Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Enginyeria Informàtica

Apunts

Grau en Matemàtiques

Curs 2022-2023 | Sisè Semestre

Geometria Projectiva (GP)

Autor:
Mario Vilar

Professor/a:
Dr. Martí Lahoz

Presentació de l'assignatura

Entendre els conceptes bàsics de la geometria projectiva i saber interpretar en termes projectius elements de geometria afí i mètrica. Conèixer els aspectes projectius, afins i mètrics de les hipersuperfícies quàdriques. Basat en les notes [Lah23].

Classificació AMS (2020): 00-01, 14-01, 51-01, 51A30, 51N15, 51N20.

Índex

Introducció

Yo, yo yo, 148-3 to the 3 to the 6 to the 9, representing the ABQ, what up biatch?
Leave it at the tone.

Jesse PINKMAN, *Breaking Bad*

Primer de tot, trobareu que hi ha un índex, on hi distingim els diferents apartats ordenats seguint el meu propi criteri i, de tant en tant, seguint l'ordre cronològic del curs. Hi ha capítols, seccions, subseccions (i fins i tot subsubseccions). Us faig cinc cèntims de com he organitzat els encapçalaments de cada pàgina:

1. el número de l'últim capítol/secció/subsecció, depèn de la profunditat que hi hagi definida en aquell moment, figurarà en cada cantonada superior de pàgina parella (per exemple, *1.2*);
2. el nom del capítol es trobarà a la part dreta de la capçalera de les pàgines parelles (per exemple, «Divisibilitat i nombres primers»);
3. el nom de l'última secció/subsecció de la pàgina, a la cantonada dreta superior de les pàgines parelles (per exemple, «Polinomis: algorisme d'Euclides»);
4. el número de l'últim teorema, definició... de la pàgina en qüestió es trobarà a les pàgines senars, a la cantonada superior dreta, *destacat en el color de la seva capçalera corresponent* (per exemple, **1.2.3**).

A més, hi ha una taula, la taula de continguts. En aquest sentit, tal com acabem de dir, es veu fàcilment que s'ha seguit una mena de *sorting-by-color* per poder treballar de manera més eficient amb els diferents tipus d'enunciats matemàtics. D'aquesta manera, si busqueu una definició, un teorema... podreu distingir que estan destacats amb colors diferents (ara els introduïm) i trobar-los molt ràpidament:

1. Teoremes, proposicions, lemes, corol·laris, propietats, conjectures, processos i exercicis tindran aquest format (capçalera destacada amb color gris fosc):

   Teorema. *Compte! L'enunciat del teorema també serà en cursiva! Jove xef, porti whisky amb quinze glaçons d'hidrogen, coi!*

2. Les definicions i notacions tindran aquest format (capçalera de color gris clar):

   Definició. Aqueix betzol, Jan, comprava whisky de figa.

3. Les remarques i exemples tindran aquest format:

   Observació. Zel de grum: quetxup, whisky, cafè, bon vi; ja!

Després de molts anys fent-ho malament, ara sol quedaran numerades aquelles equacions a les quals em referiré més endavant. És la *filosofia dominant* en la majoria de textos matemàtics (té nom i tot, es diu la *regla d'Occam*).
Per últim, m'estalviaré de comentar l'índex terminològic perquè el seu propòsit és clar i, en efecte, paral·lel al de l'organització d'aquest document: poder facilitar-vos al màxim la feina per localitzar qualsevol concepte que desitgeu. Espero que us serveixin d'alguna cosa aquests apunts, els he fet amb tot l'amor del món. Sort!

Mario Vilar
Sitges, Barcelona
17 de juny de 2023

Taula de continguts

| I | Capítol 1 | I |

II Capítol 2 II

vi Capítol 6 vi

A — Capítol A — A

B

CAPÍTOL B

B

Elements bàsics de la geometria projectiva lineal

Identifiquem el pla afí real amb el pla $x = -1$ dins l'espai afí $\mathbb{R}^3$. L'ull del pintor a l'origen de coordenades O. Un punt A qualsevol del pla $x = -1$ es pot identificar amb la recta que passa pels punts A i O. Així doncs, cada punt del pla afí determina únicament una d'aquestes rectes. I viceversa, si tenim una recta per O, podem pensar que representa el punt de tall amb el pla $x = -1$. Aleshores, si pensem el pla projectiu com les rectes per O, hem completat el pla $x = -1$ amb les *direccions* del pla $x = -1$; és a dir, les rectes paral·leles al pla $x = -1$ que passen per 0 (que són les rectes del pla $x = 0$, corresponen a punts *nous*.
Al llarg del curs es considera fixat un cos base $\mathbb{K}$. L'elecció de $\mathbb{K}$ no té rellevància fins que entrin en joc les formes quadràtiques, quan serà convenient reduir-se a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

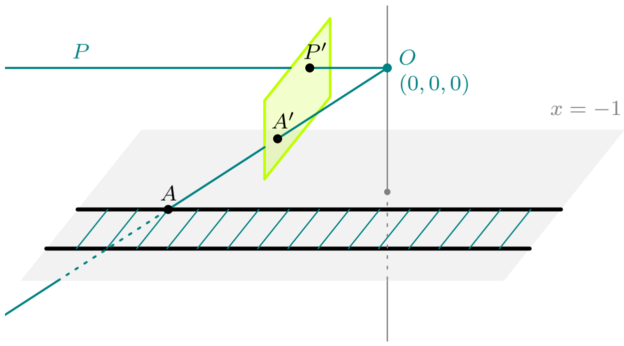


Figura 1.1: Les vies del tren com a exemple de projecció.

1.1 Espai projectiu

Definició 1.1.1 (Espai projectiu). Un espai projectiu sobre un cos $\mathbb{K}$ és una tripleta $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, E, \pi)$, on $\mathbb{P}$ és un conjunt, E és un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$ i $\pi : E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}$ és una aplicació.

1. π és exhaustiva,
2. Per a tota parella de vectors $u, v \in E \setminus \{0\}$, $\pi(u) = \pi(v) \iff u, v$ són proporcionals, és a dir, $\langle u \rangle = \langle v \rangle$.

La dimensió de $\mathbb{P}$ és $\dim E - 1$.

Definició 1.1.2 (Punt). Els elements de $\mathbb{P}$ els anomenem *punts*. Si p és un punt i $p = [u]$ direm que el vector u *representa* el punt p. Notem que $\pi^{-1}(p) = \langle u \rangle \setminus \{0\}$.

Notació 1.1.3. Donat $u \in E$, tal que $\pi(u) = p$, escriurem $[u] = p$. Si $\pi(u) = \pi(v)$, equivalentment ho denotarem per $[u] = [v]$.

Exemple 1.1.4.

1. Podem considerar $P = \emptyset$ com un espai projectiu de dimensió -1: $\mathbb{P} = (\emptyset, \{0\}, \pi)$.
2. *Exemple paradigmàtic.* Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Definim $\mathbb{P}(E)$ com l'espai projectiu $\mathbb{P}(E) = \{\text{rectes vectorials d'}E\}$. Les rectes vectorials són aquelles que passen pel neutre d'E i són subespais d'E de dimensió 1. L'aplicació $\pi : E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(E)$ assigna u al subespai generat per u, $\langle u \rangle$. Aleshores, $(\mathbb{P}(E), E, \pi)$ és un espai projectiu de dimensió n, que normalment denotarem amb $\mathbb{P}(E)$.
3. Un cas particular de l'anterior exemple consisteix en considerar el $\mathbb{K}$-espai vectorial $E = \mathbb{K}^{n+1}$. En aquest cas, posem $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}^n_k$.
4. En el pla afí real $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ fixem un punt O i posem $\mathbb{P} = \{\text{rectes per } O\}$, o sigui $\mathbb{P}$ és el feix de rectes per O. Definim:
$$\begin{array}{rccl} \pi : & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P} \\ & u & \longmapsto & \text{recta } O + \langle u \rangle \end{array}$$
Aleshores, $(\mathbb{P}, \mathbb{R}^2, \pi)$ és un espai projectiu de dimensió 1.

Observació 1.1.5.

1. L'espai afí és una tripleta $\mathbb{A} = (A, F, \phi)$, on F actua sobre A i $\forall p \in \mathbb{A}$ es dona que la restricció $\phi_p : F \longrightarrow \mathbb{A}$ amb l'assignació $u \longmapsto p + u$ és una bijecció. En canvi, si prenem l'espai projectiu $\mathbb{P} = (P, E, \pi)$ tal que $\pi : E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}$ mai no és una bijecció. Això és perquè donat un punt q qualsevol de $\mathbb{P}$, si $v \in \pi^{-1}(\{q\})$, aleshores $\pi^{-1}(\{q\}) = \langle v \rangle \setminus \{0\}$. Al seu torn, hi ha una certa indeterminació de la representació algebraica dels punts $p = [u] = [\lambda u]$ per a tot $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
2. Si el cos $\mathbb{K}$ és infinit, cada punt té una infinitat de vectors que el representa.

1.2 Varietats lineals i fórmula de Grassmann

D'ara en endavant, considerarem $(\mathbb{P}, E, \pi)$ de dimensió n (i.e. $\dim E = n + 1$).

Definició 1.2.1 (Varietat lineal). Una varietat lineal $\mathbb{L} \subset \mathbb{P} = (P, E, \pi)$ és un subconjunt de $\mathbb{P}$ de la forma $\mathbb{L} = \pi(F \setminus \{0\})$ on F és un subespai vectorial d'E. Definirem $\dim \mathbb{L} = \dim F - 1$ i escriurem $\mathbb{L} = [F]$. Les varietats de dimensió 0 són els *punts*. Anomenem *rectes* a les de dimensió 2 i hiperplans a les de dimensió $n - 1$.

Lema 1.2.2. *Sigui $\mathbb{L} = [F]$ una varietat lineal. Aleshores, l'antiimatge per π de $\mathbb{L}$ és $F \setminus \{0\}$.*

Demostració. Per teoria de conjunt tenim sempre la inclusió:
$$\pi^{-1}(\mathbb{L}) = \pi^{-1}(\pi(F \setminus \{0\})) \supset F \setminus \{0\}.$$
Per demostrar la inclusió contrària considerem un vector $u \in \pi^{-1}(\mathbb{L})$ que necessàriament serà no nul. Per definició, $\pi(u) = [u]$ pertany a la imatge de $F \setminus \{0\}$; per tant, existeix un vector no nul $v \in F$ tal que $[u] = [v]$. Per la definició d'espai projectiu tenim que u, v són proporcionals; per tant, $u \in F \setminus \{0\}$. ■

Corol·lari 1.2.3. *Si $\mathbb{L} = [F]$, F està unívocament determinat per $\mathbb{L}$.*

Observació 1.2.4.

1. Les varietats lineals són també espais projectius $\mathbb{L} = (\mathbb{L}, F, \pi|_{F\setminus\{0\}})$. De fet, $[F_1] \subseteq [F_2] \iff F_1 \subset F_2$ fent imatge i antiimatge respecte de π.
2. Les propietats que coneixem dels subespais vectorials impliquem les propietats respectives de les varietats lineals projectives. Per exemple, si $[F_1] \subset [F_2]$ i $\dim[F_1] = \dim[F_2]$, aleshores $[F_1] = [F_2]$; si una varietat $\mathbb{L}$ està continguda en una altra M, aleshores $\dim \mathbb{L} \leq \dim M$ i si la inclusió és estricta aleshores la desigualtat de dimensions és també estricta, etcètera.

Proposició 1.2.5. *La intersecció de dues varietats lineals $[F_1]$ i $[F_2]$ és la varietat lineal $[F_1 \cap F_2]$, és a dir,*

$$[F_1] \cap [F_2] = [F_1 \cap F_2] .$$

Més en general, si $[F_i], i = 1, \ldots, r$ són varietats lineals, aleshores:

$$[F_1] \cap \ldots \cap [F_r] = [F_1 \cap \ldots \cap F_r] .$$

Demostració.

$\boxed{\Rightarrow}$ D'esquerra a dreta, si $x \in [F_1] \cap [F_2]$, aleshores existeixen $u_i \in F_i$ representant el punt x. En particular $[u_1] = [u_2]$ i per la definició d'espai projectiu u_1, u_2 són proporcionals. Per tant $u_i \in F_1 \cap F_2$ i $x \in [F_1 \cap F_2]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ En direcció contrària, com que $F_1 \cap F_2 \subset F_i$ aplicant π tenim que $[F_1 \cap F_2] \subset [F_i]$ i per tant $[F_1 \cap F_2] \subset [F_1] \cap [F_2]$.

El cas de r varietats lineals s'obté aplicant iteradament el resultat de dues varietats i aplicant l'associativitat de la intersecció de subespais vectorials. ■

Definició 1.2.6 (Varietats disjuntes). Notem que si $F_1 \cap F_2 = (0)$, aleshores la intersecció de $[F_1]$ i $[F_2]$ és la varietat lineal $\emptyset$ (de fet, és condició necessària i suficient). En aquest cas, diem que F_1 i F_2 són *disjuntes.*

Definició 1.2.7 (Suma de varietats lineals). La suma de varietats lineals $[F_1], [F_2]$ és la varietat lineal més petita que les conté les dues. La denotarem per $[F_1] \vee [F_2]$ o també $[F_1] + [F_2]$. Sovint direm que és la *varietat lineal generada per* $[F_1]$ *i* $[F_2]$.

Proposició 1.2.8. *La varietat lineal suma és la varietat lineal associada al subespai suma. És a dir, donades dues varietats lineals $[F_1], [F_2]$, tenim que $[F_1] \vee [F_2] = [F_1 + F_2]$. A més a més, la suma de varietats lineals és associativa i si $[F_i]$ amb $i = 1, \ldots, r$, són varietats lineals, aleshores:*

$$\bigvee_{i=1}^{r} [F_i] = [F_1] \vee \cdots \vee [F_r] = [F_1 + \cdots + F_r] = \left[\sum_{i=1}^{r} F_i \right] .$$

Demostració. Com $F_i \subset F_1 + F_2$, la varietat lineal $[F_1 + F_2]$ conté les dues varietats lineals. Anem a veure que és la més petita: si $[G]$ conté $[F_1]$ i $[F_2]$, aleshores $F_i \subset G$ i com $F_1 + F_2$ és el subespai més petit que conté F_1 i F_2, tenim que $F_1 + F_2 \subset G$. Per tant, $[F_1 + F_2] \subset [G]$. L'associativitat de la suma de varietats lineals és un reflex directe de l'associativitat de la suma de subespais vectorials. Aleshores, el cas de r varietats lineals s'obté aplicant iterativament el resultat de dues varietats i aplicant l'associativitat. ∎

Observació 1.2.9. Una aplicació útil d'aquesta proposició és la següent: considerem r punts $p_i = [u_i]$ i pensem en p_i com en una varietat lineal de dimensió 0. Aleshores:

$$\bigvee_{i=0}^{k} p_i = \bigvee_{i=0}^{k} [u_i] = \bigvee_{i=0}^{k} [\langle u_i \rangle] = [\langle u_0 \rangle + \cdots + \langle u_k \rangle] = [\langle u_0, \ldots, u_k \rangle].$$

Teorema 1.2.10 (Fórmula de Grassmann**).** *Siguin $[F]$ i $[G]$ dues varietats lineals en un espai projectiu. Aleshores:*

$$\dim([F] \vee [G]) + \dim([F] \cap [G]) = \dim[F] + \dim[G].$$

Demostració. Recordem la fórmula de Grassmann per a subespais vectorials: $\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$. Com que $[F] \vee [G] = [F + G]$ i $[F] \cap [G] = [F \cap G]$ obtenim $\dim[F + G] + \dim[F \cap G] = \dim[F] + \dim[G]$. Aleshores, com $\dim([A]) = \dim A - 1$ per a tot A subespai vectorial, ens queda:

$$\begin{aligned} &\dim(F + G) - 1 + \dim(F \cap G) - 1 = \dim F - \dim G - 1 \\ &\iff \dim(F + G) - \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G. \end{aligned}$$

la fórmula de Grassmann ja coneguda i demostrada. ∎

Exercici 1.2.11. *Sigui $\mathbb{P}$ un espai projectiu que conté tres plans π_1, π_2, π_3 de manera que $\mathbb{P} = \pi_1 \vee \pi_2 \vee \pi_3$ i no existeix cap recta que talli simultàniament π_1, π_2, π_3. Calculeu la dimensió de $\mathbb{P}$.*

Demostració. El fet que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ no sigui una recta, no vol dir que sigui el buit. A més, els plans són diferents, ja que si no ho fossin, tindríem una recta que talla simultàniament els tres plans. Apliquem Grassmann per a trobar la dimensió:

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{P}) = \dim(\pi_1 \vee \pi_2 \vee \pi_3) &= \dim(\pi_1 \vee \pi_2) + \dim(\pi_3) - \dim((\pi_1 \vee \pi_2) \cap \pi_3) \\ &= 6 - \dim(\pi_1 \cap \pi_2) - \dim((\pi_1 \vee \pi_2) \cap \pi_3). \end{aligned}$$

Si $q \in \pi_1 \cap \pi_2$ i $p \in \pi_3$, tenim que $p \vee q$ talla els tres plans, de manera que $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. D'altra banda, si $p \in (\pi_1 \vee \pi_2) \cap \pi_3$, $p \in \pi_1 \vee \pi_2$ i $p \in \pi_3$. Això vol dir que $p \in p_1 \vee p_2$, tal que $p_1 \in \pi_1$ i $p_2 \in \pi_2$; és a dir, hi ha una recta que talla els tres plans (perquè $p \in \pi_3$). Per tant, $(\pi_1 \vee \pi_2) \cap \pi_3 = \emptyset$. ∎

Exemple 1.2.12.

- Sigui $\mathbb{L} = [F]$ una varietat lineal de dimensió k i sigui p un punt. Observem que $p \cap \mathbb{L}$ és p si $p \in \mathbb{L}$ i $\emptyset$ si $p \notin \mathbb{L}$. Suposem que $p \notin \mathbb{L}$. Aleshores, $\dim(\mathbb{L} \vee p) = \dim \mathbb{L} + \dim P - \dim(p \cap \mathbb{L}) = k + 1$. En efecte, apliquem el teorema a $\mathbb{L}$ i p: a la dreta de la igualtat queda k i a l'esquerra $\dim(\mathbb{L} \vee p) + (-1)$, ja que $\mathbb{L} \cap p = \emptyset$.
- Un cas particular de l'anterior és quan $\mathbb{L} = q$, q un punt. Si $p \neq q$, $p \vee q$, la suma de dos punts diferents, és una recta.
- Siguin r, s dues rectes diferents en un espai projectiu $\mathbb{P}$ de dimensió 2. Aplicant la fórmula de Grassmann tenim que $\dim(r \vee s) + \dim(r \cap s) = \dim r + \dim s$. Notem que $r \vee s$ implica que $r, s \subseteq r \vee s$; per tant, $\dim(r \vee s) \geq 1$. Si és 1, és que $r = r \vee s = s$ (en aquest cas, $r = s = r \vee s = r \cap s$. Si $r \neq s$, $\dim(r \vee s) > 1$, i com $r \vee s$ té, com a molt, la dimensió de l'espai projectiu que la conté tenim que $\dim(r \vee s) = 2$. Obtenim la conseqüència que $\dim(r \cap s) = 0$; és a dir, dues rectes del pla projectiu *sempre es tallen*, no existeixen les rectes paral·leles.
- Si $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$ són dues varietats a $\mathbb{P}^n$ tals que $\dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} = n$, aleshores $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$.
- Si ara agafem dos plans $\pi_1, \pi_2 \subset \mathbb{P}^4$, tenim que $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) = \dim(\pi_1) + \dim(\pi_2) - \dim(\pi_1 \vee \pi_2)$. Si $\dim(\pi_1 \vee \pi_2) = 3$, aleshores, $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) = 1$. Ara, siguin $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}^3$. Un altre cop per Grassmann, $\dim(\ell_1 \cap \ell_2) = \dim(\ell_1) + \dim(\ell_2) - \dim(\ell_1 \vee \ell_2)$. Si $\dim(\ell_1 \vee \ell_2) = 2$, aleshores $\dim(\ell_1 \cap \ell_2) = 0$ i ℓ_1 i ℓ_2 són coplanàries.

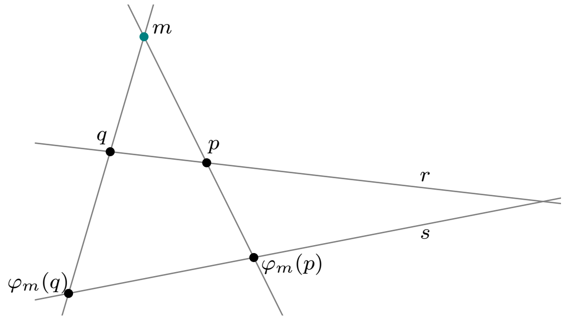


Figura 1.2: Segon exemple.

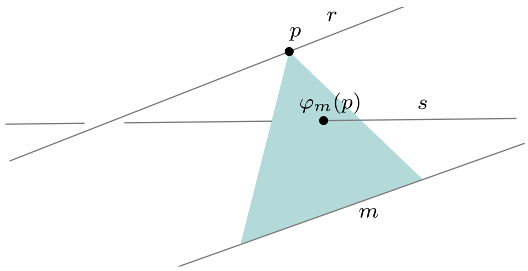


Figura 1.3: Tercer exemple.

1.3 INDEPENDÈNCIA LINEAL DE PUNTS

La fórmula de Grassmann permet introduir de manera geomètrica la noció d'independència lineal de punts. La idea intuïtiva és que dos punts són linealment independents si són diferents, tres si cap d'ells pertany a la recta que generen els altres dos, etcètera. Per expressar millor aquesta idea introduïm la següent definició.

Definició 1.3.1 (Generació d'una varietat lineal a partir de punts). Diem que els punts $p_0, \dots, p_k$ *generen* la varietat lineal $\mathbb{L}$ si $\mathbb{L} = p_0 \vee \dots \vee p_k$. Un conjunt de punts és linealment independent si els punts generen una varietat lineal de la màxima dimensió possible.

Definició 1.3.2 (Punts linealment independents). Diem que una col·lecció de $k+1$ punts $p_0, \dots, p_k$ són linealment independents si $\dim(p_0 \vee \dots \vee p_k) = k$.

Proposició 1.3.3. *Sigui $p_0, \dots, p_k$ una col·lecció de $k+1$ punts de l'espai projectiu. Són equivalents:*

1. *$p_0, \dots, p_k$ són linealment independents (i.e. $\dim(p_0 \vee \dots \vee p_k) = k$).*
2. *$p_i \notin p_0 \vee \dots \vee p_{i-1}$ per a tot $1 \leq i \leq k$.*
3. *Suposem que els vectors u_i representen p_i, respectivament (això és, $p_i = [u_i]$ per a tot i). Aleshores, $u_0, \dots, u_k$ són vectors linealment independents.*

Demostració. Demostrarem que el primer apartat es compleix si, i només si, es compleix el segon i, a la vegada, el segon es compleix si, i només si, ho fa el tercer.

$\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$ Usant la fórmula de Grassmann, tenim que per a tot i, $\dim(p_0 \vee \dots \vee p_i) = \dim(p_0 \vee \dots \vee p_{i-1}) + \varepsilon_i$, on ε_i és 0 o 1 segons si el punt p_i pertany o no a $p_0 \vee \dots \vee p_{i-1}$. Per tant, la dimensió de $p_0 \vee \cdots p_k$ és k si, i només si, per a tots els i tenim $\varepsilon_i = 1$, que és el mateix que dir que es compleix el segon apartat.

$\boxed{2 \Leftrightarrow 3}$ Recordem que $p_0 \vee \dots \vee p_k = [\langle u_0, \dots, u_k \rangle]$:

$$p_0 \vee \dots \vee p_k = [u_0] \vee \dots \vee [u_k] = [\langle u_0 \rangle] \vee \dots \vee [\langle u_k \rangle] = [\langle u_0 \rangle + \dots + \langle u_k \rangle].$$

Per tant, els punts són linealment independents si, i només si, $\dim(\langle u_0, \dots, u_k \rangle) = k+1$ que equival a la independència lineal dels vectors. ■

Observació 1.3.4. La proposició anterior ens diu que la noció geomètrica d'independència lineal de punts i la noció algebraica d'independència lineal de vectors (els representants dels punts) coincideixen. D'altra banda, la nostra definició no depèn de l'ordre amb què es considerin els punts.

Corol·lari 1.3.5. *Una subcol·lecció d'una col·lecció del punts linealment independents és linealment independent.*

Demostració. En efecte, siguin $p_0, \dots, p_k$ punts linealment independents. Com que la noció no depèn de l'ordre, podem suposar, reordenant, que la subcol·lecció que estem considerant és $p_0, \dots, p_r$. Aleshores $p_i \notin p_0 \vee \ldots \vee p_{i-1}$ per a tot $i = 1, \dots, k$ i per tant el mateix és cert per a tot $i = 1, \dots, r$ i per la proposició anterior $p_0, \dots, p_r$ són linealment independents. ■

Definició 1.3.6 (Varietats suplementàries). Dues varietats lineals $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$ són varietats suplementàries si se satisfan com a mínim dues de les propietats següents:

1. $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ és tot l'espai projectiu.

2. $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset$.
3. $\dim(\mathbb{L}) + \dim(\mathbb{M}) = n - 1$.

La noció de varietats suplementàries és la versió geomètrica de la suma directa de subespais. En efecte, suposem que E és l'espai vectorial associat a l'espai projectiu i posem $\mathbb{L} = [F]$, $\mathbb{M} = [G]$. Aleshores, la primera condició equival a què $F + G = E$ i la segona, $F \cap G = (0)$;

$$\left\{\begin{matrix} F + G = E \\ F \cap G = (0) \end{matrix}\right\} \text{ i } \left\{\begin{matrix} \dim F = \dim \mathbb{L} + 1 \\ \dim G = \dim \mathbb{M} + 1 \end{matrix}\right\}$$
$$\implies \dim F + \dim G = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} + 2 = n + 1 = \dim E.$$

En definitiva, si $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$ són suplementaris a $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, E, \pi)$, aleshores $F \oplus G = E$.

Proposició 1.3.7. *Sigui $\mathbb{L}$ una varietat lineal de dimensió k. Aleshores:*

1. *Existeixen $k + 1$ punts linealment independents p_i tals que $\mathbb{L} = p_0 \vee \cdots \vee p_k$.*
2. *Existeix una varietat lineal $\mathbb{M}$ tal que $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$ són suplementàries.*

Demostració.

1. Expressem $\mathbb{L}$ com $[F]$, on F és un subespai de dimensió $k + 1$. Sigui $u_0, \ldots, u_k$ una base de F i posem $p_i = [u_i], i = 1, \ldots, k$. Aleshores, $\mathbb{L} = [F] = \langle u_0 \rangle + \cdots + \langle u_k \rangle$, i això últim és igual a $p_0 \vee \cdots \vee p_k$.
2. Usem el raonament anterior i posem $\mathbb{L}$ com a varietat lineal generada per certs punts p_i. Siguin u_i vectors representant els punts p_i. Aleshores, $u_0, \ldots, u_k$ són linealment independents i podem ampliar fins a una certa base $u_0, \ldots, u_n$ amb $n - k$ vectors. Aleshores, definint $F = \langle u_0, \ldots, u_k \rangle$ i $G = \langle u_{k+1}, \ldots, u_n \rangle$ tenim que $E = F \oplus G$ i $\mathbb{L} = [F]$. Per tant, $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M} = [G]$ són suplementàries. ■

1.4 Figures lineals

Una figura lineal és una col·lecció finita de varietats lineals. Per exemple, un triangle el podem pensar com la figura lineal donada per tres punts linealment independents o per tres rectes no concurrents dins d'un pla. Per no haver de distingir casos, el que farem és pensar el triangle com la figura lineal formada pels tres punts (o vèrtexs), les tres rectes (o costats) i el propi pla que els conté (que normalment s'omet). De la mateixa manera, un tetràedre és la figura lineal formada por 4 punts linealment independents $p_0, \ldots, p_3$ i totes les varietats lineals que contenen aquests punts: les arestes $p_i \vee p_j$, les cares $p_i \vee p_j \vee p_k$ i la varietat lineal de dimensió 3 generada pels 4 punts.

Definició 1.4.1 (k-símplex). Un k-símplex és la figura lineal formada per $k+1$ punts linealment independents i per totes les varietats lineals generades per subcol·leccions d'aquests punts. Diem *cara* de dimensió i a la varietat lineal de dimensió i generada per $i + 1$ punts dels punts inicials.

Definició 1.4.2 (Quadrivèrtex). Un quadrivèrtex és una figura lineal en un pla projectiu formada per quatre punts $p_1, \ldots, p_4$ no tres d'ells alineats i les sis rectes rectes $p_i \vee p_j$. Observem que aquestes sis rectes s'interseqüen en set punts dels quals quatre són els punts p_i inicials. És un exercici senzill veure que els tres punts nous són linealment independents i per tant determinen un triangle al que anomenem *triangle diagonal del quadrivèrtex.*

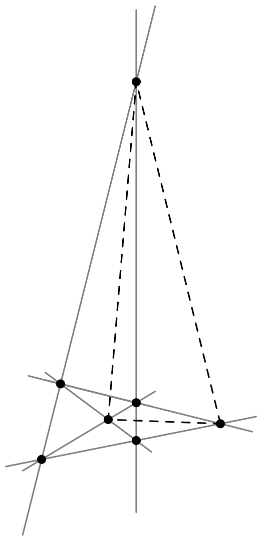


Figura 1.4: Representació d'un quadrivèrtex (en discontinu, el *triangle diagonal*).

Definició 1.4.3 (Quadrilàter complet). Un quadrilàter complet és una figura lineal en un pla projectiu formada per quatre rectes l_i no tres d'elles concurrents (anomenats *costats*) junt amb els sis punts $l_i \cap l_j$ on es tallen anomenats *vèrtexs.* Diem que dos vèrtexs són *oposats* si no estan en un mateix costat. Els tres parells de vèrtexs oposats determinen un triangle que anomenem *triangle diagonal del quadrilàter complet.*

1.5 Projectivitats

Les aplicacions lineals entre espais vectorials indueixen transformacions entre els espais projectius associats. Més precisament, donada una aplicacions lineal $f : E_1 \longrightarrow E_2$ entre espais vectorials podem definir:

$$\begin{array}{rccc} [f]: & \mathbb{P}(E_1) & \longrightarrow & \mathbb{P}(E_2) \\ & u & \longmapsto & [f]([u]) := [f(u)]. \end{array}$$

Observem que si u i v representen el mateix punt (o sigui $[u] = [v]$) aleshores $f(u)$ i $f(v)$ són proporcionals per la linealitat de f, per tant $[f(u)] = [f(v)]$ i la definició no depèn d'eleccions.

Observació 1.5.1. Tot i així hi ha un aspecte que hem passat per alt: es podria donar el cas de que $f(u) = 0$ i aleshores $[f(u)]$ no tindria sentit. Per evitar això posarem restriccions a l'aplicació lineal f. Seria suficient demanar que fos injectiva (recordem que és equivalent a demanar que $\ker(f) = \{0\}$), però vist els tipus d'exemples que volem tractar anirem més enllà i demanarem que sigui bijectiva, és a dir un isomorfisme. En particular, $\dim E_1 = \dim E_2$.

Definició 1.5.2 (Projectivitat)**.** Siguin $\mathbb{P}_1 = (\mathbb{P}_1, E_1, \pi_1)$ i $\mathbb{P}_2 = (\mathbb{P}_2, E_2, \pi_2)$ dos espais projectius de la mateixa dimensió n. Una *projectivitat* entre ells és una aplicació $\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ tal que existeix un isomorfisme $f : E_1 \longrightarrow E_2 \mid \varphi([u]) = [f(u)]$, per a tot vector no nul $u \in E_1$. També podem escriure $\varphi(\pi_1(u)) = \pi_2(f(u))$; és a dir, que el diagrama següent commuta:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "\pi_1"] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"'] \\
\mathbb{P}_1 \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{P}_2
\end{tikzcd}$$

Figura 1.5: Diagrama de projectivitats

Observació 1.5.3.

- Volem una aplicació lineal f entre E_1 i E_2 i també $\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ tal que $\varphi \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$, conseqüència que deriva directament de la linealitat d'f i les propietats de les projeccions π_1, π_2.
- Per demostrar que ha de ser injectiva: sigui $v \in \ker(f)$, tal que $v \neq 0$. Aleshores, $\varphi([v]) = [f(v)] = [0]$ i això no està definit, de manera que hem arribat a una contradicció i $\ker(f) = \{0\}$.
- És fàcil comprovar, usant que f és un isomorfisme, que l'aplicació φ és bijectiva.
- Donada una projectivitat φ, l'isomorfisme f és únic llevat de múltiple; per això, posarem $\varphi = [f]$.

En efecte, si tinguéssim dos isomorfismes f, g amb $\varphi([u]) = [f(u)] = [g(u)]$, aleshores $f(u)$ i $g(u)$ serien sempre proporcionals. Una altra forma de dir el mateix és que tots els vectors de E_1 són propis per a l'aplicació $h = g^{-1} \circ f$. És un resultat ben conegut d'àlgebra lineal que els únics endomorfismes que tenen tots els vectors propis són les homotècies. Per tant, $h = \lambda \cdot Id$ i $f = \lambda g$[1].

Com f és isomorfisme de $E_1 \longrightarrow E_2$, per tot vector $v \in E_1$ no nul es dona que $f(v)$ és no nul i, per tant, representa un punt p' en l'espai d'arribada. En aquest sentit, la imatge d'un múltiple no nul d'v λv és $f(\lambda v) = \lambda f(v)$, encara un representant del punt p'. Així, $[f(v)]$ és un punt que depèn únicament de $p = [v]$ i no en el seu representant v.

Proposició 1.5.4. *Donada una projectivitat com a la definició es tenen les propietats següents:*

1. *La identitat és la projectivitat associada a la identitat entre espais vectorials.*
2. *La composició de projectivitats és projectivitat. Més concretament* $[f] \circ [g] = [f \circ g]$.

[1] Com que tots els vectors són propis, en particular ho són els d'una base $(e_0, \dots, e_n)$; és a dir, $h(e_i) = \lambda_i e_i$. Com que $e_0 + \cdots + e_n$ també és propi, $h(e_0 + \cdots + e_n) = \lambda(e_0 + \cdots + e_n)$. Aleshores, el fet que els e_i siguin linealment independents implica que $\lambda = \lambda_0 = \cdots = \lambda_n$. Per tant, h és una homotècia.

3. *La inversa de la projectivitat* $[f]$ *és la projectivitat* $[f^{-1}]$.
4. *Sigui* $\mathbb{L} = [F]$ *una varietat lineal de* $\mathbb{P}_1$ *de dimensió* k*, aleshores* $\varphi(L) = [f(F)]$*. En particular la imatge de* L *també és una varietat lineal de dimensió* k*.*
5. *Les imatges de punts linealment independents són linealment independents (i les imatges de punts linealment dependents són linealment dependents).*

Demostració. El primer apartat es dedueix de la definició:

$$\varphi = [f] = [\lambda f] = [\lambda Id] \circ [f] = [Id] \circ [f] = [f].$$

Per al segon apartat, observem que:

$$([f] \circ [g])([u]) = [f]([g]([u])) = [f]([g(u)]) = [f(g(u))] = [f \circ g][u].$$

L'apartat tres és conseqüència dels dos anteriors. Per provar el quart observem que els punts de $\varphi(L) = [f][F]$ són, per definició, els punts de la forma $[f(u)]$ on $u \in F$, per tant tenim la igualtat. Per provar l'últim, siguin ara $p_i = [u_i]\,, i = 0, \dots, k$ punts linealment independents, aleshores els vectors u_i són linealment independents. Com que f és un isomorfisme també els vectors $f\,(u_i)$ són linealment independents. Per tant $[f\,(u_i)] = \varphi\,(p_i)$ són linealment independents. ■

De la quarta propietat s'obté que les projectivitats envien les interseccions de varietats lineals a les interseccions de les varietats lineals imatges, el mateix per a les sumes de varietats lineals i, a més, que respecten les inclusions. Tot això se satisfà perquè les propietats anàlogues per als subespais vectorials i les aplicacions lineals són certes.

Proposició 1.5.5. *Siguin* $f, g : E_1 \longrightarrow E_2$*. Si* $[f] = [g]$*, aleshores* $f = \lambda g$*.*

Demostració. Sigui $e_1, \dots, e_n$ una base de E_1. Per definició podem fer $[f(e_i)] = [f][e_i] = [g][e_i] = [g(e_i)]$, de manera que $f(e_i) = \lambda_i g(e_i)$, per a tot $i = 1 \div n$, on λ_i poden no coincidir entre ells, pel que *a priori* no es compleix l'enunciat. Considerem, però, $[f(e_1 + \cdots + e_n)]$:

$$[f(e_1 + \cdots + e_n)] = \begin{cases} [f(e_1) + \cdots + f(e_n)] = [f(e_1)] = [\lambda_1 g(e_1) + \cdots + \lambda_n g(e_n)] \\ [f][e_1 + \cdots + e_n] = [g][e_1 + \cdots + e_n] = [g(e_1 + \cdots + e_n)] = [g(e_1 + \cdots + e_n)] \end{cases}$$
$$\implies \lambda_1 g(e_1) + \cdots + \lambda_n g(e_n) = \lambda(g(e_1) + \cdots + g(e_n)) = \lambda g(e_1) + \cdots + \lambda g(e_n).$$

Hem usat que, com f, g són isomorfismes, $e_1, \dots, e_n$ base de E_1 ho és si, i només si, $g(e_1), \dots, g(e_n)$ és base de E_2[2]. Hem obtingut que $\lambda = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ i, en efecte, $[f] = [g]$ implica $f = \lambda g$ per a cert $\lambda \in \mathbb{K}$. ■

Definició 1.5.6 (Perspectiva de centre $\mathbb{M}$)**.** Siguin dues varietats lineals $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ diferents i de la mateixa dimensió k en un espai projectiu fixat $(\mathbb{P}, E, \pi)$ de dimensió n. Sigui $\mathbb{M}$ una varietat lineal suplementària de $\mathbb{L}_1$ i $\mathbb{L}_2$; és a dir, $\dim M = n - k - 1$ i $M \cap \mathbb{L}_i = \emptyset$. Anomenem *perspectiva de centre* $\mathbb{M}$ a l'aplicació:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\mathbb{M}} : & \mathbb{L}_1 & \longrightarrow & \mathbb{L}_2 \\ & p & \longmapsto & (p \vee \mathbb{M}) \cap \mathbb{L}_2 \end{array}$$

[2] i, a més, $[g(e_1 + \cdots + e_n)] = [g(e_1) + \cdots + g(e_n)]$.

Proposició 1.5.7. *L'aplicació $\varphi_{\mathbb{M}}$ està ben definida (és a dir, $(p \vee \mathbb{M}) \cap \mathbb{L}_2$ és un punt) i és una projectivitat.*

Demostració. Hem de trobar $f : F_1 \longrightarrow F_2$ lineal tal que $\varphi = [f]$. Implícitament, hem de veure que φ està ben definida; és a dir, que la imatge d'un punt és un punt, recta-recta, etc. Observem que $p \notin \mathbb{M}$ (ja que $\mathbb{M}$ no talla $\mathbb{L}_1$ i p és un punt de $\mathbb{L}_1$), per tant la dimensió de $\mathbb{M} \vee p$ és $n-k$ (una unitat més que la de $\mathbb{M}$). D'altra banda, $\mathbb{M} \vee \mathbb{L}_2 = \mathbb{P}$ per ser suplementàries i, per tant, també $\mathbb{P} = M \vee p \vee \mathbb{L}_2 \supseteq M \vee \mathbb{L}_2$. Així doncs, $\dim M \vee p \vee L_2 = n$. Usant la fórmula de Grassmann tenim que $\dim(M \vee p) \cap \mathbb{L}_2 = n - k + k - n = 0$.
Per veure que la perspectiva és una projectivitat usem la notació següent: $\mathbb{L}_i = [F_i]$ i $\mathbb{M} = [G]$. Per hipòtesis $E = F_i \oplus G$. Donat un vector $u_1 \in F_1$ el descomponem únicament usant la suma directa $E = F_2 \oplus G$ en $u_1 = u_2 + v$. És fàcil veure, usant la unicitat de la descomposició, que l'aplicació $f : F_1 \longrightarrow F_2, f(u_1) = u_2$ és lineal.
Volem veure que $\lambda u + w \longmapsto \lambda f(u) + f(w)$. Sigui $\lambda u + w \in F_1$ i prenem $u = v + u_2$ i $w = z + w_2$, $v, z \in G$ i $u_2, w_2 \in F_2$. Per tant:

$$\lambda u + w = \lambda(v + u_2) + z + w_2 - \underbrace{\lambda v + z}_{\in G} + \underbrace{\lambda u_2 + w_2}_{\in F_2}.$$

L'aplicació lineal f també es pot veure com la composició dels isomorfismes:

$$F_1 \longrightarrow E/G \longrightarrow F_2,$$

provinents del fet que $E = F_i \oplus G$ implica que $F_i \cong E/G$ (l'aplicació està definida per la composició $F_i \hookrightarrow E \longrightarrow E/G$, el nucli és $F_i \cap G = \{0\}$ i tots dos espais tenen la mateix dimensió).
Veiem finalment que $[f]$ coincideix amb la perspectiva $\varphi_{\mathbb{M}}$: en efecte, sigui $p = [u_1] \in \mathbb{L}_1$, aleshores $[u_2] \in \mathbb{L}_2$ i també $[u_2] = [u_1 - v] \in [\langle u_1 \rangle + G] = \mathbb{M} \vee p$. Per tant $\varphi_{\mathbb{M}}(p) = [u_2] = [f(u_1)]$ i $\varphi_{\mathbb{M}} = [f]$. ■

Observació 1.5.8. De la demostració, pot semblar que l'aplicació lineal f associada a $\varphi_{\mathbb{M}}$ és única, però hem vist que només ho és llevat de constant. Això ve del fet que hem escollit descompondre el vector u_1 a $F_2 \oplus G$, però haguéssim pogut triar el vector λu_1 amb $\lambda \in \mathbb{K}^*$ fixada. En efecte, la inclusió $F_1 \hookrightarrow E$ no és única, ja que podem triar $u_1 \longmapsto \lambda u_1$. I com $[\lambda u_1] = [u_1]$, és a dir, $\mathbb{L}_1 = [F_1] = [\lambda F_1]$, la inclusió $u_1 \longmapsto u_1$ deixa de ser privilegiada.

