

1. (a) Suposeu que f és una funció derivable a un interval I i que no s'anul·la. Proveu que $1/f$ és derivable i doneu la derivada.

(b) Enuncieu i demostreu la regla de la cadena per la derivació.

2. (a) Suposem que tenim una funció f derivable a un interval (a, b) . Demostreu aleshores

$$f \text{ és creixent} \iff f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$$

(b) Doneu dues formes de mostrar que una funció és convexa en un punt.

3. Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ i sigui la funció $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$g(x) = \begin{cases} |x|^a \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^b \ln(1+x), & x > 0. \end{cases}$$

(a) Digueu per a quins $a, b \in \mathbb{R}$ la funció g és derivable en el 0.

(b) Digueu per a quins $a, b \in \mathbb{R}$ la funció g té derivada g' contínua en el 0.

4. Per a cada $\alpha \in \mathbb{R}$, tenim $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f_\alpha(x) = e^{\alpha x} - x - 2$. Trobeu (i proveu) quantes solucions té l'equació $f_\alpha(x) = 0$ dependent del valor de α .

5. Sigui la funció $f(x) = (x-2)e^{2x-x^2}$.

(a) Estudieu els intervals de creixement i convexitat de f .

(b) Trobeu, si existeixen, els màxims i mínims (relatius i absoluts) de f al seu domini.

(c) Representeu gràficament la funció f .

6. Calculeu els límits següents (si existeixen):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+4}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\sin x)^2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x^{5/2} + 1}{x\sqrt[3]{x^2} - x^2\sqrt{x} + 3x},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x}), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x} + \log x + e^x}{e^x + x^2 + x}.$$

7. Calculeu el límit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan(x) - x)^8}{\left(\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)^{2n}},$$

per als diferents valors de $n \in \mathbb{N}$.

Proveu que, per a tot $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, es compleix la desigualtat

$$\cos(2x) \geq 1 - 2x^2.$$

TOTS ELS EXERCICIS VALEN EL MATEIX

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT

POSEU EL VOSTRE NOM I COGNOM EN CADA FULL