Solucions comentades

P3) Demostra per reducció a l'absurd que si $n \in \mathbb{Z}$ és senar, aleshores $x^2 + 2x + 2n = 0$ no té solucions enteres.

Tal i com se'ns demana, raonarem per reducció a l'absurd. Primer que tot recordem en què consisteix aquest mètode de deducció. Imaginem que volguéssem provar com a cert un condicional del tipus $P \to Q$. El mètode de reducció al absurd parteix de l'assumpció de que l'antecedent del condicional (P) i la negació del conseqüent del mateix ($\neg Q$) són ambdues proposicions certes: és a dir, que la proposició $P \wedge \neg Q$ és certa. A partir d'aquesta hipòtesi, hom ha de fer servir els mètodes de deducció usuals a la cerca d'una contradicció amb la mateixa. Si aquest és el cas, llavors $P \wedge \neg Q$ haurà de ser falsa i per tant $\neg(P \wedge \neg Q)$ serà vertadera. Fent servir les equivalències lògiques conegudes, hom pot provar que $\neg(P \wedge \neg Q) \equiv (P \to Q)$. Tot plegat, aquest argument dóna lloc a la dessitjada prova del condicional.

Passem ara a la resolució de l'exercici raonant per reducció a l'absurd. Suposem doncs que n és un nombre senar i que l'equació $x^2 + 2x + 2n = 0$ té alguna solució entera. Per definició de nombre senar, existeix $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$. D'altra banda, diguem que l'esmentada solució entera de l'equació és $x_0 \in \mathbb{Z}$. A aquest respecte hi han dues possibilitats per x_0: bé és un nombre enter parell o bé és un nombre enter senar. Passem doncs a raonar per casos i veure que en ambdos arribem a una contradicció.

x_0 és parell: En aquest cas, per definició, existeix un nombre $\ell \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0 = 2\ell$. Operant hom té la següent cadena d'equivalències:

$$x_0^2 + 2x_0 + 2(2k+1) = 0 \iff 4\ell^2 + 4\ell + 4k + 2 = 0$$
$$\iff 4(\ell^2 + \ell + k) = -2 \iff 2(\ell^2 + \ell + k) = -1.$$

És clar que $(\ell^2 + \ell + k)$ és un nombre enter i en conseqüència que $2(\ell^2 + \ell + k)$ és un nombre parell. Això, en particular, implica que -1 és un nombre parell. Per tant, hi bastim una contradicció amb la suposició d'aquest primer cas.

x_0 és senar: Notem que $x_0^2 + 2x_0$ és equivalent a $x_0(x_0 + 2)$. Afirmem que $x_0(x_0 + 2)$ és un nombre enter senar. Per provar tal cosa demostrarem la següent proposició auxiliar:

Proposició 1 *Les següents afirmacions són certes:*

a) Per a tot nombre senar x, $x + 2$ és senar.

b) Per a tots x, y nombres senars, $x \cdot y$ és senar.

Prova 1 Primer provarem a) i posteriorment b). Donat x un nombre enter senar, per definició, existeix $k \in \mathbb{Z}$ de forma que $x = 2k + 1$. Aleshores,

$$x + 2 = (2k + 1) + 2 = 2(k + 1) + 1.$$

Escollint $k' = k + 1$ hom té, per definició, que $x + 2$ és un enter senar. Això prova a). Passem a provar b). Siguen x, y dos nombres senars, llavors existeixen $k, k' \in \mathbb{Z}$ de forma que $x = 2k+1$ i $y = 2k'+1$. Aleshores,

$$x \cdot y = (2k+1) \cdot (2k'+1) = 2(2kk' + k + k') + 1.$$

Escollint $\ell = (2kk' + k + k')$ hom té, per definició, que $x \cdot y$ és un nombre senar. Això prova b) i en conseqüència la demostració conclou.

Per hipòtesi x_0 és senar i per tant, atenent a la Proposició 1, $x_0^2 + 2x_0$ també ho és. Com que x_0 és una solució a l'equació, llavors $x_0^2 + 2x_0 = -2n$. Ara bé, $2n$ és un nombre enter parell mentre que acabem de provar que l'altra expressió es correspon amb un enter senar. Això dóna lloc a una contradicció amb la hipòtesi inicial d'aquest segon cas.

Com que en ambdós casos hi bastim una contradicció, l'equació $x^2 + 2x + 2n = 0$ no té solucions enteres quan n és un enter senar.

P4) Demostra per inducció que si a és la hipotenusa d'un triangle rectangle i b, c són els catets del triangle, aleshores $a^n \geqslant b^n + c^n$ per tot nombre natural $n \geqslant 2$.

