INTRODUCCIÓ AL CÀLCUL DIFERENCIAL

Aquest curs farem una introducció a les propietats més importants de les funcions d'una variable. Sobretot continuïtat i derivabilitat.

CAPÍTOL 1. PRELIMINARS

En aquest tema parlarem de conjunts, suprem, aplicacions, funcions elementals, etc.

1.1. CONJUNTS DE NOMBRES. INTERVALS

Segurament ja coneixeu els conjunts següents:

els nombres naturals $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$,

els nombres enters $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots n \dots\}$

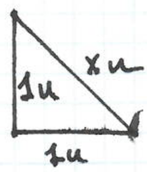
Podem construir els nombres racionals a partir dels enters:

$$\mathbb{Q} = \{ n/m \, ; \, n \in \mathbb{Z}, \, m \in \mathbb{Z} - \{0\} \}.$$

Fixem-nos com amb aquests nombres no en tenim prou plantejant-nos un problema molt fàcil.

OBSERVACIÓ:

Considerem el triangle rectangle següent amb dos costats d'1u i una hipotenusa de x unitats. El Teorema de Pitàgores ens diu que



$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \implies x = \sqrt{2}$$

Ens podríem preguntar si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ¿¿

Suposem que sí, és a dir, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Argumentarem per un mètode anomenat reducció a l'absurd

Si $\sqrt{2}$ és racional, tenim que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ i sense factors en comú. Suposem n, m positius.

Així,

$$m\sqrt{2} = n \implies 2m^2 = n^2 \implies n \text{ és parell}, \; n = 2k, \; k \in \mathbb{N}$$

I per tant,

$$2m^2 = 4k^2 \implies m^2 = 2k^2 \implies m \text{ és parell}.$$

Això és contradictori, els dos són parells però en canvi no tenen factors en comú. Per tant, $\sqrt{2}$ no és racional.

Això ens indica que necessitem més nombres.

Nombres reals

Es solen representar en una recta ordenats. No hi ha una descripció explícita dels nombres reals. La definició és delicada i no la veurem en aquest curs. Podríem dir que els nombres reals $\mathbb{R}$ estan formats pels x que tenen una expressió decimal del tipus

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots,$$

on $a_0 \in \mathbb{Z}$ i $a_n \in \{0,1,2,\cdots,8,9\}$, $n \in \mathbb{N}$. Amb aquesta expressió tenim que si $a_0 \geq 0$,

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots .$$

Subconjunts. Intervals

Els subconjunts de nombres poden estar determinats explícitament com per exemple

$$\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\},$$

o per una propietat com

$$\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \geq 3\}.$$

A partir de conjunts se'n podem construir d'altres. Siguin A i B dos subconjunts de $\mathbb{R}$ podem construir els conjunts:

- UNIÓ : $A \cup B = \{x; x \in A \text{ o } x \in B\}$,
- INTERSECCIÓ : $A \cap B = \{x; x \in A \text{ i } x \in B\}$,
- COMPLEMENTARI : $A^c = \{x, x \in \mathbb{R} \setminus A\} = \{x, x \notin A\} = \mathbb{R} \setminus A$,
- PRODUCTE CARTESIÀ : $A \times B = \{(a,b), a \in A, b \in B\}$.

Els subconjunts de $\mathbb{R}$ més utilitzats són els intervals. Anomenarem interval obert d'extrems a i b, $a<b$, al conjunt

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\},$$

interval tancat d'extrems a i b, $a \leq b$, al conjunt

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}.$$

També podem ser mixtes. Si no precisem com és, per defecte l'agafarem obert.

També s'utilitzen com entorns, intervals centrats a a (oberts o tancats) i de radi r:

$$I(a,r) = \{x \in \mathbb{R},\ a-r < x < a+r\} = \{x \in \mathbb{R},\ |x-a| < r\},$$
$$\bar{I}(a,r) = \{x \in \mathbb{R},\ a-r \leq x \leq a+r\} = \{x \in \mathbb{R},\ |x-a| \leq r\}.$$

Existeixen menys racionals $\mathbb{Q}$ que irracionals $\mathbb{I}$, tot i així són densos en $\mathbb{R}$. Per qualsevol interval $I \subseteq \mathbb{R}$ tenim que

$$I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset,$$
$$I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = I \cap \mathbb{I} \neq \emptyset,$$

i això implica que qualsevol $x \in \mathbb{R}$ es pot aproximar per racionals i irracionals.

1.2 AXIOMA DEL SUPREM

Considerem un subconjunt A no buit de $\mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Anomenem $C \in \mathbb{R}$ una cota superior de A si $x \leq C$ per a tot $x \in A$. Anàlogament $c \in \mathbb{R}$ és una cota inferior de A si $c \leq x$ per a tot $x \in A$.

