Introducción

En la última clase, vimos cómo se pueden hacer demostraciones directas, cómo se pueden hacer demostraciones por contraposición (o por contrarrecíproco) y cómo se pueden hacer demostraciones por reducción al absurdo.

En la clase de hoy, estudiaremos dos nuevos métodos de demostración, que son los llamados "método de demostración por distinción de casos" y "método de demostración por contraejemplo".

Además, veremos cómo se puede demostrar que varias proposiciones matemáticas son equivalentes.

Demostraciones por casos

Para demostrar una proposición P por distinción de casos, se consideran proposiciones $A_1, \ldots, A_n$ de manera que $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ es una tautología, y entonces se demuestran:

1. $A_1 \Rightarrow P$.

$\vdots$

$\vdots$

n. $A_n \Rightarrow P$.

Este método está basado en la ley de distinción de casos, que vimos en la segunda clase del curso, que afirma que si $A_1, \ldots, A_n, P$ son proposiciones de manera que $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ es una tautología, entonces $((A_1 \Rightarrow P) \wedge \ldots \wedge (A_n \Rightarrow P)) \Rightarrow P$ es una tautología.

Intuitivamente, los A_i son los casos que consideramos para la demostración de P. La idea entonces es dividir la demostración de P en una serie de casos. Y el que $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ sea una tautología significa que los casos $A_1, \ldots, A_n$ son exhaustivos.

Ejemplos

Veamos a continuación algunos ejemplos.

Proposición 1

Si n es un número entero, entonces $n^2 + n$ es par.

Para demostrar la Proposición 1, supongamos que n es un entero genérico. Distinguimos entonces los siguientes casos:

Caso 1. n es par.

Como n es par, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Tenemos entonces:

$$n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k).$$

Como $2k^2 + k \in \mathbb{Z}$, deducimos que $n^2 + n$ es par.

Demostración de la Proposición 1

Caso 2. n es impar.

Como n es impar, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$. Tenemos entonces:

$n^2 + n = (2k+1)^2 + 2k + 1 = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1)$.

Como $2k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{Z}$, deducimos que $n^2 + n$ es par.

Entonces, como para todo número entero n, siempre se cumple que "n es par" $\vee$ "n es impar" , y en los dos casos hemos demostrado que $n^2 + n$ es par, hemos demostrado por distinción de casos que $n^2 + n$ es par. $\square$

Ejemplos

Recordemos que si $a \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de a se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0. \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Proposición 2

Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $|a-3| < 3$ entonces $0 < a < 6$.

Demostración de la Proposición 2

Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a-3| < 3$. Distinguimos los siguientes casos:

Caso 1. $a - 3 \geq 0$.

Entonces, $|a-3| = a-3 < 3$, y por tanto $a < 6$. Por otra parte, como tenemos que $a - 3 \geq 0$, deducimos que $a \geq 3$. Por tanto, tenemos que $0 < a < 6$.

Caso 2. $a - 3 < 0$.

Entonces, $|a-3| = 3-a < 3$. Por tanto, $a > 0$. Por otra parte, como tenemos que $a - 3 < 0$, inferimos que $a < 3$, y por tanto $a < 6$. Así pues, tenemos que $0 < a < 6$.

Como para todo $a \in \mathbb{R}$, siempre se cumple que $a - 3 \geq 0$ o $a - 3 < 0$, y en los dos casos hemos demostrado que $0 < a < 6$ bajo la hipótesis de que $|a-3| < 3$, hemos demostrado por distinción de casos la proposición. $\square$

En la demostración de la siguiente proposición, combinamos el método de reducción al absurdo con el método de distinción de casos.

Proposición 3

Para todo $x, y \in \mathbb{N}$, $3x^2 \neq y^2 + 1$.

