2

2.1 Discutiu sistemes d'equacions, si cal, per determinar quins dels següents conjunts de vectors de $\mathbb{R}^3$ són de vectors independents.

(a) $\{(3,1,2),(1,-4,0),(1,7,2)\}$

(b) $\{(1,1,2),(1,-4,2),(1,7,2)\}$

(c) $\{(2,1,2),(1,3,2),(0,0,0)\}$

Doneu una relació de dependència en cas que no ho siguin.

2.2 El mateix de l'exercici 2.1 per a

(a) $\{(2,5,2),(-1,-4,2),(1,2,4)\}$

(b) $\{(2,1,2),(5,-4,2),(1,7,4)\}$

2.3 Demostreu que dos vectors són linealment dependents si i només si un d'ells és múltiple de l'altre.

2.4 Doneu un exemple de tres vectors linealment dependents de $\mathbb{R}^3$ un dels quals no sigui combinació lineal dels altres.

2.5 Demostreu que polinomis $P_1(X),\ldots,P_s(X)$ de graus diferents dos a dos ($\text{gr}\, P_i(X) \neq \text{gr}\, P_j(X)$) si $i \neq j$) són linealment independents. (*Indicació:* ordeneu-los per graus decreixents)

2.6 Demostreu que les funcions e^x, e^{2x}, e^{3x} són linealment independents. *Indicació:* suposeu que una combinació lineal de les funcions val zero i deriveu-la dues vegades).

2.7 Siguin $u_1, u_2, \cdots, u_k$ vectors linealment independents. Definim

$$v_1 = u_1, \quad v_j = u_1 - \sum_{i=2}^{j} u_i \quad \text{per } 2 \leq j \leq k.$$

Estudieu si els vectors $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ són linealment independents.

2.8 A $\mathbb{R}^n$ considerem els vectors $u_1 = (1,1,0,\cdots,0,0)$, $u_2 = (0,1,1,0,\cdots,0,0)$, $\cdots$, $u_{n-1} = (0,0,\cdots 1,1)$, $u_n = (1,0,\cdots,0,1)$. Determineu per a quins valors de n són linealment independents.

2.9 Determineu quins dels següents subconjunts de $\mathbb{R}^3$ són subespais (doneu una demostració en cas afirmatiu i un contraexemple en cas negatiu):

(a) $\{(x,y,z) | 2x + 3y - z = 0\}$

(b) $\{(x,y,z) | x - 2y - z = 1\}$

(c) $\{(x,y,z) | x - y - z = 0, y + 2z = 0\}$

2.10 El mateix de l'exercici 2.9 per a :

(a) $\{(x,y,z)|2x+3y-z \leq 0\}$

(b) $\{(x,y,z)|x-2y-z=0, x+y-z=0, 2x-y-2z=0\}$

(c) $\{(x,y,z)|x-y-z=0, x^2-6xy+9y^2=0\}$

2.11 Demostreu que els polinomis $P(X)$ que satisfan l'equació diferencial

$$x\frac{dP(X)}{dX} - P(X) = 0$$

formen un subespai de l'espai dels polinomis.

2.12 Determineu una base de cadascun dels subespais de $\mathbb{R}^4$

$$F = <(1,3,-3,1), (3,1,-1,3), (1,1,-1,1)>$$
$$G = <(1,3,-3,1), (1,0,-1,1), (1,1,-1,2)> .$$

Determineu si el vector $(1,1,-1,1)$ pertany a F o G i en cas afirmatiu expresseu-lo com combinació lineal de la base trobada

2.13 El mateix de l'exercici 2.12 per a

$$F = <(1,3,-3,1), (1/3,1,-1,0), (1,3,-3,2)>$$
$$G = <(1,1,1,1), (3,1,0,3), (1,-1,0,1)> .$$

2.14 Determineu a i b per tal que els vectors

$$(1,1,0,a),\ (3,-1,b,-1),\ (-3,5,a,-4) \in \mathbb{R}^4$$

siguin linealment dependents. Expresseu, en aquests casos, un d'ells com a combinació lineal dels altres.

