P1 Sigui $a \in \mathbb{R}$. Demostra per inducció que si $1 + a > 0$, aleshores $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$ per tot nombre natural $n$.

Sigui $a$ un nombre real tal que $(1 + a) > 0$. Demostrem per inducció sobre $n$ ($n$ natural) que per tot $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$.
Primer provarem la base de la inducció, (la propietat pel cas inicial) és a dir, demostrarem la propietat pel primer natural que verifica la propietat. En aquest cas com que es verifica per a tots el naturals, el primer serà $n = 0$. I podem veure que en efecte, per a $n = 0$ tenim

$$(1 + a)^n = (1 + a)^0 = 1 \geqslant 1 = 1 + 0 \cdot a = 1 + na.$$

Ara farem el pas d'inducció. Suposem que la propietat és certa per algun nombre natural $n = k$, $k \in \mathbb{N}$ (hipotesi d'inducció), es a dir $(1 + a)^k \geqslant 1 + ka$ i demostrem que aleshores la propietat és certa per al successor, $k + 1$:
Per hipòtesi d'inducció tenim que $(1+a)^k \geqslant 1+ka$. Com que $(1+a) > 0$, podem multiplicar cada terme de la desigualtat anterior, obtenint $(1 + a)^k \cdot (1 + a) \geqslant (1 + ka) \cdot (1 + a)$. Operant, això es el mateix que $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+a+ka+ka^2$. Ara, com $a^2 \geqslant 0$ i $k \geqslant 0$ tenim que $ka^2 \geqslant 0$ i per tant $1 + a + ka + ka^2 \geqslant 1 + a + ka$. Finalment, reescrivint la cadena de desigualtats obtenim $(1 + a)^{k+1} \geqslant 1 + a + ka + ka^2 \geqslant 1 + a + ka = 1 + (k + 1)a$, és a dir, hem provat que la desigualtat es verifica per a $n = k + 1$.

P2 Recorda que $\mathbb{Q}^+$ és el conjunt dels nombres racionals positius. Definim la següent relació $R$ en $\mathbb{Q}^+$:

$$aRb \iff (q_1 | q_2 \text{ i } q_1 \neq q_2) \text{ o } (q_1 = q_2 \text{ i } p_1 \leqslant p_2)$$

on $p_1/q_1 = a$, $p_2/q_2 = b$ són les seves fraccions irreductibles.

**(1)** Demostra que $R$ és un ordre en $\mathbb{Q}^+$.

Hem de demostrar les tres propietats per ser ordre:

- *Reflexiva*: Sigui $a \in \mathbb{Q}^+$, considerem la seva fracció irreductible $a = \frac{p}{q}$. Com que $q = q$ i $p \leqslant p$, tenim que $aRa$.
- *Transitiva*: Siguin $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$ i les fraccions irreductibles respectives $a = \frac{p_1}{q_1}$, $b = \frac{p_2}{q_2}$, $c = \frac{p_3}{q_3}$. Suposem que $aRb$ i $bRc$, per tant,

$$aRb \Longrightarrow (q_1 | q_2 \text{ i } q_1 \neq q_2) \text{ o } (q_1 = q_2 \text{ i } p_1 \leqslant p_2)$$
$$bRc \Longrightarrow (q_2 | q_3 \text{ i } q_2 \neq q_3) \text{ o } (q_2 = q_3 \text{ i } p_2 \leqslant p_3)$$

Tenim 4 casos:

– Si $q_1 | q_2$ i $q_1 \neq q_2$ i $q_2 | q_3$ i $q_2 \neq q_3$. Per una banda,

$$q_1 | q_2 \text{ i } q_2 | q_3 \implies q_1 | q_3.$$

D'altra banda, com que $q_1 | q_2$ i $q_1 \neq q_2$ es té que $q_1 < q_2$. De forma similar per $q_2$ i $q_3$ es dedueix que $q_2 < q_3$. Per tant,

$$q_1 < q_2 \text{ i } q_2 < q_3 \implies q_1 < q_3 \implies q_1 \neq q_3.$$

Aleshores hem demostrat que $q_1 | q_3$ i $q_1 \neq q_3$, per tant, $aRc$.

– Si $q_1|q_2$ i $q_1 \neq q_2$ i $q_2 = q_3$ i $p_2 \leqslant p_3$. Primer

$$q_1|q_2 \text{ i } q_2 = q_3 \implies q_1|q_3.$$

Altre cop tenim que

$$q_1|q_2 \text{ i } q_1 \neq q_2 \implies q_1 < q_2 = q_3 \implies q_1 \neq q_3.$$

En resum, hem vist que $aRc$.