Para demostrar la Proposición 3, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos entonces que existen $x, y \in \mathbb{N}$ tales que $3x^2 = y^2 + 1$. Como $3x^2 = y^2 + 1$, deducimos que $y^2 + 1$ es un múltiplo de 3. Distinguimos entonces los siguientes casos:

Demostración de la Proposición 3

Caso 1. $y = 3k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Entonces,

$$y^2 + 1 = (3k)^2 + 1 = 9k^2 + 1 = 3(3k^2) + 1.$$

Por tanto, $y^2 + 1$ no es un múltiplo de 3, y por consiguiente llegamos a una contradicción.

Caso 2. $y = 3k + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Entonces,

$$y^2 + 1 = (3k+1)^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2 = 3(3k^2 + 2k) + 2.$$

Por tanto, $y^2 + 1$ no es un múltiplo de 3, y por consiguiente llegamos a una contradicción.

Caso 3. $y = 3k + 2$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Entonces,

$y^2 + 1 = (3k + 2)^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 5 == 9k^2 + 12k + 3 + 2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 2.$

Por tanto, $y^2 + 1$ no es un múltiplo de 3, y por consiguiente llegamos a una contradicción.

Así pues, como los tres casos que hemos considerado son exhaustivos, y en cada uno de ellos hemos llegado a una contradicción, queda demostrada la proposición. $\square$

El método de demostración por contraejemplo

Se utiliza para demostrar la falsedad de una proposición, cuya hipótesis está constituida por una cuantificación universal. Veamos algunos ejemplos.

Proposición 4

No es cierto que si "$x, y \in \mathbb{N}$ entonces todo múltiplo de x e y es múltiplo de xy".

Para demostrar esta proposición, tenemos que dar un contraejemplo. Tomamos $x = 2$ e $y = 6$. Se tiene entonces que 6 es un múltiplo de x e y, pero 6 no es un múltiplo de 12.

El método de demostración por contraejemplo

Proposición 5

No es cierto que " para tres números enteros no nulos cualesquiera x, y, z y para cualquier número natural $n \geq 2$ se verifica que $x^n + y^n \neq z^n$".

Para demostrar la Proposición 5, tomamos los números $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ y $n = 2$. Tenemos entonces que

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Demostración de proposiciones bicondicionales

Hay muchas proposiciones matemáticas que tienen la forma $P \Leftrightarrow Q$, es decir, P si y sólo si Q. En estos casos, demostraremos lo dos implicaciones: $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$. Este método de demostración esta basado en la ley lógica:

$$P \Leftrightarrow Q \equiv P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P.$$

Veamos a continuación algunos ejemplos:

Proposición 6

Sea n un número entero. Entonces, n es par si y sólo si n^2 es par.

Demostración de la Proposición 6

En la última clase, demostramos por contraposición que si n^2 es par entonces n es par. Por tanto, ya tenemos demostrada la implicación de derecha a izquierda de la Proposición 6. Para demostrar la implicación de izquierda a derecha, supongamos que n es un número entero par. Entonces, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Por tanto, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Como $2k^2$ es un entero, deducimos que n^2 es par. $\square$

Veamos otro ejemplo a continuación.

Proposición 7

Sean m y n números enteros. Entonces, $m \cdot n$ es impar si y sólo si m y n son impares.

Demostración de la Proposición 7

En primer lugar, demostramos la implicación de izquierda a derecha. Para ello, procedemos por contraposición. Supongamos entonces que no es verdad que m y n son impares. Esto significa que m es par o n es par. Tenemos que demostrar que $m \cdot n$ es par. Para ello, procedemos por distinción de casos.

Si m es par, existe un entero j tal que $m = 2j$. Entonces, $mn = 2jn$, y por consiguiente mn es par.

Y si n es par, existe un entero i tal que $n = 2i$. Entonces, $mn = 2im$, y por consiguiente mn es par.

De esta forma, queda demostrada la implicación de izquierda a derecha.