2.15 Calculeu les components del vector $(6,9,14)$ en les bases de $\mathbb{R}^3$:

(i) $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$,

(ii) $((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$,

(iii) $((1,1,1),(1,1,2),(1,2,3))$.

2.16 Demostreu que $\{(0,1,-2,1),\ (1,1,2,-1),\ (1,0,0,1),\ (2,2,0,-1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$. Expresseu el vector $(4,2,-1,5)$ en aquesta base.

2.17 Sigui u_1, u_2, u_3, u_4 una base d'un espai vectorial E de dimensió 4. Estudieu si els vectors $w_1 = u_1 - u_3 + 2u_4$, $w_2 = 2u_1 + 3u_2 + u_3 + u_4$, $w_3 = u_1 + 3u_2 + 2u_3 - u_4$ i $w_4 = u_1 + u_2 + u_4$ són linealment independents. Extraieu-ne el màxim nombre de vectors linealment independents i construïu una base de E que contingui els vectors escollits.

PROBLEMAS. Lista 2.

2.6. Demostrar que e^x, e^{2x}, e^{3x} son funciones linealmente independientes

si $ae^x + be^{2x} + ce^{3x} = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow a=b=c=0$

derivando

$ae^x + 2be^{2x} + 3ce^{3x} = 0$ — $be^{2x} + 2ce^{3x} = 0$

derivando

$ae^x + 4be^{2x} + 9ce^{3x} = 0$ — $3be^{2x} + 8ce^{3x} = 0$

$$\begin{cases} be^{2x} + 2ce^{3x} = 0 \\ 3be^{2x} + 8ce^{3x} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3be^{2x} + 6ce^{3x} = 0 \\ 3be^{2x} + 8ce^{3x} = 0 \end{cases}$$

$2ce^{3x} = 0$ la exponencial es una función no nula

$c = 0$

$a = 0$

$b = 0$

2.7. Demostrar si $v_1, \dots, v_k$ son independientes

$u_1, \dots, u_n \in E$ linealmente independientes

$v_1 = u_1 \qquad v_j = u_1 - \underbrace{\boxed{\sum_{i=2}^{j} u_i}}_{u_2 + u_3 + \cdots + u_j}$ para $2 \leq j \leq k$

$v_j = u_1 - u_2 - u_3 \cdots - u_j$

$\downarrow$

$v_1 = u_1$

$v_2 = u_1 - u_2$

$v_3 = u_1 - u_2 - u_3$

$\vdots$

$v_k = u_1 - u_2 - u_3 \dots - u_k$

$a_i = 0 \ \forall i$

si $0 = \underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k}_{\text{vectores independientes}} = \underbrace{(a_1 + \dots + a_k) u_1 - (a_2 \cdots a_k) u_2 - (a_3 \cdots a_k) u_3 \dots - a_k u_k}_{\text{suma de vectores que da 0}} = 0$

Los vectores son independientes + los coeficientes son 0

$\boxed{u_1, \dots, u_k \text{ son independientes}}$

$a_1 + \dots + a_k = 0$

$a_2 + \dots + a_k = 0$

$a_k = 0$

$\boxed{a_1 = 0 \ \forall i}$

2.8. valors de $n \to$ linealment independents

$$
\begin{array}{lll}
u_1 = & (1\ 1\ 0\ 0 \dots 0) & \cdot a_1 \\
u_2 = & (0\ 1\ 1\ 0 \dots 0) & \cdot a_2 \\
u_3 = & (0\ 0\ 1\ 1 \dots 0) & \cdot a_3 \\
\vdots & & \\
u_{n-1} = & (0\ 0 \dots 1\ 1) & \cdot a_{n-1} \\
u_n = & (1\ 0 \dots 0\ 1) & \cdot a_n
\end{array}
$$

suma $= 0$ (linealmente independientes)

$a_1 + a_n = 0$

$a_1 + a_2 = 0$

$a_2 + a_3 = 0$

...

$$
\begin{array}{ll}
a_1 + a_n = 0 & a_2 = -a_1 \\
a_1 + a_2 = 0 & a_3 = a_1 \\
a_2 + a_3 = 0 & a_4 = -a_1 \\
\vdots & \\
a_{n-1} + a_n = 0 &
\end{array}
$$

