Introducció al Càlcul Integral

Demostracions

Mario Vilar

1 de juny de 2022

Taula de continguts

Teorema 1 (Criteri de comparació per pas al límit (integrals impròpies)). *Siguin $f, g : [a,b) \longrightarrow [0,+\infty)$ tals que $\in \mathscr{R}_{loc}([a,b))$ i $f, g \geq 0$. Suposem que el límit $A = \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$ és $A \in [0,+\infty]$, és a dir, que A pot ser infinit però no contemplarem el cas d'oscil·lacions infinites. Sigui com sigui, es dona el següent:*

1. *Si $A = 0$, $\int_a^b g \ll +\infty \implies \int_a^b f \ll +\infty$.*
2. *Si $A = +\infty$, $\int_a^b f \ll +\infty \implies \int_a^b g \ll +\infty$.*
3. *Si $A \in (0,+\infty)$, $\int_a^b f \ll +\infty \iff \int_a^b g \ll +\infty$.*

Demostració. Dividirem la prova en els tres apartats del teorema:

1. Per hipòtesi, donat $\varepsilon > 0$, $\exists c \in (a,b)$ tal que
$$c < x < b \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon. \tag{1}$$
Per tant, com $f, g \geq 0$, $f(x) \leq \varepsilon \cdot g(x)$, si $c < x < b$. Per tant, podem aplicar el criteri de comparació per desigualtat i obtenir la implicació:
$$\int_a^b g \ll +\infty \implies \int_a^b f \ll +\infty. \tag{2}$$
2. Canviem f per g i g per f i apliquem el primer apartat de manera totalment anàloga. Només cal observar que $\lim_{x\to b} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, per la qual cosa es dedueix que $\exists c \in (a,b)$ tal que $g(x) \leq \varepsilon \cdot f(x)$ si $x \in (c,b)$, d'on $\int_c^b f \ll +\infty$ implica que $\int_c^b g \ll +\infty$.
3. Donat $\varepsilon > 0$ $\exists c \in (a,b)$ tal que:
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon \iff A - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon. \tag{3}$$
Si multipliquem per $g \geq 0$,
$$(A-\varepsilon)g < f < (A+\varepsilon)g. \tag{4}$$
Pel criteri de comparació, $\int_c^b f$ i $\int_c^b g$ convergeixen simultàniament.

■

Teorema 2 (Criteri de Cauchy, o de l'arrel). *Sigui $\sum_n a_n$ una sèrie, amb $a_n \geq 0$. Sigui:*
$$\Lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}. \tag{5}$$
Aleshores:

1. *Si $\Lambda < 1$, aleshores $\sum_n a_n$ convergeix.*
2. *Si $\Lambda > 1$, aleshores $\sum_n a_n$ divergeix.*

Demostració. Usarem la definició de límit superior s'una successió $\{b_n\}_{n\geq m}$, que és decreixent en m (com és gran m més petit és el conjunt i menys potencial de creixement),
$$\limsup_{n\to\infty} b_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{n\geq m}\{b_n\} = \inf_m\{\sup_{n\geq m} \sqrt[n]{a_n}\}. \tag{6}$$

Per hipòtesi, $\Lambda < 1$ (ja que és una successió monòtona i fitada: tot i que $\lim_n b_n$ podria no existir, el $\limsup b_n$ sempre existeix). Per tant, $\exists r \in (\Lambda, 1)$ tal que

$$\Lambda = \inf_{m\in\mathbb{N}}\{\sup_{n\geq m} b_n\} < r < 1. \tag{7}$$

Per tant, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sup_{n\geq m} \sqrt[n]{a_n} < r. \tag{8}$$

En particular, $\forall n \geq m$, $\sqrt[n]{a_n} < r$ (tota la cua ha de quedar estrictament per sota de r). De fet, $a_n < r^n$ i a_n està dominat per la sèrie geomètrica de raó $r < 1$. Per tant, la nostra successió convergeix $\sum a_n \ll \infty$.