Quan existeix una cota superior diem que el conjunt A és acotat superiorment (anàlogament acotat inferiorment). Si existeixen cotes superiors i inferiors diem que A és acotat.

Si una cota superior C de A pertany al conjunt A diem que C és el màxim de A, i escrivim $C = \max A$. De manera similar, definiríem el mínim.

Definició: Sigui A un conjunt acotat superiorment. S'anomena suprem de A al mínim del conjunt de les cotes superiors de A, i es denota $\sup A$. De manera anàloga per l'ínfim.

Axioma del suprem

Tot conjunt no buit A acotat superiorment té suprem i tot conjunt no buit A acotat inferiorment té ínfim.

Exemples:

1) El conjunt $A = [1, 5)$ està acotat. Es compleix:

$$\min A = \inf A = 1$$
$\sup A = 5$ però no té màxim.

2) El conjunt $A = \{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ està acotat. Es compleix:

$$\max A = \sup A = 2$$
$\inf A = 1$ però no té mínim.

1.3 APLICACIONS i PROPIETATS

Les funcions són un cas particular de les aplicacions.

Definició: Una aplicació entre dos conjunts A i B és un subconjunt S del producte cartesià $A \times B$ en el que per cada $a \in A$ existeix un únic $b \in B$ tal que $(a,b) \in S$.

En general designarem l'aplicació per f (o una lletra semblant) i escriurem

$$f: A \longrightarrow B$$

i en lloc de $(a,b) \in S$ direm $b = f(a)$. A l'element b se l'anomena imatge d'a i a a l'antiimatge de b.

El que caracteritza una aplicació és el fet que per tot $a \in A$ té sempre una imatge i només una; en canvi pot passar que alguns elements $b \in B$ no tinguin cap antiimatge o en tinguin més d'una.

Donada una aplicació $f: A \longrightarrow B$ diem domini al conjunt A i s'escriu $Dom(f) = A$. Anomenem recorregut de f al subconjunt de B format pels elements que tenen antiimatge

$$R(f) = \{b \in B \text{ tq } \exists a \in A \text{ complint } f(a) = b\}.$$

Donat un subconjunt $C \subseteq B$, diem antiimatge de C al conjunt d'elements d'A que son enviats a C, és a dir,

$$f^{-1}(C) = \{x \in A,\ f(x) \in C\}.$$

Anomenem gràfica de f al conjunt

$$G(f) = \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\} \subseteq A \times B.$$

Definició: Una aplicació $f: A \longrightarrow B$ es diu injectiva si per cada element de B té com a molt una antiimatge o equivalentment, si $f(a) = f(a')$, $a, a' \in A \Rightarrow a = a'$.

L'aplicació és exhaustiva si cada element $b \in B$ té almenys una antiimatge, és a dir, $R(f) = B$.

L'aplicació és bijectiva si és injectiva i exhaustiva a la vegada, és a dir, cada element de B té exactament una antiimatge.

Si una funció és bijectiva es pot definir l'aplicació inversa $f^{-1}: B \longrightarrow A$ mitjançant

$$f^{-1}(b) = a \quad tq \quad f(a) = b.$$

Definició: Una funció és una aplicació entre nombres.

Exemple: Notem $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} = (0, +\infty)$.

1) La funció $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, no és ni injectiva ni exhaustiva i $R(f) = [0, +\infty)$.

2) La funció $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, és injectiva però no exhaustiva.

3) La funció $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$, és exhaustiva però no injectiva.

4) La funció $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$, és bijectiva i la seva inversa és

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

Si A i B són finits i existeix una bijecció $f: A \longrightarrow B$, aleshores A i B tenen el mateix nombre d'elements. Si són infinits no és necessàriament així, per exemple $f(n) = 2n$.

Els conjunts que estan en bijecció amb $\mathbb{N}$ s'anomenen conjunts numerables.

1.4 FUNCIONS ELEMENTALS

Parlaré d'un seguit de funcions que ben segur que ja heu estudiat anteriorment.

Polinomis

Un polinomi de grau n té l'expressió següent:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0.$$

El seu domini és tot $\mathbb{R}$ i el recorregut depèn del grau i els coeficients.

Una funció racional és el quocient entre dos polinomis:

$$\varphi(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p, q \text{ polinomis}.$$

El seu domini és

$$\mathrm{Dom}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R},\ q(x) \neq 0\},$$

i el recorregut és variable.