$a_n = (-1)^{n-1} a_1 \begin{cases} -a_1 \text{ si } n \text{ par} \\ a_1 \text{ si } n \text{ impar} \end{cases}$

$\begin{cases} n \text{ par} \quad a_1 - a_1 = 0 \quad 0 = 0 \to \text{vectores dependientes} \\ n \text{ impar} \quad a_1 + a_1 = 0 \quad a_n = 0 \to \text{vectores independientes} \end{cases}$

2.9. Determinar si el subconjunto de $\mathbb{R}$ es subespacio vectorial

a) $F_1 \{(x, y, z) \mid 2x + 3y - z = 0\}$ sí es subespacio

si $(x, y, z) \in F_1 \to 2x + 3y - z = 0$
si $(x', y', z') \in F_1 \to 2x' + 3y' - z' = 0$ $\Big\}\ \oplus$ $\quad 2(x + x') + 3(y + y') - (z + z') = 0$

$(x + x', y + y', z + z') \in F_1$

$(x, y, z) + (x', y', z') \in F_1$

si $(x, y, z) \in F_1$, $a \in \mathbb{R}$ $\to$ $2x + 3y - z = 0$

$2ax + 3ay - az = 0$

$(ax, ay, az) \in F_1$

b) $F_2 \{(x, y, z) \mid x - 2y - z = 1\}$

no es subespacio porque $\vec{0} = (0, 0, 0) \notin F_2$

c) $F_3 \{(x, y, z) \mid \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array}\}$ sí es subespacio

si $(x, y, z) \in F_3 \to \begin{cases} x - y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$

si $(x', y', z') \in F_3 \to \begin{cases} x' - y' - z' = 0 \\ y' + 2z' = 0 \end{cases}$

$x + x' - (y + y') + (z + z') = 0$

$y + y' + 2(z + z') = 0$

$\Big\}\ \begin{array}{l} (x, y, z) \in F_3 \\ (x', y', z') \in F_3 \end{array}$

si $(x, y, z) \in F_3$, $a \in \mathbb{R}$ $\quad x - y - z = 0 \to ax - ay - az = 0$

$y + 2z = 0 \to ay + 2az = 0$ $\quad \Big|\ (ax, ay, az) \in F_3$

2.10. Determinar si el subconjunto de $\mathbb{R}$ es subespacio

a) $\{(x, y, z) \mid 2x + 3y - z \leq 0\}$

el vector opuesto de x, y, z no está dentro del subespacio

$-x, -y, -z \rightarrow -2x - 3y - z \geq 0 \rightarrow$ se sale del subespacio

b) $\{(x, y, z) \mid \begin{array}{l} x - 2y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{array}$

si $(x, y, z) \in F$ $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$

$(x+x') - 2(y+y') - (z+z') = 0$

$(x+x') + (y+y') - (z+z') = 0$ $\quad (x, y, z) \in F$

si $(x', y', z') \in F$ $\begin{cases} x' - 2y' - z' = 0 \\ x' + y' - z' = 0 \\ 2x' - y' - 2z' = 0 \end{cases}$

$\rightarrow 2(x + x') - (y + y') - 2(z - z') = 0$

si $(x, y, z) \in F$, $a \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} ax - 2ay - az = 0 \\ ax + ay - az = 0 \\ 2ax - ay - 2az = 0 \end{cases}$ $\quad (ax, ay, az) \in F$

c) $\{(x, y, z) \mid \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x^2 - 6xy + 9y^2 = 0 \end{array}\}$

↳ las condiciones no lineales no subespacio

$x^2 - 6xy + 9y^2 = (x - 3y)^2 \rightarrow (x - 3y)^2 = 0$

$x - 3y = 0$

$\{(x, y, z) \mid \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{array}\}$ es subespacio

