**LiRM 2016–2017 Solucions comentades dels problemes del segon parcial**

**Solucions comentades**

**1.** Considera els següents conjunts:

A = {a, b, {c}, d}, B = {a, {b}, c,d}, C = {3, a, b, c}

**(a)** Troba (A \ B) × C

**(b)** Troba A \ P(B)

Digues raonadament si són certes o falses les següents afirmacions:

**(c)** {3}∈P(P(C))

**(d)** {3}∈P(C)

**(e)** {(a,c),(a, b)}∈P((A × B) ∩ (B × A))

**(f)** {(a,c),(a, b)}∈P((A × B) ∪ (B × A))

**(g)** {{({c}, 3),(a, b)}} ∈ P(P(A × C))

**(a)** Per calcular (A \ B) × C primer tobarem A \ B que no és altra cosa que { x ∈ A : x /∈ B }. Mirant en les definicions per extensió dels conjunts A i B veiem que a ∈ A i a ∈ B; b ∈ A i b /∈ B; {c} ∈ A i {c} /∈ B; d ∈ A i d ∈ B tenim que A \ B = { b, {c} }. Ara recordem la definició de producte cartesià, (A \ B) × C = { (x, y) : x ∈ (A \ B) y ∈ C }. Per tant (A \ B) × C = { (b, 3), (b, a), (b, b), (b, c), ({c}, 3), ({c}, a), ({c}, b),({c}, c) }. **(b)** Partim de nou de la definició A \ P(B) = { x ∈ A : x /∈ P(B) }, a més recordem que P(B) = { D : D ⊆ B }. Ara raonem i no farà falta que calculem tot P(B). Observem que {c} ∈ A i {c} ⊆ B ja que tots el elements que pertanyen a {c}, és a dir c pertany també a B. Els altres elements d’ A no són subconjunts de B, ja que no són conjunts formats per elements de B. Així A \ P(B) = {a, b, d}. **(c)** {3}∈P(P(C)) si i només si {3}⊆P(C) per la definició de conjunt de les parts. {3}⊆P(C) sii 3 ∈ P(C) per la definició de subconjunt. I això és el mateix que dir que 3 ⊆ C. Aquesta última expressió és certa, ja que per tot conjunt X, 3 ⊆ X, per tant la primera expressió és també certa. **(d)** {3}∈P(C) si i només si {3} ⊆ C per la definició de conjunt de les parts. {3} ⊆ C sii 3 ∈ C per la definició de subconjunt. Ara bé, aquesta expressió és certa, ja que 3 apareix explícitament a la llista que defineix C per extensió. **(e)** {(a,c),(a,b)}∈P((A × B) ∩ (B × A)) sii {(a,c),(a, b)} ⊆ (A × B) ∩ (B × A) per definició de conjunt de les parts. {(a,c),(a,b)} ⊆ (A × B) ∩ (B × A) sii (a,c),(a,b) ∈ (A × B) ∩ (B × A) per la definició de subconjunt. Però això és el mateix que dir (a,c) ∈ (A × B) ∩ (B × A) i (a,b) ∈ (A × B) ∩ (B × A). Aquesta expressió és equivalent a (a,c) ∈ (A × B) i (a,c) ∈ (B × A) i (a,b) ∈ (A × B) i (a,b) ∈ (B × A) per la definició de intersecció de conjunts. Ara bé, aquesta expressió és falsa ja que (a,b) /∈ A × B per la definició de producte cartesià, perquè b /∈ B ja que no el trobem a la llista de la definició per extensió. (Nota: b = {b}). Com aquesta expressió és falsa, també ho és la primera. **(f)** {(a,c),(a,b)}∈P((A × B) ∪ (B × A)) sii {(a,c),(a, b)} ⊆ (A × B) ∪ (B × A) per definició de conjunt de les parts. {(a,c),(a,b)} ⊆ (A × B) ∪ (B × A) sii (a,c),(a,b) ∈ (A × B) ∪ (B × A) per la definició de subconjunt. Però això es el mateix que dir (a,c) ∈ (A × B) ∪ (B × A) i (a,b) ∈ (A × B) ∪ (B × A). Aquesta expressió és equivalent a

( )

(a,c) ∈ (A × B) o (a,c) ∈ (B × A) i

( )

(a,b) ∈ (A × B) o (a,b) ∈ (B × A) per la definició de unió de conjunts. Ara observem que aquesta expressió és certa ja que ambdues disjuncions son certes: (a,c) ∈ A × B per la definició de producte cartesià, perquè a ∈ A i c ∈ B -els trobem a la llista de la definició per extensió- i (a,b) ∈ B × A per la definició de producte cartesià, perquè a ∈ B i b ∈ A. Per tant la primera expressió és també certa. **(g)** {{(c,{3}),(a,b)}} ∈ P(P(A × C)) sii {{({c},3),(a,b)}} ⊆ P(A × C) per definició de conjunt de les parts.

