Parcial 2 (12/01/10) Solucions als problemes

Problema 3.
Considera els conjunts: $X = \{1, \{2\}, 3, 4\}$ $Y = \{1, 2, \{3\}, 4\}$ $Z = \{1, 2, 3, \emptyset\}$.
Calcula els conjunts següents:

(a) $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(\{1,4\}) = \boxed{\{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{1,4\}\}}$

(b) $\mathcal{P}(X \setminus Y) = \mathcal{P}(\{\{2\}, 3\}) = \boxed{\big\{\emptyset, \{\{2\}\}, \{3\}, \{\{2\}, 3\}\big\}}$

(c) $\mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}(Z) =$
$\big\{\emptyset, \{1\}, \{\{2\}\}, \{3\}, \{4\}, \{1, \{2\}\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{\{2\}, 3\}, \{\{2\}, 4\}, \{3,4\},$
$\{1, \{2\}, 3\}, \{1, \{2\}, 4\}, \{1,3,4\}, \{\{2\}, 3, 4\}, X\big\} \setminus$
$\big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{\emptyset\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,\emptyset\}, \{2,3\}, \{2,\emptyset\}, \{3,\emptyset\},$
$\{1,2,3\}, \{1,2,\emptyset\}, \{1,3,\emptyset\}, \{2,3,\emptyset\}, Z\big\} =$

$$\boxed{\begin{array}{l}\big\{\{\{2\}\}, \{4\}, \{1, \{2\}\}, \{1,4\}, \{\{2\}, 3\}, \{\{2\}, 4\}, \{3,4\}, \\ \quad \{1, \{2\}, 3\}, \{1, \{2\}, 4\}, \{1,3,4\}, \{\{2\}, 3, 4\}, X\big\}\end{array}}$$

(d) $(X \setminus Y) \times Y = \{\{2\}, 3\} \times Y = \boxed{\big\{(\{2\},1), (\{2\},2), (\{2\},\{3\}), (\{2\},4), (3,1), (3,2), (3,\{3\}), (3,4)\big\}}$

(e) $X \times (Y \setminus X) = X \times \{2, \{3\}\} = \boxed{\big\{(1,2), (\{2\},2), (3,2), (4,2), (1,\{3\}), (\{2\},\{3\}), (3,\{3\}), (4,\{3\})\big\}}$

(f) $(X \setminus Z) \times (Y \setminus Z) = \{\{2\},4\} \times \{\{3\},4\} = \boxed{\big\{(\{2\},\{3\}), (\{2\},4), (4,\{3\}), (4,4)\big\}}$

Problema 4.
Definim sobre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ les relacions R i S de la següent forma:

$$a\,R\,b \iff \frac{a}{b} \in \mathbb{N} \qquad\qquad a\,S\,b \iff \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$$

Recordem primer algunes definicions. Sigui H una relació sobre un conjunt A.

- H és **reflexiva** sii per tot $a \in A$, aHa.
- H és **simètrica** sii per tot $a, b \in A$, aHb implica bHa.
- H és **antisimètrica** sii per tot $a, b \in A$, aHb i bHa implica $a = b$.
- H és **transitiva** sii per tot $a, b, c \in A$, aHb i bHc implica aHb.
- H és d'**equivalència** sii és reflexiva, simètrica i transitiva.
- H és **ordre** sii és reflexiva, transitiva i antisimètrica.
- H és **ordre <u>total</u>** sii és ordre i per tot $a, b \in A$, aHb o bHa.

(a) $\boxed{\text{Digues si } R \text{ i } S \text{ són relacions d'equivalència, d'ordre o d'ordre total.}}$

Anem a veure quines propietats satisfà cada relació.

- R **és reflexiva** ja que per tot $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{N}$.
- S **és reflexiva** ja que per tot $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{Q}$.
- R **no és simètrica** ja que $\frac{2}{1} = 2 \in \mathbb{N}$ però $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.
- S **és simètrica** ja que si $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ són tals que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, com que $a, b \neq 0$, aleshores $\frac{a}{b} \neq 0$, i per tant $\frac{a}{b}$ té invers, que és $\frac{b}{a}$ i pertany a $\mathbb{Q}$.
- R **és transitiva** ja que donats $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ i $\frac{b}{c} \in \mathbb{N}$, aleshores $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \in \mathbb{N}$ perquè els nombres naturals són tancats pel producte.
- S **és transitiva** ja que donats $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ i $\frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$, aleshores $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ perquè els nombres racionals són tancats pel producte.
- R **és antisimètrica** ja que donats $a, b, \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ com que $a \neq 0$, aleshores $a \geqslant b$ i si $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$ com que $b \neq 0$, aleshores $a \leqslant b$. Per tant si $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ i $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$ aleshores $a = b$.
- S **no és antisimètrica** ja que $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ i $\frac{2}{1} \in \mathbb{Q}$ i $1 \neq 2$.

Observem que com que R és reflexiva, transitiva i antisimètrica, R **és ordre**; i **no és equivalència** ja que no satisfà la simètrica.

R **no és ordre total** ja que $\frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$ i $\frac{5}{3} \notin \mathbb{N}$.

Observem que com que S és reflexiva, simètrica i transitiva, S **és relació d'equivalència**; i com que S no satisfà l'antisimètrica, **no és d'ordre** i per tant **tampoc és ordre total**.