El métode d'inducció es basa en el següent: donada una propietat $P(n)$ que depén del nombre natural n, volem veure si se satisfà per a tot $n \geqslant n_0$, per a un cert $n_0 \in \mathbb{N}$. Per a fer-ho, primer es comprova el cas inicial, és a dir, que $P(n_0)$ és cert. Després se suposa certa la propietat $P(n)$ (per a un cert $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$) i es demostra que llavors també és certa la propietat $P(n+1)$.

Veiem ara el cas que ens ocupa:

(i) És certa la propietat $a^n \geqslant b^n + c^n$ pel cas inicial $n = 2$:
Pel Teorema de Pitàgores, tenim que el triangle rectangle d'hipotenusa a i catets b, c, satisfà $a^2 = b^2 + c^2$. Així doncs,

$$a^2 = b^2 + c^2 \geqslant b^2 + c^2$$

com volíem veure.

(ii) Suposem ara que per a un cert $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, la propietat $a^n \geqslant b^n + c^n$ se satisfà, i volem veure que llavors $a^{n+1} \geqslant b^{n+1} + c^{n+1}$ també és cert.
Per hipòtesi d'inducció tenim que

$$a^{n+1} = a \cdot a^n \geqslant^{HI} a \cdot (b^n + c^n) = ab^n + ac^n. \tag{1}$$

Ara bé, observem que la hipotenusa d'un triangle rectangle serà sempre més gran que els seus catets, per tant $a \geqslant b$ i $a \geqslant c$. Per tant,

$$ab^n + ac^n \geqslant bb^n + cc^n = b^{n+1} + c^{n+1}. \tag{2}$$

Així doncs, si unim les desigualtats (1) i (2), obtenim el resultat que volíem.

Finalment, el principi d'inducció ens assegura que la propietat $a^n \geqslant b^n + c^n$ se satisfà per a tot nombre natural $n \geqslant 2$.

P5) Considera els següents conjunts: $A = \{z \in \mathbb{N} : z^2 \leqslant 37 \wedge \exists x \in \mathbb{Z}(z = 2x)\}$
$B = \{z \in \mathbb{Z} : |z| < 10 \wedge \exists x \in \mathbb{Z}(|z| = x^2)\}$
$C = \{0, \{0,4\}, \{-1,1\}, 6\}$

(a) Dóna extensionalment els conjunts: $A \setminus B$, $C \setminus A$, $(A \setminus B) \cap (C \setminus A)$ i $(A \setminus B) \cup (C \setminus A)$.

En primer lloc, observem que A és el conjunt dels nombres naturals que el seu quadrat és menor o igual que 37 i que són parells, extensionalment:

$$A = \{0, 2, 4, 6\};$$

i B és el conjunt d'enters que el seu valor absolut és estrictament menor que 10 i que és un quadrat, extensionalment,

$$B = \{-9, -4, -1, 0, 1, 4, 9\}.$$

Aleshores,

$$A \setminus B = \{2, 6\},$$
$$C \setminus A = \{\{0,4\}, \{-1,1\}\},$$
$$(A \setminus B) \cap (C \setminus A) = \emptyset,$$
$$(A \setminus B) \cup (C \setminus A) = \{2, 6, \{0,4\}, \{-1,1\}\}.$$

Digues raonadament si són certes o falses les següents afirmacions

(b) $\boxed{\{\{-1,1\}\} \in C}$ és FALS,

doncs $\{\{-1,1\}\}$ no és cap dels elements de la llista que defineix C per extensió. És a dir: $\{\{-1,1\}\} \neq 0$, $\{\{-1,1\}\} \neq \{0,4\}$, $\{\{-1,1\}\} \neq \{-1,1\}$ i $\{\{-1,1\}\} \neq 6$

$\boxed{\{\{-1,1\}\} \subseteq C}$ és CERT,

ja que per tot x, si $x \in \{\{-1,1\}\}$, aleshores $x = \{-1,1\}$ i $\{-1,1\} \in C$ ja que és un dels elements de la llista que defineix C per extensió.

$\boxed{\{\{1,-1\}\} \subseteq C}$ és CERT,

doncs $\{\{1,-1\}\} = \{\{-1,1\}\} \subseteq C$.

$\boxed{\{\{-1,1\}\} \subseteq B}$ és FALS,

doncs $\{-1,1\} \in \{\{-1,1\}\}$ i $\{-1,1\} \notin B$, ja que $\{-1,1\} \notin \mathbb{Z}$.

(c) $\boxed{A \cap B \subseteq C}$ és FALS,

doncs $4 \in A \cap B = \{0,4\}$ i $4 \notin C$ ja que 4 no és cap dels elements de la llista que defineix C per extensió.

$\boxed{A \cap B \in C}$ és CERT,

doncs $A \cap B = \{0,4\}$ que és un dels elements de la llista que defineix C per extensió.