Introducción

En la primera parte de la clase de hoy, mostraremos algunos ejemplos sobre cómo encontrar una buena representación para el conjunto cociente de una relación de equivalencia y cómo demostrar que se trata de una buena representación.

Y a continuación, demostraremos algunos resultados centrales para relaciones de equivalencia.

Empezamos recordando los conceptos de relación de equivalencia y conjunto cociente.

Relaciones de equivalencia

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es una relación de equivalencia en A, si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Sea $x \in A$. Definimos la clase de equivalencia de x con respecto a R por

$$\overline{x} = \{y \in A : xRy\}.$$

Como R es simétrica, tenemos que

$$\overline{x} = \{y \in A : yRx\}.$$

Obsérvese que para todo $x \in A$ tenemos:

(1) $\overline{x} \subseteq A$.

(2) $x \in \overline{x}$, ya que por la propiedad reflexiva tenemos que xRx.

Conjuntos cociente

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, definimos el conjunto cociente de A respecto de R por

$$A/R = \{\overline{a} : a \in A\}.$$

Es decir, el conjunto cociente A/R es el conjunto de las clases de equivalencia de los elementos de A.

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, $X \in A/R$ y $a \in X$, diremos que a es un representante de X.

Buenas representaciones de conjuntos cociente

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Sea $B \subseteq A$. Decimos que $\{\overline{a} : a \in B\}$ es una buena representación de A/R si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- $A/R = \{\overline{a} : a \in B\}$.
- Para todo $a, b \in B$, si $a \neq b$ entonces $\overline{a} \neq \overline{b}$.

Para encontrar una buena representación de un conjunto cociente de una relación de equivalencia, tenemos que elegir un representante de cada clase de equivalencia. Para ello, previamente, deberemos inspeccionar las clases de equivalencia y escribir correctamente la clase de equivalencia de cada elemento.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Sea V la relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ definida por:

$$aVb \Leftrightarrow |a| = |b|.$$

Para todo $a \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{R} : aVb\} = \{b \in \mathbb{R} : |a| = |b|\} = \{a, -a\}.$$

Por ejemplo, $\overline{0} = \{0\}$, $\overline{1} = \{-1, 1\}$, $\overline{\pi} = \{-\pi, \pi\}$, $\overline{-2/3} = \{-2/3, 2/3\}$.

Ahora, una vez hecha la descripción de las clases de equivalencia, debemos elegir un representante de cada clase. En este caso, para todo $a \in \mathbb{R}$, de la clase $\overline{a} = \{a, -a\}$ elegimos el $b \in \overline{a} = \{a, -a\}$ tal que $b \geq 0$.

Por tanto, obtenemos la siguiente buena representación:

$$(\mathbb{R}/V) = \{\overline{a} : a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} = \{\{a, -a\} : a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}.$$

Demostramos que efectivamente es una buena representación. Para ello, tenemos que demostrar:

(1) $\{\overline{a} : a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} = \{\overline{a} : a \in \mathbb{R}\}$.

(2) El conjunto $\{\overline{a} : a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$ no es redundante, es decir, para todo $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$:

$$a \neq b \Rightarrow \overline{a} \neq \overline{b}.$$

Demostramos (1). Como $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$, tenemos que $\{\overline{a} : a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} \subseteq \{\overline{a} : a \in \mathbb{R}\}$. Demostramos ahora la otra inclusión. Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $a \geq 0$, entonces $\overline{a} \in \{\overline{x} : x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$. Y si $a < 0$, entonces $-a \in \mathbb{R}^+$ y entonces $\overline{a} = \overline{-a} \in \{\overline{x} : x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$.

Demostramos ahora (2). Sean $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tales que $a \neq b$. Entonces:

$$(a \neq b) \wedge (a, b \geq 0) \Rightarrow a \neq -b \Rightarrow a \notin \{-b, b\} = \overline{b} \Rightarrow \overline{a} \neq \overline{b}.$$

Ejemplo 2

Para todo número real a, representamos por $[a]$ a la parte entera de a.

Sea V la relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ definida por:

$$aVb \Leftrightarrow [a] = [b].$$

Para todo $a \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{R} : aVb\} = \{b \in \mathbb{R} : [a] = [b]\} = [[a], [a] + 1).$$

Por ejemplo, $\overline{0} = [0, 1)$, $\overline{\pi} = [3, 4)$, $\overline{-0.5} = [-1, 0)$, $\overline{-4.2} = [-5, -4)$.

Ahora, debemos elegir un representante de cada clase. En este caso, para todo $a \in \mathbb{R}$, de la clase $\overline{a} = [[a], [a] + 1)$ elegimos $[a]$, es decir, el primer elemento del intervalo.

Ejemplo 2

Por tanto, obtenemos la siguiente buena representación:

$$(\mathbb{R}/V) = \{\overline{n} : n \in \mathbb{Z}\} = \{[n, n+1) : n \in Z\}.$$

Demostramos que efectivamente es una buena representación. Para ello, tenemos que demostrar:

(1) $\{\overline{n} : n \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{a} : a \in \mathbb{R}\}$.