Suposem ara que $\Lambda > 1$. Per definició:

$$\Lambda = \inf_m\{\sup_{n\geq m} \sqrt[n]{a_n}\} > 1. \tag{9}$$

En particular, per a tot $m \in \mathbb{N}$ s'haurà de complir que:

$$\sup_{n\geq m} \sqrt[n]{a_n} > 1,\ \forall m. \tag{10}$$

Si $m = 1$, llavors $\sup_{n\geq 1} \sqrt[n]{a_n} > 1$ i existeix $n_1 \geq 1$ tal que $(a_{n_1})^{\frac{1}{n_1}} > 1$ i $a_{n_1} > 1$. Anàlogament, si $m = n_1+1$:

$$\sup_{n\geq n_1+1} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \exists n_2 > n_1 + 1 \,\big|\, (a_{n_2})^{\frac{1}{n_2}} > 1 \implies a_{n_2} > 1. \tag{11}$$

Podem aplicar aquest procediment inductivament de manera que estem construint una successió creixent $n_k < n_{k+1}$ tal que $(a_{n_k}) \subset (a_n)_n$ amb la propietat que $a_{n_k} = a_{n_k}^{\frac{1}{n_k}} > 1$ per a tot k. Això implica que $\limsup_n a_n \geq 1$ i, per tant, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. En definitiva, $\sum_n a_n$ no convergeix. ■

Teorema 3 (Criteri del quocient)**.** *Sigui* $\sum_n a_n$ *i* $a_n \geq 0$. *Siguin* $\Lambda = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *i* $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Aleshores:*

1. $\Lambda < 1 \implies \sum_n a_n \ll \infty$,
2. $\lambda > 1 \implies \sum_n a_n = \infty$.

Demostració. Per hipòtesi,

$$\Lambda = \inf_m \left\{\sup_{n\geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} < 1. \tag{12}$$

Ha d'existir algun $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sup_{n\geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r < 1 \text{ per algun } r \in (\Lambda, 1) \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < r, \quad \forall n \geq m. \tag{13}$$

Però llavors tota la cua $\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\}_{n\geq m}$ ha de quedar estrictament per sota de r. De fet, $a_{n+2} < ra_{n+1} < r^2 a_n$ i així successivament. En conseqüència, si resulta que $n = m$ i prenem $k \in \mathbb{N}$ qualsevol:

$$0 < a_{n+k} \leq r^k \cdot a_n \xrightarrow{r\in(0,1)} \sum_k r^k \ll \infty \implies \sum_k a_{n+k} \ll \infty \implies \sum_n a_n \ll \infty. \tag{14}$$

Pel que fa al segon apartat, per hipòtesi tenim que:

$$\lambda = \sup_m \left\{\inf_{n\geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} > 1. \tag{15}$$

Ha d'existir algun m tal que es produeixi el següent:

$$\inf_{n\geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1. \tag{16}$$

I, per tant, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ per a tot $n \geq m$. En particular, $a_{n+1} > a_n$ (ambdós termes són positius) i com que $a_n \geq 0$ és impossible que $\lim_n a_n = 0$. En conseqüència, $\sum_n a_n$ no pot ser convergent. ∎

Teorema 4 (Criteri de condensació)**.** *Sigui* $\{a_n\}_n$ *decreixent, amb* $a_n \geq 0$*. Aleshores:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} \ll \infty. \tag{17}$$

Demostració. Per un costat, $\{a_n\}$ és decreixent i tenim que $a_n \leq a_m$ si $n \geq m$ i, per tant, $a_2 + a_3 \leq 2a_2$ i $a_4 + \cdots + a_7 \leq 4a_4$ i $a_8 + \cdots + a_{15} \leq 8a_8$. Generalitzant a un nombre arbitrari:

$$a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1} \leq 2^k \cdot a_{2^k}. \tag{18}$$

En conseqüència, tenim el següent. Donem dues maneres de fer-ho:

$$\sum_{n=1}^{2^{k+1}-1} a_n = a_1 + \cdots + a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1} = \sum_{j=0}^{k} a_{2^j} + \cdots + a_{2^{j+1}-1} \leq \sum_{j=0}^{k} 2^j \cdot a_{2^j}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2^{k+1}-1} a_n &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \cdots + a_7) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k \cdot a_{2^k} = \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}.\end{aligned} \tag{19}$$