1.6 Exercicis finals

Exercici 1.6.1. *Siguin V, W varietats lineals suplementàries de $\mathbb{P}^n$ ($V \vee W = \mathbb{P}^n, V \cap W = \emptyset$). Demostreu que per a qualsevol punt $p \notin V \cup W$, existeix una única recta que passa per p i talla V i W.*

Exercici 1.6.2. *Es consideren en un espai projectiu $\mathbb{P}^n$ de dimensió n tres rectes l_1, l_2, l_3 disjuntes dues a dues. Demostreu que:*

1. $\dim(l_1 \vee l_2 \vee l_3) = 5$ *si i només si no existeix cap recta l tal que $l \cap l_i \neq \emptyset, i = 1, 2, 3$.*
2. $\dim(l_1 \vee l_2 \vee l_3) = 4$ *si i només si existeix una única recta l tal que $l \cap l_i \neq \emptyset, i = 1, 2, 3$.*
3. $\dim(l_1 \vee l_2 \vee l_3) = 3$ *si i només si existeixen al menys dues rectes l tals que $l \cap l_i \neq \emptyset, i = 1, 2, 3$.*

Demostració. Primer fem una petita observació sobre que les rectes són disjuntes dues a dues, que per tant $\dim(l_1 \vee L_2) = \dim(l_1) + \dim(l_2) - \dim(l_1 \cap l_2) = 1 + 1 - (-1) = 3$. Per tant $\dim(l_1 \vee l_2 \vee l_3) = \dim(l_1 \vee l_2) + \dim(l_3) - \dim((l_1 \vee l_2) \cap l_3) = 3 + 1 - \dim((l_1 \vee l_2) \cap l_3)$. Sabem que aquesta última dimensió $\dim((l_1 \vee l_2) \cap l_3)$ com a mínim pot ser -1 (el conjunt buit) i com a màxim pot ser 1 , ja que $\dim(l_3) = 1$ i $(l_1 \vee l_2) \cap l_3 \subseteq l_3$. Aleshores tenim tres possibilitats:

1. Si $\dim((l_1 \vee l_2) \cap l_3) = -1 \iff \dim(l_1 \vee l_2 \vee l_3) = 4 - \dim((l_1 \vee l_2) \cap l_3) = 5$ aleshores si tenim que $(l_1 \vee l_2) \cap l_3 = \emptyset$ llavors no existeix cap recta que talli les tres rectes, si existís, i fossin p_1 i p_2 els punts de tall respectius d'aquesta recta i l_1 i l_2, tindríem que $p_1 \vee p_2 \subseteq l_1 \vee l_2$, però com que $(l_1 \vee l_2) \cap l_3 = \emptyset$, aquesta recta no tallaria l_3 i per tant no existeix.
2. Si $\dim((l_1 \vee l_2) \cap l_3) = 0 \iff \dim(l_1 \vee l_2 \vee l_3) = 4 - \dim((l_1 \vee l_2) \cap l_3) = 4$ per tant $(l_1 \vee l_2) \cap l_3 = \{p\}$ és un punt. Com que les tres rectes són disjuntes dues a dues, aquest punt no pertany ni a l_1 ni a l_2 ja que $p \in l_3$ per definició. Aleshores podem aplicar l'exercici 1.3, considerant que les dues varietats lineals suplementàries són l_1 i l_2 i per tant l'espai total és $l_1 \vee l_2$, tenim que existeix una única recta tal que talla l_1, l_2 i passa per el punt p. Com que només hi ha un punt que passa per l_3 i que també està a $l_1 \vee l_2$, tenim que no hi ha més rectes que tallin les tres rectes simultàniament.
3. Si $\dim((l_1 \vee l_2) \cap l_3) = 1 \iff \dim(l_1 \vee l_2 \vee l_3) = 4 - \dim((l_1 \vee l_2) \cap l_3) = 3$ llavors tenim que $l_3 \subseteq l_1 \vee l_2$ ja que $\dim(l_3) = 1$. Com que són disjuntes dues a dues, aplicant l'exercici 1.3 considerant com l'apartat anterior, que les suplementàries són l_1 i l_2, agafem dos punts diferents $p, q \in l_3$, aleshores existeixen dues rectes que tallen simultàniament les tres rectes i aquestes dues rectes són diferents, ja que en cas contrari el punt p hauria de pertànyer a la recta que passa pel punt q i com que hem suposat que els punts eren diferents, tenim que les dues rectes serien $p \vee q = l_3$ ja que $p, q \in l_3$. Com que per hipòtesi les tres rectes són disjuntes arribem a una contradicció, ja que l_3 hauria de tallar les altres dues rectes. ∎

Exercici 1.6.3. *Siguin $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \mathbb{L}_3$ tal que $\dim \mathbb{L}_1 = \dim \mathbb{L}_2 = \dim \mathbb{L}_3 = d$ i $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2 \vee \mathbb{L}_3$, $\mathbb{L}_2 \subset \mathbb{L}_1 \vee \mathbb{L}_3$ i $\mathbb{L}_3 \subset \mathbb{L}_1 \vee \mathbb{L}_2$. Demostrar que $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = V_{12}, \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 = V_{23}$ i $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3 = V_{13}$ i $\dim(V_{12}) = \dim(V_{13}) = \dim(V_{23})$.*

Demostració.

$\boxed{\Rightarrow}$ Apliquem Grassmann: com $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2 \vee \mathbb{L}_3$, $\dim \mathbb{L}_1 \vee (\mathbb{L}_2 \vee \mathbb{L}_3) = \dim(\mathbb{L}_2 \vee \mathbb{L}_3)$, i aquesta última és $\dim(\mathbb{L}_2) + \dim(\mathbb{L}_3) - \dim(\mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3)$. Per tant, mirem $\mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3$:

$$\dim(\mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3) = \dim(\mathbb{L}_2) + \dim(\mathbb{L}_3) - \dim(\mathbb{L}_1 \vee \mathbb{L}_2 \vee \mathbb{L}_3).$$

En general, $\dim(\mathbb{L}_i \cap \mathbb{L}_j), i \neq j$ tenim que és igual a $\dim(\mathbb{L}_i) + \dim(\mathbb{L}_j) - \dim(\mathbb{L}_1 \vee \mathbb{L}_2 \vee \mathbb{L}_3) = 2d - d'$, on d' és $\dim(\mathbb{L}_1 \vee \mathbb{L}_2 \vee \mathbb{L}_3)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\mathbb{P}^3$ té tres rectes concurrents no coplanàries l_1, l_2, l_3 tal que $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = \emptyset$. ∎

Exercici 1.6.4. *Siguin V_1, V_2, V_3 varietats lineals de dimensió tres de $\mathbb{P}^5$ de manera que les tres unions $V_i \vee V_j, i \neq j$, són hiperplans diferents dos a dos. Calculeu la dimensió de $V_1 \cap V_2 \cap V_3$.*

Demostració. Por un lado, por Grassmann tenemos que para $i \neq j$

$$\dim(V_i \vee V_j) = 4 = \dim(V_i) + \dim(V_j) - \dim(V_i \cap V_j) = 3 + 3 - \dim(V_i \cap V_j) \Rightarrow \dim(V_i \cap V_j) = 2$$

y por lo tanto si $i \neq j$, las variedades lineales $V_i \cap V_j$ son planos. Por otro lado, otra vez por Grassmann y usando que $\dim(V_2 \cap V_3) = 2$, obtenemos que

$$\dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \dim(V_1) + \dim(V_2 \cap V_3) - \dim(V_1 \vee (V_2 \cap V_3)) = 3 + 2 - \dim(V_1 \vee (V_2 \cap V_3))$$

Para calcular $\dim(V_1 \vee (V_2 \cap V_3))$ observemos que

$$\left.\begin{array}{l} V_1 \vee (V_2 \cap V_3) \subseteq (V_1 \vee V_2) \\ V_1 \vee (V_2 \cap V_3) \subseteq (V_1 \vee V_3) \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 \vee (V_2 \cap V_3) \subseteq (V_1 \vee V_2) \cap (V_1 \vee V_3)$$

y por lo tanto tenemos que

$$V_1 \subseteq V_1 \vee (V_2 \cap V_3) \subseteq (V_1 \vee V_2) \cap (V_1 \vee V_3)$$

de lo que se deduce que

$$\begin{gathered} \dim(V_1) \leq \dim(V_1 \vee (V_2 \cap V_3)) \leq \dim((V_1 \vee V_2) \cap (V_1 \vee V_3)) \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 \leq \dim(V_1 \vee (V_2 \cap V_3)) \leq \dim((V_1 \vee V_2) \cap (V_1 \vee V_3)) \\ = \dim(V_1 \vee V_2) + \dim(V_1 \vee V_3) - \dim(V_1 \vee V_2 \vee V_1 \vee V_3) = 4 + 4 - 5 = 3, \end{gathered}$$

donde $\dim(V_1 \vee V_2 \vee V_1 \vee V_3) = 5$, ya que por hipótesis $V_1 \vee V_2$ y $V_1 \vee V_3$ son hiperplanos distintos. Por lo tanto, tenemos que $\dim(V_1 \vee (V_2 \cap V_3)) = 3$ y $\dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = 3 + 2 - 3 = 2$. ∎

Exercici 1.6.5. *Donats tres plans π_1, π_2, π_3 de $\mathbb{P}^n$ que es tallen dos a dos en tres punts no alineats, proveu que existeix un únic pla π que talla π_1, π_2, π_3 en rectes.*

Demostració. Analitzem què ens demana l'enunciat: la configuració dels tres plans ens permet dir que $\pi_1 \cap \pi_2 = \{p_{12}\}$, $\pi_1 \cap \pi_3 = \{p_{13}\}$ i $\pi_2 \cap \pi_3 = \{p_{23}\}$, essent aquests tres punts linealment independents (i.e. formen un triangle). Volem arribar a veure que $\pi = p_{12} \vee p_{13} \vee p_{23}$. D'aquesta manera, $\pi \cap \pi_1 = \ell_1$, $\pi \cap \pi_2 = \ell_2$ i $\pi \cap \pi_3 = \ell_3$, totes elles rectes, tal com volem demostrar. Suposem que existeix tal pla π. Aleshores:

$$\ell_1 \cap \ell_2 = \pi \cap \pi_1 \cap \pi_2 \subset \pi_1 \cap \pi_2 = \{p_{12}\} \implies \{p_{12}\} \subset \ell_1 \cap \ell_2 \subset \pi \implies p_{12} \in \pi.$$

Hem usat que, com $\ell_1, \ell_2 \subset \pi$ (la intersecció $\pi \cap \pi_i$ és justament ℓ_i), $\ell_1 \cap \ell_2 \subset \pi$. Es pot raonar anàlogament per a p_{ij}, i, j restants. Finalment, podem posar $\pi = p_{12} \vee p_{13} \vee p_{23}$. ∎

Observació 1.6.6. Ho podem mirar al revés, sigui π el pla tal que $\pi = p_{12} \vee p_{13} \vee p_{23}$ (com són tres punts no alineats, $\dim \pi = 2$). Calculem $\pi \cap \pi_1$:

$$\left.\begin{array}{r} p_{12}, p_{13} \in \pi_1 \cap \pi \\ p_{12} \vee p_{13} \subset \pi_1 \cap \pi \subset \pi_1 \end{array}\right\} \implies \dim(\pi_1 \cap \pi) = 1 \text{ (és una recta).}$$

Aquí hem usat dos fets. Primer, que $p_{12}, p_{13} \in \pi_1$ perquè pertanyen a les interseccions respectives i $p_{12}, p_{13} \in \pi$ perquè $\pi = p_{12} \vee p_{13} \vee p_{23}$ (vaja, per definició). Si la dimensió de $\pi_1 \cap \pi$ fos 2, aleshores $\pi = \pi_1$ i $p_{23} \in \pi_1$, la qual cosa és absurda.
Pel que fa a la unicitat, sigui M un pla que talla π_1, π_2, π_3 en rectes. Volem veure $M = \pi$. És suficient demostrar que $p_{ij} \in M$ per a tot i, j. Posem $\ell_i = M \cap \pi_i \subset M$. En efecte, M és un pla *projectiu*, pel que dues rectes en M s'han de tallar, i.e. $\ell_1 \cap \ell_2 \in M$ i $\ell_1 \cap \ell_2 \neq \emptyset$.

Exercici 1.6.7. *En un espai projectiu $\mathbb{P}$ es consideren tres varietats lineals A, B, C disjuntes dues a dues tals que* $\dim A + \dim B + \dim C = \dim(A \vee B \vee C) - 1$. *Demostreu que existeix una única varietat lineal C' de $\mathbb{P}$ que compleix totes les condicions següents:*

1. $C \subset C'$,
2. $\dim C' = \dim C + 1$,
3. $A \cap C' \neq \emptyset$ *i* $B \cap C' \neq \emptyset$.

Demostració. Sabem per Grassmann que $\dim(A \vee B \vee C) = \dim(A \vee B) + \dim C - \dim(A \vee B) \cap C$. Com que totes són disjuntes dues a dues, en particular $\dim(A \vee B) = \dim A + \dim B + 1$. Substituint, obtenim que $\dim(A \vee B) \cap C = 0$ i, per tant, que $(A \vee B) \cap C$ és un punt, que direm p. Observem que $p \notin A \cup B$[3], de manera que podem aplicar 1.6.1 i existeix una única recta ℓ tal que $p \in \ell, \ell \cap A \neq \emptyset$ i $\ell \cap B \neq \emptyset$. Provem que $C' = C \vee \ell$:

$$\dim C' = \dim C + \dim \ell - \dim(C \cap \ell) = \dim C + 1.$$

Per veure la unicitat, suposem que existeix C' tal que $C' = C \vee \ell'$ i $\ell' \cap C \neq \emptyset$. Per una banda, $C' \cap A = p_1$ i $C' \cap B = p_2$, de manera que $\ell' = p_1 \vee p_2$. De l'altra, prenem q tal que $q \in \ell' \cap C$ i $q \in C \cap (A \vee B)$. Acabem obtenint que $p = q$ i, $\ell = \ell'$, com volíem. ∎

[3] si ho estigués, $p \in A$ o bé $p \in B$ (no podria estar als dos alhora perquè la intersecció és buida), però com també $p \in C$ arribaríem a contradicció per la disjunció dos a dos.

II

Coordenades projectives i raó doble

2.1 Sistemes de referència projectius

Definició 2.1.1 (Referència projectiva). Una *referència projectiva* (o *sistema de referència projectiu*) en un espai projectiu $\mathbb{P}$ de dimensió n és una col·lecció ordenada de $n+1$ punts linealment independents $p_0, \ldots, p_n = [u_0], \ldots, [u_n]$ i un punt A, anomenat *punt unitat*, que satisfà la propietat:

$$A \notin p_0 \vee \cdots \vee \widehat{p_i} \vee \cdots \vee p_n,$$

per a tot $i = 0, \ldots, n$. Com $u_0, \ldots, u_n$ és una base d'E, posarem $\mathcal{R} = (p_0, \ldots, p_n; A)$ per a denotar la referència. Anomenem *vèrtexs* de la referència als punts p_i.

Definició 2.1.2 (Base adaptada). Donada una referència projectiva $\mathcal{R} = (p_0, \ldots, p_n; A)$ en un espai projectiu $(\mathbb{P}, E, \pi)$, diem que una base de E, $e_0, \ldots, e_n$ és una *base adaptada* a $\mathcal{R}$ si satisfà les condicions següents:

1. $\pi(e_0) = p_0, \ldots, \pi(e_n) = p_n$ i
2. $\pi(e_0 + \cdots + e_n) = A$ (en altres paraules, imposem $A = [p_0 + \cdots + p_n]$).

Per deduir les coordenades d'un punt respecte a una referència $\mathcal{R}$ utilitzarem una base adaptada i usarem les coordenades d'un vector que representa el punt en funció d'aquesta base. Per aquest motiu, hem de demostrar primer l'existència de bases adaptades.

Proposició 2.1.3. *Donada una referència projectiva $\mathcal{R}$ en un espai projectiu $(\mathbb{P}, E, \pi)$, tenim que:*

1. *Existeix una base $e_0, \ldots, e_n$ de E adaptada a la referència $\mathcal{R}$.*
2. *Si $v_0, \ldots, v_n$ és una altra base també adaptada a $\mathcal{R}$, aleshores existeix una constant $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ de manera que $v_i = \lambda e_i$ per a tot $i = 0, \ldots, n$.*

Demostració.

1. Representem p_i per vectors e'_i qualssevol: $p_i = [e'_i]$. Aleshores, com els punts p_i són linealment independents, tenim que $e'_0, \ldots, e'_n$ és una base de E. Sigui u un vector tal que $A = [u], u \in E$, aleshores podem posar $u = a_0 e'_0 + \ldots + a_n e'_n$ per a certs $a_0, \ldots, a_n$. Observem que totes les constants a_i han de ser no nul·les ja que si $a_i = 0$, aleshores $u \in \langle e'_0, \ldots, \widehat{e'_i}, \ldots, e'_n \rangle$ i per tant, aplicant π, $A \in p_0 \vee \ldots \vee \widehat{p_i} \vee \ldots \vee p_n$, que ens portaria a contradicció. Definim doncs $e_i = a_i e'_i$. Com les constants són totes diferents de zero tenim que $e_0, \ldots, e_n$ és una base i, per construcció, $u = e_0 + \ldots + e_n$.
2. Si $v_0, \ldots, v_n$ és una altra base adaptada, aleshores $[v_i] = p_i = [e_i]$. Siguin c_i les constants de proporcionalitat $v_i = c_i e_i$. Com $\sum e_i$ i $\sum v_i = \sum c_i e_i$ representen el mateix punt A,

tindrem que existeix λ no nul amb $\lambda \sum e_i = \sum c_i e_i$. Atès que els vectors e_i són linealment independents obtenim que $\lambda = c_i$ per a tot i:

$$A = [e_1 + \cdots + e_n] = [v_1 + \cdots + v_n] \implies (e_1 + \cdots + e_n) = \lambda(v_1 + \cdots + v_n). \qquad \blacksquare$$

Proposició 2.1.4. *Sigui $e_0, \ldots, e_n$ una base d'E. Aleshores:*

$$\mathcal{R} = ([e_0], \ldots, [e_n]; [e_0 + \cdots + e_n])$$

és una referència projectiva i $e_0, \ldots, e_n$ n'és una base adaptada.

Demostració. $[e_0], \ldots, [e_n]$ de $\mathcal{R}$ són punts independents de $\mathbb{P}$. Si per a un cert i es dona que $[e_0 + \cdots + e_n] \in [e_0] \vee \widehat{[e_i]} \vee \cdots \vee [e_n]$, aleshores:

$$e_0 + \cdots + e_n \in \langle e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n \rangle \implies e_i \in \langle e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n \rangle,$$

fet que va en contra de la independència lineal de $e_0, \ldots, e_n$. Per tant, $\mathcal{R}$ és una referència. La resta se segueix de la definició de base adaptada. $\blacksquare$

Observació 2.1.5. Com que tot espai vectorial diferent de 0 té una base, el lema anterior ens diu que tot espai projectiu $\mathbb{P}^n$ té una referència. També se segueix que qualsevol conjunt de punts independents $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{P}^n$ sigui pres com el conjunt de punts d'una referència $\mathcal{R}$ de $\mathbb{P}^n$. En efecte, si e_i és un representant de p_i, $p_i = [e_i]$, per a tot $i = 0, \ldots, n$, els vectors $e_0, \ldots, e_n$ són independents, a causa de la independència de $p_0, \ldots, p_n$ i per tant una base d'E.

Fixem un espai projectiu $(\mathbb{P}, E, \pi)$ de dimensió n i una referència projectiva $\mathcal{R} = (p_0, \ldots, p_n; A)$. Considerem una base $e_0, \ldots, e_n$ adaptada a $\mathcal{R}$.

Observació 2.1.6. El punt unitat no pot pertànyer a cap de les cares. Si definim una referència al pla projectiu $(\mathbb{P}^2, E, \pi)$ com tres punts p_0, p_1, p_2 linealment independents i un quart punt A que pertany a la recta p_0p_1, aleshores dues possibles definicions de base adaptada sorgeixen:

1. Diem que una base adaptada a aquesta referència és una base e_0, e_1, e_2 d'E tal que $\pi(e_i) = e_i$ (per $\{0, 1, 2\}$) i $\pi(e_0 + e_1 + e_2) = A$.
2. Diem que una base adaptada a aquesta referència és una base e_0, e_1, e_2 d'E tal que $\pi(e_i) = e_i$ (per $\{0, 1, 2\}$) i $\pi(e_0 + e_1) = A$.

Però cap de les dues definicions és possible:

1. És impossible perquè $A \in p_0p_1$ i $p_i = [e_i]$ impliquen que els vectors que representen A han de ser combinació lineal de e_0, e_1 (pertanyen al pla vectorial generat per e_0, e_1).
2. És tècnicament possible però no permet determinar unes coordenades úniques llevat de múltiple. Això ho veiem perquè les possibles bases adaptades a aquesta referència no quedarien determinades llevat d'un *únic* múltiple. De fet, podrien ser $(\lambda e_0, \lambda e_1, \mu e_2)$, de tal manera que λ, μ podrien ser efectivament diferents.

2.2

Coordenades projectives

Definició 2.2.1 (Coordenades projectives)**.** Les *coordenades projectives* d'un punt $p \in \mathbb{P}$ en la referència $\mathcal{R}$ són una col·lecció de $n+1$ constants ordenades $a_0, \ldots, a_n$ determinades per la relació $u = a_0 e_0 + \ldots + a_n e_n$, on $p = [u]$. Posem $p = [a_0 : \ldots : a_n]$.

Proposició 2.2.2. *Les coordenades projectives estan ben definides llevat de múltiple, és a dir:*

1. *Sigui $e'_0, \ldots, e'_n$ una altra base adaptada a $\mathcal{R}$ i siguin $a'_0, \ldots, a'_n$ les coordenades de p calculades en aquesta base. Aleshores existeix $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $a'_i = \lambda a_i$ per a tot $i = 0, \ldots, n$.*
2. *Sigui $u' \in E$ un altre representant del punt p i siguin $a'_0, \ldots, a'_n$ les coordenades de p calculades amb u'. Aleshores existeix $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $a'_i = \lambda a_i$ per a tot $i = 0, \ldots, n$.*

Demostració. En el primer apartat tenim, per 2.1.4, que existeix una constant $c \neq 0$ tal que $e'_i = c e_i$. Per tant:

$$u = a_0 e_0 + \cdots + a_n e_n = \frac{1}{c}\left(a_0 e'_0 + \cdots + a_n e'_n\right).$$

Per tant, $a'_i = \frac{a_i}{c}$. Per al segon apartat, tenim $u' = cu$ i, per tant, $u' = c(a_0 e_0 + \cdots + a_n e_n)$; és a dir, $a'_i = c a_i$. ■

Observació 2.2.3.

1. Les coordenades projectives d'un punt no poden ser totes zero alhora perquè això implicaria que el vector u representant el punt és el vector nul.
2. També és important remarcar que cada coordenada individualment no dona cap informació, per exemple, el punt de coordenades $[1 : 2 : -1]$ és el mateix que el que té coordenades $[2 : 4 : -2]$. En canvi el quocient de dues coordenades és una informació útil del punt.
3. Per construcció els punts de la referència tenen coordenades

$$p_0 = [1 : 0 : \ldots : 0], \ldots, p_n = [0 : \ldots : 0 : 1], A = [1 : 1 : \ldots : 1],$$

   la qual cosa explica que s'anomeni «punt unitat» al punt A. Però atenció, si cal definir una referència associada a un problema, no podem dir que la referència és $\mathcal{R} = ([1 : 0 : \ldots : 0], \ldots, [0 : \ldots : 0 : 1]; [1 : 1 : \ldots : 1])$ perquè això no determina la referència en cap cas.
4. Fixada una referència projectiva tenim un sistema de coordenades ben definit en el sentit següent: tenim una bijecció entre els punts de $\mathbb{P}$ i el conjunt de les coordenades homogènies $[a_0 : \ldots : a_n]$ no totes zero i definides llevat de múltiple. En efecte, tenim una injecció perquè si els punts $p = [u] = [a_0 : \ldots : a_n]$ i $q = [v] = [b_0 : \ldots : b_n]$ tenen coordenades proporcionals, és a dir:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_n \\ b_0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = 1,$$

   aleshores $u = \sum a_i e_i$ i $v = \sum b_i e_i$ són proporcionals i $p = q$. És exhaustiva perquè el punt $[\sum a_i e_i]$ té coordenades $[a_0 : \ldots : a_n]$.

Exemple 2.2.4. Considerem $E = \mathbb{R}^{n+1}$ i $\mathbb{P}(E)$ l'espai projectiu dels subespais de dimensió 1 d'E. Considerem en E la base canònica $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ per a $i = 0, \ldots, n$, en la qual un vector u té coordenades $(x_0, \ldots, x_n)$. Si considerem la referència $\mathcal{R} = ([e_0], \ldots, [e_n]; [e_0 + \ldots + e_n])$, aleshores les coordenades del punt representat per u (és a dir, $[u]$), són $[x_0 : \cdots : x_n]$. O sigui, són les mateixes coordenades però considerades «llevat de múltiple», la qual cosa reflecteix que els elements de $\mathbb{P}(E)$ no són vectors sinó subespais de dimensió 1.

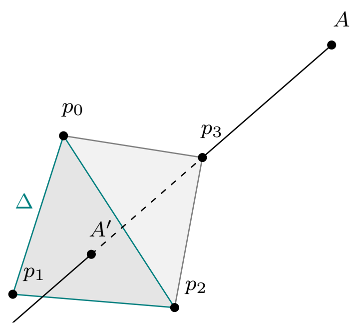
2.3 Referències subordinades

Considerem una referència projectiva $\mathcal{R} = (p_0, \ldots, p_n; A)$ en un espai projectiu $\mathbb{P}$ i sigui $e_0, \ldots, e_n$ una base adaptada. Els vèrtexs p_i determinen un n-símplex en $\mathbb{P}$. Considerem una cara Δ de dimensió k d'aquest símplex que, per simplificar les notacions, suposarem que és la cara determinada pels primers $k+1$ vèrtexs: $\Delta = p_0 \vee \cdots \vee p_k$.

Definició 2.3.1 (Referència subordinada). La referència projectiva en Δ donada per $\mathcal{R}_\Delta = (p_0, \ldots, p_k; A')$ està ben definida. L'anomenarem *referència subordinada a* Δ.

Aleshores, és fàcil comprovar els fets següents:

1. La varietat lineal $A \vee p_{k+1} \vee \cdots \vee p_n$ talla Δ en un únic punt A'. De fet, $A' = [e_0 + \cdots + e_k]$.
2. Sigui $p \in \Delta$. Si les coordenades de p en la referència subordinada $\mathcal{R}_\Delta$ són $[a_0 : \cdots : a_k]$ aleshores les coordenades de p en la referència $\mathcal{R}$ són $p = [a_0 : \cdots : a_k : 0 : \cdots : 0]$.



Exemple 2.3.2. En un pla projectiu suposem donada una referència $\mathcal{R} = (p_0, p_1, p_2; A)$ i una base adaptada e_0, e_1, e_2. Considerem la recta $\ell = p_0 \vee p_1 = [e_0] \vee [e_1]$. Un punt $p \in \ell$ és de la forma $[ae_0 + be_1]$ i té coordenades $[a : b : 0]$. La referència subordinada $\mathcal{R}_\ell = (p_0, p_1; [e_0 + e_1])$ és una referència a ℓ en la qual $p = [a : b]$.

2.4 Equacions de les varietats lineals

Fixem un espai projectiu $\mathbb{P}$ de dimensió n i una referència projectiva $\mathcal{R} = \{p_0, \ldots, p_n; A\}$. Sigui $\mathbb{L} = [F]$ una varietat lineal de dimensió k. Volem trobar equacions per a $\mathbb{L}$.

2.4.1 Equacions paramètriques

Hem vist a 1.3.7, existeixen $k+1$ punts linealment independents $q_0, \ldots, q_k$ de $\mathbb{L}$ que generen la varietat lineal; és a dir, $\mathbb{L} = q_0 \vee \cdots \vee q_k$. Suposem que són conegudes les coordenades dels punts

q_i en la referència $\mathcal{R}$:

$$q_i = [a_0^i : \cdots : a_n^i],\ i = 0 \div k,$$

Sigui $e_0, \ldots, e_n$ una base adaptada a $\mathcal{R}$. Aleshores $u_i = a_0^i e_0 + \cdots + a_n^i e_n \in F$ representa el punt q_i per definició de coordenades: $q_i = [u_i]$. Tenim, doncs, que els vectors $u_0, \ldots, u_k$ formen una base de F. Sigui ara $x = [w]$ un punt arbitrari de $\mathbb{L}$. Com que $w \in F$ tindrem:

$$w = \sum_{j=0}^{k} \lambda_i u_i = \sum_{j=0}^{k} \lambda_i (a_0^i e_0 + \cdots + a_n^i e_n) = \left(\sum_i \lambda_i a_0^i \right) e_0 + \cdots + \left(\sum_i \lambda_i a_n^i \right) e_n.$$

Per tant, el punt x té coordenades:

$$x = \left[\sum_i \lambda_i a_0^i : \cdots : \sum_i \lambda_i a_n^i \right].$$

És a dir, les coordenades d'un punt arbitrari de $\mathbb{L}$ venen donades per combinacions lineals de les coordenades dels punts q_j.

Exemple 2.4.1.

1. Per exemple, donada una referència $\mathcal{R}$ fixada, considerem la recta que passa pels punts $[1 : 2 : -1]$ i $[2 : 0 : 3]$. Un punt general d'aquesta recta és de la forma $[\lambda_0(1, 2, -1) + \lambda_1(2, 0, 3)] = [\lambda_0 + 2\lambda_1 : 2\lambda_0 : -\lambda_0 + 3\lambda_1]$.
2. Prenem $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}^3$, el projectivitzat d'$\mathbb{R}^4$, $(\mathbb{P}^3, \mathbb{R}^4, \pi)$. Fixem la base $\mathcal{R} = (p_0, p_1, p_2, p_4; A)$, amb $p_0 = [(1, 0, 0, 0)], p_s = [((0, 0, 0, 1)], \Delta = [(1, 1, 1, 1)]$. Paramètricament, les equacions de $\mathbb{L}$ són:

$$\begin{aligned}[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] &= [\lambda_1(1, 2, 3, 2) + \lambda_2(1, -1, 0, 0) + \lambda_3(0, 1, 0, 0)] \\ &= [\lambda_1 + \lambda_2 : 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 : 3\lambda_1 : 2\lambda_1].\end{aligned}$$

2.4.2 Equacions implícites

Amb la mateixa notació, trobem que un punt arbitrari $x = [x_0 : \cdots : x_n]$ pertany a $\mathbb{L}$ si, i només si, el vector $\sum x_i e_i$ pertany a F. Equivalentment, si:

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_0 & a_0^0 & \cdots & a_0^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & a_n^0 & \cdots & a_n^k \end{pmatrix} = k + 1.$$

Anul·lant els menors d'ordre $k + 2$ trobem un sistema d'equacions homogènies. Observem que és el sistema d'equacions d'F associat als vectors u_i.

Exemple 2.4.2. Considerem, com a l'exemple anterior, un pla projectiu amb una referència fixada i la recta ℓ generada pels punts $[1 : 2 : -1]$ i $[2 : 0 : 3]$. Aleshores, un punt $[x_0 : x_1 : x_2]$ pertany a ℓ si, i només si, el rang de la matriu:

$$\begin{pmatrix} x_0 & 1 & 2 \\ x_1 & 2 & 0 \\ x_2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

és 2. Com és una matriu quadrada només cal anul·lar el determinant. Obtenim que l'equació implícita de ℓ és $6x_0 - 5x_1 - 4x_2 = 0$.

Observació 2.4.3 (Operacions de varietats lineals amb coordenades)**.** La intersecció de varietats lineals es calcula quan totes dues estan donades per sistemes d'equacions. Només cal ajuntar totes les equacions de les dues varietats lineals. Per fer la suma són més convenients les expressions paramètriques, ja que només cal sumar les dues parametritzacions.

2.5 Teoremes de Pappus i Desargues

Teorema 2.5.1 (Teorema de Pappus)**.** *Siguin a, b dues rectes del pla projectiu. Considerem, donats tres punts diferents A_1, A_2, A_3 en a i tres punts diferents B_1, B_2, B_3 en b. Suposem que els seus punts són diferents d'$a \cap b$. Aleshores, els punts $A_1B_2 \cap A_2B_1$, $A_1B_3 \cap A_3B_1$ i $A_2B_3 \cap A_3B_2$ estan alineats.*

Demostració. Anomenem O al punt d'intersecció $a \cap b$ i posem $P = A_1B_2 \cap A_2B_1$. Considerem la referència $\mathcal{R} = (O, A_1, B_1; P)$. Observem que les condicions sobre els punts permeten assegurar que P és un punt unitat ben escollit. Aleshores $a = O \vee A_1 = [1:0:0] \vee [0:1:0]$ té equació implícita $x_2 = 0$. Anàlogament b té equació $x_1 = 0$. Com la recta $A_1 \vee P = [0:1:0] \vee [1:1:1]$ té equació $x_0 - x_2 = 0$, i B_2 és el punt $A_1 \vee P \cap b$, obtenim que $B_2 = [1:0:1]$. De la mateixa forma $A_2 = [1:1:0]$. Finalment podem suposar que A_3 és de la forma $[\alpha_1 : \alpha_2 : 0]$. Com els punts són diferents (i diferents d'O) podem suposar que les dues coordenades són no nul·les. Dividim doncs per α_1 i posem $\alpha := \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Tenim que $A_3 = [1 : \alpha : 0]$. A més a més, $\alpha \neq 0, 1$. Podem fer la mateixa discussió per B_3 i arribem a què $B_3 = [1 : 0 : \beta]$, amb $\beta \neq 0, 1$. Ara ja podem fer el càlcul de totes les rectes i les seves interseccions. Fent servir determinats trobem les següents equacions implícites:

$$\begin{aligned}
A_1B_3 :& \quad \beta x_0 - x_2 = 0;\\
A_3B_1 :& \quad \alpha x_0 - x_1 = 0;\\
A_2B_3 :& \quad \beta x_0 - \beta x_1 - x_2 = 0;\\
A_3B_2 :& \quad \beta\alpha x_0 - x_1 - \alpha x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Resolent els corresponents sistemes trobem que $A_1B_3 \cap A_3B_1 = [1 : \alpha : \beta]$ i $A_2B_3 \cap A_3B_2 = [\alpha\beta - 1 : \alpha\beta - \alpha : \alpha\beta - \beta]$. Per acabar la demostració hem de veure que aquests dos punts i $P = [1:1:1]$ estan alineats. Equivalentment, hem de veure que tres vectors representants dels punts són linealment dependents. Ho comprovem amb el determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ \alpha\beta - 1 & \alpha\beta - \alpha & \alpha\beta - \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Efectivament, la tercera fila és igual a la primera multiplicada per $\alpha\beta$ menys la segona fila. ■

Observació 2.5.2 (Comentaris a la demostració). $A_3 \in a$, $z = 0$. Com ja hem dit, $A_3 = [\alpha_1 : \alpha_2 : 0] = [1 : \alpha : 0]$. Si α_1 fos zero, $A_3 = [0 : \beta : 0] = [0 : 1 : 0]$, el punt A_1, però hem suposat que els punts són diferents dos a dos, absurd.

Teorema 2.5.3 (Teorema de Desargues). *Donats dos triangles $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ en un pla projectiu tals que cap vèrtex d'un triangle es troba sobre cap costat de l'altre triangle, les afirmacions següents són equivalents:*

1. *Les rectes A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 són concurrents.*
2. *Els punts $A_1A_2 \cap B_1B_2$, $A_1A_3 \cap B_1B_3$, $A_2A_3 \cap B_2B_3$ estan alineats.*

Demostració. Per raons que seran evidents més endavant (*autodualitat*), és suficient demostrar una de les dues implicacions.
Siguin doncs dos triangles del pla projectiu $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ tals que cap vèrtex d'un triangle es troba sobre cap costat de l'altre triangle. Suposem que les rectes A_iB_i són concurrents en un punt O i volem demostrar que els punts $A_1A_2 \cap B_2B_1, A_2A_3 \cap B_3B_2$ i $A_3A_1 \cap B_1B_3$ estan alineats. Considerem la referència

$$\mathcal{R} = (A_1, A_2, A_3; O)$$

Per tant $A_1 = [1 : 0 : 0], A_2 = [0 : 1 : 0], A_3 = [0 : 0 : 1]$ i $O = [1 : 1 : 1]$. Observem que $B_i \in O \vee A_i$. Per exemple B_1 pertany a la recta $O \vee A_1$ que té equació $x_1 = x_2$. Per tant $B_1 = [a : b : b]$ per a certes constants a i b. Com que $A_1 \neq B_1$ tenim que $b \neq 0$. Dividint per b les coordenades del punt i anomenant α a $\frac{a}{b}$ tenim que $B_1 = [\alpha : 1 : 1]$. Amb un argument similar obtenim que $B_2 = [1 : \beta : 1]$ i $B_3 = [1 : 1 : \gamma]$. Ara ja tenim totes les coordenades dels punts involucrats i podem calcular les coordenades dels punts que hem de veure que estan alineats.
Per calcular $A_1A_2 \cap B_1B_2$ primer trobem les equacions de les dues rectes. L'equació de la primera $A_1A_2 = [1 : 0 : 0] \vee [0 : 1 : 0]$ és simplement $x_2 = 0$. La segona equació s'obté fent el determinant:

$$\begin{vmatrix} x_0 & \alpha & 1 \\ x_1 & 1 & \beta \\ x_2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 - \beta)x_0 + (1 - \alpha)x_1 + (\alpha\beta - 1)x_2 = 0.$$

La intersecció de les dues rectes és el punt $[\alpha - 1 : 1 - \beta : 0]$. Fent un càlcul semblant trobem que els altres dos punts són

$$[\alpha - 1 : 0 : 1 - \gamma] \text{ i } [0 : \beta - 1 : 1 - \gamma].$$

Ara comprovem que estan alineats, és a dir que els punts no són linealment independents, veient que el determinant de les coordenades dels tres punts és zero:

$$\begin{vmatrix} \alpha - 1 & 1 - \beta & 0 \\ \alpha - 1 & 0 & 1 - \gamma \\ 0 & \beta - 1 & 1 - \gamma \end{vmatrix} = (\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$ ■

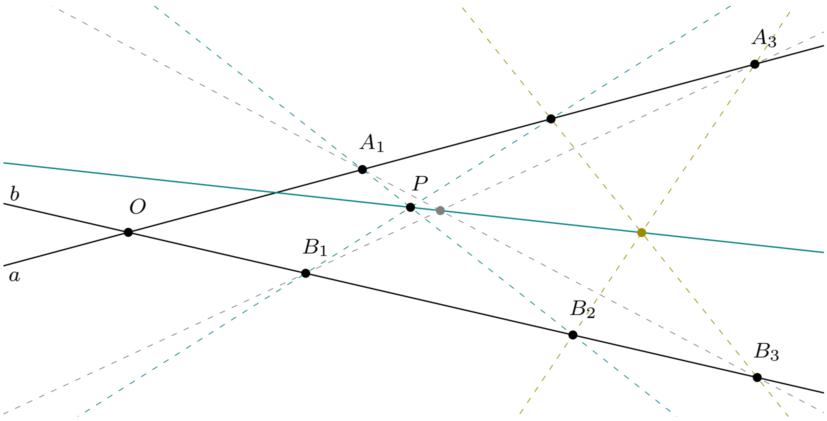


Figura 2.1: Teorema de Pappus

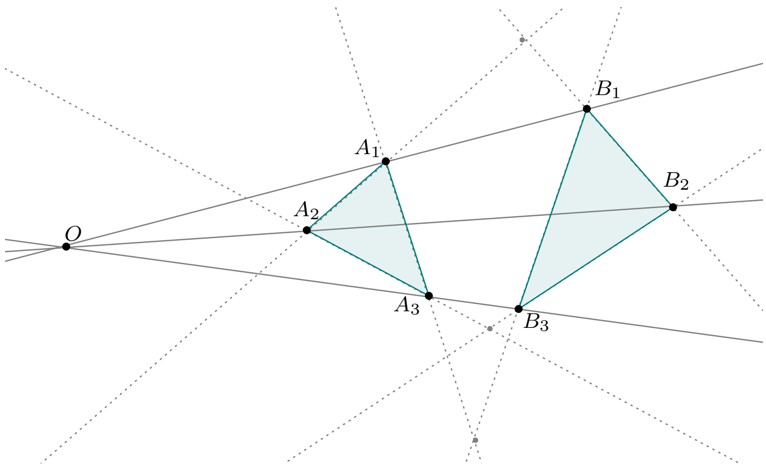


Figura 2.2: Teorema de Desargues

2.6 Canvis de coordenades

Suposem donats dos sistemes de referència en un mateix espai projectiu:

$$\mathcal{R} = (p_0, \ldots, p_n; A),$$
$$\mathcal{R}' = (p'_0, \ldots, p'_n; B).$$

Volem trobar una matriu que relacioni les coordenades d'un punt en $\mathcal{R}'$ amb les coordenades del mateix punt en $\mathcal{R}$. Per fer-ho, considerem una base adaptada e_i de $\mathcal{R}$. Primer, considerem les coordenades dels punts p'_i, i també de B, en la referència $\mathcal{R}$:

$$p'_i = [a^i_0 : \cdots : a^i_n], \ B = [b_0 : \cdots : b_n].$$

Hem de saber que: M és de dimensió $n+1 \times n+1$, està determinada llevat de múltiple (com les coordenades) i $M^{-1}(\{\text{coordenades de } P \text{ en } \mathcal{R}\}) = \{\text{coordenades de } p \text{ en } \mathcal{R}'\}$.