(2) El conjunto $\{\overline{n} : n \in \mathbb{Z}\}$ no es redundante, es decir, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$a \neq b \Rightarrow \overline{a} \neq \bar{b}.$$

Demostramos (1). Como $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, $\{\overline{n} : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}/V$. Demostramos la otra inclusión. Sea $a \in \mathbb{R}$. Como $[a] \leq a < [a] + 1$, tenemos que

$$a \in [[a], [a] + 1) = \overline{a} = \overline{[a]},$$

ya que $[a] = [[a]]$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Entonces, como $[a] \in \mathbb{Z}$, tenemos que $\overline{a} = \overline{[a]} \in \{\overline{n} : n \in \mathbb{Z}\}$. Por tanto, queda demostrada la otra inclusión.

Demostramos ahora (2). Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $n \neq m$. Si $n < m$, entonces $n + 1 \leq m$, y por tanto $\overline{n} = [n, n+1) \neq [m, m+1) = \overline{m}$. Y si $m < n$, se procede análogamente.

Teoremas para relaciones de equivalencia

A continuación, vamos a demostrar algunos teoremas importantes para relaciones de equivalencia y conjuntos cociente.

Empezamos recordando el siguiente teorema básico, que demostramos en la penúltima clase, y que utilizaremos hoy.

Teorema 1

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Sean $a, b \in A$. Entonces:

(a) $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow aRb$.

(b) $b \in \overline{a} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b}$.

(c) Si $\overline{a} \neq \overline{b}$, entonces $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$.

Particiones de un conjunto

El siguiente concepto está estrechamente relacionado con el concepto de conjunto cociente de una relación de equivalencia.

Sea A un conjunto no vacío. Una partición de A es un conjunto no vacío P que cumple las siguientes tres condiciones:

(1) Los elementos de P son subconjuntos no vacíos de A.

(2) Si $X, Y \in P$ con $X \neq Y$, entonces $X \cap Y = \emptyset$.

(3) $\bigcup\{X : X \in P\} = A$.

Si P es una partición de un conjunto A y $x \in A$, denotamos por $I(x)$ al elemento $I \in P$ tal que $x \in I$.

Ejemplos

(1) $\{\{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}, \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar}\}\}$ es una partición de $\mathbb{N}$.

(2) $\{[n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$.

Sin embargo, el conjunto $\{[n, n+2) : n \in \mathbb{N}\}$ no es una partición de $\mathbb{R}$, ya que los intervalos $[n, n+2)$ no son disjuntos 2 a 2. Por ejemplo, $[1, 3) \cap [2, 4) \neq \emptyset$.

(3) $\{\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}, \{0\}, \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}\}$ es una partición de R.

(4) $\{\{-x, x\} : x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$.

Ejemplos

(5) Consideremos el conjunto $A = P(\{1,2,3\})$. Entonces, el conjunto

$$\{\{\emptyset\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\},\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\},\{\{1,2,3\}\}\}$$

es una partición de A.

Teorema 2

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces el conjunto cociente A/R es una partición de A.

Para demostrar este teorema, tenemos que probar que A/R cumple las condiciones $(1) - (3)$ de la definición de partición.

(1) Tenemos que comprobar que $\overline{a} \neq \emptyset$ para todo $a \in A$.

Es claro que se cumple (1), ya que para todo $a \in A$, $a \in \overline{a}$.

(2) Si $\overline{a}, \overline{b} \in A/E$ tales que $\overline{a} \neq \overline{b}$, entonces $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$.

Tenemos que (2) es el apartado (c) del Teorema 1.

(3) Tenemos que demostrar que $A = \bigcup\{\overline{a} : a \in A\}$.

Para probar (3), demostramos los dos contenidos. En primer lugar, demostramos que $A \subseteq \bigcup\{\overline{a} : a \in A\}$. Sea $x \in A$. Como $x \in \overline{x}$, tenemos que $x \in \bigcup\{\overline{a} : a \in A\}$. Por tanto, como x es un elemento arbitrario de A, tenemos que

$$A \subseteq \bigcup\{\overline{a} : a \in A\}.$$

Demostración del Teorema 2

Demostramos ahora el otro contenido, es decir, $\bigcup\{\overline{a} : a \in A\} \subseteq A$. Sea $x \in \bigcup\{\overline{a} : a \in A\}$. Entonces, existe $y \in A$ tal que $x \in \overline{y}$. Como $\overline{y} \subseteq A$ y $x \in \overline{y}$, tenemos que $x \in A$. Por tanto.

$$\bigcup\{\overline{a} : a \in A\} \subseteq A. \quad \square$$

Así pues, hemos demostrado en el Teorema 2 que el conjunto cociente de una relación de equivalencia en un conjunto A es una partición de A. A continuación, vamos a demostrar que a toda partición de un conjunto A le podemos asignar una relación de equivalencia en A.

