JUSTIFIQUEU DETALLADAMENT LES VOSTRES RESPOSTES

1. Proveu a partir de la definició de límit d'una successió que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{4n^2}{3n^2 - n - 1} = \frac{4}{3}.$$

2. Considereu la successió $\{x_n, n \geq 1\}$ definida per $x_1 = 2$ i

$$x_{n+1} = \frac{3 + x_n^2}{4}, \qquad \text{per } n \geq 1.$$

   Estudieu la convergència d'aquesta successió, i calculeu-ne, si existeix, el límit.

3. Calculeu

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n^3 \left(\frac{1}{(n^2+1)^2} + \frac{1}{(n^2+2)^2} + \cdot + \frac{1}{(n^2+n)^2} \right)$$

   i

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1 + (2!)^2 + (3!)^2 + \cdots + (n!)^2}{(n!)^2}.$$

4. Calculeu

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{|x|} \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+4}}.$$

5. Determineu els valors dels paràmetres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que fan que la funció definida per

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \sin x}{x}, & x < 0, \\ \sqrt{\beta^2 - x^2}, & 0 \leq x < |\beta|, \\ \alpha^2 - 4 + (x^2 - \beta^2), & x \geq |\beta|. \end{cases}$$

   sigui contínua.

6. Sigui $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ una funció contínua parell amb $f(0) = -1$ i $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$. Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té almenys una solució positiva i una solució negativa.

TOTS ELS EXERCICIS VALEN EL MATEIX

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT

POSEU EL VOSTRE NOM I COGNOM EN CADA FULL EN MAJÚSCULES

JUSTIFIQUEU DETALLADAMENT LES VOSTRES RESPOSTES

1. (a) Proveu per inducció que si $t \neq 1$ i $n \geq 1$ aleshores
$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}$$
i deduiu que
$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-t} - (1 + t + t^2 + \cdots + t^n)}{t^{n+1}} = 1.$$
(b) Donada $f(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, calculeu el domini de f. Digueu si f és contínua al seu domini, i si hi és derivable, i calculeu f' allà on sigui possible.
(c) Calculeu el polinomi de Taylor de f a l'origen, de grau n .

2. Proveu que
$$0 \leq 2x\arctan(x) - \log(1+x^2) \leq x^2$$
per a tot $x \in \mathbb{R}$. Calculeu també el l'ımit
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{2x\arctan(x) - \log(1+x^2)}{x^2}.$$

3. Per a cada $n \in \mathbb{N}$ sigui la funció $f_n : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longmapsto \mathbb{R}$ definida per
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{(\tan x)^n}{x^2}, & \text{si } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
Per a quins valors de n és derivable f_n? Per a quins valors de n la funció f_n' és contínua?

4. Sigui l'equació $e^x + \sin x = \pi$.
   (a) Demostreu que té una única solució positiva ($x_0 > 0$).
   (b) Doneu un interval de longitud menor que 1 que contingui aquesta solució.
   (c) Té solucions negatives l'equació?

5. Sigui f i g dues funcions derivables definides en un interval obert I i sigui $a \in I$. Aleshores demostreu que $f \cdot g$ és derivable i doneu la derivada.

TOTS ELS EXERCICIS VALEN EL MATEIX

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT

POSEU EL VOSTRE NOM I COGNOM EN CADA FULL EN MAJÚSCULES