Solucions comentades dels problemes de l'examen final

3. Considera la successió $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es defineix de la següent forma recursiva:

$$a_0 := 0\,, \quad a_1 := 1\,, \quad \text{i, per } n \geqslant 2\,, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2}\,.$$

Demostra per inducció que per tot $n \geqslant 3$, a_n i a_{n+1} són primers entre si.

Observa que aquest exercici és el primer apartat de l'exercici 19 (de la llista 2), fet a la pissarra a classe de problemes. La successió és l'anomenada «sucessió de FIBONACCI». Si en calcules els primers termes, obtindràs $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

Recorda que dos nombres naturals a i b són *primers entre si* quan no tenen cap divisor comú diferent de 1; és a dir, quan no existeixen nombres naturals m, c, d tals que $m \geqslant 2$, $a = m \cdot c$ i $b = m \cdot d$ (i observa que c i d poden ser naturals qualssevol, inclòs el 0).

- *Pas inicial* ($n = 3$): És tracta de comprovar que a_3 i a_4 són primers entre sí. És a dir, hem de comprovar que 2 i 3 són primers entre sí. I això és clarament cert perquè el nombre 1 és l'únic divisor comú de 2 i 3.
- *Pas d'inducció*: Hem de demostrar que si l'afirmació és certa per $n = k \geqslant 3$ aleshores també és certa per $n = k + 1$. És a dir, hem de veure que si a_k i a_{k+1} són primers entre si, aleshores a_{k+1} i a_{k+2} són primers entre si. Raonarem per *contrarecíproc*, i demostrarem que si a_{k+1} i a_{k+2} no són primers entre si, aleshores a_k i a_{k+1} tampoc no són primers entre si.

  Suposem que a_{k+1} i a_{k+2} no són primers entre si. Aleshores, per definició, existeixen nombres naturals m, c, d tals que $m \geqslant 2$, $a_{k+1} = m \cdot c$ i $a_{k+2} = m \cdot d$. Aprofitant que sabem (per la definició de la successió a l'enunciat) que $a_k = a_{k+2} - a_{k+1}$, resulta que $a_k = m \cdot d - m \cdot c = m \cdot (d - c)$. Així doncs, $m \geqslant 2$ i és un divisor comú de a_k i de a_{k+1}. Per tant, a_k i a_{k+1} no són primers entre sí.

4. Considera els següents conjunts:

$$A = \big\{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{Z}(y^2 < 25 \wedge x < y)\big\}$$
$$B = \big\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 5 \wedge \forall y \in \mathbb{Z}(y > 2 \to |x| < y)\big\}$$

Dóna per extensió els conjunts A, B i $A \smallsetminus B$.

- Com que $y \in \mathbb{Z}$, $y^2 < 25$ equival a $|y| < 5$, és a dir, $y \in \{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$. Segons l'enunciat, $x \in A$ si i només si x és *natural* i $x < y$ per a *algun* y dels anteriors. Això ho compleixen $x = 0, 1, 2, 3$ (tots compleixen $x < 4$ i amb això n'hi ha prou) i cap més: no hi ha naturals negatius, i els x més grans que 3 no complirien $x < y$ per *cap* d'aquests y. Per tant, $A = \{0, 1, 2, 3\}$.
- Per la primera condició veiem que els possibles $x \in B$ són els *enters* amb $|x| < 5$, o sigui $x \in \{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$. D'entre aquests cal triar els que compleixen la segona condició: $|x| < y$ per a *tots* els enters $y > 2$, és a dir, han de compir *alhora* les condicions $|x| < 3$, $|x| < 4$, $|x| < 5$, etc. Evidentment, n'hi ha prou exigint que $|x| < 3$. Per tant obtenim un conjunt més petit: $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- Per definició $A \smallsetminus B = \{x \in A : x \notin B\} = \{3\}$.