– Si $q_1 = q_2$ i $p_1 \leqslant p_2$ i $q_2|q_3$ i $q_2 \neq q_3$. Primer tenim que

$$q_1 = q_2|q_3 \implies q_1|q_3.$$

Després com que $q_1 = q_2$ i $q_2 \neq q_3$, es té que $q_1 \neq q_2$. Queda demostrat per tant que $aRc$.

– Si $q_1 = q_2$ i $p_1 \leqslant p_2$ i $q_2 = q_3$ i $p_2 \leqslant p_3$. Com que

$$q_1 = q_2 \text{ i } q_2 = q_3 \implies q_1 = q_3$$

i la primera condició de la relació, $q_1 = q_3$ és certa. En segon lloc, com que

$$p_1 \leqslant p_2 \text{ i } p_2 \leqslant p_3 \implies p_1 \leqslant p_3.$$

Per tant, $aRc$. I així queden demostrats tots els possibles casos, que ens demostren la transitivitat de la relació $R$.

- *Antisimètrica*: Siguin $a, b \in \mathbb{Q}^+$ amb les seves fraccions irreductibles respectives, $a = \frac{p_1}{q_1}$, $b = \frac{p_2}{q_2}$. Suposem que $aRb$ i $bRa$. Estudiem els dos casos que ens dóna el fet que $aRb$.

  – Si $q_1|q_2$ i $q_1 \neq q_2$. Primer podem deduir

  $$q_1|q_2 \text{ i } q_1 \neq q_2 \implies q_1 < q_2 \implies q_2 \nmid q_1.$$

  Com que $bRa$, i utilitzant el que acabem d'observar, deduim que l'enunciat de la definició de la relació $R$ que es compleix és el segon, per tant, $q_2 = q_1$. Aquest fet contradiu la hipòtesi de que $q_1 \neq q_2$. Per tant aquest cas no es pot donar si $aRb$ i $bRa$.

  – Si $q_1 = q_2$ i $p_1 \leqslant p_2$. Com que $bRa$ i $q_1 = q_2$, per força s'ha de satisfer el segon enunciat de la definició de la relació $R$, és a dir, $q_2 = q_1$ i $p_2 \leqslant p_1$. Per tant,

  $$p_1 \leqslant p_2 \text{ i } p_2 \leqslant p_1 \implies p_1 = p_2.$$

  Finalment, com que $q_1 = q_2$ i $p_1 = p_2$, hem obtingut el que volíem, $a = b$ i al relació és antisimètrica.

**(2)** $\boxed{\text{Determina si } R \text{ és un ordre total.}}$

Per ser ordre total, la relació hauria de ser certa per a tot $a, b \in \mathbb{Q}^+$ en una direcció $aRb$ o en l'oposada, $bRa$. Observem que si els denominadors son diferents però no són divisibles entre ells, aleshores no és cert cap dels dos enunciats que defineixen la relació, en cap dels dos sentits. Per tant intuïm que $R$ no és un ordre total. Per demostrar-ho hem de trobar una parella $a, b \in \mathbb{Q}^+$ que no satisfaci ni $aRb$ ni $bRa$. Per trobar-la ens guiem en la idea anterior, busquem dos denominadors coprimers diferents, per exemple, si triem

$$a = \frac{3}{5} \text{ i } b = \frac{3}{4}$$

com que 4 no divideix a 5 i 5 no divideix a 4, es té que $\neg(aRb)$ i $\neg(bRa)$.

**(3)** Demostra o refuta les següents afirmacions:

**(1)** $\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}^+ \exists y \in \mathbb{Q}^+ \; xRy.}$

Aquesta afirmació és certa. Donat que ja hem demostrat la reflexitivitat de $R$, per a cada $x \in \mathbb{Q}^+$ podem agafar $y = x$ i aquest $y$ satisfà que $xRy$.

**(2)** $\boxed{\exists y \in \mathbb{Q}^+ \forall x \in \mathbb{Q}^+ \; xRy.}$

Aquesta afirmació és falsa. Per demostrar-ho, hem de veure que per a qualsevol $y \in \mathbb{Q}^+$ existeix un $x \in \mathbb{Q}^+$ tal que $\neg(xRy)$. Sigui $y \in \mathbb{Q}^+$ qualsevol, si $y = \frac{p}{q}$ és la seva fració irreductible aleshores escollim per exemple,

$$x = \frac{p+q}{q}.$$

No sabem si $\frac{p+q}{q}$ és una fracció irreductible. Anem a veure-ho per reducció a l'absurd. Suposem que $mcd(p+q, q) = r > 1$. Aleshores existeixen $a, b \in \mathbb{Z}$ tals que,

$$p + q = a \cdot r \quad \text{i} \quad q = b \cdot r.$$

Per tant, $p = ar - q = ar - br = (a-b)r$ i $q = br$, d'on es dedueix que $r|p$ i $r|q$, contradicció amb el fet que $\frac{p}{q}$ és una fracció irreductible.

