*Probabilitats*

# Resolucions de problemes

Mario Vilar

6 de febrer de 2024

Universitat de Barcelona

## Índex

# 1 Model probabilístic

## 1.1 Esdeveniments i probabilitat

**Exercici 1.1.** *Una capsa conté mil bombetes. La probabilitat que hi hagi almenys una bombeta defectuosa a la capsa és 0, 1 i la probabilitat que n'hi hagi almenys dues de defectuoses és 0, 05. Trobeu les probabilitats dels esdeveniments següents:*

1. *La capsa no conté cap bombeta defectuosa.*
2. *La capsa conté exactament una bombeta defectuosa.*
3. *La capsa conté, com a molt, una bombeta defectuosa.*

*Demostració.*

1. Posem $C = \{\text{cap bombeta defectuosa}\}$. Aleshores, és clar que $P(C) = P(\{< 1\})$ i, al seu torn, $P(\{< 1\}) = 1 - P(\{\geq 1\}$. Per tant, $P(C) = 1 - 0,1 = 0,9$.
2. Posem $\{1\}$ per denotar aquest esdeveniment. És clar, doncs, que $P(\{1\}) = 1 - P(\{< 1\}) - P(\{> 1\})$; per tant, $P(\{1\}) = 0.05$.
3. Ens interessa $P(\{\leq 1\})$. Per tant, $P(\{\leq 1\} = 1 - P(\{> 1\}) = 0,95$. ■

**Exercici 1.2.** *Una classe està formada per 30 estudiants, entre els quals hi ha el Jordi, l'Arnau i el Marc. Un professor reparteix a l'atzar la classe en tres grups de 10 alumnes.*

1. *Quina és la probabilitat que el Jordi, l'Arnau i el Marc acabin a tres grups diferents?*
2. *Quina és la probabilitat que acabin al mateix grup?*

*Demostració.*

1. Comptarem casos: sigui $\Omega$ l'espai mostral i $A$ el conjunt de casos favorables. Aleshores, $\#\Omega$ és la quantitat de maneres que tenim de repartir 30 alumnes entre 3 grups de 10 persones. $\#A$ serà de quantes maneres podem agafar aquests alumnes de manera que J, A i M vagin sempre separats. En definitiva:

$$P = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{27}{9}\binom{18}{9}\binom{9}{9} \cdot 3!}{\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}}$$

   Per als casos favorables hem tingut en compte que podem posar 9 persones aleatòriament a cada grup, però hi ha una que queda fixada i estarà en $\{J, A, M\}$. Per últim, considerar que podem permutar aquests tres elements entre els grups.

2. Dels 30 ens quedem amb 27, ja que els altres tres estan fixats. Hem de separar entre tres casos, quan estan tots tres al primer grup (respectivament, al segon i al tercer):

$$P = \frac{\binom{27}{7}\binom{20}{10}\binom{10}{10} + \binom{27}{10}\binom{17}{7}\binom{10}{10} + \binom{27}{10}\binom{17}{10}\binom{7}{7}}{\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}} = \frac{3\binom{27}{7}\binom{20}{10}}{\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}} = \frac{18}{203}.$$ ■

**Exercici 1.3 (Problema del Chicago).** *S'organitza un ball i hi acudeixen n parelles reals. Un cop al ball, els nois i les noies s'aparellen a l'atzar per ballar.*

1. *Quina és la probabilitat que totes les parelles formades siguin reals?*
2. *Quina és la probabilitat que si més no una de les parelles formades sigui una parella real?*
3. *Cap on convergeix aquesta probabilitat quan el nombre de parelles n tendeix a infinit?*

*Solució.* La probabilitat que totes les parelles siguin reals, havent-hi $n$ parelles, és aquella en què el primer home va amb la primera dona, el segon amb la segona... i així successivament. Així doncs, estem fent bijeccions. $\Omega$ correspon a $n!$ ja que podem fer $n!$ assignacions diferents, però solament en tenim un favorable. Per tant, $\frac{1}{n!}$.

Aquest és un clàssic problema, *dels desarranjaments*. Si definim $A_i$ com l'esdeveniment *la parella $i$ és real*, ens estan demanant la probabilitat que fixat l'home $i$ la dona sigui la seva en almenys un cas. Per tant, ens demanen la probabilitat $1 - P(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c)$. Així:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i\neq j\neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1,\ldots,i_k} (-1)^{k-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_k).$$

Ara hem de reescriure algunes de les probabilitats que ja sabem, comptant casos. El primer, per exemple, són les maneres que tenim d'ordenar les $n-m$ parelles restants (les $m$ primeres estan fixades) entre els casos totals.

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_m) = \frac{(n-m)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{m} \cdot m!}.$$
$$P(A_1) = P(A_i) = \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!}.$$
$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{(n-2)!}{n!}.$$

També, el nombre de possibles seleccions de $j$ índexs diferents, ordenats estrictament, $i_1 < \cdots < i_j$ és $\binom{n}{j}$. Per tant:

$$\sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{\binom{n}{m} m!} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{m!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Quan això tendeix a infinit, $1 - \frac{1}{n}$. ■

**Exercici 1.4.** *Un grup d'estudiants decideix recollir diners pel viatge final de curs. Cada vegada que una persona compri un dels seus productes (samarretes, alephs, entrades festa, números de loteria, etc.) li regalaran un sobre amb un número de l'1 al 20, aquests números estan uniformement repartits en els sobres; la persona que tingui tots els números guanyarà una entrada per la propera cursa del campionat del món de motociclisme a celebrar a Montmeló. Calcula la probabilitat que comprant k productes tinguem tots els números.*

*Demostració.* Volem tenir tots els números possibles, de manera que volem $P(\bigcap_{i=1}^{20} A_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{20} A_i^c)$, aplicant De Morgan. Així doncs, $P(A_1^c) = P(A_i^c) = (1 - \frac{1}{20})^k$ i $P(A_1^c \cap A_2^c) = (1 - \frac{2}{20})^k$. ∎

**Exercici 1.5.** *En un aquari hi hem posat $N$ piranyes i $M$ truites de riu. Si es troben dues truites no passa res, si es troben una piranya i una truita aquesta mor i si es troben dues piranyes es maten les dues lluitant. Suposem que les trobades són exactament de dos peixos i que es produeixen a l'atzar.*

1. *Si hi posen una piranya més, quina probabilitat té de sobreviure aquesta piranya?*
2. *Si en lloc d'una piranya hi afegim una truita més, quina probabilitat té de sobreviure aquesta truita?*

*Demostració.*

1. Si $N+1$ és parell, podrem emparellar totes les piranyes entre elles, donat que aquestes moren de dos en dos. Per tant, la probabilitat que sobrevisqui qualsevol piranya és de 0. Per l'argument anterior, si $N+1$ és senar, sempre quedarà una piranya. La probabilitat que té una piranya qualsevol de sobreviure, doncs, és de $\frac{1}{N+1}$.
2. Si $N$ és senar, sobreviurà una piranya i la probabilitat que sobrevisqui qualsevol de les $M+1$ truites és clarament 0. En canvi, si $N$ és parell, les piranyes moriran de dos en dos fins que no en quedi cap. La probabilitat que visqui una truita és la mateixa que tindria si fos una piranya (ja que si es troba amb una piranya també es mor). Per tant, és $\frac{1}{N+1}$, també. ∎

**Exercici 1.6** (dels emparellaments o desarranjaments). *En una sala de ball hi ha n matrimonis i cada home escull a l'atzar una dona per ballar. Calculeu la probabilitat que:*

1. *Cada marit balli amb la seva dona.*
2. *Cap marit balli amb la seva dona. Calculeu el límit d'aquesta probabilitat quan $n \to \infty$.*
3. *Després del ball cada persona seu a l'atzar a cada una de les 2n cadires que hi ha a la sala de ball; aquestes cadires estan posades per parelles, cada parella en una taula. Trobeu la probabilitat que cada marit s'hagi assegut amb la seva dona.*

*Demostració.* És bastant similar a 1.3.

1. Comptem casos favorables i casos totals. Està clar que els casos totals són totes les maneres que tenim de correspondre un home amb una dona, $n!$. Solament tenim un cas favorable, aquell en què cada home estigui amb la seva dona; per tant, $\frac{1}{n!}$.
2. És idèntic a 1.3.
3. Si les cadires no estiguessin agrupades en parelles, ens trobaríem en la mateixa situació que al primer apartat. Tenim un conjunt de $2n$ persones i un altre de $2n$ cadires: la $n$-èsima parella escull 2 cadires entre les $2n$ possibles i per cadascuna d'aquestes sel·leccions la següent parella escollirà dues cadires entre les $2n-2$ restants, i així successivament:

$$\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2}.$$ ∎

**Exercici 1.7.** *Una marca de cereals per esmorzar regala un pin a cada paquet. Hi ha k pins diferents. Suposem que els pins estan uniformement repartits en els paquets. Calculeu la probabilitat que comprant n paquets ($n \geq k$) tinguem la col·lecció completa.*

*Demostració.* És evident que $\#\Omega = k^n$. Sigui $A_i = \{\text{no hi ha el } i\text{-èsim pin}\}$, obtingut com a resultat de l'experiment aleatori consistent a sel·leccionar una col·lecció d'$n$ pins; és a dir, $P(A_i) = \left(\frac{k-1}{k}\right)^n$. Si volem la col·lecció completa necessitem:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i\neq j\neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1,\ldots,i_k} (-1)^{k-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_k).$$

Atès que $P(A_i \cap A_j) = \left(\frac{k-2}{k}\right)^n$. En general, $P(A_i \cap A_k \cap \cdots \cap A_j) = \left(\frac{k-j}{k}\right)^n$ i hi ha $\binom{k}{j}$ possibles llistes de $j$ índexos creixents dels valors 1 a $k$:

$$P(A) = k\left(\frac{k-1}{k}\right)^n - \binom{k}{2}\left(\frac{k-2}{k}\right)^n + \cdots + (-1)^{k-2}\binom{k}{k-1}\left(\frac{1}{k}\right)^n.$$

Observem que, per a $j = k$, $A_1 \cap \cdots \cap A_k = \emptyset$. ■

**Exercici 1.8.** *Elegim n nombres $x_1, \ldots, x_m$ a l'atzar en el conjunt $\{0, \ldots, n\}$ de forma independent. Calculeu la probabilitat que $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$.*

*Demostració.* L'espai mostral $\Omega$ és $\{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_i \in \{0, \ldots, n\}\}$. Els casos favorables que anomenarem $A$, són els següents: $\{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_i \in \{0, \ldots, n\}, x_1 + \cdots + x_m = n\}$. Hem de veure, doncs, el cardinal dels dos conjunts:

$$\#\Omega = (n+1)^m, \quad \#A = \binom{n+m-1}{n} \equiv \binom{n+m-1}{m-1} = CR_m^n.$$

Per tant, $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$. ■

**Observació 1.9.** És equivalent a prendre el problema en què intentem col·locar $n$ boles en $m$ caixes, i també és el mateix que ordenar $n$ boles en $m-1$ separadors. Aquest últim és més senzill de plantejar: tenim $n+m-1$ elements (entre boles i separadors) i volem saber quantes maneres tenim de col·locar els $m-1$ separadors, $\binom{n+m-1}{m-1}$.

**Exercici 1.10.** *S'instal·la un programa antivirus en un ordinador. La probabilitat que l'ordinador tingui virus és 0,2. Si l'ordinador té el virus, la probabilitat que l'antivirus el detecti és 0,9. Si l'ordinador no té el virus, la probabilitat que l'antivirus doni un missatge d'existència de virus és 0,02. Calcula:*

1. *La probabilitat que, si ha aparegut un missatge d'existència de virus, l'ordinador no tingui virus.*
2. *La probabilitat que l'ordinador tingui el virus i l'antivirus no ho detecti.*
3. *La probabilitat que, si no ha sortit cap missatge d'existència de virus, l'ordinador tingui el virus.*

**Lema 1.11.** *Donat un esdeveniment $A$ i $C_1 \cup \cdots \cup C_n$ una partició de l'espai mostral $\Omega$, podem posar $P(A) = \sum_i P(A \cap C_i)$.*

*Demostració.* Hem d'aplicar el teorema de Bayes:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \implies P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k)}. \tag{1.1}$$

En efecte, agafant les dades del problema, podem traduir-ho al següent: $P(V) = 0,2$, $P(A|V) = 0,9$ i $P(A|V^c) = 0,02$. Deduïm, aplicant De Morgan: $P(V^c) = 0,8$, $P(A^c|V) = 0,1$ i $P(A^c|V^c) = 0,02$. Prenent 1.11, obtenim que:

$$P(A) = P(A \cap V) + P(A \cap V^c) = P(A|V)P(V) + P(A|V^c)P(V^c).$$

Ara, el primer apartat ens demana $P(V^c|A)$. Simplement apliquem (1.1):

$$P(V^c|A) = \frac{P(A|V_c)P(V_c)}{P(A)}.$$

El segon apartat és $P(V \cap A^c)$, que és calcula directament usant $P(A^c|V) = \frac{P(A^c \cap V)}{P(V)}$. Finalment, el tercer és $P(V|A^c)$; es resol rutinàriament, fent servir l'apartat anterior i la fórmula de probabilitat condicionada. ■

**Exercici 1.12.** *Tenim 3 tests per detectar una malaltia. Si s'està malalt, els resultats de cada test són independents i donen positiu amb probabilitat 0,9. Si no s'està malalt, els resultats dels test són també independents i donen positiu amb probabilitat 0,2. La proporció d'individus malalts a la població és del 20%. Un individu passa els 3 tests.*

1. *Quina és la probabilitat que algun test surti positiu?*
2. *Si el resultat d'algun dels tests és positiu, quina és la probabilitat que realment estigui malalt?*
3. *Si els 3 tests han donat positiu, quina és la probabilitat que estigui realment malalt?*

*Demostració.* Recollim les dades: $T = \{\text{test positiu}\}$ i $M = \{\text{malaltia}\}$, $P(T|M) = 0.9$, $P(T|M^C) = 0,2$ i $P(M) = 0,2$, amb els seus corresponents complementaris. El fet que els tres testos siguin independents indica que $P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(T_1)P(T_2)P(T_3)$ (i se suposa que també ho són dos a dos, amb les seves respectives igualtats).

$$P(\{\text{almenys un positiu}\} = 1 - P(\{\text{tots negatius}\}) = 1 - P(T_1^c \cap T_2^c \cap T_3^c).$$

Sabem que $P(-,-,-|M) = P(\{-\}|M)^3$ i $P(-,-,-|M^c) = P(\{-\}|M^c)^3$, i ambdós valors $P(\{-\}|M)$ i $P(\{-\}|M^c)$ (perquè sabem la probabilitat del seu esdeveniment complementari, $P(\{+\}|M)$, de manera que resolent:

$$P(\{-\} \cap \{-\} \cap \{-\}) = P(-,-,-|M)P(M) + P(-,-,-|M^c)P(M^c),$$

i ja ho tenim. ■

**Exercici 1.13 (**Problemes i més problemes, exercici 6**).** *Dins una caixa i tenim barrejats n parelles de guants diferents. Agafem, sense mirar, r guants ($r \leq n$). Calculeu:*

1. *La probabilitat de no haver-ne agafat cap parell.*
2. *La probabilitat d'haver-ne agafat, com a mínim, dos parells.*

*Demostració*. Ens ho mirem d'una manera més coneguda: imaginem $\frac{n}{2}$ boles i agafem sense mirar una, ens apuntem el valor, la retornem a la urna i repetim el procés $r$ vegades. Quina és la probabilitat que no m'hagi tocat la mateixa bola dues vegades? Això ens recorda clarament al problema de l'aniversari. No ho resoldré perquè segurament els càlculs donin diferent, tot i que la idea és la mateixa. ■

**Exercici 1.14 (**Difusió de rumors**).** *En un poble de n+1 habitants, una persona explica un rumor a una segona persona, qui a la seva vegada el repeteix a una tercera, i així successivament. En cada pas s'escull aleatòriament al receptor del rumor entre n persones disponibles. Troba la probabilitat que el rumor passi r vegades sense:*

1. *Tornar al que el va originar.*
2. *Repetir-ho a una persona.*

*Demostració*.

1. Fixem-nos: volem que en cadascuna de les iteracions el rumor no acabi *únicament* en la persona que el va iniciar. Comptarem casos possibles i casos favorables.

possibles: El primer ho pot explicar a $n$ persones. El segon a $n-1$ (ni a ell mateix ni a qui li ho acaba d'explicar, ja que no tindria molt sentit), i així successivament fins al final, sense cap mena de limitació més. Ens queda, doncs, $n(n-1)\cdots(n-1)$.

favorables: El primer, l'originador, té $n$ persones per escollir (considerem que no s'ho pot dir a sí mateix). Aleshores, el segon ha d'escollir entre $n-1$ persones (traiem el cas d'ell mateix i l'inicial). A partir d'aquí, la tercera persona no ho pot explicar a ella mateixa, ni a l'inicial, i considerem també que no ho pot explicar a l'anterior; això és, a qui li ho ha dit. Per tant, a partir de la tercera tenim $n-2$ possibilitats. En definitiva: $n(n-1)(n-2)\cdots(n-2)$.