Observació: En moltes respostes a aquest problema s'ha observat precipitació a l'hora de tractar les desigualtats, i confondre $<$ amb $\leqslant$. Recorda que $4 < 4$ és fals, per exemple. Una altra errada ha estat fer servir *intervals*, per exemple de la forma $(-2, 2)$, que són conjunts de nombres *reals*!

5. Demostra que $\big(A\times B\big)\cup\big((B\setminus A)\times B\big)=(A\cup B)\times B$, on A i B són dos conjunts qualssevol.

Cal demostrar les dues inclusions:

- $(A\times B)\cup\big((B\setminus A)\times B\big)\subseteq(A\cup B)\times B$:
  Sigui $(x,y)\in(A\times B)\cup\big((B\setminus A)\times B\big)$. Per la definició d'unió cal distingir dos casos:
  - Si $(x,y)\in A\times B$, aleshores $x\in A$ i $y\in B$. Per tant, com que $x\in A$ implica $x\in A\cup B$, i $y\in B$, tenim que $(x,y)\in(A\cup B)\times B$.
  - Si $(x,y)\in\big((B\setminus A)\times B\big)$, aleshores $x\in B\setminus A$ i $y\in B$. Per tant $x\in B$ i $x\notin A$ i $y\in B$. Donat que $x\in B$ implica $x\in A\cup B$ i $y\in B$, tenim $(x,y)\in(A\cup B)\times B$.

  En els dos casos hem vist que $(x,y)\in(A\cup B)\times B$, per tant es compleix la inclusió.
- $(A\cup B)\times B\subseteq(A\times B)\cup\big((B\setminus A)\times B\big)$:
  Sigui $(x,y)\in(A\cup B)\times B$. Aleshores $x\in A\cup B$ i $y\in B$. Hem de considerar dos casos:
  + Si $x\in A$, aleshores $(x,y)\in A\times B$. Per tant $(x,y)\in(A\times B)\cup\big((B\setminus A)\times B\big)$.
  + Si $x\in B$, aleshores pot ocórrer que $x\in A$ o be $x\notin A$. Si $x\in A$ estem en el cas anterior, i ja està fet. Si $x\notin A$, aleshores $x\in B\setminus A$ y com que $y\in B$, tenim que $(x,y)\in(B\setminus A)\times B$. Per tant $(x,y)\in(A\times B)\cup\big((B\setminus A)\times B\big)$.

  En els dos casos hem vist que $(x,y)\in(A\cup B)\times B$, per tant la inclusió es compleix.

Observacions:

$\star$ Els elements de $A\times B$ són parells ordenats (x,y); posar $x,y\in A\times B$ no sols és incorrecte sinó que pot induir a errors.

$\star$ En el segon cas marcat amb + de la segona inclusió, que $x\in B$ no implica automàticament que $x\notin A$, ja que A i B són arbitraris, i enlloc ens diuen que podem suposar que $A\cap B=\emptyset$.

$\star$ La separació per casos marcada amb + també es pot fer considerant directament si $x\in A$ i si $x\notin A$; en aquest segon cas, com que la hipòtesi és que $x\in A\cup B$, ha de ser $x\in B$, d'on $x\in B\setminus A$, i es segueix igual.

6. Sigui $\sim$ la relació en $\mathbb{R}$ definida a continuació:

$$\text{Per tot } a,b\in\mathbb{R},\ \ a\sim b \ \text{ si, i només si } \ a=b \ \text{ o } \ \big(|a|-2\big)\cdot\big(|b|-2\big)>0.$$

(*Observa* que la condició sobre el producte equival a dir que $|a|-2$ i $|b|-2$ són no nuls i tenen el mateix signe, positiu o negatiu.)

(a) Demostra que $\sim$ és una relació d'equivalència.

Reflexiva: Per la pròpia definició, si $a=b$ aleshores $a\sim b$. És a dir, $a\sim a$ per tot $a\in\mathbb{R}$.