Lema 2.6.1. *Existeixen constants úniques $\lambda_i \neq 0$ tals que:*

$$\lambda_0(a_0^0, \dots, a_n^0) + \dots + \lambda_n(a_0^n, \dots, a_n^n) = (b_0, \dots, b_n).$$

Demostració. Volem resoldre el sistema:

$$\begin{pmatrix} a_0^0 & \cdots & a_0^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b_0 = \lambda_0 a_0^0 + \dots + \lambda_n a_0^n \\ \vdots \\ b_n = \lambda_0 a_n^0 + \dots + \lambda_n a_n^n \end{cases}$$

Sigui $A = (a_i^j)$ la matriu $(n+1) \times (n+1)$ associada al sistema. Com que els coeficients a_i^j corresponen a les coordenades dels punts p_i' que són linealment independents, tenim que $\det(A) \neq 0$ i, per tant, el sistema té solució única. Observem que si $\lambda_i = 0$ per a alguna i, aleshores el punt B pertany a $p_0' \vee \dots \vee \widehat{p_i'} \vee \dots \vee p_n'$, la qual cosa contradiu que $\mathcal{R}'$ sigui una referència. ■

Definició 2.6.2 (Coordenades normalitzades). Diem que les coordenades dels punt p_i' estan *normalitzades* quan la suma de totes elles donen les coordenades del punt B. El lema ens diu que sempre podem normalitzar una referència $\mathcal{R}'$ (en funció d'una segona referència fixada $\mathcal{R}$).

Suposem que ja hem normalitzat la referència $\mathcal{R}'$ multiplicant les coordenades del punt p_i' per λ_i. Continuem posant $p_i' = [a_0^i : \dots : a_n^i]$ per simplificar la notació. Observem que els vectors:

$$v_0 := a_0^0 e_0 + \ldots + a_n^0 e_n, \dots, v_n := a_0^n e_0 + \ldots + a_n^n e_n$$

formen una base adaptada a la referència $\mathcal{R}'$, ja que per definició de coordenades normalitzades, $B = [v_0 + \ldots + v_n]$

Definició 2.6.3 (Matriu de canvi de referència). La *matriu de canvi de referència* o matriu de canvi de coordenades de $\mathcal{R}'$ en funció de $\mathcal{R}$ és la matriu obtinguda posant en columna les coordenades normalitzades en la referència $\mathcal{R}$ dels vèrtexs de la referència $\mathcal{R}'$. Amb la notació anterior és la matriu:

$$M = \begin{pmatrix} a_0^0 & \dots & a_0^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^0 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Proposició 2.6.4. *Sigui $q \in \mathbb{P}$ un punt que en la referència $\mathcal{R}'$ té coordenades $[x_0' : \ldots : x_n']$. Aleshores, si les coordenades de q en la referència $\mathcal{R}$ són $[x_0 : \ldots : x_n]$ tenim que:*

$$M \begin{pmatrix} x_0' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

per a una constant ρ no nul·la.

Demostració. Com que v_i és una base adaptada de $\mathcal{R}'$ tenim que el vector $\sum x_i' v_i$ representa q. Substituint v_i per la seva expressió en la base e_i tenim:

$$\sum_i x_i' v_i = \sum_i x_i'(a_0^i e_0 + \cdots + a_n^i e_n) = \left(x_i' a_0^i\right) e_0 + \cdots + \left(\sum_i x_i' a_n^i\right) e_n.$$

Com e_i és base adaptada a $\mathcal{R}$ trobem que $[\sum x_i' a_0^i : \cdots : \sum x_i' a_n^i]$ són les coordenades (com sempre, ben definides llevat de múltiple) de q en la referència $\mathcal{R}$. Finalment, observem que les coordenades que hem obtingut corresponen a aplicar la matriu M al vector $(x_0', \ldots, x_n')$. ■

2.7 Raó doble

Comencem definint una coordenada en una recta projectiva que posa de manifest la relació entre recta afí i recta projectiva. Fixem, doncs, un espai projectiu de dimensió 1, $\mathbb{P}^1$, en el qual suposem donada una referència projectiva $\mathcal{R} = (p_0, p_1; A)$ ($p_0 = [1:0], p_1 = [0:1], A = [1:1]$).

Definició 2.7.1 (Coordenada absoluta). La *coordenada absoluta* d'un punt q de $\mathbb{P}^1$ de coordenades $[a:b]$ en la referència $\mathcal{R}$ és:

$$\theta_q := \frac{a}{b} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\} \text{ (notem que } \infty \text{ no va signat).}$$

En particular, $\theta_{p_0} = \infty, \theta_{p_1} = 0$ i $\theta_A = 1$. Observem que, així, s'obté una bijecció entre $\mathbb{P}^1 \setminus \{p_0\}$ i la recta afí $A^1_{\mathbb{K}}$ identificada amb el cos $\mathbb{K}$.

Considerem ara quatre punts ordenats q_1, q_2, q_3, q_4 en una recta projectiva (un espai projectiu de dimensió 1) i suposem que almenys tres dels quatre punts són diferents. Volem definir un invariant numèric associat als quatre punts que codifiqui la posició relativa dels mateixos. Per fer-ho fixem una referència projectiva $(p_0, p_1; A)$ en la recta i suposem que les coordenades projectives de q_i en aquesta referència són $[x_i : y_i]$. Per simplificar la notació posem:

$$\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}.$$

Notem que $\Delta_{i,j} = 0$ si i només si $q_i = q_j$.

2.7.1 Raó doble

Definició 2.7.2 (Raó doble). La *raó doble* dels punts q_i és:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\Delta_{3,1}}{\Delta_{3,2}} : \frac{\Delta_{4,1}}{\Delta_{4,2}}$$

Observació 2.7.3.

1. El valor de la raó doble serà un escalar del cos base $\mathbb{K}$ si els quatre punts són diferents. Si, en canvi, $q_1 = q_4$ o $q_2 = q_3$ el denominador s'anul·la (el numerador no perquè hi ha almenys tres punts diferents). En aquest cas diem *per conveni* que la raó doble és ∞. Per tant la raó doble pren valors en $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$.
2. És fàcil fer una anàlisi dels valors que hi apareixen quan hi ha coincidència de dos punts. Per exemple, la raó doble és 0 si i només si $q_1 = q_3$ o $q_2 = q_4$. Les altres possibles igualtats: $q_1 = q_2$ o $q_3 = q_4$ corresponen exactament al cas en que la raó doble és 1.
3. No depèn de les coordenades que haguem escollit, ja que les coordenades són úniques llevat de múltiple. Perquè $\Delta_{3,1}$ i $\Delta_{4,1}$ descriuen una primera fila on apareixen x_3, x_1, x_4, x_2. El mateix amb l'última. Això vol dir que si multipliquem x_i per un múltiple, s'acabaran cancel·lant.
4. Així doncs dos dels quatre punts són iguals si i només si la raó doble pren els valors $0, 1, \infty$.
5. *Independència de la referència*: sigui $\mathcal{R}'$ una altra referència de la recta en la qual els punts q_i tenen coordenades $[x_i' : y_i']$. Com hem vist anteriorment, existeix una matriu M invertible de canvi de coordenades tal que

$$M \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \implies M \begin{pmatrix} x_i' & x_j' \\ y_i' & y_j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}$$

Aleshores:

$$\Delta_{i,j}' := \begin{vmatrix} x_i' & x_j' \\ y_i' & y_j' \end{vmatrix}$$

satisfà $\det(M) \cdot \Delta_{i,j}' = \Delta_{i,j}$. Substituint en la fórmula trobem que la raó doble té el mateix valor tant si es calcula amb les coordenades $[x_i : y_i]$ com amb les coordenades $[x_i' : y_i']$:

$$\frac{\det(M) \cdot \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}}{\det(M) \cdot \begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ y_3 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{\det(M) \cdot \begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix}}{\det(M) \cdot \begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ y_3 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix}}.$$

6. Suposem que els tres primers punts són diferents dos a dos, aleshores podem considerar-los com la referència fixada (degut al punt anterior) i tindrem $q_1 = [1 : 0], q_2 = [0 : 1], q_3 = [1 : 1]$. Si $q_4 = [a : b]$ en aquesta referència, aleshores:

$$\Delta_{3,1} = 1,\ \Delta_{3,2} = 1,\ \Delta_{4,1} = -b,\ \Delta_{4,2} = a.$$

Per tant, la raó doble és $\frac{a}{b}$; és a dir, la coordenada absoluta de q_4.
7. **Segon mètode**. El punt anterior ens dona un nou mètode de càlcul per a la raó doble: si els tres primers punts són diferents podem *normalitzar* les seves coordenades (és a dir, *buscar una base adaptada*) i calcular la coordenada absoluta del quart.

Exemple 2.7.4. Per exemple, considerem en un pla projectiu amb una referència fixada els punts

$$q_1 = [1 : 0 : 1], \quad q_2 = [2 : -1 : 1], \quad q_3 = [0 : 1 : 1], \quad q_4 = [-1 : 3 : 2],$$

que estan alineats perquè tots ells pertanyen a la recta $x + y - z = 0$. Considerem la referència donada pels tres primers punts. Per tenir una base adaptada hem de considerar els representants $(2, 0, 2), (-2, 1, -1)$ de q_1 i de q_2 (hem de fer el mateix pas que farem igualant a $[0 : 1 : 1]$, i obtindrem λ, μ tals que $\lambda = 2$ i $\mu = 1$), de manera que la seva suma sigui un representant de q_3. Ara calculem:

$$a(2, 0, 2) + b(-2, 1, -1) = (-1, 3, 2) \implies b = 3,\ a = \frac{5}{2}.$$

Per tant, la raó doble és $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$.

8. **Tercer mètode**. Podem calcular la raó doble en funció de les coordenades absolutes dels punts. Posem θ_i en comptes de $\theta_{q_i} = \frac{x_i}{y_i}$. Aleshores, és fàcil comprovar que:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_3 - \theta_2} : \frac{\theta_4 - \theta_1}{\theta_4 - \theta_2}.$$

Exemple 2.7.5. Volem calcular la raó doble dels quatre punts de l'exemple de l'observació de més amunt: $q_1 = [1 : 0 : 1], q_2 = [2 : -1 : 1], q_3 = [0 : 1 : 1], q_4 = [-1 : 3 : 2]$ podem calcular la raó doble usant els punts $[1 : 0], [2 : -1], [0 : 1], [-1 : 3]$ (es podien haver triat altres dues coordenades). I s'obté: $\Delta_{3,1} = -1, \Delta_{3,2} = -2, \Delta_{4,1} = -3$ i $\Delta_{4,2} = -5$. Per tant, $(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{-2}{-1} : \frac{-5}{-3} = \frac{5}{6}$.

Ara, fixem per exemple $n = 4$ sense pèrdua de generalitat. El grup de permutacions S_4 actua sobre $\mathbb{P}^3$ de manera que, depèn de l'ordre dels termes q_i en la raó doble, obtenim un resultat diferent *dependent* del mateix λ.

Proposició 2.7.6. *Siguin q_i quatre punts alineats, almenys tres d'ells diferents, en un espai projectiu. Aleshores, tenim les tres igualtats:*

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = (q_2, q_1, q_4, q_3) = (q_3, q_4, q_1, q_2) = (q_4, q_3, q_2, q_1) = \lambda.$$

Demostració. Escrivint, per exemple, la raó doble en termes de coordenades absolutes és evident que canviant simultàniament θ_1 per θ_2 i θ_3 per θ_4, l'expressió no canvia. El mateix passa canviant simultàniament θ_1 per θ_3 i θ_2 per θ_4. Això prova les dues primeres igualtats, la tercera n'és una conseqüència. ∎

Proposició 2.7.7. *Donats quatre punts q_1, q_2, q_3, q_4 alineats dels quals almenys tres són diferents posem $(q_1, q_2, q_3, q_4) = \lambda$. Aleshores, es tenen les igualtats següents:*

$$(q_2, q_1, q_3, q_4) = \frac{1}{\lambda},$$
$$(q_1, q_3, q_2, q_4) = 1 - \lambda.$$

Demostració. En el primer cas només cal observar que si en la fórmula de la definició canviem 1 per 2 aleshores el numerador i el denominador queden intercanviats. En el segon comprovem que la suma $(q_1,q_2,q_3,q_4)+(q_1,q_3,q_2,q_4)$ és 1 usant les expressions en termes de les coordenades absolutes,

$$\begin{aligned}\frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_3-\theta_2}:\frac{\theta_4-\theta_1}{\theta_4-\theta_2}+\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_2-\theta_3}:\frac{\theta_4-\theta_1}{\theta_4-\theta_3} &= \frac{(\theta_3-\theta_1)(\theta_4-\theta_2)}{(\theta_3-\theta_2)(\theta_4-\theta_1)}+\frac{(\theta_2-\theta_1)(\theta_4-\theta_3)}{(\theta_2-\theta_3)(\theta_4-\theta_1)}\\ &= \frac{(\theta_3-\theta_1)(\theta_4-\theta_2)-(\theta_2-\theta_1)(\theta_4-\theta_3)}{(\theta_3-\theta_2)(\theta_4-\theta_1)}\\ &= \frac{\theta_3\theta_4+\theta_2\theta_1-\theta_2\theta_4-\theta_3\theta_1}{(\theta_3-\theta_2)(\theta_4-\theta_1)}\\ &= \frac{\theta_3(\theta_4-\theta_1)+\theta_2(\theta_1-\theta_4)}{(\theta_3-\theta_2)(\theta_4-\theta_1)}=1\end{aligned}$$

I ja hem acabat. ■

Corol·lari 2.7.8 (Acció de les permutacions en la raó doble)**.** *Combinant aquestes dues proposicions, és fàcil deduir tots els valors següents:*

$$\begin{aligned}\lambda &= (q_1,q_2,q_3,q_4)=(q_2,q_1,q_4,q_3)=(q_3,q_4,q_1,q_2)=(q_4,q_3,q_2,q_1)\\ \frac{1}{\lambda} &= (q_2,q_1,q_3,q_4)=(q_1,q_2,q_4,q_3)=(q_3,q_4,q_2,q_1)=(q_4,q_3,q_1,q_2)\\ 1-\lambda &= (q_1,q_3,q_2,q_4)=(q_3,q_1,q_4,q_2)=(q_2,q_4,q_1,q_3)=(q_4,q_2,q_3,q_1)\\ \frac{\lambda-1}{\lambda} &= (q_2,q_3,q_1,q_4)=(q_3,q_2,q_4,q_1)=(q_1,q_4,q_2,q_3)=(q_4,q_1,q_3,q_2)\\ \frac{1}{1-\lambda} &= (q_3,q_1,q_2,q_4)=(q_1,q_3,q_4,q_2)=(q_2,q_4,q_3,q_1)=(q_4,q_2,q_1,q_3)\\ \frac{\lambda}{\lambda-1} &= (q_3,q_2,q_1,q_4)=(q_2,q_3,q_4,q_1)=(q_1,q_4,q_3,q_2)=(q_4,q_1,q_2,q_3)\end{aligned}$$

Observació 2.7.9. Hem vist a l'inici de la secció que, quan dos dels punts són iguals, la raó doble és $0,1,\infty$. Ara podem justificar el recíproc. En efecte, suposem que una raó doble pren el valor 0 o ∞. Usant la definició amb els determinants, obtenim fàcilment que dos dels quatre punts són iguals. Si la raó doble és 1, aleshores, reordenant convenientment els punts, podem aconseguir que la raó sigui 0 i, de nou, tenim la coincidència de dos punts.

2.7.2 Quaternes harmòniques i separació harmònica

Si en un determinat ordre la raó doble val λ, els valors que es poden assolir permutant l'ordre dels punts són:

$$\Lambda=\left\{\lambda,\frac{1}{\lambda},1-\lambda,\frac{1}{1-\lambda},\frac{\lambda}{\lambda-1},\frac{\lambda-1}{\lambda}\right\}.$$

En general aquests sis valors seran diferents entre sí però es produeixen coincidències entre ells en situacions de posicions geomètriques especials (és a dir, hi ha certs casos en què $\#\{\lambda,\frac{1}{\lambda},1-\lambda,\frac{\lambda-1}{\lambda},\frac{1}{1-\lambda},\frac{\lambda}{\lambda-1}\}<6$). Imposant totes les igualtats possibles es fàcil arribar a la conclusió de que Λ té menys de sis valors diferents únicament en les tres situacions següents:

1. $\Lambda=\{0,1,\infty\}$ que com ja hem vist correspon al cas en què dos dels quatre punts són iguals.

2. $\Lambda = \left\{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right\}$, és a dir les dues arrels de l'equació $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Aquesta situació només es produeix quan l'equació té solució en el cos en què treballem, per exemple sobre $\mathbb{C}$ (però no sobre $\mathbb{R}$) i per tant la seva aparició és més de caire algebraic que geomètric.
3. $\Lambda = \left\{-1, 2, \frac{1}{2}\right\}$. Aquesta possibilitat apareix sempre (amb l'única hipòtesi de que la característica del cos no sigui 2), està relacionada amb el concepte de punt mig de la geometria afí i es dona si, i només si, $q_1, \ldots, q_4$ estan en *quaterna harmònica.*

Definició 2.7.10 (Quaterna harmònica). Direm que els punts q_1, q_2, q_3, q_4 formen quaterna harmònica si:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = -1.$$

Utilitzant la informació que hem trobat sobre la variació de la raó doble per permutacions obtenim que si tenim una quaterna harmònica q_i, aleshores:

$$\begin{aligned}(q_2, q_1, q_4, q_3) = (q_3, q_4, q_1, q_2) = (q_4, q_3, q_2, q_1) = (q_2, q_1, q_3, q_4) = \\ = (q_1, q_2, q_4, q_3) = (q_4, q_3, q_1, q_2) = (q_3, q_4, q_2, q_1) = -1\end{aligned}$$

S'observa que els quatre punts estan agrupats en dues parelles $\{q_1, q_2\}$ i $\{q_3, q_4\}$ de manera que l'ordre dintre de les parelles o l'ordre en que posem les parelles en la raó doble no influeix en la propietat de formar quaterna harmònica. Això justifica la següent definició que usarem molt sovint.

Definició 2.7.11 (Separació harmònica). Direm que dues parelles de punts $\{q_1, q_2\}$ i $\{q_3, q_4\}$ se *separen harmònicament*:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = -1.$$

El següent resultat ens proporciona una forma efectiva de construcció de quaternes harmòniques a partir de quatre rectes del pla projectiu $\ell_1, \ldots, \ell_4$ formant un quadrilàter complet; és a dir, tals que no hi ha tres de concurrents. Utilitzem la notació $p_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$.

Teorema 2.7.12 (Teorema del quadrilàter complet). *Siguin D, D' els vèrtexs del triangle diagonal del quadrilàter alineats amb p_{12}, p_{34}. Amb aquesta notació, la parella $\{D, D'\}$ separa harmònicament la parella p_{12} i p_{34}. En aquesta situació, tenim $(p_{12}, p_{34}, D, D') = -1$:*

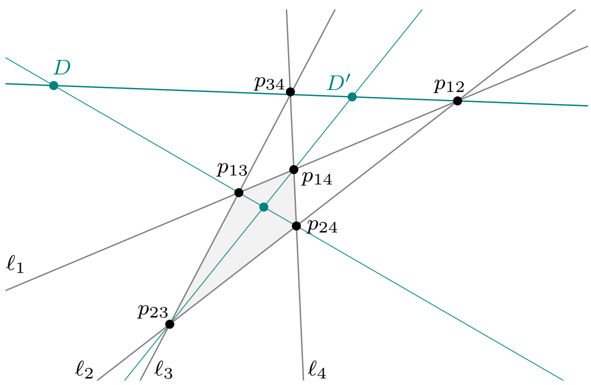


Figura 2.3: Teorema del quadrilàter complet

Demostració. La demostració del teorema del quadrilàter complet és senzilla de fer en coordenades si triem una referència adequada. Per exemple, podem triar la referència: $\mathcal{R} = (p_{23}, p_{13}, p_{24}; p_{14})$, que és una referència per la definició de quadrilàter complet. Aleshores, podem calcular les coordenades dels punts que ens interessen en aquesta referència: $p_{12} = [1:0:1], p_{34} = [1:1:0], D = [0:1:-1]$ i $D' = [2:1:1]$. Efectivament:

$$([1:1:0],[1:0:1],[0:1:-1],[2:1:1]) = -1.$$

De manera que les dues parelles de punts se separen harmònicament. ■

Observació 2.7.13. La raó doble és invariant per les projectivitats. Això ens indica que és un objecte (un element de $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$) projectiu.

Proposició 2.7.14. *Sigui $\varphi = [f] : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ una projectivitat amb isomorfisme associat $f : E_1 \longrightarrow E_2$. Siguin q_i quatre punts alineats de $\mathbb{P}_1$ dels quals almenys tres són diferents. Aleshores, també hi ha almenys tres punts diferents entre els punts $\varphi(p_i)$ i*

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = (\varphi(q_1), \varphi(q_2), \varphi(q_3), \varphi(q_4)).$$

Idea de la demostració. Fixem una referència tant a $\mathbb{P}_1$ com a $\mathbb{P}_2$, amb les respectives bases adaptades a E_1 i E_2. En aquesta base, f tindria una matriu M. Aplicant la definició de raó doble ens quedaria que:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\det\begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} x_3 & x_2 \\ y_3 & y_2 \end{pmatrix}} : \frac{\det\begin{pmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{pmatrix}},$$

coordenades els vectors que representen $q_1, \ldots, q_4$ en base E. Ara, volem calcular la raó doble de les respectives imatges, per veure que són, en efecte, iguals:

$$\begin{aligned}
(\varphi(q_1), \varphi(q_2), \varphi(q_3), \varphi(q_4)) &= \frac{\det\left(M\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} M\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)}{\det\left(M\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} M\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)} : \frac{\det\left(M\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} M\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)}{\det\left(M\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} M\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)} \\
&= \frac{\det M \cdot \det\begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{pmatrix}}{\det M \cdot \det\begin{pmatrix} x_3 & x_2 \\ y_3 & y_2 \end{pmatrix}} : \frac{\det M \cdot \det\begin{pmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{pmatrix}}{\det M \cdot \det\begin{pmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{pmatrix}},
\end{aligned}$$

Es produeix una *cancel·lació* dels determinants d'M, obtenint la igualtat desitjada. ■

Demostració. La primera afirmació sobre l'existència de tres punts diferents és conseqüència de la bijectivitat de φ. Per una altra banda, gràcies als resultats obtinguts sobre les permutacions dels punts, demostrant la igualtat en qualsevol ordre la igualtat queda demostrada. Això ens permet suposar que els tres primers punts són diferents. Sigui e_i una base adaptada a la referència

$\mathcal{R} = (q_1, q_2; q_3)$, és a dir $q_1 = [e_1], q_2 = [e_2]$ i $q_3 = [e_1 + e_2]$. Si $q_4 = [ae_1 + be_2]$ tenim que $(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{a}{b}$. Aplicant φ obtenim:

$$\begin{aligned}\varphi(q_1) &= [f]([e_1]) = [f(e_1)] \\ \varphi(q_2) &= [f]([e_2]) = [f(e_2)] \\ \varphi(q_3) &= [f]([e_1 + e_2]) = [f(e_1 + e_2)] = [f(e_1) + f(e_2)]\end{aligned}$$

Per tant $f(e_1), f(e_2)$ és una base adaptada a la referència

$$(\varphi(q_1), \varphi(q_2); \varphi(q_3))$$

i com que

$$\varphi(q_4) = [f]([ae_1 + be_2]) = [f(ae_1 + be_2)] = [af(e_1) + bf(e_2)]$$

tenim que $(\varphi(q_1), \varphi(q_2), \varphi(q_3), \varphi(q_4))$ també és $\frac{a}{b}$. ■

La proposició anterior té l'aplicació següent: suposem donats quatre punts alineats q_i, almenys tres d'ells diferents, en un espai projectiu $\mathbb{P}^n$ amb $n > 1$ i suposem fixada una referència en aquest espai projectiu. Posem $q_i = [a_0^i : \ldots : a_n^i]$ i anomenem r a la recta d'alineació. Existiran dos índexs k, l tals que dels 4 vectors (a_k^i, a_l^i) almenys tres són no proporcionals dos a dos. Per simplificar suposem que $k = 0, l = 1$. Aleshores considerant la perspectiva φ de centre

$$[0 : 0 : 1 : \ldots : 0] \vee \ldots \vee [0 : 0 : 0 : \ldots : 1]$$

des de r a l'aresta

$$[1 : 0 : \ldots : 0] \vee [0 : 1 : 0 : \ldots : 0]$$

la imatge $\varphi(q_i)$ del punt q_i té coordenades $[a_0^i : a_1^i : 0 : \ldots : 0]$. Usant la referència subordinada a l'aresta aquest punt té coordenades $[a_0^i : a_1^i]$. Com les projectivitats mantenen raons dobles podem fer el càlcul de la mateixa usant la fórmula de la definició per a les primeres dues coordenades.

Observació 2.7.15.

- El teorema de quadrilàter complet es pot usar com a *mètode* per a trobar trobar una quaterna harmònica usant dos vèrtexs del triangle diagonal i dues interseccions convenients de les rectes (els punts p_{ij}). Usant perspectives es poden trobar moltes altres quaternes harmòniques.
- La raó doble és invariant per projecció i secció. Si agafem una perspectiva de $r \to s$ amb centre M, com sabem que és una projectivitat, tindrem que preserva raons dobles.

2.8 Problemes finals

Exercici 2.8.1. *Sigui l'espai projectiu $\mathbb{P}^2$, amb les referències $\mathcal{R}_1 = \{[-1, -2, -1], [2, 2, 2], [0, 0, 3]; [2, 3, 3]\}$ i $\mathcal{R}_2 = \{[-6, -10, -5], [-1, -3, 1], [3, 4, 7]; [-4, -9, 3]\}$.*

Demostració. Primer de tot, hem de normalitzar per a obtenir el representant:

$$(2,3,3) = \lambda_1(-1,-2,-1) + \lambda_2(2,2,2) + \lambda_3(0,0,3).$$

Si fem els càlculs obtenim que $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ i $\lambda_3 = \frac{1}{3}$. Ara sí que tenim la referència normalitzada, que queda: $\mathcal{R}_1 = \{[1,2,1],[1,1,1],[0,0,1];[2,3,3]\}$. Ara volem calcular la matriu de la canvi de base, no abans sense fer els càlculs pertinents:

$$\begin{aligned}
(1,2,1) &= 0\cdot(-6,-10,-5) - \frac{2}{5}(-1,-3,-1) + \frac{1}{5}(3,4,7),\\
(1,1,1) &= -\frac{2}{5}(-6,-10,-5) + \frac{17}{25}(-1,-3,1) - \frac{6}{25}(3,4,7),\\
(0,0,1) &= \frac{1}{5}(-6,-10,-5) - \frac{6}{25}(-1,-3,1) + \frac{8}{25}(3,4,7).\\
M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{17}{25} & -\frac{6}{25} \\ \frac{1}{5} & -\frac{6}{25} & \frac{8}{25} \end{pmatrix} \implies M_{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 5 \\ -10 & 17 & -6 \\ 5 & -6 & 8 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Qualsevol matriu proporcional a la matriu de canvi de base és matriu de canvi de referència. Els punts que ens demanen són els vectors propis de la matriu de canvi de referència:

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{M}_{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}[p]_{\mathcal{R}_1} = \ell[p]_{\mathcal{R}_2} \\ \mathcal{M}_{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}\cdot p = \ell p \end{array}\right\} \implies \begin{cases} p_1 = [0,1,2] \text{ VAP } 5 \\ p_2 = [1,-2,1] \text{ VAP } 25 \\ p_3 = [5,2,-1] \text{ VAP -5} \end{cases}$$ ■

Exercici 2.8.2.

1. *Determineu l'equació de la recta de* $\mathbb{P}^2$ *que passa pels punts* $[1:2:8]$ *i* $[-7:0:3]$.
2. *Determineu les equacions de la recta* r_1 *de* $\mathbb{P}^3$ *que passa pels punts* $[1:0:0:0]$ *i* $[0:0:1:0]$.
3. *Considereu la recta* r_2 *de* $\mathbb{P}^3$*:* $x+y+z-t=0$ *i* $x-y=0$. *Determineu les equacions de la recta que passa per* $[2:1:1:1]$ *i talla* r_1 *i* r_2.
4. *Determineu l'equació del pla de* $\mathbb{P}^3$ *determinat per* r_1 *i* r_3.

Demostració. El procediment d'aquest exercici és bastant rutinari, així que solament el farem aquest cop. Si la matriu resultant és quadrada, ens val amb calcular el determinant i igualar a 0. Si no, hem de calcular el rang, que ha de ser $n-1$. Per al primer apartat, doncs:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 8 \\ -7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff 6x_9 - 59x_1 + 14x_2 = 0.$$

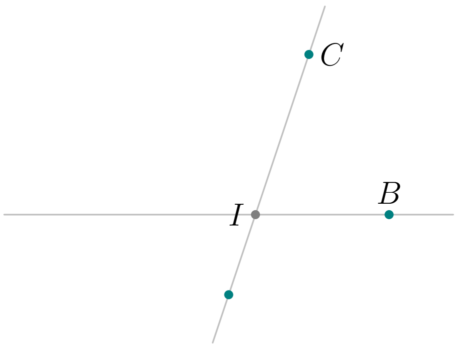
Per al segon apartat, cal que el rang sigui 2:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \iff r_1 = \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Per al tercer, sigui $[a : b : b : 0] \in r_1$. Podem expressar un punt de r_3 com $r_3 = [2+\lambda a, 1+\lambda b, 1+\lambda b, 1] \cap r_2$ si, i només si:

$$\left.\begin{array}{c} 2+\lambda a+1+\lambda b+1+\lambda b-1=0 \\ 2+\lambda a = 1+\lambda b \end{array}\right\} \implies \begin{array}{c} \lambda_a = -\frac{5}{3} \\ \lambda_b = -\frac{2}{3} \end{array} \implies r_3 = [1:1:1:3] \vee [2:1:1:1].$$

Finalment, si calculem el punt de tall entre r_1 i r_3 obtenim $[5:2:2:0] = I$. Direm $C = [0:1:1:0]$ i $B = [1:0:0:2]$.



$$\pi = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = x_1 - x_2 = 0. \quad \blacksquare$$

III

Dualitat a l'espai projectiu

3.1

ESPAI PROJECTIU DUAL I PRINCIPI DE DUALITAT

Considerem un espai projectiu $(\mathbb{P}, E, \pi)$ de dimensió n i volem donar estructura d'espai projectiu al conjunt dels hiperplans de $\mathbb{P}$. Definim doncs

$$\mathbb{P}^{\vee} := \{H \subset \mathbb{P} \mid H \text{ és un hiperplà}\}.$$

La definició d'espai vectorial dual ens dona l'espai vectorial associat a $\mathbb{P}^{\vee}$ el projectiu dual que volem construir:

$$E^{\vee} := \{\omega : E \longrightarrow \mathbb{K} \mid \omega \text{ és lineal}\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K}).$$

és un espai vectorial de dimensió $n+1 = \dim E$ i si $e_0, \ldots, e_n$ és una base de E, aleshores $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ definida per $e_i^*(e_j) = \delta_i^k$ és una base de $E^{\vee}$ (l'anomenem base dual de la base e_i). Als vectors de $E^{\vee}$ els anomenem *formes*.
Un cop fixada una base una forma s'identifica amb una equació lineal homogènia en $n+1$ variables, per tant és natural utilitzar l'espai dual per a dotar d'estructura d'espai projectiu al conjunt dels hiperplans. Tot i que aquesta és la idea subjacent la definició es pot fer sense necessitat de fixar cap base. *Ens queda un últim pas per definir el projectiu dual.*

Proposició 3.1.1. *L'aplicació:*

$$\pi^{\vee} : E^{\vee} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{\vee}, \ w \longmapsto [\ker(\omega)].$$

és a dir, assignant a $\omega \in E^{\vee}$ el subespai $[\ker(\omega)]$ està ben definida i $(\mathbb{P}^{\vee}, E^{\vee}, \pi^{\vee})$ ***és un espai projectiu de dimensió*** *n.*

Demostració. Està ben definida perquè una forma no nul·la ω és automàticament exhaustiva (tot hiperplà $\mathbb{H} = [F]$ per a F subespai vectorial d'E) i per tant la dimensió del seu nucli és n, per tant $[\ker(\omega)]$ té dimensió $n-1$ i és un hiperplà. Veiem ara que és exhaustiva: sigui $H = [H_0]$ un hiperplà de $\mathbb{P}$. Sigui $v_1, \ldots, v_n$ una base de H_0 i sigui $v_0 \in E$ un vector que amplia aquesta base fins a una base $v_0, v_1, \ldots, v_n$ de E. Aleshores la forma ω definida per:

$$\omega(v_0) = 1, \omega(v_1) = 0, \ldots, \omega(v_n) = 0,$$

satisfà que $\ker(\omega) = H_0$. Per tant $\pi^{\vee}(\omega) = H$. Finalment considerem dues formes ω_1, ω_2 amb la mateixa imatge. Hem de veure que són proporcionals. Per hipòtesi tenim que $\ker(\omega_1) = \ker(\omega_2)$. Com abans, completem una base $v_1, \ldots, v_n$ d'aquest nucli comú fins a una base $v_0, \ldots, v_n$ de E. Les matrius de les formes en aquesta base (considerant 1 com una base en $\mathbb{K}$) seran de la forma:

$$\omega_1 = (a, 0, \ldots, 0) \quad \omega_2 = (b, 0, \ldots, 0).$$

amb a, b constants diferents de zero. Per tant $\omega_2 = \frac{b}{a}\omega_1$. ∎

Definició 3.1.2 (Varietat lineal dual). Fixem ara un varietat lineal $\mathbb{L} = [F]$ en $\mathbb{P}$ i estudiem el conjunt dels hiperplans que la contenen, posem:

$$\mathbb{L}^* := \{H \in \mathbb{P}^\vee \mid \mathbb{L} \subset H\}.$$

la *varietat lineal dual*. Una varietat és varietat lineal de $\mathbb{P}^\vee$ si, i només si, existeix un subespai vectorial $F^\vee$ d'$E^\vee$ tal que $\mathbb{L}^* = [F^\vee]$. En aquest sentit, la següent cadena d'igualtats ens dona $\mathbb{L}^* = [F^\circ]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{L}^* &= \{H \in \mathbb{P}^\vee \bigm| \mathbb{L} \subset H\} = \{[\ker \omega] \in \mathbb{P}^\vee \bigm| [F] \subset [\ker \omega]\} = \{[\ker \omega] \in \mathbb{P}^\vee \bigm| F \subset \ker \omega\} \\ &= \{[\ker \omega] \in \mathbb{P}^\vee \bigm| \omega_{|F} = 0\} = \{\pi'(\omega) \in \mathbb{P}^\vee \bigm| \omega \in F^\circ\} = [F^\circ].\end{aligned}$$

Exemple 3.1.3. Per exemple en dimensió 2, si $\mathbb{L}$ és un punt, $\mathbb{L}^*$ és el conjunt de les rectes del pla que contenen el punt. És a dir el feix de rectes pel punt. Més en general diem feix d'hiperplans al conjunt dels hiperplans que contenen una varietat lineal de dimensió $n-2$.

Observació 3.1.4.

- Abans d'enunciar la proposició següent necessitem recordar que si $F \subset E$ és un subespai vectorial, aleshores el conjunt de les formes que s'anul·len en tots els vectors de F també és un subespai (el subespai anul·lador):

$$F^\circ := \{\omega \in E^\vee \mid \omega(u) = 0, \forall u \in F\},$$

  que té dimensió $\dim E - \dim F$. Cal recordar també que $(E^\vee)^\vee$ s'identifica canònicament amb E i que amb aquesta identificació $(F^\circ)^\circ = F$.
- En efecte, per la definició, si tenim $\mathbb{L} = [F]$, aleshores $\mathbb{L}^* = [F^\circ] = \{H \in \mathbb{P}^\vee \bigm| \mathbb{L} \subset H\}$.
- Estem usant la notació que s'ha començat a utilitzar a l'assignatura àlgebra lineal per distingir aquest subespai del subespai "ortogonal" en el cas en que E tingui un producte escalar. Tot i així és freqüent posar $F^\perp$ en comptes de F°.

Proposició 3.1.5. *L'assignació $\mathbb{L} \longmapsto \mathbb{L}^*$ dona una bijecció entre les varietats lineals de dimensió r de $\mathbb{P}$ i les varietats lineals de dimensió $n-r-1$ de $\mathbb{P}^\vee$.*

Demostració. El conjunt $\mathbb{L}^*$ definit més amunt és la varietat lineal de dimensió 1 $\mathbb{L}$ associada a F°. En particular, $(F^\circ)^\circ = F$ i $\dim F^\circ = (n+1) - \dim F$. Sigui $H = [\ker(\omega)]$ l'hiperplà representat per la forma ω. Aleshores H conté $\mathbb{L}$ si i només si $F \subset \ker(\omega)$ que equival a dir que ω s'anul·la sobre tots els vectors de F, és a dir que $\omega \in F^\circ$. Calculem ara la dimensió de L^*:

$$\dim \mathbb{L}^* = \dim F^\circ - 1 = n + 1 - \dim F - 1 = n - \dim F = n - \dim \mathbb{L} - 1. \qquad \blacksquare$$

Observació 3.1.6.

- Si $\mathbb{L}$ és un hiperplà, aleshores $\mathbb{L}^*$ té dimensió $n-1-(n-1) = 0$ i aquesta bijecció ens diu de nou que els punts de $\mathbb{P}^\vee$ corresponen a hiperplans de $\mathbb{P}$.
- Si $\mathbb{L}$ té dimensió $n-2$, aleshores L^* és una recta en $\mathbb{P}^\vee$, per tant els feixos d'hiperplans també es poden pensar com rectes de l'espai projectiu dual.

- *Les propietats següents s'han vist al curs d'àlgebra lineal.* Si F_1, F_2 són dos subespais vectorials qualssevol de E:

$$\begin{aligned} &(F_1 + F_2)^\circ = F_1^\circ \cap F_2^\circ \\ &(F_1 \cap F_2)^\circ = F_1^\circ + F_2^\circ \\ &F_1 \subset F_2 \Longleftrightarrow F_1^\circ \supset F_2^\circ \\ &E^\circ = (0), (0)^\circ = E^\vee. \end{aligned}$$

  En aquest sentit, es tradueixen immediatament en les propietats següents de la bijecció $*$ que estem estudiant (L_1, L_2 són dues varietats qualssevol en $\mathbb{P}$):

$$\begin{aligned} &(L_1 + L_2)^* = L_1^* \cap L_2^* \\ &(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* + L_2^* \\ &L_1 \subset L_2 \Longleftrightarrow L_1^* \supset L_2^* \\ &\mathbb{P}^* = \emptyset, \quad \emptyset^* = \mathbb{P}^\vee. \end{aligned}$$

Exemple 3.1.7. En el que segueix, quan diem que hem dualitzat una figura lineal volem dir que considerem la figura lineal que apareix al dual després d'aplicar l'operació $*$.

- En un espai projectiu $\mathbb{P}^2$ de dimensió 2 considerem un punt p sobre una recta l. Aleshores p^* és una recta en $\mathbb{P}^{2,\vee}$ que conté el punt l^*.
- De la mateix forma dos punts p_1, p_2 sobre una recta l de $\mathbb{P}^2$ dualitzen en dues rectes p_1^*, p_2^* i un punt l^* de manera que $p_1^* \cap p_2^* = l^*$.
- Observem que un triangle dualitza en un altre triangle de forma que els punts es dualitzen en els costats. Els feixos d'hiperplans dualitzen en rectes.
- El dual d'un quadrilàter complet és un quadrivèrtex i viceversa.

Com a conseqüència de tot l'exposat fins ara tenim el següent fet, el *principi de dualitat*.

Tot enunciat sobre figures lineals en un espai projectiu de dimensió n involucrant únicament les operacions $\subset, \supset, \vee, \cap$ i la noció de dimensió és equivalent a l'enunciat obtingut aplicant l'operació $*$. Dit d'una altra forma, la seva veracitat és equivalent a les de l'enunciat obtingut canviant dimensió r per dimensió $n-r-1$, $\subset$ per $\supset$ (i viceversa) i $\vee$ per $\cap$ (i viceversa).

Observació 3.1.8. El principi de dualitat no és un resultat en el sentit clàssic, per això no l'hem anomenat *teorema*. El que ens diu és que tota afirmació sobre figures lineals amb les operacions habituals té un enunciat *emparentat* que és igual de cert o fals que l'original. En particular ens permet demostrar només el que sigui més simple dels dos.

Amb el que sabem, podem demostrar l'altra implicació del teorema de Desargues que hem desestimat més a dalt, l'*autodualitat*. Volem demostrar que donats A, B, C, A', B', C', $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$ i $BC \cap B'C'$ estan alineats.

Autodualitat en el teorema de Desargues. Volem calcular els duals $(AA')^*$, $(BB')^*$ i $(CC')^*$, així com els de les interseccions que volem trobar alineades.

$$\begin{aligned}
(AA')^* &= (A \vee A')^* = A^* \cap (A')^* = p_1 \\
(BB')^* &= (B \vee B')^* = B^* \cap (B')^* = p_2 \\
(CC')^* &= (C \vee C')^* = C^* \cap (C')^* = p_3 \\
(AD \cap A'B')^* &= (AB)^* \vee (A'B')^* = \overline{(AB)^*(A'B')^*} \\
(AC \cap A'C')^* &= (AC)^* \vee (A'C')^* = \overline{(AC)^*(A'C')^*} \\
(BC \cap B'C')^* &= (BC)^* \vee (B'C')^* = \overline{(BC)^*(B'C')^*}
\end{aligned}$$

D'aquesta manera, estan alineats. ■

Definició 3.1.9 (Hiperplans linealment independents). Diem que una col·lecció de k hiperplans diferents $H_1, \ldots, H_k$ són *linealment independents* si els punts H_i^* de $\mathbb{P}^\vee$ ho són.

