

UNIVERSITAT DE BARCELONA  
*Facultat de Matemàtiques i Enginyeria Informàtica*

APUNTS

**Grau en Matemàtiques**

*Curs 2022-2023 / Sisè Semestre*

# Càlcul Integral en Diverses Variables

*Autor:*  
Mario VILAR

*Professor/a:*  
Dr. Xavier MASSANEDA

## PRESENTACIÓ DE L'ASSIGNATURA

Aquesta assignatura tracta de les integrals múltiples de Riemann, de les integrals de línia i de les integrals de superfície. També proporciona una introducció a l'integració de Lebesgue. *Sintetitzats durant les classes de teoria, vigilar amb les errades: s'han fet poques correccions posteriors.*



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

CLASSIFICACIÓ AMS (2020): 00-01, 97I50, 97I60, 97N40, 97N70.

Aquesta obra està subjecta a una llicència de Creative Commons "Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada 4.0 Internacional".





# *Índex*

---

<b>Introducció</b>	<b>V</b>
<b>Taula de continguts</b>	<b>VII</b>
<b>I Teoria d'integració</b>	<b>1</b>
<b>1 Integració de Lebesgue</b>	<b>3</b>
1.1 Introducció . . . . .	3
1.2 Mesura exterior de Lebesgue . . . . .	5
1.3 Mesura de Lebesgue . . . . .	8
1.4 Funcions mesurables . . . . .	10
1.4.1 Funcions constants . . . . .	12
1.4.2 Funcions característiques de conjunts mesurables . . . . .	12
1.4.3 Funcions contínues . . . . .	12
1.4.4 Funcions gairebé iguals a una funció mesurable . . . . .	13
1.5 Funcions simples . . . . .	17
1.6 La integral de Lebesgue de funcions mesurables . . . . .	18
1.6.1 Primer pas . . . . .	18
1.6.2 Pas segon . . . . .	20
1.6.3 Tercer pas . . . . .	22
1.7 Relació entre Riemann i Lebesgue . . . . .	24
1.8 Integral de Lebesgue i teoremes de convergència . . . . .	24
<b>2 Mètode d'integració</b>	<b>31</b>
2.1 Càlcul d'integrals de funcions de més d'una variable . . . . .	31
2.2 Canvi de variables . . . . .	34
2.2.1 Canvis de variables habituals . . . . .	36
2.3 Exercicis finals . . . . .	39
<b>II Càlcul vectorial</b>	<b>47</b>
<b>3 Integrals de línia i teorema de Green</b>	<b>49</b>
3.1 Corbes parametritzades . . . . .	49
3.2 Longitud d'una corba i paràmetre arc . . . . .	52
3.3 Integrals de funcions i camps sobre corbes . . . . .	55

3.4	Gradient d'una funció i camps conservatius . . . . .	57
3.5	Teorema de Green . . . . .	61
3.6	Exercicis finals . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Integrals de superfícies</b>	<b>75</b>
4.1	Superfícies parametritzades . . . . .	75
4.2	Espai tangent i àrea d'una superfície . . . . .	78
4.2.1	Espai tangent . . . . .	78
4.2.2	Àrea d'una superfície elemental . . . . .	81
4.3	Vora orientada d'una superfície . . . . .	83
4.4	Integrals de superfície i flux de camp . . . . .	85
4.5	Rotacional i teorema d'Stokes . . . . .	88
4.6	Superfícies regulars . . . . .	92
4.7	Teorema de la divergència . . . . .	95
4.8	Exercicis finals . . . . .	99
<b>III</b>	<b>Apèndixos</b>	<b>105</b>
<b>A</b>	<b>Introducció al càlcul integral</b>	<b>107</b>
A.1	Integrals de Riemann . . . . .	107
A.2	Teorema fonamental del càlcul . . . . .	109
A.3	Integració impròpia . . . . .	109
<b>B</b>	<b>Llenguatge de les formes diferencials</b>	<b>113</b>
B.1	Introducció . . . . .	113
B.2	Integració de formes . . . . .	114
	<b>Bibliografia</b>	<b>115</b>
	<b>Índex terminològic</b>	<b>117</b>

## Introducció

---

*Yo, yo yo, 148-3 to the 3 to the 6 to the 9, representing the ABQ, what up biatch?  
Leave it at the tone.*

---

Jesse PINKMAN, *Breaking Bad*

Primer de tot, trobareu que hi ha un índex, on hi distingim els diferents apartats ordenats seguint el meu propi criteri i, de tant en tant, seguint l'ordre cronològic del curs. Hi ha capítols, seccions, subseccions (i fins i tot subsubseccions). Us faig cinc cèntims de com he organitzat els encapçalaments de cada pàgina:

1. el número de l'últim capítol/secció/subsecció, depèn de la profunditat que hi hagi definida en aquell moment, figurarà en cada cantonada superior de pàgina parella (per exemple, 1.2);
2. el nom del capítol es trobarà a la part dreta de la capçalera de les pàgines parelles (per exemple, «Divisibilitat i nombres primers»);
3. el nom de l'última secció/subsecció de la pàgina, a la cantonada dreta superior de les pàgines parelles (per exemple, «Polinomis: algorisme d'Euclides»);
4. el número de l'últim teorema, definició... de la pàgina en qüestió es trobarà a les pàgines senars, a la cantonada superior dreta, *destacat en el color de la seva capçalera corresponent* (per exemple, **1.2.3**).

A més, hi ha una taula, la taula de continguts. En aquest sentit, tal com acabem de dir, es veu fàcilment que s'ha seguit una mena de *sorting-by-color* per poder treballar de manera més eficient amb els diferents tipus d'enunciats matemàtics. D'aquesta manera, si busqueu una definició, un teorema... podreu distingir que estan destacats amb colors diferents (ara els introduïm) i trobar-los molt ràpidament:

1. Teoremes, proposicions, lemes, corol·laris, propietats, conjectures, processos i exercicis tindran aquest format (capçalera destacada amb color gris fosc):

**Teorema.** *Compte! L'enunciat del teorema també serà en cursiva! Jove xef, porti whisky amb quinze glaçons d'hidrogen, coi!*

2. Les definicions i notacions tindran aquest format (capçalera de color gris clar):

**Definició.** Aqueix betzol, Jan, comprava whisky de figa.

3. Les remarques i exemples tindran aquest format:

**Observació.** Zel de grum: quetxup, whisky, cafè, bon vi; ja!

Després de molts anys fent-ho malament, ara sol quedaran numerades aquelles equacions a les quals em referiré més endavant. És la *filosofia dominant* en la majoria de textos matemàtics (té nom i tot, es diu la *regla d'Occam*).

Per últim, m'estalviaré de comentar l'índex terminològic perquè el seu propòsit és clar i, en efecte, paral·lel al de l'organització d'aquest document: poder facilitar-vos al màxim la feina per localitzar qualsevol concepte que desitgeu. Espero que us serveixin d'alguna cosa aquests apunts, els he fet amb tot l'amor del món. Sort!

Mario VILAR  
Sitges, Barcelona  
17 de juny de 2023

# Taula de continguts

I	CAPÍTOL 1	I
Exemple 1.1.1	—Exemple d'Arquimedes . . . . .	3
Observació 1.1.2	. . . . .	4
Definició 1.1.3	— <i>Com hauria de ser una mesura?</i> . . . . .	4
Observació 1.1.4	—Contraexemple de Vitali . . . . .	5
Definició 1.2.1	—Mesura i interval a $\mathbb{R}^n$ . . . . .	5
Definició 1.2.2	—Volum d'un interval . . . . .	5
Definició 1.2.3	—Mesura exterior de Lebesgue . . . . .	6
Exemple 1.2.4	. . . . .	6
Observació 1.2.5	. . . . .	6
Propietat 1.2.6	. . . . .	7
Propietat 1.2.7	—Invariant per translacions . . . . .	7
Propietat 1.2.8	— $\sigma$ -subadditivitat . . . . .	7
Observació 1.2.9	. . . . .	8
Definició 1.3.1	— $\sigma$ -àlgebra . . . . .	8
Definició 1.3.2	—Mesura positiva . . . . .	8
Definició 1.3.3	—Conjunt mesurable Lebesgue . . . . .	8
Definició 1.3.4	—Conjunt mesurable Lebesgue, alternativa . . . . .	8
Observació 1.3.5	. . . . .	8
Definició 1.3.6	—Mesura de Lebesgue . . . . .	9
Teorema 1.3.7	—Teorema de Carathéodory . . . . .	9
Observació 1.3.8	. . . . .	9
Notació 1.3.9	—Almost everywhere . . . . .	9
Propietat 1.3.10	. . . . .	9
Observació 1.3.11	. . . . .	9
Proposició 1.3.12	. . . . .	10
Teorema 1.3.13	. . . . .	10
Proposició 1.4.1	. . . . .	11
Definició 1.4.2	—Funció mesurable . . . . .	12
Proposició 1.4.3	. . . . .	12
Exemple 1.4.4	. . . . .	13
Propietat 1.4.5	. . . . .	14
Observació 1.4.6	. . . . .	14
Propietat 1.4.7	. . . . .	14
Exercici 1.4.8	. . . . .	14

<b>Exercici 1.4.9</b> . . . . .	15
<b>Lema 1.4.10</b> —Lema de Borel-Cantelli . . . . .	15
<b>Exercici 1.4.11</b> . . . . .	15
<b>Exercici 1.4.12</b> . . . . .	16
<b>Definició 1.5.1</b> —Funció simple . . . . .	17
<b>Exemple 1.5.2</b> . . . . .	17
<b>Observació 1.5.3</b> . . . . .	17
<b>Teorema 1.5.4</b> . . . . .	17
<b>Propietat 1.5.5</b> . . . . .	18
<b>Observació 1.6.1</b> . . . . .	19
<b>Propietat 1.6.2</b> . . . . .	19
<b>Propietat 1.6.3</b> —Observacions i propietats . . . . .	20
<b>Proposició 1.6.4</b> . . . . .	21
<b>Proposició 1.6.5</b> . . . . .	21
<b>Proposició 1.6.6</b> —Additivitat . . . . .	21
<b>Propietat 1.6.7</b> —Més propietats . . . . .	22
<b>Definició 1.6.8</b> —Integral de Lebesgue . . . . .	22
<b>Definició 1.6.9</b> —Funció integrable . . . . .	23
<b>Observació 1.6.10</b> . . . . .	23
<b>Proposició 1.6.11</b> . . . . .	23
<b>Proposició 1.6.12</b> . . . . .	23
<b>Teorema 1.7.1</b> —Relació entre Riemann i Lebesgue . . . . .	24
<b>Observació 1.7.2</b> . . . . .	24
<b>Exemple 1.7.3</b> . . . . .	24
<b>Teorema 1.7.4</b> —Integral impròpia i integral de Lebesgue . . . . .	24
<b>Observació 1.7.5</b> . . . . .	24
<b>Teorema 1.8.1</b> —Teorema de la convergència monòtona . . . . .	25
<b>Exemple 1.8.2</b> . . . . .	25
<b>Corol·lari 1.8.3</b> . . . . .	26
<b>Exemple 1.8.4</b> . . . . .	27
<b>Lema 1.8.5</b> —Lema de Fatou . . . . .	27
<b>Exemple 1.8.6</b> . . . . .	27
<b>Teorema 1.8.7</b> —Teorema de la convergència dominada . . . . .	27
<b>Exemple 1.8.8</b> —Exemple negatiu . . . . .	27
<b>Exemple 1.8.9</b> —Exemple positiu . . . . .	28
<b>Exemple 1.8.10</b> . . . . .	28
<b>Observació 1.8.11</b> —Funció gamma . . . . .	29



Exemple 2.1.1 —Integració iterada . . . . .	31
Observació 2.1.2 . . . . .	31
<b>Teorema 2.1.3</b> —Teorema de Tonelli . . . . .	32
Observació 2.1.4 . . . . .	32
<b>Teorema 2.1.5</b> —Teorema de Fubini . . . . .	32
Exemple 2.1.6 . . . . .	32
Exemple 2.1.7 . . . . .	33
Observació 2.1.8 —Comentari sobre el teorema de Tonelli . . . . .	33
Observació 2.1.9 —Comentari sobre el teorema de Fubini . . . . .	33
Exemple 2.1.10 . . . . .	33
<b>Definició 2.2.1</b> —Canvi de variable, dimensió 1 . . . . .	34
<b>Teorema 2.2.2</b> —Canvi de variable . . . . .	34
Observació 2.2.3 . . . . .	35
Exemple 2.2.4 . . . . .	35
Observació 2.2.5 . . . . .	35
Exemple 2.2.6 . . . . .	37
Exemple 2.2.7 . . . . .	37
Exemple 2.2.8 . . . . .	38
Exemple 2.2.9 . . . . .	38
Exemple 2.2.10 . . . . .	39
<b>Exercici 2.3.1</b> . . . . .	39
<b>Exercici 2.3.2</b> . . . . .	40
<b>Exercici 2.3.3</b> . . . . .	40
<b>Exercici 2.3.4</b> . . . . .	41
<b>Exercici 2.3.5</b> . . . . .	41
<b>Exercici 2.3.6</b> . . . . .	41
<b>Exercici 2.3.7</b> . . . . .	42
<b>Exercici 2.3.8</b> . . . . .	43
<b>Exercici 2.3.9</b> . . . . .	44
<b>Exercici 2.3.10</b> . . . . .	45
<b>Exercici 2.3.11</b> . . . . .	46

III	CAPÍTOL 3	III
<b>Definició 3.1.1</b> —Corba parametritzada . . . . .	49	
<b>Definició 3.1.2</b> —Corba de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	49	
<b>Definició 3.1.3</b> —Corba tancada, corba simple . . . . .	50	
Observació 3.1.4 . . . . .	50	
Exemple 3.1.5 . . . . .	50	
Exemple 3.1.6 . . . . .	51	

<b>Definició 3.1.7</b> —Canvi de paràmetre . . . . .	52
<b>Observació 3.1.8</b> . . . . .	52
<b>Definició 3.2.1</b> —Longitud de la corba . . . . .	52
<b>Observació 3.2.2</b> . . . . .	52
<b>Teorema 3.2.3</b> . . . . .	52
<b>Observació 3.2.4</b> . . . . .	53
<b>Exemple 3.2.5</b> . . . . .	53
<b>Definició 3.2.6</b> —Corba regular . . . . .	54
<b>Observació 3.2.7</b> . . . . .	54
<b>Definició 3.2.8</b> —Paràmetre arc . . . . .	54
<b>Observació 3.2.9</b> . . . . .	54
<b>Exemple 3.2.10</b> . . . . .	54
<b>Definició 3.3.1</b> —Integral sobre una corba . . . . .	55
<b>Propietat 3.3.2</b> . . . . .	55
<b>Exemple 3.3.3</b> . . . . .	56
<b>Definició 3.3.4</b> —Camp vectorial . . . . .	56
<b>Exemple 3.3.5</b> . . . . .	56
<b>Definició 3.3.6</b> —Integral d'un camp sobre la corba . . . . .	56
<b>Observació 3.3.7</b> . . . . .	56
<b>Exemple 3.3.8</b> . . . . .	57
<b>Observació 3.3.9</b> . . . . .	57
<b>Definició 3.4.1</b> —Camp vectorial conservatiu . . . . .	57
<b>Exemple 3.4.2</b> . . . . .	58
<b>Teorema 3.4.3</b> —Teorema fonamental de les integrals en línia . . . . .	58
<b>Exemple 3.4.4</b> . . . . .	58
<b>Proposició 3.4.5</b> . . . . .	58
<b>Exemple 3.4.6</b> . . . . .	59
<b>Observació 3.4.7</b> . . . . .	59
<b>Definició 3.4.8</b> —Simplement connex . . . . .	59
<b>Exemple 3.4.9</b> . . . . .	59
<b>Lema 3.4.10</b> —Lema de Poincaré . . . . .	60
<b>Definició 3.4.11</b> —Obert estrellat . . . . .	60
<b>Observació 3.4.12</b> . . . . .	60
<b>Exemple 3.4.13</b> . . . . .	61
<b>Notació 3.5.1</b> —Rotacional . . . . .	61
<b>Teorema 3.5.2</b> —Teorema de Green . . . . .	61
<b>Exemple 3.5.3</b> . . . . .	62
<b>Definició 3.5.4</b> —Domini bàsic . . . . .	64
<b>Definició 3.5.5</b> —Domini elemental . . . . .	64
<b>Definició 3.5.6</b> —Domini regular . . . . .	64

<b>Exemple 3.5.7</b> . . . . .	64
<b>Definició 3.5.8</b> —Domini elemental, $\mathbb{R}^3$ . . . . .	65
<b>Definició 3.5.9</b> —Domini regular, $\mathbb{R}^3$ . . . . .	65
<b>Exercici 3.6.1</b> . . . . .	66
<b>Exercici 3.6.2</b> . . . . .	66
<b>Exemple 3.6.3</b> —Exercici fet a classe . . . . .	68
<b>Exercici 3.6.4</b> . . . . .	68
<b>Exercici 3.6.5</b> . . . . .	69
<b>Observació 3.6.6</b> . . . . .	70
<b>Exercici 3.6.7</b> . . . . .	70
<b>Observació 3.6.8</b> . . . . .	71
<b>Exercici 3.6.9</b> . . . . .	71
<b>Exercici 3.6.10</b> . . . . .	72
<b>Exercici 3.6.11</b> . . . . .	72
<b>Exercici 3.6.12</b> . . . . .	73
<b>Exercici 3.6.13</b> . . . . .	73

IV	CAPÍTOL 4	IV
<b>Definició 4.1.1</b> —Superfície elemental . . . . .		75
<b>Observació 4.1.2</b> . . . . .		75
<b>Exemple 4.1.3</b> —Gràfiques de funcions . . . . .		75
<b>Exemple 4.1.4</b> —Tros de cilindre . . . . .		77
<b>Exemple 4.1.5</b> —Tros d'esfera . . . . .		77
<b>Definició 4.2.1</b> —Espai tangent . . . . .		79
<b>Definició 4.2.2</b> —Espai normal . . . . .		79
<b>Definició 4.2.3</b> —Vector normal . . . . .		79
<b>Observació 4.2.4</b> . . . . .		79
<b>Definició 4.2.5</b> —Camp normal . . . . .		79
<b>Exemple 4.2.6</b> —Gràfiques de funcions, continuació . . . . .		79
<b>Exemple 4.2.7</b> —Tros de cilindre, continuació . . . . .		80
<b>Exemple 4.2.8</b> —Tros d'esfera, continuació . . . . .		80
<b>Definició 4.2.9</b> —Àrea d'una superfície . . . . .		81
<b>Observació 4.2.10</b> . . . . .		81
<b>Observació 4.2.11</b> . . . . .		82
<b>Exemple 4.2.12</b> —Gràfiques de funcions, continuació . . . . .		82
<b>Exemple 4.2.13</b> —Àrea d'una esfera, continuació . . . . .		83
<b>Definició 4.3.1</b> —Vora de $S$ . . . . .		83
<b>Definició 4.3.2</b> —Vora orientada . . . . .		84
<b>Exemple 4.3.3</b> —Tronc de con, continuació . . . . .		84

Exemple 4.3.4 —Tros de cilindre, continuació . . . . .	84
Definició 4.4.1 —Integral de $f$ a $S$ . . . . .	85
Observació 4.4.2 . . . . .	85
Proposició 4.4.3 . . . . .	85
Exemple 4.4.4 . . . . .	86
Exemple 4.4.5 . . . . .	86
Definició 4.4.6 —Flux d'un camp a través de la superfície . . . . .	86
Exemple 4.4.7 . . . . .	87
Exemple 4.4.8 . . . . .	87
Observació 4.4.9 . . . . .	87
Definició 4.5.1 —Rotacional de $F$ . . . . .	88
Exemple 4.5.2 . . . . .	88
Exemple 4.5.3 . . . . .	88
Teorema 4.5.4 —Teorema d'Stokes . . . . .	89
Observació 4.5.5 . . . . .	89
Exemple 4.5.6 . . . . .	91
Definició 4.6.1 —Superfície regular orientada . . . . .	92
Definició 4.6.2 —Vora orientada . . . . .	92
Observació 4.6.3 —Vora orientada . . . . .	93
Definició 4.6.4 —Superfície tancada . . . . .	93
Exemple 4.6.5 — $S$ , cilindre . . . . .	93
Exemple 4.6.6 — $S$ , esfera . . . . .	94
Proposició 4.6.7 . . . . .	95
Teorema 4.6.8 —Stokes, superfícies orientades . . . . .	95
Definició 4.7.1 —Divergència . . . . .	96
Lema 4.7.2 . . . . .	96
Exemple 4.7.3 . . . . .	96
Teorema 4.7.4 —Teorema de la divergència, o de Gauss . . . . .	96
Observació 4.7.5 —Observacions al teorema . . . . .	96
Exemple 4.7.6 . . . . .	96
Exercici 4.8.1 . . . . .	99
Exercici 4.8.2 . . . . .	99
Exercici 4.8.3 . . . . .	100
Exercici 4.8.4 . . . . .	100
Exercici 4.8.5 . . . . .	101
Exercici 4.8.6 . . . . .	102

A	CAPÍTOL A	A
---	-----------	---

Definició A.1.1 —Suma inferior i superior . . . . .	107
---	-----

<b>Definició A.1.2</b>	—Integral inferior i superior . . . . .	107
<b>Definició A.1.3</b>	—Integrable en el sentit de Riemann . . . . .	108
<b>Teorema A.1.4</b>	. . . . .	108
<b>Proposició A.1.5</b>	. . . . .	108
<b>Proposició A.1.6</b>	. . . . .	108
<b>Teorema A.1.7</b>	—Integrabilitat d'una composició de funcions . . . . .	108
<b>Proposició A.1.8</b>	. . . . .	108
<b>Proposició A.2.1</b>	. . . . .	109
<b>Definició A.2.2</b>	—Antiderivada . . . . .	109
<b>Proposició A.2.3</b>	. . . . .	109
<b>Teorema A.2.4</b>	—Teorema fonamental del Càlcul Integral . . . . .	109
<b>Corol·lari A.2.5</b>	—Fórmula d'integració per parts . . . . .	109
<b>Teorema A.2.6</b>	—Canvi de variable . . . . .	109
<b>Definició A.3.1</b>	—Localment integrable . . . . .	109
<b>Observació A.3.2</b>	. . . . .	110
<b>Exemple A.3.3</b>	. . . . .	110
<b>Definició A.3.4</b>	—Localment fitada . . . . .	110
<b>Definició A.3.5</b>	—Integrabilitat Riemann d'un interval semiobert . . . . .	110
<b>Observació A.3.6</b>	. . . . .	110
<b>Definició A.3.7</b>	—Integrabilitat local d'un interval obert . . . . .	110
<b>Definició A.3.8</b>	—Integrabilitat Riemann d'un interval obert . . . . .	111
<b>Exemple A.3.9</b>	—Model potencial al punt . . . . .	111
<b>Teorema A.3.10</b>	. . . . .	111
<b>Teorema A.3.11</b>	—Criteri de comparació per desigualtat . . . . .	111
<b>Teorema A.3.12</b>	—Criteri de comparació per pas al límit . . . . .	111
<b>Observació A.3.13</b>	. . . . .	112
<b>Definició A.3.14</b>	—Convergència absoluta . . . . .	112
<b>Teorema A.3.15</b>	—Teorema de Dirichlet . . . . .	112

B	CAPÍTOL B	B
<b>Exemple B.1.1</b>	. . . . .	113
<b>Definició B.1.2</b>	—Hemisimetria . . . . .	113
<b>Observació B.1.3</b>	. . . . .	113
<b>Definició B.2.1</b>	. . . . .	114



# *Teoria d'integració*

<b>1</b>	<b>Integració de Lebesgue</b>	<b>3</b>
1.1	Introducció . . . . .	3
1.2	Mesura exterior de Lebesgue . . . . .	5
1.3	Mesura de Lebesgue . . . . .	8
1.4	Funcions mesurables . . . . .	10
1.4.1	Funcions constants . . . . .	12
1.4.2	Funcions característiques de conjunts mesurables . . . . .	12
1.4.3	Funcions contínues . . . . .	12
1.4.4	Funcions gairebé iguals a una funció mesurable . . . . .	13
1.5	Funcions simples . . . . .	17
1.6	La integral de Lebesgue de funcions mesurables . . . . .	18
1.6.1	Primer pas . . . . .	18
1.6.2	Pas segon . . . . .	20
1.6.3	Tercer pas . . . . .	22
1.7	Relació entre Riemann i Lebesgue . . . . .	24
1.8	Integral de Lebesgue i teoremes de convergència . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Mètode d'integració</b>	<b>31</b>
2.1	Càlcul d'integrals de funcions de més d'una variable . . . . .	31
2.2	Canvi de variables . . . . .	34
2.2.1	Canvis de variables habituals . . . . .	36
2.3	Exercicis finals . . . . .	39

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ 1 & \text{if } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{if } n \geq 2 \end{cases}$$





## Integració de Lebesgue

Començarem introduint una nova manera d'integrar, força natural, i que té diversos tipus d'avantatges, principalment de tipus teòric (permet integrar més funcions, els passos al límit a dins de la integral són més senzills, s'estén més fàcilment a altres contextos, etc.).

### 1.1

## INTRODUCCIÓ

Per començar recordem els trets principals de la integral que coneixem fins ara: la integral de Riemann, més en detall a l'*Apèndix*. Donada una funció  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  amb  $f \geq 0$  fem una divisió del domini  $[a, b]$  (una partició) i calculem una aproximació amb rectangles per sota (suma inferior) i una per sobre (suma superior).

La funció es diu que és integrable Riemann sempre que el suprem de les possibles sumes inferiors coincideixi amb l'ímfim de les possibles sumes superiors (i a aquest valor se l'anomena *integral de f a [a, b]*).

**Exemple 1.1.1** (Exemple d'Arquimedes). Sigui  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que assignem  $x \mapsto f(x) := x^2$ . Volem veure la diferència entre el mètode de Lebesgue i Riemann. En el cas de Riemann, dividim el domini d'integració en intervals petits equiespaiats (en *particions* amb amplada  $\frac{1}{n}$ ); prenem nodes  $x_k = \frac{k}{n}$ . Amb això, l'interval  $[-1, 1]$  queda partit en els intervals  $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ . Per a la suma inferior, el mínim s'assoleix a la cantonada superior esquerra i per a la superior, el màxim s'assoleix a la cantonada superior dreta). Per a distingir entre  $x \geq 0$  i  $x < 0$  escrivim aquests intervals de la següent manera:

$$I_n^j = \left[ \frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right), \quad I_n^{-j} = \left[ -\frac{j}{n}, -\frac{j-1}{n} \right), \quad j = 1, \dots, k.$$

Com ja dèiem, com el valor màxim d' $f$  a  $I_n^j$  és  $f(\frac{j}{n})$  i a  $I_n^{-j}$  és  $f(-\frac{j}{n})$ , tenim que la suma superior associada a aquesta partició és:

$$\mathcal{U}_n(f) = \sum_{j=1}^n f\left(-\frac{j}{n}\right) \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{j^2}{n^2} = \frac{2}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2.$$

Un càlcul amb el mètode d'inducció mostra que  $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}$ , de manera que fent la partició cada cop més fina ( $n \rightarrow \infty$ ), tenim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{U}_n(f) = \frac{2}{3}.$$

Anàlogament, tindríem que la suma inferior és:

$$\mathcal{L}_n(f) = \sum_{j=1}^n f\left(-\frac{j-1}{n}\right) \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^n f\left(\frac{j-1}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{2}{n^3} \sum_{j=1}^n (j-1)^2 \rightarrow \frac{2}{3}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Obtenim, doncs, que  $\mathcal{U}_n(f), \mathcal{L}_n(f) \rightarrow \frac{2}{3}$  sempre que  $n \rightarrow \infty$ , de manera que  $f(x)$  és integrable Riemann, tot i que el valor que obtenim és justament el de  $\int_{-1}^1 x^2 dx$  i mai no utilitzem la definició d'integral de Riemann.

Per altra banda, la nova integral, anomenada integral de Lebesgue, en lloc de dividir el domini de definició de  $f$ , *divideix d'una manera concreta i particular el recorregut d' $f$* . En aquest exemple,  $f[-1, 1] = [0, 1]$ . Fixat  $n \in \mathbb{N}$ , dividim ara el tros  $[0, 1]$  de l'eix  $y$  en intervals consecutius de longitud  $\frac{1}{n}$ . Prenem la partició amb intervals  $J_j = [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n})$  per a  $j = 1, \dots, n$ . En aquest sentit, diem  $E_j = f^{-1}(J_j)$  format pels  $x \in [-1, 1]$  amb  $f(x) \in J_j$ :

$$\begin{aligned} E_j &= \{x \in [-1, 1] \mid f(x) \in J_j\} \\ &= \left\{x \in [-1, 1] \mid \sqrt{\frac{j-1}{n}} \leq x < \sqrt{\frac{j}{n}} \text{ i } -\sqrt{\frac{j}{n}} < x \leq -\sqrt{\frac{j-1}{n}}\right\}. \end{aligned}$$

La idea és ara fer una aproximació *inferior* l'àrea damunt de  $E_j$ ,  $\frac{j-1}{n}|E_j|$ , on  $|E_j|$  indica la longitud de  $E_j$  (en aquest cas,  $|E_j| = 2 \left( \sqrt{\frac{j}{n}} - \sqrt{\frac{j-1}{n}} \right)$ ). L'aproximació total de l'àrea sota  $f$  a partir d'aquesta partició és de  $[0, 1] = f([-1, 1])$ . Ens queda que:

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{j=1}^n \frac{j-1}{n} \cdot 2 \left( \sqrt{\frac{j}{n}} - \sqrt{\frac{j-1}{n}} \right) = \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=1}^n (j-1) \cdot (\sqrt{j} - \sqrt{j-1}) \\ &= \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}} \left( n\sqrt{n} - \sum_{j=1}^n \sqrt{j} \right) = 2 \left( 1 - \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}} \right) \rightarrow \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

On en l'últim límit hem aplicat Stolz (és estrictament creixent i tendeix a  $+\infty$ ).

### Observació 1.1.2.

1. Aquesta aproximació de l'àrea és empre inferior; és a dir, per a tot  $n \in \mathbb{N}$  tenim  $L_n \leq \frac{2}{3} = \int_{-1}^1 f$ .
2. La dificultat a l'hora de calcular aquestes aproximacions rau en el càlcul de la longitud del conjunt  $E_j$  (que, en general, a  $\mathbb{R}^n$  s'anomena la «mesura de Lebesgue» de  $E_j$ ). En aquest cas particular,  $E_j$  és la unió de dos intervals (de manera que la seva longitud és fàcil de calcular, però generalment no és així).
3. La mesura de Lebesgue ens introdueix una manera sistemàtica de mesurar conjunts a  $\mathbb{R}^n$  (longitud a  $\mathbb{R}$ , àrea a  $\mathbb{R}^2$ , volum a  $\mathbb{R}^3$ ...).

**Definició 1.1.3** (*Com hauria de ser una mesura?*). Diem  $m$  una *mesura* a una aplicació lineal que assigna un conjunt mesurable de  $\mathbb{R}^n$  a un nombre real nul o positiu:

$$\begin{aligned} m : \{ \text{mesurables de } \mathbb{R}^n \} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto m(A) := |A| \end{aligned}$$

I té les següents propietats:

1.  $m((a, b)) = b - a$ ;

2.  $m(\tau_x(A)) = m(A)$ , on  $\tau_x(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = a + x, a \in A\}$ , per a tot  $A$  i  $x \in \mathbb{R}$  (invariància per translacions);
3. Si  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  i  $A_i \cap A_j = \emptyset$  per a tot  $i \neq j$ , de manera que  $m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ .

**Observació 1.1.4** (Contraexemple de Vitali). Si en lloc de prendre el conjunt de subconjunts mesurables ens quedéssim amb el conjunt de les parts de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , no és possible trobar cap mesura de Lebesgue que compleixi totes tres propietats. Vitali va proposar el següent: definim  $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  i sigui la relació d'equivalència  $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ . Diem que  $E \subseteq [0, 1]$  que està constituït per un únic element de cada classe.

1.  $(E+r) \cap (E+s) = \emptyset$  si  $r, s \in \mathbb{Q}$  per a  $r \neq s$ . Per reducció a l'absurd, si  $z \in (E+r) \cap (E+s)$ , en particular  $z \in E+r$  i  $z \in E+s$  simultàniament; és a dir,  $z = e_1 + r = e_2 + s$ , amb  $e_1, e_2 \in E$ .

$$e_1 + r = e_2 + s \iff e_1 - e_2 = s - r \in \mathbb{Q} \implies e_1 \sim e_2.$$

Per tant, tenim contradicció i  $(E+r) \cap (E+s) = \emptyset$ .

2. Per a tot  $x \in [0, 1]$  tal que  $x \in E+r$  i  $r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ . Per a tot  $x \in [0, 1]$  existeix  $y \in E$  tal que  $x \sim y$  i, per tant,  $x = y + r$  per a  $r \in \mathbb{Q}$ . Sigui  $S$  una unió numerable:

$$S = \bigcup_{r \in (-1, 1) \cap \mathbb{Q}} (E+r) \implies m(S) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E+r_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E).$$

Per tant, si  $m(E) = 0$ , se segueix que  $m(S) = 0$  i si  $m(E) > 0$ ,  $m(E) = \infty$ . Aleshores,  $[0, 1] \subseteq S \subseteq [-1, 2]$ , de manera que  $1 \leq m(S) \leq 3$ , contradicció.

## 1.2

### MESURA EXTERIOR DE LEBESGUE

**Definició 1.2.1** (Mesura i interval a  $\mathbb{R}^n$ ). La mesura (*longitud*) d'un *interval*  $[a, b]$  (o bé  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ , o  $(a, b)$ ) a  $\mathbb{R}$  és  $|[a, b]| = b - a$ . Diem *interval a  $\mathbb{R}^n$*  a qualsevol conjunt de la forma  $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ , amb  $a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$ , o a qualsevol obtingut de manera semblant reemplaçant qualsevol dels intervals  $[a_j, b_j]$  per  $[a_j, b_j)$ ,  $(a_j, b_j]$  o bé  $(a_j, b_j)$ . D'aquests intervals, a vegades també se'n diuen *rectangles*.

L'interval és *obert* si els intervals a  $\mathbb{R}$  que el produeixen són tots oberts; és a dir, si  $I$  té la forma  $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ . Anàlogament,  $I$  és *tancat* si és de la forma  $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ .

**Definició 1.2.2** (Volum d'un interval). Sigui  $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$  un interval obert. Definim la *mesura exterior per intervals* o *volum d'un interval* i la denotem per  $m^*(I)$  o  $v(I)$  com el producte de les seves llargàries, és a dir:

$$m^*(I) = v(I) = |I|^* = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

A  $\mathbb{R}^2$  un interval és un rectangle, i la seva mesura és l'àrea. A  $\mathbb{R}^3$  un interval és un paral·lelepípede i la seva mesura és el volum.

Recordem que volem donar sentit a la mesura d'un conjunt arbitrari  $A \subset \mathbb{R}^n$ . El primer intent, que funciona gairebé sempre, és utilitzar els rectangles com a unitat de mesura, recobrint el conjunt  $A$ .

**Definició 1.2.3** (Mesura exterior de Lebesgue). Sigui  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Diem mesura exterior de Lebesgue d' $A$  a l'ínfim:

$$|A|^* = m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \text{ interval obert} \right\}.$$

Per tant, de tots els possibles recobriments d' $A$  per intervals, en calculem la suma de volums dels intervals i en prenem l'ínfim.

**Exemple 1.2.4.** Volem veure que la mesura exterior d'un punt  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  és 0. Formalment,  $m^*({p}) = 0$ . Per provar aquest resultat, utilitzem la definició:

$$|{p}|^* = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) \mid p \in \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ intervals oberts} \right\}.$$

Observem que cap recobriment de  $p$  amb intervals té volum 0; per a veure que  $|{p}|^*$  cal veure que l'ínfim que defineix  $|{p}|^*$  és 0. És a dir, cal veure que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ intervals} \mid p \in \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \text{ i } \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) < \varepsilon.$$

Fixem, per tant,  $\varepsilon > 0$  i intentem trobar un recobriment de  $p$  amb intervals de volum menor que  $\varepsilon$ . De fet, per no complicar-nos, recobrim  $p$  amb un sol interval. Si  $p = (p_1, \dots, p_n)$  i  $\delta > 0$  considerem l'interval:

$$I_{\delta} = (p_1 - \delta, p_1 + \delta) \times \dots \times (p_n - \delta, p_n + \delta).$$

Òbviament,  $p \in I_{\delta}$  i  $|I_{\delta}| = (2\delta)^n$ . Triant  $\delta$  prou petit per a què  $(2\delta)^n < \varepsilon$  ja tenim un recobriment de  $p$  (amb un sol interval) de volum més petit que  $\varepsilon$ .

En resum, per veure que la mesura exterior d'un conjunt és 0 cal veure que té recobriments per intervals amb volum tan petit com vulguem.

**Observació 1.2.5.**

1. Donat  $A \subset \mathbb{R}^n$  qualsevol, el conjunt:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) \mid I_k \text{ intervals oberts, } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\} \subset \mathbb{R}$$

és acotat inferiorment (per 0, per exemple) i, per tant, l'ínfim que defineix  $|A|^*$  existeix. És a dir,  $|A|^*$  està ben definit per a tot  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

2.  $|A|^* \geq 0$  per a tot  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Això és immediat de la definició.

**Propietat 1.2.6.**

1. La mesura exterior del conjunt buit és 0.
2. Si  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  i  $A \subset B$ , llavors  $|A|^* \leq |B|^*$ .
3. Si  $A$  és finit o numerable,  $|A|^* = 0$ .

*Demostració.* Això és així perquè tot recobriment per intervals de  $B$  és també un recobriment per intervals d' $A$  i, per tant, l'ínfim que defineix  $|B|^*$  s'agafa sobre un conjunt de recobriments més petit que el conjunt de recobriments d' $A$ . L'últim apartat es resol de manera semblant a com hem vist que la mesura d'un sol punt és 0: sigui  $\{x_k\}$  un conjunt numerable. Per a tot  $k$ , tenim  $I_k = (x_k - \frac{\varepsilon}{2}, x_k + \frac{\varepsilon}{2})$  és un interval obert que conté  $x_k$ ; és a dir,  $|I_k| = \frac{\varepsilon}{2^k}$ . Si calculem, doncs:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Obtenim  $|\{x_k\}| = \inf\{\sum_k |I_k| \mid x_k \subset \bigcup_k I_k\} = 0$ , ja que tots són 0. ■

**Propietat 1.2.7 (Invariant per translacions).**  $A$  més,  $m^*$  és invariant per translacions; això és, per a tot  $A \subset \mathbb{R}^n$  i per a tot  $x \in \mathbb{R}^n$  tenim  $m^*(A + x) = m^*(A)$ . Existeix un recobriment en el desplaçat si, i només si, existeix un recobriment en el mateix conjunt:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \iff A + x \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_i + x)$$

També, el volum és el mateix,  $v(I) = v(I + x)$ .

*Demostració.* Tot ve del fet que donat  $x = x_1, \dots, x_n$ ,  $I = (i_1, \dots, i_n)$ , la translació  $I + x = (i_1 + x_1, \dots, i_n + x_n)$  queda ben definit i, per tant,  $m^*$  és invariant per translacions pel que ja comentàvem. ■

**Propietat 1.2.8 ( $\sigma$ -subadditivitat).**  $m^*$  és  $\sigma$ -subadditiva:

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k), \quad \forall A_k \subset \mathbb{R}^n.$$

*Demostració.* Fixem  $\varepsilon > 0$  qualsevol. Per a tot  $A_k$  existeix  $A_k \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^k$  recobriment per intervals oberts tal que:

$$m^*(A_k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j^k) \leq m^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Si diem  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , i  $A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^k$ , la unió de tots aquests recobriments  $I_j^k$  és un recobriment per intervals i, d'aquesta manera, podem fitar la mesura exterior d' $A$ :

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^k \right)$$

$$m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j^k) \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k) + \varepsilon,$$

ja que  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ . Com això val per a tot  $\varepsilon > 0$ , fent servir  $\varepsilon$  tan petit com vulguem obtenim el resultat. ■

**Observació 1.2.9.** En definitiva, existeixen  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $A \cap B = \emptyset$  i  $m^*(A \cup B) \neq m^*(A) + m^*(B)$ . En aquest sentit, si  $d(A, B) > 0$ , aleshores sí es dona que  $m^*(A) + m^*(B) = m^*(A \cup B)$ .

## 1.3

## MESURA DE LEBESGUE

Sigui  $\mathcal{X}$  un conjunt ambient (habitualment  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ ) i sigui  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$  el conjunt de parts d' $\mathcal{X}$ ; és a dir, el conjunt que té per elements els subconjunts de  $\mathcal{X}$ .

**Definició 1.3.1** ( $\sigma$ -àlgebra). Si  $\mathcal{X}$  és un espai  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ , un família  $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$  és una  $\sigma$ -àlgebra si:

1.  $\mathcal{X} \in \Sigma$ .
2. Si  $E \in \Sigma$ , aleshores  $E^C \in \Sigma$ .
3. Si  $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ , aleshores  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \Sigma$ .

**Definició 1.3.2** (Mesura positiva). Sigui  $\mathcal{X}$  i sigui  $\Sigma \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$  una  $\sigma$ -àlgebra. Una funció  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  és una *mesura positiva* si:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2.  $\mu$  és  $\sigma$ -additiva: si  $E_j \in \Sigma$  són disjunts dos a dos, llavors:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

A tall d'observació, la *mesura exterior* és positiva. Definim tot seguit els subconjunts de  $\mathbb{R}^n$  on la mesura exterior té les bones propietats que calen per a integrar.

