Introducció al Càlcul Integral

Demostracions

Mario Vilar

3 d'abril de 2022

Taula de continguts

Proposició 1 (Suma d'integrals)**.** *Siguin f, g integrables en $I = [a, b]$. Llavors, $f + g$ és integrable en I i*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{1}$$

Demostració. Sigui $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partició de I i siguin

$$\left.\begin{aligned} m_i &= \inf\{(f+g)(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ m_i' &= \inf\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ m_i'' &= \inf\{g(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} M_i &= \sup\{(f+g)(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ M_i' &= \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ M_i'' &= \sup\{g(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Observem que $m_i \geq m_i' + m_i''$ i que $M_i \leq M_i' + M_i''$. Així doncs, tenim:

$$\begin{gathered} L(f,\mathcal{P}) + L(g,\mathcal{P}) \leq L(f+g,\mathcal{P}) \\ U(f+g,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) + U(g,\mathcal{P}) \\ L(f,\mathcal{P}) + L(g,\mathcal{P}) \leq L(f+g,\mathcal{P}) \leq U(f+g,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) + U(g,\mathcal{P}) \end{gathered} \tag{3}$$

i, per tant,

$$U(f+g,\mathcal{P}) - L(f+g,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) + U(g,\mathcal{P}) - L(g,\mathcal{P}). \tag{4}$$

En particular, com això passa per a tota partició $\mathcal{P}$, podem escollir $\mathcal{P}$ com vulguem. Com que $f, g \in \mathscr{R}([a, b])$, podem escollir $\mathcal{P}$ de manera que

$$\begin{aligned} U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) &< \tfrac{\varepsilon}{2}, \\ U(g,\mathcal{P}) - L(g,\mathcal{P}) &< \tfrac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Considerem $\varepsilon > 0$. Com que f, g són integrables existiran particions $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ de I amb $U(f,\mathcal{P}_1) - L(f,\mathcal{P}_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $U(g,\mathcal{P}_2) - L(g,\mathcal{P}_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sigui $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$:

$$U(f+g,\mathcal{P}) - L(f+g,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) + U(g,\mathcal{P}) - L(g,\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{6}$$

Això prova que $f + g$ és integrable. Sigui ara $\mathcal{P}$ una partició qualsevol de I. Tindrem que:

$$L(f,\mathcal{P}) + L(g,\mathcal{P}) \leq L(f+g,\mathcal{P}) \leq \int_a^b (f+g) \leq U(f+g,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) + U(g,\mathcal{P}) \tag{7}$$

i per altra banda

$$L(f,\mathcal{P}) + L(g,\mathcal{P}) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq U(f,\mathcal{P}) + U(g,\mathcal{P}). \tag{8}$$

Usant:

$$\left.\begin{aligned} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} a \leq x \leq b \\ -b \leq -y \leq -a \end{aligned}\right\} \implies |x-y| \leq b-a. \tag{9}$$

Deduïm que per qualsevol partició $\mathcal{P}$ es verificarà:

$$\left| \int_a^b (f+g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) + U(g,\mathcal{P}) - L(g,\mathcal{P}). \tag{10}$$

Ara bé, l'últim terme d'aquesta desigualtat es pot fer tant petit com vulguem prenent la partició $\mathcal{P}$ prou fina. Obtenim, doncs:

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{11}$$

■

Teorema 2 (Integrabilitat d'una funció monòtona i fitada)**.** *Sigui f monòtona i fitada a $[a,b]$. Llavors, f és integrable en aquest interval.*

Demostració. Suposem f monòtona creixent (es prova anàlogament quan f és monòtona decreixent). Sigui $\varepsilon > 0$ i $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} > 0$. Volem que l'àrea corresponent a $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P})$ sigui justament ε. Sigui ara $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partició d'$[a,b]$ tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$ per a $i = 1 \div n$. Observem que $m_i = f(t_{i-1})$ i $M_i = f(t_i)$. Per tant:

$$
\begin{aligned}
L(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1}), \\
U(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned} \tag{12}
$$

I resulta:

$$
\begin{aligned}
U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) < \delta \cdot \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) = \delta(f(b) - f(a)) = \varepsilon,
\end{aligned} \tag{13}
$$

on hem aplicat que $\sum_{i=1}^{n}(f(t_i) - f(t_{i-1})) = f(b) - f(a)$, ja que els termes del mig es cancel·len entre ells. Com f és fitada i compleix que $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$, f és integrable. ∎

Teorema 3 (Integrabilitat d'una funció contínua)**.** *Sigui $f \in C([a,b])$. Aleshores, $f \in \mathscr{R}([a,b])$.*

Demostració. Pel teorema anterior, f resulta uniformement contínua. Volem trobar que

$$
\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f, \tag{14}
$$

és a dir, $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P} \mid U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$. Així, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ sempre que $|x-y| < \delta$. Sigui $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\} \subset [a,b]$ una partició tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$ per $i = 1 \div n$. Aleshores,

$$
\forall x, y \in [t_{i-1}, t_i] \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \implies M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{15}
$$

Doncs, de manera formal, $\forall \epsilon \exists x \mid f(x_\epsilon) > \sup\{f\} - \epsilon = M_i - \epsilon$ i $\forall \epsilon \exists y \mid f(y_\epsilon) \leq \inf\{f\} + \epsilon = m_i + \epsilon$.

$$
M_i - m_i = M_i - f(x_\epsilon) + f(x_\epsilon) - f(y_\epsilon) + f(y_\epsilon) - m_i \leq \epsilon + \frac{\varepsilon}{b-a} + \epsilon = 2\epsilon + \frac{\varepsilon}{b-a} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{16}
$$

Aleshores:

$$
\begin{aligned}
U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) &\leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) - m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon.
\end{aligned} \tag{17}
$$

∎

Proposició 4 (Continuïtat de la primitiva)**.** *Si* $f \in \mathscr{R}([a,b])$, $F(x) \in C([a,b])$.

