

1. (a) [6 punts] Definiu el concepte de funció derivable en un punt  $x_0$ .  
(b) [20 punts] Per a cada  $n \in \mathbb{N}$ , sigui  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funció definida per

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Estudieu la derivabilitat de la funció  $f_n$  per als diferents valors de  $n \in \mathbb{N}$ . Determineu la funció derivada  $f'_n$  en el cas que  $f_n$  sigui derivable en tots els punts.

2. (a) [12 punts] Enuncieu el Teorema del valor mitjà de Lagrange i la regla de l'Hôpital.  
(b) [14 punts] Trobeu el màxim i el mínim absolut en l'interval  $[0, 3]$  de la funció

$$f(x) = |2 - x| - |x^2 - 1|.$$

- (c) [14 punts] Sigui  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funció dues vegades derivable tal que  $f''(x) \neq 0$  per a tot  $x \in \mathbb{R}$ . A més es compleix  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 3$  i  $f(3) = 1$ . Proveu que l'equació  $f(x) = x$  té exactament dues solucions reals.
3. (a) [8 punts] Calculeu el polinomi de Taylor d'ordre 5 de la funció  $f(x) = x \cos(x^2)$  al voltant del punt  $x_0 = 0$ .  
(b) [14 punts] Calculeu el límit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \tan x)^8}{\left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)^6}.$$

- (c) [12 punts] Considerem la funció

$$f(x) = \begin{cases} x \sqrt{|x|} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

És  $x = 0$  un punt d'inflexió de  $f$ ? Justifiqueu la resposta.

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT  
POSEU EL VOSTRE NOM I COGNOM EN CADA FULL  
JUSTIFIQUEU LES RESPOSTES