El valor absolut

Definim el valor absolut com:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Observem que $|x|$ és la distància al 0 i $|x-a|$ la distància entre x i a. Tenim que

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \quad \text{i} \quad R(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

Un resultat molt útil que usarem sovint és la desigualtat triangular

$$|x+y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Exponencials

Donat $a > 0$, la funció exponencial de base a és

$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es compleixen les propietats següents:

- Si $x = n \in \mathbb{N}$, $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ vegades}}$.
- $a^0 = 1$.
- Si $x = -n$, $n \in \mathbb{N}$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Si $x = \frac{1}{n}$ amb $n \in \mathbb{N}$, existeix $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tal que $\alpha^n = a$ (això es pot demostrar), i aleshores $a^{1/n} = \alpha$, i s'escriu $\sqrt[n]{a}$.

- Si $x = \frac{n}{m}$ amb $n, m \in \mathbb{Z}$ sense factors en comú i $m > 0$, aleshores tenim que

$$a^{n/m} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$$

i ho escrivim $\sqrt[m]{a^n}$.

- Si $x \in \mathbb{R}$, $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots$ i les aproximacions $x_k = a_0, a_1 a_2 \cdots a_k \in \mathbb{Q}$. Es pot demostrar que

$$a^{x_k} \xrightarrow[k \nearrow +\infty]{} a.$$

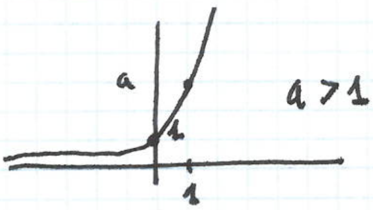
<u>Propietats:</u> Siguin $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}$. Aleshores:

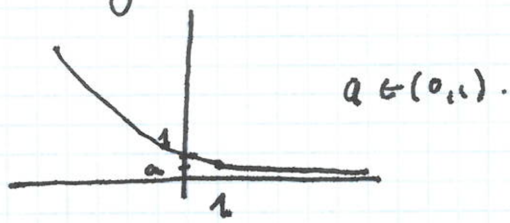
a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,

b) $(a^x)^y = a^{xy}$,

c) $(ab)^x = a^x b^x$,

d) Si $a > 1$, a^x és creixent ($x < y \Rightarrow a^x < a^y$) i si $a \in (0,1)$, a^x és decreixent ($x < y \Rightarrow a^x > a^y$).





Més endavant parlarem d'un nombre que facilita els càlculs de moltes operacions, és un nombre que fa que la pendent de la recta tangent a la gràfica en el punt $(0, 1)$ val 1. S'anomena e.

Logaritmes

La funció exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$, $y = f(x) = a^x$, $a > 0$, és bijectiva i ens permet construir la seva inversa

$$f^{-1} : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longrightarrow \log_a y$$

i s'anomena logaritme en base a de y,

$$\log_a y = x \iff a^x = y.$$

El logaritme en base e se'n diu logaritme neperià i s'escriu $\log y$ o $\ln y$. No significa logaritme en base 10

Propietats: Siguin $a, b > 0$ i $x, y > 0$. Llavors:

a) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_b y$,

b) $\log_a x^y = y \log_a x$, aquí y pot ser $y \in \mathbb{R}$,

c) $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$, $b > 0$ (fórmula del canvi de variable).

Prova.

a) És una conseqüència directa de les propietats de l'exponencial.

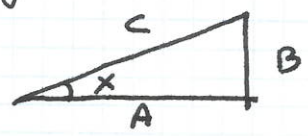
b) Com tenim que $(a^x)^y = a^{xy}$ es compleix
$$a^{y \log_a x} = (a^{\log_a x})^y = x^y.$$
Si anomenem
$$z = \log_a x^y,$$
llavors
$$a^z = x^y = a^{y \log_a x}.$$

c) Siguin
$$z = \log_a x \quad i \quad y = \log_b x.$$
Així,
$$a^z = b^y = x,$$
i
$$z = \log_a b^y = y \log_a b,$$
obtenint el resultat $\blacksquare$

Utilitzant l'últim apartat podem calcular qualsevol logaritme en funció del neperià:
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$
Antigament amb les taules del logaritme neperià es podia calcular qualsevol altre logaritme.