Demostració. Sigui $x \in [a,b]$. Hem d'estudiar

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h}, \tag{18}$$

i provar la continuïtat de la funció a partir de:

$$\lim_{h\to 0} F(x+h) - F(x) = 0 \iff \lim_{y\to x} F(y) = F(x). \tag{19}$$

Sigui $M = \max\{|f(y)| \mid y \in [a,b]\}$. Suposarem $h > 0$, i tindrem que:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^x f = \int_x^{x+h} f. \tag{20}$$

Com f és fitada, $|F(x+h) - F(x)| = |\int_x^{x+h} f|, -Mh \leq \int_x^{x+h} f \leq Mh$ i usant el Teorema del Valor Mitjà del Càlcul Integral, resultarà:

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \int_x^{x+h} |f| \leq M \cdot |h| \xrightarrow{h\to 0^+} 0, \tag{21}$$

ja que per a $x + h - x = h$ com a màxim podem trobar una àrea igual al quadrat d'altura M i si $h \to 0$ aleshores obtenim el resultat de l'equació anterior. Per tant,

$$\lim_{h\to 0^+} |F(x+h) - F(x)| = 0. \tag{22}$$

En particular, F és contínua per la dreta en el punt x. Fem el mateix per $h \leq 0$:

$$\begin{gathered} |F(x+h) - F(x)| = \left|\int_x^{x+h} f\right| = \left|-\int_{x+h}^x f\right| = \left|\int_{x+h}^x f\right| \leq \int_{x+h}^x |f| \\ \implies Mh \leq F(x+h) - F(x) \leq M(-h) \iff |F(x+h) - F(x)| \leq M \cdot |h|. \end{gathered} \tag{23}$$

Per tant, en aquest cas h és contínua per l'esquerra. ∎

Teorema 5 (Teorema fonamental del Càlcul Integral)**.** *Si f és integrable en $[a,b]$ i f és contínua en $c \in [a,b]$, aleshores F és derivable en c i*

$$F'(c) = f(c). \tag{24}$$

Demostració. Del teorema anterior, tenim que F és contínua en $[a,b]$. Hem d'estudiar

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h}. \tag{25}$$

Un altre cop, $F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f$. Suposem $h > 0$. Clarament, si $x \in [c, c+h]$, aleshores:

$$m_h = \inf_{[c,c+h]} f \leq f(x) \leq \sup_{[c,c+h]} f = M_h. \tag{26}$$

Per tant, $m_k \leq f(x) \leq M_k$ si $x \in [c, c+h]$. Si integrem sobre $[c, c+h]$:

$$\int_c^{c+h} m_h \leq \int_c^{c+h} f \leq \int_c^{c+h} M_h \iff m_h \cdot h \leq \int_c^{c+h} f \leq M_h \cdot h. \tag{27}$$

Dividim tot per h i ens queda que:

$$m_h \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f \leq M_h \iff m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h. \tag{28}$$

Ja hem fixat $M_h = \sup\{f(x) \mid x \in [c, c+h]\}$. Si prenem límit a

$$m_h \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f \leq M_h \xrightarrow{h\to 0} f(c) \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f \leq f(c) \tag{29}$$

I ara, apliquem el lema del sandvitx i trobem que $\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c)$. Tornem a demostrar que $M_h, m_h \to f(c)$ quan $h < 0$ de la mateixa manera:

$$\lim_{h\to 0} m_h \leq \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq \lim_{h\to 0} M_h \tag{30}$$

I obtenim que $\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(c)$. Per tant, obtenim el resultat:

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c). \tag{31}$$

El Teorema Fonamental del Càlcul garanteix que, donada f contínua en $[a, b]$, aleshores $F(x) = \int_a^x f$ és contínua a $[a, b]$ i derivable a tot $x \in [a, b]$, amb $F'(x) = f(x)$. ∎

Teorema 6 (Barrow per integrables). *Sigui $f \in \mathscr{R}([a, b])$. Suposem que f admet una primitiva G (hipòtesi forta). Aleshores:*

$$\int_a^b f = G(b) - G(a). \tag{32}$$

En altres paraules, perquè la regla de Barrow sigui certa no fa falta que l'integrand sigui continu.

Demostració. Sigui $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partició d'$[a, b]$: associem-hi

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i &= \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned} \tag{33}$$

Pel TVM de Lagrange,

$$G(t_i) - G(t_{i-1}) = f(c_i)(t_i - t_{i-1}),\ c_i \in [t_{i-1}, t_i]. \tag{34}$$

D'altra banda, $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$, per als suprems i ínfims en l'interval corresponent. Per tant, podem fer $m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(c_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1})$, ja que $t_i - t_{i-1} > 0$. Substituint (34), obtenim:

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq G(t_i) - G(t_{i-1})) \leq M_i(t_i - t_{i-1}). \tag{35}$$

Si ara generalitzem a la suma per $i = 1 \div n$:

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^{n}(G(t_i) - G(t_{i-1})) \leq U(f, \mathcal{P}) \iff L(f, \mathcal{P}) \leq G(t_n) - G(t_0) \leq U(f, \mathcal{P}), \tag{36}$$

i això passa per tota partició $\mathcal{P}$. En particular, si triem una partició $\mathcal{P}$ tal que $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$, aleshores $U(f, \mathcal{P}) < L(f, \mathcal{P}) + \varepsilon$ i

$$L(f, \mathcal{P}) \leq G(b) - G(a) \leq L(f, \mathcal{P}) + \varepsilon, \tag{37}$$

de tal manera que $\int_a^b f = G(b) - G(a)$. ∎