2.12. En $\mathbb{R}^4$

base de $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = F$

$$F = \begin{array}{l} v_1 = (1 \ \ 3 \ -3 \ \ 1) \\ v_2 = (3 \ \ 1 \ -1 \ \ 3) \\ v_3 = (1 \ \ 1 \ -1 \ \ 1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{ll} v'_1 = v_1 & = (1 \ \ 3 \ -3 \ \ 1) \\ v'_2 = v_2 - 3v_1 & = (0 \ -8 \ \ 8 \ \ 0) \\ v'_3 = v_3 - v_1 & = (0 \ -2 \ \ 2 \ \ 0) \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} v''_1 = v'_1 = (1 \ \ 3 \ -3 \ \ 1) \\ v''_2 = v'_2 = (0 \ -8 \ \ 8 \ \ 0) \\ v''_3 = v'_3 - \frac{1}{4} v'_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0) \end{array}$$

} base de F → dimensión de F = 2

→ Los vectores son dependientes

① relación de dependencia de los vectores

$$0 = v''_3 = v'_3 - \frac{1}{4} v_2 = (v_3 - v_1) - \frac{1}{4}(v_2 - 3v_1) =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{4} v_1 - \frac{1}{4} v_2 + v_3 = 0}$$

base de $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = G$

$$G = \begin{array}{l} v_1 = (1 \ \ 3 \ -3 \ \ 1) \\ v_2 = (1 \ \ 0 \ -1 \ \ 1) \\ v_3 = (1 \ \ 1 \ -1 \ \ 2) \end{array} \rightarrow \begin{array}{ll} v'_1 = v_1 & (1 \ \ 3 \ -3 \ \ 1) \\ v'_2 = v_2 - v_1 & (0 \ -3 \ \ 2 \ \ 0) \\ v'_3 = v_3 - v_1 & (0 \ -2 \ \ 2 \ \ 1) \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{ll} v''_1 = v'_1 & = (1 \ \ 3 \ -3 \ \ 1) \\ v''_2 = v'_2 & = (0 \ -3 \ \ 2 \ \ 0) \\ v''_3 = v'_3 + \frac{2}{3} v_2 & = (0 \ \ 0 \ \ 2/3 \ \ 1) \end{array}$$

→ base de dimensión 3

Scanned by CamScanner

2.12. (Continuación)

$F = \langle (1,3,-3,1), (3,1,-1,3), (1,1,-1,1) \rangle$

$v_1 = 1 \quad 3 \quad -3 \quad 1$ $\quad v'_1 = v_1 = 1 \quad 3 \quad -3 \quad 1$
$v_2 = 3 \quad 1 \quad -1 \quad 3$ $\rightarrow$ $v'_2 = v_2 - 3v_1 = 0 \quad -8 \quad 8 \quad 0$ $\rightarrow$
$v_3 = 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1$ $\quad v'_3 = v_3 - v_1 = 0 \quad -2 \quad 2 \quad 0$

$v''_1 = v'_1 = 1 \quad 3 \quad -3 \quad 1$
$v''_2 = v'_2 = 0 \quad -8 \quad 8 \quad 0$
$v''_3 = v'_3 - \frac{1}{4} v_2 = 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

↳ relación de dependencia

$-\frac{1}{4} v_1 - \frac{1}{4} v_2 + v_3 = 0$ ↳ procedimiento en la hoja anterior

→ base de F

- a partir de los vectores iniciales
  base de F = $(1,3,-3,1), (3,1,-1,3)$
  base de F = $(1,3,-3,1), (0,-8,8,0)$

→ dim F = 2

determinar si $v = (1,-3,3,1)$ pertenece a F

- reducción de v

$v = 1 \quad -3 \quad 3 \quad 1$ $\rightarrow$ $v' = v - v_1 = 0 \quad -6 \quad 6 \quad 0$ $\rightarrow$

$\rightarrow v'' = v' - \frac{3}{4} v'_2 = 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

↳ al añadir este vector no ha augmentado la dimensión del espacio

v_1, v_2 son base de $\langle v_1, v_2, v_3, v \rangle$
v pertenece a $\langle v_1, v_2 \rangle$

v'_1, v'_2 son base de $\begin{cases} \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \\ \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \end{cases}$ $\Rightarrow \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3, v \rangle$

- para $w = 1, -3, 3, 0$ → determinar si pertenece a F

$w = 1\ -3\ 3\ 0 \rightarrow w' = w - v_1 = 0\ -6\ 6\ -1 \rightarrow w'' = v' - \frac{3}{4} v'_2 =$