Això demostra que les sumes parcials de $\sum_k 2^k a_{2^k}$ controlen les de $\sum_n a_n$, i provem així la suficiència. Per veure el recíproc, observem d'altra banda que la monotonia també prova que:

$$\begin{gathered} a_2 \geq a_2 \\ a_3 + a_4 \geq 2a_4 \\ a_5 + \cdots + a_8 \geq 4a_8 \\ \vdots \\ a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}} \geq 2^k \cdot a_{2^{k+1}}. \end{gathered} \tag{20}$$

En conseqüència:

$$\sum_{n=2}^{2^{k+1}} a_n = a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}) \geq \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^{j+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k} 2^{j+1} a_{2^{j+1}}, \tag{21}$$

cosa que prova que les sumes parcials d'$\sum_n a_n$ controlen les de $\sum_k 2^k a_{2^k}$. Així doncs, les dues sèries tenen sumes parcials fitades simultàniament i, per tant, convergeixen també simultàniament, com volíem veure. ∎

Teorema 5 (Criteri logarítmic)**.** *Sigui* $\sum_n a_n$ *tal que* $a_n > 0$*. Sigui*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)}. \tag{22}$$

1. *Si* $L > 1$, $\sum_n a_n \ll \infty$.
2. *Si* $L < 1$, $\sum_n a_n = \infty$.

Demostració. Per definició, donat $\varepsilon > 0$ $\exists n_0$ tal que:

$$n > n_0 \implies \left| \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} - L \right| < \varepsilon \iff (L-\varepsilon)\log(n) < \log\left(\frac{1}{a_n}\right) < (L+\varepsilon)\log(n). \tag{23}$$

Agafarem la funció $\frac{1}{\blacksquare}$ en l'últim pas, que és decreixent en els positius i ens serveix per revertir les desigualtats:

$$\begin{aligned} \log(n^{L-\varepsilon}) < \log\left(\frac{1}{a_n}\right) < \log(n^{L+\varepsilon}) \iff n^{L-\varepsilon} < \frac{1}{a_n} < n^{L+\varepsilon} \\ \frac{1}{n^{L+\varepsilon}} < a_n < \frac{1}{n^{L-\varepsilon}}. \end{aligned} \tag{24}$$

■

Teorema 6 (Test de Dirchlet per a sèries)**.** *Siguin* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *tals que:*

1. $\{a_n\}$ *té sumes parcials fitades,*
2. $\{b_n\}$ *convergeix monòtonament cao a 0.*

Aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *convergeix.*

Demostració. Sigui $A_n = \sum_{n=1}^{N} a_n$. Aleshores, pel primer apartat existeix $k \geq 0$ tal que $|A_n| \leq k$ per a tot N. Pel segon apartat podem suposar que $b_n \geq b_{n+1} \geq 0$ amb $\lim_n b_n = 0$. Per la fórmula de sumació d'Abel, tenim el següent:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| &= \left|A_q B_q - A_{p-1}b_p + \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1})\right| \leq |A_q b_q| + |A_{p-1}b_p| + \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1})\right| \\ &\leq |A_q|b_q + |A_{p-1}|b_p + \sum_{n=p}^{q-1} |A_n|(b_n - b_{n-1}) \leq kb_q + kb_p + k\cdot\sum_{n=p}^{k-1}(b_n - b_{n-1}). \\ = k(b_q + b_p) &+ k((b_p - b_{p-1}) + (b_{p-1} - b_{p-2}) \cdots + (b_{q-1} - b_q)) = kb_q + kb_p + k(b_p - b_q) = 2kb_p. \end{aligned} \tag{25}$$

on hem aplicat la desigualtat triangular en la primera, en la segona el segon apartat i, en la última, el primer. Com $(b_p)_p \xrightarrow{p\to\infty} 0$, $\forall \varepsilon > 0 \exists p_0$ tal que si $p > p_0$, aleshores $b_p = |b_p| < \frac{\varepsilon}{2k}$. Si ara prenem $q > p > p_0$, obtenim:

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| \leq 2kb_p < 2k\frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon. \tag{26}$$

Per tant, per Cauchy la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ convergeix. ■