Recordem que $k+1$ punts són linealment independents si generen una varietat de dimensió k. Usant això:

Proposició 3.1.10. *Una col·lecció de k hiperplans diferents $H_1, \ldots, H_k$ són linealment independents si i només si* $\dim H_1 \cap \ldots \cap H_k = n - k$.

Demostració. Per la definició els hiperplans H_i són linealment independents si H_i^* són linealment independents, és a dir si $\dim H_1^* \vee \ldots \vee H_k^* = k - 1$. Com tenim que:

$$H_1^* \vee \ldots \vee H_k^* = (H_1 \cap \ldots \cap H_k)^*$$

això és equivalent a que la dimensió de $H_1 \cap \ldots \cap H_k$ sigui

$$n - 1 - \dim (H_1 \cap \ldots \cap H_k)^* = n - 1 - (k-1) = n - k,$$

de manera que $\dim H_1 \cap \ldots \cap H_k = n - k$. ■

Finalment, la dualitat ens permet definir la raó doble de quatre hiperplans tals que els seus dualitzats estiguin alineats.

Definició 3.1.11 (Raó doble d'hiperplans). Siguin $H_1, \ldots, H_4$ quatre hiperplans en un feix, és a dir tals que $H_1^*, \ldots, H_4^*$ estan alineats (equivalent a que $\dim H_1 \cap \ldots \cap H_4 = n - 2$). Suposem que almenys tres d'aquests quatre hiperplans són diferents. Aleshores definim la seva raó doble com

$$(H_1, \ldots, H_4) := (H_1^*, \ldots, H_4^*)\,.$$

En particular té sentit parlar de quaternes harmòniques d'hiperplans, de separació harmònica, etcètera, sempre que els hiperplans continguin una varietat lineal de dimensió $n-2$.

$$H_1^*, \cdots, H_4^* \text{ estan alineats} \iff \dim(H_1^* \vee H_2^* \vee H_3^* \vee H_4^*) \leq 1 \iff \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_4) \geq n-2.$$

Hem usat el fet que $H_1^* \vee H_2^* \vee H_3^* \vee H_4^* = (H_1 \cap \cdots \cap H_4)^*$.

3.2

Dualitat amb coordenades

Definició 3.2.1 (Referència dual)**.** Suposem donada una referència projectiva $\mathcal{R} = (p_0, \dots, p_n; A)$ en $\mathbb{P}^n$. Sigui $e_0, \dots, e_n$ una base adaptada a $\mathcal{R}$ (que és única llevat de múltiples). Aleshores la base dual $e_0^*, \dots, e_n^*$ determina en $\mathbb{P}^\vee$ una referència anomenada *referència dual*:

$$\mathcal{R}^\vee := ([e_0^*], \dots, [e_n^*]; [e_0^* + \dots + e_n^*]),$$

de la qual $e_0^*, \dots, e_n^*$ n'és base adaptada.

Observació 3.2.2. Donada una referència $\mathcal{R}$ tenim una referència $\mathcal{R}^\vee$ associada a $\mathbb{P}^\vee$, ja que si considerem la base adaptada $(\lambda e_0, \dots, \lambda e_n)$, la seva base dual és $(\frac{1}{\lambda}e_0^*, \dots, \frac{1}{\lambda}e_n^*)$.

$$(\lambda e_i)^*(\lambda e_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad e_i^*(\lambda e_j) = \begin{cases} \lambda, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

I aquesta base defineix la mateixa referència a $\mathbb{P}^\vee$.

Proposició 3.2.3. *Sigui $\mathbb{P}$ un espai projectiu amb una referència fixada $\mathcal{R}$. Si un hiperplà H té equació $A_0x_0 + \dots + A_nx_n = 0$ en la referència $\mathcal{R}$, aleshores el punt H^* de $\mathbb{P}^\vee$ té coordenades $[A_0 : \dots : A_n]$ en la referència dual $\mathcal{R}^\vee$. De fet, $\mathcal{R}^\vee$ és la única referència que ho compleix.*

Demostració feta a classe. $H = [\ker \omega]$ on $\omega : E \longrightarrow \mathbb{K}$ en la base $(e_1, \dots, e_n)$ a E i la base $\mathbb{1}$ a $\mathbb{K}$. ω té matriu $(A_0, \dots, A_n)$ i seran les seves coordenades en base $(e_0^*, \dots, e_n^*)$ on $(e_0^*, \dots, e_n^*)$ és la base dual d'una base adaptada a $\mathcal{R}$. Per tant, tal com hem agafat $\mathcal{R}^\vee$, $H^* = [A_0, \dots, A_n]$ a $\mathcal{R}^\vee$. *Ve a ser el mateix però sense detallar molt la sel·lecció de la referència.* ■

Demostració. Sigui $e_0, \dots, e_n$ una base adaptada a $\mathcal{R}$ i considerem la forma $\omega = A_0x_0 + \ldots + A_nx_n$. Per construcció $[\ker(\omega)] = H$, per tant $\omega \in E^\vee$ representa H en la base $(e_1, \dots, e_n)$ a E i en la base $\mathbb{1}$ a $\mathbb{K}$. Observem que la forma $x_i : E \longrightarrow \mathbb{K}$ (enviant $(x_0 \dots, x_n)$ a x_i) correspon a e_i^*, per tant les coordenades de H en la referència dual són $[A_0 : \ldots : A_n]$. ■

Observació 3.2.4. Observem que aquesta proposició dona un mètode per calcular la varietat dualitzada $\mathbb{L}^*$ d'una varietat $\mathbb{L}$ donada per intersecció d'hiperplans. Concretament, si $\mathbb{L}$ ve donada pel sistema d'equacions:

$$\begin{cases} A_0^0x_0 + \dots + A_n^0x_n = 0 \\ \qquad\qquad \dots \\ A_0^kx_0 + \dots + A_n^kx_n = 0 \end{cases}$$

aleshores

$$\mathbb{L}^* = \left[A_0^0 : \dots : A_n^0\right] \vee \dots \vee \left[A_0^k : \dots : A_n^k\right],$$

Proposició 3.2.5. *Amb les mateixes notacions, si $p \in \mathbb{P}$ és un punt de coordenades $[a_0 : \ldots : a_n]$ en la referència $\mathcal{R}$, aleshores, en la referència $\mathcal{R}^\vee, p^*$ és l'hiperplà d'equació $a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0$.*

Demostració. Sigui H un hiperplà de $\mathbb{P}$ d'equació $A_0x_0 + \ldots + A_nx_n = 0$. Aleshores $p \in H$ si i només si $A_0a_0 + \ldots + A_na_n = 0$, la qual cosa equival a dir que el punt de $\mathbb{P}^\vee$ de coordenades $[A_0 : \ldots : A_n]$ satisfà l'equació $a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0$. ■

Observació 3.2.6. Gràcies a aquesta proposició també podem calcular $\mathbb{L}^*$ quan $\mathbb{L}$ ve donada per punts que la generen. Si tenim:

$$\mathbb{L} = \left[a_0^0 : \ldots : a_n^0\right] \vee \ldots \vee \left[a_0^k : \ldots : a_n^k\right],$$

com a conseqüència de la proposició anterior $\mathbb{L}^*$ ve donada pel sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} a_0^0x_0 + \cdots + a_n^0x_n = 0 \\ \qquad\cdots \\ a_0^kx_0 + \cdots + a_n^kx_n = 0. \end{cases}$$

Proposició 3.2.7. *Siguin $H_1, \ldots, H_4$ quatre hiperplans, tres d'ells diferents, tals que $L = H_1 \cap \ldots \cap H_4$ té dimensió $n-2$. Sigui ℓ una recta tal que $l \cap L = \emptyset$. Aleshores:*

$$(H_1, \ldots, H_4) = (H_1 \cap \ell, \ldots, H_4 \cap \ell).$$

Existeix una recta, concretament ℓ, que talla els hiperplans com a mínim en tres punts diferents (ℓ és suplementària a $H_1 \cap \cdots \cap H_4$).

Demostració. Posem coordenades de manera que $\ell = [1 : 0 : \cdots : 0] \vee [0 : 1 : 0 : \ldots : 0]$ (escollim les dues primeres coordenades) i $\mathbb{L}$ estigui generada per $[0 : 0 : 1 : 0 : \cdots : 0] \vee \cdots \vee [0 : \cdots : 0 : 1]$. Per tant, com $\mathbb{L}$ pertany a la intersecció dels hiperplans, pertany a cadascun d'ells, i $A_3, \ldots, A_n = 0$ eventualment. L'equació de l'hiperplà H_i és de la forma $A_0^ix_0 + A_1^ix_1 = 0$. Per definició la raó doble dels hiperplans és:

$$\left(\left[A_0^1 : A_1^1 : 0 : \cdots : 0\right], \ldots, \left[A_0^4 : A_1^4 : 0 : \cdots : 0\right]\right) = \left(\left[A_0^1 : A_1^1\right], \ldots, \left[A_0^4 : A_1^4\right]\right),$$

on la igualtat prové de les discussions sobre la raó doble (invariància per projectivitat i ús de la referència subordinada). D'altra banda $\ell \cap H_i = [A_1^i : -A_0^i : 0 : \ldots : 0]$; per tant,

$$(H_1 \cap \ell, \ldots, H_4 \cap \ell) = \left(\left[A_1^1 : -A_0^1\right], \ldots, \left[A_1^4 : -A_0^4\right]\right).$$

Com que:

$$\begin{vmatrix} A_0^i & A_0^j \\ A_1^i & A_1^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^i & A_1^j \\ -A_0^i & -A_0^j \end{vmatrix}$$

Observem que la igualtat obtinguda diu en particular que la raó doble $(H_1 \cap \ell, \ldots, H_4 \cap \ell)$ és independent de ℓ. Això també es podia haver demostrat utilitzant perspectives. En efecte, si ℓ' és una altra recta disjunta amb $\mathbb{L}$, la perspectiva $\ell \longrightarrow \ell'$ de centre $\mathbb{L}$ transforma $\ell \cap H_i$ en $\ell' \cap H_i$ i per tant la raó doble és la mateixa. ■

3.3

Projectivitats duals

Definició 3.3.1 (Projectivitat associada). Sigui $\varphi = [f] : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ la projectivitat associada l'isomorfisme $f : E_1 \longrightarrow E_2$. Aleshores definim l'aplicació:

$$\varphi^\vee : \mathbb{P}_2^\vee \longrightarrow \mathbb{P}_1^\vee$$

de la forma $\varphi^\vee(H) = \varphi^{-1}(H)$.

Observació 3.3.2. Notem que l'antiimatge d'un hiperplà per una projectivitat és un hiperplà, per tant, a nivell de conjunts la definició té sentit. La raó per la que hem definit l'aplicació $\varphi^\vee$ prenent l'antiimatge de l'hiperplà en comptes de la imatge s'explica pel resultat següent.

Proposició 3.3.3. *L'aplicació $\varphi^\vee$ és la projectivitat associada a l'isomorfisme dual $f^\vee : E_2^\vee \longrightarrow E_1^\vee$, o sigui $\varphi^\vee = [f^\vee]$.*

Demostració. Sigui $H = [\ker(\omega)]$ l'hiperplà definit per la forma $\omega \in E_2^\vee$. Recordem que:

$$[f]^{-1}([\ker(\omega)]) = \left[f^{-1}(\ker(\omega))\right];$$

per tant, la proposició és conseqüència de la igualtat:

$$f^{-1}(\ker(\omega)) = f^{-1}\left(\omega^{-1}(0)\right) = \ker(\omega \circ f),$$

ja que $f^\vee(\omega)$ és per definició $\omega \circ f$. ■

IV

Projectivitats

L'objectiu d'aquest tema és utilitzar les coordenades projectives dels punts per representar les projectivitats en forma matricial o, equivalentment, expressades per equacions lineals homogènies. Podem utilitzar les propietats de les projectivitats (punts linealment independents es transformen en punts linealment independents, varietats lineals en varietats lineals de la mateixa dimensió, etcètera) per demostrar que la imatge d'una referència (és a dir, la imatge dels vèrtexs de la referència) és una referència. El resultat que anem a enunciar a continuació ens diu que l'invers és cert: donades referències en tots dos espais projectius hi ha una única projectivitat que transforma l'una en l'altra.

4.1 Representació matricial de les projectivitats. Varietats lineals invariants

Recordem que una projectivitat φ entre dos espais projectius $(\mathbb{P}_1, E_1, \pi_1)$ i $(\mathbb{P}_2, E_2, \pi_2)$ ve donada per un isomorfisme $f : E_1 \setminus \{0\} \longrightarrow E_2 \setminus \{0\}$ i que les aplicacions φ i f estan lligades per la condició $\varphi([u]) = [f(u)]$, per a u qualsevol. Diem que f és l'isomorfisme associat a φ i està determinat llevat de constant.

Teorema 4.1.1 (Teorema Fonamental de la Geometria Projectiva**).** *Donades dues referències $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ definides de la següent forma:*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= (p_0, \ldots, p_n; A) \ \ i \\ \mathcal{R}_2 &= (q_0, \ldots, q_n; B) \end{aligned}$$

en $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ respectivament, existeix una única projectivitat $\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ tal que $\varphi(p_i) = q_i$ i $\varphi(A) = B$. A més a més si $p = [x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}_1$ en la referència $\mathcal{R}_1$, aleshores $\varphi(p) = [x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}_2$ en la referència $\mathcal{R}_2$.

Demostració. Per a l'existència només hem de considerar bases adaptades $e_0, \ldots, e_n$ per a $\mathcal{R}_1$ i $v_0, \ldots, v_n$ per a $\mathcal{R}_2$ i considerar l'isomorfisme $f : E_1 \longrightarrow E_2$ determinat per $f(e_i) = v_i$ (que serà únic pel que vam veure a *Àlgebra Lineal*). Sigui $\varphi = [f]$. Aleshores:

$$\varphi(p_i) = \varphi([e_i]) = [f(e_i)] = [v_i] = q_i,$$

per a tot $i = 0, \ldots, n$. A més a més:

$$\varphi(A) = \varphi([e_0 + \ldots + e_n]) = [f(e_0 + \ldots + e_n)] = [v_0 + \ldots + v_n] = B.$$

Per demostrar la unicitat considerem una altra projectivitat ψ que compleixi $\psi(p_i) = q_i$ i $\psi(A) = B$. Sigui g l'isomorfisme associat $\psi = [g]$. Aleshores $[g(e_i)] = [f(e_i)] = q_i = [v_i]$, per tant $g(e_i) = \lambda_i v_i = \lambda_i g(u_i)$ i $f(u_0 + \cdots + u_n) = \lambda g(u_0 + \cdots + u_n)$. Com que:

$$[g][e_0 + \cdots + e_n] = [g(e_0 + \cdots + e_n)] = [\lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n] = B = [v_0 + \cdots + v_n],$$

tenim que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n$. Això implica que g és un múltiple de f la qual cosa implica que $\varphi = \psi$. Finalment, si $p = [x_0 e_0 + \ldots + x_n e_n]$, aplicant $[f]$ obtenim $\varphi(p) = [x_0 v_0 + \ldots x_n v_n]$. Com que $v_0, \ldots, v_n$ és una base adaptada a $\mathcal{R}_2$ trobem que les coordenades de p i de $\varphi(p)$ són les mateixes. ■

Exemple 4.1.2. Considerem dues rectes diferents r, s en un pla projectiu. Donats tres punts diferents dos a dos A, B, C en r i tres punts diferents dos a dos A', B', C' en s, aleshores existeix una única projectivitat $\varphi : r \longrightarrow s$ tal que $\varphi(A) = A', \varphi(B) = B', \varphi(C) = C'$.

4.1.1 Matriu associada a una projectivitat

Sigui ara una projectivitat $\varphi = [f] : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ i suposem donades una referència $\mathcal{R}_1 = (p_0, \ldots, p_n; A)$ de $\mathbb{P}_1$ i una referència Ω de $\mathbb{P}_2$. Volem construir una matriu que permeti calcular les coordenades del punt $\varphi(p)$ en la referència Ω en funció de les coordenades de p en la referència $\mathcal{R}_1$. Sigui $\mathcal{R}_2 = (q_0, \ldots, q_n; B)$ la referència imatge, on

$$q_0 = [f](p_0), \ldots, q_n = [f](p_n),$$

i $B = [f](A)$.

Observació 4.1.3 (Conclusions respecte la matriu associada a una projectivitat).

- Pel *Teorema Fonamental de la Geometria Projectiva* tenim que, usant les referències $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ a la sortida i a l'arribada respectivament, la matriu que busquem és la identitat.
- La matriu que estem buscant és la matriu de canvi de coordenades de $\mathcal{R}_2$ a Ω. Observem que agafant bases adaptades a $\mathcal{R}_1$, i Ω obtenim que la matriu de φ és simplement la matriu de f en aquestes bases.

Exemple 4.1.4. Considerem en una espai projectiu $\mathbb{P}^2$ de dimensió 2 amb referència fixada una projectivitat $[f]$ tal que

$$\left.\begin{aligned} &[f]([1:0:0]) = [2:2:2],\\ &[f]([0:1:0]) = [0:0:3],\\ &[f]([0:0:1]) = [2:-1:-1],\\ &[f]([1:1:1]) = [-1:2:3]. \end{aligned}\right\} \not\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}!$$

Observació 4.1.5. Notem que no val amb posar les coordenades directament, sinó que hem de normalitzar-les abans de posar la matriu de canvi de referència M.

Aquí les referències $\mathcal{R}_1$ i Ω són les mateixes i la referència $\mathcal{R}_2$ seria $([2:2:2], [0:0:3], [2:-1:-1:], [-1:2:3])$. Hem de trobar la matriu de canvi de coordenades de $\mathcal{R}_2$ en funció de

$\Omega = \mathcal{R}_1$. Normalitzem la referència canviant els representants dels primers tres punts de manera que la seva suma sigui el quart, obtenim $(1,1,1),(0,0,1),(-2,1,1)$. Aleshores la matriu és:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies f\left([x_0 : x_1 : x_2]\right) = M \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Recordeu que M està determinada llevat de multiplicar per una constant diferent de zero.

4.1.2 Equacions d'una projectivitat

Un cop fixades les referències i trobada la matriu associada $M = \left(a^i_j\right)$ trobem una expressió en forma d'equacions. Si posem $p = [x_0 : \ldots : x_n]$, un punt de l'espai projectiu de sortida, i $f(p) = [x^*_0 : \ldots : x^*_n]$ tenim que:

$$\begin{pmatrix} a^0_0 & \ldots & a^0_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^n_0 & \ldots & a^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^*_0 \\ \vdots \\ x^*_n \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$x^*_i = a^i_0 x_0 + \ldots + a^i_n x_n, \quad i = 0, \ldots n.$$

Observació 4.1.6. Observem que donades equacions com les anteriors, si la matriu associada $M = \left(a^i_j\right)$ té determinant diferent de zero, aleshores defineix una projectivitat: en efecte, si e_i, v_j són bases adaptades a les referències considerem f l'isomorfisme que té matriu M en aquestes bases. Tindrem que $\varphi := [f]$ té matriu M.

Exemple 4.1.7. Anem a estudiar la matriu d'una perspectiva entre dues rectes diferents r, s del pla amb centre en un punt $p \notin r \cup s$. Posem $O = r \cap s$. Considerem al pla la referència $(O, A, B; P)$ on $A \in r, B \in s$ i A, B, P no estan alineats. Aleshores un punt de r és de la forma $[a : b : 0]$ i l'equació de s és $x_1 = 0$. La intersecció de la recta $[1 : 1 : 1] \vee [a : b : 0]$ amb $y = 0$ és $[a - b : 0 : -b]$. Per tant utilitzant referències subordinades a r i s tenim que $[a : b]$ es transforma en $[a - b : -b]$. En equacions i matriu associada

$$\begin{aligned} a^* &= a - b \\ b^* &= -b \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposició 4.1.8 (Projectivitat dual). *Sigui $\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ una projectivitat amb isomorfisme associat $f : E_1 \longrightarrow E_2$. Suposem donades referències $\mathcal{R}_i$ a $\mathbb{P}_i$, també $\mathcal{R}^\vee_i$ a $\mathbb{P}^\vee_i$ al dual. Si la matriu de φ en aquestes referències és M (és la matriu de f en bases adaptades $e_0, \ldots, e_n$ i $f_0, \ldots, f_n$) aleshores la matriu de $\varphi^\vee : \mathbb{P}^\vee_2 \longrightarrow \mathbb{P}^\vee_1$, amb assignació $H \longmapsto \varphi^{-1}(H)$, en les referències duals $\mathcal{R}^\vee_i$, serà la matriu de $f^\vee$ en bases $(f^*_0, \ldots, f^*_n)$ i $(e^*_0, \ldots, e^*_n)$ serà M^T.*

Demostració. Vam veure que l'endomorfisme associat a $\varphi^\vee$ és $f^\vee$. D'altra banda les bases adaptades a les referències duals són les respectives bases duals. La proposició és conseqüència del següent resultat d'àlgebra lineal: la matriu de l'aplicació dual en les bases duals és la matriu transposada de la matriu de l'aplicació lineal. ■

4.2
Punts fixos i hiperplans invariants

Definició 4.2.1 (Homografia). Anomenem *homografia* a les projectivitats d'un espai en ell mateix: $\varphi = [f] : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$. Junt amb les perspectives són les dues grans famílies de transformacions que estudiarem.

Per al cas de les homografies té sentit demanar-se, i ens donarà molta informació sobre l'homografia $\varphi = [f]$, quines varietats lineals queden invariants per la transformació, és a dir per a quines varietats lineals $\mathbb{L} = [F]$ tenim $\varphi(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$. És equivalent a calcular quins subespais vectorials $F \subset E$ satisfan $f(F) = F$. Aquest problema, amb tota generalitat, pot resultar força complicat.

Proposició 4.2.2. *Sigui $\varphi = [f] : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ una homografia de l'espai projectiu $\mathbb{P}$. Aleshores:*

- *Un punt $p = [u]$ és fix si i només si u és un vector propi per f.*
- *Un hiperplà H és invariant si i només si H^* és un punt fix de $\varphi^\vee$.*

Demostració. Els punts fixos són aquells p tals que $\varphi(p) = p$. Com que també $[f(u)] = [u]$, clarament $f(u) = \lambda u$. Per tant, p és un punt fix si, i només si, $p = [u]$ amb un VEP de f. Pel que fa als hiperplans, anàlogament $\varphi(H) = H$ per definició i, com φ és bijectiva, $H = \varphi^{-1}(H)$. Això passa si, i només si H és un punt fix de $\varphi^\vee$ si, i només si, H ve representat per un VEP de $f^\vee$. ■

Observació 4.2.3. No és cert que si p, q són punts fixos $p \vee q$ és una recta de punts fixos (com passava a *Geometria Lineal*) però sí que és una recta invariant. En aquest sentit, els punts fixos d'una projectivitat no són necessàriament una varietat lineal. La combinació lineal de VEPs de VAPs diferents no són VEPs en general. El següent corol·lari pot ser d'utilitat en aquest sentit.

Corol·lari 4.2.4. *Sigui φ una projectivitat. Un cop fixada una referència $\mathcal{R}$, els punts fixos els trobem calculant els vectors propis de la matriu associada M i els (coeficients dels) hiperplans invariants es calculen trobant els vectors propis de M^T.*

Observació 4.2.5. Com que la forma de Jordan de M i M^T és la mateixa trobem una mena de *principi de dualitat* entre varietats invariants: la configuració de punts fixos i hiperplans invariants ha de ser quantitativament la mateixa. Per exemple:

- Una recta invariant amb tres punts fixos és una recta de punts fixos. Això és perquè la imatge de tres punts (que formen referència a $\mathbb{P}^1$) determina la projecció restringida a la recta. Si els tres són fixos, $f|_r = Id_r$.
- En general, una homografia del pla amb tres punts fixos té exactament tres rectes invariants (que per força seran les tres rectes determinades pels tres punts). Encara al pla, l'existència d'una recta de punts fixos implica l'existència d'un feix de rectes invariants (una recta de punts fixos al dual), etcètera.

És útil tenir present alguns fets elementals sobre varietats lineals invariants:

1. Donades dues varietats lineals invariants $L_1 = [F_1], L_2 = [F_2]$ per a una homografia $\varphi = [f]$ tenim que la suma $L_1 \vee L_2$ és invariant (ja que en ser F_1, F_2 invariants per f també ho és $F_1 + F_2$).
2. Com a cas particular del primer apartat, la recta que determinen dos punts fixos és invariant. Pel Teorema Fonamental de la Geometria Projectiva, si tenim tres punts fixos sobre una recta, aleshores tots els punts són fixos, ja que tres punts formen referència.
3. Utilitzant l'expressió paramètrica de les varietats lineals és fàcil deduir que si una varietat lineal L està generada per punts $p_0, \ldots, p_k$ i $\varphi(p_i) \in L$ aleshores L és invariant.
4. La intersecció de varietats lineals invariants és invariant.

4.3 Homologies

A continuació, definirem, tal com vam fer a *Geometria Lineal*, dos casos de projectivitats amb unes certes peculiaritats: la *homologia general* i la *homologia especial*, totes dues a $\mathbb{P}^2$.

Definició 4.3.1 (Homologia general de $\mathbb{P}^2$)**.** Sigui $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ una homografia que té un punt fix P i una recta r de punts fixos tal que $P \notin r$.

1. El feix de rectes per P és un feix de rectes fixes.
2. Donat $Q \in \mathbb{P}^2, Q \notin R$ i $Q \notin P$, sigui $\overline{Q} = PQ \cap r$. $(P, \overline{Q}, Q, \varphi(Q))$ no depèn del punt Q escollit. Si anomenem λ a aquesta raó doble, diem que φ és una *homologia general de centre P, eix r i raó λ.*
3. Sigui $f : E \longrightarrow E$ un representant qualsevol de φ. f té dos valors propis, un de multiplicitat 1, un de multiplicitat 2 i el seu quocient és λ.

Definició 4.3.2 (Homologia especial de $\mathbb{P}^2$)**.** Sigui $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ una homografia que té una recta r de punts fixos i cap més punt fix.

1. Existeix un feix de rectes fixes (invariants) per un punt $P \in r$. φ s'anomena *homologia especial d'eix r i centre P.*

V

Espai afí i espai projectiu

En aquest tema considerem un espai afí $(\mathbb{A}^n, F, \phi)$ sobre un cos $\mathbb{K}$ de dimensió finita n. En particular F és un espai vectorial de dimensió n actuant en $\mathbb{A}^n$ via ϕ:

$$\phi : \mathbb{A}^n \times F \longrightarrow \mathbb{A}^n, \quad (p, v) \longmapsto p + v,$$

de manera que $p+(u+v) = (p+u)+v$ i fixat un punt p qualsevol, l'aplicació $\phi_{|\{p\}\times F} : F \longrightarrow \mathbb{A}^n$ que envia v a $p + v$ és bijectiva.

5.1 Compleció projectiva de l'espai afí

Volem completar (i compactificar) aquest espai afí a un espai projectiu de manera que l'espai afí esdevingui el complementari d'un hiperplà i volem que aquest hiperplà parametritzi les direccions del nostre espai afí $\mathbb{A}^n$ (o de l'espai vectorial F).
Així doncs, com a conjunt de punts, la compleció projectiva de $\mathbb{A}^n$, que denotarem per $\overline{\mathbb{A}^n}$, és $\mathbb{A}^n \sqcup H_\infty$, on H_∞ és un hiperplà de $\overline{\mathbb{A}^n}$. *Però, aquest conjunt té una estructura d'espai projectiu natural? Quin és l'espai vectorial E i l'aplicació exhaustiva $\pi : E \setminus \{0\} \longrightarrow \overline{\mathbb{A}^n}$ que li donen estructura de manera que H_∞ parametritzi les direccions de $\mathbb{A}^n$?*
Les direccions són determinades per F: $\mathbb{P}(F)$ representa les direccions a $\mathbb{A}$. Considerem $\overline{\mathbb{A}^n} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}(F)$ on $\mathbb{A}^n = (\mathbb{A}^n, F, \phi)$ espai afí, $E \cong F \times \mathbb{K}$ un $\mathbb{K}$-espai vectorial i l'aplicació:

$$\begin{array}{rccl} \pi : & E \setminus \{0\} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{A}^n} \\ & (k, v) & \longmapsto & \begin{cases} p + \frac{1}{k}v \in \mathbb{A}^n & \text{si } k \neq 0, \\ [v] & \text{si } k = 0. \end{cases} \end{array}$$

Clarament, $\mathbb{P}(F) \subset \overline{\mathbb{A}^n}$ (diem que $\overline{\mathbb{A}^n}$ és la *compleció* d'$\mathbb{A}^n$). $\mathbb{P}(F)$ és un espai projectiu de dimensió $n-1$; per tant, un hiperplà d'$\overline{\mathbb{A}}^n$. Se l'anomena *hiperplà de l'infinit d'*$\overline{\mathbb{A}}^n$, i el denotarem per H_∞. Cada punt d'H_∞ representa una direcció a $\mathbb{A}^n$. Els punts d'H_∞ s'anomenen *punts impropis* (són els nous punts), i els punts d'$\overline{A^n} \setminus H_\infty$ s'anomenen *punts propis* (a classe hem considerat directament que tot punt de $\mathbb{A}^n$ és un punt propi).

Definició 5.1.1 (Compleció projectiva). Donat $\mathbb{A}^n = (\mathbb{A}, F, \phi)$, considerem $\mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}(F)$ que té estructura d'espai projectiu amb $\overline{A^n} = (\mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}(F), F \times \mathbb{K}, \pi)$ on:

$$\begin{array}{rccl} \pi : & E \setminus \{0\} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{A}^n} \\ & (k, v) & \longmapsto & \begin{cases} p + \frac{1}{k}v \in \mathbb{A}^n & \text{si } k \neq 0, \\ [v] & \text{si } k = 0. \end{cases} \end{array}$$

Observació 5.1.2. De totes maneres, aquesta aplicació π depèn de l'elecció del punt p, i com a tal, no és molt natural. Per construir l'espai E i l'aplicació π que no depengui d'eleccions arbitràries, és convenient considerar les funcions naturals de l'espai afí $\mathbb{A}^n$ al cos $\mathbb{K}$.

Definició 5.1.3 (Funció afí)**.** Una funció afí d'$\mathbb{A}^n$ és una aplicació $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que existeix un punt $p \in \mathbb{A}^n$ amb la propietat que la funció

$$\begin{array}{rccl} \psi_{f,p} : & F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & v & \longmapsto & f(p+v) - f(p) \end{array}$$

sigui lineal.

Exemple 5.1.4. Per exemple, si $\lambda \in \mathbb{K}$ és un element qualsevol, l'aplicació constant $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{K}, p \longmapsto \lambda$, és afí.

Donada una funció afí, és senzill veure que la funció $\psi_{f,p}(v) = f(p+v) - f(p)$ no depèn del punt p. En efecte, sigui q un punt qualsevol de $\mathbb{A}^n$. El podem escriure de manera única com $q = p+w$ amb $w \in F$ (és a dir, $w = \vec{p})$). Aleshores:

$$\begin{aligned} \psi_{f,q}(v) = f(q+v) - f(q) = f(p+w+v) - f(p+w) = f(p) + \psi_{f,p}(w+v) - f(p) - \psi_{f,p}(w) \\ = \psi_{f,p}(w+v) - \psi_{f,p}(w) = \psi_{f,p}(v) \end{aligned}$$

per linealitat. Per tant, una funció $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ és afí si per qualsevol punt $p \in \mathbb{A}^n, \psi_{f,p} : F \longrightarrow \mathbb{K}$ és lineal. A més, en aquest cas, la funció $\psi_{f,p}$ no depèn de p. Per això, quan no hi hagi confusió, escriurem directament ψ_f. Així doncs, les funcions afins compleixen:

$$f(q) = f(p) + \psi_f(\overrightarrow{pq}).$$

El conjunt de les funcions afins d'$\mathbb{A}^n_k$ és un espai vectorial.

Proposició 5.1.5. *El conjunt $G := \{f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{K} \mid f$ és una funció afí d'$\mathbb{A}^n\}$ és un espai vectorial de dimensió $n+1$.*

Demostració. Siguin f i g funcions afins. El fet que $\psi_{f,p}$ i $\psi_{g,p}$ siguin lineals per qualsevol $p \in \mathbb{A}^n$ fa que $\psi_{f+\lambda g,p} = \psi_{f,p} + \lambda\psi_{g,p}$ sigui lineal i, per tant, $f + \lambda g$ sigui una funció afí. Per calcular la dimensió, fixem un punt $p \in \mathbb{A}^n$ i observem que:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{K} \times F^\vee \\ f & \longmapsto & (f(p), \psi_f) \end{array} \tag{5.1.1}$$

és un isomorfisme, *que depèn d'un punt que és arbitrari però, d'altra banda, està fixat.* És senzill veure que és una aplicació lineal. La inversa ve donada per $(\lambda, \psi) \longmapsto g$, on $g(q) = \lambda + \psi(\overrightarrow{pq})$. ∎

Definició 5.1.6 (Espai projectiu $\overline{\mathbb{A}^n}$)**.** Denotem per $\overline{\mathbb{A}^n}$ l'espai projectiu $(\mathbb{P}(G^\vee, G^\vee, \pi))$.

Ara hem d'identificar un hiperplà H_∞ de $\overline{\mathbb{A}^n}$ tal que de manera natural hi hagi una bijecció:

$$\mathbb{A}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{A}^n} \setminus H_\infty.$$

Per tenir un hiperplà a $\overline{\mathbb{A}^n}$, hem de trobar un subespai vectorial de dimensió n de $G^\vee$ i això correspon a un subespai vectorial de dimensió 1 de G. Dins de les funcions afins, les funcions constants $K \subset G$ formen un subespai de dimensió 1 (estan generades per la funció constant $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{K}, p \longmapsto 1$). Per tant $K^\circ \subset G^\vee$ té dimensió n.

Definició 5.1.7 (Hiperplà de l'infinit, punts impropis i propis)**.** L'hiperplà de l'infinit $H_\infty \subset \overline{\mathbb{A}^n}$ és $[K^\circ]$. Els punts de l'hiperplà de l'infinit H_∞ s'anomenen punts *impropis* i els de $\overline{\mathbb{A}^n} \setminus H_\infty$ s'anomenen punts *propis*.

Exemple 5.1.8. En particular, $\dim H_\infty = n - 1$. Així, per exemple, l'hiperplà de l'infinit de $\overline{\mathbb{A}^2}$ és una recta.

Observació 5.1.9. L'isomorfisme que hem utilitzat a la demostració de la proposició anterior, (5.1.1), està format per dues aplicacions. Per un cantó, l'aplicació lineal, que no depèn de cap punt (en contrast amb (5.1.1)):

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & G & \longrightarrow & F^\vee \\ & f & \longmapsto & \psi_f. \end{array} \tag{5.1.2}$$

Per l'altre, l'aplicació a $\mathbb{K}$, que depèn del punt triat i, per tant, indueix l'aplicació següent:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev} : & \mathbb{A}^n & \longrightarrow & G^\vee \\ & p & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rccc} \mathrm{ev}_p : & G & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & f(p) \end{array} \right. \end{array}$$

En definitiva, en lloc de triar $\mathbb{K} \times F$, és molt més interessant agafar $G^\vee$.

Proposició 5.1.10. *Amb les notacions precedents tenim:*

1. *Existeix una projectivitat natural entre l'hiperplà de l'infinit H_∞ i $\mathbb{P}(F)$. La projectivitat ve induïda per $\Psi^\vee$.*
2. *Tenim una bijecció $\pi \circ \mathrm{ev} : \mathbb{A}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{A}^n} \setminus H_\infty$. En altres paraules, tenim una injectivitat natural de $\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}(G^\vee) = \overline{A^n}$ tal que la imatge sigui el complementari de l'hiperplà a l'infinit.*

Demostració. Observem que $K \subset \ker \Psi$ i com que tenen la mateixa dimensió $K = \ker \Psi$. Per tant, la imatge de l'aplicació dual $\Psi^\vee : F = F^{\vee\vee} \hookrightarrow G^\vee$ és exactament K° i això es tradueix en la projectivitat $\mathbb{P}(F) \xrightarrow{\sim} H_\infty$.
Per altra banda, l'aplicació $\mathbb{A}^n \xrightarrow{\mathrm{ev}} G^\vee \xrightarrow{\pi} \overline{\mathbb{A}^n}$ és injectiva i la seva imatge és $\overline{\mathbb{A}^n} \setminus H_\infty$. En efecte, suposem que $\lambda\, \mathrm{ev}_p = \mathrm{ev}_q$. Si les avaluem a les funcions constants, tenim que $\lambda = 1$. I ara notem que si $p \neq q$, aleshores existeix[1] una funció afí tal que $f(p) \neq f(q)$, fet que contradiu $\mathrm{ev}_p = \mathrm{ev}_q$. Per tant, la composició és injectiva.

[1] Si no existís, les funcions afins a $\mathbb{A}^n$ estarien en bijecció amb les funcions de afins del quocient $\mathbb{A}^n$ per la direcció $\langle p - q \rangle$. I això contradiu el càlcul de les dimensions que hem fet anteriorment.

Finalment, si restringim ev_p a les funcions constants, tenim que $\mathrm{ev}_p : K \longrightarrow \mathbb{K}$ és encara exhaustiva, per tant, $\mathrm{ev}(\mathbb{A}^n) \subseteq G^\vee \setminus K^\circ$. Per altra banda, com que ev és injectiva $\mathrm{ev}(\mathbb{A}^n)$ és un espai afí de codimensió 1 a $G^\vee$ i com que no intersecta l'hiperplà K°, ha de ser paral.lel a K°. L'estructura d'espai afí de $\mathrm{ev}(A^n)$ coincideix amb l'estructura de subespai afí de $G^\vee$ perquè:

$$\mathrm{ev}_{p+u} = \mathrm{ev}_p + \Psi^\vee(u).$$

Així doncs, $\pi \circ \mathrm{ev}(\mathbb{A}^n) = \overline{\mathbb{A}^n} \setminus H_\infty$. ■

Observació 5.1.11. El primer ítem justifica que l'hiperplà de l'infinit *parametritza*, mòdul constant, totes les direccions de l'espai afí. El segon, explica per què els punts de $\overline{\mathbb{A}^n} \setminus H_\infty$ s'anomenen *propis* (això és, per què $\mathbb{A}^n \subset \overline{\mathbb{A}^n}$). Així doncs, podem pensar que les dues estructures que apareixen separades en un espai afí (punts i vectors) conviuen com a punts en la seva compleció projectiva.

Considerar les funcions definides en un espai i prendre-les com a eina per fer noves construccions és una estratègia habitual en geometria. La construcció de la compleció de l'espai afí n'és un exemple.

5.1.1 Compleció projectiva de l'espai afí amb un punt marcat

Per calcular la dimensió de l'espai de les funcions afins, hem utilitzat a (5.1.1) que fixat un punt $p \in \mathbb{A}^n$ tenim un isomorfisme $G \longrightarrow \mathbb{K} \times F^\vee$, i per tant, també tenim un isomorfisme $G^\vee \longrightarrow \mathbb{K} \times F$.

Per tant, no és estrany que si tenim marcat un punt $p \in \mathbb{A}^n$ podem considerar la seva compleció $\overline{\mathbb{A}^n}$ amb també un punt marcat com $(\mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}(F), \mathbb{K} \times F, \pi)$ on π és l'aplicació definida directament per:

$$\begin{array}{rccl} \pi : & \mathbb{K} \times F \setminus \{0\} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{A}^n} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}(F) \\ & (k, v) & \longmapsto & \begin{cases} p + \frac{1}{k} v \in \mathbb{A}^n & \text{si } k \neq 0 \\ [v] \in \mathbb{P}(F) & \text{si } k = 0 \end{cases} \end{array} \tag{5.1.3}$$

on p és el punt marcat. Observem que amb aquesta aplicació $\mathbb{P}(F) = [\{0\} \times F]$, per tant $\mathbb{P}(F)$ és un hiperplà.

Per veure que aquesta tripleta defineix efectivament un espai projectiu primer cal comprovar que π és exhaustiva. I efectivament, si $q \in \mathbb{A}^n$ el podem posar $q = p + \overrightarrow{pq}$ i aleshores $\pi(1, \overrightarrow{pq}) = q$. Si $[u] \in \mathbb{P}(F)$ tindrem que $\pi(0, v) = [v]$.

I per altra banda, siguin (k, v) i (k', v') dos elements de $\mathbb{K} \times F$ que tenen la mateixa imatge per π. Si aquesta imatge és un punt de $\mathbb{P}(F)$ aleshores per força $k = k' = 0$. En aquest cas $[v] = [v']$ i els vectors v, v' són proporcionals. Si per contra la imatge és un punt de $\mathbb{A}^n$, tindrem que:

$$p + \frac{1}{k} v = p + \frac{1}{k'} v'.$$

Per tant, $\frac{1}{k} v = \frac{1}{k'} v'$; és a dir, (k, v) i (k', v') són proporcionals.

Observació 5.1.12. Podem comprovar que la construcció que fem amb un punt marcat és la mateixa. Primer veiem per la proposició 5.1.10 que els dos conjunts coincideixen i la projectivitat entre les dues estructures projectives ve donada per l'isomorfisme dual de (5.1.1):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times F & \longrightarrow & G^{\vee} \\ (k, v) & \longmapsto & \begin{cases} k\,\mathrm{ev}_{p+\frac{1}{k}v} = k\,\mathrm{ev}_p + \Psi^{\vee}(v) & \text{si } k \neq 0, \\ \Psi^{\vee}(v) & \text{si } k = 0. \end{cases} \end{array}$$

Com a conseqüència tenim que l'estructura projectiva a $\overline{\mathbb{A}^n}$ que construïm aprofitant un punt marcat, de fet no depèn del punt.