**Definició 1.3.3** (Conjunt mesurable Lebesgue). Sigui  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Diem que  $E$  és mesurable Lebesgue si per a tot  $A \subset \mathbb{R}^n$  es dona el següent:

$$|A|^* = |A \cap E|^* + |A \cap E^C|^*.$$

Els conjunts  $E$  que tenen aquesta propietat formen una  $\sigma$ -àlgebra, denotada  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  i anomenada la  $\sigma$ -àlgebra de conjunts mesurables Lebesgue.

**Definició 1.3.4** (Conjunt mesurable Lebesgue, alternativa). Un conjunt  $A$  és mesurable Lebesgue si per a tot  $\varepsilon > 0$  existeix un obert  $\mathcal{U} \supset A$  tal que  $m^*(\mathcal{U} \setminus A) \leq \varepsilon$ . Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  és mesurable, definim  $m(A) = |A| = m^*(A)$ .

**Observació 1.3.5.** Se segueix directament que qualsevol obert en  $\mathbb{R}^n$  és mesurable, ja que  $m^*(\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}) = 0 \leq \varepsilon$ .

**Definició 1.3.6** (Mesura de Lebesgue). La mesura exterior restringida a  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  és una mesura positiva, anomenada *mesura de Lebesgue*.

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longrightarrow \mu(E) = |E| \end{aligned}$$

Per a  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  denotarem  $|E|$  en lloc d' $|\cdot|$  (tot i que siguin el mateix valor).

A partir d'aquí enunciem, sense demostracions, una sèrie de propietats teòriques de la mesura de Lebesgue. La majoria són força intuïtives, sobre tot si pensem que estem formalitzant la noció de volum d'un conjunt a  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.3.7** (Teorema de Carathéodory).

1.  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  és una  $\sigma$ -àlgebra a  $\mathbb{R}^n$ .
2.  $|\cdot|$  és una mesura positiva a  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ .
3. La mesura  $|\cdot|$  és completa si  $z \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  té mesura 0,  $|z| = 0$  i  $z' \subset z$ , llavors també  $z' \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  i  $|z'| = 0$ .

**Observació 1.3.8.** Els conjunts de mesura 0 s'anomenen *nuls*, i són invisibles per la mesura (i, com veurem, invisibles per a l'integral).

**Notació 1.3.9** (Almost everywhere). Quan una propietat es compleix a tot arreu, llevat potser d'un conjunt excepcional de mesura zero, diem que es compleix *gairebé per a tot* o, en anglès, *almost everywhere*.

**Propietat 1.3.10.**

1. Si  $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  i  $A \subset B$ ,  $|A| \leq |B|$ .
2. Si  $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  i  $A \subset B$ ,  $|B \setminus A| = |B| - |A|$  sempre que  $|A| < +\infty$ .
3. Si  $E_j \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ,  $j \geq 1$ , formen una successió ascendent,  $E_j \subset E_{j+1}$ , per a tot  $j \geq 1$ , llavors  $|\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j| = \lim_{j \rightarrow \infty} |E_j|$ .
4. Invariància per translacions i simetria respecte l'origen. Com ja hem vist per a mesures exteriors, 1.2.7, si  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ , aleshores:
  - $x + E = \{x + y \mid y \in E\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  i  $|x + E| = |E|$ .
  - $-E = \{-x \mid x \in E\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  i  $|-E| = |E|$  (la mesura positiva és una funció parella).
5. Si  $I$  és interval,  $I \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  i  $|I| = v(I)$ .

**Observació 1.3.11.**

1. La mesura d'un conjunt depèn de l'espai ambient en què es miri. Un segment a  $\mathbb{R}$  té mesura positiva, però a  $\mathbb{R}^2$  té mesura (àrea) zero.
2. Les figures geomètriques planes (a  $\mathbb{R}^2$ ) habituals són mesurables i la seva mesura de Lebesgue a  $\mathbb{R}^2$  és l'àrea. Anàlogament, els sòlids habituals de  $\mathbb{R}^3$  són mesurables i la seva mesura de Lebesgue a  $\mathbb{R}^3$  és el volum.

3. Els conjunts oberts (i, per tant, tancats) són mesurables. Ja ho hem esmentat a 1.3.5. Essent  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  una  $\sigma$ -àlgebra, també són mesurables els conjunts anomenats:

- $G_\sigma$  és la intersecció numerable d'oberts.
- $F_\sigma$  és la unió numerable de tancats.

Acabem amb alguns resultats que caracteritzen els conjunts mesurables en aquests termes.

**Proposició 1.3.12.**

1. Els conjunts mesurables de Lebesgue formen la  $\sigma$ -àlgebra  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  que conté els oberts de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Tot conjunt de mesura exterior 0 és mesurable.

*Demostració.*

1. Si  $E_k$  són mesurables,  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  també. Per a tot  $\varepsilon > 0$  per a cada  $E_k$  hi ha un  $\mathcal{U}_k$  obert  $E_k \subset \mathcal{U}_k$  tal que  $m^*(\mathcal{U}_k \setminus E_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$ . Prenem  $\mathcal{U} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{U}_k$  amb  $E \subset \mathcal{U}$ . A més,  $\mathcal{U} \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{U}_k \setminus E_k$ . Com  $m^*$  és submesurable:

$$m^*(\mathcal{U} \setminus E) \leq \sum_k m^*(\mathcal{U}_k \setminus E_k) \leq \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

2. Si  $m^*(E) = 0$ ,

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) \mid E \subset \bigcup_i I_i \right\} = 0.$$

Aleshores, per a tot  $\varepsilon > 0$  existeix  $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ , i  $\sum_i |I_i| < \varepsilon$ . Hem usat que  $m^*(\mathcal{U} \setminus E) \leq m^*(\mathcal{U}) \leq \varepsilon$ . Si  $A \subset B$ ,  $m^*(A) \leq m^*(B)$ , de manera que  $m(A) \leq m(B)$ . Si  $A, B$  mesurables i  $A \subset B$ ,  $B = A \cup (B \setminus A)$ . ■

**Teorema 1.3.13.** *Sigui  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Són equivalents:*

1.  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ .
2.  $\forall \varepsilon > 0$  existeix  $\mathcal{T} \subset E \subset \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{C}$  tancat i  $\mathcal{U}$  obert, tals que  $m^*(\mathcal{U} \setminus \mathcal{C}) < \varepsilon$ .
3.  $E$  és igual a  $G \setminus Z$ , on  $G$  és un conjunt  $G_\sigma$  i  $|Z| = 0$ .
4.  $E$  és igual a  $F \cup Z$ , on  $F$  és un conjunt  $F_\sigma$  i  $|Z| = 0$ .

Pel segon apartat, podem aproximar tot  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  amb tancats per dins i amb oberts per fora.

## FUNCIONS MESURABLES

Volem estudiar la integral següent, el valor de la qual resulta ser  $|A|$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A, \quad A \subset \mathbb{R}^n, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$



Aquesta funció només té sentit si  $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ . En definitiva, per a definir la integral que hem esbossat a la introducció necessitem reduir-nos a la classe de funcions per les quals funciona bé l'esquema indicat. Aquesta és una classe molt àmplia, més que suficient per a poder calcular les integrals que apareixen de manera habitual.

Suposem que, a partir d'ara,  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ; és a dir,  $E$  és un conjunt mesurable, i diem  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ . En general, tindrem funcions  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  i, per ser rigorosos, ens caldrà estendre la relació d'ordre de  $\mathbb{R}$  a tot  $\overline{\mathbb{R}}$ .

$$-\infty < a < +\infty, \forall a \in \mathbb{R}.$$

També cal estendre-hi les operacions suma i multiplicació, de la manera que ja coneixem:

1.  $a \pm \infty = \pm\infty + a = \pm\infty$ .
2.  $a \cdot (\pm\infty)$  és  $+\infty$  si  $a > 0$ ,  $-\infty$  si  $a < 0$  i, finalment, una indeterminació si  $a = 0$ .
3. La resta de casos se segueixen fàcilment prenent  $\pm\infty$  en lloc d' $a$ .

**Proposició 1.4.1.** *Sigui  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  mesurable. Són equivalents:*

1.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunt  $f^{-1}(\alpha, +\infty] = \{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$  és mesurable.
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunt  $f^{-1}[\alpha, +\infty] = \{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\}$  és mesurable.
3.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunt  $f^{-1}[-\infty, \alpha) = \{x \in E \mid f(x) < \alpha\}$  és mesurable.
4.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunt  $f^{-1}[-\infty, \alpha] = \{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$  és mesurable.

Quan es compleixen aquestes condicions, també es dona que per a tot  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f^{-1}(\{\alpha\}) = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$  és mesurable.

*Idea de la demostració.*

**1  $\Rightarrow$  2** Observem que:

$$\begin{aligned} \{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in E \mid f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\} \\ &\iff f^{-1}([\alpha, +\infty]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty\right]\right). \end{aligned}$$

Com que, per hipòtesi,  $\{x \in E \mid f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\}$  és mesurable, les propietats de  $\sigma$ -àlgebra de  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  ens asseguren que  $\{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\}$  (és intersecció numerable de conjunts mesurables).

**4  $\Rightarrow$  1** Tenim

$$\{x \in E \mid f(x) > \alpha\} = E \setminus \{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\};$$

és a dir,  $\{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$  és el complementari d'un conjunt mesurable i, per tant, també ho és. De fet, el tercer i el quart conjunt són els complementaris de  $f^{-1}(\alpha, +\infty]$  i  $f^{-1}[\alpha, +\infty]$  respectivament, i el complementari d'un mesurable també és mesurable.

La resta es demostren de manera anàloga. Quan aquestes propietats es compleixen tenim, fixat  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\{x \in E \mid f(x) = \alpha\} = \{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\} \cap \{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\};$$

per tant, aquest conjunt és mesurable. Anàlogament,

$$\begin{aligned} \{x \in E \mid f(x) = +\infty\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E \mid f(x) \geq n\}, \\ \{x \in E \mid f(x) = -\infty\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E \mid f(x) \leq -n\}, \end{aligned}$$

són també mesurables. ■

**Definició 1.4.2 (Funció mesurable).** Una funció  $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$  és *mesurable* si  $E$  és mesurable; equivalentment, es compleixen tots els apartats de la proposició anterior.

#### 1.4.1 FUNCIONS CONSTANTS

Sigui  $f_c : E \longrightarrow \mathbb{R}$  donada per  $f_c(x) = c \in \mathbb{R}$ . Aquí, fixat  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\{x \in E \mid f(x) = c > \alpha\} = \begin{cases} E, & \text{si } \alpha < c, \\ \emptyset, & \text{si } \alpha \geq c. \end{cases}$$

En ambdós casos tenim un conjunt mesurable.

#### 1.4.2 FUNCIONS CARACTERÍSTIQUES DE CONJUNTS MESURABLES

Sigui  $A \subset E$  un conjunt mesurable. Definim la *funció característica*  $\chi_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$  mitjançant l'assignació:

$$x \longmapsto \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Aleshores, fixat  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\{x \in E \mid f(x) = \chi_A(x) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \alpha \geq 1, \\ A, & \text{si } \alpha \in (0, 1), \\ E, & \text{si } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

En tots tres casos tenim un conjunt mesurable.

#### 1.4.3 FUNCIONS CONTÍNUES

Si  $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$  és contínua,  $f^{-1}(\alpha, +\infty] = \{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$  és l'antiimatge de l'obert  $(\alpha, +\infty)$  i, per tant, també és un obert. En particular, és mesurable.

**Proposició 1.4.3.** Si  $g, f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  són funcions mesurables i  $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ , aleshores  $F(f, g) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  és mesurable.

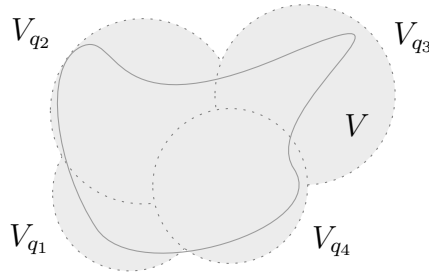


Figura 1.1: Per definició de compacte, el podem recobrir amb un nombre finit d'entorns oberts.

*Demostració.* Definim  $h(x) = F(f(x), g(x))$ , tal que  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  i  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , amb la cadena d'assignacions  $x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto F(f(x), g(x))$ . Sigui  $\Omega$  l'obert de  $\mathbb{R}^2$  antiimatge de l'obert  $(\alpha, +\infty]$ .

$$h^{-1}((\alpha, +\infty]) = G^{-1}(F^{-1}(\alpha, +\infty]) = G^{-1}(\Omega) = G^{-1}\left(\bigcup_k I^k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} G^{-1}(I^k),$$

on, per definició, sabem que podem posar  $\Omega$  com a unió numerable d'interval·ls oberts ( $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  i  $K_n \subset \bigcup_{i=1}^{m_n} I^i$ ). ■

#### 1.4.4 FUNCIONS GAIREBÉ IGUALS A UNA FUNCIÓ MESURABLE

Sigui  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mesurable i sigui  $g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tal que  $g = f$  llevat d'un conjunt  $Z$  amb  $|Z| = 0$  (és a dir,  $g(x) = f(x)$  si  $x \notin Z$ ). Llavors,  $g$  també és mesurable: per a tot  $x \in \mathbb{R}$  tenim:

$$\begin{aligned} \{x \in E \mid g(x) > \alpha\} &= \{x \in E \setminus Z \mid f(x) > \alpha\} \cup \{x \in Z \mid g(x) > \alpha\} \\ &= [\{x \in E \mid f(x) > \alpha\} \cap (E \setminus Z)] \cup \{x \in Z \mid g(x) > \alpha\}. \end{aligned}$$

Essent  $\{x \in Z \mid g(x) > \alpha\} \subset Z$  i  $|Z| = 0$  la completitud de la mesura diu que  $\{x \in Z \mid g(x) > \alpha\}$  també és mesurable i amb mesura 0.

Per altra banda,  $\{x \in E \mid f(x) > \alpha\} \cap (E \setminus Z)$  és intersecció de conjunts mesurables i, per tant, és mesurable. Com que  $\{x \in E \mid g(x) > \alpha\}$  és intersecció de dos conjunts mesurables, també és mesurable. Examinem un cas particular d'aquesta mena de funcions que, probablement, hem vist anteriorment.

**Exemple 1.4.4.** Sigui  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida per:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

El conjunt  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  és mesurable i de mesura zero. Això és així perquè aquest conjunt és numerable; és a dir, és de la forma  $[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Com que el conjunt format per un sol

punt  $E_n = \{x_n\}$  és mesurable i de mesura zero (com ja hem vist al parlar de la mesura exterior), llavors, per la  $\sigma$ -additivitat:

$$|[0, 1] \cap \mathbb{Q}| = \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n| = 0.$$

Amb això, tenim que  $f(x) = 1$  llevat del conjunt  $Z = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ , que té mesura 0; per tant,  $f$  és mesurable.

**Propietat 1.4.5.** *Siguin  $c \in \mathbb{R}$ ,  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  i  $f, g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  funcions mesurables. Aleshores:*

$$cf, f + g, f \cdot g; \frac{f}{g}, \max\{f, g\}, |f|, f^+, f^-$$

*són funcions mesurables.*

**Observació 1.4.6.** Recordem que, donada  $f$ , tenim  $f^+ = \max\{f, 0\}$  i  $f^- = \max\{-f, 0\}$ . D'aquesta manera,  $f = f^+ - f^-$  i  $|f| = f^+ + f^-$ .

**Propietat 1.4.7.** *Siguin  $f_k : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , funcions mesurables. Aleshores:*

$$\inf_k f_k, \sup_k f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k, \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k, \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$$

*són funcions mesurables (sempre que aquests ínfims, supremes i límits existeixin almost everywhere,  $x \in E$ ).*

El resum de tot això és que totes les funcions que trobem habitualment són mesurables. De fet, com és molt difícil construir un conjunt no mesurable, també és molt difícil trobar-se una funció no mesurable.

**Exercici 1.4.8.** *Raoneu si són mesurables i calculeu la mesura dels següents conjunts:*

- $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$  a  $\mathbb{R}^2$ .
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 1\}$ .
- $\bigcup_{k=3}^{+\infty} A_k$ , on  $A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{k} \leq |x| + |y| \leq 1 - \frac{1}{k}\}$ .

Demostració. PRIMER APARTAT. Sabem que  $\mathbb{Q}$  és mesurable; això és,  $\mathbb{Q} = \{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ , de manera que podem representar  $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$  com una família numerable de rectes:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{Q} = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathbb{R} \times \{q_j\}).$$

Una recta és una unió numerable de segments semi-oberts, que són també mesurables per Caratheodory. Així, cadascun dels  $j$ -conjunts és un tancat i mesurable. La unió numerable de conjunts mesurables és mesurable, de manera que  $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$  és mesurable. Per determinar la mesura,  $|\mathbb{R} \times \mathbb{Q}|$ , sabem que una recta té mesura 0; per tant, la unió numerable de rectes (per cert, tals que  $(\mathbb{R} \times \{q_j\}) \cap (\mathbb{R} \times \{q_k\}) = \emptyset$ , per a  $j \neq k$ ), serà  $|\mathbb{R} \times \mathbb{Q}| = 0$ .

SEGON APARTAT i TERCER APARTAT, queden com a exercici. ■

<sup>1</sup> Cal suposar que  $g(x) \neq 0$  almost everywhere.

**Exercici 1.4.9.**

- Demostreu que si un conjunt mesurable  $A \subset \mathbb{R}$  té algun punt interior, llavors  $m(A) > 0$ .
- Demostreu que si  $Z \subset \mathbb{R}$  té mesura zero, llavors  $\mathbb{R} \setminus Z$  és un conjunt dens a  $\mathbb{R}$ .

*Demostració.* Si  $A$  és un conjunt mesurable que té un punt interior  $x_0$ , existeix un interval obert  $I$  tal que  $x_0 \in I \subset A$ . Com  $I = (a, b)$  per a certs  $a, b$  tals que  $a < b$ , tenim que  $|I| = b - a > 0$  té mesura positiva. Per tant, com  $I \subset A$ ,  $|A| \geq |I| > 0$  i  $|A| > 0$ .

Prenem  $Z \subset \mathbb{R}$  i  $|Z| = 0$ . Denotem  $E = \mathbb{R} \setminus Z$ . Recordem que  $E$  és dens en  $\mathbb{R}$  si, i només si,  $\overline{E} = \mathbb{R}$ . Raonem per reducció a l'absurd. Si  $\overline{E} \neq \mathbb{R}$ ,  $\overline{E}$  és subconjunt propi d' $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{R} \setminus \overline{E}$  és un obert no buit. Aleshores,  $\mathbb{R} \setminus \overline{E}$  té punts, tots interiors. Pel primer apartat,  $|\mathbb{R} \setminus \overline{E}| > 0$ . Podríem acabar ja, però si volem seguir amb l'absurd:

$$\mathbb{R} \setminus \overline{E} \subsetneq \mathbb{R} \setminus E = Z \implies \begin{cases} |\mathbb{R} \setminus \overline{E}| \leq |\mathbb{R} \setminus E| = |Z| = 0 \\ |\mathbb{R} \setminus \overline{E}| > 0 \end{cases}$$

On hem usat que  $|Z| = 0$  per hipòtesi. De manera que obtenim  $0 < |\mathbb{R} \setminus \overline{E}| \leq 0$ , absurd que ve de suposar  $\overline{E} \neq \mathbb{R}$ . Per tant,  $\overline{E} = \mathbb{R}$  i  $\mathbb{R} \setminus Z$  dens en  $\mathbb{R}$ . ■

**Lema 1.4.10 (Lema de Borel-Cantelli).** *Siguin  $E_k, k \in \mathbb{N}$ , conjunts mesurables de  $\mathbb{R}^n$  tals que  $\sum_{k \geq 1} |E_k| < \infty$  i sigui  $E = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in E_k \text{ per a infinits } k \in \mathbb{N}\}$ . Comproveu que  $E = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{k \geq N} E_k$ .*

*Demostració.* Tenim que  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$  és mesurable i, en concret, el podem posar com  $A_N$ . A més, per a tot  $N \in \mathbb{N}$  se segueix que  $E \subset \bigcup_{k \geq N} E_k$ . A la vegada, la intersecció numerable de mesurables és mesurable; això és,  $E = \bigcap_{N=1}^{\infty} A_N$ .

$$|E| \leq \left| \bigcup_{k \geq N} E_k \right| \leq \sum_{k \geq N} |E_k| \rightarrow 0, N \rightarrow \infty.$$

Si recordem, una successió és convergent si, i només si, la seva cua tendeix a zero a mesura que augmentem el nombre de termes. És a dir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ convergent} \implies \sum_{k=N}^{\infty} a_k \rightarrow 0, N \rightarrow \infty.$$

Per tant, sabem que  $|E_k|$  és convergent i, per tant, la cua de la successió  $|E_k|$  tendeix a 0, com volíem. ■

**Exercici 1.4.11.** *Digueu si són certes o falses les afirmacions següents (si són certes proveu-les, i si no doneu un contraexemple).*

1. Si  $\mathcal{A}_k, k \geq 1$ , són  $\sigma$ -àlgebres a  $\mathbb{R}^n$  aleshores  $\mathcal{A} := \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{A}_k$  també és una  $\sigma$ -àlgebra a  $\mathbb{R}^n$ .
2. Per a tot  $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  amb  $|A|, |B| < +\infty$ ,

$$||A| - |B|| \leq |A \setminus B| + |B \setminus A|$$

3. Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és integrable, aleshores  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
4. Sigui  $E \subset \mathbb{R}^n$  tal que la seva frontera  $\partial E$  té mesura exterior zero. Aleshores  $E$  és mesurable.

Demostració. PRIMER APARTAT.  $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$ , ja que  $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}_k$  per a tot  $k \in \mathbb{N}$  i, per tant,  $\mathbb{R}^n \in \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{A}_k = \mathcal{A}$ . Si  $E \in \mathcal{A}$ ,  $E \in \mathcal{A}_k$  per a tot  $k \in \mathbb{N}$ . Com que  $\mathcal{A}_k$  és una  $\sigma$ -àlgebra,  $\mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{A}_k$  per a tot  $k \in \mathbb{N}$  i:

$$\mathbb{R}^n \setminus E \in \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{A}_k = \mathcal{A}.$$

Utilitzem el mateix argument que abans, partint del fet que  $E_1, \dots, E_n$  pertanyen a les  $k$ - $\sigma$ -àlgebres, arribem finalment al fet que ens interessa.

SEGON APARTAT. Usem el fet de teoria de conjunts que  $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$  i viceversa,  $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ , per a tot conjunt  $A, B$ . A més, aquests dos conjunts són disjunts:

$$\left. \begin{aligned} |A| &= |A \setminus B| + |A \cap B| \\ |B| &= |B \setminus A| + |A \cap B| \end{aligned} \right\} \implies |A| - |B| = |A \setminus B| - |B \setminus A| \leq |A \setminus B| + |B \setminus A|.$$

Intercanviant els papers d' $A$  i  $B$ , obtenim una desigualtat complementària  $|B| - |A| \leq |A \setminus B| + |B \setminus A|$ . Així, obtenim el resultat.

QUART APARTAT: Sigui  $E \subset \mathbb{R}^n$  subconjunt. La seva frontera és  $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$ . Podem posar  $E = \overset{\circ}{E} \cup (E \setminus \overset{\circ}{E})$ . Usant que  $\overset{\circ}{E} \subset E \subset \overline{E}$ ,

$$(E \setminus \overset{\circ}{E}) \subset (\overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}) = \partial E.$$

En particular,  $|E \setminus \overset{\circ}{E}|^* \leq |\partial E|^* = 0$ , la última igualtat per hipòtesi. Per tant,  $\overset{\circ}{E}$  és obert i, per tant, mesurable, i  $E \setminus \overset{\circ}{E}$  té mesura exterior 0 (i, per tant, és mesurable). La unió de mesurables és mesurable; així,  $E$  és mesurable. ■

**Exercici 1.4.12.** Sigui  $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una successió de funcions mesurables. Demostreu que el conjunt  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (f_j(x))_j \text{ és de Cauchy}\}$  és mesurable. (Indicació: Escriu la definició de successió de Cauchy i poseu el conjunt com a unió i intersecció numerable de conjunts mesurables.)

Demostració. Recordem que una funció  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  és mesurable si, i només si, per a tot  $\alpha \in \mathbb{R}$  el conjunt  $f^{-1}((\alpha, +\infty))$  és mesurable. Al seu torn,

$$\{f_j(x)\}_{j=1}^{\infty} \text{ és de Cauchy} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall j, k \in \mathbb{N}, |f_j(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Podem canviar  $\varepsilon$  per  $\frac{1}{m}$ , amb  $m \in \mathbb{N}$ . La part dreta de l'equivalència és equivalent (valgui la redundància) a:

$$x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{j, k \geq N} \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |f_j(x) - f_k(x)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

Això és perquè  $\forall m \in \mathbb{N} \equiv \bigcap_{m \in \mathbb{N}}$  i  $\exists M \in \mathbb{N} \equiv \bigcup_{n \in \mathbb{N}}$ . Que  $f$  sigui mesurable implica que  $|f|$  és mesurable. En efecte,  $|f| < a$  si, i només si,  $-a < f < a$ , per a  $a > 0$ . Com  $f_j, f_k$  mesurables,  $|f_j - f_k|$  és mesurable i  $f^{-1}((-\infty, \frac{1}{m}))$  és mesurable i, justament,  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f_j(x) - f_k(x)| < \frac{1}{m}\}$ . ■

## FUNCIONS SIMPLES

Definirem la integral d'una funció mesurable qualsevol per aproximació mitjançant les anomenades *funcions simples*, que són combinacions lineals de funcions característiques.

**Definició 1.5.1** (Funció simple). Una funció  $s : E \longrightarrow \mathbb{R}$  es diu *simple* si és de la forma

$$s(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{A_k}(x), \quad x \in E,$$

on  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ ,  $\chi$  és la funció característica i  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  són disjunts dos a dos.

**Exemple 1.5.2.**

- A la funció  $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , prenem per a  $j = 1, \dots, N$ ,  $E_j = \{x \in [-1, 1] \mid \frac{j-1}{N} \leq x^2 \leq \frac{j}{N}\}$  i la funció simple:

$$s = \sum_{j=1}^N \frac{j-1}{N} \chi_{E_j}.$$

Aquesta funció dona una aproximació per sota de  $x^2$  que es va fent més precisa a mesura que  $N$  creix.

- Sigui  $A = (0, 2)$  i  $B = (1, 3)$  tal que  $f(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$ . Prenem  $A, B \subset E$  tal que  $E$  és mesurable. Aleshores, podem escriure  $f$ , equivalentment, de la següent manera:  $f(x) = 3\chi_{A \setminus B}(x) + 4\chi_{A \cap B}(x) + \chi_{B \setminus A}(x)$ . Hem usat el fet que  $A \cup B = A \setminus B \cup A \cap B \cup B \setminus A$ .
- La funció  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  donada per  $f(x) = 1$  si  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  i  $f(x) = 0$  sempre que  $x \in \mathbb{Q}$  és simple, ja que  $f = \chi_{[0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}$ .

**Observació 1.5.3.**

1. Totes aquestes funcions són mesurables per les propietats que hem enunciat al final de l'apartat anterior.
2. Els possibles valors d'una funció simple  $s = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \chi_{A_k}$  són  $0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ . A més, per a  $k = 1 \div n$ :

$$s^{-1}(\{\alpha_k\}) = A_k, \quad s^{-1}(\{0\}) = E \setminus \bigcup_{k=1}^N A_k.$$

3. Segons les propietats que hem vist, tota funció que sigui límit de funcions simples també és mesurable. És important que, recíprocament, tota funció mesurable i no negativa és límit d'una successió creixent de funcions simples.

**Teorema 1.5.4.** Sigui  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty]$  mesurable. La successió  $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  de funcions simples i positives:

$$s_m = \sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k-1}{2^m} \cdot \chi_{E(k,m)} + m \chi_{F(m)}, \quad m \in \mathbb{N},$$

amb  $E(k, m) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{k-1}{2^m} \leq f(x) < \frac{k}{2^m}\}$  i  $F(m) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq m\}$  és creixent ( $s_{n+1}(x) \geq s_n(x)$  per a tot  $x$ ) i  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) = f(x)$ .

*Demostració.* Com que  $E(k, m)$  i  $F(m)$  són mesurables, es dona que  $s_m$  és simple. Veiem que  $s_n(x) \leq f(x)$  per a tot  $x \in \mathbb{R}^n$  i per a tot  $m$ . Si  $x \in F_m$ ,  $s_m(x) = m$  i  $f(x) \geq m$ . Si  $x \in E(k, m)$ ,  $s_m(x) = \frac{k-1}{2^m}$  i  $\frac{k-1}{2^m} \leq f(x) < \frac{k}{2^m}$ . Adonem-nos que dividim l'interval  $[0, m]$  en una partició de fragments equidistants i de mida, tots,  $\frac{1}{2^m}$  (és a dir, amb punts de contacte  $0, \frac{1}{2^m}, \dots, \frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}, \dots, \frac{m2^m}{2^m} = m$ ). Ara considerem  $s_{m+1}(x)$ , de manera que la partició es farà més fina; en concret, el doble de fina (cada interval es dividirà en dos de petits). Si  $x \in E(k, m)$ , podem dividir en dos casos:

1. Si  $x$  pertany a la primera meitat de  $E(k, m)$ ,  $s_m(x) = s_{m+1}(x)$ .
2. Si  $x$  pertany a la segona meitat de  $E(k, m)$ ,  $s_m(x) < s_{m+1}(x)$ .

Si  $x \in E(k, m)$ ,

$$|f(x) - s_m(x)| \leq \frac{1}{2^m}.$$

Com que  $E(k, m)$  està fitat per  $m$ , qualsevol valor d' $x$  la imatge del qual sobrepassi  $m$  viurà en  $F(m)$ ; és a dir, si  $f(x) \geq m$ ,  $x \in F(m)$ . En més detall, si  $f(x) = +\infty$ ,  $x \in F(m)$  per a tot  $m$  i  $s_m(x) = m$ . En canvi, si  $f(x) < +\infty$ ,  $x \in E(k, m)$  quan  $m > f(x)$ :

$$|f(x) - s_m(x)| \leq \frac{1}{2^m} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

**Propietat 1.5.5.** Sigui  $c \in \mathbb{R}$ ,  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  i  $f, g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  funcions simples. Aleshores:

$$cf, f + g, f \cdot g; \frac{f}{g}, \max\{f, g\}, |f|, f^+, f^-$$

són funcions simples.

## 1.6

### LA INTEGRAL DE LEBESGUE DE FUNCIONS MESURABLES

Utilitzarem l'aproximació de funcions mesurables per funcions simples per a definir la integral de Lebesgue. Ho fem per passos.

#### 1.6.1

#### PRIMER PAS

**Funcions simples.** Sigui  $s = \sum_{k=1}^N x_k \chi_{A_k}$ ,  $x_k \geq 0$  i  $k = 1, \dots, N$  i  $A_k$  mesurables (és a dir,  $s$  és una funció simple positiva). La integral de  $s$  es defineix de la manera que esperem:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k=1}^N \alpha_k \cdot |A_k|.$$

<sup>2</sup> Tal com hem fet abans, cal suposar que  $g(x) \neq 0$  almost everywhere.



En general, si  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ , definim:

$$\int_E s = \sum_{k=1}^n \alpha_k |A_k \cap E| = \int_E s \cdot \chi_E.$$

Per estar segurs que contemplem tots els casos possibles, convindrem que si  $\alpha_k = 0$ , aleshores la contribució d' $\alpha_k \chi_{A_k}$  és també 0, encara que  $|A_k| = +\infty$ .

**Observació 1.6.1.**

1. *Important.* Si  $|A_k \cap E| = \infty$  i  $\alpha_k = 0$ , entenem que el producte  $\alpha_k |A_k \cap E|$  val zero també. Es compleix en cert sentit  $0 \cdot \infty = 0$ .
2. Si  $|Z| = 0$ , llavors  $\int_Z s = 0$ .
3. Si  $E \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  i  $s \geq 0$  simple, llavors:

$$\int_E s \leq \int_{\mathbb{R}^n} s.$$

Aquestes dues propietats són directes a partir de la definició.

**Propietat 1.6.2.** *Siguin  $s, t \geq 0$  funcions simples, i sigui  $\{E_i\}_i$  una col·lecció finita o numerable de conjunts mesurables i disjunts dos a dos, tenim:*

1. Si  $\lambda \geq 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda s = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} s.$$

*Aquesta propietat és certa, de fet, per a tot  $\lambda \in \mathbb{R}$ , però de moment només tenim dret a integrar funcions simples positives.*

2. *Additivitat:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} s + t = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t.$$

3. *Monotonia:* si  $0 \leq s \leq t$ , aleshores:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s \leq \int_{\mathbb{R}^n} t.$$

4.  *$\sigma$ -additivitat (respecte el conjunt d'integració):*

$$\int_{\bigcup_i E_i} s = \sum_i \int_{E_i} s.$$

*Aquests resultats, que es comproven directament de la definició i de les propietats de la mesura ja donen, juntament amb el resultat d'aproximació per funcions simples, la idea del següent pas.*

Demostració. SEGON APARTAT. El podem expressar de la següent manera, per a  $E = \bigcup_i E_i$ ,  $E_i$  mesurables. Si  $A_1 \cup \dots \cup A_n$  i  $B_1 \cup \dots \cup B_m$ . Sigui  $s$  constant en  $E$  i  $t$  també:

$$E = \bigcup_{i,j} \{A_i \cap B_j\}_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,m}.$$

De manera que queda  $(s+t)(x) = \sum_{i=1}^n (s_i + t_i) \chi_{E_i}$ , com volíem. En altres paraules, es té:

$$\begin{aligned} s+t = \sum_{k,j} (\alpha_k + \beta_j) \cdot \chi_{A_k \cap B_j} &\implies \int_{\mathbb{R}^n} (s+t) = \sum_{k,j} (\alpha_k + \beta_j) \cdot |A_k \cap B_j| \\ &+ \sum_{k,j} \beta_j \cdot |A_k \cap B_j| = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t. \end{aligned}$$

TERCER APARTAT,  $t = s + (t-s)$  i, com  $s$  i  $(t-s)$  són simples i no negatives, usem el segon apartat. El quart apartat resulta d'usar la definició i la  $\sigma$ -additivitat de la mesura de Lebesgue:

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_i E_i} s &= \sum_{k=1}^N \alpha_k \cdot \left| A_k \cap \left( \bigcup_i E_i \right) \right| = \sum_{k=1}^N \alpha_k \cdot \sum_i |A_k \cap E_i| \\ &= \sum_i \sum_k \alpha_k \cdot |A_k \cap E_i| = \sum_i \int_{E_i} s. \end{aligned}$$

■

### 1.6.2 PAS SEGON

Sigui  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  mesurable no negativa. Considerem la família de funcions simples que queden per sota de  $f$ :

$$S(f) = \{s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty] \text{ simple i amb } 0 \leq s \leq f\}.$$

En general, si  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ , aleshores:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup_{s \in S(f)} \int_{\mathbb{R}^n} s \implies \int_E f = \int_{\mathbb{R}^n} f \chi_E = \sup_{s \in S(f \chi_E)} \int_{\mathbb{R}^n} s.$$

A continuació, una sèrie de resultats i observacions.

#### Propietat 1.6.3 (Observacions i propietats).

1. Quan  $f = s$  simple, aquesta definició coincideix amb la del primer pas.
2. Monotonia. Si  $0 \leq f \leq g$  i  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ , llavors:

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

3. Si  $f \geq 0$  és mesurable i  $\lambda \geq 0$ , llavors:

$$\int_E \lambda f = \lambda \int_E f.$$

4. Si  $f \geq 0$  mesurable i  $E_1, E_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  amb  $E_1 \subset E_2$ , llavors:

$$\int_{E_1} f \leq \int_{E_2} f.$$

5. Si  $f \geq 0$  és mesurable i  $Z$  és tal que  $|Z| = 0$ , llavors:

$$\int_E f = \int_{E \setminus Z} f, \quad \forall E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

Totes les anteriors propietats són heretades de les anàlogues per a funcions simples, que ja hem anat explicant.

*Demostració.* Comentarem la segona, tercera, quarta i cinquena.

2. Se segueix de la definició i de la demostració del tercer apartat de 1.6.2.
3. Pel que fa a la tercera, tenim que  $\int_E f = \int_{\mathbb{R}} f_{\chi_E}$  i  $\int_F f = \int_{\mathbb{R}} f_{\chi_F}$ , de manera que podem aplicar l'apartat anterior.
4. Podem en una integral afegir o treure un conjunt de mesura zero sense que afecti al resultat. És directa quan ens adonem que  $E = (E \setminus Z) \cup (E \cap Z)$  o, equivalentment,  $E \cup Z = E \cup (Z \setminus E)$ . ■

**Proposició 1.6.4.** Si  $f \geq 0$  és mesurable i  $\int_E f \ll +\infty$ , llavors  $|\{x \in E \mid f(x) = +\infty\}| = 0$ .

*Demostració.* Per a veure això, definim  $Z = \{x \in E \mid f(x) = +\infty\}$ , que sabem que és mesurable. Per la monotonia, tant respecte al conjunt d'integració com a la funció, tenim:

$$+\infty > \int_E f \geq \int_Z f = \int_Z (+\infty),$$

d'on deduïm que  $|Z| = 0$ . Més formalment, considerem  $A_n = \{x \in E \mid f(x) > n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , de manera que  $Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . Llavors:

$$\int_E f \geq \int_{A_n} f \geq \int_{A_n} n = n|A_n|.$$

Per tant,  $|A_n| \leq \frac{\int_E f}{n} \rightarrow 0$  sempre que  $n \rightarrow \infty$ . Com que  $Z \subset A_n$ , també tenim que  $|Z| \leq |A_n| \rightarrow 0$  quan  $n \rightarrow \infty$ . ■

**Proposició 1.6.5.** Si  $f \geq 0$  és mesurable i  $\int_E f = 0$ , llavors  $|\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}| = 0$ .

*Demostració.* Per a veure això, si diem  $A_n = \{x \in E \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$  tenim  $\{x \in E \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  i:

$$0 = \int_E f \geq \int_{A_n} f \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}|A_n|;$$

per tant,  $|A_n| = 0$  per a tot  $n \geq 1$  i

$$|\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}| = \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right| = 0. \quad \blacksquare$$

**Proposició 1.6.6 (Additivitat).** Sigui  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  i siguin  $f, g \geq 0$  mesurables. Aleshores:

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

*Idea de la demostració.* La prova depèn de l'anomenat *Teorema de la Convergència Monòtona*: si  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  són mesurables i  $0 \leq f_1 \leq \dots$ , aleshores:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \blacksquare$$

*Demostració feta a classe.* Siguin  $f, g \geq 0$  mesurables. Existeix  $s_n \subset f$  tal que:

$$\begin{aligned}\int f &= \sup_{\substack{0 \leq s \leq f \\ s \text{ simple}}} \int s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n \\ \int g &= \sup_{\substack{0 \leq t \leq g \\ t \text{ simple}}} \int t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int t_n\end{aligned}$$

Com  $s_n + t_n \leq f + g$ ,  $\int f + \int g \leftarrow \int s_n + \int t_n = \int s_n + t_n \leq f + g$ . Ens falta resoldre l'altra meitat, que s'ha de fer amb el Teorema de la Convergència Monòtona igualment. Construïm dos funcions simples que convergeixen puntualment cap a  $f(x), g(x)$ , respectivament:  $s_k(x) \nearrow f(x)$  i  $t_k(x) \nearrow g(x)$  per a tot  $x \in \mathbb{R}^n$ . Obtenim, doncs, que  $s_k(x) + t_k(x) \rightarrow f(x) + g(x)$ . Ara sí, apliquem el TCM:

$$\begin{array}{ccccc}\int s_k + \int t_k & \longrightarrow & \int s_k(x) + t_k(x) & \longrightarrow & \int f + g \\ & \searrow & \text{TCM} & \nearrow & \\ & & & & \end{array} \quad \blacksquare$$

**Propietat 1.6.7 (Més propietats).**

1. Si  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  i  $f_n : E \rightarrow [0, +\infty]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , són mesurables; llavors,

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k.$$

2. Si  $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$  són conjunts mesurables disjunts dos a dos i  $f : \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \rightarrow [0, +\infty]$  és mesurable, llavors:

$$\int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f.$$

Prenem una funció mesurable  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Donada  $f$  amb signe arbitrari, escrivim  $f = f^+ - f^-$ . Com que  $f^+ = \max\{f, 0\}$  i  $f^- = \max\{-f, 0\}$ , aquestes funcions són mesurables i, per tant, també ho és  $|f| = f^+ + f^-$ .

Ara definim la integral de  $f$  com la resta de les integrals de  $f^+$  i  $f^-$  (cosa que sabem fer per la subsecció anterior), sempre que aquesta resta no porti a una indeterminació.

**Definició 1.6.8 (Integral de Lebesgue).** Sigui  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  i sigui  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mesurable tal que almenys un dels dos valors  $\int_E f^+$  i  $\int_E f^-$  sigui finit. Llavors, definim la *integral de Lebesgue* de  $f$  com:

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

**Definició 1.6.9** (Funció integrable). Una funció  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mesurable és integrable si:

$$\int_E |f| = \int_E f^+ + \int_E f^- \ll \infty.$$

Denotem per  $\mathcal{L}^1(E)$  el conjunt de funcions integrables a  $E$ .

**Observació 1.6.10. Atenció.** Pot passar que  $f$  no sigui integrable però que  $\int_E f$  sigui ben definit. De fet, amb les definicions que acabem de veure, això passa quan una de les integrals  $\int_E f^+$ ,  $\int_E f^-$  és finita i l'altra no.