$= 0\ 0\ 0\ -1$

w no pertenece al espacio engendrado por $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

si $w \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \leftrightarrow \underset{\dim 2}{\langle v_1\ v_2\ v_3 \rangle} \neq \underset{\dim 3}{\langle v_1\ v_2\ v_3\ v \rangle}$

- escribir v como combinación lineal de la base

$(1\ -3\ 3\ 1) = a\ (1\ 3\ -3\ 1) + b\ (0\ -8\ 8\ 0)$

$a = 1\ ,\ b = \frac{3}{4}$

si surgiera incompatible significaría que v no pertenece al subespacio

$1 = 1 \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 0$

$-3 = 1 \cdot 3 - 8 \cdot \frac{3}{4}$

$3 = 1 \cdot (-3) + 8 \cdot \frac{3}{4}$

$1 = 1 \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 0$

2.2. Determinar si son independents

$\{u, v, w\}$

$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 \\ \lambda_1 u' + \lambda_2 v' + \lambda_3 w' = 0 \\ \lambda_1 u'' + \lambda_2 v'' + \lambda_3 w'' = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0}$

s'obté $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ com a solucions del sistema

relació de dep $= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$\downarrow$

sistema homogeni

- SCD $\rightarrow$ $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ $\Leftrightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ linealment independents
- SCInd $\rightarrow$ $\exists$ solució $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ $\Leftrightarrow$ v_1, v_n dependents

a) $\{(2,5,2), (-1,-4,2), (1,2,4)\}$

$v_1 = (1,2,4) \rightarrow v'_1 = v_1 = (1,2,4) \rightarrow v''_1 = v'_1 = (1,2,4)$

$v_2 = (2,5,2) \rightarrow v'_2 = v_2 - 2v_1 = (0,1,-6) \rightarrow v''_2 = v'_2 = (0,1,6)$

$v_3 = (-1,-4,2) \rightarrow v'_3 = v_3 + v_1 = (0,-2,6) \rightarrow v''_3 = v'_3 + 2v_2 = (0,0,-6)$

Independents

b) $\{(2,1,2), (5,-4,2), (1,7,4)\}$

$v_1 = (1,7,4) \rightarrow v'_1 = v_1 = (1,7,4) \rightarrow v''_1 = v_1 = (1,7,4)$

$v_2 = (5,-4,2) \rightarrow v'_2 = v_2 - 5v_1 = (0,-39,-18) \rightarrow v''_2 = v'_2 = (0,-39,-18)$

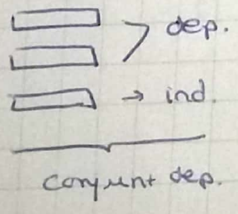
$v_3 = (2,1,2) \rightarrow v'_3 = v_3 - 2v_1 = (0,-13,-6) \rightarrow v''_3 = v'_3 - \frac{1}{3} v'_2 = (0,0,0)$

vector dependents

relació de dependència $\rightarrow$ $0 = v''_3 = v'_3 - \frac{1}{3} v'_2 = v_3 - 2v_1 - \frac{1}{3}(v_2 - 5v_1)$

$$\boxed{0 = v_3 - \frac{1}{3} v_2 - \frac{1}{3} v_1}$$

2.4. 3 vectors dependents, un dels quals no sigui combinació lineal dels altres



$(1,4,0)$
$(1,4,3)$
$(2,8,6)$

2.3. Dos vectors linealment dependents $\Leftrightarrow$ un és múltiple de l'altre

$\Leftarrow$ $F = \{v_1, v_2\}$

suposem que $1 \cdot v_1 = K \cdot v_2$ (un vector és múltiple de l'altre) $\rightarrow$
$\rightarrow$ $1 v_1 + (-K v_2) = 0$ (per tant, existeix una solució no trivial i els dos vectors són dependents)