Per tant:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2)}{n(n-1)\cdots(n-1)} = \frac{(n-1)(n-2)^{r-2}}{(n-1)^{r-1}} = \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{r-2}.$$

2. Tornem a fer el mateix. És bastant similar al problema de l'aniversari; de fet, és anàleg. Aplicant-hi la mateixa fórmula, descartant-te tu mateix i l'anterior:
$$\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdots\frac{n-r}{n-1}=\frac{(n-2)\cdots(n-r)}{(n-1)^{r-2}}.$$

Per últim, dir que podríem haver pensat que, sí, una persona li ho podria haver dit a l'anterior. En tal cas, el resultat seria una mica diferent. ∎

**Exercici 1.15** (del Borratxo i les claus). *Un home té un clauer amb n claus de les quals només una obre la porta de casa seva. Arriba borratxo a casa i comença a provar les claus a l'atzar. Calcula la probabilitat que necessiti provar k claus si:*

1. *treu les claus sense reposició;*
2. *treu les claus amb reposició.*

*Demostració.*

1. Si traiem $k$ claus estem demanant que les primeres $k-1$ no siguin la correcta. Per tant, a cada iteració anirem descartant una clau del total i una altra de totes les incorrectes que podem anar agafant, així com la mateixa clau correcta que no pot sortir fins la $k$-èsima iteració. En aquesta $k$-èsima iteració, la probabilitat d'obtenir la clau correcta és de $\frac{1}{n-(k-1)}$. En definitiva:
$$\frac{\cancel{n-1}}{n}\cdot\frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{\cancel{n-3}}{\cancel{n-2}}\cdots\frac{\cancel{n-(k-1)}}{\cancel{n-(k-2)}}\cdot\frac{1}{\cancel{n-(k-1)}}=\frac{1}{n}$$
2. Seguint un raonament semblant al de l'apartat anterior, tenint ara en compte la reposició, ens queda:
$$\left(\frac{n-1}{n}\overset{k-1}{\cdots}\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}.$$ ∎

**Exercici 1.16.** *En una urna hi ha 20 boles negres i 30 de blaves. Es fan extraccions sense reposició i s'anota el color.*

1. *Calcula la probabilitat que la primera bola blava aparegui en la quarta extracció.*
2. *Es fan cinc extraccions. Calcula la probabilitat que les dues primeres boles siguin del mateix color, si se sap que de les cinc boles exactament tres són blaves.*

*Demostració.*

1. Si la primera bola blava apareix a la quarta extracció necessitem que les tres primeres siguin negres.
$$\frac{20}{50}\frac{19}{49}\frac{18}{48}\frac{30}{47}.$$
2. Tenim unes quantes possibilitats: $BBNBN$, $BBNNB$, $BBBNN$, $NNBBB$. La suma de tots aquests casos ens donarà el resultat desitjat.
$$\frac{2\binom{20}{2}\binom{30}{3}+\binom{30}{2}\left(\binom{20}{1}\binom{28}{1}\binom{19}{1}\right)}{V_5^{50}}$$
S'ha de comprovar, perquè no sé si dona. El resultat hauria de ser $\frac{4}{10}$. ∎

**Observació 1.17.** Tota extracció amb tres boles blaves i dues negres té la mateixa probabilitat. Concretament:

$$P = \frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} \cdot \frac{28}{48} \cdot \frac{20}{47} \cdot \frac{19}{46}.$$

Els casos possibles $\binom{5}{2}$, és a dir, escollir els dos llocs per posar-hi les boles negres. Els casos favorables són 4, els que ja hem esmentat. Obtenim $P = \frac{4}{10}$.

**Exercici 1.18 (**Problemes i més problemes. Problemes amb indicació, 17**).** *Considerem dues urnes, $U_i$, $i \in \{1, 2\}$ que contenen $b_i$ boles blanques i $n_i$ boles negres cadascuna. Traiem una bola d'$U_1$ i la posem a $U_2$. A continuació, traiem una bola de $U_2$ i la posem en $U_1$. Finalment, traiem una bola d'$U_1$.*

1. *Calculeu la probabilitat que aquesta darrera bola sigui blanca.*
2. *Demostreu que si $b_1 = n_1$ i $b_2 = n_2$, aleshores la probabilitat que la bola sigui blanca és la mateixa que si no haguéssim fet cap modificació a les urnes.*

**Exercici 1.19.** *Un parc natural té dues àrees separades, $A$ i $B$. En $A$ hi ha $m$ cèrvols i en $B$ hi ha $n$. Un biòleg està fent un estudi d'un cérvol en concret, diguem-li $x$, que es troba a $A$. Per un descuit dels vigilants del parc, $k$ cérvols passen d'$A$ a $B$. En adonar-se'n, els vigilants agafen a l'atzar $k$ cérvols de $B$ i els passen a $A$.*

1. *Quina és la probabilitat que el cérvol $x$ estigui en $B$?*
2. *Considera la probabilitat anterior per diferents valors de $k$. Quin és el màxim valor que pot prendre?*

*Demostració.*

1. Considerem els casos totals i favorables. En primer lloc, la probabilitat que un cérvol $x \in A$ passi a $B$ entre els $k$ cérvols és $\binom{m-1}{k-1}$, trobem les maneres d'agafar $k-1$ cérvols entre $m-1$ i fixem el cérvol $x$. Els casos totals aquí són $\binom{m}{k}$, les formes que tenim d'agafar $k$ cérvols entre $m$.
   Una vegada ja han passat a $B$ els $k$ cérvols, tindrem en $B$ a $n+k$ cérvols. Les maneres totals que tenim de retornar a $A$ a $k$ cérvols són $\binom{n+k}{k}$. Els casos favorables, aquells que no contenen el cérvol $x$, són $\binom{n+k-1}{k}$
   Tot plegat ens queda el següent:
   $$P = \frac{\binom{m-1}{k-1}}{\binom{m}{k}} \cdot \frac{\binom{m+k-1}{k}}{\binom{n+k}{k}} = \frac{n}{m(1+\frac{n}{k})}.$$
2. Prenent la probabilitat anterior, és clar que el valor màxim que $P$ pot adoptar és quan $k$ és màxim, $k = m$; en tal cas, $P = \frac{n}{m+n}$. **No seria més acurat prendre $k = \max\{m, n\}$?** ■

**Exercici 1.20 (**Examen parcial, primavera 2023**).** *El concursant $A$ contesta de forma correcta a cada pregunta amb probabilitat $\frac{1}{4}$ i el $B$ amb probabilitat $\frac{2}{3}$ i de forma independent entre ells. El premi el guanya el primer a contestar a una pregunta correctament.*

*Demostració.*

1. D'haver de fer $n$ preguntes, $X_n$. Tenim $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A^c) = \frac{3}{4}$ i $P(B) = \frac{2}{3}$ i $P(B^c) = \frac{1}{3}$. Aleshores, $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) = \frac{3}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$. A més,

$$P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Això implica que les primeres $n-1$ preguntes fallen i al final un dels dos té èxit. És:

$$X \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{3}{4}\right) \equiv (1-p)^{n-1}p \implies P(X=n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\frac{3}{4}$$

Si tenim 3 jugades, calculem $P(X=3)$.

guanyi $A$ En tal cas,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

guanyi $B$ En tal cas,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\frac{1}{4}\frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

empatin En tal cas,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\frac{3}{4}\frac{2}{3} = \frac{6}{9}.$$

2. Si sabem que el premi l'ha guanyat $B$ i volem saber quina és la probabilitat que haguem fet cinc preguntes, ens demanen en efecte una probabilitat condicionada:

$$P(X=5|B) = \frac{P(\{X=5\} \cap B}{P(B)}. \qquad \blacksquare$$

**Exercici 1.21.** *En una mà de pòquer sense comodins, calcula la probabilitat d'obtenir un pòquer, un full, un trio, una doble parella i una parella. I si hi ha dos comodins?*

*Demostració.* Fixem-nos, hem de trobar les maneres d'agafar cinc cartes entre 52 en total: $C_5^{52} = 2598960$. Els casos favorables serien els següents:

1. En el cas del pòquer:

$$\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{12}{1}\binom{4}{1} = \{\text{núm. pòquer}\} \cdot \{\text{coll pòquer}\} \cdot \{\text{núm. 2a carta}\} \cdot \{\text{coll 2a carta}\}.$$

2. En el cas del full:

$$\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}.$$

Fem $\binom{12}{2}$ en lloc de $12 \cdot 11$ perquè si no estaríem comptant treure les dues mateixes cartes dues vegades, en funció de l'ordre.

3. En el cas del trio:
$$\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}.$$
Explicació: primer triem el número que volem per al trio i el coll de les tres cartes. Després, triem dues cartes de 12 possibles i després el coll de la carta 1 i el coll de la carta 2. En aquest cas es poden repetir el coll de les dues cartes que sobren, així que els separem en $\binom{4}{1}\binom{4}{1}$.
4. En el cas de la doble parella:
$$\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{1}.$$
5. Parella:
$$\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}.$$

Hem comptat casos, ara simplement calculem les respectives probabilitats dividint els casos favorables entre els casos totals. *El cas del comodí queda com a exercici.* ∎

## 1.2 Probabilitat condicionada, totals i Bayes

**Exercici 1.22.** *Seleccionem a l'atzar un nombre natural positiu de forma que la probabilitat $n \in \mathbb{N}$ és $2^{-n}$. Llavors, tirem una moneda que té probabilitat de cara $e^{-n}$. Calculeu la probabilitat d'obtenir cara.*

*Demostració.* Tenim $P(\{n\}) = 2^{-n}$ i $P(K|\{n\}) = e^{-n}$, on $K = \{\text{cara}\}$. La probabilitat de $P(K)$ és:
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(K \cap \{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(K|\{n\})P(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2e)^n}$$
$$= \frac{\frac{1}{2e}}{1-\frac{1}{2e}} = \frac{1}{2e-1} \simeq 0.22.$$
Per tant la probabilitat d'obtenir cara és 0.22. ∎

**Exercici 1.23.** *A card from a pack of 52 cards is lost. From the remaining cards of the pack, two cards are drawn and are found to be both diamonds. Find the probability of the lost card being a diamond.*

**Observació 1.24.**

- The original deck is the standard one, with 4 suits each of which with 13 cards (A, 2-10, J, Q, K).
- Before doing any computation, decide whether the evidence increases or decreases the initial guess about the probability that the lost card is a diamond. Later, this conclusion should be used as a double check of results.

*Demostració.* Les maneres que tenim d'escollir dues cartes entre 51 són $\binom{51}{2}$. Com no sabem si la carta perduda és un diamant també, no podem acabar de calcular els casos favorables. Anomenant $A = \{\text{han sortit dos diamants en la baralla incompleta}\}$ i $D = \{\text{la carta perduda és un diamant}\}$, volem saber $P(D|A)$. Fixemnos que *a priori* la probabilitat d'extreure una carta que sigui un diamant en una baralla normal és de $\frac{1}{4}$. I que si extraiem dos diamants és menys probable que la carta perduda sigui, també, un diamant. En efecte, $P(D|A) = \frac{P(D\cap A)}{P(A)}$, i necessitem saber ambdues.

$$P(D) = \frac{1}{4}, \; P(D^c) = \frac{3}{4}.$$

$$P(A|D) = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{51}{2}} = \frac{\frac{12\cdot 11}{2}}{\frac{51\cdot 50}{2}} = \frac{12\cdot 11}{51\cdot 50} = 0.05176470588.$$

$$P(A|D^c) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{51}{2}} = \frac{\frac{13\cdot 12}{2}}{\frac{51\cdot 50}{2}} = \frac{13\cdot 12}{51\cdot 50} = 0.06117647058.$$

Per tant:

$$P(D|A) = \frac{P(A|D)P(D)}{P(A|D)P(D) + P(A|D^c)P(D^c)} = \frac{11}{50} < P(D).$$

Contestant a la pregunta: en efecte, $P(D|E) < P(D)$. ■

**Exercici 1.25.** *A cab was involved in a hit and run accident at night. Two cab companies, the G and the B, operate in the city.* 85% *of the cabs in the city are green and* 15% *are blue. A witness identified the cab as B. The reliability of the witness is* 80%. *What is the probability that the cab involved in the accident was B rather than G?*

*Demostració.* Aquest problema és típic de Bayes. Sigui $B = \{\text{el cotxe és blau}\}$, de manera que $P(B) = 0.8$ i $G = \{\text{el cotxe és verd}\}$, $P(G) = 0.15$; al seu torn, $E = \{\text{és cotxe blau}\}$ i $P(E|B) = 0.8$, $P(E|G) = 0.2$. Volem saber $P(B|E)$: sabent que el testimoni l'ha identificat d'aquest color, quina és la probabilitat que, en efecte, ho sigui? Finalment, per Bayes:

$$\begin{aligned} P(B|E) &= \frac{P(E|B)P(B)}{P(E|B)P(B) + P(E|B^c)P(B^c)} \\ &= \frac{P(E|B)P(B)}{P(E|B)P(B) + P(E|G)P(G)} = \frac{0.8\cdot 0.15}{0.8\cdot 0.15 + 0.2\cdot 0.85} = 0.4139. \end{aligned}$$

Per tant, $P(B|E) = 0.4139$. ■

**Exercici 1.26.** *Un test per detectar els anticossos d'un cert virus té una probabilitat de* 0.99 *de donar el resultat correcte, de forma independent a si està infectat o no. Els pacients que donen positiu en el test són sotmesos per un metge a un segon test més precís. El nou test no falla mai en un pacient sa però té un* 1% *d'error amb els infectats. Els dos tests són independents quan coneixem si el pacient està infectat o no. La probabilitat que un pacient estigui infectat és de* 0.1. *Demanem:*

1. *Quina proporció de pacients seran sotmesos a un segon test?*
2. *Quina proporció de pacients seran sotmesos pel metge a un segon test i aquest sortirà negatiu?*
3. *Quina és la probabilitat que un pacient descrit en l'apartat anterior estigui realment infectat?*

*Demostració.* Posem $T_i = \{\text{el test } i \text{ és positiu}\}$, $M = \{\text{la persona està malalta}\}$, amb $P(M) = 0.1$, $P(T_1|M) = P(T_1^c|M^c) = 0.99$, $P(T_1|M^c) = 0.01$ (ja que $P(T_1|M^c) = 1 - P(T_1^c|M^c)$), $P(T_2|M) = 0.99$ i $P(T_2|M^c) = 0$.

1. Volem saber $P(T_1)$. Per a calcular-ho necessitem $P(M \cap T_1)$ i $P(M \cap T_2)$:

$$P(T_1) = P(T_1 \cap \Omega) = P(T_1 \cap M) + P(T_1 \cap M^c) = P(T_1|M)P(M) + P(T_1|M^c)P(M^c).$$

Així, $P(T_1) = 0.108$.

2. No ens demanen $P(T_2^c|T_1)$, sinó $P(T_1 \cap T_2^c)$[1]. Aplicant la fórmula:

$$\begin{aligned} P(T_1 \cap T_2^c) &= P(T_1 \cap T_2^c|M)P(M) + P(T_1 \cap T_2^c|M^c)P(M^c) \\ &\overset{2}{=} P(T_1|M)P(T_2^c|M)P(M) + P(T_1|M^c)P(T_2^c|M^c)P(M^c) = 0.00999. \end{aligned}$$

Per tant, $P(T_1 \cap T_2^c) = 0.00999$.

3. Ens estan demanant $P(M|T_1 \cap T_2^c)$. En efecte,

$$P(M|T_1 \cap T_2^c) = \frac{P(T_1 \cap T_2^c|M)P(M)}{P(T_1 \cap T_2^c)} = \frac{P(T_1|M)P(T_2^c|M)P(M)}{P(T_1 \cap T_2^c)}$$

I el resultat d'això dona 0.0990991. ■

**Exercici 1.27.** *Poso a un sobre tres cartes: una amb les dues cares vermelles, una amb les dues cares negres, una amb una cara vermella i l'altra negra. Amb ulls tancats, agafo una carta a l'atzar i la poso a sobre de la taula amb una cara cap amunt a l'atzar i obro els ulls. Si la cara que veig és vermella, quina és la probabilitat que l'altra cara també ho sigui?*

*Demostració.* Posem $A = \{\text{la carta té dues cares vermelles}\}$ i $B = \{\text{una cara vermella}\}$. Comptant casos, $P(A) = \frac{1}{3}$ i $P(B) = \frac{1}{2}$. Volem saber $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$ ■

**Exercici 1.28 (Paradoxa de Monty Hall).** *Darrere d'una porta hi ha un cotxe. Si la tries guanyes el cotxe. Cadascuna de les altres dues portes amaga una cabra. Si tries una d'aquestes no guanyes res. Selecciones una porta. De moment no s'obre. El presentador, que sap on és el cotxe, obre una de les dues portes no seleccionades, mostrant una cabra. Pots mantenir la teva selecció inicial o canviar-la, triant l'altra porta no oberta. Quina estratègia és millor?*

*Demostració.* Hi ha tres opcions: la primera, segona i tercera porta, respectivament. En particular, tenim els següents esdeveniments:

1. $T_1$, $T_2$ i $T_3$ si triem la porta $A$, $B$ i $C$, respectivament.
2. $C_1$, $C_2$ i $C_3$ són les probabilitats que el cotxe estigui darrere de la porta 1, 2 i 3, respectivament.

[1] **Per què**? Perquè ens estan demanant la probabilitat que ocorri un fenomen *i* un altre. Si no, ens haurien demanat la probabilitat d'un fenomen *sabent* que ha passat l'altre.

[2] Notem que, en virtut de l'enunciat, els dos testos són independents quan coneixem si el pacient està infectat o no. Això vol dir que $P(T \cap T^c|M) = P(T|M)P(T^c|M)$ o, anàlogament, per a $M^c$.

3. $P_1$, $P_2$ i $P_3$ són les probabilitats que el presentador obri la porta 1, 2 i 3, respectivament.
4. $E$, probabilitat d'èxit.

Suposem nul·la la influència del presentador; és a dir, obrim porta i trobem recompensa. Les probabilitats d'èxit serien les següents, evidentment:

$$P(T_A \cap C_A) + P(T_B \cap C_B) + P(T_C \cap C_C) \overset{3}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ara, hem de tenir en compte el presentador i si decidim canviar de porta o no. Comptant casos, tenim:

1. Si *no canviem porta*, vol dir que hem escollit $i \in \{1, 2, 3\}$, el presentador ha mostrat $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ tal que $j$ conté una cabra. Passat a cadascun dels casos particulars:

$$\begin{aligned} E &= (T_1 \cap C_1 \cap P_2) \cup (T_1 \cap C_1 \cap P_3) \cup (T_2 \cap C_2 \cap P_1) \cup (T_2 \cap C_2 \cap P_3) \cup (T_3 \cap C_3 \cap P_1) \\ &\quad \cup (T_3 \cap C_3 \cap P_2) \\ &\overset{4}{=} (P_2|T_1 \cap C_1)P(T_1 \cap C_1) \cup (P_3|T_1 \cap C_1)P(T_1 \cap C_1) \cup (P_1|T_2 \cap C_2)P(T_2 \cap C_2) \\ &\quad \cup (P_3|T_2 \cap C_2)P(T_2 \cap C_2) \cup (P_1|T_3 \cap C_3)P(T_3 \cap C_3) \cup (P_2|T_3 \cap C_3)P(T_3 \cap C_3) \end{aligned}$$

Per tant, $P(E)$ és la suma de totes aquestes unions. Per [4], sabem que $P(P_i|T_j \cap C_j)$, $i \neq j$, és de $\frac{1}{2}$. Per tant:

$$P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Per tant, si no canviem de porta la probabilitat d'èxit és de $\frac{1}{3}$.