**Proposició 1.6.11.**  *sigui  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ , un conjunt mesurable.*

1.  $\mathcal{L}^1(E)$  és un espai vectorial sobre el qual la integral de Lebesgue és una aplicació lineal. És a dir, si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  i  $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$ , llavors  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(E)$  i:

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g.$$

2. Si  $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$  i  $f \leq g$ :

$$\int_E f \leq \int_E g \text{ i } \left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$

3. Invariància per translacions i simetries. Si  $v \in \mathbb{R}^n$  és fix i  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ , llavors  $f(x - v) \in \mathcal{L}^1(E + v)$  i:

$$\int_{E+v} f(x - v) dx = \int_E f(x) dx.$$

De manera semblant,  $f(-x) \in \mathcal{L}^1(-E)$  i:

$$\int_{-E} f(-x) dx = \int_E f(x) dx.$$

Aquí,  $E + v = \{x + v \mid x \in E\}$  i  $-E = \{-x \mid x \in E\}$ .

*Idea de la demostració.* El primer apartat s'ha de fer per casos. El cas més fàcil per a les desigualtats següents:  $(\alpha f + \beta g)^+ \leq \alpha f^+ + \beta g^+$  i  $(\alpha f + \beta g)^- \leq \alpha f^- + \beta g^-$ . D'aquesta manera obtenim que:

$$(\alpha f + \beta g)^\pm \leq |\alpha f + \beta g| \leq |\alpha| \cdot (f^+ - f^-) + |\beta| (g^+ - g^-).$$

El segon apartat surt del fet que  $f^+ \leq g^+$  i  $g^- \leq f^-$ . Com que les desigualtats es conserven amb la integral:

$$\int_E f^+ - \int_E f^- \leq \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E g \iff - \int_E g^- \geq - \int_E f^-.$$

La segona desigualtat del mateix apartat se segueix directament del fet que:

$$\left| \int f^+ - \int f^- \right| \leq \int f^+ + \int f^-.$$

■

**Proposició 1.6.12.**

1. Si  $f \in \mathcal{L}^1(E)$  i  $g$  és mesurable tal que  $|g| \leq f$ , llavors  $g \in \mathcal{L}^1(E)$ .
2. Si  $f$  és mesurable i acotada i  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  tal que tenim  $|E| \ll \infty$ , llavors  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ .

## RELACIÓ ENTRE RIEMANN I LEBESGUE

**Teorema 1.7.1** (Relació entre Riemann i Lebesgue). *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , aleshores  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$  i:*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f.$$

**Observació 1.7.2.**

1. Això diu, en primer lloc, que la integral de Lebesgue de les funcions integrables Riemann és precisament el valor de la integral de Riemann. Per a funcions integrables Riemann podem continuar utilitzant sels mètodes d'integració que coneixem (canvi de variable, integració per parts, etc.).
2. Hi ha funcions integrables en el sentit de Lebesgue que no ho són en el sentit de Riemann (i, per tant per a funcions  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la integral de Riemann és més general).

**Exemple 1.7.3.** Considerem la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

La integral superior de Riemann  $\bar{\int}_a^b f(x) dx$ , mentre que la integral inferior és 0:  $\underline{\int}_a^b f(x) = 0$ . Per tant,  $f$  no és integrable Riemann (la integral de Riemann no està definida), ja que  $\bar{R}_n = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \frac{1}{i} = 1$ , i  $\underline{R}_n = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \frac{1}{i} = 0$  i  $\bar{R}_n - \underline{R}_n \not\rightarrow 0$  quan  $n \rightarrow \infty$ . Per altra banda, com que  $f = 1$  *almost everywhere* per a  $x \in [0, 1]$  tenim que  $f$  és integrable Lebesgue i:

$$\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} 1 = 1.$$

**Teorema 1.7.4** (Integral impròpia i integral de Lebesgue). *Sigui  $f : [a, b) \in \mathbb{R}$  amb  $-\infty < a < b \leq +\infty$ , localment integrable Riemann. Són equivalents:*

1.  $\int_a^b f(x) dx$  és absolutament convergent.
2.  $f \in \mathcal{L}^1([a, b))$ .

Quan això passa,  $\int_a^{b-} f(x) dx = \int_{[a,b)} f$ .

**Observació 1.7.5.**

- Quan ambdues coincideixen els mètodes de càlcul són els mateixos.
- Pot passar que la integral impròpia sigui convergent (Riemann) però la funció no sigui integrable Lebesgue; per exemple,  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ .

## INTEGRAL DE LEBESGUE I TEOREMES DE CONVERGÈNCIA

Un dels principals avantatges de la integral de Lebesgue, comparada amb la integral de Riemann, és el bon comportament per processos de pas al límit. Veurem tot seguit una sèrie de resultats que mostren aquest bon comportament.

**Teorema 1.8.1** (Teorema de la convergència monòtona). *Sigui  $E \subset \mathbb{R}^n$  mesurable i siguin  $f_n : E \rightarrow [0, +\infty]$ ,  $n \geq 1$ , funcions mesurables tals que*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots \quad \text{a.e. } x \in E$$

*Aleshores:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

**Exemple 1.8.2.** Provem que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{nx^2}}{(e^{nx^2} + \pi) x^{3/2}} dx = 2$$

La successió:

$$f_n(x) = \frac{e^{nx^2}}{(e^{nx^2} + \pi) x^{3/2}} = \frac{1}{1 + \pi/e^{nx^2}} \frac{1}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi}{e^{(n+1)x^2}}\right) x^{\frac{3}{2}}} = f_{n+1}(x).$$

és creixent en  $n$ , per a tot  $x \in [1, +\infty]$ , i:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \pi/e^{nx^2}} \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Per tant:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{nx^2}}{(e^{nx^2} + \pi) x^{3/2}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = 2$$

*Demostració de 1.8.1.* Observem, en primer lloc, que  $f(x) := \lim_n f_n(x)$  està ben definit a.e.  $x \in E$ , per la condició de no-decreixement, ja que tota successió monòtona té límit. A més,  $f = \lim_n f_n$  és mesurable, per les propietats de les funcions mesurables (és mesurable perquè és contínua en el domini d'integració). Per tant, podem parlar de la integral  $\int_E f$ . Hi ha una desigualtat trivial: com que  $f_n \leq f$ , per la monotonia de les integrals tenim  $\int_E f_n \leq \int_E f$  i, per tant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \leq \int_E f.$$

Ens cal veure la desigualtat contrària; volem veure que per a tot funció simple  $s \in \mathcal{S}(f)$  ( $s \leq f$ ),

$$\int_E s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n, \quad (1.8.1)$$

la qual cosa implicarà que

$$\int_E f = \sup_{s \in \mathcal{S}(f)} \int_E s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n$$

Prenem, doncs,  $s \in \mathcal{S}(f)$  i anem a demostrar que (1.8.1) es compleix. Suposem que  $s = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{A_j}$  amb  $A_j$  mesurables i  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ . Per a tot  $0 < t < 1$  definim:

$$s_n^t := \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{A_j \cap \{x \in E \mid t\alpha_j \leq f_n(x)\}}$$

És clar que per a tot  $x \in E$  tenim:

$$ts_n^t(x) \leq f_n(x).$$

Com que  $\{x \in E : t\alpha_j \leq f_n(x)\}$  és un conjunt mesurable,  $s_n^t$  és una funció mesurable, i usant la monotonia, obtenim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E ts_n^t \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n. \quad (1.8.2)$$

De fet,  $s_n^t$  és una funció simple, amb integral:

$$\int_E s_n^t = \sum_{j=1}^N \alpha_j |A_j \cap \{x \in E : t\alpha_j \leq f_n(x)\}|.$$

Observem també que si  $x \in A_j$  aleshores  $ts(x) = t\alpha_j < \alpha_j \leq f(x)$ , i per tant, existeix un  $n$  tal que  $ts(x) \leq f_n(x)$ , és a dir,  $x \in A_j \cap \{x \in E : t\alpha_j \leq f_n(x)\}$ . Per tant:

$$A_j = \bigcup_n (A_j \cap \{x \in E : t\alpha_j \leq f_n(x)\})$$

Com que la de la dreta és una successió creixent de conjunts, per la llista de problemes, sabem que:

$$|A_j| = \lim_{n \rightarrow \infty} |A_j \cap \{x \in E : t\alpha_j \leq f_n(x)\}|.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E s_n^t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \alpha_j |A_j \cap \{x \in E : t\alpha_j \leq f_n(x)\}| \\ &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \lim_{n \rightarrow \infty} |A_j \cap \{x \in E : t\alpha_j \leq f_n(x)\}| \\ &= \sum_{j=1}^N \alpha_j |A_j| = \int_E s. \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

Ajuntant (1.8.2) i (1.8.3), obtenim el següent:

$$\int_E s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E s_n^t = t^{-1}t \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E s_n^t \leq t^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n.$$

Com que això és cert per a tot  $t < 1$ , prenent el límit per  $t \nearrow 1$  obtenim finalment que:

$$\int_E s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n. \quad \blacksquare$$

Una conseqüència directa del teorema de la convergència monòtona és el següent resultat referent a sèries de funcions positives.

**Corol·lari 1.8.3.** *Sigui  $E \subset \mathbb{R}^n$  mesurable i siguin  $f_n : E \rightarrow [0, +\infty]$ ,  $n \geq 1$ . Aleshores:*

$$\sum_{n \geq 1} \int_E f_n = \int_E \sum_{n \geq 1} f_n.$$



**Demostració.** Per a provar aquest resultat tan sols cal considerar les funcions  $F_N = \sum_{n=1}^N f_n$  tals que  $F_N = E \rightarrow [0, +\infty]$  (són positives) són mesurables, i formen una successió creixent perquè  $g_{n+1}(x) = g_n(x) + f_{n+1}(x) \geq g_n(x)$ . Pel teorema de la convergència monòtona tenim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int f_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n = \int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x). \quad \blacksquare$$

**Exemple 1.8.4.** Calculem, per a  $\alpha > 0$ ,

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^1 x^n (1-x)^\alpha dx$$

Com que les funcions  $f_n(x) := x^n(1-x)^\alpha$  són positives a  $(0, 1)$ , pel resultat anterior,

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^1 x^n (1-x)^\alpha dx = \int_0^1 \left( \sum_{n \geq 1} x^n \right) (1-x)^\alpha dx = \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Continuem amb un resultat auxiliar que es demostra fàcilment amb el teorema de la convergència monòtona.

**Lema 1.8.5 (Lema de Fatou).** *Sigui  $E \subset \mathbb{R}^n$  mesurable i siguin  $f_n : E \rightarrow [0, +\infty], n \geq 1$ , funcions mesurables. Aleshores:*

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n.$$

**Exemple 1.8.6.** *Exemples senzills mostren que la igualtat no és certa en general.* Per exemple, prenem  $E = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  i definim

$$f_n(x) = \begin{cases} \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x) & \text{si } n \text{ és parell} \\ \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$$

Aquí  $\int_{[0,1]} f_n = \frac{1}{2}$  per a tot  $n \geq 1$ , però en canvi  $\liminf_n f_n = 0$ .

**Teorema 1.8.7 (Teorema de la convergència dominada).** *Sigui  $E \subset \mathbb{R}^n$  mesurable i siguin  $f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, n \geq 1$ , funcions mesurables. Si existeix  $g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable ( $g \in \mathcal{L}^1(E)$ ) tal que per a tot  $n \geq 1$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  quan  $n \rightarrow \infty$  i:*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{a.e. } x \in E.$$

*Aleshores,  $f_n \in \mathcal{L}^1(E)$  i:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

**Exemple 1.8.8 (Exemple negatiu).** Sigui  $f_n(x)$  la funció característica  $\chi_{[n, \infty)}(x)$ ; és a dir, que envia a 0 tot aquell valor entre  $(-\infty, n)$  i a 1  $[n, +\infty)$ . En teoria, podem aplicar que  $\lim_n \int_E f_n = \lim_E \int_E f_n$ . Això és; per una banda,  $\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ , ja que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ ; d'altra banda:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^\infty 1 dx = \infty.$$

Tindríem que  $0 = \infty$ , la qual cosa és absurda.

**Exemple 1.8.9** (Exemple positiu). Calculem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n \sin(\frac{x}{n})}{x(x^2 + 1)} dx$$

Diem:

$$f_n(x) := \frac{n \sin(\frac{x}{n})}{x(x^2 + 1)} = \frac{\sin(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} \frac{1}{(x^2 + 1)}.$$

Com que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  tenim, per a tot  $x \in \mathbb{R}$  fixat,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)}.$$

A més, utilitzant que  $|\sin t| \leq |t|, t \in \mathbb{R}$ , tenim també:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{(x^2 + 1)}.$$

Com que  $g(x) := 1/(x^2 + 1)$  és integrable a  $\mathbb{R}$  podem aplicar el teorema de la convergència dominada i deduir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n \sin(\frac{x}{n})}{x(x^2 + 1)} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2 + 1)} = [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

**Exemple 1.8.10.** Calculem, per a  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^k \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} dx.$$

Per evitar l'inconvenient que el domini de les integrals depèn de  $n$ , prenem:

$$f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x) x^k \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Observem que, fixat  $x \geq 0$ , la successió  $(1 + \frac{x}{n})^n$  creix cap a  $e^x$ , i per tant, fixat  $x \geq 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x^k e^{-x}$$

Com que la successió  $(1 + \frac{x}{n})^n$  creix, no podem acotar  $(1 + \frac{x}{n})^{-n}$  per  $e^{-x}$ . Utilitzant la monotonia tenim però, per a  $n \geq k$ ,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \leq \left(1 + \frac{x}{k+2}\right)^{-(k+2)}.$$

Amb això queda, si  $n \geq k$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$ , on:

$$g(x) := x^k \left(1 + \frac{x}{k+2}\right)^{-(k+2)}.$$

Observem que aquesta funció és contínua a  $[0, +\infty)$  i que té un creixement a l'infinit comparable amb  $\frac{1}{x^2}$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k \left(1 + \frac{x}{k+2}\right)^{-(k+2)}}{1/x^2} = (k+2)^{k+2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2+x)^{k+2}} = (k+2)^{k+2}.$$

Per tant, pel segon criteri de comparació,  $g$  és integrable i podem aplicar el teorema de la convergència dominada per deduir finalment que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^k \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} dx = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = \Gamma(k+1) = k!$$

**Observació 1.8.11** (Funció gamma). La funció  $\Gamma$  és la integral següent:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Per a  $\alpha > 0$ , tenim unes propietats força importants:  $\Gamma(1) = 1$  i  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ . Podem definir una altra funció a partir d'aquesta, la funció  $B$ , amb  $a, b > 0$  tenim:

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$



## Mètode d'integració

2.1  
CÀLCUL D'INTEGRALS DE FUNCIONS DE MÉS D'UNA  
VARIABLE

Comencem amb un exemple per il·lustrar el mètode d'integració que després generalitzarem.

**Exemple 2.1.1** (Integració iterada). Sigui  $Q = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  (quadrat unitat) i sigui  $f(x, y) = 1 - x$ . La funció és contínua (i, per tant, mesurable) independent de  $y$  i la seva gràfica és un tros del pla  $z = 1 - x$ . Tenim  $f \in \mathcal{L}^1(Q)$  i esperaríem que el volum sota el tros de pla,  $\int_Q f$ , fos  $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$ .

Amb les eines que tenim dins ara, per calcular  $\int_Q f$  hauríem de construir una successió creixent de funcions simples  $s_m \nearrow f$ , a.e.,  $x \in Q$  i calcular:

$$\int_Q f = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_Q s_m.$$

Una forma útil de fer els càlculs, aprofitant el que ja sabem d'una variable, és pensar el volum com una mena de *suma contínua* d'àrees. Aquí, fixant  $x_0 \in [0, 1]$ , l'àrea de la làmina que va del pla  $z = 1 - x$  fins a  $Q$  sobre el pla  $x = x_0$  és:

$$\int_0^1 (1 - x_0) dy = 1 - x_0.$$

Fent això, per a cada  $x_0 \in [0, 1]$  tenim:

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 (1 - x) dy \right) dx = \int_0^1 (1 - x) dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

També podem canviar els papers de  $x$  i  $y$  i comprovar que dona el mateix resultat:

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 (1 - x) dx \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}.$$

Aquesta manera de procedir es coneix com *integració iterada*.

**Observació 2.1.2.** La integració iterada no funciona sempre, cal alguna hipòtesi sobre la funció. Per exemple, sigui  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , amb  $E = (0, 1] \times (0, 1]$  i  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ . Llavors:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx \cdot dy = \int_0^1 \left[ \frac{-x}{x^2 + y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = - \int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = [-\arctan(y)]_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Anàlogament, es comprova que:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy \cdot dx = \frac{\pi}{4};$$

és a dir, que si canviem l'ordre d'integració el valor de la integral també canvia.

Vegem tot seguit que la integració iterada funciona bé almenys en dos casos: funcions positives (o negatives, val amb què no canviï de signe) i funcions mesurables.

**Teorema 2.1.3** (Teorema de Tonelli). *Sigui  $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow [0, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$  mesurable tal que  $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ . Llavors:*

1. *Per a gairebé tot  $x \in \mathbb{R}^p$  la funció  $f(x, \cdot) : \mathbb{R}^q \longrightarrow [0, +\infty]$  és mesurable. Anàlogament, per a gairebé tot  $y \in \mathbb{R}^q$  la funció  $f(\cdot, y) : \mathbb{R}^p \longrightarrow [0, +\infty]$  és mesurable.*
2. *Les funcions  $\varphi_f : \mathbb{R}^p \longrightarrow [0, +\infty]$  i  $\psi_f : \mathbb{R}^q \longrightarrow [0, +\infty]$  definides per:*

$$\begin{aligned}\varphi_f(x) &= \int_{\mathbb{R}^q} f(x, \cdot) \text{ a.e } x \in \mathbb{R}^p \\ \psi_f(y) &= \int_{\mathbb{R}^p} f(\cdot, y) \text{ a.e } y \in \mathbb{R}^q\end{aligned}$$

*són mesurables i  $\int_{\mathbb{R}^p} \varphi_f = \int_{\mathbb{R}^q} \psi_f = \int_{\mathbb{R}^n} f$ .*

3. *Obtenim les següents igualtats:*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f &= \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_f(x) = \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y) \right) dm_p(x), \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} \varphi_f(y) = \int_{\mathbb{R}^q} \left( \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dm_p(x) \right) dm_q(y).\end{aligned}$$

**Observació 2.1.4.**

- La notació  $\int_{\mathbb{R}^p} g(x) dm_p(x)$  indica que integrem  $g$  respecte la mesura de Lebesgue a  $\mathbb{R}^p$ .
- Usant el resultat general que  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ , aquest teorema a la pràctica gairebé s'utilitza amb  $p = n - 1$  i  $q = 1$ . Aleshores, el tercer apartat diu que:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dm_n(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dm_1(x_n) \right) dm_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).\end{aligned}$$

A partir d'aquí es va iterant la integració per a les variables restants.

- El tercer apartat és el que diu que podem calcular la integral  $\int_{\mathbb{R}^n} f$  fent integració iterada i en l'ordre que més ens convingui. La resta d'apartats *només* diuen que totes les funcions que intervenen a la integració iterada són mesurables i, per tant, tenim dret a integrar.

El següent resultat és anàleg al teorema de Tonelli, canviant funcions  $f \geq 0$  per  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 2.1.5** (Teorema de Fubini). *Sigui  $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrable a  $\mathbb{R}^n$ . Llavors, els dos primers apartats del teorema de Tonelli valen canviant mesurable per integrable i el tercer val sense canvi. Aleshores, podem integrar iteradament.*

**Exemple 2.1.6.** L'ordre d'integració pot ser important a l'hora de fer el càlcul. Sigui  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\}$  i sigui  $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$  donada per  $f(x, y) = \sin(x^2)$ .  $T$  triangle és tancat i, per tant, mesurable;  $f$  és contínua a  $T$  i, per tant, també és a  $\mathcal{L}^1(T)$  (ja que  $T$  té mesura finita, més concretament  $\int_T \leq \text{area}(T) \ll +\infty$ ).

Mirem primer la integral iterada en la que per a cada  $x \in [0, \sqrt{\frac{2\pi}{3}}]$  integrem  $y \in [0, x]$  (el triangle que parteix de l'origen té diagonal  $(x, x)$ , així que això ens limita la primera integral).

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2\pi}{3}}} \left( \int_0^x \sin(x^2) dy \right) dx = \int_0^{\sqrt{\frac{2\pi}{3}}} x \sin(x^2) dx = \left[ -\frac{1}{2} \cos(x^2) \right]_{x=0}^{x=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}} = \frac{3}{4}.$$

Si ho volguéssim fer en sentit oposat, fent  $x \in [y, \sqrt{\frac{2\pi}{3}}]$  per a cada  $y \in [0, \sqrt{\frac{2\pi}{3}}]$  seria prou més difícil:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2\pi}{3}}} \left( \int_y^{\sqrt{\frac{2\pi}{3}}} \sin(x^2) dx \right) dy$$

**Exemple 2.1.7.** Sigui  $E \subset \mathbb{R}^2$  la regió limitada per la paràbola  $y^2 = x$  i les rectes  $x = 0$  i  $y = 1$ . Calculem l'àrea d' $E$ . L'àrea d'un conjunt de  $\mathbb{R}^2$  és la seva mesura de Lebesgue i la podem en forma d'integral de la manera següent:

$$\text{area}(E) = |E| = \int_E 1.$$

Podem integrar per seccions verticals:

$$\int_E 1 = \int_0^1 \left( \int_{\sqrt{x}}^1 1 dy \right) dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx = \left[ x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

També podem fer-ho amb seccions horitzontals.

$$\int_E 1 = \int_0^1 \left( \int_0^{y^2} 1 dx \right) dy = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}.$$

Els límits d'integració surten a partir de les desigualtats  $x \geq 0, y \leq 1$  i  $x \leq y^2$ .

**Observació 2.1.8** (Comentari sobre el teorema de Tonelli). L'única hipòtesi sobre la funció  $f$  a integrar és  $f \geq 0$ . Si una de les integrals iterades és finita, les altres també, totes coincideixen i valen  $\int_E f = \int_E |f|$ . En particular,  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ . Si una de les integrals iterades és  $+\infty$ , llavors ho són totes i  $f \notin \mathcal{L}^1(E)$ .

**Observació 2.1.9** (Comentari sobre el teorema de Fubini). Que  $f \in \mathcal{L}^1(E)$  és una hipòtesi, *no* es dedueix del fet que alguna de les integrals iterades sigui finita. Per a comprovar si  $f \in \mathcal{L}^1(E)$  podem aplicar el teorema de Tonelli a  $|f|$ . Un cop veiem que alguna de les integrals iterades de  $\int_E |f|$  és finita, ja tenim que  $f \in \mathcal{L}^1(E)$  i, per tant, podem calcular  $\int_E f$  iterant integrals d'una variable.

**Exemple 2.1.10.** Tornem a mirar la funció  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , on  $E = (0, 1] \times (0, 1]$  i  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ . Havíem vist que les dues integrals iterades tenen valors diferents  $\pm \frac{\pi}{4}$ . El teorema de Fubini implica, doncs, que  $f \notin \mathcal{L}^1(E)$ . Això també ho podem veure directament.

Acotem inferiorment  $\int_E |f|$  per  $\int_T |f|$  on  $T$  és la part d' $E$  on  $x \geq y$  (i, per tant,  $|f| = f$ ); explícitament:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, 0 < y \leq x\}.$$

Pel teorema de Tonelli, tenim:

$$\begin{aligned} \int_E \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} dm_2(x, y) &\geq \int_T \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} dm_2(x, y) = \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x}{2x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty. \end{aligned}$$

## 2.2

## CANVI DE VARIABLES

Explicarem tot seguit com fer canvis de variable per a integrals de funcions de diverses variables. Recordem, en primer lloc, com funciona el canvi a dimensió 1.

**Definició 2.2.1** (Canvi de variable, dimensió 1). Suposem que tenim una funció  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable Riemann (amb  $a < b$ ). Un *canvi de variable* és una aplicació  $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , bijectiva i amb  $\phi^{-1}$  també de classe  $\mathcal{C}^1$ . Aleshores:

$$\phi([c, d]) = \begin{cases} [\phi(c), \phi(d)], & \text{si } \phi' > 0, \\ [\phi(d), \phi(c)], & \text{si } \phi' < 0, \end{cases}$$

Llavors,  $(f \circ \phi) \cdot \phi'$  és integrable Riemann i

$$\int_c^d f(\phi(x)) \phi'(x) dx = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(y) dy \quad \left( \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(y) dy \text{ si } \phi' > 0 \text{ i } - \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(y) dy \text{ si } \phi' < 0 \right).$$

Una manera alternativa d'escriure això, tenint en compte el signe de  $\phi'$ , és:

$$\int_c^d f(\phi(x)) |\phi'(x)| dx = \int_a^b f(y) dy.$$

Veurem tot seguit que, en aquesta forma, la igualtat s'estén a diverses variables.

**Teorema 2.2.2** (Canvi de variable). *Siguin  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  oberts de  $\mathbb{R}^n$  i sigui  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  un difeomorfisme de classe  $\mathcal{C}^1$ . Siguí  $E \subset \mathcal{U}$  mesurable i sigui  $f : \phi(E) \rightarrow \mathbb{R}$  funció mesurable. Aleshores:*

- $F = \phi(E)$  és mesurable.
- La següent funció és mesurable:

$$\begin{aligned} (f \circ \phi) \cdot |\det(D\phi)| : E &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto f(\phi(x)) \cdot |\det(D\phi(x))|. \end{aligned}$$

- Si  $f \geq 0$  o si  $f \in \mathcal{L}^1(\phi(E))$ , la igualtat següent se sosté:

$$\int_F f = \int_{\phi^{-1}(F)} (f \circ \phi) \cdot |\det(D\phi)|.$$



**Observació 2.2.3.**

1. Si diem  $F = \phi(E)$  i tenim  $f : F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tal que  $f \geq 0$  o bé  $f \in \mathcal{L}^1(F)$ , aleshores:

$$\int_F f(x) dm(x) = \int_{\phi^{-1}(F)} f(\phi(y)) \cdot |\det(D\phi(y))| dm(y),$$

on  $\phi : E \rightarrow F$  assigna  $y \mapsto \phi(y) = x$  és un difeomorfisme de classe  $\mathcal{C}^1$ . És normalment en aquesta forma que utilitzem el teorema del canvi de variable.

2. Si  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  és obert i  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , el teorema de la funció inversa diu que són equivalents:
- $\mathcal{V} = \phi(\mathcal{U})$  és obert de  $\mathbb{R}^n$  i  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  és un canvi de variable.
  - $\phi$  és injectiva de classe  $\mathcal{C}^1$  i  $\det(D\phi(x)) \neq 0$  per a tot  $x \in \mathcal{U}$ .

**Exemple 2.2.4.** Calculem  $\int_R (x+y) dm_2(x, y)$  on  $R$  és la regió trapezoidal de vèrtexs  $(0, 0)$ ,  $(5, 0)$ ,  $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ ,  $(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$ . Fem un canvi de variable (lineal) que passi el trapezi a un quadrat amb els costats paral·lels als eixos de coordenades (on és fàcil integrar). Fem  $u = x + y$  i  $v = x - y$ . Observem que tenim, de manera equivalent,  $x = \frac{u+v}{2}$  i  $y = \frac{u-v}{2}$ . En la notació de l'enunciat de teorema tindrem, doncs,  $(x, y) = \phi(u, v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$ , que és clarament una aplicació lineal  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  bijectiva.

Per a aplicar el teorema del canvi de variable, mirem quin és el domini d'integració expressat amb les noves variables (formalment,  $\phi^{-1}(R)$ ). Les condicions  $y \leq x$  i  $y \geq x - 5$ , donades per dos dels costats del trapezoide, equivalen a  $0 \leq x - y \leq 5$ ; és a dir,  $0 \leq v \leq 5$ .

Les altres dues condicions,  $y \geq -x$  i  $y \leq -x + 5$ , donades pels altres dos costats del trapezoide, equivalen a  $0 \leq x + y \leq 5$ ; és a dir,  $0 \leq u \leq 5$ . En altres paraules,  $R$  es transforma en la regió on  $(u, v) \in [0, 5] \times [0, 5]$  (quadrat al pla  $(u, v)$ ).

Falta calcular el determinant de  $D\phi(u, v)$ , el jacobinà. Tenim:

$$|\det(D\phi(u, v))| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Tot plegat queda, pel teorema de Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_R (x+y) dm_2(x, y) &= \int_{[0,5] \times [0,5]} 2u \cdot \frac{1}{2} \cdot dm_2(u, v) = \int_0^5 \left( \int_0^5 u du \right) dv = \left( \int_0^5 u du \right) \cdot \left( \int_0^5 dv \right) \\ &= \frac{1}{2} 5^2 \cdot 5 = \frac{125}{2}. \end{aligned}$$

**Observació 2.2.5.** Com que  $D\phi(u, v) = D\phi(\phi^{-1}(x, y))$  i, per la regla de la cadena,

$$D\phi(\phi^{-1}(x, y)) \cdot D\phi^{-1}(x, y) = Id.$$

Tenim que  $\det(D\phi(u, v)) = \frac{1}{\det(D\phi^{-1}(u, v))}$ . Això vol dir que si ho preferim, o ens convé més, podem calcular  $|\det(D\phi(u, v))|$  fent l'invers  $|\det \phi^{-1}(x, y)|$ . A l'exemple anterior,  $\phi^{-1}(x, y) = (u, v) = (x + y, x - y)$  i, per tant:

$$|\det(D\phi^{-1}(x, y))| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = 2.$$

*Idea de la demostració, 2.2.2.* Observem en primer lloc que si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  és lineal i bijectiva (isomorfisme) llavors, per a tot  $E$  mesurable,  $|T(E)| = |\det(T)| \cdot |E|$ . És suficient veure això per a  $E = I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$  interval, ja que, aleshores, podem veure-ho per a oberts i, llavors, per aproximació, a  $E$  mesurable qualsevol. Tot  $T$  és composició de transformacions de la forma:

$$\begin{aligned} T_1(x_1, \dots, x_n) &= (kx_1, x_2, \dots, x_n) \\ T_2(x_1, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ T_3(x_1, \dots, x_n) &= (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Per a la primera:

$$|T_1(I)| = |(ka_1, kb_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)| = |k| \cdot |I| = |\det(T_1)| \cdot |I|.$$

Per a la segona és evident que:

$$|T_2(I)| = |(a_1, kb_1) \times (a_j, b_j) \times \cdots \times (a_i, b_i) \times (a_n, b_n)| = |I| = |\det(T_2)| \cdot |I|.$$

Finalment,

$$\begin{aligned} |T_3(I)| &= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1+x_2}^{b_1+x_2} dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_2}^{b_2} (b_1 - a_1) dx_2 \cdots dx_n \\ &= |I| = |\det(T_3)| \cdot |I|. \end{aligned}$$

A partir d'aquí, es fa una descomposició del domini d' $E$  de les noves variables en intervals petits, on  $D\phi$  és un isomorfisme, s'aplica la propietat que acabem de veure i, per aproximació, es dedueix el teorema. ■

Sigui  $A$  un obert, reunió de  $Q_i$  diferents i.e.  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ . Se segueix el següent:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\phi(A)) &= \int_A |\det(D\phi)|, \\ \text{Vol}(\phi(A)) &= \sum_i \text{Vol}(D\phi), \\ \text{Vol}(\phi(A)) &= \sum_i \int_{Q_i} |\det(D\phi)|. \end{aligned}$$

### 2.2.1

#### CANVIS DE VARIABLES HABITUALS

##### 2.2.1.1 El sinus i cosinus: coordenades polars

Posem  $x = r \cos(\theta)$  i  $y = r \sin(\theta)$ , on  $r$  és la distància de  $(x, y)$  a  $(0, 0)$  i  $\theta$  l'angle que formen el vector  $(x, y)$  i el vector  $(1, 0)$ . Per a què  $(x, y) = \phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  sigui bijectiva cal que  $r > 0$  i  $\theta \in (0, 2\pi)$  i, per tant, tenim estrictament una bijecció:

$$\phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}.$$

És a dir, no tenim un canvi per a tot  $\mathbb{R}^2$ , sinó per a  $\mathbb{R}^2$  llevat d'una semirecta. Com que el conjunt que no recobrim té mesura zero (i és irrellevant a la integració) a la pràctica accentuarem com si fos un canvi a tot  $\mathbb{R}^2$ ; és a dir, utilitzarem que per a  $f$  mesurable:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty)} f.$$

Tal com la tenim definida més amunt obtenim, per tant,  $\phi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  i bijectiva. Calculem el determinant jacobià:

$$|\det(D\phi(r, \theta))| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} \right| = r > 0.$$

Com que el jacobià és no nul,  $\phi$  és un difeomorfisme; és a dir, un *canvi de variable*. Aleshores, si  $A \subset \mathbb{R}^2$  és mesurable, el teorema del canvi de variable dona:

$$\int_A f(x, y) dm_2(x, y) = \int_{\phi^{-1}(A)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r \cdot d\theta dr.$$

De manera que amb aquestes dues noves variables obtenim un càlcul equivalent. De fet, com  $\phi$  és bijectiva, l'expressió de la inversa és  $\phi^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(\frac{y}{x}))$ .

**Exemple 2.2.6.** Sigui  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x \leq y \leq 3x, xy \leq 3\}$ . Calculem  $\iint_A (x^2 + y^2) dm_2(x, y)$ . Intentem expressar el domini d'integració en coordenades polars.

**Exemple 2.2.7.** Les coordenades polars es poden utilitzar per a calcular  $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ , que és una integral d'una variable sense primitiva immediata. Calculem primer  $I^2$  i després en farem l'arrel quadrada:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty)} e^{-x^2 - y^2} = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\ &\xrightarrow{r^2=t} 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Per tant, ens queda que  $I = \sqrt{\pi}$ . A la segona igualtat, hem aplicat que cada integral és independent, de manera que el producte d'integrals és el mateix que l'integral del producte. En la tercera, apliquem Tonelli. En la quarta, una semirecta té mesura zero i la podem treure de la integral. En la cinquena, fem el canvi de variable habitual, que acabem d'estudiar. La resta surt sol.

### 2.2.1.2 Coordenades cilíndriques a $\mathbb{R}^3$

Aquí fem coordenades polars en  $x, y$  (o en una altra parella de variables) i deixem  $z$  sense canviar. Tindrem  $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta), z = z$  tal que  $r > 0, \theta \in (0, 2\pi), z \in \mathbb{R}$ , tal que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(\frac{y}{x}), z = z$ , i un difeomorfisme de classe  $\mathcal{C}^1$ :

$$\phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\}.$$

És a dir, aquí deixem de recobrir *la meitat* del pla  $y = 0$ , que és un conjunt de mesura zero a  $\mathbb{R}^3$ . Per tant, podem pensar, a efectes d'integració, que recobrim tot  $\mathbb{R}^3$ . Observem que el jacobí també és  $r$ :

$$|\det(D\phi)| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial r} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \theta} & \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = r.$$

**Exemple 2.2.8.** Calculem el volum de la regió tancada pel paraboloide  $z = 1 - (x^2 + y^2)$  i el pla coincident  $z = 0$ , és a dir, volem:

$$V = \int_A 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\phi^{-1}(A)} 1 \cdot |\det D\phi| \cdot d|\det D\phi| d\theta \, dz = \int_{\phi^{-1}(A)} 1 \cdot r \cdot dr d\theta \, dz.$$

El conjunt  $A$  és  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}$ , de manera que  $\phi^{-1}(A) = \{(r, \theta, z), 0 < r \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - r^2\}$ . Havent determinat el domini d'integració, la integral passa a ser:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r^2} r \, dz \, d\phi \, dr &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \int_0^{1-r^2} dz \, d\phi \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(1-r^2) d\theta \, dr = \int_0^1 2\pi(r-r^3) dr \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

### 2.2.1.3 Coordenades esfèriques a $\mathbb{R}^3$

Aquí agafarem les següents coordenades:  $x = r \cos(\theta) \cos(\varphi)$ ,  $y = r \cos(\theta) \sin(\varphi)$  i  $z = r \sin(\theta)$ . Recordem,  $r$  és la distància de  $(x, y, z)$  a l'origen  $(0, 0, 0)$ ,  $\theta$  és la latitud (angle amb l'equador) i  $\varphi$  la longitud (angle amb el meridià) que correspon a  $y = 0$ . Observem que  $\theta$  va de  $-\frac{\pi}{2}$  (pol sud) fins a  $\frac{\pi}{2}$  (pol nord) i  $\varphi$  va de  $(0, 2\pi)$  (fa una volta sencera). Per a tenir la injectivitat prendrem  $r > 0$ ,  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  i  $\varphi \in (0, 2\pi)$  i tindrem:

$$\phi : (0, +\infty) \times \left( \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times (0, 2\pi) \right) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\}.$$

Com als altres casos, com que el tros que queda fora de la bijecció és de mesura zero (la *meitat* d'un pla), a efectes d'integració podem pensar que és un canvi a tot  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemple 2.2.9.** Calculem el volum d'una bola de centre  $(0, 0, 0)$  i radi  $R$ ; és a dir,  $B((0, 0, 0); R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R\}$ . La condició que defineix  $B((0, 0, 0); R)$  escrita en coordenades esfèriques és simplement  $r < R$  (i, per tant,  $\theta$  i  $\varphi$  no tenen cap restricció).  $\theta$  és l'angle del vector  $(x, y, z)$  amb el pla  $z = 0$ . Aplicarem el canvi de variable següent:

$$\begin{aligned} z &= r \sin \theta, & \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \\ x &= r \cos \theta \cos \varphi, & \theta &= \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), & |D\varphi| &= \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ y &= r \cos \theta \sin \varphi. & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. & & = |-r^2 \cos \theta| = r^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

El teorema del canvi de variable dona, aleshores:

$$\begin{aligned} |B((0,0,0); R)| &= \int_{B((0,0,0); R)} 1 = \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos(\theta) d\theta \right) d\varphi \right) dr \\ &= 2\pi \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta \right) \cdot \left( \int_0^R r^2 dr \right) = 2\pi [\sin(\theta)]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cdot \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_{r=0}^{r=R} \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Hi ha també coordenades esfèriques a  $\mathbb{R}^n$ :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cdots \cos(\theta_{n-1}), \\ x_2 &= r \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-1}), \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \cos(\theta_1) \sin(\theta_2), \\ x_n &= r \sin(\theta_1). \end{aligned} \right\} \quad \theta_{n-1} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \in (0, 2\pi).$$

El jacobià d'aquest canvi és  $|J| = r^{n-1} \cos^{n-2}(\theta_1) \cos^{n-3}(\theta_2) \cdots \cos(\theta_{n-2})$ . Amb això es pot, per exemple, calcular el volum d'una bola  $n$ -dimensional. A mesura que la dimensió augmenta es produeixen diversos fenòmens.

**Exemple 2.2.10.** Agafem el cub unitat, dividim cada costat per dos i posem una bola tangent a cadascun dels nous cubs generats. Aleshores, hi ha una bola al centre que és tangent a totes les boles anteriors. A mesura que  $n \rightarrow \infty$ , el volum d'aquesta bola tendeix a  $+\infty$ .

### 2.3

## EXERCICIS FINALS

**Exercici 2.3.1.** Sigui la funció  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ .

1. Sigui  $B$  la bola de centre  $(0,0)$  i de radi 1. Per a tot  $k \in \mathbb{N}$  trobeu una funció simple  $s_k$  tal que:

$$0 \leq \sup_{(x,y) \in B} (f(x, y) - s_k(x, y)) < 2^{-k}.$$

2. Calculeu mitjançant aproximacions per funcions simples la integral  $\int_B f$ , on  $B$  és com a l'apartat anterior. Es pot utilitzar la igualtat:

$$\sum_{j=1}^N j^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

*Demostració.*

- Sabem que  $\frac{1}{2^k} \rightarrow 0$  quan  $k \rightarrow \infty$ . Prenem  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $j = 1, \dots, 2^k$  i definim el conjunt  $C_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{j-1}{2^k} \leq f(x, y) < \frac{j}{2^k}\}$ . Tots ells formen en conjunt una partició de

$B$ :  $B = \bigcup_{j=1}^{2^k} C_j$ . Cadascun d'aquests  $C_j$  constitueix una corona o *anell* diferent que recobreixen una certa distància i, totes unides, *recobreixen*  $B$ . Definim:

$$s_k(x, y) = \sum_{j=1}^{2^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{C_j}(x, y).$$

En concret,  $f(x, y) \geq s_k(x, y)$ . En efecte, donat  $(x, y) \in B$ , existeix un únic  $C_j$  tal que  $(x, y) \in C_j$ . Aleshores, com en  $C_j$ ,  $s_k(x, y) = \frac{j-1}{2^k} \leq f(x, y)$ ,  $s_k(x, y) = \frac{j-1}{2^k} \leq f(x, y)$ . A més,

$$0 \leq f(x, y) - s_k(x, y) = \|(x, y)\| - \frac{j-1}{2^k} < \frac{j}{2^k} - \frac{j-1}{2^k} = \frac{1}{2^k} = 2^{-k}.$$

- Per a calcular la integral, sabem per l'apartat anterior que  $f(x, y) \geq s_k(x, y)$  i  $s_k(x, y) \nearrow f(x, y)$  (que  $s_k(x, y)$  sigui una successió creixent vol dir que  $s_k(x, y) \leq s_{k+1}(x, y)$ ) quan  $k \rightarrow \infty$ . La integral de  $f$  es pot calcular amb el límit de les integrals de les  $s_k$ , i ho podem posar com l'àrea del disc gran ( $j$ ) menys l'àrea del disc petit ( $j-1$ ). Per tant:

$$\begin{aligned} \int_B s_k &= \sum_{j=1}^{2^k} \frac{j-1}{2^k} |C_j| = \sum_{j=1}^{2^k} \frac{j-1}{2^k} \left( \pi \frac{j^2}{2^{2k}} - \pi \frac{(j-1)^2}{2^{2k}} \right) = \sum_{j=1}^N \frac{j-1}{N} \cdot \pi \frac{j^2 - (j-1)^2}{N^2} \\ &= \frac{\pi}{N^3} \sum_{j=1}^N (j-1) (j^2 - (j-1)^2) = \frac{\pi}{N^3} \sum_{j=0}^{N-1} j \cdot ((j+1)^2 - j^2) = \frac{\pi}{N^3} \sum_{j=1}^{N-1} (2j^2 + j). \end{aligned}$$

El resultat, doncs, és la suma geomètrica el resultat de la qual ja coneixem. Al seu torn, hem usat que  $m_2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r < \sqrt{x^2 + y^2} \leq R\}) = \pi R^2 - \pi r^2$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi}{N^3} \sum_{j=1}^{N-1} (2j^2 + j) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \frac{(2^k - 1)2^k(2^{k+1} + 1)}{6} + \frac{(2^k - 1)2^k}{2} = \pi \left( \frac{2}{3} + 0 \right). \quad \blacksquare$$

**Exercici 2.3.2.** Calculeu el valor de les integrals següents:

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} (\sqrt{y} + x - 3xy^2) dx dy \quad i \quad \int_{[0,\pi] \times [0,\pi]} |\sin(x+y)| dx dy.$$

*Demostració.* Sabem que  $0 \leq x+y \leq 2\pi$ , ja que  $x \in [0, \pi]$  i  $y \in [0, 2\pi]$ . Hem de desenvolupar el tros  $x+y \leq \pi$  del tros  $\pi < x+y$ :  $x+y = \pi$  i  $y = \pi - x$ . Ens hem d'imaginar una recta a  $\mathbb{R}^2$  tal que  $x+y = \pi$ , de tal manera que el que queda per sobta és  $x+y \leq \pi$  i, per sobre  $x+y \geq \pi$ .