5.2 Estructura afí al complementari d'un hiperplà d'un espai projectiu

En aquesta secció veurem que la compleció que hem introduït a la secció anterior es pot invertir. És a dir, donat $\mathbb{P}^n = (\mathbb{P}^n, E, \pi)$ un espai projectiu i $H = [V] \subset \mathbb{P}^n$ un hiperplà, volem donar una estructura d'espai afí al conjunt $\mathbb{P}^n \setminus H$ (i a més que la compleció de $\mathbb{P}^n \setminus H$ sigui $\mathbb{P}^n$).
Volem definir l'espai vectorial F subjacent a $\mathbb{P}^n \setminus H$ i volem definir l'acció $\mathbb{P}^n \setminus H \times F \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus H$. És a dir, a un punt $p = [v] \in \mathbb{P}^n \setminus H$ li volem sumar un vector de F. Per altra banda, a la secció anterior hem vist que la relació entre els dos espais vectorials involucra certa dualitat.

Definició 5.2.1 (Espai vectorial subjacent i acció de l'espai afí)**.** Per això definim l'*espai vectorial subjacent* com: $F := \mathrm{Hom}(E/V, V)$. I si $\rho : E \longrightarrow E/V$ és el pas al quocient, definim l'*acció de l'espai afí* com:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^n \setminus H) \times F & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \setminus H \\ ([v], f) & \longmapsto & [v + f(\rho(v))]. \end{array}$$

Observem que $\dim(E/V) = 1$ i $\dim V = n$, per tant, $\dim F = n$ com volíem.

Ara caldria comprovar primer que l'acció està ben definida. És a dir, que $v + f(\rho(v)) \neq 0$, que $v + f(\rho(v)) \notin V$ i que $[v + f(\rho(v))]$ és independent del representant v de $p = [v]$. I també caldria comprovar per qualsevol punt proporciona una bijecció entre F i $\mathbb{P}^n \setminus H$ i que és efectivament una acció.
Deixem totes aquestes comprovacions com a exercici i donem una idea de perquè les dues construccions són inverses una de l'altra.

5.2.1 L'estructura afí al complementari de l'hiperplà de l'infinit

Observació 5.2.2 (Compleció, recordatori)**.** Sigui $(\mathbb{A}^n, F, \phi)$ un espai afí. Aleshores recordem que la seva *compleció* és $(\mathbb{P}(G^{\vee}), G^{\vee}, \pi)$ on G és l'espai vectorial de les funcions afins i $H_\infty = [K^\circ]$ on $K \subset G$ és el subespai de les funcions afins constants.

Proposició 5.2.3. *Així doncs, volem trobar un isomorfisme*

$$H : F \longrightarrow \operatorname{Hom}\left(G^\vee/K^\circ, K^\circ\right).$$

Demostració. Sigui $s : K \longrightarrow G$ la funció lineal que a cada valor $\lambda \in K$ li associa la funció afí constant de valor λ. El seu dual indueix un isomorfisme $s^\vee : G^\vee/K^\circ \longrightarrow K$.

Ara recordem que $K = \ker\Psi$ on $\Psi : G \longrightarrow F^\vee$ és l'aplicació lineal exhaustiva que associa a cada funció afí la seva «part» *lineal* (val la pena recordar (5.1.2)). Aleshores, tal com hem utilitzat a la demostració de la proposició 5.1.10, K° és la imatge de l'aplicació lineal injectiva $\Psi^\vee$, per tant $\Psi^\vee : F \longrightarrow K^\circ$ és un isomorfisme. L'isomorfisme H que busquem envia $v \in F$ a:

$$\begin{array}{rccl} H(v) : & G^\vee/K^\circ & \longrightarrow & K^\circ \\ & \alpha & \longmapsto & s^\vee(\alpha)\cdot\Psi^\vee(v). \end{array}$$

Podem comparar les dues accions afins a $\overline{\mathbb{A}^n}$ via la bijecció del segon apartat de la proposició 5.1.10. És a dir, volem veure que:

$$[\operatorname{ev}(p+v)] = [\operatorname{ev}(p) + H(v)(\rho(\operatorname{ev}(p)))].$$

Observem que $s^\vee(\rho(\operatorname{ev}(p))) = s^\vee(\operatorname{ev}(p)) = 1$. Per tant, $H(v)(\rho(\operatorname{ev}(p))) = \Psi^\vee(v)$. I això ens permet concloure, ja que les funcions afins són per definició de Ψ les que compleixen $\operatorname{ev}(p+v) = \operatorname{ev}(p) + \Psi^\vee(v)$. ■

5.2.2 La compleció de l'estructura afí del complementari d'un hiperplà

Sigui ara $(\mathbb{P}^n, E, \pi)$ un espai projectiu i $H = [V]$ un hiperplà. Considerem el conjunt $\mathbb{P}^n \setminus H$ amb espai vectorial subjacent $\operatorname{Hom}(E/V, V)$ i, com abans, denotem $\rho : E \longrightarrow E/V$ la projecció. Sigui ara $\eta \in E/V$ diferent de zero i considerem la composició:

$$\rho^{-1}(\eta) \hookrightarrow E \setminus V \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n \setminus H.$$

Aquesta aplicació és una bijecció. A més a més, $\rho^{-1}(\eta)$ és un espai afí amb espai vectorial subjacent V i $\mathbb{P}^n \setminus H$ també és un espai afí amb espai vectorial subjacent $\operatorname{Hom}(E/V, V)$. De fet, l'isomorfisme $V \longrightarrow \operatorname{Hom}(E/V, V)$ que envia v a l'aplicació $H_v : E/V \longrightarrow V$ determinada per $\eta \mapsto v$, indueix un isomorfisme d'espais afins entre $\rho^{-1}(\eta)$ i $\mathbb{P}^n \setminus H$.

Aleshores, la restricció de funcions:

$$\operatorname{Hom}(E, \mathbb{K}) \longrightarrow G := \left\{f : \rho^{-1}(\eta) \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ és funció afí}\right\}$$

és una aplicació injectiva entre espais vectorials de la mateixa dimensió, per tant, un isomorfisme. Així doncs, l'espai projectiu original $\mathbb{P}^n$ és també $\left(\mathbb{P}\left(G^\vee\right), G^\vee, \pi\right)$.

Observació 5.2.4. Hem vist que les dues construccions són inversa una de l'altra.

$$\mathbb{A}^n \rightsquigarrow \left(\overline{\mathbb{A}^n}, H_\infty\right) \rightsquigarrow \overline{\mathbb{A}^n} \setminus H_\infty = \mathbb{A}^n$$

$$(\mathbb{P}^n, H) \rightsquigarrow \mathbb{P}^n \setminus H \rightsquigarrow \left(\overline{\mathbb{P}^n \setminus H}, H_\infty\right) = (\mathbb{P}^n, H).$$

En el primer cas obtenim un isomorfisme natural d'espais afins i en el segon, obtenim un isomorfisme natural d'espais projectius amb un hiperplà marcat. En particular, donar un espai afí $\mathbb{A}^n$ dins d'un espai projectiu $\mathbb{P}^n$ és equivalent a fixar un hiperplà.

5.3

Compleció de l'espai afí en coordenades

El següent objectiu és definir una referència projectiva $\mathcal{R}$ a partir d'una referència afí $\mathcal{R}^a = (p; e_1, \ldots, e_n)$ i després comparar les coordenades cartesianes respecte de $\mathcal{R}^a$ amb les coordenades homogènies en la referència $\mathcal{R}$. En aquest cas, la referència afí $\mathcal{R}^a$ ja té un punt marcat (l'origen p), per tant, en aquesta secció, i sempre que treballem en coordenades partint d'una referència afí, podem considerar la compleció $\overline{\mathbb{A}^n}$ com $(\mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}(F), \mathbb{K} \times F, \pi)$ amb l'aplicació π definida a (5.1.3).

Observació 5.3.1. Per altra banda, el fet que l'estructura projectiva a $\mathbb{A}^n$ no depèn de si marquem un punt o no (observació 5.1.12) ens permetrà fer demostracions utilitzant coordenades, tal i com farem a partir de la secció següent. Comencem per observar que:

$$v_0 := (1,0), v_1 := (0, e_1), \ldots, v_n := (0, e_n)$$

formen una base de $\mathbb{K} \times F$ (són $n+1$ vectors linealment independents en un espai vectorial de dimensió $n+1$).

Definició 5.3.2 (Referència en $\overline{\mathbb{A}^n}$). Per tant podem considerar la referència projectiva associada:

$$\mathcal{R} = ([v_0] = p, [v_1] = [e_1], \ldots, [v_n] = [e_n]; [v_0 + \ldots + v_n] = p + e_1 + \ldots + e_n),$$

de la qual $v_0, \ldots, v_n$ n'és base adaptada.

Proposició 5.3.3. *Considerem les referències $\mathcal{R}^a$ en $\mathbb{A}^n$ i $\mathcal{R}$ en $\overline{\mathbb{A}^n}$ definides anteriorment. Tenim que:*

1. *Si les coordenades afins d'un punt propi són $(a_1, \ldots, a_n)$, aleshores les seves coordenades homogènies són $[1 : a_0 : \ldots : a_n]$.*
2. *Donat un vector $v \in F$ amb $v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, les coordenades homogènies de $[v] \in H_\infty$ són $[0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n]$.*

Demostració.

1. Sigui q un punt propi de coordenades cartesianes $(a_1, \ldots, a_n)$. Per definició tenim que $q = p + \sum a_i e_1$ i per tant un vector de $\mathbb{K} \times F$ representant q és $(1, a_1 e_1, \ldots, a_n e_n)$. Atès que:
$$(1, a_1 e_1, \ldots, a_n e_n) = (1,0) + a_1 (0, e_1) + \ldots + a_n e_n = v_0 + \sum a_i v_i$$
i que v_i és una base adaptada de $\mathcal{R}$, trobem $p = [1 : a_0 : \ldots : a_n]$.
2. De la mateixa forma el punt impropi $[v]$ està representat pel vector $(0, v) \in \mathbb{K} \times F$ que en la base adaptada té una expressió:
$$(0, v) = (0, \alpha_1 e_1 + \ldots \alpha_n e_n) = \alpha_1 (0, e_1) + \ldots \alpha_n (0, e_n).$$
Per tant $[v] = [0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n]$. ■

Observació 5.3.4. Observem que si denotem per $[x_0 : \ldots : x_n]$ les coordenades de l'espai projectiu $\overline{\mathbb{A}^n}$ en la referència $\mathcal{R}$ associada a la referència afí $\mathcal{R}^a$, aleshores H_∞ és l'hiperplà d'equació $x_0 = 0$. En particular un punt és propi si i només si satisfà $x_0 \neq 0$. En aquest cas podem posar les seves coordenades com:

$$\left[1 : \frac{x_1}{x_0} : \ldots : \frac{x_n}{x_0}\right]$$

i per tant $\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ són les seves coordenades afins.

5.4 Comparació de varietats lineals d'$\mathbb{A}^n$ i d'$\overline{\mathbb{A}^n}$.

Definició 5.4.1 (Varietat lineal impròpia). Sigui $\mathbb{L} \subset \overline{\mathbb{A}^n}$ una varietat lineal. Si $\mathbb{L} \subset H_\infty$ diem que és una varietat lineal impròpia. En aquest cas, $\mathbb{L} \cap \mathbb{A}^n = \emptyset$ i queda clar que $\mathbb{L}$ no prové d'un varietat lineal afí.

Definició 5.4.2 (Part pròpia). Sigui $\mathbb{L}$ una varietat lineal no impròpia ($\mathbb{L}$ no està continguda a l'hiperplà de l'infinit). Aleshores denotem per $\mathbb{L}^a$ el conjunt dels seus punts propis: $\mathbb{L}^a = \mathbb{L} \cap \mathbb{A}^n$. Diem que és la part pròpia o finita de $\mathbb{L}$.

Fixem un sistema de referència afí $\mathcal{R}_{afi} = \{0; e_1, \ldots, e_n\}$ i considerem en l'espai projectiu $\overline{\mathbb{A}^n}$ la referència projectiva associada, $\mathcal{R}_{proj} = \{0, [e_1], \ldots, [e_n]; 0 + e_1 + \cdots + e_n\}$. En aquesta referència projectiva les equacions de $\mathbb{L}$ seran de la forma:

$$\begin{aligned} a_0^1 x_0 + a_1^1 x_1 + \ldots + a_n^1 x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_0^k x_0 + a_1^k x_1 + \ldots + a_n^k x_n &= 0, \end{aligned}$$

on $\dim \mathbb{L} = n - k$ (és a dir les k equacions són linealment independents). Aleshores els punts de $\mathbb{L}^a$ són les solucions del sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} a_0^1 + a_1^1 x_1 + \ldots a_n^1 x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_0^k + a_1^k x_1 + \ldots a_n^k x_n &= 0. \end{aligned}$$

En particular $\mathbb{L}^a$ és una varietat lineal en $\mathbb{A}^n$. Observem que com $\mathbb{L}$ és pròpia aquest sistema és compatible. Per tant el rang de la matriu associada al sistema és el mateix que el de la matriu ampliada, que per hipòtesi és k. En definitiva $\dim \mathbb{L} = \dim \mathbb{L}^a$.

Proposició 5.4.3. *L'assignació $\mathbb{L} \longmapsto \mathbb{L}^a$ dona una bijecció entre el conjunt de les varietats lineals pròpies de dimensió r de $\overline{\mathbb{A}^n}$ i el conjunt de les varietats lineals de dimensió r de l'espai afí $\mathbb{A}^n$.*

Demostració. Ja hem vist que l'aplicació està ben definida. Per veure que és bijectiva, és suficient amb donar una inversa. Sigui M una varietat lineal afí de dimensió r donada pel sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + \dots a_n^1 x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_1^k x_1 + \dots a_n^k x_n &= b_k, \end{aligned}$$

on $k = n - r$. Aleshores el sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + \dots a_n^1 x_n &= b_1 x_0 \\ &\vdots \\ a_1^k x_1 + \dots a_n^k x_n &= b_k x_0 \end{aligned}$$

defineix una varietat lineal projectiva $\mathbb{L}$ de la mateixa dimensió i és clar que $\mathbb{L}^a = M$. ■

Donada una varietat lineal afí $\mathbb{M}$ denotarem per $\overline{\mathbb{M}}$ la varietat projectiva associada. La bijecció ens diu que $\mathbb{M} = (\overline{\mathbb{M}})^a$. Observem que si la varietat afí $\mathbb{M}$ s'escriu com $p + G$, on $G \subset F$ és el subespai director, aleshores les equacions de G són (tal com es veu al curs de geometria lineal) les de $\mathbb{M}$ un cop eliminats els termes independents, o equivalentment, com les equacions de $\overline{\mathbb{M}}$ fent $x_0 = 0$.

$$\overline{M} \cap H_\infty = \begin{cases} a_1^1 x_1 + \cdots + a_n^1 x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_1^m x_1 + \cdots + a_n^m x_n = 0 \end{cases} \quad \text{són les equacions del subespai director.}$$

Per tant trobem que: $\overline{\mathbb{M}} \cap H_\infty = [G]$.

Proposició 5.4.4. *Siguin $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2$ dues varietats lineals afins de subespais directors G_1, G_2 respectivament. Aleshores, són equivalents:*

1. *$\mathbb{M}_1$ i $\mathbb{M}_2$ són paral·leles.*
2. *$G_1 \subset G_2$ o $G_2 \subset G_1$.*
3. *$\overline{\mathbb{M}_1} \cap H_\infty \subset \overline{\mathbb{M}_2} \cap H_\infty$ o $\overline{\mathbb{M}_2} \cap H_\infty \subset \overline{\mathbb{M}_1} \cap H_\infty$.*

Exemple 5.4.5. Per exemple, donades dues rectes afins $r_1 = p_1 + \langle u_1 \rangle$ i $r_2 = p_2 + \langle u_2 \rangle$, tenim les interseccions $\overline{r_i} \cap H_\infty = [u_i]$ i per tant les rectes són paral·leles si i només si $\overline{r_1} \cap H_\infty = \overline{r_2} \cap H_\infty$.

5.5 Raó simple i raó doble

Al curs de geometria lineal s'ha definit el concepte de raó simple. És un escalar associat a tres punts alineats que mesura la posició relativa entre els punts. Més concretament, donats tres punts p_1, p_2, p_3 tals que p_2 i p_3 són diferents la raó simple dels tres punts és l'escalar $\rho = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{K}$ tal que $\overrightarrow{p_1 p_3} = \rho \cdot \overrightarrow{p_2 p_3}$. Observem que admetent la possibilitat $\rho = \infty$ és suficient suposar que dos dels tres punts són diferents (no necessàriament el segon i el tercer).

Proposició 5.5.1. *Siguin $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{A}^1$ tres punts sobre una recta afí dels quals almenys dos són diferents. Considerem la compleció projectiva $\overline{\mathbb{A}^1} = \mathbb{A}' \sqcup H_\infty$ de la recta afi i posem $H_\infty = \{p_\infty\}$. Aleshores:*

$$(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2, p_3, p_\infty).$$

Demostració. Suposem que $p_1 \neq p_2$ (si no, reordenem i la igualtat es preserva) i considerem a $\mathbb{A}^1$ la referència afí $(p_1, \overrightarrow{p_1p_2})$ i en $\overline{\mathbb{A}^1}$ la referència projectiva associada. Així dons els punts $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = a$ tenen coordenades projectives $p_1 = [1:0], p_2 = [1:1], p_3 = [1:a]$ i el punt de l'infinit és $p_\infty = [0:1]$. Calculem la raó simple i la raó doble i veiem que són iguals:

$$(p_1, p_2, p_3) = \frac{a-0}{a-1},$$

$$(p_1, p_2, p_3, p_\infty) = ([1:0],[1:1],[1:a],[0:1]) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a}{a-1}.$$

Amb això, ja hem acabat. ■

5.6 Afinitats i projectivitats

Siguin $\mathbb{A}^n$ i $\mathbb{A}^{n'}$ dos espais afins i considerem les respectives complecions projectives $\overline{\mathbb{A}^n}$ i $\overline{\mathbb{A}^{n'}}$ i els respectius hiperplans de l'infinit H_∞ i H'_∞.

Observació 5.6.1.

1. Una projectivitat $\overline{f} : \overline{\mathbb{A}^n} \longrightarrow \overline{\mathbb{A}^{n'}}$ no necessàriament envia punts propis a punts propis i per tant, si no posem cap hipòtesi addicional no determinarà una afinitat entre els espais afins inicials.
2. Com $\overline{f}$ és bijectiva, enviar punts propis a propis és equivalent a enviar impropis a impropis. És a dir, cal suposar que: $\overline{f}\,(H_\infty) = H'_\infty$ (hiperplà invariant, no necessàriament de punts fixos). Amb aquesta hipòtesi obtenim per restricció una aplicació entre espais afins a la que denotem per f: $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^{n'}$.

Anem a relacionar les equacions de $\overline{f}$ amb les de f. Suposem fixades referències afins en els espais afins inicials i considerem les referències associades en les seves complecions. Les equacions de $\overline{f}$ seran de la forma:

$$\begin{aligned} x_0^* &= a_0^0 x_0 + a_1^0 x_1 + \ldots + a_n^0 x_n \\ x_1^* &= a_0^1 x_0 + a_1^1 x_1 + \ldots + a_n^1 x_n \\ &\vdots \\ x_n^* &= a_0^n x_0 + a_1^n x_1 + \ldots + a_n^n x_n \end{aligned}$$

on $[x_0^* : \ldots : x_n^*]$ són les coordenades del punt imatge del punt de coordenades $[x_0 : \ldots x_n]$. Recordem que els punts de l'hiperplà de l'infinit en tots dos espais són els que tenen la primera coordenada nul·la. Tenim doncs que per a qualssevol $x_1, \ldots, x_n$ no tots nuls, la primera coordenada de $f([0 : x_1 : \ldots : x_n])$ és 0 $(x_0 = 0)$. Per tant, $a_1^0 x_1 + \ldots + a_n^0 x_n$ és idènticament nul·la i $a_i^0 = 0$ per $i = 1, \ldots, n$ (i $a_0^0 \neq 0$ donat que estem en una projectivitat). Podem suposar sense pèrdua de generalitat que $a_0^0 = 1$. La matriu de la projectivitat $\overline{f}$ serà de la forma:

$$M_{\overline{f}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline a_0^1 & a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \ldots & a_n^n \end{array}\right)$$

Abusem de la notació i seguim anomenant a_j^i a $\frac{a_j^i}{a_0^0}$.

Observació 5.6.2. Recordem que, com a Geometria Lineal, la matriu d'una afinitat en una referència afí podia donar qualsevol punt imatge amb la fórmula de (A.2.1).

Observació 5.6.3. Si en comptes d'introduir la «nova variable» x_0 a l'esquerra de les coordenades afins $x_1, \ldots, x_n$ ho haguéssim fet a la dreta, tindríem coordenades homogènies $[x_1 : \ldots : x_n : x_{n+1}]$ i l'hiperplà de l'infinit tindria equació $x_{n+1} = 0$. Això es podria aconseguir posant en la definició de la clausura projectiva $E = F \times \mathbb{K}$ i en la definició de referència associada $\mathcal{R} = ([e_1], \ldots, [e_n], p; p + \sum e_i)$. En aquest cas la matriu $M_{\overline{f}}$ seria de la forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_0^1 & a_1^1 & \ldots & a_{n-1}^1 & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \ldots & a_{n-1}^n & a_n^n \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{5.6.1}$$

Observació 5.6.4. Si g té una matriu de la forma (5.6.1), restringida a $\mathbb{A}^n$ serà una afinitat i viceversa si f és una afinitat.

VI

Quàdriques projectives i afins

L'objectiu d'aquest tema, i els successius fins a final de curs, és l'estudi de la geometria de les figures, projectives o afins, definides per equacions de segon grau. El referent més proper a vosaltres són probablement les còniques del pla afí: tots heu sentit a parlar de paràboles, hipèrboles i el·lipses, aquestes són quàdriques afins del pla que apareixeran quan tractem la classificació d'aquestes objectes.

Primer començarem estudiant les quàdriques en l'àmbit projectiu: matrius associades, equacions, relacions amb les varietats lineals, polaritat, etcètera. Després estudiarem les quàdriques afins i, finalment, estudiarem la seva classificació, tant de les projectives com de les afins. Una observació important és que, a diferència de les varietats lineals, els punts que satisfan les equacions quadràtiques no necessàriament determinen les equacions. Per exemple, sobre els reals una equació quadràtica pot no tenir solució. Això fa que la definició de quàdrica no sigui «el conjunt de punts que satisfan una equació de segon grau», sinó la pròpia equació. De fet, per donar una definició intrínseca (independent de coordenades), en comptes de l'equació usem la teoria de les formes bilineals que ja coneixeu de cursos anteriors. Un cop fixada una referència, la forma bilineal determina i està determinada per una equació de segon grau (i també, com veurem, per una matriu simètrica).

Acabem la introducció a aquesta part del curs, la darrera, fent notar que el cos base juga un paper molt important. Com s'ha dit, una equació de segon grau sobre els reals (o sobre els racionals) pot no tenir solució. Per això, la teoria de classificació de les quàdriques afins i projectives és de natura molt diversa en funció del cos fixat. Aquí ens limitarem a treballar amb els cossos $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

6.1 Definició de quàdrica de l'espai projectiu

Definició 6.1.1 (Quàdrica). Fixem un espai projectiu $(\mathbb{P}, E, \pi)$ de dimensió n sobre un cos $\mathbb{K}$ (de moment arbitrari, però de característica diferent de 2). Una quàdrica d'aquest espai projectiu és la classe, mòdul multiplicació per una constant no nul·la, d'una forma bilineal simètrica a E diferent de zero. *Per raons històriques a les quàdriques del pla ($n = 2$) les anomenem còniques.*

Observació 6.1.2. Recordem que una forma bilineal simètrica a E és una aplicació $\eta : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ lineal en cada variable, és a dir, per a qualssevol $u, u', v \in E$ i $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{array}{lll} \eta(u+u', v) = \eta(u,v) + \eta(u', v), & \eta(\lambda u, v) = \lambda\eta(u,v), & \text{(lineal respecte el primer factor);} \\ \eta(u, v+v') = \eta(u,v) + \eta(u, v'), & \eta(u, \lambda v) = \lambda\eta(u,v) & \text{(lineal respecte el segon factor).} \end{array}$$

Que sigui simètrica vol dir que $\eta(u,v) = \eta(v,u)$ per a qualssevol vectors $u, v \in E$. Notem que en la nostra definició les formes bilineals η i $k\eta$ són considerades equivalents (és el que vol dir «mòdul multiplicació per una constant no nul·la»).

Notació 6.1.3. Posarem $Q = [\eta]$ per referir-nos a la quàdrica associada a η. Suposem donada una referència $\mathcal{R} = (p_0, \ldots, p_n; A)$ en l'espai projectiu fixat i sigui $e_0, \ldots, e_n$ una base adaptada: $p_0 = [e_0], \ldots, p_n = [e_n], A = [e_0 + \ldots + e_n]$. Aleshores la matriu de Q en la referència $\mathcal{R}$ és la matriu següent:

$$M = \begin{pmatrix} \eta(e_0, e_0) & \ldots & \eta(e_0, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta(e_n, e_0) & \ldots & \eta(e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

Propietat 6.1.4.

1. *La matriu M té $n+1$ files i $n+1$ columnes i és simètrica.*
2. *Està definida llevat de multiplicació per constant: en efecte, si canviem η per $k\eta$, totes les entrades de la matriu queden multiplicades per k i per tant la matriu obtinguda és kM. D'altra banda, si considerem una altra base adaptada a la mateixa referència, haurà de ser de la forma $\lambda e_0, \ldots, \lambda e_n$. Atès que per la bilinealitat $\eta(\lambda e_i, \lambda e_j) = \lambda^2 \eta(e_i, e_j)$ la matriu queda modificada per la constant no nul·la λ^2.*
3. *La matriu permet «calcular» la forma bilineal en dos vectors $u = \sum a_i e_i, v = \sum b_j e_j$:*

$$\eta(u, v) = \eta\left(\sum a_i e_i, \sum b_j e_j\right) = \sum a_i b_j, \quad \eta(e_i, e_j) = \begin{pmatrix} a_0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Observació 6.1.5. Observem que, com les coordenades (i la matriu) estan definides llevat de multiplicar amb una constant, el valor de $\eta(u, v)$ és de poca utilitat. En canvi l'anul·lació o no d'aquest valor sí té ple sentit.

Definició 6.1.6 (Punts conjugats). Sigui $Q = [\eta]$ una quàdrica en un espai projectiu. Direm que dos punts $p = [u]$, $q = [v]$ són conjugats respecte de Q si $\eta(u, v) = 0$. Diem que un punt p pertany a Q o que la quàdrica Q passa pel punt si p és conjugat d'ell mateix (autoconjugat). És a dir si $p = [u]$ i $\eta(u, u) = 0$. Posem: $|Q| = \{\text{punts que pertanyen a } Q\}$.

Observació 6.1.7. Fixada una referència $\mathcal{R}$ com abans, denotem per M la matriu de Q en aquesta referència. Si les coordenades dels punts p i q són $[a_0 : \ldots : a_n]$ i $[b_0 : \ldots : b_n]$ respectivament tenim que p i q són conjugats si:

$$\begin{pmatrix} a_0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0. \text{ i } \begin{pmatrix} a_0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0. \text{ si } p \in |Q|.$$

6.2 Equacions de les quàdriques

Amb les mateixes notacions volem convertir el llenguatge de matrius en el d'equacions. Posem $a_{ij} = \eta(e_i, e_j)$, notem que $a_{ij} = a_{ji}$. Utilitzem la darrera expressió que hem obtingut: un punt variable $[x_0 : \ldots : x_n]$ pertany a Q si, i només si:

$$\begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

Desenvolupant aquesta expressió trobem la següent equació:

$$a_{00}x_0^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i\neq j} a_{ij}x_ix_j = 0.$$

Observeu que és una equació de segon grau en les variables $x_0, \ldots x_n$ i homogènia (tots els monomis tenen grau 2, no hi ha termes lineals ni terme independent).

Observació 6.2.1. A més a més, donada l'equació podem reconstruir la matriu mirant els coeficients de cada monomi. Per exemple el coeficient de x_i^2 és el terme (i,i) de la matriu, mentre que el coeficient de $x_ix_j, i \neq j$, és el doble que el del terme (i,j) (o (j,i)).

Proposició 6.2.2. *Fixada una referència en un espai projectiu les dades següents són equivalents:*

1. *Una quàdrica $Q = [\eta]$;*
2. *Una matriu $(n+1) \times (n+1)$ simètrica determinada llevat de constant;*
3. *Un polinomi de segon grau en les variables $x_0, \ldots, x_n$, homogeni i determinat llevat de constant.*

Exemple 6.2.3. Fixem un espai projectiu de dimensió n amb una referència fixada.

- Les matrius diagonals corresponen a les equacions de la forma $a_{00}x_0^2 + \ldots + a_{nn}x_{nn}^2 = 0$. Per exemple, la identitat correspon a $x_0^2 + \ldots + x_{nn}^2 = 0$.
- El producte de dues equacions homogènies de primer grau (corresponent a dos hiperplans H_1, H_2) proporciona una equació homogènia de segon grau que correspon a una quàdrica Q. En aquest cas $|Q| = H_1 \cup H_2$. Per exemple, els hiperplans d'equacions $x_0 = 0, x_1 = 0$ donen la quàdrica $x_0x_1 = 0$ que té matriu:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

- Suposem $n = 2$. Aleshores l'equació corresponent a la matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

serà $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_0x_1 + 6x_0x_2 - 2x_1x_2 = 0$. I viceversa: l'equació homogènia de segon grau $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2$ té matriu associada:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Observació 6.2.4. L'equivalència de la proposició 6.2.2 es pot obtenir sense fixar una referència. De fet, si $\eta : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ és una forma bilineal simètrica, podem definir l'aplicació $\theta : E \longrightarrow \mathbb{K}$ per $\theta(u) = \eta(u, u)$. L'aplicació θ permet recuperar la forma bilineal η (si la característica de $\mathbb{K}$ és diferent de 2). En efecte, la bilinealitat i la simetria de η impliquen que:

$$\theta(u+v) = \eta(u+v, u+v) = \eta(u,u) + \eta(u,v) + \eta(v,u) + \eta(v;v) = \theta(u) + 2\eta(u,v) + \theta(v);$$

de manera que $\eta(u,v) = \frac{1}{2}(\theta(u+v) - \theta(u) - \theta(v))$.

Definició 6.2.5 (Aplicacions quadràtiques). Anomenem aplicacions quadràtiques les aplicacions $\theta : E \longrightarrow \mathbb{K}$ tals que $(u,v) \mapsto \frac{1}{2}(\theta(u+v) - \theta(u) - \theta(v))$ és bilineal simètrica.

Observació 6.2.6.

- Per tant, la proposició 6.2.2 és la versió en coordenades de l'equivalència entre les formes bilineals simètriques a E i les formes quadràtiques a E.
- L'espai vectorial de les formes bilineals simètriques a E es denota per $\mathbb{S}^2 E^\vee$. El significat d'aquesta notació és la segona potència simètrica del dual d'E. En aquest curs no tractarem en detall l'espai vectorial $\mathbb{S}^2 E^\vee$, però podem dir que una quàdrica a l'espai projectiu $(\mathbb{P}, E, \pi)$ és un punt de $\mathbb{P}(\mathbb{S}^2 E^\vee)$. Si $\dim E = n$ també podem calcular la dimensió de $\mathbb{S}^2 E^\vee$, ja que correspon a les matrius simètriques, és a dir $\dim \mathbb{S}^2 E^\vee = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

6.3 Canvis de referència

Els canvis de base afecten a les formes bilineals de la forma següent: si M és la matriu d'una forma bilineal η en una certa base i A és la matriu de canvi de base aleshores la matriu de η en la nova base és de la forma $A^T M A$.

En la nostra situació, donades dues referències considerem dues bases adaptades a les dues referències i la matriu A de canvi de coordenades és la matriu de canvi de base entre les dues bases adaptades. Per tant, la fórmula $M' = A^T M A$ és vàlida, on M és la matriu de la quàdrica Q en una referència $\mathcal{R}$, M' la matriu de Q en una altra referència $\mathcal{R}'$ i A és la matriu de canvi de referència de $\mathcal{R}'$ en funció de $\mathcal{R}$.
La fórmula anterior ens diu que el determinant de M no és un valor intrínsec associat a Q. De fet això no és sorprenent ja que podem canviar M per un múltiple qualsevol. El que sí que té sentit és preguntar-se si aquest determinant és nul o no. Més en general tenim que, com que la matriu A és invertible:

$$\operatorname{rang}(M') = \operatorname{rang}\left(A^T M A\right) = \operatorname{rang}(M).$$

Definició 6.3.1 (Quàdrica degenerada). Diem que una quàdrica és degenerada si el determinant de qualssevol matriu associada a Q és zero. En cas contrari diem que és no degenerada. Anomenem rang de la quàdrica Q al rang de qualsevol matriu associada a Q. Les quàdriques de rang $n+1$ (o rang màxim) són les quàdriques no degenerades.

6.4 Restricció d'una quàdrica a una varietat lineal

Definició 6.4.1 (Forma bilineal restringida). Sigui $Q = [\eta]$ una quàdrica d'un espai projectiu, i sigui $\mathbb{L} = [F]$ una varietat lineal. Aleshores la forma bilineal $\eta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ es pot restringir a $F \times F$ definint una forma bilineal que denotem $\eta_{|F}$, que prové de la composició de la injecció amb η: $F \times F \hookrightarrow E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. Està ben definida perquè és simètrica i lineal.

Lema 6.4.2. *La forma bilineal restringida $\eta_{|F}$ és zero si i només si $\mathbb{L} \subset |Q|$ (sovint escriurem $\mathbb{L} \subset Q$).*

Demostració. Suposem que la restricció és zero. Aleshores $\eta_{|F}(u, v) = \eta(u, v) = 0$ per a totes els vectors $u, v \in F$. En particular, per a tot punt $p = [u] \in \mathbb{L}$ tenim que $\eta(u, u) = 0$i per tant $p \in |Q|$. Per tant $\mathbb{L} \subset |Q|$. Provem ara l'altra implicació suposant que tots els punts de $\mathbb{L}$ pertanyen a la quàdrica. Usant la definició obtenim que tots els vectors u de F satisfan $\eta(u, u) = 0$. Volem veure que $\eta(u, v) = 0$ per a qualsevol parell de vectors de F, que, aparentment, és més fort. Com $u + v$ també és de F tenim el següent:

$$0 = \eta(u + v, u + v) = \eta(u, u) + 2\eta(u, v) + \eta(v, v) = 2\eta(u, v).$$

Per tant, com la característica del cos no és 2 (estem a $\mathbb{R}$), tenim que $\eta(u, v) = 0$. ■

Observació 6.4.3. Així doncs tenim dues possibilitats: o bé la varietat lineal està continguda en la quàdrica o bé la restricció de la forma bilineal és no nul·la i defineix una quàdrica en $\mathbb{L}$. Restringir matrius, però, és bastant incòmode.

Definició 6.4.4 (Quàdrica restringida a la varietat). Sigui la restricció de la forma bilineal no nul·la tal que es defineix una quàdrica en $\mathbb{L}$. Denotem aquesta quàdrica per $Q_{|\mathbb{L}}$ i diem que és la *quàdrica restringida a la varietat lineal.*

Observació 6.4.5. En el llenguatge d'equacions la restricció la podem entendre així: podem agafar una referència en la qual $\mathbb{L}$ té equacions $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$. En aquesta referència Q tindrà una certa equació. En aquesta equació substituïm $x_i = 0$ per $i \geq k + 1$. Si tota l'equació desapareix vol dir que la varietat lineal està continguda. Si no és el cas quedarà una equació de segon grau en les variables $x_0, \ldots, x_k$ que defineix una quàdrica en $\mathbb{L}$.

6.5 Quàdriques de $\mathbb{P}^1$

D'ara en endavant suposarem que $\mathbb{K}$ és $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Ens serà útil per a entendre la tangència saber com són les quàdriques en l'espai projectiu de dimensió 1. Suposem doncs una recta projectiva $\mathbb{P}^1$ amb una referència fixada. Una quàdrica Q

en $\mathbb{P}^1$ ve donada per una matriu simètrica no nul·la 2×2:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Equivalentment, tindrem $ax_0^2 + 2bx_0x_1 + cx_1^2 = 0$.

Proposició 6.5.1. *Si el cos base és $\mathbb{C}$, tenim que $|Q|$ està format per dos punts diferents si i només si Q és no degenerada* ($\det(M) \neq 0$)*. Si Q és degenerada $|Q|$ consisteix en un sol punt. Si el cos base és $\mathbb{R}$, aleshores:*

1. *Si* $\det(M) < 0$*, aleshores $|Q|$ està formada per dos punts.*
2. *Si* $\det(M) = 0$*, aleshores $|Q|$ està formada per un sol punt.*
3. *Si* $\det(M) > 0$*, aleshores $|Q| = \emptyset$.*

Demostració. Demostrem primer aquest resultat suposant $a = 0$. En aquest cas el determinant de M és $-b^2$. L'equació serà:

$$2bx_0x_1 + cx_1^2 = x_1 (2bx_0 + cx_1) = 0.$$

Els punts solució són $[1 : 0]$ i $[c : -2b]$. El determinant és no nul ($b \neq 0$) si i només si aquestes dues solucions són diferents ($-b^2 = \det M$ si $a = 0$, si $\det M \neq 0$ es dona que $b \neq 0$). Això prova la proposició en aquest cas, tant sobre els reals com sobre els complexos.
Suposem, doncs, que $a \neq 0$. Com que $a \neq 0$, el punt $[1 : 0]$ no és solució de l'equació, per tant podem suposar que els punts solució són de la forma $[\alpha : 1]$, on α és solució de l'equació $a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$. Aplicant la fórmula de l'equació de segon grau ($c \neq 0$) trobem:

$$\alpha = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{-b \pm \sqrt{-\det(M)}}{a}.$$

Així, sobre $\mathbb{C}$, hi ha dues solucions si i només si el determinant és no nul, i si ho és n'hi ha una. Sobre $\mathbb{R}$ el nombre de solucions depèn del signe $\det(M)$ tal com descriu l'enunciat. ■

6.6 Interseccions d'una quàdrica amb una recta

Properament estudiarem les propietats geomètriques de les quàdriques projectives (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ en tot el que resta de curs). Primer analitzarem la intersecció de les quàdriques amb les rectes, la qual cosa ens portarà a la noció de tangència. Molt relacionada amb aquest concepte (de fet és més general) trobem la definició de conjugació de punts respecte d'una quàdrica i de polaritat. En aquesta secció fixem una quàdrica projectiva $Q = [\eta]$ en un espai projectiu $\mathbb{P}^n$ de dimensió n. Sigui l una recta.

Definició 6.6.1. Diem que un punt p és *comú a la quàdrica i a la recta* si $p \in l \cap |Q|$. Sovint anomenarem *talls* als punts comuns. També diem que l està continguda en Q si $l \subset |Q|$.

Proposició 6.6.2. *Siguin Q tal com abans. Es donen les possibilitats següents:*

1. *Si el cos base és $\mathbb{R}$, aleshores o bé l està continguda en Q o els punts comuns de Q i l són:*
   - *o 2 punts reals diferents,*
   - *o 1 punt real,*
   - *o 2 punts imaginaris conjugats (no reals)*
2. *Si el cos base és $\mathbb{C}$, aleshores o bé l està continguda en Q o els punts comuns de Q i l són:*
   - *o 2 punts diferents,*
   - *o 1 punt.*

Demostració. Posem $Q = [\eta]$ i $l = [F]$. A la secció anterior vam veure que l està continguda en Q (és a dir, $\eta(v, v) = 0$ per a tot $v \in F$) si, i només si, $\eta_{|F\times F} = 0$. Suposem doncs que l no està continguda en Q tindrem que $Q_l = \left[\eta_{|F\times F}\right]$ és una quàdrica ben definida en la recta l. Apliquem l'estudi que ja hem fet sobre les quàdriques en $\mathbb{P}^1$ i obtenim les possibilitats de l'enunciat segons sigui el determinant d'una matriu associada a Q_l. ■

Definició 6.6.3 (Recta tangent a una quàdrica). Diem que una recta $l = [F]$ és tangent a una quàdrica Q si l està continguda a Q (és a dir, si $\eta|_F \equiv 0$) o si l i Q tenen només un punt en comú ($Q|_l$ és una quàdrica degenerada). En el segon cas, al punt $l \cap |Q|$ li diem *punt de contacte o de tangència.*

Definició 6.6.4 (Corda). A una recta no tangent l'anomenem *corda* i als seus dos punts en comú amb la quàdrica els anomenem *punts de tall.* Si la quàdrica és real i $|Q_l| = \emptyset$, considerem la quàdrica complexa associada i anomenem els seus punts de tall, punts de tall imaginaris amb la quàdrica real.

Lema 6.6.5. *Sigui $Q = [\eta]$ una quàdrica i siguin $p = [u], q = [v]$ dos punts diferents. Posem $l = p \vee q$ i suposem que aquesta recta no està continguda a Q. Aleshores la matriu de Q restringida a l en la referència $(p, q; [u + v])$ és:*

$$M = \begin{pmatrix} \eta(u,u) & \eta(u,v) \\ \eta(u,v) & \eta(v,v) \end{pmatrix}$$

En particular, l és tangent a Q si, i només si $\det M = 0$ *o bé* $\eta(u, u) = \eta(v, v) = \eta(u, v) = 0$.