2. En canvi, si canviem de porta és una mica diferent. Posem el cas que escollim inicialment $T_1$ i el cotxe és $C_3$: això vol dir que el presentador està forçat a prendre $P_2$, ja que estem en cas d'èxit (acabem encertant); ha d'obrir una porta no escollida i, a més a més, una que no contingui un cotxe, l'única que queda. Recordem que $T_i$ i $C_i$ són fenòmens independents entre ells. Per tant:

$$\begin{aligned} E &= (T_1 \cap C_3 \cap P_2) \cup (T_1 \cap C_2 \cap P_3) \cup (T_2 \cap C_1 \cap P_3) \cup (T_2 \cap C_3 \cap P_1) \cup (T_3 \cap C_1 \cap P_2) \\ &\quad \cup (T_3 \cap C_2 \cap P_1) \\ &= (P_2|T_1 \cap C_3)P(T_1 \cap C_3) \cup (P_3|T_1 \cap C_2)P(T_1 \cap C_2) \cup (P_3|T_2 \cap C_1)P(T_2 \cap C_1) \\ &\quad \cup (P_1|T_2 \cap C_3)P(T_2 \cap C_3) \cup (P_2|T_3 \cap C_1)P(T_3 \cap C_1) \cup (P_1|T_3 \cap C_2)P(T_3 \cap C_2) \\ &= P(T_1 \cap C_3) \cup P(T_1 \cap C_2) \cup P(T_2 \cap C_1) \cup P(T_2 \cap C_3) \cup P(T_3 \cap C_1) \cup P(T_3 \cap C_2). \end{aligned}$$

Fem el mateix que abans, adonem-nos que $P(P_k|T_i \cap C_j)$, $i \neq j \neq k$ ens dona 1, ja que si $i$ i $j$ són diferents, per les condicions de canvi $k$ vindrà donada; en altres paraules, aquesta probabilitat condicionada és inevitable, tautològica. Per tant, $P(P_k|T_i \cap C_j)P(T_i \cap C_j) = P(T_i \cap C_j)$, per a tot $i, j, k$. Per a tot $i \neq j$ (i, de fet, abans ja hem vist per $i = j$), $P(T_i \cap C_j) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$. Per tant: $P(E) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

[3] La tria de la porta no depèn en absolut d'on posem el cotxe, és a dir, són esdeveniments independents. Per tant, $P(C_A|T_A) = P(T_A|C_A) = 1$ i $P(T_A \cap C_A) = P(T_A)P(C_A)$.

[4] Fixem els esdeveniments que passen *a priori*; són els que hem fet abans de tenir en compte la interacció del presentador. D'aquesta manera, voldrem $P(P_2|T_1 \cap C_1)$ i així per la resta. En l'exemple anterior, una vegada fixat el cotxe i la tria, el presentador té com a opcions la porta 2 i la porta 3; si volem la segona, $P = \frac{1}{2}$.

En definitiva, és millor canviar de porta. ■

**Exercici 1.29.** *Tenim m boles, entre les quals només hi ha una negra. Repartim les boles a l'atzar entre dues urnes* $U_1$, $U_2$, *amb l'única condició que a l'urna* $U_1$ *hi posem r boles,* $1 < r < m-1$. *Un jugador fa n extraccions amb reposició escollint cada vegada l'urna (n fix i conegut). Guanya si en una, o més d'una, d'aquestes extraccions treu la bola negra. Calculeu el nombre d'extraccions de l'urna* $U_1$ *perquè la probabilitat de guanyar sigui màxima.*

*Demostració.* Posem $A = \{\text{guanyar el joc}\}$. Per les condicions de l'enunciat, cada urna té com a mínim 2 boles. Fixem, a més, $n = k + (n-k)$, on $k$ són les extraccions a $U_1$ i $n-k$, a l'urna $U_2$, i $N_i = \{\text{la bola negra és a l'urna } i\text{-èsima}\}$[5]. Comencem omplint les urnes.

$$P(N_1) = \frac{\text{maneres que en } r \text{ boles hi hagi una negra}}{\text{maneres d'escollir les } r \text{ boles de } U_1} = \frac{\binom{m-1}{r-1}\binom{1}{1}}{\binom{m}{r}}, \quad P(N_2) = \frac{\binom{m-1}{(m-r)-1}}{\binom{m}{m-r}}.$$

Els resultats finals són: $P(N_1) = \frac{r}{m}$ i $P(N_2) = \frac{m-r}{m}$. Guanyar el joc equival a treure una o més boles negres (se suposa que tenim reposició) a l'urna 1 o bé a l'urna 2; és a dir, necessitem que la bola estigui en la urna $i$ fer-ne una extracció satisfactòria. Com que a l'haver només una bola negra es compleix que $N_1 \cap N_2 = \emptyset$,

$$P(A) = P(N_1 \cap A) + P(N_2 \cap A).$$

Però és més senzill calcular la probabilitat de no treure cap bola negra en $n$ extraccions i fer-ne el complementari:

$$\begin{aligned} P(A^c) &= P(N_1 \cap A^c) + P(N_2 \cap A^c) = P(A^c|N_1)P(N_1) + P(A^c|N_2)P(N_2) \\ &= \left(\frac{r-1}{r}\right)^k \cdot \frac{r}{m} + \left(\frac{(m-r)-1}{m-r}\right)^{n-k} \cdot \frac{m-r}{m} \end{aligned}$$

Si minimitzem $P(A^c)$ estarem maximitzant $P(A)$, com ens interessa. Per minimitzar $P(A^c)$ definim $f(k) = \left(\frac{r-1}{r}\right)^k \cdot \frac{r}{m} + \left(\frac{(m-r)-1}{m-r}\right)^{n-k} \cdot \frac{m-r}{m}$ i volem veure per quins $k$ la funció és decreixent; és a dir, $f(k+1) < f(k) \iff \frac{f(k+1)}{f(k)} < 1 \iff f(k) - f(k+1) > 0$.

$$\left(\frac{r-1}{r}\right)^k \frac{r}{m} - \left(\frac{r-1}{r}\right)^{k+1} \frac{r}{m} + \left(\frac{m-r-1}{m-r}\right)^{n-k} \frac{m-r}{m} - \left(\frac{m-r-1}{m-r}\right)^{n-k-1} \frac{m-r}{m} > 0.$$

Agrupant i simplificant obtenim:

$$\frac{1}{m}\left(\left(\frac{r-1}{r}\right)^k - \left(\frac{m-r-1}{m-r}\right)^{n-k-1}\right) > 0 \iff \frac{\left(\frac{r-1}{r} \cdot \frac{m-r-1}{m-r}\right)^k - \left(\frac{m-r-1}{m-r}\right)^{n-1}}{\left(\frac{m-r-1}{m-r}\right)^k} > 0.$$

[5] Notem que no estem demanant el fet d'escollir la bola dins de l'urna en qüestió, això seria una altra probabilitat diferent. Ara solament en tenim prou amb què hi sigui a l'urna, per tant, tenint en compte que a $U_1$ tenim $r$ boles i a $U_2$, $m-r$.

Com que $\left(\frac{m-r-1}{m-r}\right)^k > 0$, tenim $\left(\frac{r-1}{r}\cdot\frac{m-r-1}{m-r}\right)^k - \left(\frac{m-r-1}{m-r}\right)^{n-1} > 0$. Ara, és evident que:

$$\left(\frac{r-1}{r}\cdot\frac{m-r-1}{m-r}\right)^k > \left(\frac{m-r-1}{m-r}\right)^{n-1} \iff k < \frac{(n-1)\ln\left(\frac{m-r-1}{m-r}\right)}{\ln\left(\frac{r-1}{r}\cdot\frac{m-r-1}{m-r}\right)}$$

Per a aquests valors de $k$, $P(A)$ és màxima; en particular, prenent $k = \left\lceil \frac{(n-1)\ln\left(\frac{m-r-1}{m-r}\right)}{\ln\left(\frac{r-1}{r}\cdot\frac{m-r-1}{m-r}\right)} \right\rceil + 1$. ■

**Exercici 1.30** (Exercici 18, Problemes i més problemes). *Una urna conté tres boles, cada bola pot ser negra o vermella, de tal manera que totes les composicions de l'urna tenen la mateixa probabilitat. Es treuen dues boles a l'atzar amb reposició i les dues són vermelles. Tenint una altra vegada les tres boles a l'urna, se'n treuen dues a l'atzar i sense reposició. Calculeu la probabilitat que les dues siguin negres.*

*Demostració.* Primerament, se'ns diu que totes les composicions de l'urna tenen la mateixa probabilitat[6]. Hi ha 4 possibilitats; per tant, $U_i = \{\text{li posem } i \text{ boles vermelles a la urna}\} = \frac{1}{4}$. Posem $V_i = \{\text{bola vermella a la } i\text{-èsima extracció}\}$ i fem casos, tenint en compte que com hi ha reposició les extraccions són independents:

$$\begin{aligned}
P(V_1 \cap V_2 | U_0) &= 0,\\
P(V_1 \cap V_2 | U_1) &= P(V_1|U_1)P(V_2|U_1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9},\\
P(V_1 \cap V_2 | U_2) &= P(V_1|U_2)P(V_2|U_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9},\\
P(V_1 \cap V_2 | U_3) &= 1.
\end{aligned}$$

La probabilitat $P(V_1 \cap V_2)$ es pot calcular amb probabilitats totals, tenint en compte que $U_i$, $0 \leq i \leq 3$ formen una partició de l'espai mostral.

$$\begin{aligned}
P(V_1 \cap V_2) = P(V_1 \cap V_2|U_0)P(U_0) + P(V_1 \cap V_2|U_1)P(U_1) + P(V_1 \cap V_2|U_3)P(U_3)\\
+ P(V_1 \cap V_2|U_4)P(U_4) = \left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+1\right)\frac{1}{4} = \frac{7}{18}.
\end{aligned}$$

Una vegada tenim $P(V_1 \cap V_2)$, volem veure $P(N_1 \cap N_2 | V_1 \cap V_2)$. Un altre cop, com hi ha reposició es dona que $P(N_i \cap V_j) = P(N_i)P(V_j)$, per a tot $i$, $j$. En canvi, a la segona extracció traiem les dues boles sense reposició; és a dir, $P(N_1 \cap N_2) \neq P(N_1)P(N_2)$.

$$\begin{aligned}
P(N_1 \cap N_2 \cap V_1 \cap V_2 | U_0) = P(N_1 \cap N_2|U_0)P(V_1 \cap V_2|U_0) &\implies P(N_1 \cap N_2|U_0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{2}} = 1\\
P(N_1 \cap N_2 \cap V_1 \cap V_2 | U_1) = P(N_1 \cap N_2|U_1)P(V_1 \cap V_2|U_1) &\implies P(N_1 \cap N_2|U_1) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}\\
P(N_1 \cap N_2 \cap V_1 \cap V_2 | U_2) = P(N_1 \cap N_2|U_2)P(V_1 \cap V_2|U_2) &\implies P(N_1 \cap N_2|U_2) = 0\\
P(N_1 \cap N_2 \cap V_1 \cap V_2 | U_3) = P(N_1 \cap N_2|U_3)P(V_1 \cap V_2|U_3) &\implies P(N_1 \cap N_2|U_3) = 0
\end{aligned}$$

[6] Fixem-nos que ho podríem haver plantejat com urna amb 6 pilotes, tres vermelles i tres negres, ja que cadascuna de les tres podria prendre dos estats. El que passa, és que no s'hagués conservat l'equiprobabilitat entre composicions de urna.

Amb tot, i alleugerint una mica la notació:

$$P(N_1 \cap N_2|V_1 \cap V_2) = \frac{P(N_1 \cap N_2 \cap V_1 \cap V_2)}{P(V_1 \cap V_2)} = \frac{P(N \cap V)}{P(V)} = \frac{\sum_{i=0}^{3} P(N \cap V|U_i)P(U_i)}{P(V)}$$
$$= \frac{\sum_{i=0}^{3} P(N|U_i)P(V|U_i)P(U_i)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{4}\left(0 \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot 0 + 1 \cdot 0\right)}{\frac{7}{18}}.$$

Acabem obtenint que $P(N_1 \cap N_2|V_1 \cap V_2) = \frac{\frac{1}{108}}{\frac{7}{18}} = \frac{1}{42}$. ■

**Exercici 1.31.** *D'una urna que conté tres boles blanques i cinc de negres, se'n treuen quatre boles, que es posen en una segona urna buida. D'aquesta, se'n treuen dues boles. Si aquestes boles són blanques, trobeu la probabilitat de treure una tercera bola blanca de la mateixa urna, després de tornar-hi les dues primeres.*

*Demostració.* Primer, és clar que $\binom{8}{4}$ són les maneres que tenim de prendre 4 boles de la primera urna. Els casos favorables són aquells en què agafem dues o tres boles blanques: $P(\alpha) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}}$ i $P(\beta) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{3}}{\binom{8}{4}}$. Llavors, hem de condicionar el fet de treure dues boles blanques als esdeveniments $\alpha$ i $\beta$, respectivament:

$$P(B^2|\alpha) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6} \text{ i } P(B^2|\beta) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Posem $B = \{\text{extreure una bola blanca de la segona urna}\}$. Ara, volem saber $P(B|B^2)$: *sabent* que hem pogut extreure dues boles blanques satisfactòriament de la segona urna, quina és la probabilitat de treure'n una en aquesta segona extracció? Només cal considerar les branques $\alpha$ i $\beta$.

$$P(B|B^2) = \frac{P(B \cap B^2)}{P(B^2)} = \frac{P(B \cap B^2|\alpha)P(\alpha) + P(B \cap B^2|\beta)P(\beta)}{P(B^2)}$$
$$\overset{7}{=} \frac{P(B|\alpha)P(B^2|\alpha)P(\alpha) + P(B|\beta)P(B^2|\beta)P(\beta)}{P(B^2)}.$$

Fent els càlculs obtenim que $P(B|B_2) = \frac{7}{12}$. ■

**Exercici 1.32.** *Una urna té b boles blanques i n negres. Traiem una bola a l'atzar, la retornem a l'urna i afegim a boles del mateix color. Repetim aquest procés tres vegades.*

1. *Calculeu la probabilitat que la primera bola hagi sortit blanca si sabem que la segona ha sortit blanca.*
2. *Demostreu que en totes tres extraccions la probabilitat de treure una bola blanca és la mateixa.*

*Demostració.*

1. Si fem el dibuix en arbre del problema es veu molt clar. Si denotem $B_i = \{\text{traiem una bola blanca en la } i\text{-èsima extracció}\}$, i $N_i = \{\text{traiem una bola negra en la } i\text{-èsima extracció}\}$. Volem el següent:

$$P(B_1|B_2) = \frac{P(B_2|B_1)P(B_1)}{P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1)}.$$

7 Com que a la segona urna hi tenim reposició, el fet que haguem tret dues boles blanques no influeix en què a l'extracció posterior la bola extreta sigui blanca. Això és, $P(B \cap B^2) = P(B)P(B^2)$, o $P(B|B^2) = P(B)$. Igualment, necessitem dividir l'espai mostral entre $\alpha$ i $\beta$, ja que no tenim manera de calcular $P(B)$ per si sola.

Tenim que $P(B_2|B_1)$ i $P(B_2|N_1)$ són $\frac{a+b}{a+b+n}$ i $\frac{b}{a+b+n}$, respectivament. $P(B_1)$ i $P(N_1)$ són $\frac{b}{b+n}$ i $\frac{a}{a+n}$, respectivament. D'aquí, fem el càlcul: $\frac{a+b}{a+b+n}$.

2. Es refereix a què tindrem la mateixa probabilitat de treure una bola blanca en la primera que en la tercera extracció, independentment del *camí* (de l'arbre) que triem. Aquest camí ve determinat pel nombre de boles blanques que haguem extret, de manera que hem de calcular la probabilitat de treure una, dues o cap blanca abans de la tercera extracció.

   - Cap bola blanca ($N_1 \cap N_2$). En tots tres casos aplicarem la regla de les probabilitats totals. Alesnores:
   $$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P(N_2|N_1) = \frac{b(a+n)}{(b+n)(a+b+n)}.$$
   - Una bola blanca ($B_1 \cap N_2$ o bé $N_1 \cap B_2$):
   $$P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P(N_2|B_1) = \frac{bn}{(b+n)(a+b+n)}$$
   $$P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P(B_2|N_1) = \frac{bn}{(b+n)(a+b+n)}.$$
   - Dues boles blanques ($B_1 \cap B_2$):
   $$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{b(a+b)}{(b+n)(a+b+n)}.$$

Podem dividir l'espai mostral $\Omega = (N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2)$ i, en definitiva, aplicar probabilitats totals. En efecte, $P(B_3) = P(B_3 \cap \Omega)$ i partint d'allà:

$$\begin{aligned} P(B_3) &= P(B_3|N_1 \cap N_2)P(N_1 \cap N_2) + P(B_3|B_1 \cap N_2)P(B_1 \cap N_2) \\ &\quad + P(B_3|N_1 \cap B_2)P(N_1 \cap B_2) + P(B_3|B_1 \cap B_2)P(B_1 \cap B_2). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Notem, no ens val amb sumar cadascun dels casos en què a la tercera extracció obtenim una bola blanca. És com si a (1.2) decidíssim treure-li a cadascun dels sumands el segon terme, i això no és correcte.

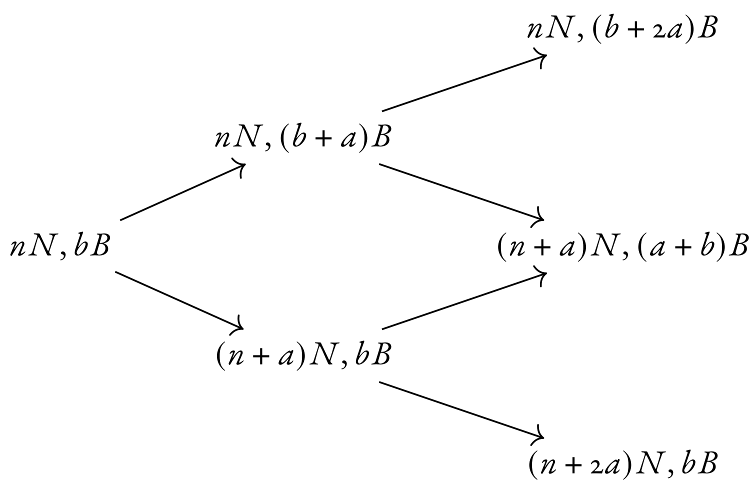


Figura 1: Arbre del nostre exercici, 1.32.