Demostración de la Proposición 7

Demostramos ahora la implicación de derecha a izquierda. Supongamos que m y n son impares. Existen entonces enteros j y k tales que $m = 2j + 1$ y $n = 2k + 1$. Por tanto,

$$mn = (2j + 1)(2k + 1) = 4jk + 2j + 2k + 1 = 2(2jk + j + k) + 1.$$

Como j y k son enteros, también lo es $2jk + j + k$. Por tanto, mn es impar. De esta forma, queda demostrada la implicación de derecha a izquierda. $\square$

Demostración de la equivalencia de varias proposiciones

En ocasiones, queremos demostrar que tres o más proposiciones matemáticas son equivalentes. Entonces, para demostrar que n proposiciones $P_1,\ldots,P_n$ donde $n \geq 3$ son equivalentes se demuestra lo siguiente:

$P_1 \Rightarrow P_2$,

$P_2 \Rightarrow P_3$,

$\vdots$

$\vdots$

$P_{n-1} \Rightarrow P_n$,

$P_n \Rightarrow P_1$.

Es decir, se hace una demostración "circular" de la equivalencia de las n proposiciones.

Demostración de la equivalencia de varias proposiciones

El caso más frecuente es cuando se quiere demostrar la equivalencia de tres proposiciones P_1, P_2 y P_3. En este caso, demostraremos lo siguiente:

(1) $P_1 \Rightarrow P_2$.

(2) $P_2 \Rightarrow P_3$.

(3) $P_3 \Rightarrow P_1$.

Obsérvese que de (1), (2) y (3), se deduce que las tres proposiciones P_1, P_2 y P_3 son equivalentes. Es decir, de (1), (2) y (3), deducimos:

(4) $P_2 \Rightarrow P_1$.

(5) $P_3 \Rightarrow P_2$.

(6) $P_1 \Rightarrow P_3$.

Y esto es así, porque (4) se deduce de (2) y (3); (5) se deduce de (3) y (1) ; y (6) se deduce de (1) y (2).

Así pues, se deduce de (1)-(6) que $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3$.

Veamos a continuación el siguiente ejemplo.

Proposición 8

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Entonces, son equivalentes las siguientes condiciones:

(1) $ac = 1$.

(2) $a = c = 1 \vee a = c = -1$.

(3) $a = c \wedge (a + c = 2 \vee a + c = -2)$.

Demostración de la proposición 8

Supongamos que $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tenemos que demostrar que $(1) \Rightarrow (2)$, $(2) \Rightarrow (3)$ y $(3) \Rightarrow (1)$.

En primer lugar, demostramos que $(1) \Rightarrow (2)$. Supongamos que $ac = 1$. Como a y c son números enteros, deducimos que o bien $a = c = 1$ o bien $a = c = -1$. Por tanto, se cumple (2).

Demostramos ahora que $(2) \Rightarrow (3)$. Supongamos entonces que $a = c = 1$ o $a = c = -1$. Claramente, $a = c$. Tenemos que demostrar entonces que $a + c = 2$ o $a + c = -2$. Para ello, procedemos por distinción de casos. Tenemos que $a = c = 1$ o $a = c = -1$. Entonces, si $a = c = 1$, tenemos que $a + c = 2$. Y si $a = c = -1$, tenemos que $a + c = -2$. Por tanto, es cierto que $(a + c = 2 \vee a + c = -2)$, y por consiguiente se cumple (3).

Por último, demostramos que $(3) \Rightarrow (1)$. Supongamos entonces que $a = c \wedge (a + c = 2 \vee a + c = -2)$. Demostramos (1) por distinción de casos. Tenemos que $a + c = 2 \vee a + c = -2$. Entonces, si $a + c = 2$, como tenemos que $a = c$, deducimos que $a = c = 1$, y por tanto $ac = 1$. Y si $a + c = -2$, como tenemos que $a = c$, deducimos que $a = c = -1$, y por tanto $ac = 1$. Así pues, hemos demostrado (1). $\square$