Funcions trigonomètriques

Són les funcions que apareixen en la mesura d'angles de triangles rectangles. Tenint en compte el triangle

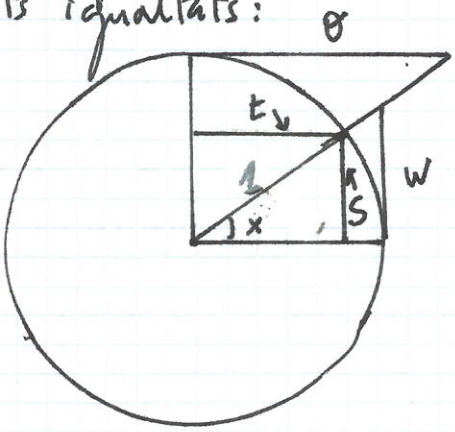


definim, com ja sabeu,

$$\sin x = \frac{B}{C} \; ; \; \cos x = \frac{A}{C}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{B}{A},$$

$$\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{A}{B}.$$

Si ens situem en un cercle de radi 1 i considerem l'angle x en radians que dona lloc al triangle dibuixat. Tenim les següents igualtats:



$$\sin x = s,$$
$$\cos x = t,$$
$$\tan x = \frac{s}{t} = \frac{w}{1} = w,$$
$$\operatorname{cotan} x = \frac{t}{s} = \frac{\theta}{1}$$

Donarem una sèrie de propietats molt utilitzades a mode de recordatori. Totes elles ja us són conegudes.

<u>Propietats</u>: $\forall x \in \mathbb{R}$,

1) Les funcions sinus i cosinus són 2π-periòdiques,
$$\sin(x+2\pi) = \sin x \; ; \; \cos(x+2\pi) = \cos x.$$

2) $|\sin x| \leq 1$,
$|\cos x| \leq 1$.

3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

4) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$,
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

5) $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$,
$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \sin y$.

Composició de funcions

Podem construir altres funcions a partir de sumes, restes, multiplicaci divisions o composicions de funcions conegudes. Suposem que tenim que A, B, C i D conjunts de nombres, $B \subseteq C$ i les funcions

$$f : A \longrightarrow B, \quad g : C \longrightarrow D.$$

Definirem la composició de f i g com la funció

$$g \circ f : A \longrightarrow D,$$

com

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A.$$

Òbviament no és commutativa.

Observació: No totes les funcions conegudes o importants són elementals o poden obtenir-se a partir d'operacions algebraiques o composicions de funcions elementals.

1.5 EXERCICIS

① Calculeu el domini i el recorregut de la funció $f(x) = \sqrt{2x+1}$. Demostreu que és injectiva i determineu la funció inversa.

$\text{Dom} f = \{x \in \mathbb{R},\ 2x+1 \geq 0\}$

$$2x+1 \geq 0 \iff 2x \geq -1 \iff x \geq -\frac{1}{2} \implies \text{Dom} f = [-\tfrac{1}{2}, +\infty)$$

$R(f) = [0, +\infty)$ perquè l'arrel és positiva.

Injectivitat: Suposem $f(x) = f(y)$, aleshores $\sqrt{2x+1} = \sqrt{2y+1}$, i per tant $x = y$, i això implica la injectivitat.

Inversa: La funció és injectiva, llavors si considerem la funció $f : [-\frac{1}{2}, +\infty) \longrightarrow R(f)$, aquesta és bijectiva i podem buscar-ne la inversa.

Sigui

$$y = \sqrt{2x+1} \implies y^2 = 2x+1 \implies x = \frac{y^2-1}{2}.$$

Així,

$$f^{-1}(y) = \frac{y^2-1}{2}.$$

② Donada la funció $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, demostreu que val la igualtat

$$f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right).$$

Operem

$$f(x_1)+f(x_2) = \log\frac{1-x_1}{1+x_1} + \log\frac{1-x_2}{1+x_2} = \log\left(\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\right)$$
$$= \log\left(\frac{1-x_1-x_2+x_1x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}\right),$$

i d'altra banda,

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right) = \log\left(\frac{1-\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}{1+\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}\right) = \log\left(\frac{1-x_1-x_2+x_1x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}\right).$$

(3) Siguin A, B, C conjunts i $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ funcions. Demostreu:

(a) Si $g\circ f$ és injectiva, llavors f és injectiva.

(b) Si $g\circ f$ és exhaustiva, llavors g és exhaustiva.

(a) Si $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(y) \Longrightarrow x = y$ perquè $g\circ f$ és injectiva.
Suposem ara que tenim $f(x) = f(y)$,

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Longrightarrow x = y,$$

i, per tant, f és injectiva.

(b) Assumim que $g\circ f$ és exhaustiva. Com

$$g\circ f : A \longrightarrow C,$$

$\forall c\in C$, $\exists a \in A$ tal que $(g\circ f)(a) = c$.
Ara considerem

$$g: B \longrightarrow C,$$

per qualsevol $c\in C$ tenim que $\exists a\in A$ tal que $g(f(a)) = c$, i llavors $\exists b = f(a) \in B$ tal que $g(b) = c$, el que implica que g és exhaustiva.