Demostració. Tenim que $l = [\langle u, v\rangle]$ i que u, v és una base adaptada a la referència de l'enunciat. Per tant la matriu associada a la quàdrica restringida és la matriu de la forma bilineal en aquesta base, que és la matriu:

$$\begin{pmatrix} \eta(u,u) & \eta(u,v) \\ \eta(u,v) & \eta(v,v) \end{pmatrix}.$$

A més a més, hem vist que la recta és tangent (talla en un sol punt) si, i només si, la quàdrica restringida a la recta és degenerada que és equivalent a demanar que el determinant de la matriu sigui zero (i aquesta és una condició invariant respecte qualsevol base). ■

6.7

Tangència i polaritat

Continuem suposant fixada una quàdrica projectiva $Q = [\eta]$ en $\mathbb{P}^n$. L'apartat anterior ens permet definir varietat lineal tangent a una quàdrica i calcular-la. *Recordem que diem que dos punts $p = [u], q = [v]$ són conjugats respecte de Q si $\eta(u, v) = 0$.*

Definició 6.7.1 (Varietat tangent a Q). Sigui $p \in Q$. Anomenem varietat tangent a Q en p a la unió de totes les rectes tangents a Q que passen per p i la denotem per $T_Q(p)$. Posem $p = [u]$, com el punt pertany a la quàdrica tenim que $\eta(u, u) = 0$.

Observació 6.7.2. Sigui $p = [u] \in Q$ (és a dir, tal que $\eta(u, u) = 0$) i l qualsevol punt que passa per p (és a dir, que podem escriure com $l = p \vee q = [u] \vee [v]$) i ha de ser tangent a Q en p si, i només si, $\eta(u, u)\eta(v, v) - \eta(u, v)^2 = 0 \iff \eta(u, v) = 0$. És a dir, fixat $p \in Q$, aleshores els punts $q = [v]$ tals que $p \vee q$ és tangent a Q són els punts $q = [v]$ tals que $\eta(u, v) = 0$. *Ho podem plantejar d'una altra manera. Per la definició tenim que $q = [v]$ pertany a $T_Q(p)$ si, i només si, la recta $p \vee q$ és tangent. Pel lema 6.6.5 això equival a què $\eta(u, v) = 0$. Per tant, $T_Q(p)$ és la varietat lineal dels punts $q = [v]$ que satisfan $\eta(u, v) = 0$.*

Suposem fixada una referència. Aleshores Q té associada una matriu simètrica:

$$M = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{n0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i l'equació de la varietat tangent a Q en el punt de coordenades $u = [\alpha_0 : \dots : \alpha_n]$ és:

$$(\alpha_0 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{n0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0. \tag{6.7.1}$$

Hi ha dues possibilitats: la primera és que $(\alpha_0 \dots \alpha_n)\, M = 0$. Com la matriu és simètrica això equival a què:

$$Mu = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{n0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

És a dir: $u \in \ker(M)$. En aquest cas l'equació (6.7.1) se satisfà sempre i, per tant, $T_Q(p) = \mathbb{P}^n$.

Definició 6.7.3 (Punt doble). Sigui $p = [u]$ tal que $u \in \ker(M)$. Diem que p és un punt doble o punt singular de la quàdrica.

Observació 6.7.4. Notem que una quàdrica té punts singulars si, i només si, és degenerada i que els punts dobles són conjugats de tots els punts, en particular són autoconjugats i pertanyen a la quàdrica.

Proposició 6.7.5. *El conjunt dels punts dobles d'una quàdrica Q és una varietat lineal que denotarem per $\mathbb{D} \subset |Q|$. A més a més,* $\dim \mathbb{D} = n - \operatorname{rang}(Q)$.

Demostració. Un punt $p = [u]$ és doble si només si $u \in \ker(M)$ on M és la matriu de Q en una referència fixada. Per tant $\mathbb{D}$ és la varietat lineal $[\ker(M)]$. Calculem la seva dimensió:

$$\dim \mathbb{D} = \dim \ker(M) - 1 = n + 1 - \operatorname{rang}(M) - 1 = n - \operatorname{rang}(M) = n - \operatorname{rang}(Q). \qquad \blacksquare$$

La segona possibilitat és que M no anul·li el vector u. En aquest cas l'equació (6.7.1) dona un hiperplà. Per tant si p no és doble parlarem de *l'hiperplà tangent a la quàdrica en el punt.* L'equació (6.7.1) es pot considerar en qualsevol situació no només quan el punt p és de la quàdrica.

Definició 6.7.6 (Varietat polar). La varietat polar d'un punt p respecte d'una quàdrica Q és el conjunt de punts conjugats de p respecte de Q. És una varietat lineal donada per l'equació (6.7.1). La denotem per $H_Q(p)$ o $\operatorname{Polar}_Q(p)$.

Observació 6.7.7.

1. Si $p \in \mathbb{D}$, novament $H_Q(p) = T_Q(p) = \mathbb{P}^n$. En cas contrari $H_Q(p)$ és un hiperplà.
2. Si $p \in |Q| \setminus \mathbb{D}$, aleshores $H_Q(p) = T_Q(p)$. És a dir, si el punt és de la quàdrica, l'hiperplà polar és el mateix que l'hiperplà tangent.
3. Si $p \notin |Q|$, tindríem que $H_Q(p)$ és un hiperplà que no passa per p (si $p \in H_Q(p)$ aleshores p seria autoconjugat i seria un punt de la quàdrica).
4. Segons la definició, dos punts $p = [u], q = [v]$ són conjugats respecte de la quàdrica $Q = [\eta]$ si i només si $\eta(u, v) = 0$. Observeu que això també es pot expressar com $q \in H_Q(p)$ o $p \in H_Q(q)$.

Proposició 6.7.8. *Sigui Q una quàdrica no degenerada. Donat un hiperplà H existeix un únic punt p tal que $H_Q(p) = H$.*

Demostració. Suposem que Q és una quàdrica no degenerada que té matriu M en una certa referència projectiva. Aleshores *la polaritat defineix una projectivitat de matriu M*:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{P}^n & \longrightarrow & (\mathbb{P}^n)^\vee \\ & p & \longmapsto & H_Q(p) \end{array}$$

En particular, aquesta aplicació és bijectiva i, per tant, donat un hiperplà H existeix un únic punt p tal que $H_Q(p) = H$. $\blacksquare$

Definició 6.7.9 (Pol de H). Sigui Q una quàdrica no degenerada i sigui un hiperplà H. Si existeix p tal que $H_Q(p) = H$, p és el *pol* de H respecte de Q.

Si $Q = [\eta]$ és una quàdrica en l'espai projectiu $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, E, \pi)$, la projectivitat està induïda per l'isomorfisme $\phi_\eta : E \to E^\vee$ definit per $\phi_\eta(u)(v) := \eta(u, v)$.

Observació 6.7.10.

1. La linealitat en v de η implica que $\phi_\eta(u) \in E^\vee$ i la linealitat en u de η implica que ϕ_η és una aplicació lineal.
2. L'aplicació lineal ϕ_η es pot definir encara que Q sigui degenerada, i de fet, el rang de Q coincideix amb el rang de ϕ_η. D'aquesta manera el rang de Q està ben definit (de manera lliure de coordenades) gràcies a què de la definició se segueix fàcilment que per qualsevol $\lambda \in \mathbb{K}$, $\phi_{\lambda\eta} = \lambda\phi_\eta$.

Definició 6.7.11 (Referència autopolar)**.** Diem que una referència $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n; A\}$ és autopolar respecte d'una quàdrica Q si $\forall i \neq j$ els punts p_i i p_j són conjugats. Dit d'una altra forma, $H_Q(p_i) = p_0 \vee \dots \vee \hat{p}_i \vee \dots \vee p_n$. Com el punt unitat no intervé en la definició, sovint direm simplement que $\{p_0, \dots, p_n\}$ és un *símplex autopolar* (triangles autopolars en el pla, tetràedres autopolars a $\mathbb{P}^3$, etcètera).

Teorema 6.7.12. *Sigui $Q = [\eta]$ una quàdrica de $\mathbb{P}^n$ i siguin $p, q \in \mathbb{P}^n$ dos punts diferents. Aleshores:*

1. *Si $p, q \in |Q|$, tenim que p i q són conjugats si i només si $p \vee q$ està continguda en Q.*
2. *Si $p \in |Q|$ i $q \notin |Q|$, aleshores p i Q són conjugats si i només si $p \vee q$ és tangent a Q i no està continguda en Q.*
3. *Si $p, q \notin |Q|$, aleshores p i q són conjugats respecte de Q si i només si $p \vee q$ és una corda d'extrems a, b, aleshores $\{p, q\}$ i $\{a, b\}$ se separen harmònicament. És a dir, $(p, q, a, b) = -1$.*

Demostració.

1. Posem $p = [u]$ i $q = [v]$. Per hipòtesi $\eta(u, u) = \eta(v, v) = 0$. Per tant p i q són conjugats si, i només si, $\eta(u, v) = 0$ i això equival a què la restricció de η a $\langle u, v\rangle$ sigui zero, és a dir que la recta estigui continguda en Q.
2. Amb la mateixa notació, la restricció de η no és zero perquè ara suposem que $\eta(v, v) \neq 0$. Pel lema 6.6.5 la recta $p \vee q$ serà tangent si, i només si, $\eta(u, u) \cdot \eta(v, v) - \eta(u, v)^2 = 0$. Com que estem suposant $p \in |Q|$ tenim que $\eta(u, u) = 0$. Per tant, la recta és tangent si, i només si, $\eta(u, v) = 0$, és a dir, els punts són conjugats.
3. Suposem ara que els punts p i q no pertanyen a la quàdrica, és a dir $\eta(u, u)$ i $\eta(v, v)$ són no nuls. Primer veiem que si p i q són conjugats, és a dir, $\eta(u, v) = 0$, aleshores $p \vee q$ és una corda. En efecte, la quàdrica restringida a la recta té matriu:

$$\begin{pmatrix} \eta(u, u) & 0 \\ 0 & \eta(v, v) \end{pmatrix}$$

per tant, la restricció a la recta és no degenerada i en conseqüència la recta és una corda. Per tant, podem suposar que $p \vee q$ és una corda. Siguin a i b els seus extrems (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i els extrems són imaginaris conjugats, estenem $\mathbb{K}$ als nombres complexos). Volem veure que p i q són conjugats si, i només si, $(a, b, p, q) = -1$ (o equivalentment $(p, q, a, b) = -1$).

Considerem una referència sobre la corda de manera que $a = [1 : 0], b = [0 : 1]$. Aleshores, en aquesta referència, tenim que la matriu de la quàdrica restringida és:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ja que a, b pertanyen a $|Q|$. En aquesta referència, els punts p, q tenen coordenades $p = [\alpha : 1], q = [\beta : 1]$. Tenim que els punts són conjugats si, i només si:

$$(\alpha, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha + \beta = 0.$$

La raó doble $(a, b, p, q) = ([1 : 0], [0 : 1], [\alpha : 1], [\beta : 1])$ es pot calcular amb els determinats i s'obté fàcilment $\frac{\beta}{\alpha}$. Per tant, efectivament, p i q són conjugats, és a dir, $\alpha + \beta = 0$ si, i només si, la raó doble és $(a, b, p, q) = \frac{\beta}{\alpha} = -1$. ■

Exemple 6.7.13.

1. Considerem en $\mathbb{P}^2$ amb una referència fixada la cònica d'equació $x^2 - y^2 = 0$. La matriu associada és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que té rang 2. El nucli de la matriu és el vector $(0, 0, 1)$, per tant la varietat de punts dobles és $\mathbb{D} = \{[0 : 0 : 1]\}$. De fet els punts de la cònica és la unió de les dues rectes $x + y = 0$ i $x - y = 0$, que es tallen en el punt doble. Considerem el punt $p = [1 : 1 : 0]$. És un punt de la cònica (compleix l'equació de la cònica) que no és el punt doble. Calculem la recta polar de la cònica en p (és a dir, la recta tangent en p):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - y = 0.$$

2. De nou considerem en $\mathbb{P}^2$ amb una referència fixada. Sigui la cònica d'equació $x^2+y^2-z^2 = 0$. La matriu associada és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que té rang 3; per tant, és no degenerada. Considerem el punt $p = [1 : 0 : 1]$. És un punt de la cònica i la recta polar de la cònica en p (és a dir, la recta tangent en p) és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y - z = 0.$$

Sigui ara el punt $q = [1 : 0 : 0]$ que no pertany a la quàdrica. La recta polar de q es calcula de la mateixa forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x = 0.$$

Així doncs, considerem una cònica no degenerada del pla i un punt p que no pertany a la cònica.

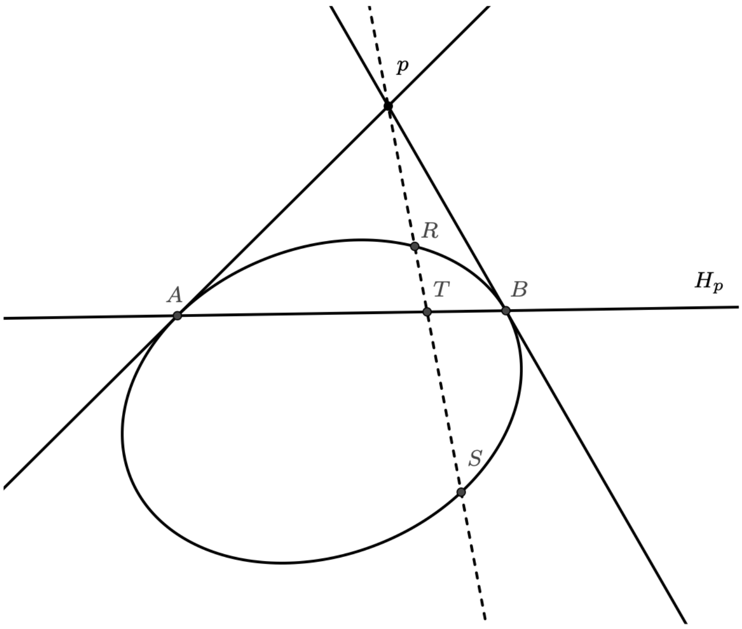


Figura 6.1: Una cònica no degenerada del pla i un punt p que no pertany a la cònica.

Al dibuix anterior el punt p es troba sobre la recta tangent (i.e. recta polar) en el punt A; per tant, A i p són conjugats. Pel mateix motiu ho són B i p. Com la polar de p és una recta i ha de contenir A i B, obtenim que $H_p = A \vee B$. També hi ha dibuixada una corda per p d'extrems R i S. La corda talla H_p en T, per tant T i p són conjugats. Obtenim que $(R, S, T, p) = -1$.

6.8 Quàdriques degenerades

En aquesta secció fem un tractament específic de les quàdriques degenerades amb especial atenció als cons (quàdriques de rang n) i a les de rang 1 i 2. Fixem un espai projectiu de dimensió $\mathbb{P}^n$ i considerem una quàdrica Q en $\mathbb{P}^n$ de rang r.

Observació 6.8.1. Recordem que Q és degenerada si $r \leq n$ (i no degenerada si $r = n + 1$). Equivalentment, la **varietat de punts dobles** $\mathbb{D}$ de Q és de dimensió $n - r \geq 0$, en particular no buida.

Considerem una referència projectiva $\mathcal{R} = (p_0, \ldots, p_n; A)$ tal que $p_0, p_1, \ldots, p_{n-r}$ són punts de $\mathbb{D}$. Sigui $e_0, \ldots, e_n$ una base adaptada. Aleshores els vectors $e_0, \ldots, e_{n-r}$ són del nucli de la matriu de Q (per definició de punt doble). Així doncs, la matriu M de Q en aquesta referència és de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-r+1,n-r+1} & \dots & a_{n-r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-r+1,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Posem M_r a la submatriu $r \times r$ dels elements $a_{i,j}$. Tenim doncs que $\operatorname{rang}(Q) = \operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(M_r) = r$. En particular M_r és una matriu simètrica de rang màxim. En aquesta referència, la varietat lineal $\mathbb{D}$ té equacions $x_{n-r+1} = \ldots = x_n = 0$. La varietat lineal $\mathbb{L}$ d'equacions $x_0 = \ldots = x_{n-r} = 0$ és suplementària de $\mathbb{D}$. La restricció de Q a $\mathbb{L}$ té matriu M_r, denotem per $Q_{\mathbb{L}}$ aquesta restricció. Si un punt $p = [x_0 : \ldots : x_n]$ no pertany a $\mathbb{D}$ considerem:

$$(p \vee \mathbb{D}) \cap \mathbb{L} = [0 : \ldots : 0 : x_{n-r+1} : \ldots : x_n]$$

i el denotem per p'. En referència subordinada a $\mathbb{L}$ les coordenades de p' són $[x_{n-r+1} : \ldots : x_n]$.

Lema 6.8.2. *Siguin $p = [x_0 : \ldots : x_n]$ i $q = [y_0 : \ldots : y_n]$ dos punts que no pertanyen a $\mathbb{D}$. Aleshores p i q són conjugats respecte de Q si, i només si, p' i q' són conjugats respecte de $Q_{\mathbb{L}}$. En particular $p \in |Q|$ si, i només si, $p' \in Q_{\mathbb{L}}$.*

Demostració. És conseqüència d'observar que la condició:

$$\begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-r+1,n-r+1} & \dots & a_{n-r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-r+1,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

és equivalent a la condició:

$$\begin{pmatrix} x_{n-r+1} & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-r+1,n-r+1} & \dots & a_{n-r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-r+1,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0.$$ ■

Observació 6.8.3. Sigui p un punt que no pertany ni a $\mathbb{D}$ ni a $\mathbb{L}$. Com $\mathbb{L}$ i $\mathbb{D}$ són suplementàries existirà una única recta per p que talla a les dues varietats lineals (aquest és el *famós* exercici 1.6.1). El tall amb $\mathbb{L}$ necessàriament és el punt p'. Segons el lema anterior tota la recta $p \vee p'$ està continguda en $|Q|$ si i només si $p' \in |Q_{\mathbb{L}}|$.

Proposició 6.8.4. *Sigui Q una quàdrica degenerada amb varietat lineal de punts dobles $\mathbb{D} \neq \emptyset$. Sigui $\mathbb{L}$ una varietat lineal suplementària de $\mathbb{D}$. Denotem per $Q_{\mathbb{L}}$ la quàdrica (no degenerada) restricció de Q a $\mathbb{L}$. Aleshores $|Q|$ és la unió de les rectes que uneixen punts de $|Q_{\mathbb{L}}|$ i punt de $\mathbb{D}$. És a dir:*

$$|Q| = \mathbb{D} \cup \bigcup_{x \in |Q_{\mathbb{L}}|, y \in \mathbb{D}} x \vee y.$$

6.8.1 Cons

Definició 6.8.5 (Con)**.** Diem *con* a una quàdrica de rang n, o sigui un per sota del rang màxim. En aquest cas, $\mathbb{D}$ està formada per un punt V al qual anomenem *vèrtex* del con.

Podem prendre com a varietat $\mathbb{L}$ un hiperplà que no passa per V. La proposició 6.8.4 ens diu que a l'hiperplà hi ha una quàdrica no degenerada i Q la podem veure com la unió de V amb tots els punts de la quàdrica no degenerada.

Exemple 6.8.6. Per exemple, a $\mathbb{P}^3$ tindrem una cònica no degenerada en un pla, i el con consisteix en unir un punt V exterior al pla amb tots els punts de la cònica. En el pla, $\mathbb{L}$ és una recta sobre la qual tenim dos punts (quàdrica no degenerada sobre $\mathbb{P}^1$) que poden ser imaginaris si el cos base és $\mathbb{R}$.

Per tant, *un con en el pla és un parell de rectes que passen per un punt V.* Sobre els reals aquestes rectes poden ser reals o imaginàries conjugades. *En el pla els cons són les quàdriques de rang 2.*

6.8.2 Quàdriques de rang 2

Amb aquesta hipòtesi, la varietat lineal $\mathbb{D}$ té dimensió $n-2$ ($n-r$ i $r=2$) i una varietat suplementària és una recta sobre la qual tenim dos punts (que, com abans, sobre $\mathbb{R}$ poden ser imaginaris conjugats). Unint $\mathbb{D}$ amb els punts obtenim que les quàdriques de rang 2 són exactament els parells d'hiperplans diferents. Sobre els reals poden ser dos plans imaginaris conjugats.

6.8.3 Quàdriques de rang 1

Per estudiar les quàdriques de rang 1 no necessitem usar 6.8.4 (en aquest cas, $\mathbb{L}$ és un punt i sobre un punt no tenim quàdriques). Agafant la referència de manera que els punts $p_0, \ldots, p_{n-1} \in \mathbb{D}$ tenim que la matriu està formada per zeros llevat de l'element a_{nn}, necessàriament no nul. Per tant l'equació és $x_n^2 = 0$. Diem que és un hiperplà doble ja que les seves solucions són els punts de l'hiperplà $x_n = 0$ «comptats dues vegades».

6.9 Quàdriques en espais afins

Considerem un espai afí $(\mathbb{A}^n, F)$ i recordem que vam construir un espai projectiu que el conté i al que anomenem la seva *compleció projectiva*. Tenim, com a conjunts, $\overline{\mathbb{A}}^n = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}(F)$. Així que la diferència entre l'espai afí i l'espai projectiu $\overline{\mathbb{A}}^n \setminus \mathbb{A}^n$ és un hiperplà H_∞ que correspon a les classes dels vectors de l'espai afí. També vam veure que tota referència afí té associada una referència projectiva que permet relacionar bé les coordenades afins i projectives. Concretament, si $p \in \mathbb{A}^n$ té coordenades afins $(a_1, \ldots, a_n)$ aleshores les seves coordenades projectives són $[1 : a_1; \ldots : a_n]$.

De manera intuïtiva una quàdrica afí la podem pensar, un cop fixada la referència, com una equació de segon grau en n variables $x_1, \ldots, x_n$ no necessàriament homogènia, és a dir: hi haurà una part quadràtica (els monomis de grau 2), una part lineal i un terme independent.

Exemple 6.9.1. Per exemple, en el pla afí, $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 3x_2 + 4 = 0$ és una quàdrica (li direm cònica per ser en el pla) amb part quadràtica $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$, part lineal $-2x_1 - 3x_2$ i terme independent 4. La quàdrica està determinada llevat de multiplicar l'equació per una constant.

Per fer una formulació independent de coordenades i que eviti la incomoditat de treballar amb monomis de diferents graus, **definirem les quàdriques afins com quàdriques projectives en $\overline{\mathbb{A}}^n$ de les quals mirem els punts afins**. Això també permet associar a la quàdrica una forma bilineal i poder usar, entre altres, la *polaritat*.

Exemple 6.9.2. Per exemple, la cònica que hem posat abans la veurem com la cònica projectiva d'equació $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_0 - 3x_2x_0 + 4x_0^2 = 0$. Diem que hem *homogeneïtzat* l'equació afegint la variable x_0 en els monomis de grau 1 i 0 fins a aconseguir que el polinomi sigui homogeni de grau 2. Si ara mirem les solucions afins de la cònica, podem posar $x_0 = 1$ i recuperem l'equació original.

Aquest procés «d'anar i tornar» entre l'afí i el projectiu: homogeneïtzar en una direcció, fer $x_0 = 1$ en la contrària, no funciona de manera perfecta.

Exemple 6.9.3. Si, per exemple, comencem amb una quàdrica projectiva tal que x_0 apareix en tots els monomis $x_0^2 - x_0x_2 + 3x_0x_3 + \ldots = x_0(x_0 - x_2 + 3x_3 + \ldots) = 0$ fent $x_0 = 1$ ens queda una equació de grau 1, o fins i tot una constant si l'equació és de la forma $x_0^2 = 0$. Observeu que tenir un factor x_0 en l'equació equival a dir que la quàdrica Q conté l'hiperplà de l'infinit.

Definició 6.9.4 (Quàdrica en l'espai afí)**.** Una quàdrica en l'espai afí $\mathbb{A}^n$ és una quàdrica en l'espai projectiu $\overline{\mathbb{A}}^n$ que no conté l'hiperplà de l'infinit H_∞.

Suposem, com al principi, que tenim fixada una referència afí i que considerem en la compleció projectiva la referència projectiva associada. Aleshores donar una quàdrica afí Q equival a donar una quàdrica projectiva $\overline{Q}$ de matriu

$$M = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ a_{01} & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0n} & a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La condició que Q no contingui H_∞ és equivalent a què algun coeficient a_{ij} sigui no nul amb $i, j \geq 1$. També es pot pensar dient que la matriu:

$$M_\infty = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

no és nul·la.

Definició 6.9.5 (Secció impròpia). Observem que la restricció de $\overline{Q}$ a l'hiperplà de l'infinit és una quàdrica que té matriu M_∞. Li diem quàdrica de l'infinit o secció impròpia. Des del punt de vista de les equacions, la matriu M correspon tant a la quàdrica projectiva de la definició:

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + \ldots + 2a_{0n}x_0x_n + \sum_{i,j\geq 1} a_{i,j}x_ix_j = 0.$$

Com a la seva restricció a l'espai afí:

$$a_{00} + 2a_{01}x_1 + \ldots + 2a_{0n}x_n + \sum_{i,j\geq 1} a_{i,j}x_ix_j = 0.$$

La quàdrica obtinguda restringint a H_∞ té equació $\sum_{i,j\geq 1} a_{i,j}x_ix_j = 0$. Aquesta equació és exactament la part quadràtica de l'equació de la quàdrica afí.

Notació 6.9.6. Donada una quàdrica afí Q denotarem per $\overline{Q}$ la quàdrica projectiva de la qual prové. La definició ens diu que, des d'un punt de vista formal, **les dues quàdriques són el mateix**. La diferència de notació es deu a que en el cas afí considerem només les solucions pròpies i per tant l'equació és l'obtinguda fent $x_0 = 1$. Noteu que la matriu de les dues quàdriques és la mateixa. Denotem per Q_∞ la restricció de $\overline{Q}$ a l'hiperplà de l'infinit. Per hipòtesi Q_∞ és una quàdrica ben definida. Tindrem doncs que $|\overline{Q}| = |Q| \sqcup |Q_\infty|$.

Definició 6.9.7 (Quàdrica afí no degenerada). Direm que una quàdrica afí Q és no degenerada si $\overline{Q}$ també és no degenerada. Equivalentment si $\det(M) \neq 0$.

Exemple 6.9.8. Considerem la cònica afí Q d'equació $x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2 + 6 = 0$. Aleshores $\overline{Q}$ té equació $x_1^2+2x_2^2-5x_1x_2-3x_0x_1+2x_0x_2+6x_0^2 = 0$ i Q_∞ té equació $x_1^2+2x_2^2-5x_1x_2 = 0$.

El fet que tinguem un hiperplà distingit permet definir nous conceptes, purament afins, relacionats amb la posició relativa de la quàdrica amb l'hiperplà H_∞. Els conceptes que segueixen seran d'ús molt freqüent la resta del curs.

Definició 6.9.9 (Paraboloide). Diem que una quàdrica afí no degenerada Q és un *paraboloide* si és tangent a l'hiperplà de l'infinit. El punt de tangència serà conjugat de tots els punts de l'infinit. Per tant, també es pot dir que un paraboloide és una quàdrica no degenerada Q tal que Q_∞ és degenerada.

Definició 6.9.10 (Paràbola). Una cònica no degenerada (amb punts) Q del pla afí $\mathbb{A}^2$, és una *paràbola* si és tangent a la recta de l'infinit. És a a dir, *en el cas del pla anomenem paràboles als paraboloides.* Observem que equival a dir que $|Q_\infty|$ és un punt.

Definició 6.9.11 (Hipèrbola). En el cas que $|Q_\infty|$ estigui formada per dos punts *reals* diem que Q és una *hipèrbola.*

Definició 6.9.12 (El·lipse). En el cas que $|Q_\infty|$ estigui formada per dos punts *imaginaris conjugats* diem que és una *el·lipse.*

Observació 6.9.13. Notem que *sobre els complexos hipèrboles i el·lipses són indistingibles.*

Exemple 6.9.14. La cònica del pla afí real d'equació $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ és no degenerada i té punts (per exemple, el punt $(1, 0)$ és solució). La secció impròpia té equació $x_1^2 + x_2^2 = 0$ sense solucions, per tant és una el·lipse. En la cas de la cònica $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ la secció impròpia tampoc té punts, però la cònica no té solucions (és la suma de tres termes positius que no pot donar mai zero). Per tant, no és una el·lipse. Diem que és una *cònica imaginària.* En el cas de l'equació $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ la secció impròpia $x_1^2 - x_2^2 = 0$ té dues solucions, per tant és una hipèrbola. Finalment la cònica no degenerada d'equació $x_1^2 - x_2 = 0$ té secció impròpia $x_1^2 = 0$, per tant és una paràbola.

Definició 6.9.15 (Centre de la quàdrica)**.** Sigui Q una quàdrica afí no degenerada. Diem que $p \in \mathbb{A}^n$ és el centre de Q si $H_p = H_\infty$. Dit d'una altra forma, el centre és el *pol de l'hiperplà de l'infinit.*

Observació 6.9.16.

1. Notem que l'hiperplà polar H_p es calcula amb la matriu de Q, que és comú a la de $\overline{Q}$; per tant, ho veiem com l'hiperplà polar respecte de la quàdrica projectiva. Notem que el centre serà un punt impropi si, i només si, és autoconjugat (pertany a $|Q_\infty|$) i el seu hiperplà tangent és H_∞.
2. Per tant, el centre existeix i és únic si, i només si, Q no és un paraboloide. En el cas dels paraboloides, el centre no existeix en el sentit que no és un punt propi. Direm que té *centre impropi*, aquest centre és el punt de tangència amb l'infinit.

Proposició 6.9.17. *Sigui Q una quàdrica afí no degenerada amb centre propi O. Aleshores O és un centre de simetria: si $p \in |Q|$, aleshores el simètric de p respecte de O pertany a Q.*

Demostració. Considerem la corda Op i tallem amb l'hiperplà de l'infinit H_∞, sigui p_∞ aquest tall. Per definició de centre, O i p_∞ són conjugats. Hem vist a la secció anterior que en aquest cas els extrems de la corda $\{p, p'\}$ separen harmònicament $\{O, p_\infty\}$. O sigui: $(p, p', O, p_\infty) = -1$. Com el quart punt de la raó doble es troba a l'infinit, coincideix amb la raó simple: $(p, p', O) = -1$. Això equival a dir que O és el punt mig de p i p'; per tant, l'altre extrem de la corda, p', és el simètric de p respecte de O. ■

Procés 6.9.18 (Càlcul del centre)**.** *Seguint la definició, si Q té matriu M com a l'inici de la secció, aleshores $(a_1, \dots, a_n) = [1 : a_1 : \cdots : a_n]$ és el centre de Q si l'hiperplà:*

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

és l'hiperplà $x_0 = 0$. Això és equivalent a dir que el producte de $(1, a_1, \dots, a_n)$ amb M, que calcula els coeficients de l'hiperplà polar, dona $(\rho, 0, \dots, 0)$. Per tant:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \rho & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Com la matriu M és simètrica, podem transposar i escriure la condició anterior com el sistema següent, que anomenarem sistema del centre:

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6.9.1}$$

del qual la primera equació no dona cap informació. En el cas dels parabaloides el sistema (6.9.1) *és incompatible. Per exemple el centre de la cònica $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ el trobem amb el sistema d'equacions:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que té solució $(0, 0)$.

Definició 6.9.19 (Diàmetres)**.** Sigui Q una quàdrica afí no degenerada amb centre O. Anomenem *diàmetres* a les rectes que passen pel centre. Diem que dos diàmetres són conjugats si els corresponents punts de l'infinit són conjugats respecte de Q_∞. Els diàmetres que tenen el punt impropi en Q_∞ s'anomenen asímptotes.

Exemple 6.9.20. Considerem la hipèrbola Q d'equació $x_1^2 - x_2^2 = 1$. Calculant com en (6.9.1) trobem que el centre és el punt $(0, 0)$. Els diàmetres són les rectes per l'origen. Els punts de l'infinit són les solucions de l'equació de $Q_\infty : x_1^2 - x_2^2 = 0$, per tant $[0 : 1 : 1]$ i $[0 : 1 : -1]$. Les asímptotes de Q (en coordenades projectives) són $[1 : 0 : 0] \vee [0 : 1 : 1]$ i $[1 : 0 : 0] \vee [0 : 1 : -1]$, és a dir $x_1 - x_2 = 0$ i $x_1 + x_2 = 0$.

VII

Classificació de les quàdriques reals i complexes

7.1 Introducció

La última part del curs està destinada a classificar les quàdriques afins i projectives amb cos base $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Són per tant quatre classificacions: **projectiva complexa, projectiva real, afí complexa i afí real**. Les farem per aquest ordre. En aquesta introducció clarificarem primer el concepte de classificació i explicarem l'estratègia que seguirem.

Definició 7.1.1 (Classificació)**.** Una classificació, des d'un punt de vista general, consisteix en definir una relació d'equivalència en un conjunt i descriure les classes d'equivalència. Això inclou donar un mètode per determinar la classe d'un element qualsevol. En el nostre cas el conjunt és el de les quàdriques (del tipus que s'hagi fixat en cada cas: projectives complexes, projectives reals,...).

Donarem:

1. una *relació d'equivalència* en el conjunt de les quàdriques: bàsicament direm que dues quàdriques són equivalents si existeixen referències (una per a cada quàdrica) en les quals les dues tenen la mateixa equació. La relació d'equivalència determina de quin tipus de classificació estem parlant. Per exemple, si les quàdriques són afins i fem classificació afí, les referències que han d'existir seran afins. D'altra banda si les quàdriques són reals i fem classificació real, els canvis de referència permesos seran canvis reals. *Això no vol dir que no puguem fer una classificació complexa d'una quàdrica amb coeficients reals, per exemple la cònica projectiva d'equació* $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.
2. *Invariants*: són escalars associats a una quàdrica que són comuns a totes les quàdriques d'una mateixa classe. Per exemple el **rang** d'una quàdrica és un invariant: si dues quàdriques són equivalents, aleshores tenen el mateix rang. Només necessitarem dos invariants i tots dos són nombres naturals. No tractarem el cas dels espais afins euclidians, és a dir, quan l'espai vectorial F associat a l'espai afí és real i ve dotat d'un producte escalar. En aquest cas es demana que les referències de la relació d'equivalència siguin ortonormals i els invariants que apareixen són nombres reals qualssevol.
3. *Equacions reduïdes*: donarem una llista d'equacions especialment simples a les que anomenarem **reduïdes**. Provarem que per a totes les quàdriques existeix una referència en la qual l'equació de la quàdrica és una de les de la llista. És a dir, les equacions de la llista representen totes les classes. A més a més veurem que totes les quàdriques de la llista tenen invariants diferents i de fet, mirant els invariants podem recuperar l'equació reduïda que té

aquests invariants. Per tant, *hi ha una bijecció entre el conjunt de les equacions reduïdes i el conjunt de les classes d'equivalència.* En definitiva, per identificar que dues equacions representen classes diferents ho farem amb invariants per la relació d'equivalència.

4. *Algorisme de càlcul*: Donada una quàdrica qualsevol donarem mètodes per a calcular els seus invariants. Aquests invariants determinen l'equació tal com s'ha dit, per tant sabem quina equació li correspon a la nostra quàdrica. En particular dues quàdriques són equivalents si i només si tenen els mateixos invariants.

Observem que per descriure la geometria de les quàdriques (si tenen punts o no, si contenen varietats lineals, si són paraboloides, com són les seccions amb hiperplans, etcètera) serà suficient fer-ho per a les equacions reduïdes. Farem aquest estudi en dimensions 2 i 3.
Donarem un *nom* a cada equació reduïda (per exemple: paràbola, hipèrbola, el·lipse, recta doble... són noms de còniques) que sovint reflectirà aquesta geometria. Quan ens demanin que classifiquem les quàdriques, la tasca fonamental serà la del **càlcul dels invariants**.

Observació 7.1.2. Diem que una quàdrica projectiva Q és real (respectivament complexa) si està definida en un un espai projectiu $(\mathbb{P}, E, \pi)$ real (resp. complex), és a dir, si E és un espai vectorial real o complex. En particular, si $Q = [\eta]$ és una quàdrica real, $\eta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ és una forma bilineal no nul·la a valors en $\mathbb{R}$ i la matriu de Q tindrà coeficients reals, així com la seva equació.

De totes maneres, encara que E sigui un espai vectorial complex, i la forma bilineal i la forma bilineal $\eta : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ la pensem amb valors a $\mathbb{C}$, pot passar que els coeficients $\eta(e_i, e_j)$ de la matriu de Q siguin tots reals.

Exemple 7.1.3. Per exemple, podem pensar la cònica projectiva d'equació $x_0^2+x_1^2+x_2^2 = 0$ com a cònica real o com a cònica complexa i podem fer-ne la classificació real o complexa. Quan la pensem com a cònica real, serà una cònica sense punts, és a dir $|Q| = \emptyset$. En canvi, si la pensem com a cònica complexa, tindrà una infinitat de solucions (totes nombres complexos no reals), en aquest sentit, no és diferent a la cònica $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ (que en canvi sí que té solucions reals).

Per aquest motiu, la cònica projectiva d'equació $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, sovint l'anomenarem cònica imaginària (perquè pensarem en les seves solucions complexes, o la seva versió complexa), però aquesta etiqueta només tindrà sentit quan la pensem com a cònica real (perquè si no, com veurem, és equivalent a la cònica $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$).

7.2 Cas projectiu complex

7.2.1 Relació d'equivalència

El cas projectiu complex és el més senzill de tots ja que només necessitem un invariant per fer la classificació. Comencem definint la relació d'equivalència.

Definició 7.2.1 (Quàdriques equivalents)**.** Siguin Q_1, Q_2 dues quàdriques projectives (reals o complexes). Diem que són equivalents si existeixen dues referències $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ de manera que la matriu de Q_1 en la referència $\mathcal{R}_1$ és proporcional a la matriu de Q_2 en la referència $\mathcal{R}_2$. Posarem $Q_1 \sim Q_2$.

Proposició 7.2.2. *7.2.1 ens dona una relació d'equivalència.*

Demostració. Les propietats reflexiva i simètrica són immediates. Suposem que $Q_1 \sim Q_2$ i que $Q_2 \sim Q_3$. Per definició existeixen referències $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2'$ i $\mathcal{R}_3$ de manera que la matriu de Q_1 en la referència $\mathcal{R}_1$ i la matriu de Q_2 en la referència $\mathcal{R}_2$ és la mateixa matriu M (llevat de multiplicar per un constant). De la mateixa forma la matriu de Q_2 en la referència $\mathcal{R}_2'$ i la matriu de Q_3 en la referència $\mathcal{R}_3$ és la mateixa matriu N. Com que M i N representen la quàdrica Q_2 existirà una matriu invertible P de manera que $P^T M P = N$. Aplicant la matriu P a una base adaptada a la referència $\mathcal{R}_1$ trobem una nova referència $\mathcal{R}_1'$ en la qual la matriu de Q_1 és, per construcció $P^T M P = N$. Per tant la quàdrica Q_1 i la quàdrica Q_3 tenen la mateixa matriu associada en les referències $\mathcal{R}_1'$ i $\mathcal{R}_3$ respectivament. ■

7.2.2 Rang

Proposició 7.2.3. *El rang és un invariant de les quàdriques projectives reals i complexes.*

Demostració. Recordem que vam definir el rang d'una quàdrica com el rang qualsevol matriu que la representa. Si dues matrius M, M' representen la mateixa quàdrica, aleshores existeix una matriu invertible A de manera que $A^T M A = \lambda M'$ per una constant no nul·la λ. Com $\operatorname{rang}\left(A^T M A\right) = \operatorname{rang}(M)$ tenim que té sentit definir el rang de Q. Si $Q_1 \sim Q_2$, aleshores podem mirar el rang de les dues quàdriques en la matriu que les representa simultàniament i tenim que $\operatorname{rang}(Q_1) = \operatorname{rang}(Q_2)$. ■

7.2.3 Equacions reduïdes

El següent pas és trobar equacions reduïdes per a les quàdriques projectives.

Lema 7.2.4. *Per a tota quàdrica projectiva existeix una referència en la qual la matriu de la quàdrica és diagonal.*

Demostració. Primer ens reduïm al cas en què la quàdrica és no degenerada. Vam veure en una lliçó anterior que existeix una referència en la qual la matriu de la quàdrica és de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-r+1,n-r+1} & \dots & a_{n-r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-r+1,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

on $M' = (a_{ij})$ és una matriu simètrica de determinant no nul. Per tant és suficient amb diagonalitzar M'. Suposem doncs que Q és una quàdrica no degenerada en un espai projectiu $\mathbb{P}$ de dimensió n.

Provarem per inducció que existeix un símplex autopolar $p_0, \ldots, p_n$, això acabarà la demostració ja que sabem que en la referència $(p_0, \ldots, p_n; A)$ la matriu de Q serà diagonal. Si $n = 1$ és suficient considerar un punt p_0 fora de la quàdrica i prendre p_1 el seu punt conjugat, per definició formen un símplex autopolar. Suposem que $n > 1$ i considerem $p_0 \notin |Q|$. Aleshores el seu hiperplà polar H_{p_0} talla Q en una quàdrica no degenerada: en efecte si hi hagués un punt doble x de $Q \cap H_{p_0}$ tindríem que x seria conjugat de tots els punts d' H_{p_0} i també de p_0, per tant $p_0 \vee H_{p_0} = \mathbb{P} \subset H_x$ (i els punts conjugats formen una varietat lineal que, com a mínim, conté $H_{p_0} \vee p_0$). És a dir, x seria un punt doble de Q i això contradiu que sigui no degenerada. Finalment apliquem la hipòtesi d'inducció i obtenim que existeix un símplex autopolar $p_1, \ldots, p_n$ de $Q \cap H_{p_0}$. Com tots aquests punts són conjugats de p_0 obtenim que $p_0, p_1, \ldots, p_n$ és un símplex autopolar de Q. ∎

Considerem ara una quàdrica projectiva Q i una referència en la qual la matriu de Q és diagonal. Observem que si en una referència permutem l'ordre dels vèrtex (sense canviar el punt unitat) obtenim de nou una referència. Fem doncs una permutació de vèrtexs convenient fins a aconseguir que els termes no nuls de la matriu apareguin en les primeres columnes. Dit d'una altra forma, podem suposar que l'equació de Q és de la forma $a_{00}x_0^2 + \cdots + a_{rr}x_r^2 = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ 0 & \cdots & a_r & & & \\ \hline & & & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right).$$

Notem que $\mathrm{rang}(Q) = r + 1$. Fins ara no hem fet servir que els coeficients són complexos, és a dir: $a_{ii} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Fem el canvi de variables:

$$y_0 = \sqrt{a_{00}}x_0, \ldots, y_r = \sqrt{a_{rr}}x_r, y_{r+1} = x_{r+1}, \ldots, y_n = x_n.$$

En les noves coordenades l'equació de Q és:

$$y_0^2 + \ldots + y_r^2 = 0$$

Aleshores té rang $r+1$, el rang és invariant per la relació d'equivalència que ens hem fixat i diem que aquesta equació és *reduïda*.

