**LiRM 2010–2011 Examen final**

**Solucions comentades dels problemes de l’examen final**

**3.** Considera la successió {an}n∈**N** que es defineix de la següent forma recursiva:

a0 := 0, a1 := 1, i, per n ⩾ 2, an := an−1 + an−2 .

Demostra per inducció que per tot n ⩾ 3, an i an+1 són primers entre si.

Observa que aquest exercici és el primer apartat de l’exercici 19 (de la llista 2), fet a la pissarra a classe de problemes. La successió és l’anomenada «sucessió de FIBONACCI». Si en calcules els primers termes, obtindràs 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, . . . Recorda que dos nombres naturals a i b són primers entre si quan no tenen cap divisor comú diferent de 1; és a dir, quan no existeixen nombres naturals m,c,d tals que m ⩾ 2, a = m · c i b = m · d (i observa que c i d poden ser naturals qualssevol, inclòs el 0).

• Pas inicial (n = 3): És tracta de comprovar que a3 i a4 són primers entre sí. És a dir, hem de comprovar que 2 i 3 són primers entre sí. I això és clarament cert perquè el nombre 1 és l’únic divisor comú de 2 i 3.

• Pas d’inducció: Hem de demostrar que si l’afirmació és certa per n = k ⩾ 3 aleshores també és certa per n = k + 1. És a dir, hem de veure que si ak i ak+1 són primers entre si, aleshores ak+1 i ak+2 són primers entre si. Raonarem per contrarecíproc, i demostrarem que si ak+1 i ak+2 no són primers entre si, aleshores ak i ak+1 tampoc no són primers entre si. Suposem que ak+1 i ak+2 no són primers entre si. Aleshores, per definició, existeixen nombres naturals m, c, d tals que m ⩾ 2, ak+1 = m · c i ak+2 = m · d. Aprofitant que sabem (per la definició de la successió a l’enunciat) que ak = ak+2 − ak+1, resulta que ak = m · d − m · c = m · (d − c). Així doncs, m ⩾ 2 i és un divisor comú de ak i de ak+1. Per tant, ak i ak+1 no són primers entre sí.

**4.** Considera els següents conjunts:

A = {x ∈ **N** : ∃y ∈ **Z**(y2 < 25 ∧ x < y)} B = {x ∈ **Z** : |x| < 5 ∧ ∀y ∈ **Z**(y > 2 → |x| < y)}

Dóna per extensió els conjunts A, B i A B.

• Com que y ∈ **Z**, y2 < 25 equival a |y| < 5, és a dir, y ∈ {−4,−3, . . . , 3, 4}. Segons l’enunciat, x ∈ A si i només si x és natural i x < y per a algun y dels anteriors. Això ho compleixen x = 0, 1, 2, 3 (tots compleixen x < 4 i amb això n’hi ha prou) i cap més: no hi ha naturals negatius, i els x més grans que 3 no complirien x < y per cap d’aquests y. Per tant, A = {0, 1, 2, 3}.

• Per la primera condició veiem que els possibles x ∈ B són els enters amb |x| < 5, o sigui x ∈ {−4,−3, . . . , 3, 4}. D’entre aquests cal triar els que compleixen la segona condició: |x| < y per a tots els enters y > 2, és a dir, han de compir alhora les condicions |x| < 3, |x| < 4, |x| < 5, etc. Evidentment, n’hi ha prou exigint que |x| < 3. Per tant obtenim un conjunt més petit: B = {−2, −1, 0, 1, 2}.

• Per definició A B = {x ∈ A : x /∈ B} = {3}.

Observació: En moltes respostes a aquest problema s’ha observat precipitació a l’hora de tractar les desigualtats, i confondre < amb ⩽. Recorda que 4 < 4 és fals, per exemple. Una altra errada ha estat fer servir intervals, per exemple de la forma (−2, 2), que són conjunts de nombres reals!

1

**LiRM 2010–2011 Examen final**

**5.** Demostra que (A × B) ∪ ((B A) × B) = (A ∪ B) × B, on A i B són dos conjunts qualssevol.

Cal demostrar les dues inclusions:

• (A × B) ∪ ((B A) × B) ⊆ (A ∪ B) × B: Sigui (x, y) ∈ (A × B) ∪ ((B A) × B). Per la definició d’unió cal distingir dos casos: - Si (x, y) ∈ A × B, aleshores x ∈ A i y ∈ B. Per tant, com que x ∈ A implica x ∈ A ∪ B, i y ∈ B,

tenim que (x, y) ∈ (A ∪ B) × B. - Si (x,y) ∈ ((B A) × B), aleshores x ∈ B A i y ∈ B. Per tant x ∈ B i x /∈ A i y ∈ B. Donat

que x ∈ B implica x ∈ A ∪ B i y ∈ B, tenim (x,y) ∈ (A ∪ B) × B. En els dos casos hem vist que (x,y) ∈ (A ∪ B) × B, per tant es compleix la inclusió.

