser que $a_{k+1} \neq 0$ ja que això implicaria que v_{k+1} és combinació lineal de $v_1, \ldots, v_k$, i tampoc no pot ser que $a_{k+1} = 0$ ja que això contradiria la hipòtesi de l'enunciat que $v_1, \ldots, v_k$ són linealment independents.

Ara repetim el raonament: si $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ generen E, formen base i ja hem acabat. Si no, podem escollir un altre vector v_{k+2} tal que $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}$ són linealment independents. Ho repetim les vegades que calgui. El procés acabarà en un nombre finit de passos, ja que, altrament, quan $k+r > n$ resultaria que els vectors $v_1, \ldots, v_{k+r}$ són linealment independents i ja sabem que això no és possible. $\square$

Corol·lari 2.4. *Si $\dim E = n$, llavors qualsevol conjunt ordenat $v_1, \ldots, v_n$ de vectors linealment independents és una base de E.*