{{({c}, 3), (a, b)}} ⊆ P(A × C) sii {({c}, 3), (a,b)}∈P(A × C) per definició de subconjunt. {({c}, 3), (a, b)}∈P(A × C) sii {({c},3),(a, b)} ⊆ A × C altra vegada per definició de les parts d’un conjunt.

1

**LiRM 2016–2017 Solucions comentades dels problemes del segon parcial**

{({c},3),(a,b)} ⊆ A × C sii ({c},3),(a,b) ∈ A × C és a dir ({c},3) ∈ A × C i (a,b) ∈ A × C. Així veiem que és certa, perquè els dos parells ordenats pertanyen a A × C ja que {c}, a ∈ A i 3,b ∈ C. Com aquesta expressió és certa i equivalent a la primera, tenim que aquella també ho és.

**2.** En el conjunt dels nombres reals **R** definim les relacions E i G de la forma següent:

Per tot x, y ∈ **R**, xEy si i només si y − x és racional.

Per tot x, y ∈ **R**, xGy si i només si y − x és enter parell.

Es demana

**(a)** Demostra G ⊆ E.

Per demostrar G ⊆ E, hem de veure que per tot (a,b) ∈ **R** × **R**, si (a, b) ∈ G, aleshores (a, b) ∈ E. Sigui (a,b) ∈ **R** × **R** arbitrari. Si (a,b) ∈ G, aleshores b − a és un enter parell, en particular b − a ∈ **Z**. Com que **Z** ⊆ **Q**, aleshores b − a ∈ **Q** i per tant (a, b) ∈ E com volíem demostrar.

**(b)** Demostra que G és relació d’equivalència.

Recordem que una relació és d’equivalència si i només si és reflexiva, transitiva i simètrica.

Reflexiva Sigui a ∈ **R** arbitrari. Com que a − a = 0 = 2 · 0i0 ∈ **Z** tenim que a − a és enter parell i per tant aGa. Com

que a és un real arbitrari, hem demostrat que per tot x ∈ **R**, xGx, és a dir que G és reflexiva. Transitiva Siguin a, b, c ∈ **R** tals que aGb i bGc. Com que aGb, aleshores hi ha k ∈ **Z** tal que b − a = 2k, anàlogament de bGc obtenim que hi ha s ∈ **Z** tal que c − b = 2s. Observem doncs que c − a = c − b + b − d = 2s + 2k = 2(s + k) i com que s + k ∈ **Z** ja que s,k ∈ **Z**, aleshores c − a és un enter parell i per tant aGc. Com que a,b, c són reals arbitraris, hem demostrat que per tot x,y,z ∈ **R**, si xGy i yGz, aleshores xGz; és a dir que G és transitiva. Simètrica Siguin a, b ∈ **R** tals que aGb. Com que aGb, aleshores hi ha k ∈ **Z** tal que b − a = 2k, Observem doncs que a − b = −(b − a) = −2k = 2(−k) i com que −k ∈ **Z** ja que k ∈ **Z**, aleshores a − b és un enter parell i per tant bGa. Com que a, b són reals arbitraris, hem demostrat que per tot x, y ∈ **R**, si xGy aleshores yGx; és a dir que G és simètrica.

**(c)** Calcula les classes d’equivalència respecte G: −1, 13,1i *7*.

−1 = {x ∈ **R** : xG − 1} = {x ∈ **R** : −1Gx} = {x ∈ **R** : ∃k ∈ **Z**(x − (−1) = 2k)} = {x ∈ **R** : ∃k ∈ **Z**(x = 2k − 1)} = {x ∈ **Z** : x és senar}.

13 = {x ∈ **R** : 13Gx} = {x ∈ **R** : ∃k ∈ **Z**(x − 13 = 2k)} = {x ∈ **R** : ∃k ∈ **Z**(x = 2k + 13)} = {2k + 13 : k ∈ **Z**}.

1 = {x ∈ **Z** : x és senar} = −1 ja que −1G1 perquè 1 − (−1) = 2 = 2 · 1i1 ∈ **Z**.

*7* = {x ∈ **R** : *7*Gx} = {x ∈ **R** : ∃k ∈ **Z**(x − *7* = 2k)} = {x ∈ **R** : ∃k ∈ **Z**(x = 2k + *7*)} = {2k + *7* : k ∈ **Z**}.

**(d)** Calcula la classe d’equivalència respecte a G d’un element arbitrari a ∈ **R**.

a = {x ∈ **R** : aGx} = {x ∈ **R** : ∃k ∈ **Z**(x − a = 2k)} = {x ∈ **R** : ∃k ∈ **Z**(x = 2k + a)} = {2k + a : k ∈ **Z**}.