(b) $\boxed{\text{En el cas que alguna d'elles sigui d'equivalència, digues qui són } \overline{3}, \ \overline{\tfrac{2}{3}} \text{ i } \overline{\pi}.}$

- $\overline{3} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : xS3\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{x}{3} \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
- $\overline{\frac{2}{3}} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ja que $\frac{2}{3}S3$.
- $\overline{\pi} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : xS\pi\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{x}{\pi} \in \mathbb{Q}\} = \{q\pi : q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$.

Problema 5.

Siguin $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les funcions definides de la següent manera:

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ -x & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} -3x - 3 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 3x + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

(a) $\boxed{\text{Troba } f\big([-1,1]\big).}$ f és una funció definida en dos trossos, i en cadascun d'ells és contínua i monòtona; en aquests casos, la imatge d'un interval és l'interval determinat per les imatges dels extrems:

$$f\big([-1,1]\big) = f\big([-1,0]\big) \cup f\big((0,1]\big) = [-1,0] \cup [-1,0) = [-1,0]$$

(b) Troba $g^{-1}([-1,1])$. Com que g no és injectiva, *no existeix* la funció inversa g^{-1}. Per a calcular la imatge inversa d'un conjunt cal distingir casos correctament, i en cada cas aplicar la definició de g:

$$\begin{aligned} g^{-1}([-1,1]) &= \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in [-1,1]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leqslant g(x) \leqslant 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leqslant g(x) \leqslant 1 \,,\ x \leqslant -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -1 \leqslant g(x) \leqslant 1 \,,\ x > -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leqslant -3x-3 \leqslant 1 \,,\ x \leqslant -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -1 \leqslant 3x+3 \leqslant 1 \,,\ x > -1\} \end{aligned}$$

i fent càlculs, en cada cas, obtenim

$$= \left[-\frac{4}{3}, -1\right] \cup \left(-1, -\frac{2}{3}\right] = \left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right]$$

Noti's que *no és correcte* actuar com en l'apartat (a), com si g^{-1} fos una funció definida per casos separats per -1; ambdues coses són errònies, malgrat que segons com es faci el resultat final pot ser el mateix!

(c) Troba la funció $g \circ f$. La funció $g(f(x))$ estarà definida per casos en funció de $f(x)$, i aquesta en funció de x, per tant sortiran quatre casos, ja que la separació és un punts diferents, i g aquí no depèn de x sinó de $f(x)$! Observem que $f(x) \leqslant -1$ quan $x \leqslant -1$ i quan $x \geqslant 1$, però en cada cas la definició de $f(x)$ és diferent! Aleshores:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left\{ \begin{array}{ll} -3f(x)-3 & \text{si } f(x) \leqslant -1 \\ 3f(x)-3 & \text{si } f(x) > -1 \end{array} \right\} = \begin{cases} -3x-3 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -3(-x)-3 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 3x+3 & \text{si } -1 < x \leqslant 0 \\ 3(-x)+3 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

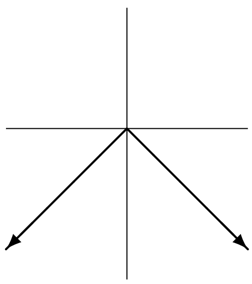
$$= \begin{cases} -3x-3 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 3x+3 & \text{si } -1 < x \leqslant 0 \\ -3x+3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3x-3 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

Vegeu la gràfica al final.

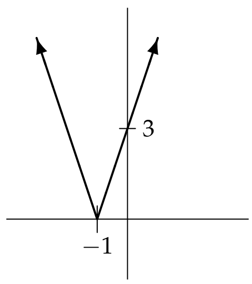
Es pot observar que $f(x) = -|x|$ i que $g(x) = 3\,|x+1|$, per tant $g \circ f = 3\,\big|-|x|+1\big|$. Usant aquestes espressions i distingint els casos per als valors absoluts també s'arriba a la mateixa definició de $g \circ f$.

(d) Digues si $g \circ f$ és injectiva. En la gràfica *veiem* clarament que $g \circ f$ **no és injectiva**, però cal mostrar un *contraexemple* concret, per exemple $(g \circ f)(-1) = (g \circ f)(1) = 0$ però $-1 \neq 1$. Ranoar-ho per casos és perillós, ja que en cada un dels quatre casos, per separat, la funció és injectiva! Molta gent ha oblidat que dos punts de casos diferents també poden donar la mateixa imatge.

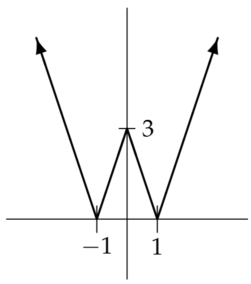
(e) Digues si $g \circ f$ és exhaustiva. També en la gràfica *veiem* clarament que $g \circ f$ només pren valors positius i el seu recorregut és $[0, +\infty)$, que no és tot $\mathbb{R}$, per tant **no és exhaustiva**. Es *demostra* fàcilment (per casos) que per tot $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) \geqslant 0$: per exemple si $x \leqslant -1$ aleshores $(g \circ f)(x) = -3x-3 \geqslant 0$, i semblantment en els altres casos.



Gràfica de f



Gràfica de g



Gràfica de $g \circ f$