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |\sin(x+y)| dx dy = \int_0^\pi \left( \int_0^{\pi-x} \sin(x+y) dy + \int_{\pi-x}^\pi -\sin(x+y) dy \right) dx.$$

Si operem aquesta expressió acabem obtenint  $2\pi$ . L'altre apartat es deixa com a exercici.  $\blacksquare$

**Exercici 2.3.3.** Calculeu el volum de la regió  $R = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ , on  $f(x, y) = e^x \cos(x, y)$ .

*Demostració.* Sigui  $V(R)$  el volum de  $R$ , que correspon a la seva mesura  $|R|$ . Això és justament:

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{e^x \cos(y)} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(y) \, dy \, dx.$$

Una vegada aquí, podem usar el teorema de Tonelli en el sentit següent:

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y) \, dy \right) dx = \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y) \, dy \right) \int_0^1 e^x \, dx.$$

És a dir, la integral iterada esdevé el producte d'integrals ja que els intervals d'integració són completament independents. El resultat és  $e - 1$ . ■

**Exercici 2.3.4.** Calculeu el volum del sòlid delimitat per la següent superfície:  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1, z = 2xy$ . Indicació: feu un dibuix.

*Demostració.* No posarem el dibuix, però adjuntem la resolució. El volum que busquem està contingut en el prisma  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1$ , i està determinat per  $z = 2xy$ . Utilitzem l'expressió del volum tot utilitzant els límits d'integració:

$$\begin{aligned} V(R) = |R| &= \int_R 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\substack{x, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} \left( \int_0^{2xy} 1 \, dz \right) dx \, dy = \int_{\substack{x, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} 2xy \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 2xy \cdot dy \, dx = \int_0^1 x \cdot [y^2]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x(1-x)^2 dx. \end{aligned}$$

Si resolem la integral anterior, obtenim  $\frac{1}{12}$ . ■

**Exercici 2.3.5.** Calculeu l'àrea del subconjunt següent:  $A = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, y \geq 0, y \geq x\}$ .

*Demostració.* Rutinàriament tenim  $|A| = \iint_A 1 \, dx \, dy$ . La forma és semblant a la d'un semicercle on li hem tret una regió. La intersecció entre el semicercle i la recta  $y = x$  és un punt que compleix  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  i  $y = x$ , que resulta ser  $(x, y) = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ . Podrem calcular el valor de la següent forma:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} 1 \, dy \, dx + \int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \int_x^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} 1 \, dy \, dx &= \int_{-2}^0 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \, dx + \int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \left( \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - x \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \left( \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^y dx \right) dy + \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^1 \left( \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} dx \right) dy \\ &= \int_0^{2\sqrt{5}} \left( y + 2\sqrt{1-y^2} \right) dy + \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^1 4\sqrt{1-y^2} \, dy. \end{aligned}$$

El valor de la integral surt directament de l'última igualtat. ■

**Exercici 2.3.6.** Estudieu, segons els valors de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la integrabilitat de les funcions  $f_\alpha$  següents. A més, quan siguin integrables, calculeu el valor de la integral.

1.  $f_\alpha(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$  al disc unitat  $B(0, 1)$ .
2.  $f_\alpha(x, y) = |2x - y|^\alpha$  al conjunt  $A = (0, 1) \times (0, 2)$ .

**Demostració.** El primer apartat, exercici. Com  $f$  és acotada i  $A$  té mesura finita,  $f$  és integrable a  $A$ ; en efecte,  $\int_A |f| \leq \int_A K = K|A| \ll \infty$ , on  $K$  és una constant. Considerem la recta  $2x - y = 0$ , és a dir,  $y = 2x$ . Els valors que quedin per sota compliran  $2x - y \geq 0$ ; anàlogament, per dalt,  $2x - y \leq 0$ . Podem aplicar el teorema de Tonelli:

$$\int_A |f_\alpha| = \int_A f_\alpha = \int_0^1 \int_0^2 |2x - y|^\alpha dy dx = \int_0^1 \left( \int_0^{2x} (2x - y)^\alpha dy + \int_{2x}^2 (y - 2x)^\alpha dy \right) dx.$$

Anem a calcular  $\int_0^{2x} (2x - y)^\alpha dy$  amb cura. Fent el canvi de variable  $y = 2xt$  ens queda el següent:

$$\int_0^1 (2x - 2xt)^\alpha 2x dt = (2x)^{\alpha+1} \int_0^1 (1-t)^\alpha dt \xrightarrow{1-t=s} (2x)^{\alpha+1} \int_0^1 s^\alpha ds \text{ integrable } \iff \alpha > -1.$$

Comencem a desfer els canvis de variable per obtenir la condició d'integració:

$$\int_{2x}^2 (y - 2x)^\alpha dy = (2x)^{\alpha+1} \int_1^{\frac{1}{x}} (t-1)^\alpha dt = (2x)^{\alpha+1} \left( \int_0^{\frac{1}{x}-1} s^\alpha ds \right) = (2x)^{\alpha+1} \frac{1}{\alpha+1} \left( \frac{1}{x} - 1 \right)^{\alpha+1}.$$

Ens queda:

$$\int_0^1 \left( (2x)^{\alpha+1} \frac{1}{\alpha+1} + (2x)^{\alpha+1} \frac{1}{\alpha+1} \left( \frac{1-x}{x} \right)^{\alpha+1} \right) dx = \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1} \int_0^1 (x^{\alpha+1} + (1-x)^{\alpha+1}) dx.$$

Concloem que si  $\alpha + 1$  és positiva, aquesta integral no és impròpia; és a dir, és convergent si, i només si,  $\alpha > -1$ , i el valor de la integral serà  $\frac{2^{\alpha+2}}{\alpha+1} \frac{1}{\alpha+2}$ . ■

**Exercici 2.3.7.** Considerem el conjunt  $A = \{(x, y, z) \mid x, y, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ . Segons els valors del paràmetre  $\alpha \in \mathbb{R}$ , estudeu la integrabilitat en  $A$  de la funció:

$$f_\alpha(x, y, z) = \frac{x^\alpha z}{\sin^\alpha(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

**Demostració.** Com que  $|f_\alpha| > 0$  podem fer la integració iterada pel teorema de Tonelli. Per a  $x = 0$ ,  $f_0(x, y, z) = z$  i  $\frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} \sim 1$ , si  $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow 0$ . Podem utilitzar el canvi de variable a coordenades polars, de manera que el jacobià queda així:

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{ll} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & x = r \cos \theta \cos \varphi \\ \theta \text{ latitud, } \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). & y = r \cos \theta \sin \varphi \\ \varphi \text{ longitud, } \varphi \in (-\pi, \pi). & z = r \sin \theta. \end{array}$$

Si calculem el determinant (no ho farem aquí) acaba sortint que  $|-r^2 \cos \theta| > 0$ . Anem ara a trobar el domini d'integració:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \implies \cos \theta \cos \varphi \geq 0 \implies \cos \varphi \geq 0 \\ y \geq 0 \implies \cos \theta \sin \varphi \geq 0 \implies \sin \varphi \geq 0 \\ z \geq 0 \implies \sin \theta \geq 0 \iff 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \implies \varphi \in 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



$x^2 + y^2 + z^2 < 1$  si, i només si,  $r < 1$ .

$$\begin{aligned}\int_A |f_\alpha| &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{(r \cos \theta \cos \varphi)^\alpha r \sin \theta}{\sin^\alpha(r^2)} (r^2 \cos \theta) \cdot dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{r^{\alpha+3}}{\sin^\alpha(r^2)} (\cos^{\alpha+1} \theta \cdot \sin \theta) (\cos^\alpha \varphi) dr d\theta d\varphi \\ &= \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\alpha+1} \sin \theta d\theta \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha \varphi d\varphi \right) \left( \int_0^1 \frac{r^{\alpha+3}}{\sin^\alpha(r^2)} dr \right)\end{aligned}$$

Estudiarem cadascuna de les integrals per separat:

3. Sabem que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dr}{r^\alpha}$  és convergent si, i només si,  $\alpha < 1$ . Al seu torn,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^\alpha(r^2)}{(r^2)^\alpha} = 1$ , ja que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ . Per tant,  $\sin^\alpha(r^2) \simeq (r^2)^\alpha$  i:

$$\int_0^1 \frac{r^{\alpha+3}}{\sin^\alpha(r^2)} dr \simeq \int_0^1 \frac{r^{\alpha+3}}{r^{2\alpha}} dr = \int_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha-3}} \text{ convergent } \iff \alpha - 3 < 1.$$

2. Podem tenir un problema a l'extrem  $\frac{\pi}{2}$ . Notem que  $\cos \theta \simeq \frac{\pi}{2} - \theta$  quan  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Per tant, estudiar la segona integral és el mateix que determinar la convergència per a la següent:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha \varphi d\varphi \simeq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)^\alpha d\varphi.$$

Aquesta última convergeix si, i només si,  $\alpha > -1$ .

1. Finalment, l'últim cas ens donarà l'interval on es troba  $\alpha$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\alpha+1} \theta \sin \theta d\theta \sim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\alpha+1} \theta \sin \theta d\theta \sim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\alpha+1} \theta d\theta.$$

La convergència es donarà si, i només si,  $\alpha + 1 > -1$ .

Per tant,  $\alpha \in (-1, 4)$ . ■

**Exercici 2.3.8.** Sigui  $A \subset \mathbb{R}^2$  la regió acotada delimitada per les paràboles  $y = \frac{x^2}{4}$ ,  $y = 4x^2$  i les hipèrboles  $xy = \frac{1}{4}$ ,  $xy = 4$ . Calculeu:

$$\int_A \frac{y^2}{x} dx dy.$$

*Demostració.* Farem un canvi de variable, ens interessa convertir la regió  $A$  en un quadrat. Hem de reescriure les equacions per substituir dos variables per dues altres variables. Notem que  $\frac{y}{x^2} = 4$ ,  $\frac{y}{x^2} = \frac{1}{4}$  i, per altra banda,  $xy = 1$  i  $xy = 4$ . Per tant, provem el canvi  $u = \frac{y}{x^2}$  i  $v = xy$ . Volem provar que la funció definida a sota:

$$\begin{aligned}\phi: A &\longrightarrow \phi(A) \\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y) = (u, v) = \left( \frac{y}{x^2}, xy \right)\end{aligned}$$

és  $\mathcal{C}^1(A)$  (que ho és) i que és bijectiva. Mirem si per a cada  $(u, v)$  el sistema  $u = \frac{y}{x^2}$  i  $v = xy$  té solució única  $(x, y) \in A$ . Operant obtenim  $y = ux^2$  i, substituint,  $v = xux^2 = ux^3$ ; per tant,  $x^3 = \frac{v}{u} \iff x = \left( \frac{v}{u} \right)^{\frac{1}{3}}$ . Veiem directament la injectivitat i la inversa:

$$\phi^{-1}(u, v) = (x, y) = \left( \left( \frac{v}{u} \right)^{\frac{1}{3}}, u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}} \right).$$

és, també, de classe  $\mathcal{C}^1$  lluny del 0. Si apliquem el Teorema de la Funció Inversa a  $\phi : A \rightarrow \phi(A)$ ,  $|\det D\phi(x, y)| \neq 0$  si, i només si, existeix  $\mathcal{U}$  entorn de  $(x, y)$  i  $\mathcal{V}$  entorn de  $(x, y)$  tal que  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  és bijectiva amb inversa de classe  $\mathcal{C}^1$ . Ara sí, podem calcular la integral:

$$\frac{y^2}{x} = \frac{u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{4}{3}}}{v^{\frac{1}{3}}}u^{\frac{1}{3}} = uv \implies \int_A \frac{y^2}{x} dx dy = \int_{\frac{1}{4}}^4 \int_{\frac{1}{4}}^4 uv \frac{1}{3u} \cdot dudv = \frac{1}{3} \left(4 - \frac{1}{4}\right) \left(\int_{\frac{1}{4}}^4 v dv\right). \quad (2.3.1)$$

Hem necessitat el  $|J|$ , que podem obtenir de dues maneres, com a conseqüència del TFI també: a partir de  $\phi^{-1}(u, v)$  o bé a partir del canvi  $u = \frac{y}{x^2}$  i  $v = xy$ . Això és perquè:

$$A \xrightleftharpoons[\phi^{-1}]{\phi} \phi(A) \quad \phi^{-1} \circ \phi = Id \quad D\phi^{-1}(\phi(u, v))D\phi(u, v) = Id$$

Ho farem a partir de la segona perquè és més senzill:

$$|J| = \left| \begin{vmatrix} -2\frac{y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix} \right| = \left| -2\frac{y}{x^2} - \frac{y}{x^2} \right| = 3\frac{y}{x^2} = 3u.$$

Una vegada aquí, apliquem rutinàriament el teorema del canvi de variable per obtenir (2.3.1).

**El resultat és**  $\frac{1275}{128}$ . ■

**Exercici 2.3.9.** Calculeu el volum de la regió  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 4y^2 + 3z^2 \in \mathbb{R}^2, y > \sqrt{2x^2 + 3z^2}\}$ .

*Demostració.* El volum de  $D$  el podem calcular així:  $\text{Vol}(D) = \int_D 1$ . Fixem la  $x$  i la  $z$  primer i, finalment, la  $y$ . Ens quedaria que  $\sqrt{2x^2 + 3z^2} < y \leq \sqrt{\frac{R^2 - 2x^2 - 3z^2}{2}}$  i les altres dues variables queden acotades per

$$\iint_{2x^2 + 3z^2 \leq R^2} \left( \int_{\sqrt{2x^2 + 3z^2}}^{\sqrt{\frac{R^2 - 2x^2 - 3z^2}{2}}} 1 dy \right) dx dz.$$

A part que, d'entrada, ja sembla complicada de calcular, es veu que els dominis d'integració són incompatibles; haurem d'intentar un canvi de variable, en particular, de coordenades esfèriques:

$$\begin{aligned} |J| &= \frac{r^2 \cos \theta}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3}} & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \sqrt{2}x &= r \cos \theta \cos \varphi \\ r^2 &\leq R^2 & \theta &\text{latitud, } \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). & \sqrt{3}z &= r \cos \theta \sin \varphi \\ & & \varphi &\text{longitud, } \varphi \in (-\pi, \pi). & 2y &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

Aplicant el canvi de variable a la condició  $y > \sqrt{2x^2 + 3z^2}$  trobem el domini d'integració:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r \sin \theta &> \sqrt{r^2 \cos^2(\theta) \cos^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\varphi)} \iff \frac{1}{2}r \sin \theta > r \sqrt{\cos^2(\theta)} = r \cos \theta, \\ &\iff \frac{1}{2} \sin \theta > \cos \theta \iff \theta \in \left( \arctan 2, \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Ara podem substituir de manera que la integral ens queda així (*no la resoldrem*):

$$\int_0^R \int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\sqrt{6}} r^2 \cos \theta \cdot d\varphi d\theta dr = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left( \int_0^R r^2 dr \right) \left( \int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \right) \cdot 2\pi. \quad \blacksquare$$

**Exercici 2.3.10.**

1. Provem que les equacions  $u = \frac{x}{y}$  i  $v = xy$  defineixen un canvi de variable a  $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ .
2. Sigui  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 2x, 1 \leq xy \leq 2\}$ . Calculem:  $\int_A (x^2 - y^2) dx dy$ .

*Demostració.* Definim:  $\phi : A \longrightarrow \phi(A)$  que envia  $(x, y) \longmapsto \phi(x, y) = (\frac{x}{y}, xy)$ . Hem de veure el següent, per poder aplicar el teorema de canvi de variable:

1.  $\phi \in \mathcal{C}^1(A)$ .
2.  $\phi$  bijectiva (com ja és exhaustiva, solament ens fa falta comprovar la injectivitat).
3.  $\phi^{-1} \in \mathcal{C}^1(\phi(A))$ .

Com estem en el primer quadrant, la injectivitat se segueix directament. Intentem veure que el sistema  $\frac{x}{y} = u$  i  $xy = v$  té una única solució a  $A$ . Per la mateixa raó que acabem de comentar, la solució és única:

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{u} &\implies x \frac{x}{u} = v \iff x = \sqrt{uv} \text{ (arrel positiva).} \\ y = \frac{\sqrt{uv}}{u} &= \sqrt{\frac{v}{u}} \iff y = \sqrt{\frac{v}{u}} \text{ (arrel positiva).} \end{aligned}$$

Per a tot  $(u, v) \in (0, +\infty) \times (0, \infty)$  existeix un únic  $(x, y) \in A$  amb  $\phi(x, y) = (u, v)$ . La inversa és  $\phi^{-1}(u, v) = (\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{v}{u}})$ . A partir d'aquí, per a procedir amb el problema, tenim dues opcions:

1. Comprovar directament  $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}$ .
2. Amb el teorema a de la funció inversa. (**Recomanada.**)

$$\det D\phi(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ y & x \end{vmatrix} = \frac{x}{y} + \frac{x}{y} = 2\frac{x}{y} \neq 0, \forall (x, y) \in A.$$

Pel teorema de la funció inversa, per a cada  $(x, y)$  existeixen entorns  $\mathcal{U}_{(x,y)}$  i  $\mathcal{V}_{(x,y)}$  tals que  $\phi : \mathcal{U}_{(x,y)} \longrightarrow \mathcal{V}_{(x,y)}$  és bijectiva, de classe  $\mathcal{C}^1$ , amb inversa de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Pel segon apartat, tenim  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 2x, 1 \leq xy \leq 2\}$ . Utilitzarem el canvi de variable que acabem de veure:  $u = \frac{x}{y}, xy = v, x = \sqrt{uv}, y = \sqrt{\frac{v}{u}}$ .

$$\left. \begin{aligned} x \leq y &\iff \sqrt{uv} \leq \sqrt{\frac{v}{u}} \iff u \leq 1, \\ y \leq 2x &\iff \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \iff u \leq \frac{1}{2}, \\ 1 \leq xy \leq 2 &\iff 1 \leq v \leq 2. \end{aligned} \right\} x^2 - y^2 = \left(uv - \frac{v}{u}\right) = v \left(u - \frac{1}{u}\right).$$

No ens oblidem de calcular el jacobià. Si dubtem d'en quin sentit l'hem de fer, recordar que les variables que han de sortir han de ser les noves.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \frac{1}{u}.$$

Notem que aquest càlcul ja el teníem, perquè  $\det(D\phi(\phi^{-1}(u, v))) = \frac{1}{\det(D\phi^{-1}(u, v))}$ . Amb tot, ja podem escriure la integral i calcular-la:

$$\int_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_1^2 v \left(u - \frac{1}{u}\right) \frac{1}{2u} dv du = \frac{1}{2} \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) du \right) \left( \int_1^2 v dv \right) = -\frac{3}{8}. \blacksquare$$

*Demostració alternativa.* Podem intentar un altre canvi de variable, potser més intuïtiu, però a escala calculística bastant semblant: prenent  $r = \sqrt{2x^2 + 3z^2}$  obtenim que  $y > r$  i  $4y^2 + r^2 \leq R^2$ .

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2}x = r \cos \theta \\ y = y \\ \sqrt{3}z = r \sin \theta \\ J = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} r \end{array} \right\} \int_D 1 \implies \iint_{4y^2 + r^2 \leq R^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{6}} r d\theta dr dy = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} \iint_{4y^2 + r^2 \leq R^2} r dr dy.$$

El càlcul d'aquesta integral s'hauria de fer amb un altre canvi de variable. ■

**Exercici 2.3.11.** Calculeu l'àrea de la regió tancada per  $r = 1 + \cos \theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

# *Càlcul vectorial*

<b>3</b>	<b>Integrals de línia i teorema de Green</b>	<b>49</b>
3.1	Corbes parametritzades . . . . .	49
3.2	Longitud d'una corba i paràmetre arc . . . . .	52
3.3	Integrals de funcions i camps sobre corbes . . . . .	55
3.4	Gradient d'una funció i camps conservatius . . . . .	57
3.5	Teorema de Green . . . . .	61
3.6	Exercicis finals . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Integrals de superfícies</b>	<b>75</b>
4.1	Superfícies parametritzades . . . . .	75
4.2	Espai tangent i àrea d'una superfície . . . . .	78
4.2.1	Espai tangent . . . . .	78
4.2.2	Àrea d'una superfície elemental . . . . .	81
4.3	Vora orientada d'una superfície . . . . .	83
4.4	Integrals de superfície i flux de camp . . . . .	85
4.5	Rotacional i teorema d'Stokes . . . . .	88
4.6	Superfícies regulars . . . . .	92
4.7	Teorema de la divergència . . . . .	95
4.8	Exercicis finals . . . . .	99

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ 1 & \text{if } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{if } n \geq 2 \end{cases}$$



## Integrals de línia i teorema de Green

3.1

### CORBES PARAMETRITZADES

De moment, per situar-nos, pensem en la regla de Barrow per funcions d'una variable: si  $F$  és una primitiva de  $f$  ( $F' = f$ ), aleshores:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

És a dir, la integral de  $f$  a  $(a, b)$  equival a *integrar* (en aquest cas, avaluar) la primitiva a la vora de  $(a, b)$  formada pels punts  $a$  i  $b$ . Veurem generalitzacions d'aquest principi on, a més de segments (a  $\mathbb{R}$  o a  $\mathbb{R}^n$ ) tindrem *corbes*, *superfícies* o *regions* senceres a  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathbb{R}^3$ . Per aquest motiu, haurem de parlar en primer lloc d'integrals *damunt de corbes i superfícies*.

**Definició 3.1.1** (Corba parametritzada). Una *corba parametritzada* a  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) és una aplicació contínua:

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)). \end{aligned}$$

Es diu *paràmetre* de la corba a la variable  $t$ . Al conjunt imatge  $\gamma^* = \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$  se'n diu *recorregut*, o *trajectòria*, de la corba.

Treballarem quasi sempre amb corbes per les quals hi ha un vector tangent ben definit (llevat potser d'uns pocs punts).

**Definició 3.1.2** (Corba de classe  $\mathcal{C}^1$ ). Diem que una corba  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  és de classe  $\mathcal{C}^1$  si cada component  $\gamma_j(t)$  amb  $j = 1 \div n$  és de classe  $\mathcal{C}^1$  (derivable i amb derivada contínua). En aquest cas, el vector:

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

s'anomena *vector tangent* a la corba  $\gamma$  en el punt  $\gamma(t)$ .

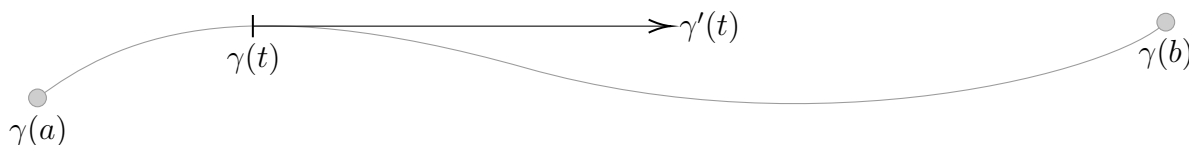


Figura 3.1: Vector tangent a la corba.

Sovint en tindrem prou amb tenir corbes de classe  $\mathcal{C}^1$  a trossos; és a dir, corbes per a les quals existeix una partició de l'interval del paràmetre  $a = t_0 < \dots < t_n = b$ , tal que les restriccions  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  són de classe  $\mathcal{C}^1$  per a tot  $i = 1 \div n$ . Sigui com sigui, seguirem demanant que sigui  $\mathcal{C}$  en  $[a, b]$ .

**Definició 3.1.3** (Corba tancada, corba simple). Diem que una corba  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  és *tancada* si  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Diem que la corba  $\sigma$  és *simple* si és injectiva (és a dir, si la trajectòria no té autointerseccions). Li diem *tancada simple* si  $\gamma(a) = \gamma(b)$  i la trajectòria no té autointerseccions (a part de l' $a$  i  $b$ ).



Figura 3.2: Corba simple i no simple.

**Observació 3.1.4.** Si  $\gamma$  és tancada i l'únic punt on  $\gamma$  no és injectiva, és a  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , encara diem que  $\gamma$  és simple.

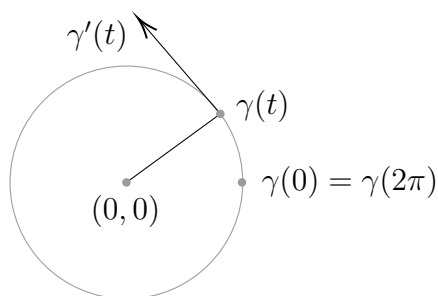
**Exemple 3.1.5.**

1. *Segment* entre dos punts  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ . Considerem el vector  $\vec{v} = p_2 - p_1$  a  $\mathbb{R}^n$ . Els punts de la recta que passa per aquests dos punts són de la forma  $x = p_1 + t\vec{v}$ , i els que corresponen al segment entre els dos punts que tenen  $t \in [0, 1]$ . Així, tenim:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \gamma(t) = p_1 + t(p_2 - p_1). \end{aligned}$$

Aquesta corba és de classe  $\mathcal{C}^1$  i  $\gamma'(t) = p_2 - p_1 = \vec{v}$ .

2. *Circumferència de centre  $(0, 0)$  i radi 1*. Parametritzem mitjançant l'angle de les coordenades polars:



$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)). \end{aligned}$$

Tenim una corba tancada (simple) amb vector tangent  $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ . Observem que els vectors de posició  $\gamma(t)$  i tangent  $\gamma'(t)$  tenen la mateixa longitud,  $\|\gamma(t)\| = \|\gamma'(t)\| = 1$  i són perpendiculars:  $\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$ .



3. *Hèlix a  $\mathbb{R}^3$* . Sigui:

$$\begin{aligned} \gamma : (-\infty, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t). \end{aligned}$$

Observem que la projecció d'aquesta trajectòria al pla  $z = 0$  és la circumferència de centre  $(0, 0)$  i radi 1. Però aquí la corba no és tancada, ja que l'alçada  $z$  passa de 0 a  $2\pi$ :

$$\gamma(0) = (1, 0, 0) \text{ i } \gamma(2\pi) = (1, 0, 2\pi).$$

Observem que el vector tangent  $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$  té longitud constant  $\|\gamma'(t)\| = 2$ .

4. Gràfica d'una funció d'una variable. Donada  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  funció de classe  $\mathcal{C}^1$  considerem la gràfica:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (t, f(t)). \end{aligned}$$

Aquí el vector tangent és  $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ , que té longitud  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$ .

Amb les corbes parametritzades hi podem fer diverses operacions.

1. De la corba recorreguda en el sentit invers se'n diu *corba oposada* o *inversa*. Si la corba és  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , la corba oposada es pot parametritzar fàcilment de la manera següent:

$$\begin{aligned} -\gamma : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t) = \gamma(b - (t - a)). \end{aligned}$$

La trajectòria és la mateixa:  $(-\gamma)^* = \gamma^*$ , i la regularitat també.

2. *Juxtaposició de corbes*. Si una corba acaba allà on en comença una altra, podem definir una nova corba, la *juxtaposició*. Siguin  $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  i  $\beta : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , amb  $\alpha(b) = \beta(c)$ . Definim:

$$\gamma = \alpha \vee \beta : [a, b + (d - c)] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t), & a \leq t \leq b \\ \beta(t - (b - c)), & b \leq t \leq b + d - c. \end{cases}$$

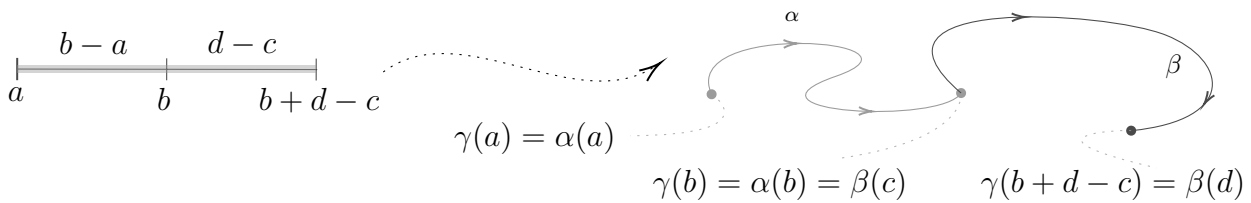


Figura 3.3: Representació gràfica.

És clar que  $(\alpha \vee \beta)^* = \alpha^* \vee \beta^*$  i que si  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  és una corba, aleshores:  $\gamma = \gamma_{[a, x]} \vee \gamma_{[x, b]}$  per a tot  $x \in (a, b)$ .

**Exemple 3.1.6.** Parametritzem el triangle de vèrtexs  $(0, 0), (1, 1), (-1, 1)$ . El segment que va de  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$  es pot parametritzar amb  $\alpha_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha_1(t) =$

$t((1, 1) - (0, 0)) = (t, t)$ . El segment horitzontal de  $(1, 1)$  a  $(-1, 1)$  el podem parametritzar com  $\alpha_2(t) = (1, 1) + (t - 1)((-1, 1) - (1, 1)) = (3 - 2t, 1)$ . Finalment, parametritzem el segment de  $(-1, 1)$  a  $(0, 0)$  com  $\alpha_3 : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha_3(t) = (-1, 1) + (t - 2)((0, 0) - (-1, 1)) = (t - 3, 3 - t)$ . Tot plegat, quedaria:

$$\gamma : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{cases} (t, t) & 0 \leq t \leq 1 \\ (3 - 2t, 1) & 1 \leq t \leq 2 \\ (t - 3, 3 - t) & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

3. *Canvi de paràmetres o reparametrització.* Donada una corba  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  podem fer un canvi de variable al paràmetre  $t$ .

**Definició 3.1.7** (Canvi de paràmetre). Un *canvi de paràmetre* o *reparametrització* és una funció:

$$\begin{array}{ccc} \varphi : [c, d] \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & [a, b] \\ s & \longmapsto & \varphi(s) = t \end{array}, \varphi \text{ bijectiva i de classe } \mathcal{C}^1,$$

i amb inversa també de classe  $\mathcal{C}^1$ .

La corba  $\gamma_1 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  donada per la composició  $\gamma_1(t) = \gamma(\varphi(s))$  s'anomena *reparametrització* de  $\gamma$ . Observem que  $\gamma_1^* = \gamma$ .

**Observació 3.1.8.** Cal fer atenció a què si el canvi de paràmetre  $\varphi$  té  $\varphi'(s) < 0$  per a tot  $s \in [c, d]$ , aleshores el sentit de la corba canvia; és a dir, obtenim de fet una reparametrització de  $-\gamma$ . En aquest sentit,  $-\gamma$  es pot considerar com una reparametrització  $\gamma$ .

### 3.2

## LONGITUD D'UNA CORBA I PARÀMETRE ARC

**Definició 3.2.1** (Longitud de la corba). Donada una corba  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , i assignem  $t \mapsto \gamma(t) := (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ ; definim la seva longitud com:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (3.2.1)$$

En termes físics, la longitud és la integral de la velocitat  $\|\gamma'(t)\|$ . Si  $l(\gamma) < \infty$ , diem que  $\gamma$  és *rectificable*.

**Observació 3.2.2.** Podem veure la longitud com el límit de les longituds de corbes poligonals que aproximen  $\gamma$ : si tenim una partició d' $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , tenim una *poligonal* formada pels segments  $\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})$  per a tot  $j = 1 \div n$ . La longitud de l'aproximació poligonal és:

$$L(P) = \sum_{j=1}^n \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \implies l(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \right\}.$$

**Teorema 3.2.3.** Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  és de classe  $\mathcal{C}^1$ , llavors  $\|\gamma'(t)\| \in \mathcal{L}^1([a, b])$  i la seva longitud és  $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ .

*Demostració.* Com que  $\gamma \in \mathcal{C}^1$  podem aplicar el teorema del valor intermediari de Lagrange, per a cada interval  $[t_{j-1}, t_j]$ : existeix  $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$  tal que:

$$\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) = \gamma'(\xi_j)(t_j - t_{j-1}).$$

Aleshores,  $\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \|\gamma'(\xi_j)\|(t_j - t_{j-1})$  i, per tant:

$$L(P) = \sum_{j=1}^n \|\gamma'(\xi_j)\|(t_j - t_{j-1}).$$

Aquesta és una suma de Riemann de la integral  $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ , associada a la partició  $a = t_0 < \dots < t_n = b$ . ■

**Observació 3.2.4.** Automàticament, això dona també la longitud d'una corba de classe  $\mathcal{C}^1$  a trossos: si cada tros  $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$  és de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $j = 1 \div n$ , tenim:

$$l(\gamma) = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt.$$

### Exemple 3.2.5.

1. *Circumferència de centre (0,0) i radi 1.* Teniem  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$  tal que  $t \in [0, 2\pi]$ . Per tant,  $\|\gamma'(t)\| = \|(-\sin(t), \cos(t))\| = 1$  i:

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

2. *Gràfiques de funcions.* Donada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  teniem  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  donada per  $\gamma(x) = (x, f(x))$ . Llavors:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(x)\| dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

3. *Hèlix a  $\mathbb{R}^3$ .* Teniem  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ , tal que  $t \in [0, 2\pi]$ . Llavors,  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}$  i, per tant:

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

4. *Cardioide.* Considerem la corba definida en coordenades polars per  $r = 1 + \cos(\theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Llavors, tenim:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) = (1 + \cos \theta) \cos \theta, \\ y = r \sin(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin \theta, \end{cases}$$

i ens queda una corba  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  que assigna l'instant  $\theta$  a  $\gamma(\theta) := ((1 + \cos(\theta)) \cos(\theta), (1 + \cos(\theta)) \sin(\theta))$ . Aquesta és una corba tancada i simètrica respecte l'eix horitzontal.

Volem parametritzar una corba donada de manera que el nou paràmetre  $s$  coincideixi amb la longitud del tros de corba des de l'inici fins a  $\gamma(s)$ . En altres paraules, volem fer un canvi de variable de manera que la nova corba,  $\Gamma(s) = \gamma(\psi^{-1}(s))$ , el paràmetre  $s$  coincideixi amb la longitud transcorreguda.

**Definició 3.2.6 (Corba regular).** Una corba  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  és regular si  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$  per a tot  $t \in [a, b]$ .

**Observació 3.2.7.** Als exemples anteriors, totes les corbes són regulars llevat de la cardioide, que té  $\|\gamma'(\pi)\| = 0$ .

Donada una corba  $\gamma$  regular, amb longitud  $L = l(\gamma)$ , considerem la *reparametrització* (inversa):

$$\begin{aligned} s : [a, b] &\longrightarrow [0, L] \\ t &\longmapsto s(t) := l(\gamma|_{[a, t]}) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du. \end{aligned}$$

És a dir, el nou paràmetre  $s$  queda definit per la igualtat  $s = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$ . La funció  $s = s(t)$  és derivable amb  $s'(t) = \|\gamma'(t)\| \neq 0$ ; és a dir, *aplicant el teorema de la funció inversa* trobem que  $s(t)$  és estrictament monòtona creixent i de classe  $\mathcal{C}^1$ .

$$t_1 < t_2 \implies s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(u)\| du > 0.$$

Per tant,  $s$  és una bijecció, un *canvi de paràmetre* i, així, la seva inversa local també és de classe  $\mathcal{C}^1$ :

$$\begin{aligned} t : [0, L] &\longrightarrow [a, b] \\ s &\longmapsto t(s), \quad t \in \mathcal{C}^1. \end{aligned}$$

**Definició 3.2.8 (Paràmetre arc).** El paràmetre  $s$  s'anomena *paràmetre arc* i la parametrització global  $\psi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\psi(s) = \gamma(t(s))$  s'anomena *parametrització per l'arc*.

**Observació 3.2.9.** Clarament,  $s(a) = 0$  i  $s(b) = L$ . Comprovem que la corba reparametritzada té velocitat 1; és a dir, que  $\|\psi'(s)\| = 1$ , usarem que  $t = s^{-1}$ :

$$\psi'(s) \stackrel{\text{cadena}}{=} \gamma'(t(s))t'(s) = \gamma'(t)(s^{-1})'(s) = \gamma'(t) \frac{1}{s'(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \implies \|\psi'(s)\| = 1.$$

Per tant, tal com volíem:

$$l(\psi([0, s])) = \int_0^s \|\psi'(u)\| du = \int_0^s du = s.$$

**Exemple 3.2.10.**

1. *Circumferència de centre (0,0) i radi 1.* Teníem  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$  tal que  $t \in [0, 2\pi]$ . Per tant,  $t$  ja és el paràmetre arc.
2. *Hèlix a  $\mathbb{R}^3$ .* Teníem  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ , tal que  $t \in [0, 2\pi]$  i  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$ . Llavors, el paràmetre arc és:

$$s = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2}t,$$

i la parametrització amb l'arc és:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 2\sqrt{2}\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \gamma_1(s) = \gamma\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

## INTEGRALS DE FUNCIONS I CAMPS SOBRE CORBES

**Definició 3.3.1** (Integral sobre una corba). Sigui  $A \subset \mathbb{R}^n$  i sigui  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funció contínua. Sigui, també,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  corda de classe  $\mathcal{C}^1$  a trossos amb  $\gamma^* \subset A$ . La integral de  $f$  sobre  $\gamma$  és:

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

És a dir, integrem  $f$  a la trajectòria de  $\gamma$  respecte de l'element de longitud de  $\gamma$ ,  $\|\gamma'(t)\| dt$ .

*Si pensem que  $\gamma^*$  és un fil de densitat  $f$ , aleshores  $\int_{\gamma} f ds$  representa la massa total del fil.*

### Propietat 3.3.2.

1. El valor de la integral no depèn de la parametrització triada. Sigui  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  tal que assignem  $s \mapsto \varphi(s) = t$ , i.e. canvi de paràmetre. Denotant  $\Gamma = \gamma \circ \varphi$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt &= \int_c^d f((\gamma \circ \varphi)(s)) \|\gamma'(\varphi(s))\| \cdot \|\varphi'(s)\| ds \\ &= \int_c^d f((\gamma \circ \varphi)(s)) \|(\gamma \circ \varphi)'(s)\| ds = \int_c^d f(\Gamma(s)) \|\Gamma'(s)\| ds. \end{aligned}$$

2. Propietats heretades de les integrals:

- Si  $f_1, f_2$  són ambdues contínues,

$$\int_{\gamma} (f_1 + f_2) ds = \int_{\gamma} f_1 ds + \int_{\gamma} f_2 ds.$$

- Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , el producte escalar amb la integral és la integral del producte escalar:

$$\int_{\gamma} (\lambda f) ds = \lambda \int_{\gamma} f ds.$$

- El valor absolut de la integral de la funció és la integral del valor absolut de la funció:

$$\left| \int_{\gamma} f ds \right| \leq \int_{\gamma} |f| ds.$$

- Si  $\alpha \vee \beta = \gamma^1$ , tenim el següent:

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\alpha} f ds + \int_{\beta} f ds.$$

- Aquest és un cas particular de la independència per parametritzacions:

$$\int_{-\gamma} f ds = \int_{\gamma} f ds.$$

<sup>1</sup> No confondre amb la notació de *Geometria Projectiva*, aquí el símbol  $\vee$  indica la *unió* de les dues corbes.

**Exemple 3.3.3.** Sigui  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , funció contínua a tot  $\mathbb{R}^3$ , i sigui l'hèlix a  $\mathbb{R}^3$  considerada anteriorment:  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Com que  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$ , tenim:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f ds &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt \\ &= \sqrt{2} \left( 2\pi + \frac{1}{3} 8\pi^3 \right). \end{aligned}$$

A part d'integrar funcions, també voldrem integrar camps vectorials sobre corbes. Això serà especialment important en els resultats que seguiran.

**Definició 3.3.4 (Camp vectorial).** Sigui  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Un camp vectorial a  $A$  és una aplicació  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F \in \mathcal{C}(A)$ , tal que  $x \mapsto F(x)$ , on  $F(x)$  és  $(F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$ . És a dir, a cada punt  $x \in A$  li assignem un vector de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple 3.3.5.**

1.  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definit per  $F(x, y) = (x, y)$  (*vector posició*).
2.  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donat per  $F(x, y) = (y, -x)$  (*vector ortogonal al vector posició*).