Ara, fent els càlculs trobem $P(B_3) = \frac{b}{b+n}$. Per inducció es podria trobar que després de $k$ etapes, la probabilitat $P(B_{k+1})$ d'extreure una bola blanca en la $(k+1)$-èsima extracció és aquest mateix valor. ■

**Exercici 1.33.** *Es llança un dau perfecte. Si surt un dels nombres 2, 3, 4, 5, 6 s'escriu aquest nombre en un paper. Si surt un 1 es torna a llançar el dau. Aquesta vegada, si surt 1, 2, 3 s'escriu aquest nombre en un paper, però si surt 4, 5, 6 s'escriu 7. Després d'això, haurem escrit un nombre entre 1 i 7 en el paper. Suposem que tenim 7 daus diferents, $D_1, \dots, D_7$, tals que el dau $D_i$ té $i-1$ cares blanques i $7-i$ cares negres. Escollim el dau $D_i$, on $i$ és el nombre escrit en el paper, i el tirem $n$ vegades, observant en cada tirada si surt cara blanca o negra.*

1. *Calculeu la probabilitat que surti una cara negra a la primera tirada.*
2. *Calculeu la probabilitat que hagi sortit cara negra a la primer tirada si a la segona tirada ha sortit cara negra.*
3. *Calculeu la probabilitat de treure cara negra a la tercera tirada si a les dues primeres ha sortit cara negra.*
4. *Calculeu la probabilitat de treure cara negra a la tirada $n$ si a les $n-1$ tirades anteriors ha sortit cara negra. Trobeu el límit d'aquesta probabilitat quan $n \to \infty$.*

**Exercici 1.34 (Parcial tardor 2023, exercici 2).** *Tenim 4 urnes i 2 boles en cadascuna. La primera urna i la segona urna tenen 2 boles blanques, la tercera té una bola blanca i una bola vermella, i la quarta té una bola blanca i una bola negra. Escollim a l'atzar una de les urnes i traiem una bola que resulta ser blanca:*

1. *Quina és la probabilitat que la bola que queda a l'urna sigui blanca?*
2. *Quina és la probabilitat que la bola que hem tret provingui de la quarta urna?*

*Demostració.*

1. S'entén que la probabilitat d'escollir la urna $i$ és la mateixa; és a dir, $P(U_i) = \frac{1}{4}$ per a tot $i$, $1 \le i \le 4$. Ens estan demanant una probabilitat sabent que ha sortit una bola blanca en l'urna que haguem decidit a l'atzar, és a dir, una condicionada. Ens podem imaginar que ens demanen que la segona extracció (totes les urnes tenen dues boles) ha de ser una bola blanca, també. Fixem:

$$U_1 = \{\text{l'urna és la primera, } (B,B)\} \qquad B_i = \{\text{l'}i\text{-èsima extracció és blanca}\}$$
$$U_2 = \{\text{l'urna és la segona, } (B,B)\} \qquad V_i = \{\text{l'}i\text{-èsima extracció és vermella}\}$$
$$U_3 = \{\text{l'urna és la tercera, } (B,V)\} \qquad N_i = \{\text{l'}i\text{-èsima extracció és negra}\}$$
$$U_4 = \{\text{l'urna és la quarta, } (B,N)\}$$

Volem saber $P(B_2|B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)}$. Hem de saber, en particular, quina és la probabilitat de $B_1$ i la de la intersecció. És evident que $B_1$ i $B_2$ no són independents, així que caldrà fer $P(B_1 \cap B_2)$ *a pèl*. Per la fórmula de probabilitats totals:

$$P(B_1) = \sum_{i=1}^{4} P(B_1|U_i)P(U_i) = \underbrace{1 \cdot \frac{1}{4}}_{i=1} + \underbrace{1 \cdot \frac{1}{4}}_{i=2} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}_{i=3} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}_{i=4} = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Ara, hem de fer el mateix però per a $P(B_1 \cap B_2)$:

$$P(B_1 \cap B_2) = \sum_{i=1}^{4} P(B_1 \cap B_2 | U_i) P(U_i) = \underbrace{1 \cdot \frac{1}{4}}_{i=1} + \underbrace{1 \cdot \frac{1}{4}}_{i=2} + \underbrace{0 \cdot \frac{1}{4}}_{i=3} + \underbrace{0 \cdot \frac{1}{4}}_{i=4} = \frac{1}{2}.$$

Per tant, $\frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$.

2. Ara ens queda veure la probabilitat $P(U_4|B_1)$. Apliquem Bayes rutinàriament:

$$P(U_4|B_1) = \frac{P(B_1 \cap U_4)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1|U_4)P(U_4)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$ ■

2

# Variables aleatòries i funcions de distribució

**Exercici 2.1.** *Sigui $X$ una variable aleatòria que té per funció de distribució:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1, \\ \frac{1+x}{9}, & \text{si } -1 \le x < 0, \\ \frac{2+x^2}{9}, & \text{si } 0 \le x < 2, \\ 1, & \text{si } 2 \le x. \end{cases}$$

*Calculeu:*

1. $P(X = 2)$,
2. $P(X \in [-\frac{1}{2}, 3))$,
3. $P(X = 2 | X \in [-\frac{1}{2}, 3))$,
4. $P(X \in (-1, 0] \cup (1, 2])$,
5. $P(X \in ((-1, 2] \cap (1, 3))$,
6. $P(X \in \{x \in \mathbb{R} \mid |x| + 2x^2 > 1\})$.

*Demostració.*

1. $P(X = 2) = F(2) - F(2^-) = 1 - \frac{6}{9} = \frac{1}{3}$.
2. Per a $P(X \in [-\frac{1}{2}, 3))$ necessitem separar-ho en diferents probabilitats:

$$\begin{aligned} & P\left(X \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right]\right) + P\left(X = -\frac{1}{2}\right) - P(X = 3) \\ &= \left(F(3) - F\left(-\frac{1}{2}^-\right)\right) + \left(F\left(-\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}^-\right)\right) - (F(3) - F(3^-)) = \frac{17}{18}. \end{aligned}$$

3. Ara hem de calcular la següent probabilitat condicionada, que resolem usant la fórmula:

$$P\left(X = 2 \mid X \in \left[-\frac{1}{2}, 3\right)\right) = \frac{P\left((X = 2) \cap \left(X \in [-\frac{1}{2}, 3)\right)\right)}{P(X \in [-\frac{1}{2}, 3)} = \frac{P((X = 2))}{P(X \in [-\frac{1}{2}, 3))} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{17}{18}} = \frac{6}{17}.$$

4. Seguim:

$$P(X \in (-1,0] \cup (1,2]) = (F(0) - F(-1)) + (F(2) - F(1)) = \left(\frac{2}{9} - 0\right) + \left(1 - \frac{3}{9}\right) = \frac{8}{9}$$

5. Tenim:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\{X \in (-1,2]\} \cap \{X \in (1,3)\}) &= \mathrm{P}(\{X \in ((-1,2] \cap (1,3))\}) \\ &= \mathrm{P}(\{X \in (1,2]\}) \\ &= F(2) - F(1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

6. Per últim, la condició $|x| + 2x^2 > 1$ equival, per $x \geq 0$, a $x + 2x^2 > 1$, o sigui $2x^2 + x - 1 > 0$, i per $x < 0$, a $-x + 2x^2 > 1$, o sigui $2x^2 - x - 1 > 0$. Deduïm[8] que la primera condició és equivalent a $\left(x > \frac{1}{2}\right)$ i la segona, a $\left(x < -\frac{1}{2}\right)$. En definitiva:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X \in \{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}\right) &= \mathrm{P}\left(\left\{X < -\frac{1}{2}\right\}\right) + \mathrm{P}\left(\left\{X > \frac{1}{2}\right\}\right) \\ &= F\left(-\frac{1}{2}^-\right) + \left(1 - F\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{18} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{29}{36}. \end{aligned}$$

Amb això, ja hem acabat. ■

**Exercici 2.2.** *Llancem un dau cinc vegades. Sigui $X$ la suma dels valors obtinguts. Escriviu els esdeveniments $\{X = 4\}$, $\{X = 6\}$, $\{X = 30\}$ i $\{X \geq 29\}$.*

**Exercici 2.3.** *Llancem un dau dues vegades i obtenim dos valors $U_1, U_2$. Sigui $X$ la suma dels valors obtinguts i $Y$ la diferència $U_1 - U_2$. Descriviu el conjunt $\Omega$. Quines són les imatges per $X$ i $Y$ dels punts $\Omega$? Quan seran $X$ i $Y$ variables aleatòries? Estudieu què passa si agafem el valor absolut de la diferència.*

**Exercici 2.4.** *Una urna conté boles numerades de 1 a $m$. Sigui $X$ la variable aleatòria que indica el nombre més gran que s'obté en $n$ extraccions aleatòries amb substitució (independents). Estudieu la distribució d'$X$.*

*Demostració.* Si anomenem $X_i$ al resultat de la $i$-èsima extracció, $1 \leq i \leq n$. La funció de massa (pmf) ve determinada per la probabilitat $P(X_i = k)$, i aquesta és $\frac{1}{m}$ (la probabilitat d'obtenir la bola $k$ és, en efecte, d'$\frac{1}{m}$). Ara volem calcular la cdf de $X$, que ve determinada pel que passa a cada extracció:

$$F(t) = P(X_i \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1, \\ \frac{1}{m}, & \text{si } 1 \leq t < 2, \\ \dots, & \\ \frac{k}{m}, & \text{si } k \leq t < k+1, \ 1 \leq k < m, \\ \dots, & \\ 1, & \text{si } t \geq m. \end{cases}$$

[8] És a dir, resolvent les dues equacions de segon grau, i escollint la solució en funció de si $x > 0$ o bé $x < 0$.

Aquesta $F(t)$ és la mateixa per a qualsevol $X_i$, $1 \leq i \leq n$. Ara, volem obtenir el $k$ més gran de les $n$ extraccions; és a dir, $X = \max(X_1, \ldots, X_n)$. La cdf de $X$ queda definida per $F_X(t) = P(X \leq t)$; per tant, ens convé calcular la probabilitat de l'esdeveniment $\{X \leq t\}$:

$$\{X \leq t\} = \{\max(X_1, \ldots, X_n) \leq t\} = \{X_1 \leq t, X_2 \leq t, \ldots, X_n \leq t\}.$$

Per tant, $P(X \leq t) = P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t) \cdots P(X_n \leq t)$ per la hipòtesi d'independència. Podem escriure $F_X(t)$ en termes de $F(t)$ (la cdf és la mateixa per a qualsevol extracció, com ja hem comentat abans): $F_X(t) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq t) = (F(t))^n$. Per tant:

$$F_X(t) = P(X_i \leq t)^n = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1, \\ \frac{1}{m^n}, & \text{si } 1 \leq t < 2, \\ \ldots, & \\ \left(\frac{k}{m}\right)^n, & \text{si } k \leq t < k+1, \ 1 \leq k < m, \\ \ldots, & \\ 1, & \text{si } t \geq m. \end{cases}$$ ■

**Exercici 2.5.** *Dos daus perfectes es llancen per separat diferents vegades (s'entén, doncs, de manera independent). Sigui $X$ el nombre de llançaments necessaris fins a obtenir un 1 en el primer dau i sigui $Y$ el nombre de llançaments necessaris amb el segon dau per a obtenir un 5 o un 6.*

1. *Quina és la llei de $X$? I quina és la llei de $Y$?*
2. *Calculeu la llei de $Z = \max(X, Y)$.*
3. *Calculeu $P(X = Z)$.*

*Demostració.*

1. El nombre d'esdeveniments necessaris per a arribar a l'escenari desitjat és la definició de la distribució geomètrica; per tant, $X \sim \mathrm{Geom}(p)$ i $Y \sim \mathrm{Geom}(q)$, on $p = \frac{1}{6}$ i $q = \frac{1}{3}$ són les probabilitats corresponents.

   **Observació 2.6.** Recordem que si $X \sim G(p)$, $p \in (0, 1)$, tenim:

   1.1. $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$;
   1.2. $E(X) = \frac{1}{p}$;
   1.3. $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

   Per tant, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ i $P(Y = k) = q(1-q)^{k-1}$. És important veure que $X, Y$ són independents, ja que el llançament d'un dau no influencia al de l'altre. Per a calcular les lleis de $X, Y$, en calculem les respectives cdf:

   $$P(X \leq k) = \sum_{n=1}^{k} P(X = n) = \sum_{n=1}^{k} p(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=0}^{k-1} (1-p)^n = p \cdot \frac{1-(1-p)^k}{p} = 1-(1-p)^k.$$

   Anàlogament, $P(Y \leq k) = 1-(1-q)^k$.

2. La llei de $Z$ *surt* de $P(Z \le k)$. Aleshores, usant la hipòtesi d'independència:

$$P(Z \le k) = P(\max(X,Y) \le k) = P(X \le k, Y \le k) = P(X \le k)P(Y \le k)$$
$$= (1-(1-p)^k)(1-(1-q)^k).$$

3. No és tan complicat com sembla. Ens hem d'adonar que $\{Z = X\} = \{X \ge Y\}$; naturalment, $\{Z = X\} = \{\max(X,Y) = X\}$, i si $\max(X,Y) = X$ vol dir que $X \ge Y$. Ara:

$$\begin{aligned} P(X \ge Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \ge Y | Y = k) P(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \ge k) P(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - P(X < k)) P(Y = k) \overset{9}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k q (1-q)^{k-1} \\ &= q(1-p) \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)(1-q))^k = \frac{q(1-p)}{1-(1-p)(1-q)}. \end{aligned}$$

És important que quan apliquem la fórmula de probabilitats totals fem la intersecció amb una partició numerable. A la solució posa que $P(X > k) = (1-p)^{k-1}$, $k \ge 1$, que és simplement incorrecte. ■

**Exercici 2.7.** *Sigui* $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *i* $P(\{n\}) = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. *Prenem* $k \in \mathbb{N}$ *i sigui* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $X(n) = n \pmod k$. *Determineu la llei de probabilitat de* $X$.

*Demostració.* $X$ pren valors al conjunt $[0, k-1] \cap \mathbb{Z}$. Per calcular la pmf de $X$ calculem primer:

$$P(X = 0) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\{jk\}) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-jk} = \frac{2^{-k}}{1-2^{-k}}.$$

Per $1 \le i \le k-1$,

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(\{jk+i\}) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(jk+i)} = 2^{-i} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jk} = \frac{2^{-i}}{1-2^{-k}}.$$

Observem que la suma de probabilitats és 1:

$$\sum_{i=0}^{k-1} P(X = i) = \left( \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k} \right) \frac{1}{1-2^{-k}} = \left( \frac{\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} \right) \frac{1}{1-2^{-k}} = 1.$$ ■

**Exercici 2.8.** *Considereu la funció definida per:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ ax^2 + b, & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 1 - e^{-x}, & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

[9] Es pot considerar $P(X \le k) = P(X < k)$ sense saber si la funció de distribució és absolutament contínua? De l'apartat anterior, $1 - P(X \le k) = (1-p)^k$.

1. *Determineu les condicions que han de satisfer $a, b$ per a què $F_X$ sigui una funció de distribució.*
2. *Calculeu $a, b$ tals que $F_X$ sigui contínua.*

*A partir d'ara considerem una variable aleatòria $X$ amb funció de distribució $F_X$ amb aquests valors d'$a, b$.*

3. *Calculeu $P(X \geq 1)$ i $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$.*
4. *Trobeu la funció de distribució de $Y = X^2$.*

*Demostració.*

1. Perquè sigui una funció de distribució cal que $\lim_{x\to-\infty} F_X = 0$ i $\lim_{x\to+\infty} F_X = 1$. Al punt 0, $\lim_{x\to 0^-} F_X = 0$, $\lim_{x\to 0^+} F_X = b$. Ha de ser doncs $0 \leq b$. Com que $b = F_X(0)$ és una probabilitat, ha de ser $0 \leq b \leq 1$. Ara ens centrem en la monotonia i creixement. En les branques esquerra i dreta, és clar que la funció no decreix, ens queda la del mig.
   - En $x = 0$ ja hem vist que $F_X(0) = b$; per tant, en la resta de l'interval $[0, 1)$, $(0, 1)$, $F_X' > 0 \iff 2ax > 0 \iff a > 0$.
   - En $x = 1$ s'ha de produir, també, que $\lim_{x\to 1^+} \leq \lim_{x\to 1^-}$ (i no necessàriament la igualtat, ja que de moment no requerim que sigui absolutament contínua). Així doncs, $0 \leq a + b \leq 1 - e^{-1}$.

   Obtenim, finalment, aquestes tres condicions per a $a$ i per a $b$.
2. Ara, si volem que $F$ sigui contínua, les desigualtats de l'apartat anterior esdevenen igualtats, i tenim $b = 0$ i $a = 1 - e^{-1}$.
3. $P(X \geq 1)$ és $1 - F_X(1) = e^{-1}$, i $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$ és el mateix que $P(X \leq \frac{1}{2})$, ja que $F_X$ val 0 per a tot valor $x \in (-\infty, 0)$. Per tant, $F_X(\frac{1}{2}) = (1 - e^{-1})\frac{1}{4} = 0.15803$.
4. Finalment, $F_Y(y)$ es pot trobar a partir de la definició: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$. Ara,

$$P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq |X| \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 0, \\ ay + b, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 - e^{-\sqrt{y}}, & \text{si } y \geq 1. \end{cases}$$

   I, amb això, ja hem acabat. ■

**Exercici 2.9.** *Una màquina de fabricar ampolles té una probabilitat de* 0,1 *de produir una ampolla defectuosa. Suposem que cada dia fabrica $n = 10$ ampolles, que s'inspeccionen, posant a part les detectades com a defectuoses. Les ampolles bones es classifiquen correctament, però una ampolla defectuosa es classifica malament amb probabilitat* 0,1. *Sigui $X$ el nombre d'ampolles classificades com a defectuoses.*

1. *Obteniu una expressió per a $P(\{X = k\})$, per a $k \in [0, n] \cap \mathbb{N}$.*
2. *Calculeu $P(\{X = 3\})$ i $P(\{X > 3\})$.*

*Demostració.* Posem $D = \{\text{defectuosa}\}$, $P(D) = 0.1$, $B = \{\text{ampolla bona}\}$, $CD = \{\text{classificada com a defectuosa}\}$, $CB = \{\text{classificada com a bona}\}$, $CD = CB^c$, $P(CD|B) = 0$, $P(CD^c|D) = 0.1$ i

$P(CD|D) = 0.9$. Posem una expressió per a $\xi_i$ (classificació de la $i$-èsima ampolla):

$$\xi_i = \mathbb{1}_{CD} = \begin{cases} 1, & \text{si es classifica com a defectuosa;} \\ 0, & \text{si es classifica com a no defectuosa;} \end{cases}$$

Apliquem probabilitats totals:

$$P(CD) = P(CD \cap B) + P(CD \cap D) = P(CD|B)P(B) + P(CD|D)P(D) = 0 + 0.9 \cdot 0.1 = 0.09.$$

Aquesta $\xi_i = \mathbb{1}_{CD}$ segueix una llei de Bernoulli de paràmetre 0.09. Ara sí, $X = \sum_i \xi_i = \xi_1 + \cdots + \xi_{10}$; per tant, $X \sim \text{Binom}(10, 0.09)$ i

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot 0.09^k \cdot 0.91^{10-k}.$$

■

**Exercici 2.10.** *Sigui $X$ una variable aleatòria amb funció de distribució:*

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2}, & \textit{si } x < -1, \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}, & \textit{si } -1 \le x < 1, \\ 1, & \textit{si } 1 \le x. \end{cases}$$

1. *Calculeu $P(|X-2| + |X| \le 4)$.*
2. *Trobeu la funció de distribució de $Y = X^2$.*

*Demostració.* Posem $g(X) = |X-2| + |X| - 4$, de manera que volem $P(g(X) \le 0)$. Hem de dibuixar $g(X)$:

$$g(X) = \begin{cases} -2x - 2, & \text{si } x < 0, \\ -2, & \text{si } 0 \le x < 2, \\ 2x - 6, & \text{si } x \ge 2. \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - 6 \le 0,\ x \ge 2 \implies x \in [2, 3] \\ -2 \le 0,\ 0 \le x < 2 \implies x \in [0, 2) \\ -2x - 2 \le 0,\ x < 0 \implies x \in [-1, 0) \end{cases}$$

Veiem que els valors pels quals $g(X) \le 0$ estan compresos en $x \in [-1, 3]$, i obtenim el conjunt $\{-1 \le X \le 3\}$; així, volem $P(-1 \le X \le 3) = F(3) - F(-1^-) = F(3) - F(-1)$, que és $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Hem de trobar $F_Y(y) = P(Y \le y)$.

$$P(X^2 \le y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 0, \\ P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}), & \text{si } y \ge 0. \end{cases}$$

Sabent que $P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}^-)$:

$$P(X^2 \le y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 0, \\ \frac{1}{4}\left(\sqrt{y} - (-\sqrt{y})\right) = \frac{1}{2}\sqrt{y}, & \text{si } 0 \le y < 1, \\ 1 - \frac{1}{2y}, & \text{si } y \ge 1. \end{cases}$$

Per tant, $F_Y(y)$ queda definida per $P(X^2 \le y)$ com acabem de veure. ■

**Exercici 2.11** (Parcial tardor 2023, exercici 1). *Sigui $X$ una variable aleatòria amb funció de distribució:*

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4x^2} & \text{si } x < -2, \\ ax + b, & \text{si } -2 \leq x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x. \end{cases}$$

1. *Doneu els valors $a, b$ pels quals $X$ és absolutament contínua.*
2. *A partir d'ara considereu aquests valors d'$a$ i $b$.*
   2.1. *Calculeu $P(-4 < X < -1 | X > -2)$.*
   2.2. *Considerem la variable aleatòria $Z = \min(-1, X)$. Trobeu la seva funció de distribució. És absolutament contínua? Calculeu $c \in \mathbb{R}$ tal que $P(Z = c) > 0$.*
   2.3. *Trobeu la llei de la variable aleatòria $Y = X^2$.*

*Demostració.*

1. Perquè sigui absolutament contínua ens cal que la funció de distribució sigui totalment contínua en el seu domini. Com clarament ho és en totes les branques, cal comprovar que ho sigui en els punts de contacte; això és, els límits laterals existeixen, coincideixen i ho fan també amb la imatge en el punt.