Teoremas para relaciones de equivalencia

Si P es una partición de un conjunto A, definimos la relación asociada a P como

$$E(P) = \{(a, b) \in A^2 : \exists I \in P(a, b \in I)\}.$$

Teorema 3

Si P es una partición de un conjunto A, entonces $E(P)$ es una relación de equivalencia en A.

Por ejemplo, si consideramos en $\mathbb{R}$ la partición $P = \{[n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$, entonces $E(P)$ es la relación en $\mathbb{R}$ definida por:

$$xE(P)y \Leftrightarrow \text{ existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x, y \in [n, n+1)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Demostración del Teorema 3

Tenemos que probar que $E(P)$ es reflexiva, simétrica y transitiva. Pongamos $R = E(P)$.

(1) Demostramos que R es reflexiva.

Sea $x \in A$. Como P es una partición de A, existe $J \in P$ tal que $x \in J$, con lo cual se cumple xRx, ya que:

$$xRx \Leftrightarrow \exists I \in P(x \in I).$$

(2) R es simétrica, ya que

$$xRy \Rightarrow \exists I \in P(x, y \in I) \Rightarrow \exists I \in P(y, x \in I) \Rightarrow yRx.$$

Demostración del Teorema 3

(3) Demostramos que R es transitiva. Supongamos que xRy e yRz. Tenemos que demostrar que xRz. Tenemos entonces:

$$xRy \Rightarrow \exists I \in P(x, y \in I),$$

$$yRz \Rightarrow \exists J \in P(y, z \in J).$$

Por tanto, $y \in I \cap J$, con lo cual $I \cap J \neq \emptyset$. Entonces, como P es una partición, deducimos que $I = J$, ya que si $I \neq J$ tendríamos que $I \cap J = \emptyset$.

Tenemos entonces que $I = J$, $x, y \in I$ e $y, z \in J$. Por tanto, $x, z \in I$. Luego, xRz. $\square$

Teoremas para relaciones de equivalencia

Teorema 4

(a) Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces $E(A/R) = R$.

(b) Si P es una partición de un conjunto A, entonces $A/E(P) = P$.

Demostramos el apartado (a). Supongamos que R es una relación de equivalencia en A. Sean $a, b \in A$. Tenemos entonces:

$aRb \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow$ existe $c \in A$ tal que $\overline{a} = \overline{c}$ y $\overline{b} = \overline{c} \Leftrightarrow$ existe $c \in A$ tal que $a \in \overline{c}$ y $b \in \overline{c} \Leftrightarrow$ existe $X \in A/R$ tal que $a \in X$ y $b \in X \Leftrightarrow aE(A/R)b$.

Por tanto, $R = E(A/R)$.

Demostración del Teorema 4

Demostramos ahora el apartado (b). Supongamos que P es una partición de A. Sea $X \subseteq A$. Tenemos entonces:

$X \in A/E(P) \Leftrightarrow$ existe $a \in A$ tal que $X = \overline{a} \Leftrightarrow$ existe $a \in A$ tal que $X = \{b \in A : aE(P)b\} \Leftrightarrow$ existe $a \in A$ tal que $X = I(a)$.

Demostramos ahora que

existe $a \in A$ tal que $X = I(a) \Leftrightarrow X \in P$.

La implicación de izquierda a derecha es inmediata, ya que $I(a) \in P$ para todo $a \in A$.

Demostramos ahora la implicación de derecha a izquierda. Supongamos que $X \in P$. Sea $I \in P$ tal que $X = I$. Sea $a \in I$. Como $a \in I$, tenemos que $I(a) = I$. Entonces, como $X = I$, tenemos que $X = I(a)$.

Por tanto,

$X \in A/E(P) \Leftrightarrow$ existe $a \in A$ tal que $X = \overline{a} \Leftrightarrow$ existe $a \in A$ tal que $X = \{b \in A : aE(P)b\} \Leftrightarrow$ existe $a \in A$ tal que $X = I(a) \Leftrightarrow X \in P$.

Así pues, $A/E(P) = P$. $\square$

Observaciones

Para todo conjunto A definimos $\mathsf{EQUIV}(A)$ como el conjunto de todas las relaciones de equivalencia en A, es decir,

$$\mathsf{EQUIV}(A) = \{R \subseteq A^2 : R \text{ es una relación de equivalencia en } A\},$$

y definimos $\mathsf{PART}(A)$ como el conjunto de todas las particiones de A, es decir,

$$\mathsf{PART}(A) = \{P \subseteq P(A) : P \text{ es una partición de } A\}.$$

Observaciones

Definimos ahora la aplicación

$$\varphi : \mathsf{EQUIV}(A) \longrightarrow \mathsf{PART}(A)$$

dada por $\varphi(R) = A/R$ para toda relación de equivalencia R en A. Y definimos la aplicación

$$\psi : \mathsf{PART}(A) \longrightarrow \mathsf{EQUIV}(A)$$

dada por $\psi(P) = E(P)$ para toda partición P de A.

Aplicando entonces el Teorema 4, es fácil comprobar que φ es una aplicación biyectiva y que ψ es la función inversa de φ, es decir, $\psi = \varphi^{-1}$.