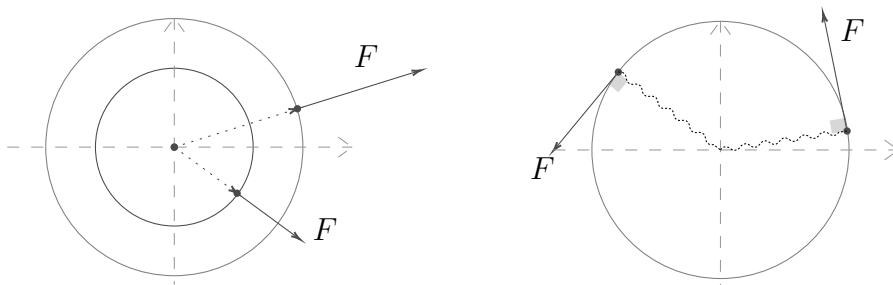


Figura 3.4: Primer i segon apartat, respectivament.

**Definició 3.3.6 (Integral d'un camp sobre la corba).** Sigui  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una corba de classe  $\mathcal{C}^1$  a trossos i sigui  $F$  un camp continu definit almenys a  $\gamma^*$ . La *integral d' $F$  al llarg de  $\gamma$*  és:

$$\int_{\gamma} F ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

**Observació 3.3.7.** Observem que integrem la funció que surt de fer el producte escalar de  $F(\gamma(t))$  i  $\gamma'(t)$ , és a dir,  $\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ . En particular, si el camp és perpendicular a la corba a tot arreu, la integral resultant és 0.

En termes físics, aquesta integral indica el treball realitzat pel camp de forces  $F$  per desplaçar una partícula de  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$ .

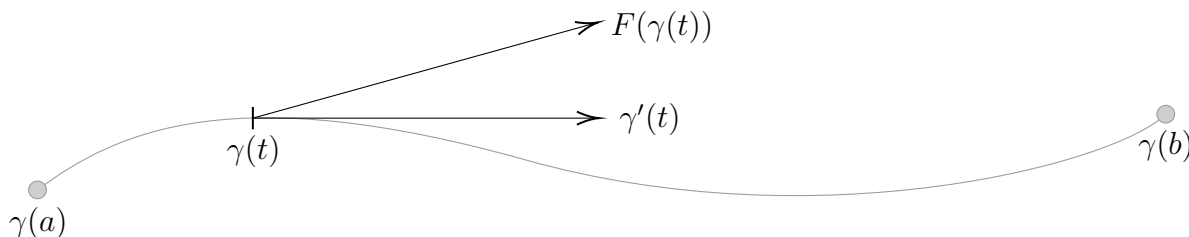


Figura 3.5: Representació de la situació.

**Exemple 3.3.8.**

1. Sigui l'hèlix  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$  tal que  $t \in [0, 2\pi]$  a  $\mathbb{R}^3$  i sigui el camp següent, el *camp gravitatori*:

$$F(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|^3}.$$

Tenim  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$  i, per tant:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F ds &= \int_0^{2\pi} \frac{(\cos t, \sin t, t)}{\|(\cos t, \sin t, t)\|^3} (-\sin t, \cos t, 1) dt = \int_0^{2\pi} \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \left[ -(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^{2\pi} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}. \end{aligned}$$

2. Calculem el treball realitzat pel camp  $F(x, y) = (x^2, -xy)$  al moure una partícula al llarg del quart de cercle  $x^2 + y^2 = 1; x, y \geq 0$ . Podem parametritzar la corba en coordenades polars:  $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ . Llavors:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t, -\cos t \cdot \sin t) (-\sin t, \cos t) dt \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t dt = \left[ \frac{2}{3} \cos^3 t \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Observació 3.3.9.** A vegades, donat un camp  $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$  a  $\mathbb{R}^2$ , s'escriu també:

$$\int_{\gamma} F ds = \int_{\gamma} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy.$$

Podem pensar que:

$$\int_{\gamma} F ds = \int_{\gamma} (F_1, F_2) \cdot (dx, dy).$$

Així, l'integral de l'exemple anterior, la podríem trobar denotada així:  $\int_{\gamma} x^2 dx - xy dy$ .

3.4

**GRADIENT D'UNA FUNCIO I CAMPS CONSERVATIU**

Sigui  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un obert i sigui  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Recordem que el *vector gradient* de  $f$  al punt  $x \in \Omega$  és  $\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$ . Els camps que tenen aquesta forma tenen unes propietats particulars, que tot seguit estudiarem.

**Definició 3.4.1 (Camp vectorial conservatiu).** Un camp vectorial  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , es diu *conservatiu* si existeix una funció diferenciable  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f(x) = F(x)$ , on  $x \in \Omega$ . Equivalentment:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = F_i(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Aleshores, es diu que  $f$  és un *potencial* del camp  $F$ .

**Exemple 3.4.2.** La funció  $f(x, y, z) = \frac{1}{\|(x, y, z)\|}$  és un potencial del camp gravitatori:  $F(x, y, z) = -\frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|^3}$  a  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Efectivament, essent  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ , tenim:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}2x = -\frac{x}{\|(x, y, z)\|^3}, \text{ ídem } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\|(x, y, z)\|^3} \text{ i } \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{z}{\|(x, y, z)\|^3}.$$

**Teorema 3.4.3** (Teorema fonamental de les integrals en línia). *Sigui  $\Omega$  un obert connex de  $\mathbb{R}^n$ . Sigui  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camp conservatiu i sigui  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  un potencial de  $F$ . Donada una corba  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  a trossos i amb  $\gamma^* \subset \Omega$ , aleshores:*

$$\int_{\gamma} F dr = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particular, si  $\gamma$  és una corba tancada, llavors  $\int_{\gamma} F dr = 0$ .

El que ens ve a dir aquest teorema és que per a camps conservatius la integral de línia no depèn del camí, només depèn del punt inicial i final.

*Demostració.* Essent  $\nabla f = F$ , pel teorema fonamental del càlcul:

$$\int_{\gamma} F dr = \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b \nabla f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a).$$

A més, si una corba és tancada,  $\gamma(b) = \gamma(a)$ , de manera que  $f(\gamma(b)) = f(\gamma(a))$  i, evidentment,  $\int_{\gamma} F dr = 0$ . ■

**Exemple 3.4.4.** Calculem  $\int_{\gamma} 2xy dx + (x^2 - y^2) dy$  als següents casos:

1.  $\gamma$  és una circumferència unitat  $x^2 + y^2 = 1$ .
2.  $\gamma$  és un arc de paràbola  $y^2 = x$  que va de  $(1, -1)$  a  $(1, 1)$ .

Observem que el camp  $F(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$  és el gradient de la funció  $f(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3$  i que tant el camp com la funció són infinitament diferenciables a tot  $\mathbb{R}^2$ . Aleshores:

1. Pel teorema anterior,

$$\gamma \text{ és una corba tancada} \implies \int_{\gamma} 2xy dx + (x^2 - y^2) dy = 0,$$

2. Un altre cop, pel teorema anterior:

$$\int_{\gamma} 2xy dx + (x^2 - y^2) dy = f(1, 1) - f(1, -1) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0.$$

La qüestió natural que se'ns presenta és: com podem saber si un camp és conservatiu? Tenim una condició necessària força assequible, almenys per a camps conservatius de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Proposició 3.4.5.** *Sigui  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  obert i connex, i sigui  $F$  camp conservatiu de classe  $\mathcal{C}^1$  (cada component  $F_k$ ,  $k = 1 \div n$ , és de classe  $\mathcal{C}^1$ ). Llavors:*

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq k \leq n, \quad x \in \Omega.$$



**Demostració.** Essent  $F$  conservatiu i de classe  $\mathcal{C}^1$ , existeix  $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  obert amb  $\nabla f = F$ ; és a dir, amb  $F_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$  per a tot  $j = 1 \div n$ . Llavors, essent  $f \in \mathcal{C}^2$  i per les igualtats de derivades creuades (teorema de Schwartz):

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq k \leq n. \quad \blacksquare$$

Malauradament, aquesta condició necessària tan senzilla no sempre és suficient.

**Exemple 3.4.6.** Sigui el camp  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ , que és de classe  $\mathcal{C}^1$  (de fet, és de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ) a tot  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Tenim que la condició necessària de 3.4.5 es compleix:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

En canvi,  $F$  no és conservatiu. En efecte, veurem que la integral de  $F$  al llarg de la circumferència unitat (corba tancada) no val 0; això és, el teorema fonamental de les integrals en línia no es compleix. Parametritzem, doncs, la circumferència unitat  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

Tenim  $F(\gamma(t)) = (-\sin t, \cos t)$  i, per tant:

$$\int_{\gamma} F dr = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t)(-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0.$$

**Observació 3.4.7.** Pot ajudar a entendre per què el valor d'aquesta integral és  $2\pi$  el fet següent: allà on la funció  $f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$  és regular, tenim  $\nabla f = F$ . La funció  $f(x, y)$  dona l'angle del punt  $(x, y)$  en coordenades polars i, per tant, el valor de  $\int_{\gamma} F dr = \int_{\gamma} \nabla f dr$  serà el valor de  $f$  al punt final (angle  $2\pi$ ) menys el valor de  $f$  al principi (angle 0).

Afortunadament, tot i que la condició necessària de la proposició no és suficient en general, sí que ho és en molts casos.

**Definició 3.4.8** (Simplement connex). Un obert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  és *simplement connex* si és arc-connex (donats  $x_1, x_2 \in \Omega$  existeix un camí continu dins  $\Omega$  que uneix  $x_1, x_2$ ) i tot camí tancat dins  $\Omega$  pot deformar-se de manera contínua a un sol punt sense sortir de  $\Omega$ . *Informalment, diem que a  $\mathbb{R}^2$  un domini  $\Omega$  és simplement connex si és d'una sola peça i no té forats.*

**Exemple 3.4.9.**

1. Una bola oberta és un obert simplement connexa.
2. Un semiplà és un domini simplement connex.
3. Un anell obert a  $\mathbb{R}^2$  o, en general, una regió del tipus  $\Omega = D(a, R) \setminus D(b, r)$ , essent  $\overline{D(b, r)} \subset D(a, R)$  no són dominis simplement connexos. Sigui, per exemple,  $0 < r < R$  i  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$ . Aquest obert és arc-connex, però hi ha camins tancats (per exemple, una circumferència  $x^2 + y^2 = \rho$ ,  $r < \rho < R$ ) que no es poden contraure a un sol punt sense sortir d' $A$ .

4.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  no és simplement connex, per un argument com el del punt anterior. En canvi,  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $n \geq 3$ , sí que és simplement connex, com també ho és la diferència de dues boles  $B(a, R) \setminus B(b, r)$ , amb  $\overline{B(b, r)} \subset B(a, r)$ .

**Lema 3.4.10** (Lema de Poincaré). *Si sigui  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un obert simplement connex i sigui  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camp de classe  $\mathcal{C}^1$ . Aleshores,  $F$  és conservatiu si, i només si:*

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x), \quad 1 \leq j \leq k \leq n, \quad x \in \Omega.$$

La demostració d'aquest resultat només la farem per al cas en què  $\Omega$  sigui un obert amb propietats especials, un *obert estrellat*.

**Definició 3.4.11** (Obert estrellat). Un obert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es diu *estrellat* si existeix  $a \in \Omega$  tal que per a tot  $x \in \Omega$  el segment  $S(a, x) = \{ta + (1-t)x \mid t \in [0, 1]\}$ , que uneix  $x$  i  $a$ , és tot dins  $\Omega$ .

*Demostració del cas  $\Omega$  estrellat.* Per simplificar, suposem que  $a = 0$ . Mirem a posteriori com hauria de ser  $f$  amb  $\nabla f = F$ . Dient  $\gamma(t) = tx$ ,  $t \in [0, 1]$  al segment que uneix  $a = 0$  i  $x$ , caldria:

$$f(x) - f(0) = \int_{\gamma} \nabla f \, dr = \int_0^1 \nabla f(tx) x \, dt = \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^n F_j(tx) x_j \right) dt = \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 F_j(tx) dt \right) x_j.$$

Definim, doncs:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 F_j(tx) dt \right) x_j.$$

Comprovem que la funció és un potencial de  $F$ : fixant  $k = 1, \dots, n$  i derivant obtenim:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 F_k(tx) dt + \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(tx) t dt \right) x_j.$$

Utilitzant la hipòtesi podem suposar  $\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(tx) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(tx)$  i, per tant:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 F_k(tx) dt + \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(tx) x_j \right) t dt = \int_0^1 F_k(tx) dt + \int_0^1 \frac{dF_k}{dt}(tx) t dt.$$

Integrant per parts aquesta darrera integral:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 F_k(tx) dt + (F_k(tx)t)_0^1 - \int_0^1 F_k(tx) dt = F_k(x). \quad \blacksquare$$

**Observació 3.4.12.** El lema de Poincaré ens diu quan un camp és conservatiu; és a dir, quan existeix un potencial  $f$ , però no diu com trobar-lo. Per fer-ho cal resoldre les equacions  $\frac{\partial f}{\partial x_k} = F_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

**Exemple 3.4.13.** Com a continuació de 3.4.4, ara centrant-nos en altres aspectes, prenem el camp  $F(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$ . En primer lloc, observem que  $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  i que  $\mathbb{R}^2$  és simplement connex. El lema de Poincaré garanteix, aleshores, que  $F$  és conservatiu, ja que  $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 2x = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ . Per a trobar el potencial  $f$  busquem una solució al sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = F_2 = x^2 - y^2 \end{cases}$$

Integrant la primera equació, tenim:  $f(x, y) = x^2y + C(y)$ , on  $C(y)$  pot dependre de  $y$ , però no de  $x$ . Imposant la segona equació a aquesta  $f$  tenim:

$$x^2 + C'(y) = x^2 - y^2 \implies C'(y) = -y^2 \text{ i } C(y) = -\frac{1}{3}y^3 + C,$$

amb  $C$  constant. Tornant a l'expressió de  $f$  anterior, veiem que els possibles potencials són:

$$f(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

## 3.5

## TEOREMA DE GREEN

Hem vist darrerament que a un domini  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  simplement connex un camp  $F = (P, Q) \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  és conservatiu si, i només si,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , és a dir, si, i només si,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = Q_x - P_y = 0. \quad (3.5.1)$$

Veurem, tot seguit, un resultat sobre camps de classe  $\mathcal{C}^1$  no necessàriament conservatius a dominis molt generals i no necessàriament simplement connexos (o estrellats).

**Notació 3.5.1 (Rotacional).** A vegades, anomenem *rotacional* de  $F$  o, en el seu defecte, *rot*  $F$ , quan parlem de camps a  $\mathbb{R}^3$ . En concret, podem definir-lo com (3.5.1):  $\text{rot } F = Q_x - P_y = 0$ .

**Teorema 3.5.2 (Teorema de Green).** *Sigui  $D \subset \mathbb{R}^n$  un domini regular<sup>2</sup> de  $\mathbb{R}^2$  i sigui  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  un camp de classe  $\mathcal{C}^1$  a un entorn de  $\overline{D}$ . Aleshores:*

$$\int_{\partial^+ D} F \, dr = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy,$$

on  $\partial^+ D = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$  indica la corba vora de  $D$  recorreguda de manera que el domini queda a l'esquerra.

<sup>2</sup> Aclarem més endavant què és un domini regular. De moment, podem pensar que és una definició molt general i que inclou, àmpliament, els casos que tractem habitualment.

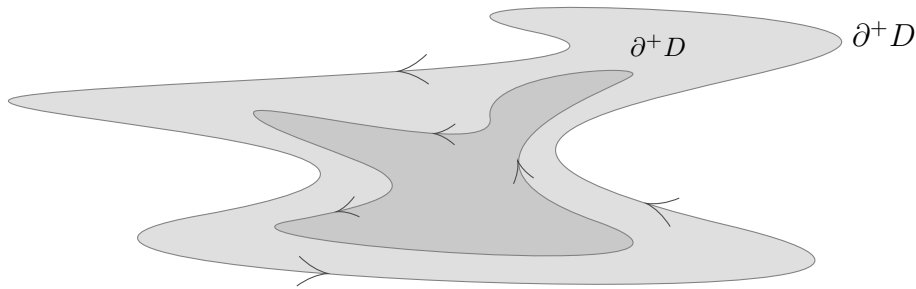


Figura 3.6: Representació del teorema de Green.

**Exemple 3.5.3.**

1. Sigui el camp  $F(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ . Tenim  $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$  i  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ . Apliquem el teorema de Green a l'anell  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$ . La vora de l'anell de  $D$  consisteix en les circumferències  $x^2 + y^2 = R^2$  i  $x^2 + y^2 = r^2$ , la primera recorreguda en sentit antihorari i la segona, en sentit horari. Diem  $C_R, C_r$  a les circumferències orientades en sentit antihorari. Aleshores, tenim:

$$\int_{\partial^+ D} F dr = \int_{C_R} F dr - \int_{C_r} F dr = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = 0 \implies \int_{C_R} F dr = \int_{C_r} F dr.$$

En altres paraules, el valor de la integral de  $F$  a una circumferència de centre  $(0, 0)$  no depèn del radi (si pensem que  $F$  és el gradient d' $\arctan(\frac{y}{x})$ , és trivial) per l'angle de qualsevol d'aquestes circumferències i avaluant la integral:

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) &= (r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \gamma'(\theta) &= (-r \sin \theta, r \cos \theta) \\ F(\gamma(\theta)) &= \left( \frac{-r \sin \theta}{r^2}, \frac{r \cos \theta}{r^2} \right) = \left( -\frac{\sin \theta}{r}, \frac{\cos \theta}{r} \right). \end{aligned}$$

Aleshores:

$$\int_{C_r} F dr = \int_0^{2\pi} F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\sin \theta}{r}, \frac{\cos \theta}{r} \right) (-r \sin \theta, r \cos \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

2. Sigui  $\mathbb{D} = D((0, 0); 1) \subset \mathbb{R}^2$  el disc unitat i sigui el camp  $F(x, y) = (x - y, x + y^3)$ , que és de classe  $\mathcal{C}^1$  a tot  $\mathbb{R}^2$ . La vora de  $\mathbb{D}$  és la circumferència unitat  $x^2 + y^2 = 1$ . Comprovem que les dues integrals que apareixen al teorema de Green tenen el mateix valor. Per una part, si parametritzem la vora de  $\mathbb{D}$  per l'angle,  $x = \cos \theta$  i  $y = \sin \theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , tenim:

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ \mathbb{D}} F dr &= \int_{\partial^+ \mathbb{D}} (x - y) dx + (x + y^3) dy \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos \theta - \sin \theta)(-\sin \theta) d\theta + (\cos \theta + \sin^3 \theta) \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \sin \theta \cos \theta + \sin^3 \theta \cos \theta) d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Per altra part,

$$\iint_{\mathbb{D}} (Q_x - P_y) dx dy = \iint_{\mathbb{D}} 2 dx dy = 2|\mathbb{D}| = 2\pi.$$

3. Podem utilitzar el teorema de Green per a calcular l'àrea d'una regió del pla mitjançant una integral de línia. Donat un domini regular  $D$ , si triem qualsevol camp  $F$  de classe  $\mathcal{C}^1$  amb  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ , tindrem:

$$\text{area}(D) = \iint_D 1 dx dy = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy.$$

Així, triant, per exemple,  $F(x, y) = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$ , tenim:

$$\text{area}(D) = \int_{\partial^+ D} -\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} x dy - y dx.$$

Per tant, podem calcular l'àrea amb una integral de línia. Si prenem, per exemple,  $D = \mathbb{D}$ , disc unitat, parametritzem la vora amb l'angle:  $x = \cos \theta, y = \sin \theta$  tal que  $\theta \in [0, 2\pi]$  i tenim:

$$\text{area}(\mathbb{D}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \theta \cos \theta d\theta - \sin \theta (-\sin \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi.$$

*Idea de la demostració del teorema de Green.* Considerem el cas en què  $D$  sigui un interval  $(a, b) \times (c, d)$ . Parametritzant cada segment de la manera habitual i aplicant el teorema fonamental del càlcul tenim:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} F dr &= \int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_{\partial D} P dx + \int_{\partial D} Q dy \\ &= \int_a^b (P(x, c) - P(x, d)) dx + \int_c^d (Q(b, y) - Q(a, y)) dy \\ &= - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx + \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy. \end{aligned}$$

Per a un domini regular general podem aproximar  $\Omega$  interiorment per un domini  $\Omega_\delta$  format per quadrats (o rectangles) de costat, com a molt,  $\delta$ . Aleshores, apliquem el cas anterior a cadascun dels quadrats que conformen  $\Omega_\delta$ . Si diem  $\{Q_i\}$  a aquests quadrats tenim, per una part:

$$\iint_{\Omega_\delta} (Q_x - P_y) dx dy = \sum_i \iint_{Q_i} (Q_x - P_y) dx dy = \sum_i \int_{\partial^+ Q_i} P dx + Q dy.$$

Observem que les integrals als costats que són vora de dos cubs completament continguts a  $\Omega$  es cancel·len, ja que es recorren en sentits oposats. Amb això, totes les vores interiors es cancel·len i sobreviu només la vora exterior de  $\Omega_\delta$ ; queda:

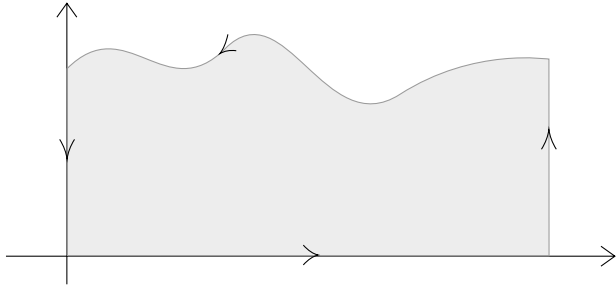
$$\iint_{\Omega_\delta} (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial^+ \Omega_\delta} P dx + Q dy.$$

Fent  $\delta \rightarrow 0$  obtenim el resultat general. ■

**Definició 3.5.4 (Domini bàsic).** Sigui  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domini (obert i connex) acotat. Diem que  $D$  és bàsic si és de la forma:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, c < y < f(x)\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a < b,$$

a més que fixem  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funció de classe  $\mathcal{C}^1$  a trossos amb  $c < f(x)$  per a tot  $x \in [a, b]$ . La frontera de  $D$  és la unió de tres segments i el tros de la gràfica de  $f$  a  $[a, b]$ :



$$\begin{aligned} \gamma_1 : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_1(x) &= (x, c) \\ \gamma_2 : [c, f(b)] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_2(y) &= (b, y) \\ -\gamma_3 : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & (-\gamma_3)(x) &= (x, f(x)) \\ -\gamma_4 : [c, f(a)] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & (-\gamma_4)(y) &= (a, y) \end{aligned}$$

Aquesta vora és una corba de classe  $\mathcal{C}^1$  a trossos i tancada.

**Definició 3.5.5 (Domini elemental).** Un domini  $D \subset \mathbb{R}^2$  es diu elemental si és la imatge per una rotació centrada a  $(0, 0)$  d'un domini bàsic; és a dir,  $D$  és elemental si existeixen  $R_\theta$  rotació centrada a  $(0, 0)$  i d'angle  $\theta$  i  $D_b$  domini bàsic tals que  $D = R_\theta(D_b)$ . Aleshores, també  $\partial^+ D = R_\theta(\partial^+ D_b)$  és una corba de classe  $\mathcal{C}^1$  a trossos i tancada. *Informalment, diem que els dominis elementals són translacions i rotacions de dominis bàsics.*

**Definició 3.5.6 (Domini regular).** Diem que  $D$  és regular si:

1.  $\partial D$  és la unió d'un nombre finit de corbes  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  tancades, simples, de classe  $\mathcal{C}^1$  a trossos tals que  $\alpha_j^* \cap \alpha_k^* = \emptyset$  si  $j \neq k$ .
2. Per a tot  $p \in \partial D$  existeix un entorn obert  $\mathcal{U}_p$  de  $p$  tal que  $D_p = D \cap \mathcal{U}_p$  és un domini elemental i la component  $\gamma_s$  (la que no és necessàriament un segment) de  $\partial^+ D_p$  coincideix amb  $\partial^+ D \cap \mathcal{U}_p$ .

Podem pensar, informalment, que  $\partial D$  és localment la gràfica d'una funció de classe  $\mathcal{C}^1$ .

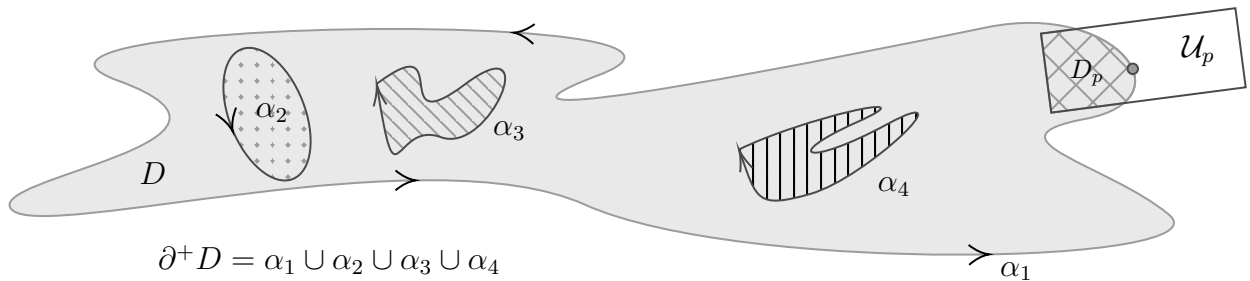


Figura 3.7: Domini regular.

**Exemple 3.5.7.**

- Acabem donant un exemple de domini no regular (no compleix cap de les dues condicions de la definició):  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \setminus \bigcup_{n=3}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \times (\frac{1}{n}, \frac{1}{2})$ .
- Un altre exemple, que compleix la primera condició però no la segona, seria un domini en forma d'espiral al voltant d'un punt (que és, precisament, on no val la segona condició).

Ara busquem la mateixa sèrie de propietats i definicions, però estenem el espai ambient a dimensió 3, és a dir, treballarem amb  $\mathbb{R}^3$ . *S'hauria d'avançar a la secció 4.6 per veure els conceptes de superfície regular, 4.3 per a les vores orientades.*

**Definició 3.5.8** (Domini elemental,  $\mathbb{R}^3$ ). Un domini  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  es diu *elemental* si, en un sistema de coordenades adequat, és del tipus:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, c < z < f(x, y)\},$$

on  $D \subset \mathbb{R}^2$  és un domini regular,  $f$  és una funció de classe  $\mathcal{C}^1$  a un entorn de  $\overline{D}$  i  $c \in \mathbb{R}$  és una constant, tal que  $c < f(x, y)$  per a tot  $(x, y) \in \overline{D}$ .

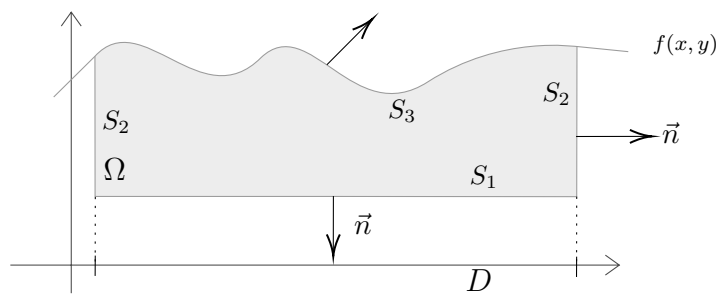


Figura 3.8: Domini elemental en  $\mathbb{R}^3$

La vora de  $\Omega$ , orientada positivament, està formada per les superfícies regulars orientades:

1.  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = c\}$ , orientada per  $\vec{n}(x, y, z) = (0, 0, -1)$ .
2.  $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \partial D, c \leq z \leq f(x, y)\}$  orientada per  $\vec{n}(x, y, z) = (\alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y), 0)$ , on  $(\alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y))$  és el vector normal unitari exterior a  $\partial_+ D$  a  $(x, y) \in \partial D$ .
3.  $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \overline{D}, z = f(x, y)\}$ , orientada per:

$$\vec{n}(x, y, z) = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}, \quad \phi(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in D.$$

**Definició 3.5.9** (Domini regular,  $\mathbb{R}^3$ ). Un obert connex i acotat  $\Omega$  és un domini regular de  $\mathbb{R}^3$  si:

1. La frontera  $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$  és una superfície regular sense vora (orientada pel normal exterior a  $\Omega$ ) que anomenem vora de  $\Omega$  orientada positivament i escrivim  $\partial_+\Omega$ .
2. Cada punt  $p \in \partial\Omega$  té un entorn  $\mathcal{U}_p$  tal que  $\mathcal{U}_p \cap \Omega$  és un domini elemental. A més, la superfície  $\partial_+(\mathcal{U}_p \cap \Omega)$  conté  $\mathcal{U}_p \cap \partial_+\Omega$ , amb la mateixa orientació.

## EXERCICIS FINALS

**Exercici 3.6.1.** *Escriviu la parametrització de les corbes  $\gamma$  següents. Determineu també  $\gamma'(t)$  i  $\|\gamma'(t)\|$ .*

1. Segment entre  $(3, 2)$  i  $(6, 6)$ .
2. Tros de l'el·lipse  $4x^2 + 9y^2 = 36$  al primer quadrant (en sentit antihorari).
3. Tros de la corba  $y = e^{2x}$  amb  $x \in [0, 2]$  recorreguda en sentit invers.
4. Tros de la circumferència de centre  $(0, 0)$  i radi 2 amb  $x \geq 0$  (entre  $(0, -2)$  i  $(0, 2)$ ) seguit del segment que va de  $(0, 2)$  a  $(-3, -4)$ .

Demostració.

1. Prenem el segment  $\gamma(t) = (3, 2) + t((6, 6) - (3, 2))$  tal que  $t \in [0, 1]$ . Aleshores, prenem el camí  $\gamma$  definit de la manera següent:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (3 + 3t, 2 + 4t) \end{aligned}$$

Derivant obtenim  $\gamma'(t) = (3, 4)$  i, operant,  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9 + 16} = 5$ .

2. Tros de  $4x^2 + 9y^2 = 36$ , que va de  $x \in [0, 3]$  i  $y = \sqrt{\frac{36-4x^2}{9}}$ . Ens queda que  $-\gamma(x) = \left(x, \sqrt{\frac{36-4x^2}{9}}\right)$  (hem agafat la corba en sentit antihorari, necessitem canviar-la de sentit, però a dia que estem fent els exercicis no ho hem fet a teoria encara). Pensem això, doncs, en coordenades polars:

$$\left. \begin{aligned} 2x &= r \cos \theta \\ 3y &= r \sin \theta \\ r &= 6 \end{aligned} \right\} \implies \gamma : \begin{aligned} [0, \frac{\pi}{2}] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\longmapsto \gamma(\theta) = (3 \cos \theta, 2 \sin \theta). \end{aligned}$$

Derivant,  $\gamma'(\theta) = (-3 \sin \theta, 2 \cos \theta)$  i  $\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{9 \sin^2(\theta) + 4 \cos^2 \theta} = \sqrt{4 + 5 \sin^2 \theta}$ .

3. Trivial, tenint en compte que volem anar del 2 al 0 (això és,  $2 - t$  a tot arreu).
4. Considerem  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ , que definirem de la següent manera:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_2 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) & t &\longmapsto \gamma_2(t) \end{aligned}$$

Hem definit  $\gamma_2(t) = (0, 2) + t((-3, -4) - (0, 2))$ . Optem per fer una parametrització global, agafant  $t = s - \frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{aligned} \gamma : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \gamma(s) = \begin{cases} (2 \cos s, 2 \sin s), & \text{si } s \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ (0, 2) + ((-3, -4) - (0, 2)), & \text{si } s \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right] \end{cases} \end{aligned}$$

El càlcul de  $\gamma'(t)$  i  $\|\gamma'(t)\|$  surt a trossos, també. ■

**Exercici 3.6.2.**



1. Calculeu la longitud de la corba donada per la parametrització  $\gamma(t) = \left(t, \frac{4}{3}\sqrt{t^3}, \frac{t}{2}\right)$ .
2. Calculeu la longitud de l'astroide definit per l'equació  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$ .
3. L'equació d'una corba és  $y^2 = x^3$ . Trobeu la longitud de l'arc que uneix  $(1, -1)$  amb  $(1, 1)$ .

Demostració.

1. La longitud de la corba es troba a partir de la fórmula (3.2.1). Calculant, obtenim  $\gamma'(t) = (1, 2t^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2})$  i  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4} + 4t}$ . Per tant:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^2 \sqrt{\frac{5}{4} + 4t} dt.$$

2. Operant, podem aïllar la  $y$  de manera que obtenim:  $y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ . Cal parametritzar la corba: prenem  $X = x^{\frac{1}{3}}$  i  $Y = y^{\frac{1}{3}}$ . Aleshores:

$$X^2 + Y^2 = (a^{\frac{1}{3}})^2 = a^{\frac{2}{3}}$$

Usant que  $r^2 = a^{\frac{2}{3}}$ . Parametritzem  $x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cos \theta$  i  $y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \sin \theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . La parametrització, doncs, queda:

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\longmapsto \gamma(\theta) = (a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

Derivant, obtenim el següent.

$$\gamma'(\theta) = (-3a \cos^2 \theta \sin \theta, 3a \sin^2 \theta \cos \theta) = 3a \sin \theta \cos \theta (-\cos \theta, \sin \theta).$$

Operant, ens queda el mòdul:  $\|\gamma'(\theta)\| = |3a \sin \theta \cos \theta|$ . Dit això, ja podem calcular la longitud de l'astroide:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(\theta)\| d\theta = \int_0^{2\pi} |3a \sin \theta \cos \theta| d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta = 6a [\sin^2 \theta]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$

Hem usat la simetria de la funció per no haver-la de dividir en trossos.

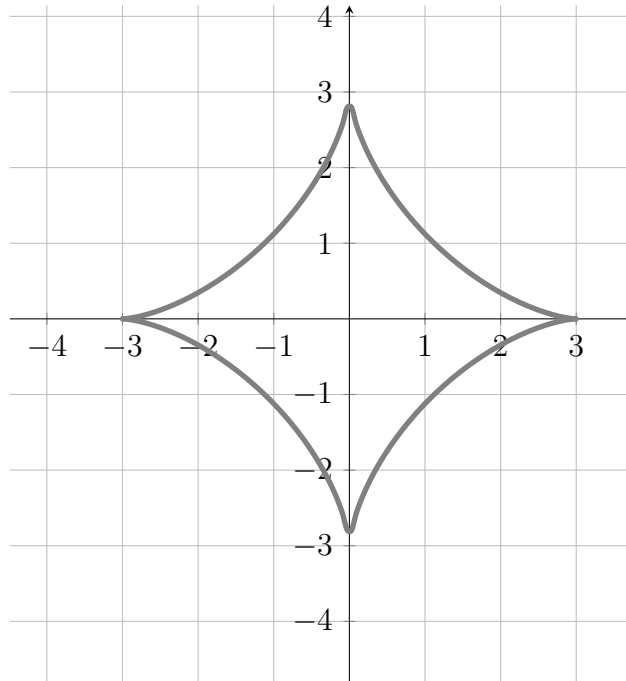


Figura 3.9: Representació gràfica del problema, cas  $a = 3$ .

3. Exercici. ■

**Exemple 3.6.3** (Exercici fet a classe). Sigui  $x^2 + y^2 = R^2$  una circumferència de centre  $(0, 0)$  i radi  $R$ . Parametritzem:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\longmapsto \gamma(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta) \end{aligned}$$

Prenem un nou paràmetre  $s = \int_0^\theta R du = R\theta$ . Aleshores:

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, 2\pi R] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \Gamma(s) = (R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}). \end{aligned}$$

**Exercici 3.6.4.** Sigui la cicloide donada per la parametrització  $x(t) = t - \sin t$ ,  $y(t) = 1 - \cos t$  tal que  $t \in [0, 2\pi]$ . Calculeu-ne el paràmetre arc i la longitud.

*Demostració.* Tenim una corba que està ben definida, que comença al  $(0, 0)$  i acaba al  $(0, 2\pi)$ . Per a calcular el paràmetre arc i la longitud, utilitzem la seva expressió habitual:  $s = \psi(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du$ . La parametrització que ens donen és la següent:  $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ , de manera que derivant  $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ . De la mateixa manera:

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= 1 + \cos^2 t - 2 \cos t + \sin^2 t = 2(1 - \cos t) = 2 \left( 2 \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) = 4 \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \\ \iff \|\gamma'(t)\| &= 2 \left| \sin \left( \frac{t}{2} \right) \right| \xrightarrow{\frac{t}{2} \in [0, \pi]} 2 \sin \left( \frac{t}{2} \right). \end{aligned}$$

Hem usat la fórmula de l'angle doble,  $\sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos \alpha}{2}$ , i que el sinus és positiu entre 0 i  $\pi$ . Ara que ja hem trobat  $\|\gamma'(t)\|$ , podem substituir a la fórmula, directament:

$$s = \psi(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t 2 \sin\left(\frac{u}{2}\right) du.$$

El resultat d'aquesta integral és  $s = 4(1 - \cos \frac{t}{2})$  i  $L = s(2\pi)$  és  $4(1 - \cos \pi) = 8$ . ■

### Exercici 3.6.5.

1. Calculeu la integral del camp escalar  $f(x, y) = y$  al llarg de l'arc de cardioide  $r = 1 + \cos \theta$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ .
2. Trobeu la massa d'un filferro format per la intersecció de l'esfera unitat i el pla  $x + y + z = 0$  si la densitat al punt  $(x, y, z)$  és  $x^2$  grams per unitat de longitud del filferro.

Demostració. Sigui  $f(x, y) = y$  i la corba  $r = 1 + \cos \theta$ . Prenem les coordenades polars  $x = r \cos \theta$  i  $y = r \sin \theta$ . Substituint l'expressió de  $r$ , obtenim que  $x = (1 + \cos \theta) \cos \theta$  i  $y = (1 + \cos \theta) \sin \theta$ . Per tant:

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{\pi} f(\gamma(\theta)) \|\gamma'(\theta)\| d\theta$$

Volem trobar el vector  $\gamma'(\theta) = (x'(\theta), y'(\theta))$ , així que calculem cada terme per separat.

$$\gamma'(\theta) = (-\sin \theta - 2 \sin \theta \cos \theta, \cos \theta - \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \iff \gamma'(\theta) = (-\sin \theta - \sin(2\theta), \cos \theta - \cos(2\theta)).$$

Aquest resultat, si ens convingués, el podem posar en termes de l'angle doble, com hem fet a la segona banda de l'equivalència. Ara hem de calcular  $\|\gamma'(\theta)\|^2$ .

$$\begin{aligned} \|\gamma'(\theta)\|^2 &= (\sin \theta + \sin(2\theta))^2 + (\cos \theta - \cos(2\theta))^2 \\ &= \sin^2 \theta + \sin^2(2\theta) + 2 \sin \theta \sin(2\theta) + \cos^2 \theta + \cos^2(2\theta) - 2 \cos \theta \cos(2\theta) \\ &\neq 2 - 2 \cos^3(\theta). \quad (\text{revisar la observació 3.6.6}). \end{aligned}$$

A classe hem vist que el resultat  $\|\gamma'(\theta)\|$  era, també,  $\sqrt{2 + 6 \cos \theta \sin^2 \theta - 2 \cos^3 \theta}$ . Dit això, ja podem calcular rutinàriament el valor de la integral.

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{\pi} \sin \theta (1 + \cos \theta) \sqrt{2 + 6 \cos \theta \sin^2 \theta - 2 \cos^3 \theta} d\theta.$$

Pel que fa al segon apartat, tenim l'esfera unitat  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . De l'expressió  $x + y + z = 0$  traïem  $z = -(x + y)$ , de manera que obtenim:

$$\left. \begin{aligned} (x + y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \\ (x - y)^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \end{aligned} \right\} x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 1 \iff 2x^2 + 2y^2 + 2xy = 1 \quad (3.6.1)$$

D'aquí volem obtenir certs  $A, B$  tals que (3.6.1) sigui combinació lineal de  $(x + y)^2$  i  $(x - y)^2$  (i.e.  $2(x^2 + y^2) + 2xy = A(x + y)^2 + B(x - y)^2$ ).

$$A(x + y)^2 + B(x - y)^2 = Ax^2 + Ay^2 + 2Axy + Bx^2 + By^2 - 2Bxy = (A + B)(x^2 + y^2) + (2A - 2B)xy$$

Aleshores,  $A + B = 2$  i  $2A - 2B = 2$ , de manera que  $A = \frac{3}{2}$  i  $B = \frac{1}{2}$ . Per tant, l'equació de la corba queda així:  $\frac{3}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2 = 1$ . Prenem  $X^2 = \frac{3}{2}(x+y)^2$  i  $Y^2 = \frac{1}{2}(x-y)^2$ , i fem la parametrització de la corba:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{3}{2}}(x+y) &= r \cos \theta = \cos \theta \\ \sqrt{\frac{1}{2}}(x-y) &= r \sin \theta = \sin \theta \end{aligned} \right\} &\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta \\ x-y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta \\ 2y = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta - \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \end{aligned}$$

De manera que  $x = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta$  i  $y = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta$ , tal que  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

$$\gamma(\theta) = \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta, \frac{1}{\sqrt{6}} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta, -\frac{2}{\sqrt{6}} \cos \theta \right). \quad \blacksquare$$

**Observació 3.6.6. Els càlculs del primer apartat estan malament.** Ve del fet que realment tenim  $\gamma'(\theta) = (-\sin \theta - \sin(2\theta), \cos \theta + \cos(2\theta))$ . Acabem obtenint  $\|\gamma'(\theta)\|^2 = 2 + 2\cos^3 \theta$ , de manera que cal calcular la integral de  $\sin \theta(1 + \cos \theta)\sqrt{2 - 2\cos^3 \theta}$  sobre la corba.