   $x = 0$ El cas més senzill, calculísticament com a mínim. $\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} = F(0)$. En efecte, necessitem que $1 = a \cdot 0 + b = b$. Per tant, $b = 1$.

   $x = -2$ Un altre cop, $\lim_{x \to -2^-} F(x) = \lim_{x \to -2^+} = F(-2)$; aleshores, necessitem $\frac{1}{16} = b - 2a = 1 - 2a$. Per tant, $a = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{32}$.

   No hem acabat, ja que hem de comprovar que sigui, en efecte, una funció de distribució.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4x^2} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1.$$

   Per últim, és creixent perquè, per exemple, la derivada[10] és $\geq 0$ en tot el domini. També podríem argumentar *a pèl*, demostrant que és no decreixent directament.

2. Tenim tres apartats.

   2.1. Notem que $P(-4 < X < -1 | X > -2) = \frac{P(\{-4<X<-1\} \cap \{X>-2\}}{P(X>-2)} = \frac{P(-2<X<-1)}{P(X>-2)}$. Ara, ja sabem que la funció de distribució queda definida per $F(k) = P(X \leq k)$, i aplicant les seves propietats trobem que

$$P(-2 < X < -1) = F(-1^-) - F(-2) = b - a - (b - 2a) = a = \frac{15}{32}$$
$$P(X > -2) = 1 - P(X \leq -2) = 1 - F(-2) = 1 - (b - 2a) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$
$$\Longrightarrow \frac{P(-2 < X < -1)}{P(X > -2)} = \frac{1}{2}.$$

[10] Excepte en els dos punts que no està definida, els $x = -2, 0$, ja que les derivades laterals no coincideixen.

*2.2.* Si definim $Z = \min(-1, X)$ tenim que $Z$ pren valors a $(-\infty, -1]$. La funció de distribució de $Z$ és $F(t) = P(Z \leq t)$, que és $P(\{\min(-1, X\} \leq t)$.

$$\begin{aligned} P(\{\min(-1, X) \leq t\}) &= P(\{X \leq t\} \cup \{-1 \leq t\}) \\ &= P(\{X \leq t\}) + P(\{-1 \leq t\}) - P(\{X, -1 \leq t\}) \end{aligned}$$

Podem fer el Grassmann, però no és necessari: per a $P(-1 \leq t)$ hem usat que si $t < -1$, $\{-1 \leq t\} = \emptyset$ ($P(-1 \leq t) = 0$); si $t \geq -1$, en canvi, $\{-1 \leq t\} = \Omega$ ($P(-1 \leq t) = 1$). Per tant, sense embolicar-nos molt:

$$P(\{X \leq t\} \cup \{-1 \leq t\}) = \begin{cases} P(\{X \leq t\} \cup \emptyset) = P(\{X \leq t\}) & \text{si } t < -1, \\ P(\{X \leq t\} \cup \Omega) = P(\Omega) = 1 & \text{si } t \geq -1. \end{cases}$$

Ens queda classificar segons casos:

$$F_Z(t) = \begin{cases} \frac{1}{4t^2}, & \text{si } t < -2, \\ \frac{15}{32}t + 1, & \text{si } -2 \leq t < -1, \\ 1, & \text{si } t \geq -1. \end{cases}$$

Ara ens demanen determinar si aquesta funció de distribució és absolutament contínua. Com $X$ ho era, ho serà en el $t = -2$, però no necessàriament en $t = -1$. I, en efecte, tenim que $F_Z$ no és contínua en el $t = -1$: $\lim_{t \to -1^-} F_Z(t) = 1 - \frac{15}{32} = \frac{17}{32} \neq \lim_{t \to -1^+} F_Z(t) = 1$. Per tant, $Z$ no és absolutament contínua.

*2.3.* Per trobar la llei de $Y$ calcularem la funció de distribució. És clar que si $y < 0$, aleshores $P(Y \leq y) = 0$. En canvi, si $y \geq 0$:

$$P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}^-).$$

Aleshores, podem construir $F_Y$ dividint en els casos pertinents, tenint en compte $P(Y \leq y)$.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 0, \\ F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}^-) = 1 - (a\sqrt{y} + b) = -a\sqrt{y}, & \text{si } 0 \leq y < 4, \\ F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}^-) = 1 - \frac{1}{4y}, & \text{si } y \geq 4, \end{cases}$$

És funció de distribució clarament, ja que $\lim_{y \to -\infty} F_Y = 0$ i $\lim_{y \to +\infty} F_Y = 1$, i és contínua per la dreta. De fet, és contínua a tot arreu i és també absolutament contínua. Per tant, té una densitat associada, la derivada de la funció de distribució:

$$f_Y(y) = \frac{15}{64\sqrt{y}} \cdot \mathbb{1}_{(0,4)}(y) + \frac{1}{4y^2}\mathbb{1}_{(4,+\infty)}(y). \qquad \blacksquare$$

**Exercici 2.12.** *Sigui $X$ una variable aleatòria amb llei* Cauchy$(0, 1)$, *és a dir, amb pdf $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.*

*1. Comproveu que $f$ és una funció de densitat de probabilitat.*

2. *Calculeu la seva cdf.*
3. *Demostreu que no existeix l'esperança de $X$.*
4. *Trobeu la llei de $Y = \frac{1}{X}$, que serà justament* Cauchy(0, 1).

*Demostració.*

1. Per demostrar la condició de pdf hem de veure que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. En efecte:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x)\right]_{a=-\infty}^{b=+\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

2. Se segueix una mica la idea de l'apartat anterior, ja que hem de trobar $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

$$\begin{aligned} F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt &= \frac{1}{\pi}\left[\arctan(t)\right]_{a=-\infty}^{b=x} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

3. L'esperança es calcula a partir de $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,dx \xrightarrow[dt=2x\,dx]{t=1+x^2} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\log(t)\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} \longrightarrow +\infty.$$

4. Normalment, trobem la llei d'una nova variable $Y$ a partir de la llei d'una variable coneguda $X$. En aquest cas ho podríem fer també, però com se'ns dona la densitat usarem un canvi de variable per a pdfs.

$$\begin{aligned} g :\ \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ x &\longmapsto g(x) := y = \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

La fórmula ens diu que $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1})'(y)|$, i d'aquí obtindríem la pdf de $Y$ (i podríem obtenir la cdf de $Y$ sense cap problema i veure que coincideix amb la de $X$):

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1})'(y)| = \frac{1}{\pi(1+\frac{1}{y^2})}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)},\quad y \in \mathbb{R}\setminus 0.$$

que és la mateixa que la de $X$. Per tant, $Y \sim$ Cauchy(0, 1). ■

## 3 Esperança i independència estocàstica

**Exercici 3.1.** *Sigui $X \sim N(0,1)$ amb densitat de probabilitat $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Calculeu $E(X^2)$ directament i també calculant $E(Y)$ fent servir la pdf de $Y = X^2$.*
2. *Trobeu la pdf de $Y = |X|$, i calculeu les seves mitjana i variància.*

*Demostració.* La pdf de $X \sim N(0,1)$ és $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Podem calcular directament $E(X^2)$, que és $\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx$. Fem els càlculs:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \begin{cases} u = x \implies du = dx, \\ dv = xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \implies v = e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{cases}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \left[ -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0 + \sqrt{2\pi}) = 1.$$

Ara hem de fer el mateix però fent servir la pdf de $Y = X^2$; és a dir, construïm una aplicació $g(x)$ que envia $x \longmapsto x^2$, de manera que la seva inversa queda dividida en $g_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$ i $g_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ (és a dir, restringim $g$ a $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$, respectivament).

$$g^{-1}(y) = \sqrt{y} = \begin{cases} g_1^{-1}(y) = \sqrt{y} \implies (g_1^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \\ g_2^{-1}(y) = -\sqrt{y} \implies (g_2^{-1})'(y) = \frac{-1}{2\sqrt{y}} \end{cases}$$

Com que $f(g_1^{-1}(y)) = f(g_2^{-1}(y))$ i $|(g_1^{-1})'(y)| = |(g_2^{-1})'(y)|$, tenim que $f_Y(y)$ té dos sumands iguals, i queda:

$$f_Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}y}\,dy, \ \ y > 0.$$

D'aquí podem calcular l'esperança, a partir de la densitat, com de costum:

$$\int_0^{+\infty} y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}y}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{-\frac{1}{2}y}\,dy\,.$$

2. Ens està demanant moments centrats d'ordre petit, però no tenim un mètode de resolució ràpid: hem de tornar a fer els càlculs a pèl. Tenim $g(x) = |x|$ de manera que $g_1 : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ i $g_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tals que $g_1 : x \longmapsto -x$ i $g_2 : x \longmapsto x$. Calculem les inverses: $g_1^{-1} : y \longmapsto -y$ i $g_2^{-1} : y \longmapsto y$. Per tant, $(g_1^{-1})'(y) = -1$ i $(g_2^{-1})'(y) = 1$. Així doncs, $f_Y(y) = f(g_1^{-1}(y)) \cdot |(g_1^{-1})'(y)| + f(g_2^{-1}(y)) \cdot |(g_2^{-1})'(y)|$:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \left( e^{-\frac{1}{2}(-y)^2} \cdot 1 + e^{-\frac{1}{2}y^2} \cdot 1 \right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}, \ \ y > 0.$$

Per tant, ja tenim la pdf i la seva variància, recordem, es calcula fent: $E(Y^2)^2 - (E(Y))^2$. Per tant, necessitem $E(Y^2)$, que podem trobar directament amb $\int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y)\,dy = \int_0^{+\infty} y^2 f_Y(y)\,dy$:

$$\int_0^{+\infty} y^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left( \left[ -ye^{-\frac{1}{2}y^2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy \right) = 1.$$

Per tant, $\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 1 - \frac{2}{\pi}$. ■

**Exercici 3.2.** *Sigui $X$ una variable aleatòria amb segon moment finit (v.a. de segon ordre). Anomenem $\mu = E(X)$ i $m$ la mediana de $X$.*

1. *Demostreu que la funció $g(t) = E((X - t)^2)$ amb $t \in \mathbb{R}$ té un mínim per $t = \mu$.*
2. *Demostreu que la funció $h(t) = E(|X - t|)$ té un mínim per $t = m$.*

*Demostració.*

1. Si recordem que $\mathrm{Var}(X) = E((X-\mu)^2)$, estem dient que $g(\mu) = \mathrm{Var}(X)$ i volem veure que, en efecte, $\mathrm{Var}(X)$ és un mínim de $g$. Fem el cas absolutament continu amb pdf $f_X$. En l'expressió, que està ben definida perquè $X$ té segon moment finit:
$$\begin{aligned} g(t) = \int_{\mathbb{R}} (x-t)^2 f_X(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx - 2t\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx + t^2 \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx \\ &= E(X^2) - 2tE(X) + t^2. \end{aligned}$$
Derivant aquesta expressió sobre $t$, obtenim: $g'(t) = -2E(X) + 2t$. Igualant a 0, obtenim $t = \mu = E(X)$, i la segona derivada $g''(t) = 2 > 0$ ens indica que és, efectivament, un mínim.
2. Prenem $h(t) = E(|X-t|)$ i comencem a calcular:
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |x-t| f_X(x)\,dx &= \int_t^{\infty} (x-t) f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{t} (t-x) f_X(x)\,dx \\ &= t\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{t} x f_X(x)\,dx + \int_t^{+\infty} x f_X(x)\,dx - t\int_t^{\infty} f_X(x)\,dx \end{aligned}$$
Per tant, $h(t)$ queda de la següent manera en termes de $F$:
$$\begin{aligned} h(t) &= t\cdot F_X(t) - t(1-F_X(t)) + E(X) - 2\int_a^b x f_X(x)\,dx \\ h'(t) &= F_X(t) + t f_X(t) - (1-F_X(t)) + t f_X(t) - 2t f_X(t) = 0 \\ &\iff 2F_X(t) - 1 = 0 \iff F_X(t) = \frac{1}{2} \\ h''(t) &= 2f_X(t) \geq 0 \end{aligned}$$
I amb això ja hem acabat, ja que $m$ és, per definició, un $t$ tal que $F_X(t) = \frac{1}{2}$. ∎

**Exercici 3.3.** *Siguin $X, Y$ dues variables aleatòries i definim $X \wedge Y = \min(X,Y)$ i $X \vee Y = \max(X,Y)$. Suposant que existeixen $E(X)$ i $E(Y)$ demostreu que:*
$$E(X \vee Y) = E(X) + E(Y) - E(X \wedge Y).$$
*Aquesta igualtat és anàloga a la fórmula de probabilitat $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.*

*Demostració.* Com ens diu la indicació, partim de la igualtat $X + Y = (X \vee Y) + (X \wedge Y)$ i apliquem esperances als dos costats de la igualtat:
$$X + Y = (X \vee Y) + (X \wedge Y) \iff E(X+Y) = E(\max(X,Y) + \min(X,Y)).$$
En primer lloc, cal veure que l'existència de $E(X)$ i $E(Y)$ impliquen les de $E(X \vee Y)$ i $E(X \wedge Y)$. Això es pot veure a partir de les identitats següents, que es poden comprovar expandint el valor absolut segons els casos $x \geq y$, $x < y$:
$$\begin{aligned} X \wedge Y = \min(X,Y) = \frac{1}{2}((x+y) - |x-y|), \\ X \vee Y = \max(X,Y) = \frac{1}{2}((x+y) + |x-y|), \end{aligned}$$

Prenent valors absoluts:

$$|X \wedge Y| = |\min(X,Y)| = \frac{1}{2}|(x+y)-|x-y|| \leq \frac{1}{2}(|x|+|y|+|x-y|) \leq \frac{1}{2}(|x|+|y|+|x|+|y|) = |x|+|y|.$$

I tenim l'acotació $E(|\max(X,Y)|) \leq E(|X|) + E(|Y|)$, que assegura l'existència de $E(|\max(X,Y)|)$ suposant la de $E(X), E(Y)$. Anàlogament, es veu per a $E(\min(X,Y))$. ■

**Exercici 3.4.** *Considerem el vector aleatori discret amb pmf:*

$$P((X,Y) = (n,n)) = \frac{1}{2^n \cdot 3},$$
$$P((X,Y) = (n,3n)) = \frac{2}{2^n \cdot 3}.$$

*per tot $n \geq 1$. Comproveu que efectivament és una pmf. Determineu:*

1. *Les pmfs de $X, Y$. Són independents?*
2. *La pmf de $Z = \frac{Y}{X}$ condicionada per $\{X = n\}$.*
3. *La pmf de $Y - X$.*

*Demostració.* És una pmf perquè:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P((X,Y) = (n,n)) + \sum_{i=1}^{\infty} P((X,Y) = (n,3n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot 3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n \cdot 3} = 1.$$

1. Per a $X$, $n \geq 1$:

$$P(X = n) = \sum_k P(X = n, Y = k) = P(X = n, Y = n) + P(X = n, Y = 3n)$$
$$= \frac{1}{2^n \cdot 3} + \frac{2}{2^n \cdot 3} = \frac{1}{2^n}.$$

Per a $Y$, $n \geq 1$:

$$P(Y = n) = \begin{cases} P(X = n, Y = n) + P\left(X = \frac{n}{3}, Y = n\right) = \frac{1}{2^n \cdot 3} + \frac{2}{2^{\frac{n}{3}} \cdot 3}, & \text{si } n = 3m, \\ P(X = n, Y = n) = \frac{1}{2^n \cdot 3}, & \text{si } n \neq 3m, \end{cases} \tag{3.1}$$

Perquè siguin independents s'ha de veure que $P(X = k, Y = j) = P(X = k)P(Y = j)$, que és evident que falla, per exemple per als casos $P(X = n, Y = 3n + 1)$, on tindríem $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$ i $P(Y = 3n + 1) = 0$.

2. Ara fem per a $Z = \frac{Y}{X}$, condicionada per $X = n$. Si mirem (3.1), veiem que $Y$ està determinada per si $n$ és múltiple de 3 (**??????**); necessitem que per a $P(Y = k, X = n)$ aquesta $k$ sigui o bé $n$ o bé $3n$. Per tant:

$$P(Y = n | X = n) = \frac{P(Y = n, X = n)}{P(X = n)} = \frac{\frac{1}{3 \cdot 2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{3},$$
$$P(Y = 3n | X = n) = \frac{P(Y = 3n, X = n)}{P(X = n)} = \frac{\frac{2}{3 \cdot 2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{2}{3}.$$

Per tant, tenim dos possibles valors per a $Z$: $\frac{3n}{n} = 3$ o bé $\frac{n}{n} = 1$. És a dir, $P(Z = 1|X = n) = \frac{1}{3}$ i $P(Z = 3|X = n) = \frac{2}{3}$. De fet, com $P(Z = k) = \sum_r P(Z = k|X = r)$, i per a tot $r \neq n$ i $k \neq 1, 3$ tenim una probabilitat de zero, obtenim $P(Z = 1) = \frac{1}{3}$ i $P(Z = 3) = \frac{2}{3}$.