Ara si que podem treballar amb $\frac{p+q}{q}$ com a fracció irreductible de $x$. Observem aleshores que com que $q = q$ i $p + q > p$ es té que $\neg(xRy)$ i per tant hem trobat la $x$ que estàvem buscant.

**(3)** $\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}^+ \exists y \in \mathbb{Q}^+ \; yRx.}$

Aquesta afirmació és certa i es demostra de forma similar a l'apartat *(a)*. Sigui $x \in \mathbb{Q}^+$, triem $y = x$ i com que la relació és reflexiva, és cert que $yRx$.

**(4)** $\boxed{\exists y \in \mathbb{Q}^+ \forall x \in \mathbb{Q}^+ \; yRx.}$

Aquesta afirmació és certa. L'element $y$ que satisfà l'enunciat és $y = 1$. Per veure-ho, hem de demostrar que $\forall x \in \mathbb{Q}^+$, $1Rx$.

Sigui $x \in \mathbb{Q}^+$ qualsevol i sigui $\frac{p}{q}$ la seva fracció irreductible. Suposem $p \geqslant 1$ i $q \geqslant 1$. La fracció irreductible de $y = 1$ és $\frac{1}{1}$. Estudiem els dos casos en que $q \neq 1$ o $q = 1$. Si $q \neq 1$ aleshores,

$$1|q \text{ i } 1 \neq q \implies \frac{1}{1} R \frac{p}{q}.$$

Altrament, si $q = 1$,

$$1 = q \text{ i } 1 \leqslant p \implies \frac{1}{1} R \frac{p}{q}.$$

Per tant, l'1 está relacionat amb tot element $x \in \mathbb{Q}^+$.

P3 Sigui $A$ un conjunt no buit i $X, Y, B \subseteq A$ tals que $B \neq \emptyset$.

**(1)** Demostra que
$([X \setminus (B \cap Y)] \cup [Y \setminus (B \cap X)]) \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow X \cap B = Y \cap B$.

Donats $A \neq \emptyset$ i $X, Y, B \subseteq A$ amb $B \neq \emptyset$, hem de demostrar dues implicacions:
Primer demostrem que $([X \setminus (B \cap Y)] \cup [Y \setminus (B \cap X)]) \cap B = \emptyset \Longrightarrow X \cap B = Y \cap B$.
Per això suposem que $X, Y, B \subseteq A$ satisfàn l'equació
$([X \setminus (B \cap Y)] \cup [Y \setminus (B \cap X)]) \cap B = \emptyset$ i volem demostrar que $X \cap B = Y \cap B$. Ara per demostrar una igualtat de conjunts recordem que haurem de demostrar les dues inclusions.
Per tant per demostrar que $X \cap B \subseteq Y \cap B$:
Sigui $a \in X \cap B$, això vol dir que $a \in X$ i $a \in B$.
Suposem que $a \notin Y$, per tant $a \notin B \cap Y$ i així com que $a \in X$ tenim que $a \in X \setminus (B \cap Y)$. Això implica que $a \in [X \setminus (B \cap Y)] \cup [Y \setminus (B \cap X)]$ ja que per definició un element pertany a la unió de dos conjunts si al menys pertany a un d'ells. Pero com que també $a \in B$ per hipòtesi, tenim que $a \in ([X \setminus (B \cap Y)] \cup [Y \setminus (B \cap X)]) \cap B$, però aquest conjunt és el buit, és a dir, no té elements. Aleshores tenim una contradicció, ja que hem demostrat que $a$ hi pertany. La contradicció ve de suposar que $a \notin Y$. Per tant s'haurà de complir necessàriament que $a \in Y$. Com ja teníem que $a \in B$ ens queda que $a \in Y \cap B$ com volíem demostrar.
L'inclusió recíproca, és a dir $Y \cap B \subseteq X \cap B$ es demostra de forma totalment anàloga intercanviant els papers de $X$ i $Y$.