### Exercici 3.6.7.

1. Calculeu el treball realitzat pel camp  $F(x, y) = (x^2, -xy)$  al moure una partícula al llarg del quart de cercle  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y \geq 0$ .
2. Sigui  $\gamma$  una corba parametritzada amb inici al punt  $(-1, 0)$  i final al punt  $(5, 1)$ . Demostreu que la integral de línia següent:

$$\int_{\gamma} 2x \sin y \, dx + (x^2 \cos y - 3y^2) \, dy$$

és independent de la trajectòria de  $\gamma$  i avalueu la integral.

Demostració. Donades la funció i la circumferència, tenim:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \, dr &= \int_a^b F(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \int_a^b (\vec{F}(\gamma(t)) \vec{T}) \|\gamma(t)\| \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(\cos^2 \theta, -\cos \theta \sin \theta)(-\sin \theta, \cos \theta)\} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin \theta \cos^2 \theta - \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2 \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta = \left[ -\frac{2}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Si  $F$  és conservatiu (existeix  $f$  tal que  $F = \nabla f$ ), el teorema fonamental de les integrals en línia assegura que:

$$\int_{\gamma} F \, dr = \int_{\gamma} \nabla f \, dr = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Mirem si  $(x^2, -xy) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$  per a alguna  $f$ . Utilitzant la definició arribem a què el camp no és conservatiu. Pel que fa al segon apartat, definim  $P(x, y) = 2x \sin y$  i  $Q(x, y) = x^2 \cos y - 3y^2$ . El camp  $F(x, y)$  queda definit per  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  i

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\gamma} F dr.$$

Per veure que  $F$  és conservatiu, mirem primer si  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . En efecte,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \cos y$ . Com no podem arribar a cap conclusió en quant al potencial (el lema de Poincaré ens n'assegura l'existència, però no el mètode per obtenir-lo), intentem veure si existeix  $f$  amb  $\nabla f = F$  (un altre cop, per definició):

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y \xrightarrow{\text{integrem}} f(x, y) = x^2 \sin y + C(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y - 3y^2 \longrightarrow x^2 \cos y + C'(y) = x^2 \cos y - 3y^2 \end{cases}$$

Obtenim que  $C'(y) = -3y^2$  i, per tant,  $C(y) = -y^3 + C$ . En conseqüència,  $F$  és conservatiu a  $\mathbb{R}^2$ . En particular,  $\int_{\gamma} F dr$  només depèn dels punts inicial a final.  $f(x, y) = x^2 \sin y - y^3 + C$  són els potencials del camp. El resultat de la integral es pot calcular amb  $f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ . ■

**Observació 3.6.8.** Podem saber si un camp és conservatiu mirant solament el camp usant el lema de Poincaré, 3.4.10. Usant això, l'exercici anterior queda  $F = (P, Q) = (x^2, -xy)$ . Si  $F$  és conservatiu,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , però  $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$  i  $\frac{\partial Q}{\partial x} = -y$ , de manera que  $F$  no és conservatiu.

**Exercici 3.6.9.** Sigui  $C$  la corba formada pel tros de paràbola  $y = x^2$  que uneix els punts  $(0, 0)$  i  $(1, 1)$ , seguit del tros de paràbola  $x = y^2$  que torna de  $(1, 1)$  a  $(0, 0)$ . Calculeu  $\int_C F dr$ , essent:

$$F(x, y) = (xy^2 + e^{x^3}, \cos(y^2) + 2x^2y).$$

Demostració. Parametritzant la corba  $C = C_1 + C_2$ :

1.  $C_1 : y = x^2$ . Prenem  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $x \mapsto \gamma(x) = (x, x^2)$ .

$$\begin{aligned} \int_{C_1} F dr &= \int_0^1 (F(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x)) dx = \int_0^1 (xx^4 + e^{x^3}, 2x^2x^2 + \cos x^4)(1, 2x) dx \\ &= \int_0^1 (x^5 + e^{x^3} + 2x \cos(x^4) + 4x^5) dx. \end{aligned}$$

2.  $C_2 : x = y^2$ . Prenem  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $y \mapsto \gamma(y) = (y^2, y)$ .

$$\begin{aligned} \int_{C_2} F dr &= - \int_0^1 (F(\gamma(y)) \cdot \gamma'(y)) dy = - \int_0^1 (y^4 + e^{y^6}, 2y^5 + \cos y^2)(2y, 1) dy = \\ &= - \int_0^1 (2y^5 + 2ye^{y^6} + 2x \cos(y^2) + 2y^5) dy. \end{aligned}$$

Aquestes integrals són bastant infernals, així que recordem una altra alternativa: aplicar el teorema de Green. Clarament  $F(x, y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ , i hem de veure que  $F$  és conservatiu. Com  $\mathbb{R}^2$  és un domini estrellat,  $F$  és conservatiu si, i només si, les derivades creuades coincideixen:  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . Si les fem, veiem que  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy$  i  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy$  i  $F$  no és conservatiu.

El nostre domini  $D$  és  $\{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x^2 < y < \sqrt{x}\}$  i, si  $D$  fos regular (que ho és),  $\partial^+ D = C$ . Pel teorema de Green sabrem que, com  $F$  és no conservatiu, la integral resultant no és zero, però la podem calcular:

$$\int_{\partial^+ D} F dr = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 2xy dx dy \implies 2 \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy dx dy.$$

El resultat d'aquesta integral és  $\frac{1}{6}$ . ■

**Exercici 3.6.10.** *Segui el camp  $F(x, y, z) = (2xy^3z^4, 3x^2y^2z^4, 4x^2y^3z^3)$  a  $\mathbb{R}^3$ . Calculeu  $\int_{\gamma} F dr$ , essent  $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .*

*Demostració.* La primera opció és aplicar la definició,  $\int_{\gamma} F dr = \int_0^{2\pi} (F(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)) d\theta$ .

$$\int_0^{2\pi} (F(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} (2 \cos \theta \sin^3 \theta \cdot \theta^4, 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cdot \theta^3, 4 \cos^2 \theta \sin^3 \theta \cdot \theta^3)(-\sin \theta, \cos \theta, 1) d\theta.$$

Aquesta integral és, un altre cop, infernal, i no la calcularem. La segona opció és bastant similar a l'exercici anterior, i passa per mirar si el camp és conservatiu. Hem de comprovar que les derivades creuades coincideixen:

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} = 12x^2y^2z^3, \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} = 8xy^3z^3, \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 6xy^2z^4.$$

Com  $F$  és conservatiu,  $\int_{\gamma} F dr = f(1, 0, 2\pi) - f(1, 0, 0) = 0$  on  $f$  és un potencial del camp.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy^3z^4 \implies f(x, y, z) = x^2y^3z^4 + C(y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x^2y^2z^4 \implies 3x^2y^2z^4 + \frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = 3x^2y^2z^4 \implies \frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = 0, C(y, z) = C(z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 4x^2y^3z^3 \implies \frac{\partial f}{\partial z} = 4x^2y^3z^3 + C'(z) = 4x^2y^3z^3 \implies C'(z) = 0, C(z) = C. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Exercici 3.6.11.** *Calculeu la circulació del camp  $F(x, y) = (e^x \cos y + xy^2, -e^x \sin y + x^2y)$  al llarg de la corba tancada  $\gamma$  de  $\mathbb{R}^2$  formada per l'arc de lemniscata  $r = \sqrt{\cos \theta}$ ,  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  i pel segment que uneix l'origen amb el punt  $(1, 0)$ .*

*Demostració.* Rutinàriament, tenim dos opcions. La primera, parametritzem dos trossos,  $\gamma_1(\theta) = (\sqrt{\cos \theta} \cos \theta, \sqrt{\cos \theta} \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Aleshores:

$$\int_{\gamma_1} F dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sqrt{\cos \theta} \cos \theta} \cos(\sqrt{\cos \theta} \sin \theta) + \sqrt{\cos \theta} \cos \theta \dots$$

Torna a sortir un monstre que no calcularem. La segona opció era, i és, mirar si és un camp conservatiu. En efecte:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -e^x \sin y + 2xy + 3x^2, \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y + 2xy.$$

El domini  $D$  és  $\{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], r < \sqrt{\cos \theta}\}$ . Per tant, ajuntant-ho tot:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F dr &= \int_{\partial^+ D} F dr = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 3x^2 dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{\cos \theta}} 3r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \left( \int_0^{\sqrt{\cos \theta}} r^3 dr \right) d\theta = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta) \frac{1}{4} \cos^2 \theta d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta. \end{aligned}$$

La resolució d'aquesta integral la vam veure a *Introducció al Càlcul Integral*:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta &= \frac{1}{4} (1 + \cos(2\theta))^2 d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2}(1 + \cos(4\theta))) d\theta. \end{aligned}$$

A partir d'aquí, obtenim el resultat. ■

**Exercici 3.6.12.** Sigui  $D$  un domini regular en  $\mathbb{R}^2$  que té àrea igual a 2. Calculeu la integral de línia següent:

$$\int_{\partial^+ D} (x - y) dx + (x + y^1) dy.$$

*Demostració.* En altres paraules, el que tenim és el camp  $F(x, y) = (x - y, x + y^3) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Volem aplicar el teorema de Green, on complim que  $D$  sigui regular i  $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ ,  $\overline{D} \subset \mathcal{U}$ .

$$\iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \iint_D (1 - (-1)) dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2|D| = 4. \quad \blacksquare$$

**Exercici 3.6.13.** Calculeu la circulació del camp  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2} \right)$  al llarg de l'el·lipse  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 4$ , recorreguda en sentit antihorari.

*Demostració.*

- Primera opció.** Parametritzant  $\gamma$ , obtenim que  $\frac{x}{2} = r \cos \theta$  i  $y = r \sin \theta$  de manera que, a  $(\frac{x}{2})^2 + y^2 = 4$ ,  $r = 2$  i ens queda  $x(\theta) = 4 \cos \theta$  i  $y(\theta) = 2 \sin \theta$  o, en altres paraules,  $\gamma(\theta) = (4 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ . La integral ens queda de la manera següent:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F dr &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{-2 \sin \theta}{1 + 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta}, \frac{1 + 4 \cos \theta}{1 + 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta} \right) (-4 \sin \theta, 2 \cos \theta) d\theta. \end{aligned}$$

I resoldre aquesta integral monstruosa.

- Segona opció.** Sigui  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 < 4\}$ , domini regular amb  $\partial^+ D = \gamma$ . Aleshores,

$$F \in \mathcal{C}^1, \int_{\partial^+} F dr = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = 0 \iff F \text{ és conservatiu,}$$

però  $F \notin \mathcal{C}^1$ , de fet no és ni  $\mathcal{C}$  en aquest domini. Sigui  $D_\varepsilon = D \setminus \overline{D((-1, 0), \varepsilon)}$ , tal que  $(x + 1)^2 + y^2 = \varepsilon^2$  i la parametrització queda  $x + 1 = \varepsilon \cos \theta$  i  $y = \varepsilon \sin \theta$ , amb  $\theta \in [0, 2\pi]$ . A més,  $\partial_+ D_\varepsilon = \gamma \setminus C_\varepsilon$  (hem d'agafar la corba en sentit invers al natural quan fem la parametrització habitual). Ara, a més, sí podem afirmar que  $F \in \mathcal{C}^1(D_\varepsilon)$ .

$$\begin{aligned} \int_{\partial_+ D_\varepsilon} F dr &= \int_\gamma F dr - \int_{C_\varepsilon} F dr = \iint_{D_\varepsilon} (Q_x - P_y) dx dy = 0 \\ &= \int_\gamma F dr = \int_{C_\varepsilon} F dr = \int_0^{2\pi} F(\gamma(\theta)) \gamma'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{-\varepsilon \sin \theta}{\varepsilon^2}, \frac{\varepsilon \cos \theta}{\varepsilon^2} \right) (-\varepsilon \sin \theta, \varepsilon \cos \theta) d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

En general, per a un nombre  $N$  de singularitats,  $D_\varepsilon = D \setminus \bigcup_{i=1}^N \overline{D(p_i, \varepsilon_i)}$ , amb  $F \in \mathcal{C}^1(D_\varepsilon)$ :

$$\int_\gamma F dr - \sum_{i=1}^N \int_{C_i^\varepsilon} F dr = \iint_{D_\varepsilon} (Q_x - P_y) dx dy. \quad \blacksquare$$



## Integrals de superfícies

L'objectiu a partir d'ara és presentar dos teoremes anàlegs al teorema de Green, però per a superfícies a  $\mathbb{R}^3$ . Un, el teorema de la divergència, relaciona una integral a una regió acotada a  $\mathbb{R}^3$  amb una altra integral a la superfície formada per la vora d'aquesta regió. El segon resultat, el teorema d'Stokes, relaciona una integral a una superfície dins  $\mathbb{R}^3$  amb una altra integral a la vora d'aquesta superfície, que és una corba. A ambdós casos necessitem saber integrar sobre superfícies.

### 4.1

## SUPERFÍCIES PARAMETRITZADES

**Definició 4.1.1** (Superfície elemental). Sigui  $\mathcal{U}$  un obert connex a  $\mathbb{R}^2$  i sigui:

$$\begin{aligned}\phi: \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\end{aligned}$$

una aplicació injectiva, de classe  $\mathcal{C}^1$  i amb rang  $D\phi(u, v) = 2$  per a tot  $(u, v) \in \mathcal{U}$ . Diem *superfície elemental* a la imatge  $S_\phi = \phi(\overline{D})$  d'un domini regular  $D$  amb  $\overline{D} \subset \mathcal{U}$ .

**Observació 4.1.2.**

- La injectivitat de  $\phi$  es demana perquè no hi hagi punts «dobles» a la superfície, de la mateixa manera que demanàvem a les corbes que fossin simples.
- La condició sobre el rang de  $D\phi$  assegura que el conjunt imatge té dimensió 2, que no degenera enlloc. Veurem més endavant que els vectors columna de  $D\phi(u, v)$  generen el pla tangent a la superfície al punt  $\phi(u, v)$ .

**Exemple 4.1.3** (Gràfiques de funcions). Sigui  $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$  una funció de classe  $\mathcal{C}^1$ . Això induïx una parametrització:

$$\begin{aligned}\phi: \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y) = (x, y, f(x, y))\end{aligned}$$

que és trivialment injectiva i de classe  $\mathcal{C}^1$ . D'altra banda,

$$D\phi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}$$

i, per tant, el rang és 2. Observem que els vectors  $T_x = (1, 0, f_x)$  i  $T_y = (0, 1, f_y)$  són linealment independents.

Per tant, la imatge  $\phi(\overline{D})$  de qualsevol  $D \subset \mathcal{U}$  regular amb  $\overline{D} \subset \mathcal{U}$  serà una superfície elemental.

En efecte, sigui  $f(x, y) = x^2 + y^2$  de classe  $\mathcal{C}^1$  a tot  $\mathbb{R}^2$ . Tenim la parametrització de la seva gràfica  $z = x^2 + y^2$ :

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), \end{aligned}$$

amb  $\phi$  injectiva, de classe  $\mathcal{C}^1$  i  $D\phi(x, y)$  de rang 2 a tot  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Aleshores, la imatge de qualsevol  $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$ , amb  $D$  regular, serà una superfície elemental.

Per exemple, si  $D_R$  és el disc de centre  $(0, 0)$  i radi  $R$ , tenim el *paraboloide*:

$$\phi(\overline{D_R}) = \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Sigui ara  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , que és de classe  $\mathcal{C}^1$  a  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Tenim, ara:

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \phi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned}$$

injectiva, de classe  $\mathcal{C}^1$  i amb

$$D\phi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}$$

Així doncs, la imatge de qualsevol  $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  amb  $D$  regular és una superfície elemental.

Per exemple, si prenem  $D_{R,\varepsilon} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$  tenim que el tros de con:

$$\phi(\overline{D_{R,\varepsilon}}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2} \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

és una superfície elemental. Observem que tot el con  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  amb  $x^2 + y^2 \leq R^2$ , no és una superfície elemental, ja que al punt de paràmetres  $(x, y) = (0, 0)$  no es compleixen les condicions de la definició.

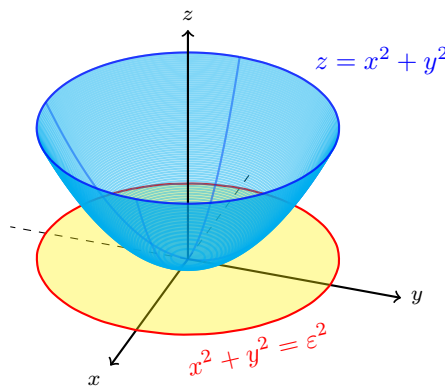


Figura 4.1: Paraboloide,  $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$  sobre  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

A efectes d'integració això no serà cap problema, ja que la integral no veu els conjunts de mesura zero; en particular, els punts. Podrem integrar a la superfície amb  $0 < x^2 + y^2 < R^2$ , fent límit de les integrals a les superfícies elementals amb paràmetres  $(x, y)$  amb  $\varepsilon^2 < x^2 + y^2 < R^2$ , i aquesta integral té el mateix valor que la integral a tot  $x^2 + y^2 < R^2$ .

**Exemple 4.1.4** (Tros de cilindre). Sigui el cilindre (infinit)  $x^2 + y^2 = 1$  a  $\mathbb{R}^3$  i sigui  $\mathcal{U} = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  i la parametrització (en coordenades polars):

$$\begin{aligned}\phi: \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) &\longmapsto \phi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)\end{aligned}$$

que és de classe  $\mathcal{C}^1$  i injectiva. També,

$$D\phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tal que } \operatorname{rg}(D\phi) = 2.$$

Observem que  $\phi(\mathcal{U})$  no és tot el cilindre: en queda fora la recta  $L = \{(1, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ , que correspon a l'angle  $\theta = 0$ . Com aquest conjunt té mesura zero, això no serà cap problema.

Amb la definició que hem donat,  $\phi(\mathcal{U})$  no és una superfície, ho és qualsevol imatge  $\phi(\overline{D})$  amb  $D \subset \mathcal{U} = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  regular. Per exemple, si  $\overline{D} = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \times [0, M]$ , tenim  $\phi(\overline{D})$  tros del cilindre  $x^2 + y^2 = 1$  amb angle  $\theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$  i  $z \in [0, M]$ .

Observem que aquesta superfície està limitada per quatre corbes:

1. els segments verticals  $(\cos \varepsilon, \sin \varepsilon, z)$  i  $(\cos(2\pi - \varepsilon), \sin(2\pi - \varepsilon), z)$ , amb  $z \in [0, M]$ ;
2. els trossos de circumferència  $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$  i  $(\cos \theta, \sin \theta, M)$  per a  $\theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ .

**Exemple 4.1.5** (Tros d'esfera). Considerem ara una esfera de centre  $(0, 0, 0)$  i radi  $R$  a  $\mathbb{R}^3$ , que ve donada per l'equació  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Mirem de donar-ne una parametrització amb coordenades esfèriques. Sigui  $\mathcal{U} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$  i sigui:

$$\begin{aligned}\phi: \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (0, \theta) &\longmapsto \phi(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta)\end{aligned}$$

que és de classe  $\mathcal{C}^1$  i bijectiva. Aquí:

$$D\phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \cos \varphi & -R \cos \theta \sin \varphi \\ -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

té rang 2, ja que els vectors columna són linealment independents. Observem que  $\phi(\mathcal{U})$  és tota l'esfera llevat del meridià a  $\varphi = 0$  (amb  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ); és a dir, llevat  $\{(x, 0, z) \mid x^2 + z^2 = R^2, x \geq 0\}$ . Per a tenir una superfície elemental hem de prendre  $\phi(\overline{D})$ , amb  $D \subset \mathcal{U}$  regular. Per exemple, si prenem  $D = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \times (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ , tenim una superfície elemental que correspon a un casquet d'esfera amb eix de simetria  $y$ .

Per acabar, observem que una mateixa superfície pot tenir diferents parametritzacions.

Per exemple, el paraboloides que hem parametritzat com a gràfica de la funció, el podem parametritzar també amb coordenades cilíndriques: si  $\mathcal{U} = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ , considerem  $x^2 + y^2 = z$ :

$$\begin{aligned}\phi: (0, \infty) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) &\longmapsto \phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2)\end{aligned}$$

Aquí,  $\phi \in \mathcal{C}^1$  injectiva i  $\operatorname{rg}(D\phi) = 2$  sempre. Una superfície elemental serà  $\phi(\overline{D})$ , amb  $D \subset (0, \infty) \times (0, 2\pi)$  regular. Per exemple,  $\phi(\overline{D_{R,\varepsilon}})$  on  $\overline{D_{R,\varepsilon}} = [\varepsilon, M] \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ .

## ESPAI TANGENT I ÀREA D'UNA SUPERFÍCIE

## 4.2.1

## ESPAI TANGENT

Sigui  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  obert connex a  $\mathbb{R}^2$  i sigui  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , injectiva i amb  $\text{rg}(D\phi(u, v)) = 2$  a tot punt  $(u, v)$  d' $\mathcal{U}$ . Sigui  $D \subset \mathcal{U}$  regular i sigui  $\phi(\overline{D}) = S$  superfície elemental.

Aquestes condicions impliquen que per a qualsevol  $p \in S$  el conjunt de vectors tangents a  $S$  a  $p$  és un subespai vectorial de dimensió 2, l'espai generat pels vectors:

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \phi_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \frac{\partial \phi}{\partial v} = \phi_v = (x_v, y_v, z_v).$$

Aquestes són precisament els vectors columna de  $D\phi(u, v)$  que són linealment independents:

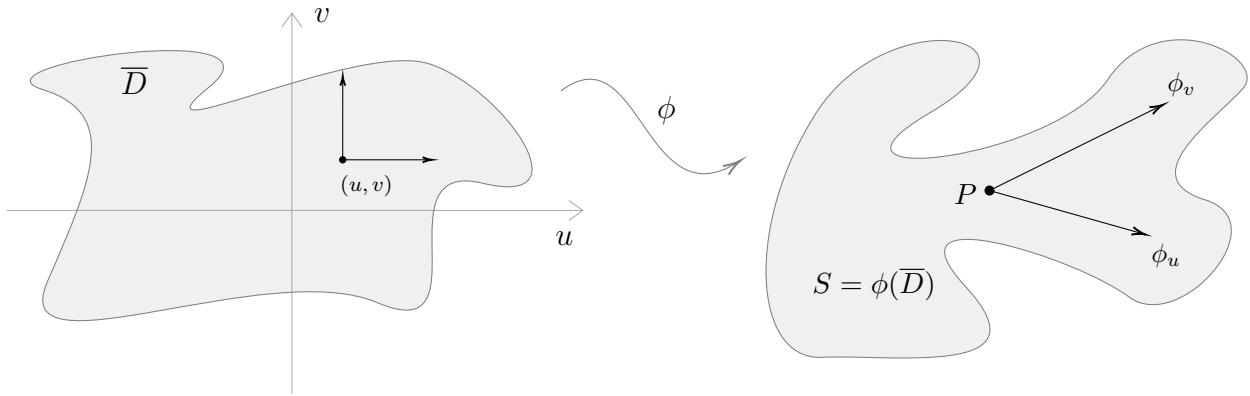


Figura 4.2: Representació del nostre diagrama.

Com ja dèiem, els vectors tangents a la superfície al punt  $p$  són tots els punts tangents a alguna corba de classe  $\mathcal{C}^1$  a  $S$  que passi per  $p$  (és a dir, les corbes imatge per  $\phi$  d'una corba de classe  $\mathcal{C}^1$  a  $D$  que passi per  $(u_0, v_0)$  on  $\phi(u_0, v_0) = p$ ). Aquest espai està generat pels vectors tangents a les corbes imatge dels eixos coordenats del punt  $(u_0, v_0)$  a  $D$ ; és a dir, a les corbes  $\phi(u, v_0)$  i  $\phi(u_0, v)$ .

Una manera de provar aquest fet és considerar  $p = \phi(u_0, v_0)$  i les corbes (imatge dels eixos)  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definides per

$$\gamma_1(t) = \phi(u_0 + t, v_0) \text{ i } \gamma_2(t) = \phi(u_0, v_0 + t), \text{ respectivament.} \quad D\phi_{(u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} \phi_u^1 & \phi_v^1 \\ \phi_u^2 & \phi_v^2 \\ \phi_u^3 & \phi_v^3 \end{pmatrix}$$

Tenim  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \phi(u_0, v_0)$ . Els vectors  $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$  són tangents a  $S$  al punt  $p$  i són linealment independents perquè  $D\phi(u_0, v_0)$  té rang 2.

$$\gamma_1'(0) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_0, v_0) = \phi_u(u_0, v_0)$$

$$\gamma_2'(0) = \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_0, v_0) = \phi_v(u_0, v_0)$$

**Definició 4.2.1 (Espai tangent).** A l'espai tangent a una superfície  $S$  al punt  $p$  la denotem  $T_p(s)$ , i considerem que són tots els vectors tangents a alguna corba de classe  $\mathcal{C}^1$  a  $S$  i que passa per  $p$ . Pel que acabem de veure, si  $p = \phi(u_0, v_0)$  llavors:

$$T_p(s) = \langle \phi_u(u_0, v_0), \phi_v(u_0, v_0) \rangle.$$

**Definició 4.2.2 (Espai normal).** Un cop tenim l'espai tangent podem considerar l'espai normal; és a dir, la recta que passa per  $p$  i és perpendicular al pla tangent. L'espai normal es denota per  $N_p(S)$ .

**Definició 4.2.3 (Vector normal).** Un vector normal ve donat de manera natural per  $N_\phi = \phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0)$ . Sovint es considera el vector normal unitari que té norma 1:

$$n_{\phi(p)} = \frac{\phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0)}{\|\phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0)\|}.$$

**Observació 4.2.4.** Observem que l'orientació del normal depèn de l'ordre amb què agafem els paràmetres  $u, v$ ; si permutem l'ordre, el vector canvia de signe.

**Definició 4.2.5 (Camp normal).** Diem camp normal a  $S$  al camp vectorial definit a  $S$  per:

$$\begin{aligned} F : S &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\longmapsto F(p) = n_\phi(p) \end{aligned}$$

és a dir, al camp donat pel normal unitari.

**Exemple 4.2.6 (Gràfiques de funcions, continuació).** Sigui, com considerat anteriorment,  $\mathcal{U}$  obert a  $\mathbb{R}^2$ ,  $D \subset \mathcal{U}$  regular amb  $\overline{D} \subset \mathcal{U}$  i sigui  $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . La superfície  $S = \phi(\overline{D})$  donada per la parametrització  $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$  amb  $(x, y) \in \overline{D}$ , té vectors tangents:

$$\phi_x = (1, 0, f_x) \text{ i } \phi_y = (0, 1, f_y) \implies T_p(S) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Amb això, el vector normal és:

$$N_\phi = \phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1).$$

Per tant, el normal unitari és:

$$n_\phi = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\|(-f_x, -f_y, 1)\|}.$$

Així, per exemple, al cas del paraboloide  $z = x^2 + y^2$  el normal és  $N_\phi = (-2x, -2y, 1)$  que té la direcció cap a l'interior del paraboloide.

**Exemple 4.2.7** (Tros de cilindre, continuació). Prenem, com abans, la parametrització ( $x^2 + y^2 = 1$ ):

$$\begin{aligned} \phi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) &\longmapsto \phi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z) \end{aligned}$$

L'espai tangent a un punt  $(x_0, y_0, z_0) = \phi(\theta, z_0)$  està generat pels vectors:  $\phi_{\theta_0} = (-\sin \theta_0, \cos \theta_0, 0)$  i  $\phi_{z_0} = (0, 0, 1)$ . El vector normal és, doncs:

$$N_\phi = \phi_{\theta_0} \times \phi_{z_0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos \theta_0, \sin \theta_0, 0).$$

- Observem que aquest vector ja és unitari ( $N_\phi = n_\phi$ ), horitzontal ( $z = 0$ ) i té la mateixa direcció que  $(x, y, 0)$ ; és a dir, dona una normal *exterior* al cilindre.
- Observem que un dels vectors tangents,  $\phi_{z_0}$ , té la direcció vertical i l'altre,  $\phi_\theta$ , és tangent a la circumferència  $\{(x, y, z_0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ .

**Exemple 4.2.8** (Tros d'esfera, continuació). Considerem ara:

$$\begin{aligned} \phi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) &\longmapsto \phi(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta) \end{aligned}$$

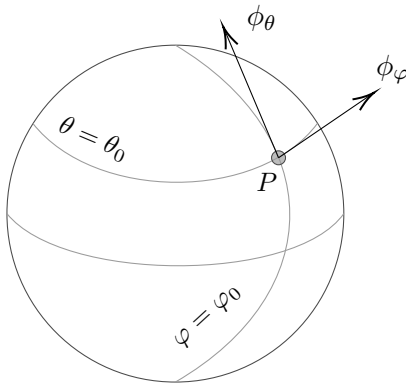
Els vectors que generen l'espai tangent són:

$$\begin{aligned} \phi_\theta &= (-R \sin \theta \cos \varphi, -R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta) \\ \phi_\varphi &= (-R \cos \theta \sin \varphi, R \cos \theta \cos \varphi, 0) \end{aligned}$$

Observem que  $\phi_\theta$  és tangent al meridià d'angle  $\varphi$ , mentre que  $\phi_\varphi$  és tangent al paral·lel de latitud  $\theta$ . Aleshores, el vector normal és:

$$N_\phi = \phi_\theta \times \phi_\varphi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R \sin \theta \cos \varphi & -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \\ -R \cos \theta \sin \varphi & R \cos \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = -R \cos \theta (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta).$$

Observem que aquest vector normal és el vector posició reescalat per un factor  $-R \cos \theta$ , que és sempre negatiu i es va fent petit a mesura que ens acostem als pols (latituds  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ): en particular, aquest normal apunta cap a l'interior de l'esfera:



El producte  $\phi_\theta \times \phi_\varphi$  dona un normal interior.

$$n_\phi = -(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

## 4.2.2 ÀREA D'UNA SUPERFÍCIE ELEMENTAL

Sigui  $S = \phi(\overline{D})$  una superfície elemental amb les mateixes notacions que fins ara.

**Definició 4.2.9** (Àrea d'una superfície). Definim l'àrea de  $S$  com:

$$\text{area}(S) = \iint \|\phi_u \times \phi_v\| \, du \, dv.$$

L'element d'àrea  $\|\phi_u \times \phi_v\| \, du \, dv$  es pot veure com l'àrea de la imatge per  $\phi$  de l'element d'àrea  $du \, dv$  a  $D$ . L'àrea del paral·lelogram és la norma del producte exterior  $\phi_u \times \phi_v$ , és a dir, està determinat per  $\phi_u$  i  $\phi_v$  és precisament  $\|\phi_u \times \phi_v\|$ .

**Observació 4.2.10. L'àrea no depèn de la parametrització triada.** És a dir, si tenim una altra parametrització  $\psi : \mathcal{U}' \rightarrow \mathbb{R}^3$  i un altre domini regular,  $D' \subset \mathcal{U}'$  tals que  $S = \psi(\overline{D'})$ , llavors el valor de l'àrea no canvia:

$$\iint_D \|\phi_u \times \phi_v\| \, du \, dv = \iint_{D'} \|\psi_s \times \psi_t\| \, ds \, dt.$$

*Demostració.* Anem a veure això tot seguit, amb un argument que, de fet, demostrarà que qualsevol integral de superfície, que veurem més endavant, és independent de la parametrització triada. Sigui, doncs,  $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^2$  obert connex i sigui:

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{U}' &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\longmapsto \psi(s, t) \end{aligned}$$

de classe  $\mathcal{C}^1$ , injectiva i amb  $D\psi(s, t)$  de rang 2 per a tot  $(s, t) \in \mathcal{U}'$ . Sigui  $D' \subset \mathcal{U}'$  regular tal que  $S = \psi(D')$ .

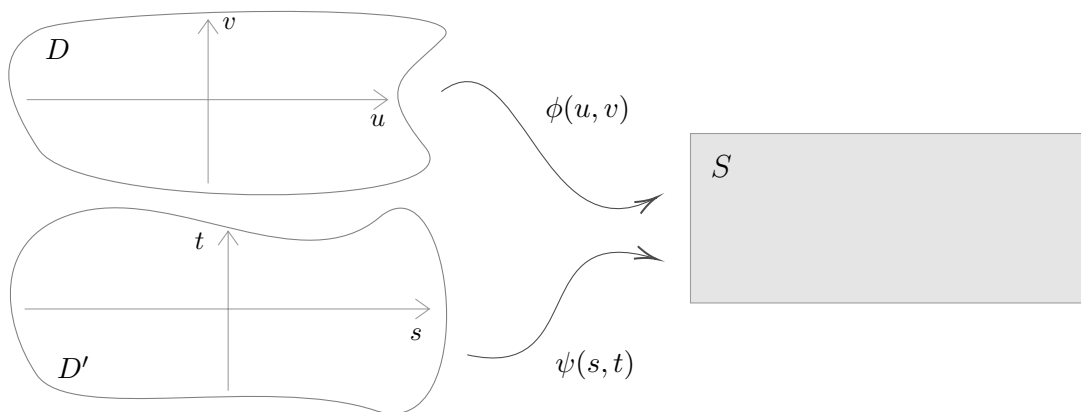


Figura 4.3: Aplicacions  $\phi, \psi$  sobre els dominis  $D, D'$ .

Com que  $\phi$  és bijectiva i de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $D$  a  $\phi(D) = S$  i  $\psi$  també és bijectiva de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $D'$  a  $\psi(D') = S$ , tenim que  $g : \psi^{-1} \circ \phi : D \rightarrow D'$  és un canvi de variable ( $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,

bijectiva i amb inversa de classe  $\mathcal{C}^1$ ). En particular,  $\det Dg(u, v) \neq 0$ ; és a dir,  $\det Dg(u, v)$  té signe constant. Com que  $\phi = \psi \circ g$ , la regla de la cadena dona:

$$D\phi(u, v) = D\psi(g(u, v)) \cdot Dg(u, v), \quad \forall (u, v) \in D.$$

Expressem aquesta igualtat explícitament; si diem  $\psi(s, t) = (\tilde{x}(s, t), \tilde{y}(s, t), \tilde{z}(s, t))$ , això és:

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_s \circ g & \tilde{x}_t \circ g \\ \tilde{y}_s \circ g & \tilde{y}_t \circ g \\ \tilde{z}_s \circ g & \tilde{z}_t \circ g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_u & s_v \\ t_u & t_v \end{pmatrix}_{(u,v)}.$$

Recordem que  $(s, t) = g(u, v) = (s(u, v), t(u, v))$ . Aquesta igualtat permet escriure les components del vector  $\phi_u \times \phi_v$ :

$$\phi_u \times \phi_v = \left( \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right) = (\psi_s \times \psi_t) \det Dg.$$

Per tant, tenim que  $\|\phi_u \times \phi_v\|(u, v) = \|(\psi_s \times \psi_t)(g(u, v))\| \cdot |\det Dg(u, v)|$ . Pel teorema del canvi de variable, queda directament:

$$\iint_D \|\phi_u \times \phi_v\| du dv = \iint_D \|(\psi_s \times \psi_t)(g(u, v))\| \cdot |\det Dg(u, v)| du dv = \iint_{D'} \|(\psi_s \times \psi_t)(s, t)\| ds dt,$$

tal com volíem. ■

**Observació 4.2.11.** Essent  $\phi_u \times \phi_v = (\psi_s \times \psi_t) \det Dg$ , veiem que si  $\det Dg(u, v) > 0$  es preserva el signe del vector normal, mentre que si  $\det Dg(u, v) < 0$ , aleshores canvia l'orientació. **Cada superfície té, doncs, dues possibles orientacions, determinades pel vector normal** (si tenim una parametrització  $\phi$  tota altra  $\psi$  tindrà la mateixa norma que  $\phi$  o la oposada,  $n_{p,\phi} = n_{p,\psi}$ ).

**Exemple 4.2.12** (Gràfiques de funcions, continuació). Teníem  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $D \subset \mathcal{U}$  regular amb  $\overline{D} \subset \mathcal{U}$ , de manera que la gràfica de  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  queda parametritzada per  $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Aleshores:

$$\phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x(x, y) \\ 0 & 1 & f_y(x, y) \end{vmatrix} = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)$$

i, per tant, si  $S = \phi(\overline{D})$  tenim:

$$\text{area}(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2} dx dy.$$

Així, per exemple, l'àrea del tros de paraboloides  $z = x^2 + y^2$  amb  $x^2 + y^2 \leq 1$  és:

$$\begin{aligned} \text{area}(S) &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dx dy \\ &\xrightarrow{\text{coordenades polars}} \text{area}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned} \quad (4.2.1)$$



Recordem que, per a aquest paraboloide, teníem una altra parametrització en coordenades cilíndriques:

$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2), \quad r \leq 1, \theta \in (0, 2\pi).$$

Aleshores:

$$\phi_r \times \phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \theta & \sin \theta & 2r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (-2r^2 \cos \theta, -2r^2 \sin \theta, r) \implies \text{area}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^4 + r^2} \, dr \, d\theta.$$

El resultat d'aquesta integral (de fet, la mateixa integral) és idèntic a (4.2.1).

**Exemple 4.2.13** (Àrea d'una esfera, continuació). Considerem la parametrització en coordenades esfèriques, que ja havíem vist a 4.2.8, de l'esfera de centre  $(0, 0, 0)$  i radi  $R$ :

$$\phi(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta), \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \varphi \in (0, 2\pi).$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} \phi_\theta \times \phi_\varphi &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R \sin \theta \cos \varphi & -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \\ -R \cos \theta & R \cos \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = (R^2 \cos^2 \theta \cos \varphi, R^2 \cos^2 \theta \sin \varphi, -R^2 \sin \theta \cos \varphi) \\ \implies \|\phi_\theta \times \phi_\varphi\|^2 &= R^4 \cos^2 \theta \iff \|\phi_\theta \times \phi_\varphi\| = R^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Amb això, ja tenim totes les dades per a poder calcular l'àrea de l'esfera:

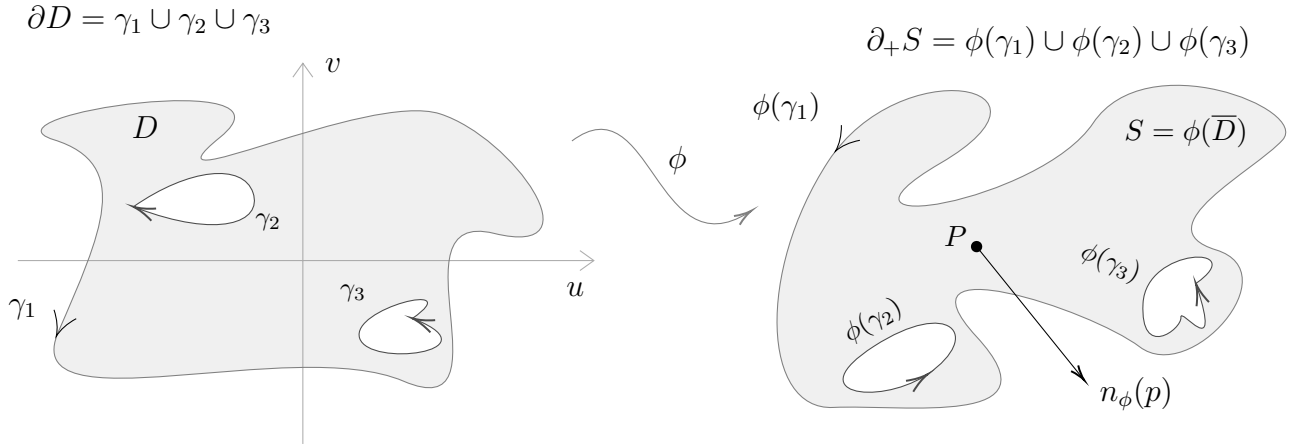
$$\text{area}(S) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos \theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta = 4\pi R^2.$$

### 4.3

## VORA ORIENTADA D'UNA SUPERFÍCIE

Sigui  $S$  una superfície elemental orientada amb el camp normal unitari  $n_\phi = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$ .

**Definició 4.3.1** (Vora de  $S$ ). Donada la parametrització  $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  amb  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  i donat  $D \subset \mathcal{U}$  regular amb  $\overline{D} \subset \mathcal{U}$ , definim la *vora* de  $S$  com  $\partial S = \phi(\partial D)$  la imatge de la vora de  $D$ .

Figura 4.4: Vora de  $S$ .

Si  $\partial D$  és la reunió de les corbes  $\gamma_i$  tal que  $i = 1, \dots, N$  de classe  $\mathcal{C}^1$  a trossos i simples, aleshores  $\partial S = \phi(\gamma_1) \cup \dots \cup \phi(\gamma_n)$ .

**Definició 4.3.2 (Vora orientada).** La *vora orientada*  $\partial_+ S$  és tal que cada corba  $\phi(\gamma_i)$  té l'orientació induïda pel vector normal  $n_\phi$ ; és a dir, si ens posem drets damunt la superfície en la direcció del normal, la corba  $\phi(\gamma_i)$  té l'orientació que fa que, seguint la corba, la superfície quedi a l'esquerra.

**Exemple 4.3.3 (Tronc de con, continuació).** Siguin  $0 < r < R$  i sigui la superfície (gràfica de funció)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}, r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ , amb la parametrització  $\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$  el vector normal és  $N_\phi = (\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1)$  i, per tant, el normal unitari és  $n_\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1)$ . Observem que aquest normal apunta cap a l'interior del con. Per tant, la vora orientada de  $S$  consisteix en:

1. Circumferència  $(x, y, R)$  tal que  $x^2 + y^2 = R^2$  i direcció antihorària.
2. Circumferència  $(x, y, r)$  amb  $x^2 + y^2 = r^2$ , amb orientació horària (contrària a l'anterior).