3. Ja hem vist que $P(Y = k, X = n)$ és no nul·la per a les parelles $n = k$ i $k = 3n$. Per tant, si definim $Z = Y - X$, tenim que aquesta diferència pren els valors $n - n$ i $3n - n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$; és a dir, $\{0\} \cup \{2, 4, 6, \dots\}$. Llavors, ho dividim en dos casos:
   - $Y - X = 0$. Aquí tenim:
   $$P(Y - X = 0) = \sum_{j=1}^{\infty} P(Y = j, X = j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$
   - $Y - X = 2k$. En aquest cas,
   $$P(Y - X = 2k) = P(Y = 3k, X = k) = \frac{2}{3 \cdot 2^k}.$$

I amb això ja estem. ■

**Exercici 3.5.** *Sigui $(X, Y)$ un vector aleatori discret amb pmf conjunta: $P(X = i, Y = j) = c(\frac{i}{2} + \frac{j}{3})$, $i \in \{0, 1, 2\}$ i $j \in \{0, 1, 2, 3\}$.*

1. *Trobeu el valor de la constant $c$. Són independents $X$ i $Y$?*
2. *Calculeu $E(|X - Y| \cdot (X - 2))$.*
3. *Trobeu la pmf de $T = \max(X, Y)$.*
4. *Trobeu la pmf de $Y$ condicionada a l'esdeveniment $\{T = 1\}$.*

*Demostració.*

1. Perquè siguin independents s'ha de produir que $P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$. En aquest sentit, calcularem $P(X = i)$ i $P(Y = j)$, ho haurem de fer *a pèl*. Anem a fer una taula de valors:

| | $Y = 0$ | $Y = 1$ | $Y = 2$ | $Y = 3$ |
|---|---|---|---|---|
| $X = 0$ | $0$ | $\frac{c}{3}$ | $\frac{2c}{3}$ | $c$ |
| $X = 1$ | $\frac{c}{2}$ | $\frac{5c}{6}$ | $\frac{7c}{6}$ | $\frac{3c}{2}$ |
| $X = 2$ | $c$ | $\frac{4c}{3}$ | $\frac{5c}{3}$ | $2c$ |

Taula 1: Taula de valors, $X$ i $Y$.

Resulta que la suma de *tots* els termes ens ha de donar 1, de manera que $12c = 1$ i $c = \frac{1}{12}$. La matriu de valors de la pmf és la següent:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{24} & \frac{5}{72} & \frac{7}{72} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Les pmf marginals surten sumant al llarg de les files i al llarg de les columnes.

$$f_X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{36} & \frac{5}{72} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{7}{72} & \frac{5}{36} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}(1, 2, 3),$$
$$f_Y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{5}{72} & \frac{7}{72} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{24}(3, 5, 7, 9)$$

2. La funció $g(x, y) = |X - Y|(X - 2)$ té una taula de valors que diu:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'esperança de $g(X, Y)$ és el producte de Hadamard (element a element) de la matriu de l'apartat anterior amb la matriu $G$, fent la suma de tots els termes.

3. La funció $Z = \max\{X, Y\}$ té taula de valors:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Posem cada esdeveniment $\{Z = k\}$ en funció dels $\{X = i, Y = j\}$:

$$\begin{aligned} \{Z = 0\} &= \{X = 0, Y = 0\} \\ \{Z = 1\} &= \{X = 0, Y = 1\} \cup \{X = 1, Y = 0\} \cup \{X = 1, Y = 1\}, \\ \{Z = 2\} &= \{X = 0, Y = 2\} \cup \{X = 1, Y = 2\} \cup \{X = 2, Y = 2\} \\ &\quad \cup \{X = 2, Y = 1\} \cup \{X = 2, Y = 0\}, \\ \{Z = 3\} &= \{X = 0, Y = 3\} \cup \{X = 1, Y = 3\} \cup \{X = 2, Y = 3\}. \end{aligned}$$

Ara, la pmf de $Z$ ve determinada per la probabilitat dels valors que acabem de calcular:

$$\begin{aligned} P(\{Z = 0\}) &= P(\{X = 0, Y = 0\}) = \frac{0}{72}, \\ P(\{Z = 1\}) &= P(\{X = 0, Y = 1\}) + P(\{X = 1, Y = 0\}) + P(\{X = 1, Y = 1\}) \\ &= \frac{3 + 2 + 5}{72} = \frac{10}{72}, \\ P(\{Z = 2\}) &= P(\{X = 0, Y = 2\}) + P(\{X = 1, Y = 2\}) + P(\{X = 2, Y = 2\}) \\ &\quad + P(\{X = 1, Y = 2\}) + P(\{X = 2, Y = 2\}) + P(\{X = 2, Y = 1\}) \\ &\quad + P(\{X = 2, Y = 0\}) = \frac{4 + 7 + 10 + 8 + 6}{72} = \frac{35}{72}, \\ P(\{Z = 3\}) &= P(\{X = 0, Y = 3\}) + P(\{X = 1, Y = 3\}) + P(\{X = 2, Y = 3\}) \\ &= \frac{6 + 9 + 12}{72} = \frac{27}{72}, \end{aligned}$$

4. Per calcular la pmf de $Y$ condicionada a l'esdeveniment $\{Z = 1\}$ mirem primer les interseccions de l'esdeveniment $\{Z = 1\}$ amb els $\{Y = j\}$:

$$\{Z = 1\} = \{X = 0, Y = 1\} \cup \{X = 1, Y = 0\} \cup \{X = 1, Y = 1\},$$

de manera que evidentment els esdeveniments $\{Z = 1, Y = 0\}$ i $\{Z = 1, Y = 1\}$ són $\{X = 1, Y = 0\}$ i $\{X = 0, Y = 1\} \cup \{X = 1, Y = 1\}$, respectivament. Aleshores, les probabilitats de les interseccions són:

$$P(\{Z = 1, X = 0\}) = P(\{X = 1, Y = 0\}) = \frac{2}{72}.$$
$$P(\{Z = 1, Y = 1\}) = P(\{X = 0, Y = 1\}) + P(\{X = 1, Y = 1\}) = \frac{8}{72}.$$

Finalment, ara sí, podem calcular les probabilitats condicionades:

$$P(Y = 0|Z = 1) = \frac{P(\{Z = 1, Y = 0\})}{P(\{Z = 1\})} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},$$
$$P(Y = 1|Z = 1) = \frac{P(\{Z = 1, Y = 1\})}{P(\{Z = 1\})} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

I amb això ja hem acabat. ∎

**Exercici 3.6.** *Siguin $X, Y$ dues variables aleatòries independents amb distribució geomètrica de paràmetres $p_1$, $p_2$, respectivament. Calculeu $P(X = 2Y)$.*

*Demostració.* Tant $X$ com $Y$ segueixen una distribució geomètrica, per tant, $X \sim \mathrm{Geom}(p_1)$ i $Y \sim \mathrm{Geom}(p_2)$. Com que $X, Y$ són independents per hipòtesi tenim el següent:

$$P(X = 2Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = 2k, Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = 2k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p_1(1 - p_1)^{2k-1} p_2(1 - p_2)^{k-1}$$
$$= \frac{p_1 p_2}{(1 - p_1)(1 - p_2)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p_1)^{2k}(1 - p_2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_1 p_2}{(1 - p_1)(1 - p_2)} \cdot ((1 - p_1)^2(1 - p_2))^k.$$

Definim $a = \frac{p_1 p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}$ i $r = (1 - p_1)^2(1 - p_2)$. Ara tenim la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} ar^k$[II], la sèrie geomètrica de raó $(1 - p_1)^2(1 - p_2) < 1$. Amb una mica d'astúcia per començar des de $k = 0$, tenim que aquesta sèrie convergeix a $\frac{ar}{1-r}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^k = r \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = r \cdot \frac{a}{1 - r} = \frac{ar}{1 - r}.$$

Per tant,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_1 p_2}{(1 - p_1)(1 - p_2)} \cdot ((1 - p_1)^2(1 - p_2))^k = \frac{\frac{p_1 p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}(1 - p_1)^2(1 - p_2)}{1 - (1 - p_1)^2(1 - p_2)} = \frac{p_1 p_2(1 - p_1)}{1 - (1 - p_1)^2(1 - p_2)}.$$

I amb això ja hem acabat. Com a comentari, si $(X, Y)$ són independents, podem afirmar que la pmf conjunta és producte de les dues marginals; és a dir:

$$p_{(X,Y)}(x, y) = (1 - p_1)^{x-1}(1 - p_2)^{y-1} p_1 p_2.$$ ∎

[II] Val la pena notar que comencem per $k = 1$ a causa de la mateixa definició de la llei geomètrica, ja que per a la probabilitat $P(X = k)$, és $p(1 - p)^{k-1}$, definida per als $k \geq 1$.

**Exercici 3.7.** *Siguin* $X_1, \dots, X_n$ *variables aleatòries independents de Poisson de paràmetres* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$*, respectivament. Demostreu que* $X_1 + \cdots + X_n$ *segueix una distribució* $\operatorname{Poiss}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$.

*Demostració.* És suficient demostrar-ho per a $n = 2$, ja que per a la resta de casos es pot deduir per inducció. Vegem, doncs, que $X = X_1 + X_2 \sim \operatorname{Poiss}(\alpha_1 + \alpha_2)$. Donat $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{j=0}^{k} P(X_1 + X_2 = k, X_1 = j) = \sum_{j=0}^{k} P(X_1 + X_2 = k | X_1 = j) P(X_1 = j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} P(X_2 = k - j) \cdot P(X_1 = j) = \sum_{j=0}^{k} e^{-\alpha_2} \frac{\alpha_2^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\alpha_1} \frac{\alpha_1^j}{j!} \\ &= \frac{1}{k!} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \alpha_1^j \alpha_2^{k-j} = e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!}. \end{aligned}$$

En l'última igualtat hem usat $(\alpha_1 + \alpha_2)^k = \alpha^k$, donada pel binomi de Newton. ■

**Exercici 3.8.** *Sigui* $X$ *una variable aleatòria tal que* $P(X = -2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$ *i* $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ *i* $Y$ *una variable aleatòria independent de* $X$ *tal que* $P(Y = -1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$.

1. *Determineu les pmf de les variables* $S = \mathbb{1}_{\{|X+Y|=3\}}$ *i* $T = \mathbb{1}_{\{X-Y=1\}}$.
2. *Calculeu* $P(X = 2 | S = 1)$.
3. *Determineu la pmf conjunta del vector* $(S, T)$ *i calculeu* $\operatorname{Cov}(S, T)$. *Són independents* $S$ *i* $T$*?*

*Demostració.* Els vectors de valors de $X$ i $Y$ són els valors que poden prendre aquestes variables aleatòries. Clarament, aquests són $x \in (-2, 0, 2)$ i $y \in (-1, 1)$. Com que $X, Y$ són independents, tenim que $P(X = i, Y = j) = P(X = i | Y = j) P(Y = j) = P(X = i) P(Y = j)$. Podem fer una taula de valors, on els $(i, j)$ seran iguals al producte de les marginals (perquè $X, Y$ són independents).

| | | Valors $y$ | | Totals |
|---|---|---|---|---|
| | | $-1$ | $1$ | |
| Valors $x$ | $-2$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |
| | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{2}{4}$ |
| | $2$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |
| Totals | | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |

Taula 2: Taula de valors per a $X$ i $Y$.

Comencem. Definim $g(x, y) = |x + y| - 3$ i $h(x, y) = x - y + 1$, de manera que els conjunts a trobar són $C_1 = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ i $C_2 = \{(x, y) \mid h(x, y) = 0\}$. Naturalment:

$$g(x, y) = |x + y| - 3 = \begin{cases} x + y - 3, & \text{si } x + y \geq 0, \\ -(x + y + 3), & \text{si } x + y < 0, \end{cases} \implies$$

Dibuixant les taules corresponents als valors discrets:

$$\begin{array}{c|cc} x+y & -1 & 1 \\ \hline -2 & -3 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array} \implies \begin{array}{c|cc} |x+y|-3 & -1 & 1 \\ \hline -2 & 0 & -2 \\ \hline 0 & -2 & -2 \\ \hline 2 & -2 & 0 \end{array} \implies g(x,y)=0 \iff (x,y)\in C_1=\{(-2,-1),(2,1)\}$$

Anàlogament per a $h(x,y)=x-y-1$:

$$\begin{array}{c|cc} x-y-1 & -1 & 1 \\ \hline -2 & -2 & -4 \\ \hline 0 & 0 & -2 \\ \hline 2 & 2 & 0 \end{array} \implies h(x,y)=0 \iff (x,y)\in C_2=\{(2,1),(0,-1)\}$$

Per tant, $\{S=1\}=\{X=-2,Y=-1\}\cup\{X=2,Y=1\}$ i $\{T=1\}=\{X=2,Y=1\}\cup\{X=0,Y=-1\}$. Les pmfs de les variables $S$ i $T$ són la pmf marginal de $S$ i la pmf marginal de $T$ extretes directament de la pmf conjunta. Així doncs, hem de calcular la pmf conjunta de $T$ i $S$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} S\backslash T & 0 & 1 \\ \hline 0 & P((2,-1),(-2,1),(0,1)) & P(\{X=0,Y=-1\}) \\ \hline 1 & P(\{X=-2,Y=-1\}) & P(\{X=2,Y=1\}) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} S\backslash T & 0 & 1 & \sum \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \hline 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \hline \sum & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} & 1 \end{array}\right)$$

Per fer els diversos càlculs ens hem ajudat de què $X, Y$ són independents, i de la taula 2. Per tant, les marginals són $m_S=(P(S=0),P(S=1))=(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ i $m_T=(\frac{5}{8},\frac{3}{8})$. Com que, per exemple, $\frac{1}{2}=P(S=0,T=0)\neq P(S=0)P(T=0)=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}$, $S$ i $T$ no són independents. Pel que fa a la covariància, $\mathrm{Cov}(S,T)$:

$$\begin{aligned} E(ST) &= 0\cdot P(\{S=0\}\cup\{T=0\})+1\cdot P(S=T=1)=\frac{1}{8}, \\ E(S) &= 0\cdot P(S=0)+1\cdot P(S=1)=\frac{1}{4} \\ E(T) &= 0\cdot P(T=0)+1\cdot P(T=1)=\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

I per la fórmula:

$$\mathrm{Cov}(S,T)=E(ST)-E(S)E(T)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{32}.$$

■

**Exercici 3.9.** *Calculeu les pdf marginals de la llei uniforme al disc unitat,* $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$. *La pdf conjunta de la llei uniforme és:*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & \textit{si } (x,y)\in D, \\ 0, & \textit{altrament}.\end{cases}$$

*Vegeu també que aquestes marginals no són pas independents.*

*Demostració.* Aquesta vegada no estem en un cas discret, i haurem de treballar amb integrals. La pdf marginal d'$X$ s'obté integrant respecte de $y$ la pdf conjunta $f(x,y)$. Notem que els punts en $\{x^2+y^2\leq 1\}$ són els mateixos que, en termes de $y$, $\{-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. Per $x \in \mathbb{R}$ tenim:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} dy\, f(x,y) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\, dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \cdot \mathbb{1}_{|x|<1}(x).$$

Anàlogament,

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x,y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} \cdot \mathbb{1}_{|y|<1}(y).$$

Com que, evidentment, $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x,y)$, concloem que $X, Y$ no són independents. ■

# 4 Moments, canvis de variables, condicionades

**Exercici 4.1.** *Siguin* $X_1, \ldots, X_n$ *variables aleatòries* $iid \sim \mathrm{Unif}(0,1)$. *Definim:* $(X_{(1)}, X_{(n)}) = (\min(X_1, \ldots, X_n), \max(X_1, \ldots, X_n))$.

1. *Calculeu la cdf conjunta de* $(X_{(1)}, X_{(n)})$ *i les cdf marginals univariants.*
2. *Calculeu la pdf conjunta de* $(X_{(1)}, X_{(n)})$ *i les pdf marginals univariants.*
3. *Calculeu* $\mathrm{Cov}(X_{(1)}, X_{(n)})$ *i* $\mathrm{Cor}(X_{(1)}, X_{(n)})$.
4. *Donat* $y \in (0,1)$, *calculeu la pdf de* $X_{(1)}$ *condicionada a* $X_{(n)} = y$.

*Demostració.*

1. La marginal (cdf) del màxim, $X_{(n)}$, és molt senzilla de trobar, ja ho hem fet en altres ocasions:

$$F_{X_{(n)}}(t) = P(\max(X_1, \ldots, X_n) \le t) = P(X_1 \le t) \cdots P(X_n \le t) = (F_{X_i}(t))^n, \forall i.$$

Ara, donats $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cal calcular la cdf conjunta, **que és** $F_{(X_{(1)},X_{(n)})}(x,y)$, $P(X_{(1)}, X_{(n)} \le x, y)$. Podem suposar $x \le y$, ja que altrament la probabilitat és 0. Tenim, per probabilitats totals:

$$\{X_{(n)} \le y\} = \{X_{(1)} \le x, X_{(n)} \le y\} \cup \{X_{(1)} > x, X_{(n)} \le y\}.$$

Per tant, $F_{X_{(n)}}(y) = F_{(X_{(1)},X_{(n)})}(x,y) + P(X_{(1)} > x, X_{(n)} \le y)$. Sabem $F_{X_{(n)}}(y)$ i podem calcular $P(X_{(1)} > x, X_{(n)} \le y)$, de manera que podríem trobar $F_{(X_{(1)},X_{(n)})}(x,y)$. Com que en $P(X_{(1)} > x, X_{(n)} \le y)$ tenim $\min(X_1, \ldots, X_n) > x$ ($x < X_i, \forall i$) i $\max(X_1, \ldots, X_n) \le y$ ($y \ge X_i, \forall i$):

$$P(X_{(1)} > x, X_{(n)} \le y) = P(x < X_1 \le y) \cdot P(x < X_2 \le y) \cdots P(x < X_n \le y) = (F(y) - F(x))^n.$$

Finalment, $F_{(X_{(1)},X_{(n)})}(x,y) = (F(y))^n - (F(y) - F(x))^n$. La marginal del mínim, $F_{X_{(1)}}$, s'obté **prenent el límit**:

$$F_{X_{(1)}}(x) = \lim_{y \to \infty} F_{(X_{(1)},X_{(n)})}(x,y) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

2. Si la distribució comuna de $X_1, \ldots, X_n$ és absolutament contínua amb pdf $f$, la pdf conjunta de $(X_{(1)}, X_{(n)})$ per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, amb $x < y$, és:

$$f_{(X_{(1)},X_{(n)})}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{(X_{(1)},X_{(n)})}(x,y) = n(n-1)(F(y) - F(x))^{n-2} f(x) f(y).$$

Derivant les marginals univariants obtenim:

$$f_{X_{(1)}}(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X_{(1)}}(x) = n(1 - F(x))^{n-1} f(x).$$
$$f_{X_{(n)}}(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_{X_{(n)}}(y) = n(F(y))^{n-1} f(y).$$

3. Per calcular $\mathrm{Cov}(X_{(1)}, X_{(n)})$ calculem en primer lloc l'esperança del producte:

$$E(X_{(1)}X_{(n)}) = n(n-1)\int_0^1 dy \cdot y \int_0^y dx \cdot x(y-x)^{n-2}.$$

La integral interna, amb el canvi de variable $z = y - x$, $x = y - z$, $dx = -dz$,

$$\int_0^y dx\, x(y-x)^{n-2} = \int_0^y dz(y-z)z^{n-2} = \frac{y^n}{n(n-1)} \implies E(X_{(1)}X_{(n)}) = \frac{1}{n+2}.$$

Amb les marginals, per $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$E(X_{(1)}^k) = \int_0^1 x^k n(1-x)^{n-1}\, dx = n \cdot B(k+1, n) = \frac{1}{\binom{n+k}{k}}.$$
$$E(X_{(n)}^k) = \int_0^1 y^k n y^{n-1}\, dy = \frac{n}{n+k}.$$

D'aquí podríem calcular les esperances $E(X_{(1)})$, $E(X_{(n)})$, els respectius quadrats i les variàncies. Finalment, les covariàncies i les correlacions.