$\Rightarrow$ suposem que v_1, v_2 són linealment dependents
Llavors $a v_1 + b v_2 = 0$, amb $a \neq 0$ o $b \neq 0$
Suposem $a \neq 0 \rightarrow a v_1 + b v_2 = 0 \rightarrow a v_1 = -b v_2 \rightarrow v_1 = -\frac{b v_2}{a}$, llavors v_1 és múltiple de v_2

2.5. $P_1(x), \dots, P_s(x)$ amb graus diferents 2 a 2 ($gr\, P_i(x) \neq gr\, P_j(x)$) són linealment independents

Com que no tinc cap polinomi amb el mateix grau (graus diferents 2 a 2), puc suposar

$$gr\, P_s(x) > gr\, P_{s-1}(x) > \dots > gr\, P_1(x)$$

Vull veure que l'equació $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_s P_s = 0$ només té la solució trivial $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$

dem per reducció a l'absurd

suposem que $\lambda_s \neq 0$; podem aïllar P_s:

$$P_s = -\frac{1}{\lambda_s}(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{s-1} P_{s-1})$$

$gr\, P_s = gr\, P_{s-1}$
$\hookrightarrow$ contradicció $gr\, P_s > gr\, P_{s-1}$ $\rightarrow \lambda_s = 0$

com que $\lambda_s = 0 \rightarrow \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{s-1} P_{s-1} = 0$
raonament anàleg per $\lambda_{s-1} \neq 0$

$$\vdots$$

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$$

$P_1, \dots, P_s$ són linealment independents

2.11. $x\frac{dP(x)}{dx} - P(x) = 0$ → Els polinomis que satisfan aquesta equació formen un subespai

Compleixen
1) Suma + producte per escalars
2) Suma + contenir el zero

· Suma

$P(x), Q(x) \in F \rightarrow P(x) + Q(x) \in F$

$$\begin{cases} x\frac{dP(x)}{dx} - P(x) = 0 \\ x\frac{dQ(x)}{dx} - Q(x) = 0 \end{cases}$$

$$x\frac{dP(x)}{dx} + x\frac{dQ(x)}{dx} - P(x) - Q(x) = 0$$

$$x\frac{d(P(x)+Q(x))}{dx} - (P(x)+Q(x)) = 0$$

· Producte escalar $P(x) \in F$, $a \in \mathbb{R}$

$$x\frac{d(aP(x))}{dx} - aP(x) = 0$$

$$x\, a\frac{dP(x)}{dx} - aP(x) = 0$$

$$a\left(x\frac{dP(x)}{dx} - P(x)\right) = 0$$

$$a \cdot 0 = 0$$

· Conté el zero

$$x\frac{dP(0)}{dx} - P(0) = 0$$

$$0 - 0 = 0$$

2.13. $\boxed{\begin{array}{l} \text{Base} = \{v_1, v_2\} \\ \text{Subespai} = \langle v_1, v_2 \rangle \end{array}}$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} v'_1 = v_1 \\ v'_2 = 3v_2 - v_1 \\ v'_3 = v_3 - v_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} v''_1 = v'_1 \\ v''_2 = v'_2 \\ v''_3 = v'_3 - v_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{base } F = \{(1, 3, -3, 1), (1/3, 1, -1, 0)\}$$

- $(1, 1, -1, 1)$ pertany a F?

$(1, 1, -1, 1) = \lambda(1, 3, -3, 1) + \mu(1/3, 1, -1, 0)$

$$\begin{cases} 1 = \lambda + 1/3\,\mu \\ 1 = 3\lambda + \mu \\ -1 = -3\lambda + (-1)\mu \\ 1 = \lambda \end{cases}$$

→ S. Incompatible
$(1, 1, -1, 1)$ no pertany a F

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} v'_1 = v_1 \\ v'_2 = v_2 - 3v_1 \\ v'_3 = v_3 - v_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} v''_1 = v'_1 \\ v''_2 = v'_2 \\ v''_3 = v'_3 - v'_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{base } G = \{(1, 1, 1, 1), (3, 1, 0, 3), (1, -1, 0, 1)\}$$

- $(1, 1, -1, 1)$ pertany a G?