**Exemple 4.3.4 (Tros de cilindre, continuació).** Havíem considerat la superfície elemental consistent en el tros de cilindre, parametritzat amb coordenades cilíndriques,  $x^2 + y^2 = 1$ :

$$\phi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad \theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], z \in [0, M].$$

El normal, amb aquesta parametrització, és  $n_\phi = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$ , que apunta cap a fora del cilindre. La vora d'aquesta superfície està formada per quatre corbes:

1. Tros de circumferència a alçada 0,  $(\cos \theta, \sin \theta, 0), \theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ , amb l'orientació antihorària natural.
2. El segment vertical  $(\cos(2\pi - \varepsilon), \sin(2\pi - \varepsilon), z), z \in [0, M]$  recorregut de dalt a baix.
3. El tros de circumferència a alçada  $M$ .
4. El segment vertical  $(\cos \varepsilon, \sin \varepsilon, z), z \in [0, M]$  recorregut de dalt a baix.

## INTEGRALS DE SUPERFÍCIE I FLUX DE CAMP

Sigui  $S = \phi(\overline{D})$  superfície elemental, on  $D \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  és una regió regular amb  $\overline{D} \subset \mathcal{U}$  i  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on  $\phi = \phi(u, v)$  és una parametrització. Sigui  $n_\phi$  el camp normal unitari determinat per aquesta parametrització (que té direcció  $\phi_u \times \phi_v$ ).

**Definició 4.4.1** (Integral de  $f$  a  $S$ ). Donada una funció contínua  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  (camp escalar), definim la *integral de  $f$  a  $S$*  com:

$$\int_S f d\sigma = \int_D f(\phi(u, v)) \cdot \|\phi_u \times \phi_v\| du dv;$$

és a dir, com la integral dels valors  $f$  a  $S$  respecte l'element d'àrea  $d\sigma = \|\phi_u \times \phi_v\| du dv$ .

**Observació 4.4.2.** Aquesta definició és anàloga a la definició d'integral d'una funció al llarg d'una corba, canviant l'element de longitud de la corba per l'element d'àrea de la superfície.

**Proposició 4.4.3.** La integral no depèn de la parametrització triada. La prova d'aquest fet és anàloga a la prova que la definició d'àrea d'una superfície no depèn de la parametrització.

*Demostració.* Amb la mateixa notació d'aleshores, suposem que tenim dues parametritzacions  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  i  $\psi : \mathcal{U}' \rightarrow \mathbb{R}^3$  i dos dominis regulars  $D \subset \mathcal{U}$ ,  $D' \subset \mathcal{U}'$  amb  $\phi(\overline{D}) = S = \psi(\overline{D'})$ .

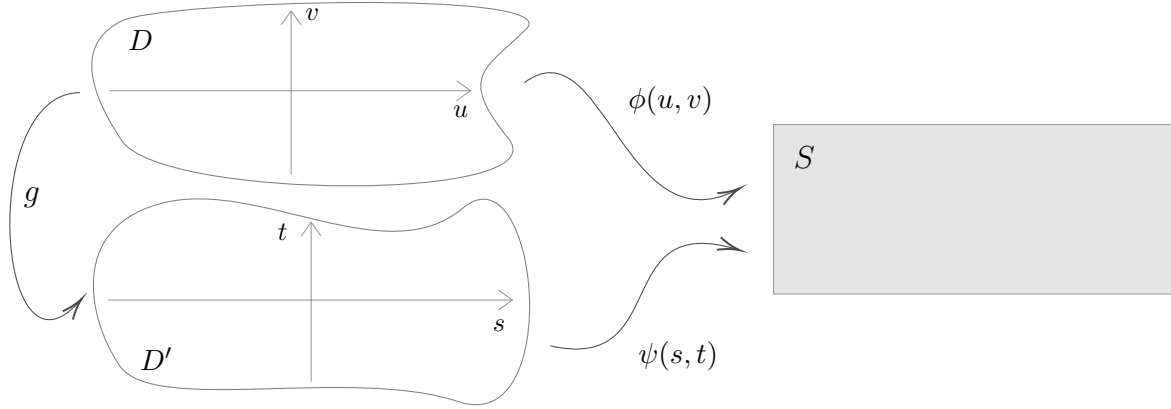


Figura 4.5: La integral no depèn de la parametrització triada.

Aleshores,  $g = \psi^{-1} \circ \phi : D \rightarrow D'$  és un canvi de variable entre  $D$  i  $D'$  i es té:

$$\phi_u(u, v) \times \phi_v(u, v) = (\psi_s(g(u, v)) \times \psi_t(g(u, v))) \det Dg(u, v).$$

Per tant, pel teorema del canvi de variable:

$$\begin{aligned} \int_{D'} f(\psi(s, t)) \|\psi_s \times \psi_t\| ds dt &= \int_D f(\psi(g(u, v))) \|\psi_s(g(u, v)) \times \psi_t(g(u, v))\| \det Dg(u, v) du dv \\ &= \int_D f(\phi(u, v)) \|\phi_u(u, v) \times \phi_v(u, v)\| du dv = \int_S f d\sigma. \end{aligned}$$

**Exemple 4.4.4.** Sigui  $S$  la part del pla  $x + y + z = 2$  amb  $x, y, z \geq 0$ . Calculem  $\int_S (xy + z) d\sigma$ . Mirant la superfície com la gràfica de la funció  $f(x, y) = 2 - x - y$  (és a dir,  $z = 2 - x - y$ ), tenim que l'element d'àrea és donat per  $\|\phi_x \times \phi_y\| = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$ . El domini regular  $D \subset \mathbb{R}^2$  on està parametritzada aquesta superfície és el triangle  $\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 2, x, y \geq 0\}$ . Per tant:

$$\begin{aligned} \int_S (xy + z) d\sigma &= \iint_{\bar{D}} (xy + (2 - x - y))\sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \int_0^2 \int_0^{2-x} (xy + 2 - x - y) dy dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^2 \left( \frac{1}{2}x(2-x)^2 + \frac{1}{2}(2-x)^2 \right) dx = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

**Exemple 4.4.5.** Calculem  $\int_S y d\sigma$ , on  $S$  és el tros de cilindre  $x^2 + y^2 = 3$ , amb  $0 \leq z \leq 6$ . Parametritzem amb coordenades cilíndriques:

$$\begin{aligned} \phi : (0, 2\pi) \times (0, 6) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) &\longmapsto (\sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta, z) \end{aligned}$$

Amb això:

$$\|\phi_\theta \times \phi_z\| = \left\| \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sqrt{3} \sin \theta & \sqrt{3} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \|(\sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta, 0)\| = \sqrt{3}.$$

Per tant:

$$\int_S y d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \sqrt{3} \sin \theta \sqrt{3} dz d\theta = 18 \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0.$$

Ja podíem haver deduït que la integral seria zero sense haver-la de calcular, només tenint en compte la simetria entre la part de  $S$  amb  $y > 0$  i la part amb  $y < 0$ . Si calculem la mateixa integral a  $S_+ = \{(x, y, z) \in S \mid y > 0\}$ , tenim, tenint en compte que  $y > 0$  si, i només si,  $\theta \in (0, \pi)$ :

$$\int_{S_+} y ds = \int_0^\pi \int_0^6 \sqrt{3} \sin \theta \sqrt{3} dz d\theta = 18 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 36.$$

De manera semblant al que teníem per a corbes, no només podem integrar funcions a superfícies, sinó que també hi podem integrar camps. Aquí, en lloc de fer el producte escalar del camp amb el tangent a la corba, el farem amb el vector normal (*unitari*) a la superfície.

**Definició 4.4.6** (Flux d'un camp a través de la superfície). Sigui  $S = \phi(\bar{D})$  una superfície elemental i sigui  $F : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  un camp vectorial continu. Definim el flux del camp  $F$  a través de la superfície  $S$  orientada per  $\vec{n}_\phi$  com:

$$\int_S \langle F, \vec{n}_\phi \rangle d\sigma = \int_S F \cdot \vec{n}_\phi \cdot d\sigma.$$

Si posem això explícitament en termes de la parametrització, tenim:

$$\int_S (F \cdot \vec{n}_\phi) d\sigma = \iint_D F(\phi(u, v)) \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} \|\phi_u \times \phi_v\| du dv = \iint_D F(\phi(u, v)) (\phi_u \times \phi_v) du dv.$$

**Exemple 4.4.7.** Sigui  $S$  la gràfica d'una funció  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , que queda parametritzada com  $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ ,  $(x, y) \in D$ . Ja sabem que  $\phi_x \times \phi_y = (-f_x, -f_y, 1)$ ; per tant, donat  $F$  un camp continu a  $\mathbb{R}^3$ :

$$\int_S F d\sigma = \iint_D F(x, y, f(x, y))(-f_x, -f_y, 1) dx dy.$$

Per exemple, avaluem el flux del camp  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  al tros del paraboloid  $z = x^2 + y^2$  amb  $z \leq 1$ . Aquesta superfície la podem parametritzar,  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , amb  $\phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ , essent  $\mathbb{D} = D((0, 0); 1)$  el disc unitat. Llavors,  $(-f_x, -f_y, 1) = (-2x, -2y, 1)$  i:

$$\int_S F d\theta = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x, y, x^2 + y^2)(-2x, -2y, 1) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} -(x^2 + y^2) dx dy.$$

Passant a coordenades polars, obtenim el següent:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta = -2\pi \int_0^1 r^3 dr = -\frac{\pi}{2}.$$

**Exemple 4.4.8.** Calculem el flux del camp  $F(x, y, z) = (x, y, z^4)$  a la mitja esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  amb  $z \geq 0$ . Parametritzant amb coordenades esfèriques, tenim radi  $r = 3$  i latitud  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , ja que  $z = r \sin \theta = 3 \sin \theta \geq 0$ . Per altra part, sabem, per un càlcul anterior:

$$\phi_\theta \times \phi_\varphi = -3 \cos \theta (3 \cos \theta \cos \varphi, 3 \cos \theta \sin \varphi, 3 \sin \theta).$$

D'aquesta manera, sabent que  $\varphi \in [0, 2\pi)$  ens surt que:

$$\begin{aligned} \int_S F dr &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos \theta \cos \varphi, 3 \cos \theta \sin \varphi, 3^4 \sin^4 \theta) \cdot (\phi_\theta \times \phi_\varphi) \cdot d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -3 \cos \theta (9 \cos^2 \theta + 3^5 \sin^5 \theta) d\theta d\varphi = -54\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta + 27 \sin^5 \theta) \cos \theta d\theta \\ &= -54\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta + 27 \sin^5 \theta) \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

Per acabar de resoldre aquesta integral, apliquem el canvi de variable  $\sin \theta = t$  ( $\cos \theta d\theta = dt$ ):

$$-54\pi \int_0^1 (1 - t^2 + 27t^5) dt = -54\pi \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{27}{6}\right) = -279\pi.$$

Observem que aquí la superfície està orientada amb el normal interior a l'esfera.

Imaginem que  $F$  representa la velocitat (en magnitud i direcció) a la que es mou la partícula de coordenades  $(x, y, z)$  d'un fluid.

**Observació 4.4.9.** El flux de  $F$  a través de  $S$  indica la quantitat de fluid que travessa  $S$  per unitat de temps. Si el camp està alineat amb el normal a la superfície, aquesta quantitat és gran. *Com més paral·lel sigui el camp amb  $S$ , menor és aquesta quantitat.* En tot cas, és clar que aquesta quantitat depèn de l'orientació que té el camp respecte  $S$ .

Imaginem, per exemple, que tenim un camp constant  $F$  i una superfície formada per una membrana. Si posem la membrana alineada amb el camp el flux és 0 i el fluid no travessa la membrana. En canvi, si la posem perpendicular al camp, aquest flux és màxim, la membrana deixa passar tot el fluid.

## ROTACIONAL I TEOREMA D'STOKES

**Definició 4.5.1** (Rotacional de  $F$ ). Donat  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$  obert i un camp  $F = (P, Q, R) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$  diem *rotacional de  $F$*  al camp  $\text{rot}(F) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definit per:

$$\text{rot } F = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y).$$

Formalment:

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Si  $\mathcal{U}$  és un domini simplement connex,  $F$  és conservatiu si, i només si,  $\text{rot } F = 0$ .

El vector  $\text{rot } F$  indica la rotació provocada pel camp  $F$ . La direcció de  $\text{rot } F$  indica l'eix de rotació i  $\|\text{rot } F\|$  la seva magnitud. Suposem que  $F$  són les línies de corrent d'un fluid i posem una bola a la posició  $(x, y, z)$  en mig del corrent. La bola rodarà d'acord amb les línies de corrent de  $F$ , amb eix de rotació i magnitud donats per  $\text{rot } F$ .

**Exemple 4.5.2.** Sigui el camp  $F(x, y, z) = (y, -x, 0)$ , que és un camp sense component vertical (moviment només en el pla  $(x, y)$ ) i que en el pla  $(x, y)$  és tangent als cercles centrats a  $(0, 0)$ .

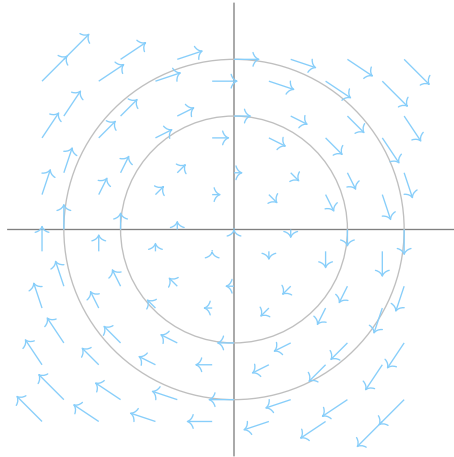


Figura 4.6: Representació del camp  $F(x, y) = (-y, x)$ .

Sembla clar que aquest camp provoca una rotació amb eix de rotació  $z$  i velocitat angular constant; tenim  $\text{rot } F = (0, 0, -2)$ . El signe negatiu prové del fet que el camp *cargola* cap avall.

**Exemple 4.5.3.** Sigui  $F(x, y, z) = (0, -x^2, 0)$ . Els vectors d'aquest camp, mirats a  $\mathbb{R}^2$ , apunten cap avall, amb una magnitud equivalent. És a dir, la mida del vector creix a mesura que ens separem de l'eix  $x = 0$ .

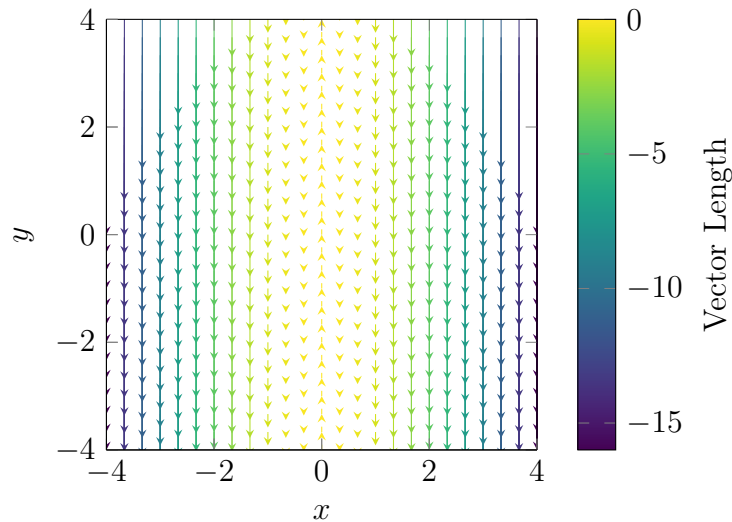


Figura 4.7: Representació del camp  $F(x, y) = (0, -x^2)$ .

Quan  $x > 0$ , el camp fa rodar en la direcció horària i, per tant, l'eix de rotació serà l'eix  $z$  negatiu. En canvi, si  $x < 0$  el camp fa rodar en la direcció antihorària i, per tant, l'eix de rotació és l'eix  $z$  positiu. Observem, també, que com més gran sigui  $|x|$  més gran serà la rotació. Tenim  $\text{rot } F = (0, 0, -2x)$ .

Passem, tot seguit, a veure un resultat que relaciona una integral a una superfície  $S$  amb una integral a la vora orientada  $\partial_+ S$ , en l'esperit del teorema de Green.

**Teorema 4.5.4 (Teorema d'Stokes).** *Sigui  $S$  una superfície elemental orientada pel normal unitari  $\vec{n}$ . Sigui  $F$  camp de classe  $\mathcal{C}^1$  definit a tot un entorn de  $S$ . Aleshores:*

$$\int_{\partial_+ S} F \, dr = \iint_S \text{rot } F \cdot d\sigma.$$

#### Observació 4.5.5.

- Podem veure aquest resultat com una **generalització del teorema de Green**. Imaginem que estem a la situació del teorema de Green: tenim  $D \subset \mathbb{R}^2$  domini regular i  $F = (P, Q)$  camp de classe  $\mathcal{C}^1$ . Ara mirem tot això dins  $\mathbb{R}^3$ : tenim  $D$  superfície parametritzada  $\phi(x, y) = (x, y, 0)$  tal que  $(x, y) \in D$  i un camp  $\bar{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ . Com que  $D$  és un tros del pla  $z = 0$ , el vector normal unitari és  $\vec{n} = (0, 0, 1)$ , ja que  $\phi_x \times \phi_y = (0, 0, 1)$ . Per altra part,

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ p & q & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, Q_x - P_y).$$

Per tant, el teorema de Stokes, en aquest cas, dona:

$$\int_{\partial_+ S} \bar{F} \, dr = \iint_D (0, 0, Q_x - P_y)(0, 0, 1) \, dx \, dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy.$$

Com que

$$\int_{\partial^+ S} \bar{F} dr = \int_{\partial^+ D} F dr = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy,$$

obtenim exactament el teorema de Green.

2. *Per què és raonable que hi hagi una relació entre la circulació de  $F$  a  $\partial^+ S$  i la rotació del camp a  $S$ ?* Considerem la situació següent, amb un camp constant horitzontal. Les integrals  $\int_{\gamma_1} F$  i  $\int_{\gamma_2} F$  valen zero, ja que  $F$  i  $\gamma'$  són perpendiculars. Les integrals  $\int_{\gamma_2} F$  i  $\int_{\gamma_4} F$  tenen la mateixa magnitud i signes oposats. Tot plegat, la circulació total a  $\partial^+ S$  és 0. Observem que  $\text{rot } F = (0, 0, 0)$ , ja que el camp és constant. Sigui ara un camp simètric respecte el pla  $z = 0$ , amb signes diferents a  $z > 0$  i  $z < 0$ . Aquí,  $\int_{\gamma_1} F$  i  $\int_{\gamma_3} F$  són zero, com al cas anterior. En canvi,  $\int_{\gamma_2} F$  i  $\int_{\gamma_4} F$  tenen la mateixa magnitud i el mateix signe. Tot plegat,

$$\int_{\partial^+ S} F = \int_{\gamma_2} F + \int_{\gamma_4} F.$$

Aquest camp produeix una rotació al voltant de l'eix  $y$ , pel canvi de sentit dels vectors a alçada  $z = 0$ . Finalment, considerem una situació com la del dibuix. Aquí, les quatre integrals  $\int_{\gamma_i} F$  són positives ( $F$  i  $\gamma'$  estan alineats). Per tant,  $\int_{\partial^+ S} F$  tindrà un valor *elevat*. Observem que la rotació que produeix el camp també és gran a  $S$ .

*Demostració del teorema de Stokes.* Siguin, com sempre,  $D \subset \mathcal{U}$  regular, amb  $\bar{D} \subset \mathcal{U}$ ,  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrització, tals que  $S = \phi(\bar{D})$ . Sigui  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrització de  $\partial^+ D$ , de manera que  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  i  $\Gamma(t) = \phi(\gamma(t))$  és una parametrització de  $\partial^+ S$ :

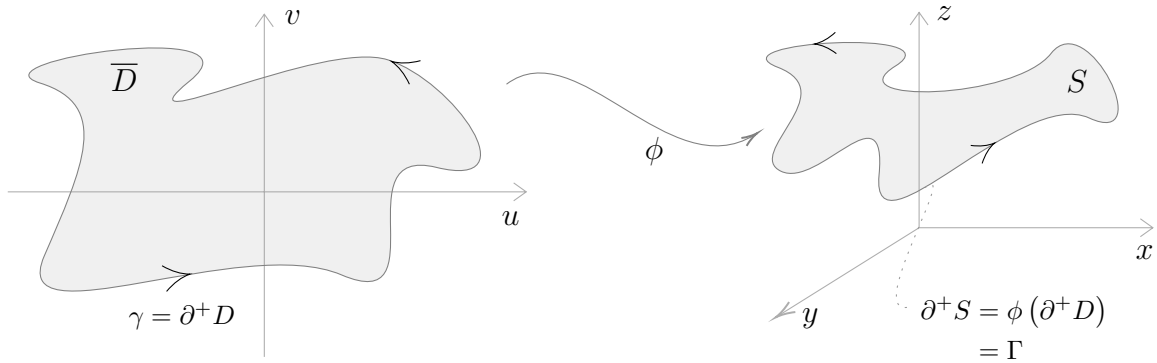


Figura 4.8: Representació de la demostració.

Dient  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ , tenim:

$$\int_{\partial^+ S} F dr = \int_a^b F(\phi(\gamma(t))) \cdot (\phi \circ \gamma)'(t) dt = \int_a^b \langle F(\phi(\gamma(t))), \phi_u(\gamma'(t))\gamma'_1(t) + \phi_v(\gamma'(t))\gamma'_2(t) \rangle dt.$$

Observem que aquesta és la integral de línia del camp a  $\mathbb{R}^2$  (al pla  $(u, v)$ ) donat per

$$(F(\phi(u, v))\phi_u, F(\phi(u, v))\phi_v).$$



Aleshores, pel teorema de Green tenim:

$$\int_{\partial_+ S} F dr = \iint_D \frac{\partial}{\partial u} \langle F(\phi(u, v)), \phi_v(u, v) \rangle - \frac{\partial}{\partial v} \langle F(\phi(u, v)), \phi_u(u, v) \rangle du dv.$$

Aplicant la regla de la cadena a les derivades que apareixen a aquesta expressió es comprova que aquesta integral val:

$$\iint_D \langle \text{rot } F(\phi(u, v)), \phi_u(u, v) \phi_v(u, v) \rangle du dv = \iint_S \text{rot } F \cdot d\sigma,$$

tal com volíem obtenir. ■

**Exemple 4.5.6.** Calculem el treball realitzat pel camp  $F(x, y, z) = (z, xy, x+y+z)$  en desplaçar-se al llarg de la corba donada per les equacions  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x + y + z = 0$ .

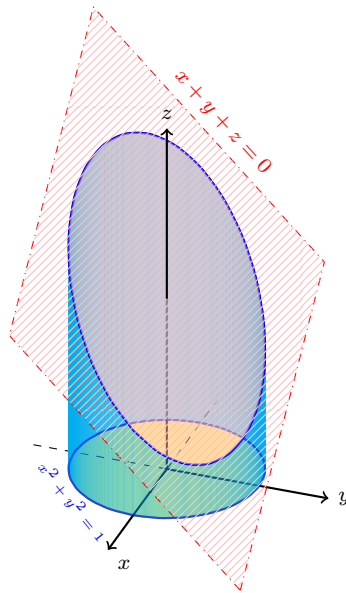


Figura 4.9: Representació del camp  $F$  i la superfície.

La corba  $\gamma$  és la vora de la superfície donada pel tros de pla  $x + y + z = 0$  dins el cilindre; és a dir, amb  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Si diem  $S$  a aquesta superfície,  $\gamma = \partial S$ . Calculem, en primer lloc, la integral de línia parametritzant en coordenades cilíndriques. Veiem que les equacions que defineixen  $\gamma$  són  $r = 1$  i  $\cos \theta + \sin \theta + z = 0$ . Per tant, tenim la parametrització:

$$\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, -(\cos \theta + \sin \theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

$$\gamma'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, \sin \theta - \cos \theta),$$

$$F(\gamma(\theta)) = (-(\cos \theta + \sin \theta), \sin \theta \cos \theta, 0).$$

Dit tot això, ja podem calcular el valor de la integral:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F dr &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\theta)) d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Calculem ara la integral  $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\sigma$  i comprovem que val  $\pi$ . Tenim:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Parametritzem  $S$  com a gràfica de la funció  $f(x, y) = -x - y$ ; és a dir, prenem  $D = \mathbb{D}$  disc unitat de  $\mathbb{R}^2$  ( $x^2 + y^2 \leq 1$ ) i:

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y) = (x, y, -x - y) \end{aligned}$$

El vector normal en aquesta parametrització és el vector associat al pla:

$$N_\phi = (-f_x, -f_y, 1) = (1, 1, 1).$$

Per altra part,

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & xy & x + y + z \end{vmatrix} = (1, 0, y).$$

Amb això,

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1, 0, y)(1, 1, 1) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1 + y) dx dy = \pi.$$

#### 4.6

### SUPERFÍCIES REGULARS

Fins ara hem treballat amb superfícies elementals. Tot seguit generalitzarem aquesta noció i comprovarem que tot el que hem vist fins aquest punt continua essent vàlid per a aquestes superfícies més generals.

**Definició 4.6.1** (Superfície regular orientada). Es diu que  $S \subset \mathbb{R}^3$  és una *superfície regular orientada* si es pot expressar de la forma  $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$ , on  $S_j$  són superfícies elementals orientades.

A més, les vores  $\partial_+ S_j$  *enganxen bé*, en el sentit següent.

**Definició 4.6.2** (Vora orientada). Diem  $\partial_+ S_j = \gamma_j^1 \cup \dots \cup \gamma_j^{N(j)}$  a la vora orientada de  $S_j$ ; aleshores, si  $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ , només són possibles les situacions següents,  $i \neq j$ :

1.  $S_i \cap S_j$  és un únic punt.
2.  $S_i \cap S_j$  és una de les components  $\gamma_i^m$  de  $\partial_+ S_i$  (i una component  $\gamma_j^p$  de  $\partial_+ S_j$ ) i  $\gamma_i^m, \gamma_j^p$  tenen *orientacions oposades*. És a dir, com a conjunts  $S_i \cap S_j = \gamma_i^m = \gamma_j^p$  i  $\gamma_i^m = -\gamma_j^p$ .<sup>1</sup>

Si diem  $\psi_j$  a la col·lecció de components de  $\partial_+ S_j$  que no es cancel·len, aleshores diem que  $\partial_+ S = \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$  és la vora orientada de  $S$ .

<sup>1</sup> En aquest segon cas, direm que  $\gamma_i^m$  i  $\gamma_j^p$  *es cancel·len*. Demanarem també que cada  $\gamma_{i,m}$  es pugui cancel·lar com a molt amb  $\gamma_j^p$  ( $i \neq j$ ).

**Observació 4.6.3** (Vora orientada). En paraules més planeres, la vora orientada de la superfície regular és la reunió de les vores de les superfícies elementals  $S_i$  que no hem enganxat (és a dir, que eliminem els arcs comuns). En aquest sentit, no és vàlid que un arc  $\gamma$  sigui frontera de tres o més superfícies.

**Definició 4.6.4** (Superfície tancada). Una superfície regular orientada  $S$  es diu *tancada* si no té vora. Això correspon al cas en què les vores de les diferents  $S_i$  es cancel·len.

**Exemple 4.6.5** ( $S$ , cilindre). Sigui  $x^2 + y^2 = 1$ , amb  $0 \leq z \leq 1$ . Considerem dues superfícies elementals, corresponents a dues meitats del cilindre, totes dues orientades amb el normal exterior, parametritzades:

$$\begin{aligned}\phi_1 : (0, \pi) \times (0, 1) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) &\longrightarrow S_1(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad S_1 = \phi_1((0, \pi) \times (0, 1)). \\ \phi_2 : (\pi, 2\pi) \times (0, 1) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) &\longrightarrow S_2(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad S_2 = \phi_2((0, \pi) \times (0, 1)).\end{aligned}$$

És clar que  $S_1$  i  $S_2$  són superfícies elementals. La vora orientada de  $S_1$  té quatre components  $\partial_+ S_1 = \gamma_1^1 \cup \gamma_2^1 \cup \gamma_3^1 \cup \gamma_4^1$ , amb:

$$\begin{aligned}\gamma_1^1 &: (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad \theta \in [0, \pi], \\ \gamma_2^1 &: (-1, 0, z), \quad z \in [0, 1], \\ -\gamma_3^1 &: (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad \theta \in [0, \pi], \\ -\gamma_4^1 &: (1, 0, z), \quad z \in [0, 1].\end{aligned}$$

Anàlogament,  $\partial_+ S_2 = \gamma_1^2 \cup \gamma_2^2 \cup \gamma_3^2 \cup \gamma_4^2$ , amb:

$$\begin{aligned}\gamma_1^2 &: (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \theta \in [\pi, 2\pi], \\ \gamma_2^2 &: (1, 0, z), \quad z \in [0, 1], \\ -\gamma_3^2 &: (\cos \theta, \sin \theta, 1), \quad \theta \in [\pi, 2\pi], \\ -\gamma_4^2 &: (1, 0, z), \quad z \in [0, 1].\end{aligned}$$

Observem que  $\gamma_4^1$  i  $\gamma_2^2$  són el mateix segment, recooregut en el sentit oposat. Anàlogament amb el segment  $\gamma_2^1 = -\gamma_4^2$ . Per tant, podem considerar la superfície regular orientada  $S = S_1 \cup S_2$  que surt d'enganxar aquests dos trossos. Aleshores,  $S$  és el cilindre  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z \in (0, 1)$ , i la seva vora és la reunió de les corbes:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &: x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1, \quad \text{amb orientació antihorària}, \\ \Gamma_2 &: x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \quad \text{amb orientació horària}.\end{aligned}$$

$S_1$  i  $S_2$ , per separat, serien superfícies elementals, però es podrien *enganxar* de tal manera que formessin una superfície regular. A aquesta superfície hi podríem afegir les *tapes* del cilindre i produir una superfície regular tancada (sense vora). Siguin:

$$\begin{aligned}S_3 &= \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad \vec{n} = (0, 0, -1). \\ S_4 &= \{(x, y, 1) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad \vec{n} = (0, 0, 1).\end{aligned}$$

La vora de  $S_3$  és la circumferència  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ , amb orientació antihorària, i la vora de  $S_4$  és la circumferència  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ , amb orientació horària. La vora de  $S_3$  i  $\Gamma_2$  són la mateixa corba, amb orientacions oposades; en unir  $S$  i  $S_3$  es cancel·len. El mateix passa amb la vora de  $S_4$  i  $\Gamma_1$ .

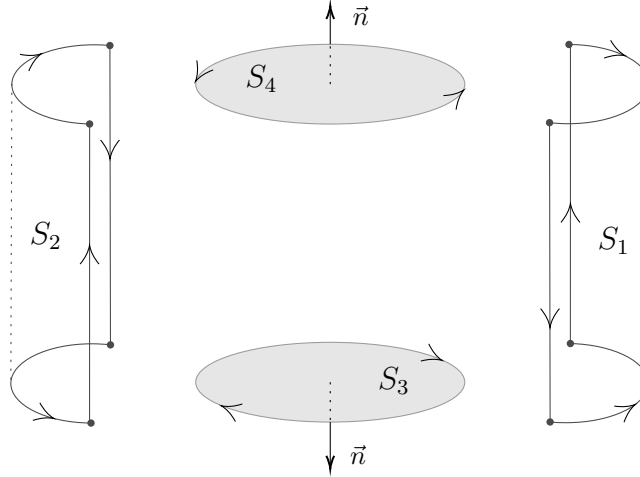


Figura 4.10: El cilindre tancat, unió de  $S_1$  i  $S_2$  amb les tapes  $S_3$  i  $S_4$ .

**Exemple 4.6.6** ( $S$ , esfera). Considerem les superfícies elementals (mitges esferes):

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\}.$$

Considerem per a les dues l'orientació donada pel normal exterior. La vora de  $S_1$  és la circumferència  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ , amb orientació horària, mentre que la vora de  $S_2$  és la mateixa circumferència, però amb orientació contrària. Així doncs,  $S = S_1 \cup S_2$ , l'esfera de centre  $(0, 0, 0)$  i radi 1, és una superfície regular tancada.

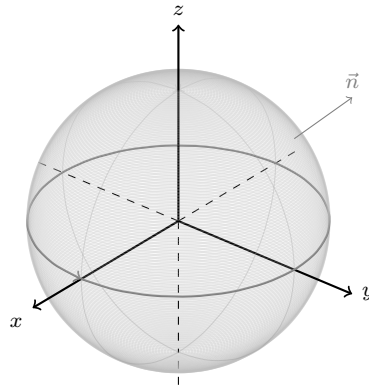


Figura 4.11: Esfera  $S$ , unió de  $S_1$  i  $S_2$ . Realment l'equador no té una direcció, com al dibuix.

A les superfícies regulars orientades s'hi estenen de manera natural les nocions i resultats que hem vist fins ara per a les superfícies elementals.

**Proposició 4.6.7.** Donada  $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$  una superfície regular (amb  $S_i$  superfícies elementals) i donada  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una funció contínua, definim:

$$\int_S f \, d\sigma = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} f \, d\sigma. \text{ En particular, } \text{area}(S) = \sum_{i=1}^n \text{area}(S_i).$$

Anàlogament, si  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  és un camp continu:

$$\int_S F \, d\sigma = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} F \, d\sigma.$$

El flux de  $f$  a través de  $S$  és, també:

$$\sum_{i=1}^N \int_{S_i} \langle F, n_\phi \rangle \, d\sigma.$$

Com que les vores de  $S_i$  s'enganxen per a construir  $S$  es cancel·len, també val el teorema d'Stokes.

**Teorema 4.6.8 (Stokes, superfícies orientades).** Sigui  $S$  superfície regular orientada. Sigui  $\mathcal{U}$  entorn obert de  $S$  i sigui  $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$  un camp. Llavors:

$$\int_S \text{rot } F \cdot d\sigma = \int_{\partial^+ S} F \, dr.$$

En particular, si  $S$  és una superfície regular tancada (sense vora), llavors el valor d'aquesta integral és zero.

4.7

## TEOREMA DE LA DIVERGÈNCIA

La divergència d'un camp vectorial  $F$  a un punt  $p$  és un escalar que mesura en quin grau el punt  $p$  és una *font* (o un *xuclador*) de  $F$ . Pensem que  $F$  indica la velocitat d'un fluid, aleshores  $\text{div } F(p)$  mesura en quin grau el fluid *marxa* de  $p$  (per exemple, l'aire quan hi ha una font de calor). Si  $\text{div } F(p)$  és negatiu, vol dir que  $p$  actua com un xuclador del fluid.



Figura 4.12: Dues representacions, una en què  $p$  actua com a *xuclador* (dreta,  $\text{div } F(p) > 0$ ) i l'altra, com a *font* (esquerra,  $\text{div } F(p) < 0$ ).

**Definició 4.7.1 (Divergència).** Més formalment, donat un camp  $F$  de classe  $\mathcal{C}^1$  a una regió de  $\mathbb{R}^3$  i donat un punt  $p = (x_0, y_0, z_0)$  a aquesta regió, tenim:

$$\operatorname{div} F(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(p, \varepsilon)|} \iint_{\partial Q(p, \varepsilon)} F \vec{n} \, d\sigma,$$

on  $Q(p, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \times (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$  és el cub de centre  $p$  i costat  $2\varepsilon$  (si canviem  $Q(p, \varepsilon)$  per la bola  $B(p, \varepsilon)$ , tenim exactament la mateixa definició).

Per tant, la divergència mesura el volum del flux exterior de  $F$  per volum infinitesimal.

Normalment no s'utilitza la definició anterior per a calcular la divergència, sinó que s'utilitza la següent expressió equivalent.

**Lema 4.7.2.** Sigui  $F = (F_1, F_2, F_3) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ , on  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$  és obert. Si  $p \in \mathcal{U}$ :

$$\operatorname{div} F(p) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(p) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(p) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(p).$$

**Exemple 4.7.3.**

1. Un camp constant  $F(x, y, z) = (a, b, c)$  té divergència 0.
2. Sigui el camp donat pel vector posició  $F(x, y, z) = (x, y, z)$ . Aleshores,  $\operatorname{div} F(x, y, z) = 3$ .
3. Sigui  $F(x, y, z) = (yz^2, xy, yz)$ . Aquí,  $\operatorname{div} F(x, y, z) = x + y$ . Per tant,  $F$  actua com una font als punts  $(x, y, z)$  tals que  $x + y > 0$  i com a xuclador als punts on  $x + y < 0$ .

**Teorema 4.7.4 (Teorema de la divergència, o de Gauss).** Sigui  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un domini regular. Sigui  $F$  un camp de classe  $\mathcal{C}^1$  a  $\mathcal{U}$  i sigui  $\mathcal{U} \subset \Omega$  obert amb  $\overline{\mathcal{U}} \subset \Omega$ . Aleshores:

$$\int_{\mathcal{U}} \operatorname{div} F = \int_{\partial_+ \mathcal{U}} F \, dv,$$

on l'orientació de  $\partial_+ \mathcal{U}$  ve donada pel normal exterior a  $\mathcal{U}$ .

**Observació 4.7.5 (Observacions al teorema).**

1. La definició detallada de domini regular la trobarem més enrere, per coherència amb el text. És la versió a  $\mathbb{R}^3$  de la definició de domini regular a  $\mathbb{R}^2$  que vam veure quan parlàvem del teorema de Green. Es pot veure a 3.5.9.
2. Aquest és un teorema de la família de Green o Stokes, en el que relacionem una integral a una regió amb una altra integral a la seva vora.

**Exemple 4.7.6.** Sigui el camp  $F(x, y, z) = (x + \sin^2 y + \cos(z^4), (x + z)^2 e^z, x^3 + y^2 + z^2)$  i sigui la regió el·líptica:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} < 1 \right\}.$$

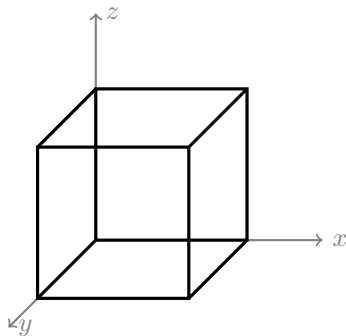


Figura 4.13: Un cub en els eixos tridimensionals.

Podem utilitzar el teorema de la divergència per a calcular el flux de  $F$  a través de  $\partial_+\Omega$ . El càlcul directe, a partir de la parametrització de l'el·lipsoide  $\partial_+\Omega$  és molt més complicat. Com que  $\operatorname{div} F = 1 + 2z$ , tenim:

$$\int_{\partial_+\Omega} F \, dr = \int_{\Omega} \operatorname{div} F = \iiint_{\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} < 1} (1 + 2z) \, dx \, dy \, dz.$$

Canviant a coordenades esfèriques adaptades a l'el·lipse tenim:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2r \cos \theta \cos \varphi, \\ y &= r \cos \theta \sin \varphi \\ z &= 3r \sin \theta. \end{aligned} \right\} r > 0, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \varphi \in (0, 2\pi).$$

La condició que defineix  $\Omega$  és  $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = r^2 < 1$ . Amb això, i tenint en compte que el jacobí del canvi és  $J = 6r^2 \cos \theta$ , queda:

$$\begin{aligned} \int_{\partial_+\Omega} F \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (1 + 6r \sin \theta) 6r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= 2\pi \left( \int_0^1 6r^2 \, dr \right) \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \right) + 2\pi \left( \int_0^1 6r^3 \, dr \right) \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \right) = 8\pi. \end{aligned}$$

*Demostració de 4.7.2.* Al càlcul de la integral  $\iint_{\partial Q(p,\varepsilon)} F \vec{n} \, d\sigma$  que apareix a la definició de  $\operatorname{div} F(p)$ , aparellarem cares paral·leles i comprovarem, fent servir la fórmula de Taylor, els valors que apareguin amb el valor al centre. Sigui  $C_1$  la cara del cub en  $x = x_0 + \varepsilon$ . Parametritzem aquesta cara amb  $y$  i  $z$ :  $(x_0 + \varepsilon, y, z)$ , amb  $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$  i  $z \in (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$ . El normal exterior és  $\vec{n} = (1, 0, 0)$ . Anàlogament, sigui  $C_2$  la cara oposada, amb  $x = x_0 - \varepsilon$ . Parametritzem  $(x_0 - \varepsilon, y, z)$  amb  $(y, z) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \times (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$ . Aquí, el normal exterior és  $\vec{n} = (-1, 0, 0)$ . Utilitzem la fórmula de Taylor per comparar  $F(x_0 \pm \varepsilon, y, z)$  amb  $F(x_0, y, z)$ . A  $C_1$  hi tenim:

$$F_1(x_0 + \varepsilon, y, z) = F_1(x_0, y, z) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y, z)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

A  $C_2$  hi tenim:

$$F_1(x_0 - \varepsilon, y, z) = F_1(x_0, y, z) - \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y, z)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Amb això, el tros de la integral que correspon en les cares  $C_1$  i  $C_2$  és:

$$\begin{aligned} \iint_{C_1 \cup C_2} F \vec{n} \, d\sigma &= \iint_{C_1} F_1(x_0 + \varepsilon, y, z) \, dy \, dz - \iint_{C_2} F_1(x_0 - \varepsilon, y, z) \, dy \, dz \\ &= 2\varepsilon \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0 + \varepsilon} \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y, z) + o(\varepsilon) \right) \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Com que  $|Q(p, \varepsilon)| = (2\varepsilon)^3$ , tenim:

$$\frac{1}{|Q(p, \varepsilon)|} \iint_{C_1 \cup C_2} F \vec{n} \, d\sigma = \frac{1}{(2\varepsilon)^3} \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0 + \varepsilon} \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y, z) + o(\varepsilon) \right) \, dy \, dz.$$

Comprovem ara que el límit quan  $\varepsilon \rightarrow 0$  d'aquesta mitjana és  $\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ . Per una part:

$$\frac{1}{(2\varepsilon)^3} \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0 + \varepsilon} \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} o(\varepsilon) \, dy \, dz = \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0 + \varepsilon} \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \frac{o(1)}{\varepsilon} \, dy \, dz,$$

essent  $o(1)$  acotat quan  $\varepsilon \rightarrow 0$  queda clar que aquest terme tendeix a 0. Per a l'altre terme utilitzem un cop més la fórmula de Taylor: com que  $\frac{\partial F}{\partial x}$  és contínua:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + o(1).$$

Llavors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\varepsilon)^3} \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0 + \varepsilon} \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y, z) \, dy \, dz &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{(2\varepsilon)^3} \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0 + \varepsilon} \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} o(1) \, dy \, dz \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + o(1). \end{aligned}$$

Ajuntant-ho tot, queda:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(p, \varepsilon)|} \iint_{C_1 \cup C_2} F \vec{n} \, d\sigma = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0).$$

De manera anàloga es pot veure que les integrals corresponents a les cares amb  $y$  fixada donen  $\frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$  i les corresponents a  $z$  fixada donen  $\frac{\partial F_3}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ . Això acaba aquesta demostració. ■

Per acabar, donem la demostració del teorema de la divergència pel cas d'un domini  $\Omega$  elemental  $\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, c < z < f(x, y)\}$  i un camp  $F$  vertical  $F(x, y, z) = (0, 0, R(x, y, z))$ .