4. Donat $y \in (0, 1)$, pdf de $X_{(1)}$ condicionada a $X_{(n)} = y$:

$$f_{X_{(1)}|\{X_{(n)}=y\}}(x) = \frac{f_{(X_{(1)},X_{(n)})}(x, y)}{f_{X_{(n)}}(y)} = \frac{n(n-1)(y-x)^{n-2}}{n y^{n-1}} = (n-1)\frac{1}{y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)^{n-2}, \quad 0 < x < y.$$

I amb això ja hem acabat. ■

**Exercici 4.2.** *Considerem un vector aleatori $(X, Y)$ amb funció de densitat conjunta $f_{(X,Y)}(x, y) = 8xy\mathbb{1}_T(x, y)$, on $T = \{(x, y) \in [0, 1]^2, x \le y\}$.*

1. *Calculeu la probabilitat $P(X \le \frac{1}{4}, Y \ge \frac{3}{4})$.*
2. *Trobeu les densitat marginals de les variables $X, Y$.*
3. *Són independents aquestes variables?*
4. *Trobeu la funció de densitat de la variable $X$ condicionada a $Y = \frac{1}{2}$.*

*Demostració.*

1. Com $0 \le X, Y \le 1$, aquesta probabilitat és la integral de la pdf en aquests intervals que demana:

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\int_{\frac{3}{4}}^1 8xy\, dx\, dy = 8\int_0^{\frac{1}{4}} x\left(\int_{\frac{3}{4}}^1 y\, dy\right) dx = 8\int_0^{\frac{1}{4}} x\left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{9}{16}}{2}\right) dx = 8 \cdot \frac{7}{32} \cdot \frac{1}{32} = \frac{7}{128}.$$

2. Les marginals es calculen integrant respecte l'altra variable (és a dir, si volem $f_Y$ integrem sobre $x$; i a l'inrevés per a $f_X$). Per tant:

$$f_X(x) = \int_x^1 8xy\, dy = 8x\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) = 4(1-x^2)x.$$
$$f_Y(y) = \int_0^y 8xy\, dx = 4x^3.$$

3. Aquestes variables no són independents perquè el producte de les marginals no ens dona $f_{(X,Y)}(x,y)$.
4. La densitat d'una variable $X$ condicionada a $Y = k$ és $f_{X|Y=k} = \frac{f_{(X,Y)}(x,k)}{f_Y(k)}$. En el nostre cas, doncs:

$$f_{X|Y=\frac{1}{2}}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,\frac{1}{2})}{f_Y(\frac{1}{2})} = \frac{8x(\frac{1}{2})\mathbb{1}_T(x,\frac{1}{2})}{4\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 8x, \text{ si } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

■

**Exercici 4.3.** *Considerem el vector aleatori $(X, Y)$ absolutament continu amb pdf:*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & si\ (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ 0, & si\ (x,y) \notin (0,1) \times (0,1) \end{cases}$$

1. *Calculeu la cdf conjunta de $(X, Y)$.*
2. *Calculeu les pdf marginals i les cdf marginals. Són independents $X$ i $Y$?*
3. *Calculeu la pdf de $X$ condicionada per $\frac{Y}{X} = 1$.*

*Demostració.*

1. Anomenem $F_{(X,Y)}$ la cdf conjunta de $(X, Y)$. Per a $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \text{ o } y < 0; \\ x^2y^2, & \text{si } (x,y) \in (0,1)^2; \\ y^2, & \text{si } x \geq 1 \text{ o } y \in (0,1); \\ x^2, & \text{si } x \in (0,1) \text{ o } y \geq 1; \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \text{ i } y \geq 1; \end{cases}$$

Com ho hem sabut? No ho sé.

2. Les pdf i cdf marginals de $X$ per $x \in \mathbb{R}$ són:

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{(X,Y)}(x,y)\,dx = 4y \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \begin{cases} 2y, & \text{si } y \in (0,1) \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = 2\int_{-\infty}^{y} t\,dt = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 0 \\ y^2, & \text{si } y \in [0,1) \\ 1, & \text{si } y \geq 1. \end{cases}.$$

Anàlogament, podem trobar les pdf i cdf marginals per $y \in \mathbb{R}$:

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{(X,Y)}(x,y)\,dy = 4x \int_{-\infty}^{+\infty} y\,dy = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in (0,1) \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$F_x(x) = 2\int_{-\infty}^{x} t\,dt = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } x \in [0,1) \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}.$$

Com que $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$, $X, Y$ són independents.

3. Definim una variable $V = \frac{Y}{X}$ i mirarem la condicionada $X|V = 1$. Hem de fer un canvi de variable, $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definit de tal manera que $X$ es *quedi igual*, però $Y$ quedi substituïda per aquesta $V$: $\phi(x, y) = (u, v) = (x, \frac{y}{x})$. Calculem la pdf mitjançant el procés rutinari:

$$\phi^{-1} : (u, v) \longmapsto (u, uv) = (x, y) \implies J_{\phi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{pmatrix} \implies |\det(J_{\phi^{-1}})| = u.$$

Ens queda un últim pas, que és definir la regió on és definida la pdf, $\mathscr{R}$, que ve donada per $\phi(X, Y)$[12]: en efecte, a la regió $(0, 1) \times (0, 1)$, definida per les igualtats $0 < x < 1$ i $0 < y < 1$, queden com $0 < u < 1$ i $0 < uv < 1 \iff 0 < v < \frac{1}{u}$. Conseqüentment:

$$\mathscr{R} = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < u < 1 \text{ i } 0 < v < \frac{1}{u}\right\}$$

Per tant, $f_{(U,V)}(u, v)$ queda així:

$$f_{(U,V)}(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{si } (u, v) \notin \mathscr{R}; \\ 4u^3 v, & \text{si } (u, v) \in \mathscr{R}. \end{cases}$$

Compte perquè ara, per a calcular $f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(U,V)}(u, v)\, du$, tenim dos intervals d'integració possibles: o bé $0 < u < 1$ o bé $0 < u < \frac{1}{v}$:

$$F_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(U,V)}(u, v)\, du = \begin{cases} 4v \int_0^1 u^3\, du = v, & \text{si } 0 < u < 1,\ 0 < v \leq 1; \\ 4v \int_0^{\frac{1}{v}} u^3\, du = \frac{1}{v^3}, & \text{si } 0 < u \leq \frac{1}{v},\ 1 < v < \infty. \end{cases}$$

La densitat de $U$ condicionada a $V = 1$ és:

$$f_{U|V=v}(u) = \frac{f_{U,V}(u, v)}{f_{(V)}(v)} = \begin{cases} \frac{4u^3 v}{v} = 4u^3, & \text{si } 0 < u < 1,\ 0 < v \leq 1; \\ \frac{4u^3 v}{v^{-3}} = 4v^4 u^3, & \text{si } 0 < u \leq \frac{1}{v} < 1,\ 1 < v < \infty. \end{cases}$$

Per tant, la densitat de $U$ condicionada a $V = 1$ és:

$$f_{U|V=1}(u) = \frac{f_{U,V}(u, 1)}{f_{(V)}(1)} = \begin{cases} 4u^3, & \text{si } 0 < u < 1; \\ 0, & \text{si } u \notin (0, 1). \end{cases}$$

I amb això ja hem acabat. ■

**Exercici 4.4.** *El vector aleatori $(X, Y)$ té densitat conjunta:*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} cx, & \textit{si } y \in (-x, x), x \in (0, 1) \\ 0, & \textit{altrament}. \end{cases}$$

*Calculeu la constant de normalització c.*

[12] Informalment, ens ho podem imaginar com una aplicació que ens permet canviar entre pdfs $\phi(f_{(X,Y)}(x, y)) = f_{(U,V)}(u, v)$.

*Demostració.* La regió *de la distribució* és $\mathscr{R} = \{(x,y) \mid y \in (-x,x), x \in (0,1)\}$, que està limitada per les rectes $y = x$, $y = -x$ i $x = 1$. Per definició de densitat, $\iint_{\mathscr{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = 1$. Per tant:

$$\int_0^1 \int_0^x cx\,dy\,dx - \int_0^1 \int_{-x}^0 cx\,dy\,dx = c\int_0^1 x^2\,dx - c\int_0^1 -x^2\,dx = 2c\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}c.$$

Com que $\frac{2}{3}c = 1$, obtenim que $c = \frac{3}{2}$. ■

**Exercici 4.5.** *Siguin $X, Y$ dues variables aleatòries independents, cadascuna amb distribució uniforme* $\mathrm{Unif}(0,1)$. *Definim $U = X + Y$ i $V = X - Y$. Calculeu:*

1. *La pdf conjunta del vector $(U,V)$.*
2. *Les pdf marginals de $U, V$.*
3. *L'esperança de $X^2 - Y^2$.*
4. *$P(X < Y)$.*
5. *Donat $u \in (0,2)$, la pdf de $V$ condicionada a $U = u$.*

*Demostració.* Els detalls més importants, ja que la resolució detallada està a paper.

1. La $\mathrm{Unif}(0,1)$ és $f_X(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}$ (anàlogament, $f_Y(y) = \mathbb{1}_{(0,1)}$). Com són independents, el producte de les marginals ha de ser el producte de la pdf conjunta:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)\cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(y) = \mathbb{1}_{(0,1)\times(0,1)}(x,y),\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Ara hem de fer un canvi de variable sobre la pdf per obtenir $g_{(U,V)}(u,v)$. En efecte:

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (u,v) := (x+y, x-y) \end{array} \qquad g^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longrightarrow & (x,y) := \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \end{array}$$

Podem calcular la matriu jacobiana de $g^{-1}$, $Dg^{-1}$, i calcular $|\det(Dg^{-1})| = \frac{1}{2}$. Potser el més «difícil» és definir la regió $D' = g(D)$, però una vegada feta ens queda que $f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2}\cdot \mathbb{1}_{D'}(u,v)$, tal que $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

2. Les pdfs marginals són més complicades perquè depenen de la regió $D'$. Indiquem que:

$$f_{(U)}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(U,V)}(u,v)\,dv = u\cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(u) + (2-u)\cdot \mathbb{1}_{(1,2)}(u),\ \ u\in\mathbb{R}.$$

$$f_{(V)}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(U,V)}(u,v)\,du = (v+1)\cdot \mathbb{1}_{(-1,0)}(v) + (1-v)\cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(v),\ \ v\in\mathbb{R}.$$

3. L'esperança de $X^2 - Y^2$ és la mateixa que la de $UV$. Però no és això el que usarem. Com que $X, Y$ tenen la mateixa distribució, el segon moment finit també ho és i, per tant, $E(X^2 - Y^2) = E(X^2) - E(Y^2) = 0$.

4. Com que $(X,Y)$ és uniforme al quadrat unitat $D = (0,1)\times(0,1)$, $P(X < Y)$ és igual a l'àrea de $D \cap (X<Y) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} P(X<Y) &= \int_{X<Y} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \cdot \int_x^1 dy \\ &= \int_0^1 dx\cdot [y]_x^1 = \int_0^1 dx\cdot(1-x) = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. Donat $u \in (0,2)$, la pdf de $V$ condicionada a $U=u$. Per $v \in \mathbb{R}$,

$$f_{V|U=u}(v) = \frac{f_{(U,V)}(u,v)}{f_U(u)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{D'}(u,v)}{f_U(u)},$$

on:

$$f_U(u) = u \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(u) + (2-u) \cdot \mathbb{1}_{(1,2)}(u), \ u \in \mathbb{R},$$

és la pdf marginal de $U$. Així,

$$f_{V|U=u}(v) = \frac{1}{2u} \cdot \mathbb{1}_{(-u,u)}(v) \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(u) + \frac{1}{2(2-u)} \cdot \mathbb{1}_{(u-2,2-u)}(v) \cdot \mathbb{1}_{(1,2)}(u), \ v \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

# 5 Convergència de successions de variables aleatòries

**Exercici 5.1.** *Sigui $(X_n)_n$ una successió de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes (v.a.i.i.d), amb densitat $f(x) = \frac{3}{2}x^2\mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$. Definim $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ i $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.*

1. *Calculeu les funcions de distribució de $Y_n$ i $Z_n$. Demostreu que convergeixen en llei.*
2. *Estudieu la convergència en probabilitat, en $L^2$ i quasi segura.*

*Demostració.*

1. Primerament, calculem la corresponent cdf a $F_X(x)$:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2\mathbb{1}_{(-1,1)}(x) \implies f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & \text{si } x \in (-1,1); \\ 0, & \text{si } x \notin (-1,1); \end{cases} \implies F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1; \\ \frac{1}{2}(x^3+1), & \text{si } x \in [-1,1); \\ 1, & \text{si } x \geq 1; \end{cases}$$

Hem estudiat aquestes $Y_n$ i $Z_n$ uns quants cops. Tenim que $F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y)$, i:

$$F_{Y_n}(y) = P(X_1 \leq y, \dots, X_n \leq y) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq y) = (F_X(y))^n = \begin{cases} 0, & \text{si } y < -1; \\ \frac{1}{2^n}(y^3+1)^n, & \text{si } y \in [-1,1); \\ 1, & \text{si } y \geq 1; \end{cases}$$

Ens queda $F_{Z_n}(z)$ i, en efecte, tenim que el conjunt $\{\min(X_1, \dots, X_n) > z\}$ és $\{X_1 > z, \dots, X_n > z\}$. Com, per de Morgan, $P(\{\min(X_1, \dots, X_n) \leq z\}) = 1 - P(\{\min(X_1, \dots, X_n) > z\})$:

$$P(Z_n \leq z) = 1 - P(\{\min(X_1, \dots, X_n) > z\}) = 1-(1-F_X(z))^n = 1 - \begin{cases} 1, & \text{si } z < -1; \\ \left(1 - \frac{1}{2}(z^3+1)\right)^n, & \text{si } z \in [-1,1); \\ 0, & \text{si } z \geq 1; \end{cases}$$

Ara hem de demostrar la seva convergència en llei. Si fem $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \lim_{n\to\infty} (F_X(y))^n = \begin{cases} 0, & \text{si } y < -1; \\ 0, & \text{si } y \in [-1, 1); \\ 1, & \text{si } y \geq 1; \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \lim_{n\to\infty} 1 - (1 - F_X(z))^n = \begin{cases} 0, & \text{si } z \leq -1; \\ 1, & \text{si } z \in (-1, 1); \\ 1, & \text{si } z \geq 1; \end{cases}$$

En el primer cas, el límit és la funció salt unitat al punt 1, la cdf de la v.a. constant igual a 1. Val la pena recordar que si una variable aleatòria $T = 1$, la seva cdf és $P(T \leq t) = P(1 \leq t)$ i això és:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 \\ 1, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

que és justament el cas de l'enunciat. O sigui que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$ quan $n \to \infty$. En el segon cas, el límit és la funció salt unitat al punt $-1$. No és una cdf, ja que no és contínua per l'esquerra ($1 - \lim_{n\to\infty} 1 - \left(1 - \frac{1}{2}(z^3+1)\right)^n = 1 - \lim_n 1^n = 0$, en $z = -1$), però coincideix a.e. amb la cdf de la v.a. constant igual a $-1$. Per tant, $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} -1$ quan $n \to \infty$.

2. Com que $(Y_n)_n$ i $(Z_n)_n$ convergeixen en llei cap a respectives constants, i convergència en llei cap a una constant implica convergència en probabilitat, $Y_n \xrightarrow{P} 1$ i $Z_n \xrightarrow{P} -1$. En aquest cas també ho podem demostrar directament de la definició de convergència en probabilitat. Per a $Y_n$, donat $\varepsilon > 0$, calculem:

$$P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = P(Y_n \leq 1 - \varepsilon) = F_{Y_n}(1-\varepsilon) = \frac{1}{2^n}((1-\varepsilon)^3 + 1)^n = \frac{1}{2^n}(2 - \varepsilon(3 - 3\varepsilon + \varepsilon^2))^n.$$

Com que els valors de $Y_n$ són a $(0, 1)$ amb probabilitat 1, és suficient comprovar-ho per a $\varepsilon < 1$. Com que $0 < \varepsilon < 1$, $1 - \varepsilon > 0$ i $(1-\varepsilon)^3 + 1 > 1$, pel que $\lim_n P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = 0$ (l'exponencial domina). Pel que fa a la convergència quasi segura, si la successió de variables és monòtona (creixent o decreixent), aleshores la convergència en probabilitat implica la quasi segura. Per tant, com $(Y_n)_n$ és monòtona creixent i $(Z_n)_n$ és monòtona decreixent, totes dues són convergents QS. ∎

**Exercici 5.2.** *Sigui* $(X_n)_n$ *una successió de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb distribució* Unif$(0, 1)$. *Per tot* $k \geq 1$ *considerem una variable aleatòria* $Y_k$*, independent de la successió i amb distribució* Poisson$(k)$. *Definim*

$$M_k = \begin{cases} \min(X_1, \ldots, X_{Y_k}), & \textit{si } Y_k > 0; \\ 0, & \textit{si } Y_k = 0. \end{cases}$$

1. *Determineu la distribució de la variable aleatòria* $M_k$*. És absolutament contínua? En cas afirmatiu, trobeu la seva densitat.*

2. *Definim $N_k = k \cdot M_k$, $k \geq 1$. Demostreu que la successió $(N_k)_k$ convergeix en llei quan $k \to \infty$ i determineu la distribució de la variable aleatòria límit.*
3. *Demostreu que*
$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1^2 + \cdots + X_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{qs} \frac{3}{2}.$$
***Nota**: Es basa en una versió de llei forta dels grans nombres.*

*Demostració*.