• (A ∪ B) × B ⊆ (A × B) ∪ ((B A) × B): Sigui (x, y) ∈ (A ∪ B) × B. Aleshores x ∈ A ∪ B i y ∈ B. Hem de considerar dos casos: + Si x ∈ A, aleshores (x, y) ∈ A × B. Per tant (x, y) ∈ (A × B) ∪ ((B A) × B). + Si x ∈ B, aleshores pot ocórrer que x ∈ A o be x /∈ A. Si x ∈ A estem en el cas anterior, i ja està fet. Si x /∈ A, aleshores x ∈ B A y com que y ∈ B, tenim que (x,y) ∈ (B A) × B. Per tant (x,y) ∈ (A × B) ∪ ((B A) × B). En els dos casos hem vist que (x,y) ∈ (A ∪ B) × B, per tant la inclusió es compleix.

Observacions:

⋆ Els elements de A × B són parells ordenats (x, y); posar x, y ∈ A × B no sols és incorrecte sinó que

pot induir a errors. ⋆ En el segon cas marcat amb + de la segona inclusió, que x ∈ B no implica automàticament que

x /∈ A, ja que A i B són arbitraris, i enlloc ens diuen que podem suposar que A ∩ B = ∅. ⋆ La separació per casos marcada amb + també es pot fer considerant directament si x ∈ A i si x /∈ A; en aquest segon cas, com que la hipòtesi és que x ∈ A ∪ B, ha de ser x ∈ B, d’on x ∈ B A, i es segueix igual.

**6.** Sigui ∼ la relació en **R** definida a continuació:

Per tot a, b ∈ **R**, a ∼ b si, i només si a = b o (|a| − 2)·(|b| − 2) > 0.

(Observa que la condició sobre el producte equival a dir que |a| − 2 i |b| − 2 són no nuls i tenen el mateix signe, positiu o negatiu.)

**(a)** Demostra que ∼ és una relació d’equivalència.

**Reflexiva:** Per la pròpia definició, si a = b aleshores a ∼ b. És a dir, a ∼ a per tot a ∈ **R**. **Simètrica:** Si per a,b ∈ **R** arbitraris es compleix a ∼ b, aleshores per la simetria de la relació

d’igualtat i la commutativitat del producte en **R** es compleix també que b ∼ a. **Transitiva:** Suposem que a ∼ b i b ∼ c per a a,b,c ∈ **R** qualssevol. Si a = b o b = c, substituint trobem que a ∼ c. Resta el cas on (|a| − 2)·(|b| − 2) > 0 i (|b| − 2)·(|c| − 2) > 0. És a dir, que |a| − 2 i |b| − 2 són no nuls i tenen el mateix signe, i que |b| − 2 i |c| − 2 són no nuls i tenen el mateix signe. Per tant, |a| − 2 i |c| − 2 són no nuls i tenen el mateix signe. Això implica que a ∼ c.

**(b)** Troba 2 i −3.

• 2 = {a ∈ **R** : a ∼ 2} = {a ∈ **R** : a = 2 o (|a| − 2)·(|2| − 2) > 0}. Però |2| − 2 = 2 − 2 = 0, per tant la segona condició no es compleix mai, i només queda a = 2. Per tant, 2 = {2}.

2

**LiRM 2010–2011 Examen final**

• −3 = {a ∈ **R** : a ∼ −3} = {a ∈ **R** : a = −3 o (|a| − 2)·(|−3| − 2) > 0}. Com que |−3| − 2 = 3 − 2 = 1 > 0, la segona condició equival a dir que |a| − 2 > 0, és a dir |a| > 2, o bé a ∈ (−∞, −2) ∪ (2,∞). Observem que −3 ∈ (−∞, −2). Per tant, −3 = (−∞, −2) ∪ (2, ∞).

**(c)** Dóna el conjunt quocient de la relació ∼.

Dos punts diferents estan relacionats per ∼ si i només si en calcular |x| − 2 per a cadascun d’ells, donen el mateix signe, i no són 0. Aquest signe només pot ser, doncs, positiu, o negatiu. Per tant, només hi ha dues classes que incloguin elements diferents. Com hem vist al càlcul de l’apartat anterior, (−∞,−2) ∪ (2,+∞) correspon als casos de signe positiu. Per al signe negatiu resulta que |x| − 2 < 0 si i només si x pertany a l’interval (−2,2), per tant aquest interval és una altra classe d’equivalència. Finalment queden els punts “aïllats”, que no estan relacionats amb ningú més: Ja hem vist que 2 ho és, i només queda un punt de la recta per analitzar: −2. Com que |−2| − 2 = 2 − 2 = 0, no pot complir la segona part de la definició amb cap altre punt, per tant només està relacionat amb si mateix.

En conclusió, doncs, el conjunt quocient de la relació ∼ està format per les 4 classes d’equivalència següents: {2}, {−2}, (−∞, −2) ∪ (2, +∞) i (−2,2).

Si ho volem escriure més formalment, podem posar

**R**/∼ = { {2}, {−2}, (−∞, −2) ∪ (2, +∞), (−2,2) }.

Observacions:

⋆ Les propietats reflexiva, simètrica i transitiva contenen un “per tot a”, “per tots a,b” i “per tots a, b, c” respectivament. Això cal posar-ho si es posa l’enunciat de la propietat. I les demostracions han de ser generals, no poden consistir en comprovar un exemple. ⋆ Es segueix produint l’error incomprensible d’enunciar la propietat simètrica com una “i” (a ∼ b i

b ∼ a), en comptes d’una implicació (si a ∼ b aleshores b ∼ a).

3