*Demostració del teorema de la divergència.* Si comencem per la integral de la divergència tenim:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \iint_D \left( \int_c^{f(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz \right) \, dx \, dy = \iint_D (R(x, y, f(x, y)) - R(x, y, c)) \, dx \, dy.$$

Ara mirem la integral a  $\partial^+ \Omega = S_1 \cap S_2 \cap S_3$  tros per tros:



- $S_2$ . Aquí,  $F\vec{n} = (0, 0, R)(\alpha_1, \alpha_2, 0) = 0^2$ . Per tant, la contribució és nul·la.
- $S_3$ . Aquí,  $z = f(x, y)$  i, per tant:

$$\int_{S_3} F d\sigma = \iint_D (0, 0, R)(-f_x, -f_y, 1) dx dy = \iint_D R(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

Tot plegat, tenim el mateix valor d'abans:

$$\int_{\partial_+ D} F dr = - \iint_D R(x, y, c) dx dy + \iint_D R(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

De manera semblant, es pot veure que per a camps de la forma  $F = (P, Q, 0)$ , usant el teorema d'Stokes, el resultat també val. Amb això, es veu que el teorema de la divergència val per a dominis elementals. Per a demostrar-ho a un domini regular, simplement cal recobrir-lo per dominis elementals mitjançant una partició i aplicar el que acabem de veure. ■

## 4.8

## EXERCICIS FINALS

**Exercici 4.8.1.** Calculeu l'àrea de  $f(x, y) = z = x^2 - \frac{y^2}{6}$  on  $4x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 3$ .

*Demostració.* Prenem, rutinàriament, la parametrització  $\phi(x, y) = (x, y, x^2 - \frac{y^2}{6}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Sigui  $D = \{(x, y) \mid 4x^2 + \frac{y^2}{9} < 3\}$ . Volem provar que tenim  $S = \phi(\overline{D})$  una superfície elemental primer, de manera que necessitem que  $\phi$  hi sigui injectiva i  $\text{rg}(D\phi(x, y)) = 2$  per a tot  $(x, y)$ . Es deixa com a exercici.

Primerament, prenem  $z = f(x, y)$ . Fent el producte exterior  $\phi_x \times \phi_y$  obtenim el vector  $(-2x, \frac{y}{3}, 1)$ , la norma del qual és  $\sqrt{4x^2 + \frac{y^2}{9} + 1}$ . L'àrea de la superfície és:

$$\iint_D \|\phi_x \times \phi_y\| dx dy = \iint_{4x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 3} \sqrt{1 + 4x^2 + \frac{y^2}{9}} dx dy.$$

Fem  $2x = r \cos \theta$  i  $\frac{y}{3} = r \sin \theta$ , tal que  $\theta \in (0, 2\pi)$ . Ara podem substituir i ens queda:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + r^2} \cdot \frac{1}{2} 3r dr d\theta = \frac{3\pi}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + r^2} \cdot 2r dr = \pi(4^{\frac{3}{2}} - 1) = 7\pi. \quad \blacksquare$$

**Exercici 4.8.2.** Considereu el camp vectorial  $F(x, y, z) = (-ye^{-x}, xe^{-x}, 0)$ . Per a cada nombre real  $R > 0$ , sigui  $S_R$  la superfície  $x^2 + y^2 = 2z$ ,  $x^2 + y^2 \leq R^2$ , orientada segona la normal que té la tercera component positiva. Calculeu  $I(R) = \int_{S_R} \text{rot } F d\sigma$ . Què val  $\lim_{R \rightarrow \infty} I(R)$ ?

*Demostració.* Ja tenim el camp  $F(x, y, z) = (-ye^{-z}, xe^{-z}, 0)$  i la superfície  $S_R$ . Parametritzem  $\partial^+ S_R$ :  $\Gamma(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta, \frac{R^2}{2})^3$ . Aleshores, podem aplicar el teorema d'Stokes:

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \text{rot } F ds &= \int_{\partial^+ S_R} = \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 \theta e^{-\frac{R^2}{2}} + R^2 \cos^2 \theta e^{-\frac{R^2}{2}} d\sigma = R^2 e^{-\frac{R^2}{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta d\theta \\ &= R^2 e^{-\frac{R^2}{2}} 2\pi. \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Segons la definició 3.5.8,  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  són tals que  $(\alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y))$  és el vector normal unitari exterior a  $\partial_+ D$ .

<sup>3</sup> Aquesta última coordenada té aquest valor perquè  $\partial S = \{x^2 + y^2 = R^2\}$  i, juntament amb la funció, obtenim  $2z = R^2$ .

Això, quan  $R \rightarrow \infty$ , tendeix a 0, perquè l'exponencial domina respecte la quadràtica. ■

**Exercici 4.8.3.** Considerem el camp vectorial a  $\mathbb{R}^3$ :  $F(x, y, z) = (\sin y \cdot \cos(z y), \frac{y^2}{2} + \cos(x - 1), -yz + e^{4x^2 + (y-1)^2})$ . Calculeu el flux de  $F$  a través de la superfície  $S = 4x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$ ,  $z \geq 0$ , orientada de manera que el vector normal tingui la tercera component positiva.

*Demostració.* Si sumem 1 als dos costats de la primera igualtat que defineix la superfície  $S$ , ens queda  $4x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$ , un el·lipsoide. Amb la condició  $z \geq 0$ , restringit al semieix positiu de  $z$ . Calculant  $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = 0 + y - y = 0$ . Posem  $D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$ . Aleshores,  $S \cup D = \partial\Omega$ , on  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + (y - 1)^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ . Com que  $S \cap D = \emptyset$ , podem posar la integral de  $\partial\Omega$  com la suma de les integrals sobre  $S$  i  $D$ , respectivament:

$$\int_{\partial\Omega} F d\sigma = \int_S F d\sigma + \int_D F d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy dz = 0.$$

La penúltima igualtat ve del teorema de Gauss (o de la divergència). Podem dir, doncs, que  $\int_S F d\sigma = -\int_D F d\sigma$ . Això, si ho calculem:

$$-\int_D F \cdot (0, 0, 1) dx dy = \iint_{4x^2 + (y-1)^2 \leq 1} e^{4x^2 + (y-1)^2} dx dy.$$

Podem agafar, per exemple, coordenades polars:  $x = \frac{r}{2} \cos \varphi$  i  $y = 1 + r \sin \varphi$ <sup>4</sup>. El jacobí d'aquest canvi, doncs, és  $|J| = \frac{1}{2}r$  i  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . El resultat d'aquesta integral és  $\frac{\pi}{2}(e - 1)$ . ■

**Exercici 4.8.4.** Calculeu el flux del camp vectorial  $F(x, y, z) = (2x(z^2 - 1)e^{-z^2}, ye^{-z^2}, (1 + z)e^{-z^2})$ , a través de la superfície cilíndrica  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , orientada segons la normal exterior al cilindre.

*Demostració.* La primera opció seria parametritzar directament amb coordenades cilíndriques,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z$ . Com queda una parametrització en dues variables i  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $r = 1$ :

$$\begin{aligned} \phi: (0, 2\pi) \times (0, 1) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) &\longmapsto \phi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z) \end{aligned}$$

Si mirem  $\phi_\theta \times \phi_z$ , obtenim  $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ . Al seu torn, ja podem calcular el flux del camp a través de la superfície:

$$\begin{aligned} \iint_S F dr &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 F(\phi(\theta, z))(\phi_\theta, \phi_z) dz d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-z^2} (2 \cos^2 \theta (z^2 - 1) + \sin^2 \theta) d\theta dz \\ &= \left( \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) \left( \int_0^1 2e^{-z^2} dz \right) + \left( \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right) \left( \int_0^1 e^{-z^2} dz \right) \end{aligned}$$

La segona opció passaria per aplicar el teorema de la divergència. Sigui  $R = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1\}$ ,  $\partial^+ R = S \cup T_s \cup T_i$ , on  $T_s$  i  $T_i$  són les tapes superior i inferior de la superfície, respectivament.

<sup>4</sup> Notem que cal usar  $(2x)^2 + (y - 1)^2$ , i prenent  $2x$  i  $y - 1$  dona el resultat que hem escrit. A més,  $r \leq 1$  amb aquest canvi.

1.  $T_s$  és  $z = 1$  amb  $x^2 + y^2 < 1$  amb  $N = (0, 0, 1)$ .
2.  $T_i$  és  $z = 0$  amb  $x^2 + y^2 < 1$  amb  $N = (0, 0, -1)$ .

Aleshores, com  $F \in \mathcal{C}^1(R)$ , podem aplicar (ara sí) el teorema de la divergència:

$$\iint_{\partial^+ R} F d\sigma = \iiint_R \operatorname{div} F dx dy dz.$$

Ara, podem posar  $\iint_{\partial^+ R} F d\sigma$  com a suma d'integrals de les superfícies que la conformen:

$$\iint_S F d\sigma + \iint_{T_s} F d\sigma + \iint_{T_i} F d\sigma = \iiint_R \operatorname{div} F dx dy dz.$$

D'aquesta manera:

$$\iint_S F d\sigma = \iiint_R \operatorname{div} F dx dy dz - \iint_{T_s} F d\sigma - \iint_{T_i} F d\sigma.$$

Recordem, ara, que podem calcular  $\operatorname{div} F$  amb el lema 4.7.2:

$$\operatorname{div} F = 2(z^2 - 1)e^{-z^2} + e^{-z^2} - 2z(1 + z)e^{-z^2} = -2ze^{-z^2}.$$

Hem de calcular  $\iiint_R \operatorname{div} F d\sigma$ ,  $\iint_{T_s} F d\sigma$  i  $\iint_{T_i} F d\sigma$ .

$$\begin{aligned} \iiint_R \operatorname{div} F dx dy dz &= \iint_{x^2+y^2 < 1} \left( \int_0^1 -2ze^{-z^2} dz \right) dx dy = - \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \pi. \\ \iint_{T_s} F d\sigma &= \iint_{x^2+y^2 < 1} F(x, y, 1)(0, 0, 1) dx dy = \iint_{x^2+y^2 < 1} 2e^{-1} dx dy = \frac{2\pi}{e}. \\ \iint_{T_i} F d\sigma &= \iint_{x^2+y^2 < 1} F(x, y, 0)(0, 0, -1) dx dy = \iint_{x^2+y^2 < 1} -1 dx dy = -\pi. \end{aligned}$$

Finalment, podem posar  $\iint_S F d\sigma$  com la suma (amb signe oposat) de les tres integrals que hem calculat. Ens acaba donant  $-\frac{\pi}{e}$ . ■

**Exercici 4.8.5.** Avalueu  $\int_S F d\sigma$ , essent  $F(x, y, z) = (xy, -\frac{y^2}{2}, z)$  i  $S$  la superfície donada a trossos:

$$\begin{cases} z = 4 - 3x^2 - 3y^2, & \text{si } 1 \leq z \leq 4, \\ x^2 + y^2 = 1, & \text{si } 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

*Demostració.* Primerament observem que  $3x^2 + 3y^2 = 4 - z \iff x^2 + y^2 = \frac{4-z}{3}$ . La primera opció que tindríem seria *parametritzar*:

$$\iint_S F d\sigma = \iint_{S_1} F d\sigma + \iint_{S_2} F d\sigma.$$

1. Posem  $S_1$  amb coordenades cilíndriques,  $\phi_1(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$ .
2. En  $S_2$  fem el mateix, tot i que l'expressió serà certament més complicada:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z \in [1, 4]$  i  $r^2 = \frac{4-z}{3}$ . L'aplicació queda definida així:  $\phi_z(\theta, z) = \left( \sqrt{\frac{4-z}{3}} \cos \theta, \sqrt{\frac{4-z}{3}} \sin \theta, z \right)$ .

Clarament, el càlcul d'aquesta segona integral es complicaria bastant. Així que optem per una segona opció, que és usar el teorema de la divergència. Definim  $R = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 1, 0 \leq z \leq 4 - (3x^2 + 3y^2)\}$ . És clar que  $R$  és un domini regular. La frontera orientada d'aquest domini,  $\partial^+ R$ , es construeix a partir de la unió disjunta de:

1.  $S$  (orientada amb el normal exterior).
2.  $T$  és  $x^2 + y^2 = 1$  amb la tercera component  $z$  igual a zero i  $N = (0, 0, -1)$ .

Aleshores, com  $F \in \mathcal{C}^1$ , podem aplicar el teorema de la divergència:

$$\begin{aligned} \iint_S F d\sigma + \iint_T F d\sigma &= \iint_{\partial^+ R} F d\sigma = \iiint_R \operatorname{div} F dx dy dz \\ &\iff \iint_S F d\sigma = \iiint_R \operatorname{div} F dx dy dz - \iint_T F d\sigma = \operatorname{Vol}(R) - \iint_T F d\sigma. \end{aligned}$$

Aprofitem per calcular  $\operatorname{div} F = y - y + 1$  i  $\operatorname{Vol}(R)$ :

$$\operatorname{Vol}(R) = \int_0^1 \left( \iint_{x^2+y^2 < 1} dx dy \right) dz + \int_1^4 \left( \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{4-z}{3}} dx dy \right) dz = \pi + \frac{\pi}{3} \left( 12 - \frac{15}{2} \right).$$

Parametritzem el pla que descriu  $T$ :  $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, 0)$ . Multiplicant pel normal  $N = (0, 0, -1)$  obtenim el valor de la integral:

$$\iint_{x^2+y^2 < 1, z=0} F d\sigma = \iint_{x^2+y^2 < 1} F(x, y, 0)(0, 0, -1) dx dy = 0. \quad \blacksquare$$

**Exercici 4.8.6.** *Sigui la superfície  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, 1 \leq z \leq 2\}$ , orientada de manera que la tercera component del vector normal sigui positiva:*

1. *Calculeu el flux del camp  $F(x, y, z) = (x^3 + \cos(z)y), \cos(x^4) + e^{z^2}, xy(z + \pi)e^{x^2+y^2})$  a través de la superfície.*
2. *Calculeu la circulació del camp  $F(x, y, z) = (\frac{2x}{1+x^2} + yz, z(\cos(yz) - x), xy + y \cos(yz))$  al llarg de  $\partial^+ S$ .*

Demostració. En primer lloc ens demanen el flux de  $F$  a través de  $S$ . Apliquem, doncs, el teorema de la divergència en  $R = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < z^2, 1 < z < 2\}$ . La frontera orientada  $\partial^+ R = -S \cup T_i \cup T_s$ , on  $T_i, T_s$  són les tapes inferior i superior, respectivament.

1.  $T_i$ :  $z = 1, x^2 + y^2 < 1$  amb el vector normal  $N = (0, 0, -1)$ .
2.  $T_s$ :  $z = 2, x^2 + y^2 < 4$  amb el vector normal  $N = (0, 0, 1)$ .

En aquesta situació,  $F \in \mathcal{C}^1$  com sempre, el teorema de la divergència ens diu el següent:

$$-\iint_S F d\sigma + \iint_{T_i} F d\sigma + \iint_{T_s} F d\sigma = \iiint_R \operatorname{div} F dx dy dz.$$

Com abans, parametritzem  $T_i$  amb  $\phi_1(x, y) = (x, y, 1)$ ,  $x^2 + y^2 < 1$  i  $N = (0, 0, -1)$ . També,  $T_s$  amb  $\phi_2(x, y) = (x, y, 2)$ ,  $x^2 + y^2 < 1$  i  $N = (0, 0, 1)$ .

$$\begin{aligned}\iint_{T_i} F d\sigma &= \iint_{x^2+y^2<1} (F(x, y, 1)(0, 0, -1)) dx dy = - \iint_{x^2+y^2<1} xy(1 + \pi)e^{x^2+y^2} dx dy = 0. \\ \iint_{T_i} F d\sigma &= \iint_{x^2+y^2<1} (F(x, y, 2)(0, 0, 1)) dx dy = - \iint_{x^2+y^2<1} xy(2 + \pi)e^{x^2+y^2} dx dy = 0.\end{aligned}$$

Per a calcular  $\iiint_R \operatorname{div} F dx dy dz$ , simplement calculem  $\operatorname{div} F$  i integrem. El valor d'això últim és  $\operatorname{div} F = 3x^2 + xye^{x^2+y^2}$ , i el de l'integral:

$$\begin{aligned}\iiint_R \operatorname{div} F dx dy dz &= \int_1^2 \iint_{x^2+y^2<z^2} (3x^2 + xye^{x^2+y^2}) dx dy dz \\ &\xrightarrow{\text{polars en } x, y} \int_1^2 \left( \int_0^z \int_0^{2\pi} 3r^2 \cos^2 \theta r d\theta dr \right) dz.\end{aligned}$$

La part més feixuga, i l'última ja, és el càlcul de l'integral:

$$\int_1^2 \left( \int_0^z 3r^3 \left( \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) dr \right) dz = \frac{43\pi}{20}.$$

■



# Apèndixos

<b>A Introducció al càlcul integral</b>	<b>107</b>
A.1 Integrals de Riemann . . . . .	107
A.2 Teorema fonamental del càlcul . . . . .	109
A.3 Integració impròpia . . . . .	109
<b>B Llenguatge de les formes diferencials</b>	<b>113</b>
B.1 Introducció . . . . .	113
B.2 Integració de formes . . . . .	114
<b>Bibliografia</b>	<b>115</b>
<b>Índex terminològic</b>	<b>117</b>

$$\begin{array}{l} \text{if } n = 0 \\ \text{if } n = 1 \\ \text{if } n \geq 2 \end{array}$$

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ 1 & \text{if } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{if } n \geq 2 \end{cases}$$





## Introducció al càlcul integral

A.1

### INTEGRALS DE RIEMANN

**Definició A.1.1** (Suma inferior i superior). Associades a la partició  $\mathcal{P}$  tenim dues possibles aproximacions de l'àrea, una suma inferior (o superior) associada a la partició  $\mathcal{P}$ :

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}), \quad m_i = \inf\{f(t) \mid t \in [t_{i-1}, t_i]\};$$

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}), \quad M_i = \sup\{f(t) \mid t \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Perquè  $L, U$  tinguin sentit, cal que  $m_i, M_i \in \mathbb{R}$  siguin finits. Implica que  $f$  sigui fitada.

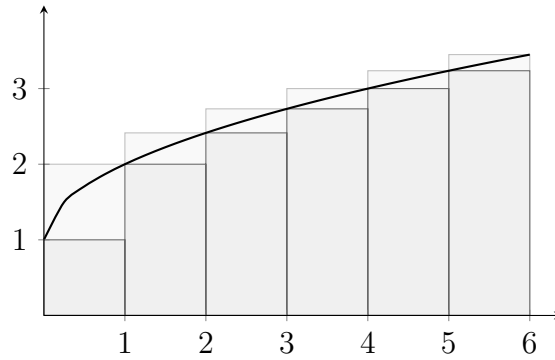


Figura A.1: La suma inferior (gris fosc) i superior (gris) de Riemann per a  $\mathcal{P} = \{0, \dots, 6\}$ .

**Definició A.1.2** (Integral inferior i superior).

1. El conjunt  $\mathcal{L}(f)$  és un conjunt fitat superiorment (qualsevol suma superior n'és una fita superior). Per tant, existeix la major de les fites inferiors:

$$\sup\{\mathcal{L}(f)\} = \int_a^b f.$$

Aquesta és, de fet, la integral inferior de  $f$  en  $[a, b]$ .

2. De la mateixa manera, el conjunt  $\mathcal{U}(f)$  és un conjunt fitat inferiorment (qualsevol suma inferior n'és una fita inferior). Per tant, existeix la menor de les fites superiors:

$$\inf\{\mathcal{U}(f)\} = \int_a^b f.$$

Aquesta és, de fet, la integral superior de  $f$  en  $[a, b]$ .

**Definició A.1.3** (Integrable en el sentit de Riemann). Es diu que una funció fitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  és integrable en el sentit de Riemann si

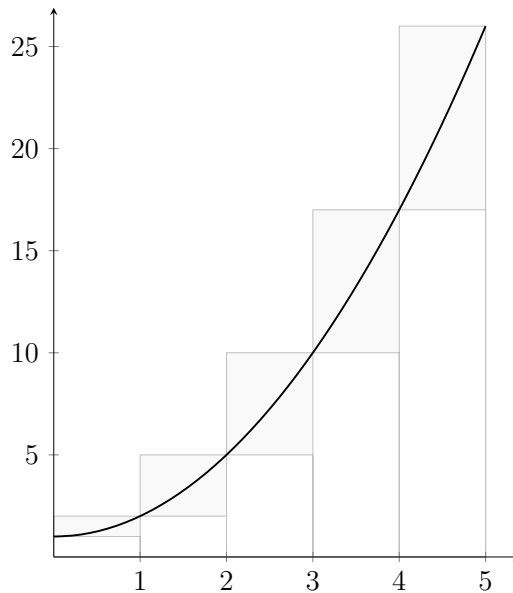
$$\int_a^b f = \int_a^b f.$$

Quan això passa, escriurem  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  i direm que:

$$\int_a^b f = \int_a^b f = \int_a^b f.$$

**Teorema A.1.4.** Sigui  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funció fitada. Aleshores,

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\} \subset [a, b] \mid U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$



**Proposició A.1.5.** Siguin  $f, g$  integrables en  $I = [a, b]$ . Llavors,  $f + g$  és integrable en  $I$  i

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

**Proposició A.1.6.** Sigui  $f$  integrable a  $I = [a, b]$  i  $c \in \mathbb{R}$ . Aleshores,  $cf$  és integrable a  $I$  i  $\int_a^b cf = c \int_a^b f$ .

**Teorema A.1.7** (Integrabilitat d'una composició de funcions). Sigui  $f$  integrable en  $[a, b]$  amb  $f([a, b]) \subset [c, d]$  i  $g$  contínua en  $[c, d]$ . Llavors,  $g \circ f$  és integrable en  $I$ .

**Proposició A.1.8.** Sigui  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Així, el valor absolut de la funció és integrable Riemann i  $\int_a^b |f| \leq \int_a^b |f|$ . Sigui  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  i sigui  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que per al conjunt  $\{x \in [a, b] \mid f(x) \neq g(x)\}$  és finit. Aleshores,  $g \in \mathcal{R}([a, b])$  i  $\int_a^b f = \int_a^b g$ .

## A.2

## TEOREMA FONAMENTAL DEL CÀLCUL

**Proposició A.2.1.** *Sigui  $f$  integrable en  $[a, c]$  i  $b \in (a, c)$ . Aleshores,  $f$  és integrable en  $[a, b]$  i  $[b, c]$  i*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f. \quad (\text{A.2.1})$$

*Recíprocament, si  $f$  és integrable en  $[a, b]$  i  $[b, c]$ , llavors és integrable en  $[a, c]$  i val (A.2.1).*

**Definició A.2.2** (Antiderivada). *Sigui  $f$  integrable en  $[a, b]$ . Aleshores, per la proposició anterior  $f$  és integrable en  $[a, x]$  per tot  $x \in [a, b]$  i té sentit definir la següent funció:*

$$F(x) = \int_a^x f.$$

De fet, si  $c \in [a, b]$  llavors aquesta integral també té sentit com a mínim pels  $x \geq c$ . Per a  $x < c$ , tampoc és un problema ja que podem aplicar la definició d'integral.

**Proposició A.2.3.** *Si  $f$  és integrable en  $[a, b]$ ,  $F(x) \in \mathcal{C}([a, b])$ .*

**Teorema A.2.4** (Teorema fonamental del Càlcul Integral). *Si  $f$  és integrable en  $[a, b]$  i  $f$  és contínua en  $c \in [a, b]$ , aleshores  $F$  és derivable en  $c$  i*

$$F'(c) = f(c).$$

**Corol·lari A.2.5** (Fórmula d'integració per parts). *Siguin  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrables. Suposem que  $f, g$  tenen una primitiva  $F, G$  respectivament. Aleshores,*

$$\int_a^b F \cdot g = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f \cdot G.$$

*Demostració.* Començarem dient que el fet que  $F$  sigui derivable implica que  $F$  és contínua i, per tant, és integrable. Com  $g$  és integrable,  $F \cdot g$  és integrable. Podem raonar anàlogament per  $f \cdot G$ . Apliquem que  $(F \cdot G)' = F \cdot g + f \cdot G$ , i com  $Fg + fG$  té primitiva podem aplicar Barrow a  $Fg + fG$ . ■

**Teorema A.2.6** (Canvi de variable). *Sigui  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  derivable, amb derivada contínua, tal que  $\varphi(c) = a$  i  $\varphi(d) = b$ . Sigui  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Aleshores:*

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ \varphi) \varphi'.$$

## A.3

## INTEGRACIÓ IMPRÒPIA

**Definició A.3.1** (Localment integrable). *Sigui  $a \in \mathbb{R}$  i  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Sigui  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Direm que  $f$  és localment integrable a  $[a, b)$ , i escriurem  $f \in \mathcal{R}_{loc}([a, b))$ , si  $f \in \mathcal{R}([a, x])$ , si  $f \in \mathcal{R}([a, x])$  per a tot  $x \in [a, b)$ .*

**Observació A.3.2.** Si  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies f$  fitada a  $[a, b]$ . En canvi, si  $f \in \mathcal{R}_{loc}([a, b])$  es dona si, i només si,  $f \in \mathcal{R}([a, x])$  per a tot  $x \in [a, b) \implies f$  és fitada a  $[a, x], \forall x \in [a, b)$ . Així, veiem que no és el mateix, ja que permetem que la fita depengui de  $x$ : també podria explotar a mesura que  $x \rightarrow b$ .

**Exemple A.3.3.** Per a  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $f$  és fitada a  $[0, x]$  per a tot  $x \in [0, 1)$ , però la fita depèn de  $x$ : podem dir que  $f$  no és localment integrable a l'interval  $[0, 2)$ .

**Definició A.3.4 (Localment fitada).** Una funció localment fitada a  $[a, b)$  és una funció fitada a tots els subinterval  $[a, x]$ ,  $x \in [a, b)$ .

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  és localment integrable, llavors la integral  $\int_a^b f$  podria no estar ben definida en el sentit Riemann, ja que  $f$  podria no ser fitada a  $[a, b)$ , però sabem què és  $\int_a^x f$  per a cada  $x \in [a, b)$ . Per tant, es podria optar per definir a tot l'interval fent servir la següent notació:

$$\int_a^b f := \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f.$$

**Definició A.3.5 (Integrabilitat Riemann d'un interval semiobert).** Sigui  $f \in [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{R}_{loc}([a, b))$ . Es diu que  $f$  és integrable Riemann a  $[a, b)$  i escriurem  $f \in \mathcal{R}([a, b))$  si el límit per l'esquerra:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f$$

existeix i és finit. Quan això passi, direm que  $\int_a^b f$  és una integral impròpia convergent i el seu valor és

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f$$

Si el límit no existeix, direm que  $\int_a^b f$  és una integral impròpia divergent. Anàlogament,  $f \in \mathcal{R}_{loc}((a, b])$  si  $f \in \mathcal{R}([x, b])$  per a tot  $x \in (a, b)$ . Quan això passa,  $\int_a^b f$  es diu impròpia quan  $x \rightarrow a$  i

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f.$$

**Observació A.3.6.** Si és una integral impròpia divergent, ho serà o bé perquè el límit oscil·la, o bé perquè aquest explota. També s'acostuma a dir que la integral  $\int_a^b f$  és impròpia quan  $x \rightarrow b$ , o que té una singularitat al punt  $b$ .

**Definició A.3.7 (Integrabilitat local d'un interval obert).** Donada una funció  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  amb  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , direm que  $f$  és localment integrable a  $(a, b)$ , i escriurem  $f \in \mathcal{R}_{loc}((a, b))$  si  $f \in \mathcal{R}([c, d])$  per a tot interval tancat  $[c, d] \subset (a, b)$ . Direm que  $\int_a^b f$  és convergent si existeix un nombre  $y \in (a, b)$  tal que les dues integrals impròpies

$$\int_a^y f(t) dt, \quad \int_y^b f(t) dt$$

són convergents. En tal cas, definirem:

$$\int_a^b f = \int_a^y f + \int_y^b f.$$

**Definició A.3.8** (Integrabilitat Riemann d'un interval obert). Direm que  $f \in \mathcal{R}((a, b))$  si existeix algun punt  $t \in (a, b)$  tal que  $f \in \mathcal{R}((a, t])$  i  $f \in \mathcal{R}([t, b))$ :

$$\int_a^b f = \int_a^t f + \int_t^b f,$$

on la primera és impròpia quan  $x \rightarrow a$  i la segona ho és quan  $x \rightarrow b$ . Si  $\exists t \in (a, b)$ , aleshores tot  $t \in (a, b)$  va bé. En altres paraules, quan això passa, la integral  $\int_a^b f$  és independent de  $t$ .

**Exemple A.3.9** (Model potencial al punt). Hem de decidir si volem aproximar per l'esquerra o per la dreta. Es destaca el límit de la singularitat i podem agafar un límit d'integració qualsevol, que s'adapti a la casuística del nostre problema. Aplicarem l'exemple anterior, del model potencial al 0.

1. Posem  $x \rightarrow a^+$ . Aleshores:

$$\int_a^1 \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ell \ll \infty, & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

2. Ara,  $x \rightarrow a^-$ . Apliquem un procediment anàleg:

$$\int_{a-1}^a \frac{dx}{(a-x)^\alpha} = \int_1^0 \frac{-dt}{t^\alpha} = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ell \ll \infty, & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

De la definició de  $f \in \mathcal{R}([a, b))$  sabem que la convergència de  $\int_a^b f$  és equivalent a demanar que tota primitiva  $F$  de  $f$  tingui límit finit quan  $x \rightarrow b$ . En el cas de funcions  $f \geq 0$ , l'existència de límit pot relaxar-se significativament. En efecte, si  $f \in \mathcal{R}_{loc}([a, b))$  amb  $f \geq 0$ , aleshores  $F(x) = \int_a^x f$  és creixent.

**Teorema A.3.10.** Si  $f \in \mathcal{R}_{loc}([a, b))$ , tal que  $f \geq 0$  en aquest interval, aleshores

$$f \in \mathcal{R}([a, b)) \iff F \text{ fitada a } [a, b).$$

**Teorema A.3.11** (Criteri de comparació per desigualtat). Siguin  $f, g : [a, b) \rightarrow [0, +\infty)$  localment integrables. Suposem que  $\exists k \geq 0$  i  $c \in [a, b)$  tal que  $f(x) \leq k \cdot g(x)$ ,  $\forall x \in [c, b)$ . Aleshores:

$$\int_a^b g \ll +\infty \implies \int_a^b f \ll +\infty.$$

**Teorema A.3.12** (Criteri de comparació per pas al límit). Siguin  $f, g : [a, b) \rightarrow [0, +\infty)$  tals que  $f, g \in \mathcal{R}_{loc}([a, b))$  i  $f, g \geq 0$ . Suposem que el límit  $A = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$  és  $A \in [0, +\infty]$ , és a dir, que  $A$  pot ser infinit però no contemplem el cas d'oscil·lacions infinites. Siguí com sigui, es dona el següent:

1. Si  $A = 0$ ,  $\int_a^b g \ll +\infty \implies \int_a^b f \ll +\infty$ .
2. Si  $A = +\infty$ ,  $\int_a^b f \ll +\infty \implies \int_a^b g \ll +\infty$ .
3. Si  $A \in (0, +\infty)$ ,  $\int_a^b f \ll +\infty \iff \int_a^b g \ll +\infty$ .

Els criteris de comparació fan referència només a integrands positius. Quan l'integrand no és positiu, les possibles cancel·lacions degudes a oscil·lacions en el signe de l'integrand podrien facilitar la convergència en alguns casos. En altres paraules, les funcions amb canvis de signe podrien generar integrals impròpies convergents sota criteris més generals. Per aquest motiu, el concepte de convergència absoluta no és trivial.

**Observació A.3.13.** Si  $f \in \mathcal{R}_{loc}([a, b))$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , amb  $f \geq 0$ , aleshores:

$$\int_a^b f \ll \infty \iff \left| \int_a^x f \right| \leq c.$$

Si  $f \not\geq 0$ , aleshores  $f$  pot oscil·lar de signe.

**Definició A.3.14** (Convergència absoluta). Sigui  $f \in \mathcal{R}_{loc}([a, b))$ . Es diu que la integral impròpia  $\int_a^b f$  és absolutament convergent si la integral impròpia  $\int_a^b |f|$  convergeix. Evidentment, si  $f \geq 0$  aleshores:

$$\int_a^b f \text{ convergència absoluta} \iff \int_a^b f \text{ convergència}.$$

**Teorema A.3.15** (Teorema de Dirichlet). Sigui  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  contínua i  $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Suposem que:

1.  $\exists K \geq 0$  tal que  $|\int_a^x f| \leq K$ ,  $\forall x \in [a, b)$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$ .
3.  $\exists K' \geq 0$  tal que  $\int_a^x |g'| \leq K'$ ,  $\forall x \in [a, b)$ .

Aleshores,  $\int_a^b f \cdot g$  convergeix.

## Llenguatge de les formes diferencials

B.1

### INTRODUCCIÓ

En  $\mathbb{R}^n$  tenim la base canònica de vectors  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , amb un 1 a la posició  $j$ -èsima i 0 a la resta,  $1 \leq j \leq n$ .  $(\mathbb{R}^n)^*$  són les formes lineals de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ . Una base canònica és  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ . En efecte,

$$dx_i(e_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq i, \\ 1, & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Definim una forma lineal per:  $T = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ ,  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Fixant  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ , una 1-forma és una aplicació en què a cada  $x$  li assignem una forma lineal:  $\omega(x) = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n$ . Això és:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ x &\longmapsto \omega(x) \end{aligned}$$

$\Lambda^1(\mathcal{U})$  són totes les 1-formes  $\omega(x)$  regulars (és a dir,  $a_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ ).

**Exemple B.1.1.** En  $\mathbb{R}^2$ , les 1-formes són  $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ .

Les aplicacions de  $k$ -variables en  $\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , són  $F(z_1, \dots, z_k)$  ( $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R}^n$ ) lineals en cada variable. El producte tensorial es defineix de la següent forma:

$$dx_{i_1} \times \dots \times dx_{i_k}(u_1, \dots, u_k) := dx_{i_1}(u_1) \dots dx_{i_k}(u_k).$$

**Definició B.1.2 (Hemisimetria).** Diem que  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  és hemisimètrica si es «comporta bé» respecte la permutació de vectors. En altres paraules,  $T(u_1, \dots, u_k) = \sigma(i_1, \dots, i_k) \cdot T(u_{i_1}, \dots, u_{i_k})$ , on  $\sigma(i_1, \dots, i_k)$  representa el signe de la permutació.

$$H(T)(u_1, \dots, u_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \sigma(i_1, \dots, i_k) \cdot T(u_{i_1}, \dots, u_{i_k}).$$

Dient  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ ,

$$dx_{i_1}(u_1) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(u_k) = H(dx_{i_1} \times \dots \times dx_{i_k}).$$

Si diem  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ ,  $dx_{i_1}(u_1) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(u_k)$  és una base de l'espai de  $k$ -formes simètriques. En  $\mathbb{R}^n$ , la dimensió de l'espai de formes hemisimètriques és  $\binom{n}{k}$ .

**Observació B.1.3.** Si fixem  $k = 2$ ,  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ . En canvi, si multipliquem  $dx_i \wedge dx_i$ , el resultat és  $-dx_i \wedge dx_i$ , de manera que  $dx_i \wedge dx_i = 0$ . Si generalitzem,  $k = n$ , a  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , on  $a$  és una aplicació en  $\mathbb{R}^n$ .

Igual que amb les 1-formes, donat  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ , en cada punt  $x \in \mathcal{U}$ , li podem associar una  $k$ -forma  $\Lambda^k(\mathcal{U})$ :

$$\omega_k(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) \cdot dx_{i_1}(u_1) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad a_{i_1, \dots, i_k} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}).$$

B.2

## INTEGRACIÓ DE FORMES

Veurem com donada una varietat a  $M$  de  $\dim(M) = k$  i  $\omega \in \Lambda_k$ , es pot definir  $\int_M \omega$ .

**Definició B.2.1.** Donada una  $n$ -forma,  $\omega_n = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1}(u_1) \wedge \dots \wedge dx_{i_n}(u_n) \in \Lambda^n(\mathcal{U})$  i donat  $D \subset \mathcal{U}$ , definim  $\int_D \omega = \int_D f$ .

El canvi de variable ara és fàcil:

$$g : \left. \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & D \\ (u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x_j = g_j(u_1, \dots, u_n) \\ dx_j = \frac{\partial g_j}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial g_j}{\partial u_n} du_n \end{array}$$

Aleshores, la integral queda de la següent manera:

$$\begin{aligned} \int_D f &= \int_D \omega(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_\Omega \omega(g_1(u_1, \dots, u_n), \dots, g_n(u_1, \dots, u_n)) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial u_i} du_i \right) \left( \frac{\partial g_i}{\partial u_i} du_i \right). \end{aligned}$$

Donat  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $d : \Lambda^k(\mathcal{U}) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(\mathcal{U})$  és tal que

$$d(f(x)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) dx_n.$$

Aleshores:

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d(a_{i_1, \dots, i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$



## *Bibliografia*

---

- [Mas23] Xavier MASSANEDA. *Càlcul Integral en Diverses Variables, 2022-2023*. Universitat de Barcelona, 2023.
- Apunts de l'assignatura Càlcul Integral en Diverses Variables, impartida per Xavier Massaneda.*



## Índex terminològic

	Symbols	
$\sigma$ -subadditivitat		7
$\sigma$ -àlgebra		8
<i>Com hauria de ser una mesura?</i>		4
	A	
Additivitat		21
Almost everywhere		9
Antiderivada		109
Area d'una superfície		81
	C	
Camp normal		79
Camp vectorial		56
Camp vectorial conservatiu		57
Canvi de paràmetre		52
Canvi de variable		34, 109
Canvi de variable, dimensió 1		34
Cardioide		53
Conjunt mesurable Lebesgue		8
Conjunt mesurable Lebesgue, alternativa		8
Convergència absoluta		112
Corba de classe $C^1$		49
Corba parametritzada		49
Corba regular		54
Corba tancada, corba simple		50
Criteri de comparació per desigualtat		111
Criteri de comparació per pas al límit		111
	D	
Divergència		96
Domini bàsic		64
Domini elemental		64
Domini elemental, $\mathbb{R}^3$		65
Domini regular		64
Domini regular, $\mathbb{R}^3$		65
	E	
Espai normal		79
Espai tangent		79

	<b>F</b>	
Flux d'un camp a través de la superfície		86
Funció integrable		23
Funció mesurable		12
Funció simple		17
Fórmula d'integració per parts		109
	<b>H</b>	
Hemisimetria		113
	<b>I</b>	
Integrabilitat d'una composició de funcions		108
Integrabilitat local d'un interval obert		110
Integrabilitat Riemann d'un interval obert		111
Integrabilitat Riemann d'un interval semiobert		110
Integrable en el sentit de Riemann		108
Integral d'un camp sobre la corba		56
Integral de $f$ a $S$		85
Integral de Lebesgue		22
Integral impròpia i integral de Lebesgue		24
Integral inferior i superior		107
Integral sobre una corba		55
Invariant per translacions		7
	<b>L</b>	
Lema de Borel-Cantelli		15
Lema de Fatou		27
Lema de Poincaré		60
Localment fitada		110
Localment integrable		109
Longitud de la corba		52
	<b>M</b>	
Mesura de Lebesgue		9
Mesura exterior de Lebesgue		6
Mesura i interval a $\mathbb{R}^n$		5
Mesura positiva		8
Més propietats		22
	<b>O</b>	
Obert estrellat		60
Observacions i propietats		20
	<b>P</b>	
Paràmetre arc		54

**R**

Relació entre Riemann i Lebesgue	24
Rotacional	61
Rotacional de $F$	88

**S**

Simplement connex	59
Stokes, superfícies orientades	95
Suma inferior i superior	107
Superfície elemental	75
Superfície regular orientada	92
Superfície tancada	93

**T**

Teorema d'Stokes	89
Teorema de Carathéodory	9
Teorema de Dirichlet	112
Teorema de Fubini	32
Teorema de Green	61
Teorema de la convergència dominada	27
Teorema de la convergència monòtona	25
Teorema de la divergència, o de Gauss	96
Teorema de Tonelli	32
Teorema fonamental de les integrals en línia	58
Teorema fonamental del Càlcul Integral	109

**V**

Vector normal	79
Volum d'un interval	5
Vora de $S$	83
Vora orientada	84, 92