$(1, 1, -1, 1) = \lambda(1, 1, 1, 1) + \mu(3, 1, 0, 3) + \gamma(1, -1, 0, 1)$

$$\begin{cases} 1 = \lambda + 3\mu + \gamma \\ 1 = \lambda + \mu + (-1)\gamma \\ -1 = \lambda \\ 1 = \lambda + 3\mu + \gamma \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \\ \gamma = -1 \end{array}$$

$(1, 1, -1, 1) \in G \rightarrow -(1, 1, 1, 1) + 1(3, 1, 0, 3) - 1(1, -1, 0, 1)$

Matrius i Vectors

2.1. Discutir sistemes d'equacions per determinar quins vectors són independents

a) $\{(3, 1, 2), (1, -4, 0), (1, 7, 2)\}$

$$\lambda_1(3,1,2) + \lambda_2(1,-4,0) + \lambda_3(1,7,2) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} F'_1 = F_1 \\ F'_2 = F_2 - F_1 \\ F'_3 = F_3 - 3F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} F''_1 = F'_1 \\ F''_2 = F'_2/2 \\ F''_3 = 2F'_3 + \frac{F'_2}{2} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

són l. indep.

b) $\{(1, 1, 2), (1, -4, 2), (1, 7, 2)\}$

$$\lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(1,-4,2) + \lambda_3(1,7,2) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} F'_1 = F_1 \\ F'_2 = F_2 - F_1 \\ F'_3 = F_3 - F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$-5\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0$$

$$\lambda_3 = \lambda_3$$
$$\lambda_2 = \frac{6}{5}\lambda_3$$
$$\lambda_1 = -\frac{11}{5}\lambda_3$$

solució $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(-\frac{11}{5}\lambda_3, \frac{6}{5}\lambda_3, \lambda_3\right)$

per a $\lambda_3 = 5$ $\quad \lambda_1 = -11, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 5$

RELACIÓ DE DEPENDÈNCIA $\boxed{-11v_1 + 6v_2 + 5v_3 = 0}$

c) $\{(2, 1, 2), (1, 3, 2), (0, 0, 0)\}$

$$\lambda_1(2,1,2) + \lambda_2(1,3,2) + \lambda_3(0,0,0) = 0$$

per a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\forall \lambda_3 \in \mathbb{R}$, se satisfà l'equació $\rightarrow$ vectors dependents

Matrius i Vectors

2.14 Determineu a, b perquè els vectors siguin dependents. Expresseu un d'ells com a combinació lineal dels altres

$$(1, 1, 0, a),\ (3, -1, b, -1),\ (-3, 5, a, -4) \in \mathbb{R}^4$$

$$\lambda_1 (1,1,0,a) + \lambda_2 (3,-1,b,-1) + \lambda_3 (-3,5,a,-4) = 0$$

amb algun $\lambda_i \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 3 & -1 & b & -1 \\ -3 & 5 & a & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -4 & b & -1-3a \\ 0 & 4 & a+b & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -a \\ 0 & -4 & b & -1-3a \\ 0 & 0 & a+2b & -3a-6 \end{pmatrix}$$

b

$b = 1$

$a = -2$

$$\underbrace{<(1, 1, 0, -2),\ (3, -1, 1, -1),\ (3, 5, -2, -4)>}_{\text{sistema de generadors}} = \underbrace{<(1, 1, 0, -2)\ (3, -1, 1, 1)>}_{\text{base}}$$

$\boxed{v = (6, 9, 14)}$

2.15 a) base $= \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$

$v = (6,9,14) = \lambda_1 (1,0,0) + \lambda_2 (0,1,0) + \lambda_3 (0,0,1)$

$\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = 14$

components del vector $(6, 9, 14)$

b) base $= \{(1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1)\}$

$v = (6,9,14) = \lambda_1 (1,1,0) + \lambda_2 (1,0,1) + \lambda_3 (0,1,1)$

$$\begin{cases} 6 = \lambda_1 + \lambda_2 & \to \lambda_2 = 6 - \lambda_1 \\ 9 = \lambda_1 + \lambda_3 & \to \lambda_3 = 9 - \lambda_1 \\ 14 = \lambda_2 + \lambda_3 & \to 14 = 9 - \lambda_1 + 6 - \lambda_1 \to \lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = \frac{11}{2},\ \lambda_3 = \frac{17}{2} \end{cases}$$

components del vector $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right)$

c) base $= \{(1,1,1),\ (1,1,2),\ (1,2,3)\}$

$v = (6, 9, 14) = \lambda_1 (1,1,1) + \lambda_2 (1,1,2) + \lambda_3 (1,2,3)$

$$\begin{cases} 6 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 9 = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 14 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{cases}$$