Per a l'implicació $X \cap B = Y \cap B \Longrightarrow ([X \setminus (B \cap Y)] \cup [Y \setminus (B \cap X)]) \cap B = \emptyset$
Suposem que el conjunts donats $X, Y, B \subseteq A$ satisfan $X \cap B = Y \cap B$. Per demostrar que $([X \setminus (B \cap Y)] \cup [Y \setminus (B \cap X)]) \cap B = \emptyset$ procedirem una altra vegada per reducció a l'absurd suposant que existeix algun element $a \in ([X \setminus (B \cap Y)] \cup [Y \setminus (B \cap X)]) \cap B$. Així doncs tenim que $a \in B$ i que $a \in [X \setminus (B \cap Y)] \cup [Y \setminus (B \cap X)]$. Ens trobem dos casos $a \in [X \setminus (B \cap Y)]$ o $a \in [Y \setminus (B \cap X)]$. Si tenim que $a \in [X \setminus (B \cap Y)]$ aleshores $a \in X$ i $a \notin (B \cap Y)$. Com que $X \cap B = Y \cap B$, la segona condició és equivalent a $a \notin (B \cap X)$, és a dir $a \notin B$ o $a \notin X$ però com que al principi em dit que $a \in B$, tenim necessàriament que $a \notin X$. Però això és una contradicció, ja que no pot ser que $a \in X$ i $a \notin a$. Per tant $a \notin [X \setminus (B \cap Y)]$ i així $a \in [Y \setminus (B \cap X)]$. Raonant la mateixa forma intercanviant una vegada més els papers de $X$ i $Y$ obtindrem també una contradicció.
Això ve de suposar que existeix algun element al conjunt
$([X \setminus (B \cap Y)] \cup [Y \setminus (B \cap X)]) \cap B$. Per tant, aquest conjunt no té elements, és a dir, és el buit.

**(2)** Definim en $P(A)$ la següent relació:
$X \sim Y \Longleftrightarrow ([X \setminus (B \cap Y)] \cup [Y \setminus (B \cap X)]) \cap B = \emptyset$.
Demostra que $\sim$ és una relació d'equivalència.

A l'apartat anterior hem demostrat que per a $A \neq \emptyset$ i $X, Y, B \subseteq A$ amb $B \neq \emptyset$,
$([X \setminus (B \cap Y)] \cup [Y \setminus (B \cap X)]) \cap B = \emptyset$ és el mateix que $X \cap B = Y \cap B$. Per tant, per qualsevol $X, Y \in P(A)$, $X \sim Y \Longleftrightarrow X \cap B = Y \cap B$ cosa que ens simplifica molt el

treball ja que ara aprofitarem les mateixes propietats de la igualtat (reflexivitat, simetria i transitivitat) per probar que $\sim$ és una relació d'eqivalència:

La relació $\sim$ és *reflexiva*: Donat $X \in P(A)$, és clar que $X \cap B = X \cap B$ per la reflexivitat de la igualtat i per tant $X \sim X$.

La relació $\sim$ és *simètrica*: Donats $X, Y \in P(A)$ tals que $X \sim Y$, aleshores $X \cap B = Y \cap B$, però això, per la simetria de la igualtat, és el mateix a dir que $Y \cap B = X \cap B$, és a dir $Y \sim X$, com volíem demostrar.

La relació $\sim$ és *transitiva*: Donats $X, Y, Z \in P(A)$ tals que $X \sim Y$ i $Y \sim Z$, aleshores $X \cap B = Y \cap B$ i $Y \cap B = Z \cap B$. Però això, per la transitivitat de la igualtat, implica que $X \cap B = Z \cap B$, és a dir $X \sim Z$ com volíem demostrar.

**(3)** $\boxed{\text{Demostra que } \{\overline{Y} : Y \in P(B)\} \text{ és una bona representació de } P(A)/\sim.}$

Una bona representació d'un conjunt quocient és un conjunt de classes d'equivalència en el qual es troben totes les classes del conjunt quocient però sense repeticions. Així haurem de demostrar que per a tota $\overline{X} \in P(A)/\sim$, tenim que $\overline{X} \in \{\overline{Y} : Y \in P(B)\}$ i que per qualssevol $\overline{X}, \overline{Y} \in \{\overline{Z} : Z \in P(B)\}$ tals que $\overline{X} = \overline{Y}$ aleshores $X = Y$.

Sigui $\overline{X} \in P(A)/\sim$, és clar que $X \sim X \cap B$, ja que $X \cap B = (X \cap B) \cap B$, a més a més tenim que $X \cap B \subseteq B$, per tant $\overline{X} = \overline{X \cap B} \in \{\overline{Z} : Z \in P(B)\}$.

Ara, siguin $\overline{X}, \overline{Y} \in \{\overline{Z} : Z \in P(B)\}$ tals que $\overline{X} = \overline{Y}$, com que $X, Y \subseteq B$, tenim que $X = X \cap B = Y \cap B = Y$ com volíem demostrar.