**(e)** Dóna la partició associada a G, és a dir, el conjunt quocient **R**/G.

**R**/G =def {a ⊆ **R** : a ∈ **R**} = {a ⊆ **R** : a ∈ [0, 2)}. Per demostrar la igualtat cal demostrar les dues inclusions. Com que [0, 2) ⊆ **R**, trivialment {a ⊆ **R** : a ∈ [0, 2)}⊆{a ⊆ **R** : a ∈ **R**}.

2

**LiRM 2016–2017 Solucions comentades dels problemes del segon parcial**

Per veure l’altra inclusió hem de veure que per tot b ∈ **R**,  ̄b ∈ {a ⊆ **R** : a ∈ [0, 2)}. Sigui b ∈ **R**, denotem per [b] la part entera d’b, és a dir [b] = max{n ∈ **Z**n ≤ b}. Observem que 0 ≤ b−[b] < 1. Si [b] és enter parell aleshores b − (b − [b]) = [b] és un enter parell i per tant  ̄b = b − [b] i com que b − [b] ∈ [0, 1) ⊆ [0, 2),  ̄b ∈ {a ⊆ **R** : a ∈ [0, 2)}. Si [b] és un enter senar aleshores b − (b − [b] + 1)=[b] − 1 és un enter parell i per tant  ̄b = b − [b] + 1 i com que b − [b] + 1 ∈ [1, 2) ⊆ [0, 2),  ̄b ∈ {a ⊆ **R** : a ∈ [0, 2)}.

Observem també que {a ⊆ **R** : a ∈ [0, 2)} és una bona representació de **R**/G, és a dir que per qualssevol x, y ∈ [0, 2), ̄x = ̄y implica x = y. Siguin a,b ∈ [0, 2) tals que ̄a =  ̄b. Com que a,b ∈ [0, 2), aleshores |a − b| < 2. Si suposem que ̄a =  ̄b, aleshores b − a i a − b són enters parells que és equivalent a dir que |a − b| és natural parell. Ara bé si |a − b| < 2 i |a − b| és natural parell, aleshores |a − b| = 0 i per tant a = b.

**3.** Examina les següents relacions entre **N** × **N** i **Q**+ ∪ {0}:

**(a)** S1 = {((1, 2), 12), ((0, 5),0) ,((109, 1010), 0.1), ((2, 4), 24) , ((1, 0),1), ((2, 20), 110),

((3, 7),3), ((7, 3),7)}.

**(b)** S2 = {((n, m), nm) : n,m ∈ **N**,m = 0}. **(c)** S3 = {((n, m),n + m) : n,m ∈ **N**}.

Calcula el seu domini i la seva imatge. Digues quines són funcions. De les que ho siguin digues si són injectives i si són exhaustives.

**(a)** dom(S1) = {(x,y) ∈ **N** × **N** : existeix z ∈ **Q**+ ∪ {0} tal que((x,y),z) ∈ S1} = {(1, 2),(0, 5),(109, 1010),(2, 4),

(1,0), (2, 20), (3, 7), (7, 3)}, rec(S1) = {z ∈ **Q**+ ∪ {0} : existeix (x, y) ∈ **N** × **N** tal que((x,y),z) ∈ S1} = {0.5, 0, 0.1, 1, 3, 7}. S1 és funció, doncs cada element del domini de S1 és relaciona amb un únic element del recorregut de S1. S1 no és injectiva, perquè hi ha elements diferents del domini de S1 que tenen la mateixa imatge. Per exemple: (1, 2) = (2, 4) i ((1, 2), 0.5) i ((2, 4), 0.5) són elements de S1. S1 no és exhaustiva, perquè el recorregut de P1 és un conjunt finit i el conjunt final **Q**+ ∪ {0} és infinit. **(b)** dom(S2) = **N** × (**N** \ {0}),

rec(S2) = **Q**+ ∪ {0}. S2 és funció, perquè per cada parell (n,m) ∈ **N** × (**N** \ {0}) el quocient n/m està unívocament determinat. S2 no és injectiva, perquè per tot n,m,k nombres naturals amb n,m,k > 1, els parells (n,m)i (n · k,m · k) són diferents i tenen la mateixa imatge. S2 és exhaustiva, perquè rec(S2) = **Q**+ ∪ {0}. **(c)** dom(S3) = **N** × **N**,

rec(S3) = **N**. S3 és funció, perquè per cada parell (n,m) ∈ **N** × **N** la suma n + m està unívocament determinada. S3 no és injectiva, perquè per tot n,m ∈ **N** tals que n = m, els parells (n,m) i (m,n) són diferents i tenen la mateixa imatge. S3 no és exhaustiva, perquè rec(S3) = **N** està estrictament contingut en el conjunt final **Q**+ ∪ {0}.

3