Observació 7.2.5. Hem demostrat que per a tota quàdrica projectiva complexa existeix una referència en la qual l'equació de la quàdrica és alguna de les anteriors. Observem que hi ha exactament $n + 1$ equacions reduïdes:

$$y_0^2 = 0,\ y_0^2 + y_1^2 = 0, \ldots, y_0^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 0.$$

i que si sabem el rang de la quàdrica, l'equació reduïda queda totalment determinada.

Teorema 7.2.6 (Teorema de classificació de les quàdriques projectives complexes). *Siguin* Q_1, Q_2 *dues quàdriques en un espai projectiu complex. Són equivalents:*

1. $Q_1 \sim Q_2$.
2. $\operatorname{rang}(Q_1) = \operatorname{rang}(Q_2)$.
3. Q_1 *i* Q_2 *tenen la mateixa equació reduïda.*

Demostració. Com el rang és un invariant projectiu de les quàdriques tenim que el primer apartat implica el segon. D'altra banda, hem vist que el rang determina l'equació reduïda, per tant, el segon apartat implica el tercer. Finalment, per la definició de relació d'equivalència, el tercer apartat implica el primer. ■

7.2.4 Còniques del pla projectiu $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ i quàdriques de l'espai projectiu $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$

Particularitzem la classificació per als casos $n = 2, 3$ i tornem a usar les variables $x_0, \ldots, x_n$. En el cas del pla tenim que hi ha tres classes d'equivalència, és a dir, donada una cònica existeix una referència (no única en general) en la qual la seva equació és una de les tres següents:

$$\begin{aligned} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 &= 0 \\ x_0^2 + x_1^2 &= 0 \\ x_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

segons quin sigui el seu rang. Els casos de rang 1 i 2 ja els hem estudiat i corresponen a una recta doble o un parell de rectes (notem que $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1)$). Totes les còniques no degenerades són equivalents entre si. De la mateixa forma, per $n = 3$, totes les quàdriques no degenerades són equivalents entre si i, en una referència convenient, tenen una equació de la forma:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Les quàdriques de rang 1 i 2 respectivament són plans dobles i parelles de plans i les equacions són $x_0^2 = 0$ i $x_0^2 + x_1^2 = 0$. Finalment totes les quàdriques de rang 3 són equivalents entre si i els diem cons. Tal com vam veure en l'estudi de les quàdriques degenerades, el con Q es pot interpretar de la forma següent: sigui V el vèrtex del con (l'únic punt doble). Si l'equació del con és l'equació reduïda $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, tindrem que $V = [0 : 0 : 0 : 1]$. Sigui C la cònica d'equació $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ continguda en el pla $x_3 = 0$ (és una cònica no degenerada). Aleshores $|Q|$ és la reunió de les rectes obtingudes unint V amb els punts de $|C|$.

7.3 Cas projectiu real

Reprenem la discussió de l'apartat anterior des del moment que hem utilitzat per primer cop que el cos era el dels nombres complexos. Havíem arribat, sense usar cap propietat especial del cos base, a l'existència de símplexs autopolars per a la quàdrica fixada Q i per tant a l'existència d'una referència en la qual la matriu de la quàdrica és diagonal. Tenim doncs una equació de la forma: podem suposar que l'equació de Q és de la forma:

$$a_{00}x_0^2 + \ldots + a_{rr}x_r^2 = 0,$$

on tots els coeficients a_{ii} són no nuls per $0 \leq i \leq r$. En particular el rang de Q és $r+1$. D'aquest coeficients n'hi pot haver de positius i de negatius i per això, en principi, no podem fer directament el canvi de variables que fèiem en el cas complex i que bàsicament consistia en multiplicar x_i per l'arrel de a_{ii}. El que si podem suposar és que hi ha una quantitat més gran o igual de coeficients positius que de negatius, ja que les equacions i les matrius estan determinades llevat de multiplicació per constant i si haguessin més coeficients negatius que positius multiplicaríem l'equació per -1.

Observació 7.3.1. Recordem que si apliquem una permutació en els punts d'una referència s'obté una nova referència (ja que permutant els elements d'una base s'obté una altra base). Podem, doncs, suposar que permutem les variables de forma que tots els coeficients a_{ii} són positius des de $i = 0$ fins a $i = j$ i que $a_{ii} < 0$ per $i = j+1, \ldots, r$. A més a més podem suposar que $j + 1 \geq r - j$, o equivalentment $j \geq \frac{r-1}{2}$.

Ara fem el canvi de variables:

$$\begin{aligned} &y_0 = \sqrt{a_{00}} \cdot x_0, \ldots, y_j = \sqrt{a_{jj}} \\ &y_{j+1} = \sqrt{-a_{j+1j+1}} x_{j+1}, \ldots, y_r = \sqrt{-a_{rr}} x_r \\ &y_{r+1} = x_{r+1}, \ldots, y_n = x_n. \end{aligned}$$

En les noves coordenades l'equació de Q és:

$$y_0^2 + \cdots + y_j^2 - y_{j+1}^2 - \cdots - y_r^2 = 0. \tag{7.3.1}$$

Diem que aquesta equació és *reduïda*. Hem demostrat que per a tota quàdrica projectiva real existeix una referència en la qual l'equació de la quàdrica com una de les anteriors amb $j \geq \frac{r-1}{2}$. Observem que l'equació reduïda està determinada per dues constants: el nombre de coeficients no nuls $r+1$ (que és igual al rang de Q) i el nombre de coeficients positius $j+1$. El següent pas és demostrar que $j+1$ és un invariant de la quàdrica.

Definició 7.3.2 (Index de la quàdrica)**.** Sigui Q una quàdrica de l'espai projectiu real. Anomenem index de la quàdrica a la constant següent:

$$j(Q) = \max\{\dim L \mid L \text{ és una varietat lineal amb } L \cap |Q| = \emptyset\}.$$

Dit d'una altra forma: l'índex mesura la mida de la varietat lineal més gran que podem trobar sense tenir punts en comú amb Q. **L'índex també és un invariant**.

Proposició 7.3.3. *Tenim les següents propietats de l'índex de les quàdriques de l'espai projectiu real:*

1. *L'índex és un invariant projectiu, és a dir, si dues quàdriques són equivalents aleshores tenen el mateix índex.*
2. *Si Q té l'equació reduïda* (7.3.1), *aleshores* $j(Q) = j$.
3. $n - j - 1 = \max\{\dim \mathbb{L} \mid \mathbb{L}$ *és una varietat lineal amb* $\mathbb{L} \subset |Q|\}$.

Demostració. El primer apartat és conseqüència de què el conjunt de les varietats lineals disjuntes amb $|Q|$ és una noció intrínseca, independent de la referència escollida. Per demostrar els apartats segon i tercer considerem les varietats lineals:

$$\begin{aligned} &\mathbb{L} : x_{j+1} = \ldots = x_n = 0, \\ &\mathbb{M} : x_0 = x_{j+1}, \ldots, x_{r-j-1} = x_r, x_{r-j} = \ldots = x_j = 0. \end{aligned}$$

Aquestes $j+1$ equacions ens diuen que $\mathbb{L}$ té dimensió j i $\mathbb{M}$ té dimensió $n-j-1$, i l'equació de Q restringida a $\mathbb{M}$ és $0 = 0$. Com $\mathbb{L}, \mathbb{M}$ són disjuntes, aleshores són suplementàries. En efecte, substituint en l'equació (7.3.1) obtenim que $\mathbb{L} \cap |Q| = \emptyset$ i $\mathbb{M} \subset |Q|$. Sigui $\mathbb{L}'$ una varietat lineal de dimensió $> j$ aleshores $\mathbb{L}' \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$ i, per tant, no pot ser disjunta amb Q. En més detall, com $\mathbb{M} \subset |Q|$ implica que $L' \cap |Q| \neq \emptyset$, ja que $\mathbb{L}' \cap \mathbb{M} \subset \mathbb{L}' \cap |Q| \neq \emptyset$, i arribem a una contradicció. Això és, no hi ha cap varietat amb dimensió superior a j disjunta amb Q. De la mateixa forma no hi pot haver una varietat de dimensió $> n-j-1$ continguda en Q perquè tallaria $\mathbb{L}$. ■

Observació 7.3.4. Com a conseqüència, $n - j(Q) - 1$ és la dimensió màxima d'una varietat lineal continguda a la quàdrica.

Teorema 7.3.5 (Teorema de classificació de les quàdriques projectives reals). *Siguin Q_1, Q_2 dues quàdriques en un espai projectiu real. Són equivalents:*

1. $Q_1 \sim Q_2$.
2. $\operatorname{rang}(Q_1) = \operatorname{rang}(Q_2)$ *i* $j(Q_1) = j(Q_2)$.
3. Q_1 *i* Q_2 *tenen la mateixa equació reduïda.*

Demostració. La mateixa que en el cas complex. ■

7.4 Còniques del pla projectiu real i quàdriques de l'espai projectiu complex de dimensió 3

Parametritzem la classificació per als casos $n = 2, 3$ i tornem a usar les variables $x_0, \ldots, x_n$. En el cas del pla tenim que hi ha les possibles equacions reduïdes (cada fila correspon a un rang):

$$\begin{array}{ll} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0, & x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ x_0^2 + x_1^2 = 0 & x_0^2 - x_1^2 = 0 \\ x_0^2 = 0 & \end{array}$$

Com en el cas complex les còniques de rang 1 són rectes dobles. En el cas de rang 2 hi ha dues possibilitats: que la cònica sigui el producte de dues rectes imaginàries conjugades $x_0^2 + x_1^2 =$

$(x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1)$ que es tallen en el punt doble $[0 : 0 : 1]$, en aquest cas $j = 1$ i hi ha rectes disjuntes amb Q. En l'altre cas, les dues rectes són reals. Hi ha dos tipus de còniques no degenerades, una no té punts ($j = 2$) i l'altra sí.

De la mateixa manera, per a $n = 3$, tenim que totes les quàdriques són equivalents a una i només una equació de la forma (cada fila correspon a un rang):

$$\begin{matrix} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0, & x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ x_0^2 + x_1^2 = 0 & x_0^2 - x_1^2 = 0 \\ x_0^2 = 0 & \end{matrix}$$

Les quàdriques de rang 1 i 2 respectivament són plans dobles i parelles de plans (reals o imaginaris conjugats). Les quàdriques de rang 3 són cons reals o imaginaris segons si la cònica secció amb un pla que no passa pel vèrtexs té o no té punts.

Finalment, tenim tres tipus de quàdriques no degenerades; sense punts ($j = 3$), que contenen punts però no rectes ($j = 2$) i finalment quàdriques que contenen rectes ($j = 1$). Aquestes últimes reben el nom de *quàdriques reglades*.

7.4.1 Càlculs explícits

Per a classificar una quàdrica i obtenir la seva equació reduïda només necessitem calcular els seus invariants. El rang no té dificultat ja que per definició és el rang de qualsevol matriu representant la quàdrica. Més complicat és trobar l'índex. El seu càlcul es basa en dos resultats que no demostrarem:

Lema 7.4.1. *Sigui M una matriu representant una quàdrica Q. Suposem que M té a_+ VAPs estrictament positius i a_- VAPs estrictament negatius. Aleshores:*

$$\mathrm{j}(Q) = \max\{a_+, a_-\} - 1.$$

Teorema 7.4.2 (Regla de Descartes). *Sigui $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ un polinomi amb totes les arrels reals. Considerem la successió de signes:*

$$\operatorname{signe}(a_n) \quad \operatorname{signe}(a_{n-1}) \quad \ldots \quad \operatorname{signe}(a_1) \quad \operatorname{signe}(a_0).$$

Aleshores el nombre d'arrels positives de p és igual al nombre de canvis de signe de la successió.

Per calcular l'índex usem els dos resultats: gràcies al lema només hem de mirar **quantes arrels positives i negatives té el polinomi característic de la matriu**. Noteu que no necessitem saber quins són els VAPs, només els seus signes. D'altra banda, les matrius simètriques diagonalitzen[1], per tant el polinomi característic té totes les arrels reals i podem aplicar la regla de Descartes.

[1] Totes les matrius simètriques diagonalitzen en virtut del teorema de Schur.

Exemple 7.4.3. Considerem una cònica C del pla projectiu real d'equació $x_0^2+x_1^2-x_2^2+2x_0x_1-4x_1x_2=0$. La matriu de C és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rang de la matriu és 3. Per calcular l'índex primer trobem el característic de la matriu i obtenim: $-x^3+x^2+6x-4$. La successió de signes dels coeficients del polinomi és: $-++-$. Hi ha dues variacions de signe (o sigui dos canvis de «positiu a negatiu» o de «negatiu a positiu»), per tant tenim dos VAPs positius. Com totes les arrels són reals per força hi un VAP negatiu i tenim que $j=\max\{2,1\}-1=1$. L'equació reduïda és $x_0^2+x_1^2-x_2^2=0$. Es tracta d'una cònica no degenerada amb punts.

7.5 Classificació de les quàdriques afins reals i complexes

Procedim a classificar les quàdriques afins, reals i complexes. En aquest cas l'equivalència entre quàdriques vindrà donada pels canvis de coordenades afins.

Definició 7.5.1 (Quàdriques equivalents). Siguin Q_1, Q_2 dues quàdriques afins (reals o complexes). Diem que són equivalents si existeixen dues referències afins $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ de manera que la matriu de Q_1 en la referència $\mathcal{R}_1$ és proporcional a la matriu de Q_2 en la referència $\mathcal{R}_2$. Fent el mateix argument que en el cas projectiu es demostra que es tracta d'una relació d'equivalència, posarem $Q_1 \sim_{af} Q_2$.

Observació 7.5.2. Recordem que un canvi de referència es pot interpretar com l'afinitat identitat $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ considerant una de les referències a la sortida i l'altra a l'arribada. Les afinitats corresponen a projectivitats en la seva compleció projectiva $\overline{f} : \overline{\mathbb{A}^n} \longrightarrow \overline{\mathbb{A}^n}$ que deixen invariant l'hiperplà de l'infinit. En particular si dues quàdriques són afinment equivalents aleshores les corresponents quàdriques projectives seran projectivament equivalents i també les seves seccions impròpies. Per tant:

$$Q_1 \sim_{\mathrm{af}} Q_2 \implies \overline{Q}_1 \sim \overline{Q}_2, \quad \overline{Q}_{1,\infty} \sim \overline{Q}_{2,\infty}.$$

En conseqüència tenim el resultat següent.

Proposició 7.5.3. *Sigui Q una quàdrica afí real. Denotem amb $\mathbf{r}(Q)$ el rang de $\overline{Q}$ i amb $\mathbf{r}'(Q)$ el rang de Q_∞. De la mateixa manera denotem per $\mathbf{j}(Q)$ i $\mathbf{j}'(Q)$ els índexs de $\overline{Q}$ i Q_∞, respectivament. Aleshores $\mathbf{r}(Q), \mathbf{r}'(Q), \mathbf{j}(Q), \mathbf{j}'(Q)$ són invariants. Si Q és complexa, aleshores només tenim els invariants $\mathbf{r}(Q)$ i $\mathbf{r}'(Q)$.*

Com en el cas projectiu, l'estratègia per classificar les quàdriques afins passa per trobar equacions reduïdes i provar que:

1. per a tota tota quàdrica existeix una referència afí en la qual la seva equació és reduïda,
2. les equacions reduïdes estan determinades pels invariants de les quàdriques.

Un cop provat això tindrem com a corol·lari que els invariants considerats a la proposició són suficients per a classificar les quàdriques. Aquesta estratègia es porta a terme d'una manera molt semblant quan el cos base és el cos dels reals o quan és el cos dels complexos. Com el cas real és més complicat (surten més possibilitats d'equacions reduïdes i hi ha més invariants) farem només aquest cas. Observeu finalment que com que sabem trobar tant el rang com l'índex d'una quàdrica, tenim també un mètode efectiu per fer la classificació de les quàdriques afins.

7.6 Equacions reduïdes de les quàdriques afins reals i Teorema de classificació.

Considerem una quàdrica Q en un espai afí $(\mathbb{A}^n, F)$. Una referència en aquest espai afí està formada per un punt $p \in \mathbb{A}^n$ i una base $(e_1, \ldots, e_n)$ d'F. Aquesta base determina una referència projectiva $([e_1], \ldots, [e_n]; [e_1 + \ldots + e_n])$ en l'hiperplà de l'infinit $H_\infty = \mathbb{P}(F)$ i viceversa, una base adaptada a una referència de l'hiperplà de l'infinit ens dona una base d'F, ben determinada, llevat de multiplicar la base per un escalar. Hem vist que a tota quàdrica projectiva se li pot associar una matriu diagonal amb 1 i -1 a la diagonal. Per tant, existeix una referència projectiva que permet posar Q_∞ en forma reduïda. En definitiva, en una referència afí convenient podem posar la matriu de Q de la forma:

$$\begin{pmatrix}
a_{00} & a_{10} & \ldots & a_{j0} & a_{(j+1)0} & \ldots & a_{r0} & a_{(r+1)0} & \ldots & a_{n0} \\
a_{10} & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{j0} & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{(j+1)0} & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{r0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{(r+1)0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix},$$

on el nombre de vegades que apareix l'1 (j vegades) és més gran o igual que el nombre de vegades que apareix -1 ($r - j$ vegades). Posant la matriu per blocs tindrem:

$$\begin{pmatrix}
a_{00} & a_1 & a_2 & a_3 \\
a_1^T & \mathrm{Id} & 0 & 0 \\
a_2^T & 0 & -\mathrm{Id} & 0 \\
a_3^T & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

on a_1, a_2, a_3 són vectors fila. L'equació afí que correspon a aquesta matriu és de la forma:

$$x_1^2 + 2a_{10}x_1 + \ldots + x_j^2 + 2a_{j0}x_j - x_{j+1}^2 + 2a_{(j+1)0} - \ldots - x_r^2 + 2a_{r0}x_r$$
$$+ 2a_{(r+1)0}x_{s+1} + \ldots + 2a_{n0}x_n + a_{00} = 0.$$

Completant quadrats podem posar:

$$\begin{aligned} x_i^2 + 2a_{i0}x_i &= (x_i + a_{i0})^2 - a_{i0}^2, \\ -x_i^2 + 2a_{i0}x_i &= -(x_i - a_{i0})^2 + a_{i0}^2, \end{aligned}$$

per $i = 1, \dots, j$ i $i = j+1, \dots, r$, respectivament. Fent el canvi $y_i = x_i \pm a_{i0}$ i modificant el terme independent a_{00} simplifiquem la matriu anterior de manera que podem suposar que:

$$a_{10} = \dots = a_{j0} = a_{(j+1)0} = \dots a_r = 0.$$

Obtenim que, completant quadrats, la nova matriu de la quàdrica, per blocs, és de la forma (tornem a posar a_{00} per al nou terme independent):

$$\begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & a \\ 0 & \mathrm{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{Id} & 0 \\ a^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 7.6.1. En dimensió 2 ens queden les possibilitats següents (recordeu que la matriu de la quàdrica impròpia no és zero per definició, per tant $j > 0$):

$$\begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & a_{20} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{20} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En dimensió 3 tindríem les matrius:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & a_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{03} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & a_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ a_{03} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & a_{02} & a_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{02} & 0 & 0 & 0 \\ a_{03} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per acabar la reducció busquem canvis de variables que «eliminin» els coeficients variables a_{i0} que encara resten a la matriu.

Proposició 7.6.2. *Per a tota quàdrica afí real en un espai afí de dimensió n, existeix una referència afí en la qual l'equació de la quàdrica és una de les següents (tornem a utilitzar les variables $(x_0, \dots, x_n)$):*

1. $x_1^2 + \dots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \dots - x_r^2 = 0$, *amb* $j \geq r - j$ *i invariants* $(r, j-1, r, j-1)$.
2. $x_1^2 + \dots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \dots - x_r^2 = 1$, *amb* $j > r - j$ *i invariants* $(r+1, j-1, r, j-1)$.
3. $x_1^2 + \dots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \dots - x_r^2 = 1$, *amb* $j \leqslant r - j$ *i invariants* $(r+1, r-j, r, r-j-1)$.
4. $x_1^2 + \dots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \dots - x_r^2 = 2x_n$, *amb* $j \geqslant r - j$ *i invariants* $(r+2, j, r, j-1)$.

Demostració. Distingim tres casos:

1. **Primer cas**. La part lineal i el terme independent són nuls, és a dir $a_{00} = a_{r+10} = \ldots = a_{n0} = 0$. L'equació queda $x_1^2 + \ldots x_j^2 - x_{j+1}^2 - x_r^2 = 0$ i ja està reduïda. Observem que tenim la restricció $j \geq r - j$ i que els invariants d'aquesta quàdrica són:
$$(\mathbf{r}(Q), \mathbf{j}(Q), \mathbf{r}'(Q), \mathbf{j}'(Q)) = (r, j-1, r, j-1).$$
2. **Segon cas**. La part lineal és zero ($a_{i0} = 0$ per $i = s+1, \ldots, n$), però no així el terme independent: $a_{00} \neq 0$. Canviant el signe de l'equació, si cal, podem suposar que $a_{00} < 0$. Observeu que això implica que en aquest cas no podrem tenir sempre més termes amb coeficient 1 que termes amb coeficient -1. Ara, fent el canvi:
$$x_i = \sqrt{-a_{00}} y_i, \text{ si } i = 1, \ldots, s, \quad x_i = y_i \text{ si } i = s+1, \ldots, n.$$
Tota l'equació queda multiplicada per a_{00}. Dividint per a_{00} ens queda la següent equació reduïda:
$$y_1^2 + \ldots + y_j^2 - y_{j+1}^2 - \ldots - y_r^2 = 1.$$
Direm que estem en el primer subcàs si $j > r - j$ i en el segon si $j \leq r - j$. Com la matriu associada és diagonal, els invariants són fàcils de calcular:
    1. *Subcàs 2.1.* $(\mathbf{r}(Q), \mathbf{j}(Q), \mathbf{r}'(Q), \mathbf{j}'(Q)) = (r+1, j-1, r, j-1)$.
    2. *Subcàs 2.2.* $(\mathbf{r}(Q), \mathbf{j}(Q), \mathbf{r}'(Q), \mathbf{j}'(Q)) = (r+1, r-j, r, r-j-1)$.
3. Algun dels coeficients a_{i0} és no nul. Podem suposar, permutant les variables, que $a_{n0} \neq 0$. En aquest cas podem posar:
$$x_1^2 + \ldots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 2a_{r+10}x_{r+1} + \ldots + 2a_{n0}x_n + a_{00} =$$
$$x_1^2 + \ldots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 2a_{n0}\left(\frac{a_{(r+1)0}}{a_{n0}}x_{r+1} + \ldots + \frac{a_{(n-1)0}}{a_{n0}}x_{n-1} + x_n + \frac{a_{00}}{2a_{n0}}\right) = 0.$$
Aleshores el canvi
$$y_n = -(a_{n0}\frac{a_{00}}{2a_{n0}} + \frac{a_{(r+1)0}}{a_{n0}}x_{r+1} + \ldots + \frac{a_{(n-1)0}}{a_{n0}}x_{n-1} + x_n), y_i = x_i, i = 1, \ldots n-1,$$
deixa l'equació de la forma:
$$y_1^2 + \ldots + y_j^2 - y_{j+1}^2 - \ldots - y_r^2 = 2y_n.$$
En aquest cas els invariants són:
$$(\mathbf{r}(Q), \mathbf{j}(Q), \mathbf{r}'(Q), \mathbf{j}'(Q)) = (r+2, j, r, j-1).$$

Havent demostrat tots els casos, podem concloure la nostra demostració. ■

Teorema 7.6.3 (Teorema de classificació de les quàdriques afins reals)**.** *Siguin Q_1, Q_2 dues quàdriques en un espai afí real. Són equivalents:*

1. $Q_1 \sim_{af} Q_2$.
2. *Q_1 i Q_2 tenen els mateixos invariants* $(\mathbf{r}, \mathbf{j}, \mathbf{r}', \mathbf{j}')$.
3. *Q_1 i Q_2 tenen la mateixa equació reduïda.*

Demostració.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ És degut a què els quatre nombres són invariants.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ D'altra banda, analitzant el resum anterior observem que totes les equacions reduïdes tenen invariants diferents, per tant no són equivalents entre si i en conseqüència a tota quàdrica li correspon una única equació reduïda.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Per la definició de la relació d'equivalència. ■

7.7 Descripció de les quàdriques afins reals en dimensions 2 i 3

En aquest darrer apartat fem una descripció geomètrica de les còniques del pla afí real i de les quàdriques de l'espai afí real de dimensió 3. Totes les possibilitats que apareixen estan resumides en les taules que teniu al final dels apunts i que convé que es tinguin a mà per a la discussió que segueix.

7.7.1 Còniques

Hi ha quatre còniques no degenerades, la primera de les quals no té cap punt i que anomenem, com en el cas projectiu, cònica imaginària. Les altres tres són la mateixa cònica des del punt de vista projectiu i que el que canvia és la seva posició relativa amb la recta de l'infinit, la qual cosa es reflecteix en els invariants $\mathbf{r}', \mathbf{j}'$.

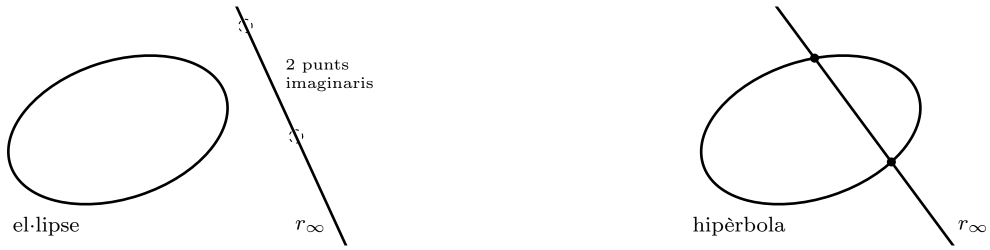


Figura 7.1: Descripció d'una el·lipse i hipèrbola.

Si la cònica no té cap punt a l'infinit, aleshores **té centre** (si fos tangent a l'infinit el punt de tangència seria un punt d'intersecció de la cònica amb l'infinit), **però no asímptotes**. S'anomena *el·lipse*.

Si la secció amb l'infinit són dos punts aleshores la cònica té centre i, a més a més, té dues asímptotes. L'anomenem hipèrbola. Finalment la paràbola és la que és tangent a l'infinit, per tant no té centre.

Les còniques de rang 2 estan formades per parelles de rectes que poden ser reals o imaginàries conjugades. Segons si la recta de l'infinit passa o no passa pel punt d'intersecció, les dues rectes seran paral·leles o no. En el cas de paral·lelisme la secció impròpia estarà formada per un sol punt, per tant Q_∞ serà degenerada i $\mathbf{r}'$ serà 1. Finalment només hi ha una cònica de rang 1 que és la recta doble.

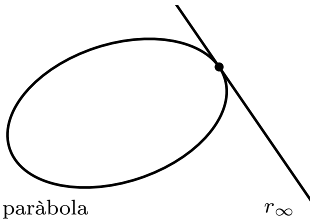


Figura 7.2: Esbós d'una paràbola.

7.7.2 Quàdriques de dimensió 3

Considerem ara totes les equacions reduïdes en dimensió 3 (ara tindrem un pla, a l'infinit). Com ja hem comentat les quàdriques de rang 1 i 2 són ben conegudes i sempre corresponen al producte de dos plans que poden ser iguals o diferents (segons el rang), real o imaginaris conjugats, o bé paral·lels o no (segons la posició relativa amb el pla de l'infinit).

Les quàdriques de rang 3 són des del punt de vista projectiu cons amb un vèrtex V. Quan introduïm la informació provinent de la posició relativa amb l'hiperplà de l'infinit, trobem dues possibilitats. La primera és que V no pertany al pla de l'infinit, en aquest cas els continuem anomenant *cons*. Si la secció impròpia té punts direm que el cas és real, en cas contrari que és imaginari. La segona possibilitat és que el vèrtex es trobi al pla de l'infinit. En aquest cas totes les rectes per V contingudes en la quàdrica es tornen paral·leles, els anomenem cilindres. Segons com sigui la secció del cilindre amb un pla afí que no passa per V (serà una cònica afí no degenerada) diem que el cilindre és el·líptic, parabòlic o hiperbòlic.

Finalment considerem les quàdriques no degenerades. A banda de la imaginària en tenim cinc tipus. Tres provenen de la quàdrica no degenerada no reglada. La posició relativa de Q amb el pla de l'infinit H_∞ pot ser:

1. $H_\infty \cap |Q| = \emptyset$. Diem que és un *el·lipsoide* perquè totes les seves seccions no degenerades són *el·lipses.*
2. H_∞ és tangent a la quàdrica (talla en un sol punt). En aquest cas, es tracta d'un paraboloide i, com no és reglada, la secció impròpia per força està formada per dues rectes imaginàries. Per tant, les seccions no degenerades de Q són paràboles o el·lipses (no poden ser hipèrboles perquè solament tenim un punt de tangència amb l'infinit). Per això se l'anomena *paraboloide el·líptic.*
   - $r(Q_\infty) = 2$,
   - $j(Q_\infty) = 1$.

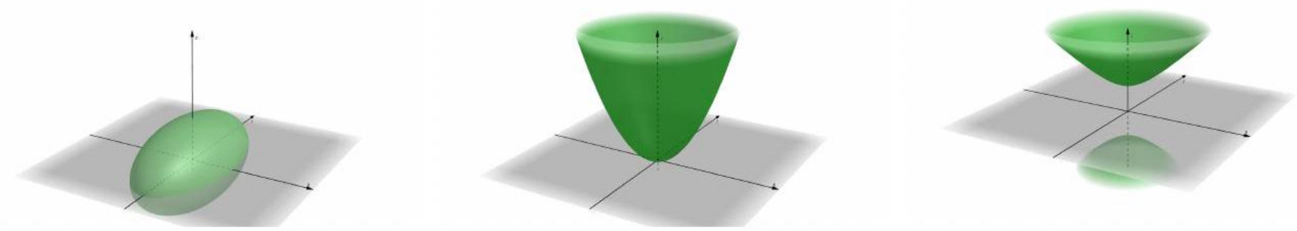


Figura 7.3: La primera, segona i tercera quàdrica que hem descrit, respectivament.

3. Finalment pot passar que la secció impròpia sigui no degenerada amb punts. Per tant, diem que és un hiperboloide. Observeu que l'equació reduïda $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ es pot posar de la forma $x^2 - 1 = y^2 + z^2$. Apareixen dues components connexes, una quan $x \geqslant 1$ i l'altra quan $x \leqslant -1$; en canvi quan $-1 < x < 1$ la quàdrica no té punts. Per aquesta raó diem que es tracta d'un *hiperboloide de dos fulls*.
   - $r(Q_\infty) = 3$,
   - $j(Q_\infty) = 1$.

A continuació tenim una imatge d'aquestes tres quàdriques en l'ordre en que les hem descrit: Finalment estudiem el cas reglat. Només hi ha dues possibilitats perquè el pla de l'infinit no pot ser disjunt. Només pot ser tangent a la quàdrica (paraboloide hiperbòlic, observeu que té seccions que són hipèrboles) o no tangent (hiperboloide d'un full). Les imatges respectives serien:

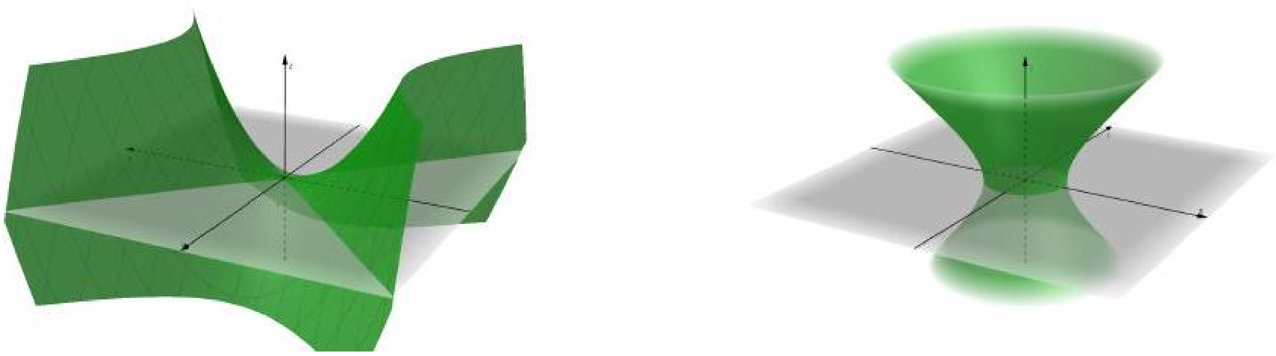


Figura 7.4: Paraboloide hiperbòlic i hiperboloide d'un full.

7.8 Taules de còniques i quàdriques

Taula 7.1: Tipus de còniques reals afins i projectives.

Invariants projectius				Invariants afins no projectius				
reduïda	r	j	*tipus*	**reduïda**	r'	j'	*tipus*	*secció*
$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	3	2	imaginària	$-x^2 - y^2 = 1$	2	1	imaginària	parell de punts imaginaris
$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	3	1	no degenerada	$x^2 + y^2 = 1$	2	1	el·lipse	parell de punts imaginaris
				$x^2 - y^2 = 1$	2	0	hipèrbola	parell de punts reals
				$x^2 = 2y$	1	0	paràbola	punt doble
$x_0^2 + x_1^2 = 0$	2	1	parell de rectes imaginàries	$x^2 + y^2 = 0$	2	1	parell de rectes imaginàries	parell de punts imaginaris
				$-x^2 = 1$	1	0	parell de rectes imaginàries	punt doble
$x_0^2 - x_1^2 = 0$	2	0	parell de rectes reals	$x^2 - y^2 = 0$	2	0	parell de rectes reals	parell de punts reals
				$x^2 = 1$	1	0	parell de rectes reals paral·leles	punt doble
$x_0^2 = 0$	1	0	recta doble	$x^2 = 0$	1	0	recta doble pròpia	recta doble

Taula 7.2: Tipus de quàdriques afins i projectives de l'espai real tridimensional.

Invariants projectius				Invariants afins no projectius				
reduïda	r	j	*tipus*	**reduïda**	r'	j'	*tipus*	*secció*
$x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	4	3	imaginària	$-x^2-y^2-z^2=1$	3	2	imaginària	imaginària
$x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$	4	2	no reglada	$x^2+y^2+z^2=1$	3	2	el·lipsoide	imaginària
				$x^2-y^2-z^2=1$	3	1	hiperboloide de dues fulles	real no degenerada
				$x^2+y^2=2z$	2	1	paraboloide el·líptic	parell de rectes imaginàries
$x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$	4	1	reglada	$x^2+y^2-z^2=1$	3	1	hiperboloide d'una fulla	real no degenerada
				$x^2-y^2=2z$	2	0	paraboloide hiperbòlic	parell de rectes reals
$x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$	3	2	con imaginari	$x^2+y^2+z^2=0$	3	2	con imaginari	imaginària
				$-x^2-y^2=1$	2	1	cilindre imaginari	parell de rectes imaginàries
$x_0^2+x_1^2-x_2^2=0$	3	1	con real	$x^2+y^2-z^2=0$	3	1	con real	real no degenerada
				$x^2+y^2=1$	2	1	cilindre el·líptic	parell de rectes imaginàries
				$x^2-y^2=1$	2	0	cilindre hiperbòlic	parell de rectes reals
				$x^2=2y$	1	0	cilindre parabòlic	recta doble
$x_0^2+x_1^2=0$	2	1	parell de plans imaginaris	$x^2+y^2=0$	2	1	parell de plans imaginaris no paral·lels	parell de rectes imaginàries
				$-x^2=1$	1	0	parell de plans paral·lels i imaginaris	recta doble

Taula 7.2, continuació.

Invariants projectius				Invariants afins no projectius				
reduïda	r	j	*tipus*	**reduïda**	r'	j'	*tipus*	*secció*
$x_0^2 - x_1^2 = 0$	2	0	parell de plans reals	$x^2 - y^2 = 0$	2	0	parell de plans reals no paral·lels	parell de rectes reals
				$x^2 = 1$	1	0	parell de plans paral·lels	recta doble
$x_0^2 = 0$	1	0	pla doble	$x^2 = 0$	1	0	un pla doble propi	recta doble

A

Geometria lineal

A.1 Espais afins

A.1.1 Espai afí

Definició A.1.1 (espai afí)**.** Un espai afí sobre $\mathbb{K}$ és un triple $(\mathbb{A}, E, \phi)$, on $\mathbb{A}$ és un conjunt, E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita i ϕ és una aplicació:

$$\begin{array}{rccc}\phi: & \mathbb{A}\times E & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ & (p, \overrightarrow{u}) & \longmapsto & \phi(p, \overrightarrow{u}) := p + \overrightarrow{u}\end{array}$$

amb les propietats següents:

1. $(p + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = p + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$, $\forall p \in \mathbb{A}, \forall u, v \in E$;
2. fixat $p \in \mathbb{A}$, l'aplicació $f : E \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que $f(\overrightarrow{u}) = p + \overrightarrow{u}$ és bijectiva.

A.1.2 Varietats lineals

Definició A.1.2 (Varietat lineal)**.** Una varietat lineal en un espai afí $(\mathbb{A}, E)$ sobre un cos $\mathbb{K}$ és un subconjunt de la forma

$$\mathbb{L} = p + F := \{p + u \bigm| u \in F\},$$

on $p \in \mathbb{A}$ és un punt i $F \subset E$ és un subespai vectorial. Diem que F és el subespai director de $\mathbb{L}$ i que $\dim \mathbb{L} = \dim F$. Així, els punts són varietats lineals de dimensió 0 i l'única varietat lineal de dimensió n és $\mathbb{A}$.

Proposició A.1.3. *Siguin $\mathbb{L} = p + F, \mathbb{M} = q + G$ varietats lineals. Aleshores,*

$$\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset \iff \vec{pq} \in F + G.$$

Demostració.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \emptyset \implies \exists q \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$. Aleshores, $\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{p_1q} + \overrightarrow{qp_2} \in F_1 + F_2$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\overrightarrow{p_1p_2} \in F_1 + F_2$ vol dir que $\overrightarrow{p_1p_2} = u_1 + u_2, u_1 \in F_1, u_2 \in F_2$. Aleshores, $p_1 + u_1 = p_2 + \overrightarrow{p_2p_1} + u_1 = p_2 - u_1 - u_2 + u_1 = p_2 - u_2 \in \mathbb{L}_2$. Per tant, $p_1 + u_1 \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \implies \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \emptyset$. ■

Proposició A.1.4. *Es té la fórmula següent per la suma de dues varietats lineals $\mathbb{L} = p + F$ i $\mathbb{M} = q + G$:*

$$\mathbb{L} + \mathbb{M} = p + \langle \vec{pq} \rangle + F + G.$$

Teorema A.1.5 (Fórmules de Grassmann)**.** *Siguin $\mathbb{L} = p + F$ i $\mathbb{M} = q + G$ dues varietats lineals. Volem fer $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim(\langle \overrightarrow{p_1p_2} \rangle + F + G)$. Es tenen les fórmules següents:*

1. $\dim(\mathbb{L}+\mathbb{M}) = \dim\mathbb{L} + \dim\mathbb{M} - \dim(\mathbb{L}\cap\mathbb{M})$, *si* $\mathbb{L}\cap\mathbb{M}\neq\emptyset$*;*

2. $\dim(\mathbb{L}+\mathbb{M}) = \dim\mathbb{L} + \dim\mathbb{M} + 1 - \dim(F\cap G)$, *si* $\mathbb{L}\cap\mathbb{M}=\emptyset$.

Demostració. Aplicant la fórmula de Grassmann per a subespais vectorials i A.1.4:

1. $\dim(\mathbb{L}+\mathbb{M}) = \dim(\langle\vec{pq}\rangle + F + G) = \dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G) = \dim\mathbb{L} + \dim\mathbb{M} - \dim(\mathbb{L}\cap\mathbb{M})$, ja que $\vec{pq}\in F+G$ pel fet de suposar que $\mathbb{L}\cap\mathbb{M}\neq\emptyset$.

2. $\dim(\mathbb{L}+\mathbb{M}) = \dim(\langle\vec{pq}\rangle + F + G) = \dim(F+G)+1 = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)+1 = \dim\mathbb{L} + \dim\mathbb{M} + 1 - \dim(F\cap G)$, ja que $\vec{pq}\notin F+G$ pel fet de suposar que $\mathbb{L}\cap\mathbb{M}=\emptyset$. ■

A.1.3 Raons simples

Siguin a, b, c tres punts diferents en un espai afí sobre $\mathbb{K}$. Suposem que estan alineats. Recordem que això implica que $\vec{ac} = \lambda\vec{bc}, \lambda\in\mathbb{K}$.

Definició A.1.6 (Raó simple)**.** Aquest nombre $\lambda\in\mathbb{K}$ es diu raó simple dels punts a, b, c i es denota per $\lambda = (a, b, c)$ i depèn de l'ordre dels elements.