1. Posem $X \sim \mathrm{Unif}(0,1)$, $F_X$ la cdf de $X$. Per $x \in \mathbb{R}$ tenim que:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ x, & \text{si } x \in [0,1), \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$
Sigui la successió de variables aleatòries $(Z_n)_n$ descrites per $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Ja hem vist en exercicis anteriors que la cdf ens queda $F_{Z_n}(y) = 1 - (1 - F_X(y))^n$. En efecte, tenim que el conjunt $\{\min(X_1, \ldots, X_n) > y\}$ és $\{X_1 > y, \ldots, X_n > y\}$. Per de Morgan, $P(\{\min(X_1, \ldots, X_n) \leq y\}) = 1 - P(\{\min(X_1, \ldots, X_n) > y\})$, i això queda $1 - (1 - F_X(y))^n$. Per tant,
$$F_{Z_n}(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ 1 - (1-y)^n, & \text{si } x \in [0,1]; \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \implies -(1-x)^n \cdot \mathbb{1}_{[0,1)}(x) + \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x), \ x \in \mathbb{R}.$$
Alleugerim la notació i posem $F_j = \mathrm{cdf}(\min(X_1, \ldots, X_j))$. Posem $G_k$ la cdf de $M_k$. La clau està en aplicar probabilitats totals, per poder treballar amb el valors de $(Y_n)_n$. Per a $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} G_k(x) = P(M_k \leq x) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(M_k \leq x | Y_k = j) \cdot P(Y_k = j) \overset{13}{=} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) \cdot e^{-k} + \sum_{j\geq 1} F_j(x) \cdot e^{-k}\frac{k^j}{j!} \\ &= \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) \cdot e^{-k} - \sum_{j \geq 1} ((1 - (1-x)^j) \cdot \mathbb{1}_{[0,1)}(x) + \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x)) \cdot e^{-k}\frac{k^j}{j!} \\ &\overset{14}{=} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) \cdot e^{-k} - e^{-k}\sum_{j\geq 1}(k(1-x))^j \cdot \mathbb{1}_{[0,1)}(x) + e^{-k} \cdot \sum_{j \geq 1}\frac{k^j}{j!}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) \\ &\overset{15}{=} (1 + e^{-k} - e^{-kx}) \cdot \mathbb{1}_{[0,1)}(x) + \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x). \end{aligned}$$
La cdf de $M_k$, $G_k(x)$, no és absolutament contínua i, per tant, no en podem calcular la densitat.

[15] Resolem el cas $P(M_k \leq x | Y_k = 0)P(Y_k = 0)$ a part. Per definició de Poisson, $P(Y_k = 0) = e^{-k}$. D'altra banda, $P(M_k \leq x | Y_k = 0)$ vol dir que $M_k$ pren el valor de la variable aleatòria constant amb valor 0; això és, $P(0 \leq x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$.

[15] Val a dir que $\mathbb{1}_{[0,1)}(x) + \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x)$ és $\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ perquè $[0,1) \cap [1,+\infty) = \emptyset$.

[15] Hem aplicat iteradament que l'exponencial es pot escriure com una sèrie de Taylor: $e^k = \sum_{j\geq 0}\frac{k^j}{j!}$

2. Sigui $N_k = k \cdot M_k$. Per $k \in \mathbb{N}$ anomenem $H_k$ la cdf de $N_k$. Per $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H_k(x) &= P(k \cdot M_k \leq x) = P\left(M_k \leq \frac{x}{k}\right) = G_k\left(\frac{x}{k}\right) = (1 + e^{-k} - e^{-x}) \cdot \mathbb{1}_{[0,1)}\left(\frac{x}{k}\right) + \mathbb{1}_{[1,+\infty)}\left(\frac{x}{k}\right) \\ &= (1 + e^{-k} - e^{-x}) \cdot \mathbb{1}_{[0,k)}(x) + \mathbb{1}_{[k,+\infty)}(x). \end{aligned}$$

En $x = 0$, $\lim_{x \to 0^-} H_k(x) = 0$ i $H_k(0) = e^{-k}$, $P(N_k = 0) = e^{-k}$. Hi ha massa de probabilitat $e^{-k}$ en el zero. Fent el límit per $k \longrightarrow \infty$,

$$\lim_{k \to \infty} H_k(x) = (1 - e^{-x}) \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x), \ \ x \in \mathbb{R}.$$

El límit és la cdf d'una v.a. $\sim \operatorname{Exp}(1)$.

3. Apliquem la llei forta dels grans nombres a les dues successions $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$, on $Y_n = X_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, de manera que el problema passarà a ser resoldre $\frac{S_n}{S_n'}$, on $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ i $S_n' = X_1^2 + \cdots + X_n^2$. Com $X$ segueix una distribució $\operatorname{Unif}(0,1)$ té segon moment finit i $E(X) = \frac{0+1}{2}$:

$$\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{QS}} E(X) = \frac{1}{2}.$$

Anàlogament, podríem fer el mateix per als $(Y_n)_n$, amb esperança $E(X^2) = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$; amb el que:

$$\frac{1}{n}(X_1^2 + \cdots + X_n^2) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{QS}} E(X^2) = \frac{1}{3}.$$

I, per tant, $\frac{S_n}{S_n'} = \frac{3}{2}$. ■

**Exercici 5.3.** *Sigui $Y$ una variable aleatòria amb llei* $\operatorname{Exp}(1)$. *Per a tot $n \geq 1$, definim:*

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{si } Y < \log n; \\ 0, & \text{altrament}. \end{cases}$$

*Estudieu la convergència de la successió $(X_n)_n$ en mitjana d'ordre $p$, $p \geq 1$, en probabilitat, en llei i quasi segurament.*

*Demostració.* La densitat de $Y \sim \operatorname{Exp}(1)$ i la seva llei són:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 0; \\ e^{-y}, & \text{si } y \geq 0; \end{cases} \implies F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 0; \\ 1 - e^{-y}, & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

Per $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \mathbb{1}_{[0,\log(n))}(Y)$. D'altra banda, $P(0 \leq Y < \log(n)) = F_Y(\log(n)) - F_Y(0) = 1 - \frac{1}{n}$. La cdf de $X_n$ ve donada per $F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x)$. Hi ha dues maneres de prosseguir.

1. La més ràpida és adonar-se que $X_n \sim \operatorname{Ber}(p_n)$, on $p_n = 1 - \frac{1}{n}$. Per tant, la cdf de $X_n$ vindria donada per la cdf de $\operatorname{Ber}(p_n)$, que és:

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ 1 - p_n = \frac{1}{n}, & \text{si } x \in [0,1); \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \implies \lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1; \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \implies (X_n)_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathscr{L}} 1.$$

2. Podem arribar a la mateixa cdf, però per un camí alternatiu (i més mecànic). Aplicant probabilitats totals:

$$\begin{aligned}P(X_n \leq x) &= P(X_n \leq x | Y < \log(n))P(Y < \log(n)) + P(X_n \leq x | Y \geq \log(n))P(Y \geq \log(n)) \\ &= P(1 \leq x)P(Y < \log(n)) + P(0 \leq x)(1 - P(Y < \log(n))) \\ &= \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, & \text{si } x \in [0, 1); \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} = 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

A partir d'aquí podem procedir exactament igual que al primer apartat per obtenir els mateixos resultats.

Ara, com la convergència és cap a una variable aleatòria constant, tenim també assegurada la convergència en probabilitat, $(X_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1$. Com que $[0, \log(n)) \subset [0, \log(n + 1))$,

$$X_n = \mathbb{1}_{\{y\in[0,\log n)\}} \leq X_{n+1} = \mathbb{1}_{\{y\in[0,\log(n+1))\}}$$

o sigui que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ és monòtona creixent, que juntament amb la convergència en probabilitat, permet afirmar $\{X_n\}_{n\geq 1} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{QS}} 1$. Per estudiar la convergència en $L^p$ calculem, per $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{E}\left[|X_n - 1|^p\right] = |0 - 1|^p \cdot \mathrm{P}(X_n = 0) + |1 - 1|^p \cdot \mathrm{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} + 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Per tant, per $p \in \mathbb{N}$, $\{X_n\}_{n\geq 1} \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} 1$. ■

**Exercici 5.4.** *Sigui $(X_n)_n$ una successió de variables aleatòries independents i idènticament distribuïes, amb llei* $\mathrm{Exp}(\lambda)$. *Definim $M_n = n^2 \min(X_1, \ldots, X_n)$ i $Z_n = M_n - [M_n]$. Estudieu la convergència en llei de la successió $(Z_n)_n$.*

*Demostració resumida.* Primer, trobem la cdf de $\mathrm{Exp}(\lambda)$. A partir d'aquí, trobem la cdf de $\min(X_1, \ldots, X_n)$; després, la de $(M_n)_n$ i, finalment, la de $(Z_n)_n$. En acabat, determinem la convergència en llei de la successió $(Z_n)_n$.

És clar que $f_{X_n}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, $F_{X_n}(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Si anomenem $G_n = \mathrm{cdf}(\min(X_1, \ldots, X_n))$, rutinàriament trobem $G_n(u) = 1 - (1 - F_{X_n}(u))^n = (1 - e^{-n\lambda u})\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(u)$. Si anomenem $H_n = \mathrm{cdf}(M_n)$,

$$\begin{aligned}H_n(x) = P(M_n \leq x) = P(n^2 \min(X_1, \ldots, X_n) \leq x) &= P\left(\min(X_1, \ldots, X_n) \leq \frac{x}{n^2}\right) \\ &= G_n\left(\frac{x}{n^2}\right) = (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}x}) \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x).\end{aligned}$$

I $M_n \sim \mathrm{Exp}(\frac{\lambda}{n})$. Ara cal calcular $K_n = \mathrm{cdf}(Z_n)$, on $Z_n = M_n - [M_n]$. Usarem una partició molt astuta, i d'aquí posem directament el resultat.

$$K_n(z) = P(Z_n \leq z) = P(M_n - [M_n] \leq z) = \sum_{k\geq 0} P(M_n \in [k, k + z)) = \frac{1 - e^{-\frac{\lambda}{n}z}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}}.$$

Per $z \in \mathbb{R}$, ara calculem $\lim_n K_n(z)$. Per $z < 0$, tenim que $\lim_n K_n(z) = 0$; per $z \geq 1$, $\lim_n K_n(z) = 1$. Per $z \in [0,1)$, considerem la funció de la variable real $t$ obtinguda posant $t \in \mathbb{R}_+$ en el lloc de $n \in \mathbb{N}$; així, podrem aplicar la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} K_n(z) = \lim_{t\to\infty} \frac{1 - e^{-\frac{\lambda}{t}z}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-e^{-\frac{\lambda}{t}z} \cdot \left(\frac{\lambda}{t^2}z\right)}{-e^{-\frac{\lambda}{t}}} \cdot \left(\frac{\lambda}{t^2}\right) = z.$$

Com que també $\mathrm{Unif}(0,1)$ té cdf:

$$\lim_n K_n(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < 0; \\ z, & \text{si } z \in [0,1); \\ 1, & \text{si } z \geq 1; \end{cases}$$

Aleshores $(Z_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \mathrm{Unif}(0,1)$. ■

**Exercici 5.5.** *Sigui $(X_n)_n$ una successió de v.a.i.i.d, amb pdf $f(x) = 2pxe^{-px^2}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, $p > 0, x \in \mathbb{R}$. Demostreu que:*

$$P\left(\overline{\lim_n} \frac{X_n^2}{\log(n)} \geq \frac{1}{p}\right) = 1 \text{ } i \text{ } P\left(\overline{\lim_n} \frac{X_n^2}{\log(n)} > c\frac{1}{p}\right) = 0, \ \forall c > 1.$$

*Algunes indicacions.* Per al primer resultat, per exemple, tenim que $P\left(\overline{\lim}_n \frac{X_n^2}{\log(n)} \geq \frac{1}{p}\right)$ és $P\left(\overline{\lim}_n \left\{Z_n \geq \frac{1}{p}\right\}\right)$, i $P(\{Z_n \geq \frac{1}{p}\})$ es podria pensar a partir de la cdf de $Z_n$, $F_{Z_n}$. Al seu torn, $Z_n = \frac{X_n^2}{\log(n)}$ és $\frac{Y_n}{\log(n)}$, de manera que $Y_n = X_n^2$. Al final, necessitarem les cdf de tots.

1. *De $X_n$ a $Y_n$.* És l'exercici per antonomàsia *troba la llei $Y = X^2$*. Com ens donen la pdf de $X_n$, podem trobar la pdf de $Y_n$ a partir de la fórmula de canvi de variable: $g(X_n) = Y_n = X_n^2$, $x = g^{-1}(y) = y^{\frac{1}{2}}$, $(g^{-1})'(y) = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$. Per $y \in \mathbb{R}$:

$$f_Y(y) = 2py^{\frac{1}{2}}e^{-py}\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\cdot\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y) = pe^{-py}\cdot\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y) \implies F_Y(y) = (1-e^{-py})\cdot\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y), \ y \in \mathbb{R}.$$

2. La cdf de $Z_n$ queda:

$$P(Z_n \leq z) = P\left(\frac{Y_n}{\log(n)} \leq z\right) = P(Y \leq z\log(n)) = F_Y(z\log(n)).$$

Això ens serveix per fixar $A_n = \{Z \geq \frac{1}{p}\}$, de manera que $P(A_n) = 1 - P(\{Z_n < \frac{1}{p}\})$ i $P(A_n) = 1 - F_n(\frac{1}{p}) = e^{-\log(n)} = \frac{1}{n}$. *Aplicarem el segon lema de Börel-Cantelli*, de manera que:

$$\sum_n P(A_n) = \sum_n \frac{1}{n} \to \infty \implies P\left(\overline{\lim_n} A_n\right) = P\left(\overline{\lim_n} \frac{X_n^2}{\log(n)} \geq \frac{1}{p}\right) = 1.$$

Llavors com $\overline{\lim}_n\{X_n \geq \alpha\} \subset \{\overline{\lim}_n X_n \geq \alpha\}$, deduïm que:

$$1 = P\left(\overline{\lim_n}\left\{\frac{X_n^2}{\log(n)} \geq \frac{1}{p}\right\}\right) \leq P\left(\left\{\overline{\lim_n} \frac{X_n^2}{\log(n)} \geq \frac{1}{p}\right\}\right) \implies P\left(\left\{\overline{\lim_n} \frac{X_n^2}{\log(n)} \geq \frac{1}{p}\right\}\right) = 1.$$

Faltaria la segona part, que depèn d'arguments similars. ■

**Exercici 5.6.** *Sigui $(X_n)_n$ una successió de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, amb densitat $f(x) = (1 - \frac{x}{2})\mathbb{1}_{(0,2)}(x)$. Definim $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ i $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.*

1. *Calculeu les funcions de distribució de $Y_n$ i $Z_n$.*
2. *Demostreu que les successions $(Y_n)_n$ i $(Z_n)_n$ convergeixen en llei.*
3. *Estudieu-ne la convergència en probabilitat.*
4. *Estudieu-ne la convergència quasi segura.*

*Demostració.* Abans de començar, calculem la cdf de $X_n$, que és:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ x - \frac{x^2}{4}, & \text{si } x \in [0, 2); \\ 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

1. Posem $G_n = \text{cdf}(Y_n)$ i $H_n = \text{cdf}(Z_n)$. Aleshores:

$$G_n(y) = P(Y_n \leq y_n) = P(\max(X_1, \cdots, X_n) \leq y) = P(X_1 \leq y) \cdots P(X_n \leq y) = (F(y))^n = \begin{cases} 0, \\ (y - \frac{y^2}{4})^n, \\ 1, \end{cases}$$

És clar que $\{\max(X_1, \cdots, X_n) \leq z\}^c = \{\min(X_1, \ldots, X_n) > z\} = \{X_1 > z, \ldots, X_n > z\}$. Per tant:

$$1 - H_n(z) = P(\{X_1 > z, \ldots, X_n > z\}) = (1 - F_n(z))^n \implies H_n(z) \begin{cases} 0, & \text{si } z < 0; \\ 1 - (1 - z + \frac{z^2}{4})^n, & \text{si } z \in [0, 2); \\ 1, & \text{si } z \geq 2. \end{cases}$$

2. Calculem ara $\lim_n G_n$ i $\lim_n H_n$. Abans, veure que $0 < y - \frac{y^2}{4} = y - \left(\frac{y}{2}\right)^2 < 1$, ja que $0 < y - y^2 < 1$ quan $y \in (0, 1)$, mentre que $\left(\frac{y}{2}\right)^2 < 1$ perquè $\frac{y}{2} < 1$, pel que $0 < y - \left(\frac{y}{2}\right)^2 < 1$ també quan $y \in [1, 2)$. Per tant, també $0 < 1 - \left(y - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right) < 1$ i $\left(y - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)^n \to 0$, $\left(1 - \left(y - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)\right)^n \to 0$, quan $n \to \infty$. Obtenim:

$$\lim_n G_n(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 2; \\ 1 & \text{si } y \geq 2. \end{cases} \text{ i } \lim_n H_n(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < 0; \\ 1 & \text{si } z \geq 0. \end{cases} \implies Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} 2 \text{ i } Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} 0.$$

3. En tots dos casos, la convergència en llei cap a una variable aleatòria constant implica la convergència en probabilitat.

4. Per a aplicar el criteri de convergència quasi segura a $(Y_n)_n$, donat $\varepsilon > 0$, la probabilitat de $\{|Y_n - 2| > \varepsilon\}$ és la de l'interval $[0, 2 - \varepsilon)$, atès que la semirecta de l'altre costat té probabilitat 0. Aquesta probabilitat és 0 si $\varepsilon \geq 2$ i, en cas contrari:

$$P\{Y_n \in [0, 2 - \varepsilon)\} = G_n(2 - \varepsilon) = \left((2 - \varepsilon) - \frac{(2 - \varepsilon)^2}{4}\right)^n = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^n$$

La sèrie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n - 2| > \varepsilon)$$

és una sèrie geomètrica amb raó $r = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} < 1$ que és convergent, per tant, $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{QS}} 2$. Anàlogament, per a $(Z_n)_n$, donat $0 < \varepsilon < 2$,

$$P\{|Z_n - 0| > \varepsilon\} = P\{\varepsilon < Z_n < 2\} = 1 - H_n(\varepsilon) = \left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^n.$$

Resulta, doncs, que la sèrie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|Z_n - 0| > \varepsilon)$$

és convergent i, pel criteri de convergència QS, $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{QS}} 0$. ■

# REFERÈNCIES

[San99] Marta SANZ-SOLÉ. *Probabilitats*. cat. UB; 28. Barcelona: Edicions Universitat de Barcelona, 1999. ISBN: 8483380919.

[Wik23] WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. *Infinite monkey theorem — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 23-December-2023]. 2023. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Infinite_monkey_theorem.