Matrius i vectors (grup de matí)

Curs 2018–2019

3.1 Reducció de generadors

Suposem donat un espai vectorial E de dimensió n del qual ens interessa obtenir una base. Una manera de fer-ho és utilitzar el teorema 2.3: partim d'un conjunt qualsevol $v_1, \ldots, v_k$ de vectors linealment independents (on necessàriament $k \leq n$) i hi afegim vectors adients $v_{k+1}, \ldots, v_n$ de manera que $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ formin una base de E.

També es pot fer a la inversa: partim d'un conjunt qualsevol $v_1, \ldots, v_m$ de generadors de E i el reduïm a un subconjunt (ordenat) que sigui una base de E. La validesa d'aquest mètode es basa en l'observació següent:

Teorema 3.1. *Tot conjunt $v_1, \ldots, v_m$ de generadors d'un espai vectorial E conté alguna base de E.*

Demostració. Sigui $v_1, \ldots, v_m$ un conjunt de generadors de E. Podem suposar, sense perdre generalitat, que cap d'ells no és el vector zero (en cas contrari, el podríem suprimir i seguiríem tenint un conjunt de generadors de E). Si $v_1, \ldots, v_m$ són linealment independents, llavors ja formen base i hem acabat. En cas contrari, algun d'ells serà combinació lineal dels altres. Canviant l'ordre si cal, podem suposar que v_1 és combinació lineal de $v_2, \ldots, v_m$. Llavors, per la proposició 1.4, els vectors $v_2, \ldots, v_m$ encara generen E. Si aquests són linealment independents, formen base. Si no ho són, podem suposar (canviant l'ordre si cal) que v_2 és combinació lineal de $v_3, \ldots, v_m$. Altra vegada per la proposició 1.4, aquests formen un conjunt de generadors de E. El procés continua fins que ens quedi un conjunt de generadors linealment independents, és a dir, una base (el pitjor que pot passar és que ens acabem quedant amb un sol vector, que, com que no pot ser el vector zero, formarà un conjunt linealment independent). $\square$

Corol·lari 3.2. *Si $\dim E = n$ i un conjunt de vectors $v_1, \ldots, v_m$ generen E, llavors es compleix que $m \geq n$.*

Demostració. Si $m < n$, podríem reduir el conjunt $v_1, \ldots, v_m$ a una base de E pel procediment descrit a la demostració del teorema 3.1, amb la qual cosa hauríem obtingut una base de E amb menys de n vectors, la qual cosa contradiria la hipòtesi que $\dim E = n$. $\square$

Corol·lari 3.3. *Si $\dim E = n$, llavors qualsevol conjunt ordenat $v_1, \ldots, v_n$ de n generadors de E és una base de E.*

Demostració. En cas contrari, no seran linealment independents. Aleshores un d'ells serà combinació lineal dels altres. Si el suprimim, ens quedarà un conjunt de generadors de E format per $n - 1$ vectors i això contradiu el corol·lari 3.2. $\square$

3.2 Bases de subespais

Sigui ara F un subespai d'un espai vectorial E. Llavors F també és un espai vectorial i per tant podem aplicar amb F els mateixos procediments anteriors. En particular, tenim el fet següent:

Corol·lari 3.4. *Tot conjunt de generadors d'un subespai F d'un espai vectorial E conté alguna base de F.*

Demostració. Com que F és un espai vectorial, aquest enunciat es dedueix del teorema 3.1. $\square$

Teorema 3.5. *Si $\dim E = n$, llavors tot subespai F de E té alguna base i es compleix que $\dim F \leq n$. A més, si $\dim F = n$ aleshores $F = E$.*

Demostració. Si $F = \{0\}$, l'enunciat es compleix trivialment. Suposem, doncs, que $F \neq \{0\}$. Escollim un vector $v_1 \in F$ diferent de zero. Pel mateix procediment descrit en la demostració del teorema 2.3, podem anar construint una successió de vectors $v_1, v_2, v_3, \ldots$ de F que siguin linealment independents. Si aquesta successió arribés a contenir $n+1$ vectors, tindríem $n+1$ vectors de E linealment independents, i això és impossible perquè $\dim E = n$. Per tant, la successió acaba en algun moment: $v_1, \ldots, v_m$ amb $m \leq n$; és a dir, $v_1, \ldots, v_m$ són vectors de F linealment independents i m és maximal amb aquesta propietat. Si aquests vectors no generessin F, podríem afegir-hi un altre $v_{m+1} \in F$ de manera que $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ fossin linealment independents, i això no passa perquè hem escollit m maximal. En conclusió, $v_1, \ldots, v_m$ han de generar F i per tant formen base de F.

Si $\dim F = n$, llavors $m = n$, d'on $v_1, \ldots, v_m$ són n vectors de E linealment independents i per tant formen una base de E. Això implica que tot vector de E és combinació lineal d'ells, la qual cosa implica que $E = F$. $\square$

Tenint en compte que un espai vectorial té, en general, molts subespais diferents, aquestes consideracions que acabem de fer ens permeten comparar subespais entre ells. L'enunciat següent es dedueix com a cas particular del teorema 3.5, pensant G com un espai vectorial i F com un subespai seu:

Corol·lari 3.6. *Si F i G són subespais d'un espai vectorial E amb $F \subseteq G$, llavors $\dim F \leq \dim G$. A més, si $\dim F = \dim G$ aleshores $F = G$.*