A.1.4 Teoremes clàssics

Teorema A.1.7 (Teorema de Tales)**.** *Siguin r, s rectes que es tallen en un punt O. Suposem que tres rectes paral·leles ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tallen r en P_1, P_2, P_3 i tallen s en Q_1, Q_2, Q_3 (tots diferents d'O). Llavors:*

$$(P_1, P_2, P_3) = (Q_1, Q_2, Q_3).$$

Demostració. Escollim $\{O; \overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OQ_1}\}$ com a referència. Aleshores:

$$\begin{array}{lll} O = (0,0) & & \\ P_1 = (1,0) & Q_1 = (0,1) & \overrightarrow{P_1Q_1} = (-1,1) \\ P_2 = (a,0) & Q_2 = (0,c) & \overrightarrow{P_2Q_2} = (-a,c) \\ P_3 = (b,0) & Q_3 = (0,d) & \overrightarrow{P_3Q_3} = (-b,c) \end{array}$$

$$(P_1, P_2, P_3) = \frac{b-1}{b-a}, \quad (Q_1, Q_2, Q_3) = \frac{d-1}{d-c}.$$

$$\left.\begin{array}{l} a = c \\ b = d \end{array}\right\} \Longrightarrow (P_1, P_2, P_3) = (Q_1, Q_2, Q_3).$$

■

Teorema A.1.8 (Ceva)**.** *Donat un triangle de vèrtex A_1, A_2, A_3 del pla afí anomenem a_i al costat oposat d'A_i. Sigui O un punt que no pertany a cap dels costats i tal que, per a tot i, la recta que passa per O i A_i talla a_i en un punt B_i. Aleshores,*

$$(A_3, A_2, B_1)(A_1, A_3, B_2)(A_2, B_1, B_3) = -1.$$

Equivalentment, sigui $A_1A_2A_3$ un triangle. Siguin r, s, t rectes que passen per A_1, A_2, A_3 respectivament i tallen els costats en punts $B_1\in A_2A_3$, $B_2\in A_1A_3$ i $B_3\in A_1A_2$. Llavors, r, s, t són concurrents si i només si $(A_3, A_2, B_1)(A_1, A_3, B_2)(A_2, B_1, B_3) = -1$.

Corol·lari A.1.9 (Postulat d'Euclides). *Sigui* $(\mathbb{A}, E)$ *un espai afí. Donats* $p, q \in \mathbb{A}$ *amb* $p \neq q$ *hi ha una i només una recta que conté* p *i* q*, que és* $\mathbb{L} = p + \langle \overrightarrow{pq} \rangle$*. En essència, per dos punts diferents passa una única recta.*

Demostració. Prenem $\mathbb{L} = p + \langle \overrightarrow{pq} \rangle$, que és una recta perquè $p \neq q \implies \overrightarrow{pq} \neq \overrightarrow{0}$. Sigui $\mathbb{L}'$ una recta que passa per p i per q; $\mathbb{L}' = p + F$. Aleshores, per a algun subespai F d'E de dimensió 1 podem dir:

$$\left.\begin{array}{l} p \in \mathbb{L}' \\ q \in \mathbb{L}' \end{array}\right\} \implies \overrightarrow{pq} \in F \implies F = \langle \overrightarrow{pq} \rangle \implies \mathbb{L}' = p + \langle \overrightarrow{pq} \rangle = L.$$ ■

A.2

Afinitats

A.2.1 Propietats de les afinitats

Definició A.2.1 (Aplicació afí). Donats dos espais afins $(\mathbb{A}, E_1), (\mathbb{A}_2, E_2)$ una aplicació afí és un parell d'aplicacions:

$$f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2, \quad \tilde{f} : E_1 \longrightarrow E_2$$

tals que:

1. $\tilde{f}$ és lineal,
2. $\forall p \in \mathbb{A}_1, \forall \vec{u} \in E_1$, tenim $f(q) = f(p + \vec{u}) = f(p) + \tilde{f}(\vec{u})$.

Equivalentment, si en la segona propietat posem $q = p + u$, tenim que $\overrightarrow{f(p)f(q)} = \tilde{f}(\vec{pq})$.

Definició A.2.2 (Afinitat). Diem que una aplicació afí és una afinitat si és bijectiva. En altres paraules, una afinitat és una aplicació afí bijectiva d'un espai afí en ell mateix.

Observació A.2.3.

1. Sovint es diu només que $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ és una aplicació afí i que $\tilde{f}$ és l'aplicació lineal associada. En altres paraules, $\tilde{f}$ està determinada per f: si f és una aplicació afí, llavors $\tilde{f}$ és única.
2. Si $\tilde{f}(\vec{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}, \forall p, q$ aleshores $\forall p \in \mathbb{A}_1, \forall v \in E_1$ tenim que

$$\tilde{f}(v) = \tilde{f}(\overrightarrow{p(p+v)}) = \overrightarrow{f(p)f(p+v)} \implies f(p+v) = f(p) + \tilde{f}(v).$$

Propietat A.2.4 (Propietats de les aplicacions afins). *Siguin* $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2, g : \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_3$ *dues aplicacions afins. Aleshores:*

1. *La composició* $g \circ f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_3$ *és afí i* $(\widetilde{g \circ f}) = (\tilde{g} \circ \tilde{f})$.
2. f *és injectiva si, i només si,* $\tilde{f}$ *ho és.*
3. f *és exhaustiva si, i només si,* $\tilde{f}$ *ho és.*
4. f *és bijectiva si, i només si,* $\tilde{f}$ *ho és.*
5. *Una aplicació afí* f *envia una varietat lineal* $\mathbb{L} = a + F$ *a la varietat lineal* $f(\mathbb{L}) = f(a) + \tilde{f}(F)$.

6. *Sigui $\mathbb{M}$ una varietat lineal tal que $f^{-1}(\mathbb{M}) \neq \emptyset$ i sigui $a \in f^{-1}(\mathbb{M})$. Aleshores, si $\mathbb{M} = f(a) + G$, tindrem que $f^{-1}(\mathbb{M}) = a + f^{-1}(G)$.*
7. *Siguin $a, b, c \in \mathbb{A}_1$ tres punts alineats amb $b \neq c$, aleshores $f(a), f(b), f(c) \in \mathbb{A}_2$ també estan alineats o són el mateix punt. Si $f(b) \neq f(c)$, aleshores $(a, b, c) = (f(a), f(b), f(c))$, és a dir, la raó simple es manté per aplicacions afins.*

Proposició A.2.5 (Propietats de les afinitats). *Sigui $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una aplicació afí d'endomorfisme associat $\tilde{f} : E \longrightarrow E$. Aleshores:*

1. *f és la identitat o una translació si, i només si, $\tilde{f} = Id$ (que és una aplicació afí).*
2. *f és una homotècia si, i només si, $\tilde{f}$ és una homotècia de raó $\neq 0, 1$.*
3. *f és una simetria si, i només si, $f^2 = Id$ i $f \neq Id$.*

Teorema A.2.6. *Siguin $(\mathbb{A}_1, E_1), (\mathbb{A}_2, E_2)$ dos espais afins. Fixem punts $p_1 \in \mathbb{A}_1, p_2 \in \mathbb{A}_2$ i suposem donada una aplicació lineal $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$. Aleshores, existeix una única aplicació afí $(f, f) : (\mathbb{A}_1, E_1) \longrightarrow (\mathbb{A}_2, E_2)$ tal que $f(p_1) = p_2$ i $\tilde{f} = \varphi$. En altres paraules, una aplicació afí queda totalment determinada per l'aplicació lineal associada i la imatge d'un punt.*

Demostració. Comencem veient la unicitat. Si existeix tal aplicació afí $(f, \tilde{f})$ i suposem que $g : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ també satisfà $\tilde{g} = \varphi$ i $g(p) = q$, aleshores

$$g(x) = g(p_1 + \overrightarrow{p_1x}) = g(p_1) + \tilde{g}\overrightarrow{p_1x} = p_2 + \varphi(\overrightarrow{p_1x}) = f(x);$$

per tant, p_1, p_2 i h la determinen completament. Això també ens diu com hem de definir f per provar l'existència. Posem $f(x) = p_2 + \varphi(\overrightarrow{p_1x})$ i $f(y) = p_2 + \varphi(\overrightarrow{p_1y})$. Per tant,

$$\overrightarrow{f(x)f(y)} = \overrightarrow{f(x)p_2} + \overrightarrow{p_2f(y)} = -\varphi(\overrightarrow{p_1x}) + \varphi(\overrightarrow{p_1y}) = \varphi(\overrightarrow{p_1y} - \overrightarrow{p_1x}) = \varphi(\vec{xy}).$$

Per tant, f és una aplicació afí i, a més, $\tilde{f} = \varphi$. A més, $f(p) = q + \varphi(\vec{pp}) = q + 0 = q$. ■

Proposició A.2.7 (Les afinitats conserven les varietats lineals). *Sigui $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ una aplicació afí. Sigui $\mathbb{L} = a + F$ una varietat lineal a $\mathbb{A}_1$. Aleshores: $f(\mathbb{L}) = f(a) + \tilde{f}(F)$.*

Demostració. Si $p \in \mathbb{L}$, llavors $p = a + v$ amb $v \in F$.

$$f(p) = f(a + v) = f(a) + \tilde{f}(v) \in f(a) + \tilde{f}(F)$$

El recíproc és el següent: sigui $q \in f(a) + \tilde{f}(F)$. Llavors, $q = f(a) + \tilde{f}(w)$ amb $w \in F$. Per tant, $q = f(a) + \tilde{f}(w) = f(a + w)$, on $a + w \in \mathbb{L} \implies q \in f(\mathbb{L})$. ■

Proposició A.2.8. *Les afinitats conserven el paral·lelisme.*

Demostració. És suficient suposar que f és una aplicació afí.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{L}_1 = a_1 + F_1 \\ \mathbb{L}_2 = a_2 + F_2 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} f(\mathbb{L}_1) = f(a_1) + \tilde{F}_1 \\ f(\mathbb{L}_2) = f(a_2) + \tilde{f}(F_2) \end{array}\right\} \implies f(\mathbb{L}_1) \parallel f(\mathbb{L}_2).$$

Suposant que $F_1 \subseteq F_2$, aleshores $\tilde{f}(F_1) \subseteq \tilde{f}(F_2)$. ■

Proposició A.2.9 (Les afinitats conserven la raó simple). *Sigui $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ una aplicació afí injectiva. Siguin $a, b, c \in \mathbb{A}_1$ punts alineats i diferents. Sigui $\mathbb{L}$ la recta que passa per a, b, c. Llavors, $f(\mathbb{L})$ és una recta que conté $f(a), f(b), f(c)$.*

Demostració. Posem $(a, b, c) = \lambda$. Com que estan alineats, $\vec{ac} = \lambda\vec{bc}$. Posem $\tilde{f}(\vec{ac}) = \tilde{f}(\lambda\vec{bc}) = \lambda\tilde{f}(\vec{bc})$. Si substituïm $\tilde{f}(\vec{ac}) = \overrightarrow{f(a)f(c)}$ i $\lambda\overrightarrow{f(b)f(c)}$, tenim que la raó simple $(f(a), f(b), f(c)) = \lambda$ es compleix. ■

Propietat A.2.10 (Propietats del conjunt de punts fixos).

1. *El conjunt de punts fixos és una varietat lineal.*
2. *Si $p_1, \ldots, p_k$ són fixos, aleshores tots els punts de la varietat lineal $\{p_1\} + \cdots + \{p_k\}$ són fixos.*
3. *Si 1 no és VAP de l'endomorfisme $\tilde{f}$, aleshores l'afinitat té un únic punt fix.*

Demostració. Fixem un sistema de referència. Suposem que les equacions de f són

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{A.2.1}$$

Els punts fixos no són sinó varietats lineals de dimensió 0 que es transformen en ells mateixos. En notació ampliada, tenim que compleixen $x^* = Ax + b \iff x = Ax + b \iff (A - \mathbb{I})x = -b$. Per tant, es poden trobar mitjançant el sistema

$$(A - \mathbb{I}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \ (A - \mathbb{I})x = -b$$

Això demostra el primer apartat i el segon n'és una conseqüència. Notem finalment que si 1 no és VAP, aleshores $\det(A - \mathbb{I}) \neq 0$ i el sistema de punts fixos és compatible determinat. ■

A.2.2 Varietats lineals invariants

Definició A.2.11 (Varietat lineal invariant). Diem que una varietat lineal $\mathbb{L} = a + F$ és invariant si es dona que $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$. Com que $f(a + F) = f(a) + \tilde{f}(F)$, la varietat $a + F$ és invariant si, i només si,

1. $\tilde{f}(F) \subset F$ i
2. $\overrightarrow{qf(q)} \in F$.

Definició A.2.12 (Recta invariant). Si una recta $r = a + \langle v \rangle$ és invariant, aleshores $\tilde{f}(\langle v \rangle) = \langle v \rangle$. És a dir, el vector director de r és propi.

Proposició A.2.13. *Si p és un punt fix de f i v és un vector propi de $\tilde{f}$, llavors $\mathbb{L} = p + \langle v \rangle$ és una recta invariant de f.*

Demostració. Suposem que $\tilde{f}(v) = \alpha v$. Llavors,

$$f(p + \lambda v) = f(p) + \lambda \tilde{f}(v) = f(p) + \lambda \alpha v = p + \lambda \alpha v \in \mathbb{L}, \forall \lambda \implies f(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L}$$ ■

Proposició A.2.14. *Sigui $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una afinitat que en certa referència té matriu M. Un hiperplà d'equació $A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + B = 0$ és invariant per f si, i només si, $(A_1, \ldots, A_n, B)$ és un VEP de M^T i almenys un dels coeficients A_i és no nul.*

Definició A.2.15 (Homologia). Una homologia és una afinitat amb un hiperplà de punts fixos. Dins de la homologia distingim:

- la *raó* de la homologia: el valor propi r tal que $\tilde{h} = rId$;
- l'*eix* de la homologia: correspon al vector de la recta de punts fixos, és a dir, al VEP de VAP 1;
- la *direcció* de la homologia: correspon al VEP de VAP r.

Teorema A.2.16. *Una varietat lineal $\mathbb{L} = a + F$ és invariant per una afinitat f si, i només si:*

1. *F és un subespai invariant de $\tilde{f}$,*
2. *$\overrightarrow{af(a)} \in F$.*

Demostració.

$\boxed{\implies}$ Suposem que es compleixen les dues condicions. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{r}\tilde{f}(F) \subseteq F\\ \overrightarrow{af(a)} \in F\end{array}\right\} \implies f(a+v) = f(a) + \tilde{f}(v) = a + u + w,\ \forall v \in F,\ w \in F.$$

Per tant, $f(a+v) \in a + F$, $\forall v \in F$ i això implica que $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$.

$\boxed{\impliedby}$ Ara suposem que $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$. Sabem que

$$\mathbb{L} = a + F \implies f(\mathbb{L}) = f(a)\tilde{f}(F).$$

Si $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$, llavors $\tilde{f}(F) = F$ i això vol dir que F és invariant per $\tilde{f}$. A més,

$$a \in \mathbb{L},\ f(a) \in \mathbb{L} \implies \overrightarrow{af(a)} \in F.$$ ■

A.3 Espais vectorials euclidians

A.3.1 Normes i angles

Definició A.3.1 (Norma). Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una norma a E és una aplicació

$$\begin{array}{rccl} \|\ \ \|: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ (sempre a } \mathbb{R}!) \\ & v & \longmapsto & \|v\| \end{array}$$

que compleix

1. $\|v\| = 0 \iff v = \overrightarrow{0}$,
2. $\|kv\| = |k| \cdot \|v\|$,
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular).

$|k|$ indica el valor absolut si $k \in \mathbb{R}$ o bé indica el mòdul si $k \in \mathbb{C}$.

Lema A.3.2 (Desigualtat de Cauchy-Schwarz). *Es compleix que*

$$|uv|^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v), \forall u, v \in E$$

Demostració. Si $v = \overrightarrow{0}$, aleshores la desigualtat és certa. Suposem $v \neq \overrightarrow{0}$ i considerem $k = \frac{uv}{v \cdot v}$. Aleshores:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (u - kv)(u - kv) = u \cdot u - k(vu) - k(uv) + k\overline{k}(v \cdot v) \\ &= u \cdot u - \frac{(uv)(vu)}{v \cdot v} - \frac{\overline{(uv)}(uv)}{v \cdot v} + \frac{(uv)\overline{(uv)}}{v \cdot v} \\ &= u \cdot u - \frac{(uv)\overline{(uv)}}{v \cdot v} = u \cdot u - \frac{|uv|^2}{v \cdot v}, \end{aligned}$$

d'on $|uv|^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v), \forall u, v \in E$. ■

Teorema A.3.3 (Teorema de Pitàgores). *Si $u \cdot v = 0$, aleshores $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.*

Demostració. Ens val amb la següent equació.

$$\|u + v\|^2 = (u + v)(u + v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \cdot v)$$ ■

A.3.2 Subespais ortogonals

Proposició A.3.4. *Sigui S un subconjunt de E, on $(E, \cdot)$ és un espai vectorial Euclidià. Tenim que*

1. *$S^\perp$ és subespai vectorial d'E.*
2. *$S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.*
3. *Si $T \subseteq S$, aleshores $S^\perp \subseteq T^\perp$.*

Demostració. Siguin $x, y \in S^\perp$, o sigui $x \cdot u = y \cdot u = 0$, per a tot $u \in S$. Aleshores, $(x + y) \cdot u = x \cdot u + y \cdot u = 0$. Per tant, $x + y \in S^\perp$. Anàlogament, si $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores $\lambda x \in S^\perp$. Pel que fa al tercer apartat, suposem que $F \subseteq G$ i que $x \in G^\perp$. Aleshores, x és ortogonal a tots els vectors de G, en particular ho és als d'F. Per tant, $x \in F^\perp$. ■

Proposició A.3.5. *Sigui $(E, \cdot)$ un espai vectorial Euclidià. Si F és un subespai vectorial d'E, aleshores:*

1. *$E = F \oplus F^\perp$.*
2. *$\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.*
3. *$(F^\perp)^\perp = F$.*

Demostració. És immediat veure que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Prenem una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de F i la completem a una base de E tal que $\{v_1, \ldots, v_k e_{k+1}, \ldots, e_n\}$. Apliquem ara el mètode de Gram-Schmidt per convertir aquesta base en una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. Observem que $u_j \in F^{\perp}$ quan $j \in \{k+1, \ldots, n\}$. Per tant, qualsevol $v \in E$ es pot escriure de forma única com

$$v = (a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k) + (a_{k+1} u_{k+1} + \cdots + a_n u_n)$$

on el primer parèntesi pertany a F i el segon a $F^{\perp}$. Això prova que $E = F \oplus F^{\perp}$. La fórmula de les dimensions se segueix de la suma directa. És fàcil verificar que $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$. Per dimensions obtenim la igualtat d'espais vectorials. ■

A.3.3 Orientacions

Proposició A.3.6. *Un endomorfisme f és ortogonal si, i només si, per a tota base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ tenim que $v_i := f(e_i)$ és també una base ortonormal. A més, la base v_i té la mateixa orientació que la base e_i si, i només si, $f \in SO(n)$.*

Demostració. Suposem que f és ortogonal i que la base e_i és ortonormal. Aleshores,

$$v_i \cdot v_j = f(e_i) \cdot f(e_j) = e_i \cdot e_j.$$

En direcció contrària, sigui e_i una base ortonormal. La matriu de canvi de base P de la base v_i en funció de e_i és, per construcció, la matriu de f. Com la matriu de Gram $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = \mathbb{I}$ i P és una matriu ortogonal, trobem que f és ortogonal. La afirmació sobre la preservació de la orientació és conseqüència de la relació:

$$\det f = \det_{e_i}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \det_{e_i}(v_1, \ldots, v_n).$$ ■

A.3.4 Producte vectorial

Definició A.3.7 (Producte vectorial). El producte vectorial d'u i v és una operació bilineal que retorna el vector $u \wedge v$, el qual té les següents propietats:

1. $(u_1 + u_2) \wedge v = u_1 \wedge v + u_2 \wedge v$;
2. $(\lambda u) \wedge v = \lambda(u \wedge v), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $u \wedge (v_1 + v_2) = u \wedge v_1 + u \wedge v_2$;
4. $u \wedge (\lambda v) = \lambda(u \wedge v), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Demostració. Donat $w \in E$ qualsevol, tenim per que

$$((u_1 + u_2) \wedge v) \cdot w = \det(u_1 + u_2, v, w).$$

$$(u_1 \wedge v + u_2 \wedge v) \cdot w = (u_1 \wedge v) \cdot w + (u_2 \wedge v) \cdot w \xrightarrow{\det(u_1,v,w)+\det(u_2,v,w)} \det(u_1 + u_2, v, w).$$

Per tant, $(u_1 + u_2) \wedge v = u_1 \wedge v + u_2 \wedge v$. Les altres igualtats es demostren per analogia. ■

Propietat A.3.8 (Altres propietats del producte vectorial).

1. *$v \wedge u = -(u \wedge v),\ \forall u, v \in E$.*
2. *$u \wedge v$ és ortogonal a u i a v.*
3. *$u \wedge u = 0,\ \forall u \in E$.*
4. *$u \wedge v = 0 \iff u, v$ són linealment dependents.*
5. *Si $u \wedge v \neq 0$, aleshores $\langle u \wedge v \rangle = \langle u, v \rangle^{\perp}$.*
6. *$e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$.*
7. *Donats $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ i $v = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ tenim que*
$$u \wedge v = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix}.$$
8. *$(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$.*
9. *$(u \wedge v) \wedge w + (v \wedge w) \wedge u + (w \wedge u) \wedge v = 0$ (identitat de Jacobi).*
10. *$(u_1 \wedge u_2) \cdot (v_1 \wedge v_2) = (u_1 \cdot v_1)(u_2 \cdot v_2) - (u_1 \cdot v_2)(u_2 \cdot v_1)$.*
11. *Donats u, v no nuls, $\exists \theta \in \mathbb{R},\ 0 \leq \theta \leq \pi$ tal que*
$$\begin{aligned} \|u \wedge v\| &= \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin(\theta) \\ u \cdot v &= \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta) \end{aligned}$$

Demostració. Ho dividirem en 11 demostracions diferents, una per cada apartat.

1. Donat $w \in E$ qualsevol, aplicant les propietats dels determinants:
$$-(u \wedge v) \cdot w = -\det(u, v, w) = \det(v, u, w).$$
2. És directe donat que el determinant d'una matriu amb dues columnes iguals és 0:
$$\begin{aligned} (u \wedge v) \cdot u = \det(u, v, u) = 0, \\ (u \wedge v) \cdot v = \det(u, v, v) = 0. \end{aligned}$$
3. Com que $v \wedge u = -(u \wedge v)$, $u \wedge u = -(u \wedge u) \iff 2(u \wedge u) = 0 \iff u \wedge u = 0$.
4. Si $v = \lambda u$, aleshores $u \wedge v = u \wedge (\lambda u) = \lambda(u \wedge u) = 0$. Recíprocament, si $u \wedge v = 0$ llavors $\det(u, v, w) = 0,\ \forall w \in E$ i això implica que u, v són linealment dependents. En cas contrari, podríem escollir w tal que u, v, w fos una base de E i, per tant, $\det(u, v, w) \neq 0$.
5. Com que $(u \wedge v) \cdot u = 0$ i $(u \wedge v) \cdot v = 0$, tenim que $\langle u \wedge v \rangle \subseteq \langle u, v \rangle^{\perp}$. Ara bé, si $u \wedge v \neq 0$, u, v són linealment independents i $\dim\langle u, v \rangle = 2$. Així doncs, $\dim\langle u, v \rangle = \dim\langle u, v \rangle^{\perp}$ i, per tant, la inclusió ha de ser igualtat.
6. $e_1 \wedge e_2 \in \langle e_1, e_2 \rangle^{\perp} = \langle e_3 \rangle$, ja que la base e_1, e_2, e_3 és ortonormal per hipòtesi. Per tant, $e_1 \wedge e_2 = \lambda e_3$ per a algun $\lambda \in \mathbb{R}$. A més,
$$\lambda = (\lambda e_3) \cdot e_3 = (e_1 \wedge e_2) \cdot e_3 = \det_{e_i}(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$
Les altres dues igualtats es demostren de la mateixa manera, tenint en compte que
$$\det_{e_i}(e_2, e_3, e_1) = \det_{e_i}(e_3, e_1, e_2) = 1.$$

7. Per bilinealitat, tenim:

$$\begin{aligned}u \wedge v &= (x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)\wedge(y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3) = x_1y_1e_1\wedge e_1+x_1y_2e_1\wedge e_2+x_1y_3e_1\wedge e_3\\ &\quad + x_2y_1e_2\wedge e_1+x_2y_2e_2\wedge e_2+x_2y_3e_2\wedge e_3+x_3y_1e_3\wedge e_1+x_3y_2e_3\wedge e_2+x_3y_3e_3\wedge e_3\\ &= (x_1y_2-x_2y_1)e_3-(x_1y_3-x_3y_1)e_2+(x_2y_3-x_3y_2)e_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix} e_3 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_3 & y_3\end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix} e_1\\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1\\ x_2 & y_2 & e_2\\ x_3 & y_3 & e_3\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

8. Si $u\wedge v=0$, llavors u, v són linealment dependents. Si $v=\lambda u$, llavors:

$$(u\cdot w)(\lambda u)-((\lambda u)\cdot w)u=\lambda(u\cdot w)u-\lambda(u\cdot w)u=0.$$

Si $u\wedge v\neq 0$, aleshores $(u\wedge v)\wedge w\in\langle u\wedge v\rangle^\perp=\langle u,v\rangle$. Per tant, $(u\wedge v)\wedge w=\alpha u+\beta v,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Per determinar-los, fem el següent:

$$\left.\begin{aligned} u&=(x_1,x_2,x_3),\\ v&=(y_1,y_2,y_3),\\ w&=(z_1,z_2,z_3)\end{aligned}\right\}\quad u\wedge v=(x_2y_3-x_3y_2,x_3y_1-x_1y_3,x_1y_2-x_2y_1).$$
$$\begin{aligned}(u\wedge v)\wedge e_1&=(0,x_1y_2-x_2y_1,-x_3y_1+x_1y_3)=-y_1(x_1,x_2,x_3)+x_1(y_1,y_2,y_3),\\ (u\wedge v)\wedge e_2&=(-x_1y_2+x_2y_1,0,x_2y_3-x_3y_2)=-y_2(x_1,x_2,x_3)+x_2(y_1,y_2,y_3),\\ (u\wedge v)\wedge e_3&=(x_3y_1-x_1y_3,-x_2y_3+x_3y_2,0)=-y_3(x_1,x_2,x_3)+x_3(y_1,y_2,y_3).\end{aligned}$$

En tots tres casos es compleix que $(u\wedge v)\wedge w=-(v\cdot w)u+(u\cdot w)v$. Com que tots dos membres de la igualtat depenen linealment de w, és suficient haver comprovat la igualtat en una base.

9. Aplicant que $(u\wedge v)\wedge w=(u\cdot w)v-(v\cdot w)u$, tenim:

$$\left.\begin{aligned}(u\wedge v)\wedge w&=(u\cdot w)v-(v\cdot w)u\\ (v\wedge w)\wedge u&=(v\cdot u)w-(w\cdot u)v\\ (w\wedge u)\wedge v&=(w\cdot v)u-(u\cdot v)w\end{aligned}\right\}(u\wedge v)\wedge w+(v\wedge w)\wedge u+(w\wedge u)\wedge v=0.$$

10. Primerament, $(u_1\wedge u_2)\cdot(v_1\wedge v_2)=\det(u_1,u_2,v_1\wedge v_2)$. Ara operem:

$$\begin{aligned}\det(v_1\wedge v_2,u_1,u_2)&=((v_1\wedge v_2)\wedge u_1)\cdot u_2=((v_1\cdot u_1)v_2-(v_2\cdot u_1)v_1)\cdot u_2\\ &=(u_1\cdot v_1)(u_2\cdot v_2)-(u_1\cdot v_2)(u_2\cdot v_1).\end{aligned}$$

11. Apliquem la fórmula anterior:

$$\|u\wedge v\|^2=(u\wedge v)\cdot(u\wedge v)=(u\cdot u)(v\cdot v)-(u\cdot v)(v\cdot u)=\|u\|^2\|v\|^2-(u\cdot v)^2.$$

Si definim $a=\frac{\|u\wedge v\|}{\|u\|\cdot\|v\|}$ i $b=\frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}$, aleshores,

$$a^2+b^2=\frac{\|u\wedge v\|^2+(u\cdot v)^2}{\|u\|^2\|v\|^2}=1.$$

Per tant, $a=\sin(\theta),\ b=\cos(\theta)$ per a algun θ. A més, $a\geq 0\implies 0\leq\theta\leq\pi$. ■

A.4

Espais afins euclidians

A.4.1 Distància

Definició A.4.1 (Distància). Una distància entre dos punts $p, q \in \mathbb{A}$ com $d(p,q) := \|\overrightarrow{pq}\|$, és a dir, la distància és una aplicació

$$\begin{array}{rccl} d: & A \times A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (p,q) & \longmapsto & d(p,q) := \|\overrightarrow{pq}\|, \end{array}$$

on es compleix:

1. $d(p,q) \geq 0$,
2. $d(p,q) = 0 \iff p = q$,
3. $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$ (desigualtat triangular).

A.4.2 Distància entre varietats

Proposició A.4.2. *Es compleix que la distància d'un punt a un hiperplà és:*

$$d(p, \mathbb{L}) = \frac{|A_1 p_1 + \cdots + A_n p_n + B|}{\sqrt{(A_1)^2 + \cdots + (A_n)^2}}.$$

A.5

Endomorfismes ortogonals

Proposició A.5.1 (Propietats de les matrius ortogonals). *Donada una matriu $M \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, les afirmacions següents són equivalents:*

1. *M és una matriu ortogonal,*
2. *$M^T M = \mathbb{I}$,*
3. *M és la matriu d'un endomorfisme ortogonal en una base ortonormal.*

Demostració. Escollim una base $e_1, \ldots, e_n$ a E i diem $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ a la matriu de Gram d'aquesta base. Sigui $f : E \longrightarrow E$ un endomorfisme i sigui M la matriu de f en la base $e_1, \ldots, e_n$. Llavors, f és ortogonal si, i només si,

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f(y) = x \cdot y, \ \forall x, y \in E; \\ (MX)^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) MY = X^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) Y, \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n; \\ X^T M^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) MY = X^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) Y, \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n; \\ M^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) M = \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi). \end{aligned}$$

En el cas particular que la base $e_1, \ldots, e_n$ sigui ortonormal, tenim que $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = \mathbb{I}$ i ens queda la condició $M^T M = \mathbb{I}$. ■

A.5.1 Teorema espectral

Teorema A.5.2 (Teorema espectral). *Si un endomorfisme $f : E \longrightarrow E$ és ortogonal, hi ha alguna base ortonormal $e_1, \dots, e_n$ on f té la matriu següent:*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ 0 & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & -1 & & & \\ & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

i

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha_i < \pi, \ \forall i.$$

Demostració. Sigui $f : E \longrightarrow E$, f ortogonal. Considerem els subespais propis:

$$E^+ = \{v \in E \mid f(v) = v\}, \ E^- = \{v \in E \mid f(v) = -v\}.$$

Llavors E^+ i E^- són ortogonals (perquè VEPs de VAPs diferents són ortogonals). Sigui $F = E^+ \oplus E^-$. El subespai F és invariant per f. Aleshores, $F^\perp$ també és invariant per f. Podem escriure $E = E^+ \oplus E^- \oplus F^\perp$. Considerem la restricció de f a $F^\perp$ i sigui $p(x)$ el polinomi mínim de la restricció: $p(x)$ no té arrels reals, ja que $b_i > 0$, $\forall i$, i

$$p(x) = (x^2 + a_1 x + b_1) \cdots (x^2 + a_k x + b_k).$$

D'aquesta manera, el determinant de la restricció d'f a $F^\perp$ és igual a 1. Posem $p(x) = (x^2 + a_1 x + b_1) \cdot r(x)$ i escollim $u \in F^\perp$ tal que $v_1 = r(f)(u) \neq 0$. Sabent que ens surt $p(f)(u) = 0$:

$$\begin{aligned} p(f)(u) = 0 \implies (f^2 + a_1 f + b_1 \mathbb{I})(r(f)(u)) &\implies (f^2 + a_1 f + b_1 \mathbb{I})(v_1) = 0 \\ &\implies f(f(v_1)) = -a_1 f(v_1) - b_1 v_1. \end{aligned}$$

Aleshores, $\langle v_1, f(v_1) \rangle$ és invariant per f. Així, $E = E^+ \oplus E^- \oplus \langle v_1, f(v_1) \rangle \oplus \langle v_1, f(v_1) \rangle^\perp$. Repetint el mateix raonament iterativament, ens queda:

$$E = E^+ \oplus E^- \oplus \langle v_1, f(v_1) \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_k, f(v_k) \rangle.$$

■

B

Àlgebra lineal

B.1 Espai dual

Un cas particular de l'espai de les aplicacions lineals és l'espai dual, en que s'estudien aplicacions lineals d'un espai vectorial donat al $\mathbb{K}$-espai vectorial.

Definició B.1.1 (Espai dual). Sigui E un espai vectorial. Definim l'espai dual de E com

$$E^{\vee} := \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \operatorname{Hom}(E, \mathbb{K}).$$

Els elements de E són aplicacions lineals $\omega : E \longrightarrow \mathbb{K}$ i s'anomenen formes lineals. Observem que la dimensió de E^* és:

$$\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \cdot \dim \mathbb{K} = \dim E.$$

Anem a veure com podem definir una base de E^* a partir d'una base de E. Suposem que $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ és una base de E. Per a definir una base de E^* ens calen n formes $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ linealment independents i que ens generin tot l'espai de les aplicacions de E a $\mathbb{K}$. Definim

$$e_i^*(e_k) := \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Proposició B.1.2. *El conjunt de formes lineals $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ és una base de E^*.*

Demostració. Provem primer que $E^* = \langle e_1^*, \cdots, e_n^* \rangle$. Sigui $\omega : E \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal i sigui $u = \sum b_i e_i$ un vector de E. Suposem que $\omega(e_i) = a_i$, on $b_i \in \mathbb{K}$ (observem que podem suposar això ja que una base de $\mathbb{K}$ és la donada per $\{1\}$). Aleshores

$$\omega(u) = \omega\left(\sum b_i e_i\right) = \sum b_i \omega(e_i) = \sum b_i a_i.$$

D'altra banda, observem que

$$\sum_i a_i e_i(u) = \sum_i a_i e_i \left(\sum_j b_j e_j\right) = \sum_i \sum_j a_i b_j e_i^*(e_j) = \sum_i a_i b_i.$$

Comparant les dues expressions veiem que

$$\omega = \sum a_i e_i^*$$

Provem ara que les formes $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ són linealment independents. Suposem que tenim una combinació lineal

$$\sum_i \lambda_i e_i^* = 0.$$

Això implica que per a qualsevol vector $u \in E$ es té:

$$\sum_i \lambda_i e_i^*(u) = 0 \xrightarrow{u=e_j} 0 = \sum_i \lambda_i e_i^*(e_j) = \lambda_j.$$

Per tant, tenim $\lambda_j = 0$ per a tot j. ■

La base obtinguda en la proposició anterior s'anomena base dual de B. A partir d'ara, fixem E un espai vectorial, $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ una base de E i $B^* = \{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ la seva base dual. Anem a veure ara com són les coordenades d'un vector de l'espai dual:

Proposició B.1.3. *Sigui $w \in E^*$. Aleshores les coordenades de w en la base B^* són $(w(e_1), \cdots, w(e_n))$.*

Demostració. Suposem que $w = \sum a_i e_i^*$. Aleshores

$$w(e_j) = \sum_i a_i e_i^*(e_j) = a_j$$

Donada una aplicació lineal $f : E \longrightarrow F$ i una forma lineal $w : F \longrightarrow \mathbb{K}$ de F, aleshores composant obtenim una forma lineal de E: $w \circ f : E \longrightarrow \mathbb{K}$. ■

Definició B.1.4 (Aplicació dual)**.** Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal. Definim l'aplicació dual $f^* : F^* \longrightarrow E^*$ com $f^*(w) := w \circ f$.

Lema B.1.5. *L'aplicació dual $f^* : F^* \to E^*$ és una aplicació lineal. A més, es té $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Demostració. Per veure que f^* és lineal observem que, donades formes $w_1, w_2 : F \to K$ i un escalar $a \in K$ es té

$$f^*(w_1 + aw_2) = (w_1 + aw_2) \circ f = (w_1 \circ f) + a(w_2 \circ f) = f^*(w_1) + af^*(w_2).$$

Provem ara la fórmula de la composició. Observem primer que si $f : E \to F$ i $g : F \to G$ són aplicacions lineals, aleshores $(g \circ f)^* : G^* \to E^*$. Per tant, sigui $w : G \to K$ una forma lineal. Aleshores:

$$(g \circ f)^*(w) = w \circ (g \circ f) = (w \circ g) \circ f = g^*(w) \circ f = f^*(g^*(w)) = (f^* \circ g^*)(w).$$

Com que la igualtat $(g \circ f)^*(w) = (f^* \circ g^*)(w)$ és certa per a tot w, obtenim la igualtat $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. ■

Anem a veure que la matriu de l'aplicació dual d'una aplicació és la matriu trasposta de l'aplicació.

Proposició B.1.6. *Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal i$A = M_{B_1,B_2}(f)$ la matriu de f en bases $B_1 = \{u_i\}$ i$B_2 = \{v_j\}$ de E i de F respectivament. Aleshores la matriu de $f^* : F^* \to E^*$ en les bases B_2^*iB_1^* és:*

$$M_{B_2^*,B_1^*}(f^*) = A^t.$$

Definició B.1.7 (Espai bidual). Observem que donat un espai vectorial E sempre en podem considerar el seu dual E^*. Per tant, com que E^* és un espai vectorial, també en podem considerar el seu dual. Denotarem $E^{**} := (E^*)^*$ l'espai vectorial de les aplicacions lineals de E^* a K, i diem que E^{**} és l'espai bidual de E. Veurem que si E és de dimensió finita, *aleshores el bidual de E és isomorf a E.*

Considerem l'aplicació que envia una forma lineal i un vector de E a un escalar: $\langle -, - \rangle : E^* \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ donada per $\langle w, u \rangle := w(u)$. Aquesta aplicació s'anomena *aparellament canònic.*

Observació B.1.8. Observem que pels generadors de la base de E i de la base dual tenim $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Si fixem un vector $u \in E$ aleshores obtenim una aplicació lineal $\langle -, u \rangle : E^* \longrightarrow K$. En efecte, per veure que $\langle -, u \rangle$ és lineal observem que per a tot parell de formes $w_1, w_2 \in E^*$ i $\lambda \in K$ tenim

$$\langle w_1 + \lambda w_2, u \rangle = (w_1 + \lambda w_2)(u) = w_1(u) + \lambda w_2(u) = \langle w_1, u \rangle + \lambda \langle w_2, u \rangle .$$

Com que l'aplicació $\langle -, u \rangle : E^* \to K$ és lineal, és automàticament un element de l'espai bidual, és a dir: per a tot $u \in E$, tenim $\langle -, u \rangle \in E^{**}$.

Proposició B.1.9. *Si la dimensió de E és finita, aleshores l'aplicació*

$$\varphi : E \longrightarrow E^{**} \text{ tal que } \varphi(u) := \langle -, u \rangle$$

és un isomorfisme d'espais vectorials.

Finalment, anem a veure com és la matriu de canvi de base en l'espai dual. Siguin B_1 i B_2 dues bases de E i sigui $A = M(B_1, B_2)$ la matriu de canvi de base. Recordem que aquesta està definida per la matriu de l'aplicació identitat en les bases B_1 i B_2, de manera que si $B_1 = \{u_1, \cdots, u_n\}$ i $B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ amb$u_i = \sum a_j^i v_i$ aleshores

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Amb la notació anterior, la matriu de canvi de base de B_2^* a B_1^* és

$$M(B_2^*, B_1^*) = A^t.$$

Sigui E un espai vectorial sobre K. Recordem que si $u \in E$ i $w \in E^*$ aleshores, $\langle w, u \rangle := w(u) \in K$.

Definició B.1.10 (Anul·lador). Sigui $A \subset E$ un subconjunt de E. Es defineix l'anul·lador de A com

$$A^\circ := \{w \in E^*; \langle w, x\rangle = 0, \forall x \in A\} = \{w \in E^*; w(x) = 0, \forall x \in A\}.$$

De manera informal, l'anul·lador de A és el conjunt de les aplicacions lineals $E \longrightarrow \mathbb{K}$ que s'anul·len a tots els elements de A.

Proposició B.1.11. *Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal. Se satisfan les següents propietats:*

1. *A° és un subespai vectorial de E^*.*
2. *Si $B \subseteq A$ aleshores $A^\circ \subseteq B^\circ$.*
3. *Si F és un subespai de E, aleshores* $\dim F^\circ = \dim E - \dim F$.
4. $(\operatorname{im} f)^\circ = \ker f^*$.
5. $(\ker f)^\circ = \operatorname{im} f^*$.

Observació B.1.12. Sigui E un espai vectorial de dimensió n. Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ és un conjunt de formes lineals de E, el conjunt de les solucions del sistema d'equacions lineals $\omega_i(x) = 0, 1 \leq i \leq r$, és a dir:

$$\Omega^\circ = \left\{x \in E \;\middle|\; \omega_1(x) = 0, \ldots, \omega_r(x) = 0\right\}$$

és un subespai vectorial de E tal que $\dim \Omega^\circ = n - \operatorname{rg} \Omega$. Recíprocament, si A és un subconjunt de E, aleshores A° és un subespai vectorial de E^* tal que $\dim A^\circ = n - \operatorname{rg} A$. Si $\omega_1, \ldots \omega_p$ és una base de A°, aleshores $\langle A\rangle$ s'expressa com un conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals en $x \in E$:

$$\langle A\rangle = \left\{x \in E \;\middle|\; \omega_1(x) = 0, \ldots, \omega_p(x) = 0\right\}$$

Exemple B.1.13. Sigui F el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors $u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (1, 1, 0)$. Aleshores F° és el conjunt de formes $(w_1, w_2, w_3) \in (\mathbb{R}^3)^*$ que són solució de:

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Resolent el sistema obtenim que $w = (1, -1, 1)$ és una base de F°. Per tant:

$$F^\circ = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y + z = 0\right\}.$$

Observem que en aquest cas, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ se satisfà $F = \operatorname{im} A$, i el càlcul anterior correspon a la fórmula:

$$(\operatorname{im} A)^\circ = \ker A^t.$$