Simètrica: Si per $a,b\in\mathbb{R}$ arbitraris es compleix $a\sim b$, aleshores per la simetria de la relació d'igualtat i la commutativitat del producte en $\mathbb{R}$ es compleix també que $b\sim a$.

Transitiva: Suposem que $a\sim b$ i $b\sim c$ per a $a,b,c\in\mathbb{R}$ qualssevol. Si $a=b$ o $b=c$, substituint trobem que $a\sim c$. Resta el cas on $(|a|-2)\cdot(|b|-2)>0$ i $(|b|-2)\cdot(|c|-2)>0$. És a dir, que $|a|-2$ i $|b|-2$ són no nuls i tenen el mateix signe, i que $|b|-2$ i $|c|-2$ són no nuls i tenen el mateix signe. Per tant, $|a|-2$ i $|c|-2$ són no nuls i tenen el mateix signe. Això implica que $a\sim c$.

(b) Troba $\overline{2}$ i $\overline{-3}$.

- $\overline{2}=\{a\in\mathbb{R}:a\sim 2\}=\{a\in\mathbb{R}:a=2\ \text{ o }\ \big(|a|-2\big)\cdot\big(|2|-2\big)>0\}$. Però $|2|-2=2-2=0$, per tant la segona condició no es compleix mai, i només queda $a=2$. Per tant, $\overline{2}=\{2\}$.

- $\overline{-3} = \{a \in \mathbb{R} : a \sim -3\} = \{a \in \mathbb{R} : a = -3 \text{ o } \big(|a|-2\big)\cdot\big(|-3|-2\big) > 0\}$. Com que $|-3|-2 = 3-2 = 1 > 0$, la segona condició equival a dir que $|a|-2>0$, és a dir $|a|>2$, o bé $a \in (-\infty,-2)\cup(2,\infty)$. Observem que $-3 \in (-\infty,-2)$. Per tant, $\overline{-3} = (-\infty,-2)\cup(2,\infty)$.

(c) $\boxed{\text{Dóna el conjunt quocient de la relació } \sim.}$

Dos punts diferents estan relacionats per $\sim$ si i només si en calcular $|x|-2$ per a cadascun d'ells, donen el mateix signe, i no són 0. Aquest signe només pot ser, doncs, positiu, o negatiu. Per tant, només hi ha dues classes que incloguin elements diferents. Com hem vist al càlcul de l'apartat anterior, $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ correspon als casos de signe positiu. Per al signe negatiu resulta que $|x|-2<0$ si i només si x pertany a l'interval $(-2,2)$, per tant aquest interval és una altra classe d'equivalència. Finalment queden els punts "aïllats", que no estan relacionats amb ningú més: Ja hem vist que 2 ho és, i només queda un punt de la recta per analitzar: -2. Com que $|-2|-2 = 2-2 = 0$, no pot complir la segona part de la definició amb cap altre punt, per tant només està relacionat amb si mateix.

En conclusió, doncs, el conjunt quocient de la relació $\sim$ està format per les 4 classes d'equivalència següents: $\{2\}, \{-2\}, (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ i $(-2,2)$.

Si ho volem escriure més formalment, podem posar

$$\mathbb{R}/\!\sim\; = \big\{\, \{2\}, \{-2\}, (-\infty,-2)\cup(2,+\infty), (-2,2) \,\big\}.$$

Observacions:

- ⋆ Les propietats reflexiva, simètrica i transitiva contenen un "per tot a", "per tots a, b" i "per tots a, b, c" respectivament. Això cal posar-ho si es posa l'enunciat de la propietat. I les demostracions han de ser generals, no poden consistir en comprovar un exemple.
- ⋆ Es segueix produint l'error incomprensible d'enunciar la propietat simètrica com una "i" ($a \sim b$ i $b \sim a$), en comptes d'una implicació (si $a \sim b$ aleshores $b \sim a$).