$\lambda_3 = 3$

$3 = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad 2 = \lambda_2$

$5 = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad 1 = \lambda_1$

components del vector $(1, 2, 3)$

Scanned by CamScanner

2.16. $\{(0,1,-2,1),\ (1,1,2,-1),\ \overset{(1,0,0,1)}{\vee}\ (2,2,0,-1)\}$ formen base en $\mathbb{R}^4$

formar base $\Rightarrow$ vectors generadors linealment independents

a) v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment independents

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} v'_1 = v_1 \\ v'_2 = v_2 \\ v'_3 = v_3 - v_1 \\ v'_4 = v_4 - 2v_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} v''_1 = v'_1 \\ v''_2 = v'_2 \\ v''_3 = v'_3 + v_1 \\ v''_4 = v'_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} v'''_1 = v''_1 \\ v'''_2 = v''_2 \\ v'''_3 = v''_3 \\ v'''_4 = v''_4 - v''_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ vectors independents.
no hi ha cap combinació lineal dels altres

b) que siguin generadors $\rightarrow$ qualsevol vector pot se expressat com a combinació lineal dels anteriors

v_1, v_2, v_3, v_4 generen en $\mathbb{R}^4$ si i només si
$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ \exists\, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ tals que

$$(x,y,z,t) = \alpha(0,1,-2,1) + \beta(1,1,2,-1) + \gamma(1,0,0,1) + \delta(2,2,0,1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = \beta + \gamma + 2\delta \\ y = \alpha + \beta + 2\delta \\ z = -2\alpha + 2\beta \\ t = \alpha - \beta + \gamma + \delta \end{cases}$$

sigui sempre SCD
$\downarrow$
rang matriu = 4
rang ampliada = 4

Anna Jové Campabadal

2.17 Siguin u_1, u_2, u_3, u_4 base d'un espai vectorial dim4. Estudieu si els següents vectors w_1, w_2, w_3, w_4 són linealment independents

$u_1, u_2, u_3, u_4 \rightarrow$ base E
dim 4

$$\begin{cases} w_1 = u_1 - u_3 + 2u_4 \\ w_2 = 2u_1 + 3u_2 + u_3 + u_4 \\ w_3 = u_1 + 3u_2 + 2u_3 - u_4 \\ w_4 = u_1 + u_2 + u_4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} w'_1 = w_1 \\ w'_2 = w_2 - 2w_1 \\ w'_3 = w_3 - w_1 \\ w'_4 = w_3 - w_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} w''_1 = w'_1 \\ w''_2 = w'_2/3 \\ w''_3 = w'_3/3 \\ w''_4 = w'_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} w'''_1 = w''_1 \\ w'''_2 = w''_2 \\ w'''_3 = w''_3 - w''_2 \\ w'''_4 = w''_4 - w''_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow w_1, w_2, w_3, w_4 \text{ són vectors dependents}$$

Extreu el màxim nombre de vectors linealment independents i construïu una base de E amb els vectors escollits

- màxim nombre de vectors independents : 2 $\rightarrow w_1, w_2$
- construir una base (dim4) amb $w_1, w_2, w'_3, w'_4 \rightarrow$ buscar w'_3, w'_4 tals que w_1, w_2, w'_3, w'_4 siguin linealment independents.

$$\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w'_3 \\ w'_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Nova base : $\{ (1,0,-1,2), (0,1,1,-1), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \}$

Com escriuries aquests vectors amb el mateix format que t'han donat a l'enunciat (sense coordenades)?

$$\begin{cases} w_1 = u_1 - u_3 + 2u_4 \\ w_2 = u_2 + u_3 - u_4 \\ w_3 = u_3 \\ w_4 = u_4 \end{cases}$$