**LiRM 2012–2013 Solucions al primer parcial**

**Solucions comentades**

**1. (a)** Dóna una expressió, en termes dels símbols de negació i conjunció, que sigui lògicament equivalent al

condicional de dues propietats P i Q. Demostra aquesta equivalència.

Una expressió de les demanades és P → Q ≡ ¬(P ∧ ¬Q). La demostració de l’equivalència és la següent taula de veritat

P Q P → Q ¬Q P ∧ ¬Q ¬(P ∧ ¬Q) 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1

on comprovem que les columnes de P → Q i de ¬(P ∧ ¬Q) coincideixen, cosa que vol dir (per definició) que les dues fórmules són equivalents.

**(b)** Dóna una expressió, en termes dels símbols de negació i disjunció, que sigui lògicament equivalent a la

conjunció de dues propietats P i Q. Demostra aquesta equivalència.

Una expressió de les demanades és P ∧ Q ≡ ¬(¬P ∨ ¬Q). La demostració de l’equivalència és la següent taula de veritat

P Q P ∧ Q ¬P ¬Q ¬P ∨ ¬Q ¬(¬P ∨ ¬Q) 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1

on comprovem que les columnes de P ∧ Q i de ¬(¬P ∨ ¬Q) coincideixen, cosa que vol dir (per definició) que les dues fórmules són equivalents.

**2.** Formalitza la regla d’Inducció Matemàtica. Usa P(0) per a expressar que 0 compleix la propietat P, i usa P(n)

per a expressar que n compleix la propietat P.

La resposta es pot posar:

(P(0) ∧ ∀n ∈ **N**(P(n) → P(n + 1))) → ∀n ∈ **N**(P(n)).

També és correcte utilitzar altres lletres en lloc de la n; per exemple, també es pot respondre amb la formalització (P(0) ∧ ∀k ∈ **N**(P(k) → P(k + 1))) → ∀n ∈ **N**(P(n)).

o amb la formalització

(P(0) ∧ ∀k ∈ **N**(P(k) → P(k + 1))) → ∀k ∈ **N**(P(k)).

Com l’enunciat de la pregunta només demana formalitzar no cal donar cap explicació més.

**3.** Demostra que si X i Y son conjunts i X \ Y = Y \ X, aleshores X = Y.

A continuació veiem tres maneres diferents de demostrar-ho.

1

**LiRM 2012–2013 Solucions al primer parcial**

**Primera demostració:** Demostrem directament la igualtat X = Y. Per a demostrar aquesta igualtat, demostrarem

les dues inclusions: X ⊆ Y, i X ⊇ Y. Per a demostrar la primera inclusió (és a dir, X ⊆ Y), cal demostrar que per a qualsevol a, si a ∈ X aleshores a ∈ Y. Ho fem per reducció a l’absurd: Sigui a ∈ X, i vegem que si suposem que a /∈ Y arribem a una contradicció. Com que a ∈ X i a /∈ Y, tenim que a ∈ X \ Y, i de la hipòtesi X \ Y = Y \ X deduïm que a ∈ Y \ X, és a dir, que a ∈ Y i a /∈ X. Aleshores tenim que, alhora, a ∈ X i a /∈ X, i per tant hem obtingut una contradicció (en aquesta ocasió també hem obtingut la contradicció a /∈ Y i a ∈ Y). Per tant, és impossible que a /∈ Y. És a dir, hem demostrat que a ∈ Y per a tot a tal que a ∈ X. Això demostra que X ⊆ Y. La demostració que Y ⊆ X es fa igual canviant els noms dels conjunts X i Y, ja que la hipòtesi és la mateixa si hi intercanviem X i Y. **Segona demostració:** Demostrem el condicional per reducció a l’absurd; per tant, suposem tant que X \ Y = Y \ X com que X = Y, i anem a cercar una contradicció. La condició X = Y ens diu que o bé tenim X ⊈ Y o bé tenim Y ⊈ X. Continuem la demostració distingint aquests dos casos. **Cas** X ⊈ Y : Usant que X ⊈ Y deduïm que existeix x ∈ X tal que x /∈ Y. Per tant, x ∈ X \ Y i x ∈ Y \ X. En conseqüència, obtenim que X \ Y = Y \ X; fet que clarament entra en contradicció amb la suposició X \ Y = Y \ X. **Cas** Y ⊈ X : Usant que Y ⊈ X deduïm que existeix y ∈ Y tal que y /∈ X. Per tant, y ∈ Y \ X i y ∈ X \ Y. En conseqüència, obtenim que X \ Y = Y \ X; fet que clarament entra en contradicció amb la suposició X \ Y = Y \ X. Com en tots dos casos hem arribat a contradicció hem finalitzat la demostració. **Tercera demostració:** Demostrem el condicional en dos passos.

En el primer pas demostrem quesi X \ Y = Y \ X, aleshores X \ Y = 3 = Y \ X.

Per la simetria entre la X i la Y és suficient demostrar que si X \ Y = Y \ X, aleshores X \ Y = 3. I aquest condicional és cert perquè si X \ Y = 3, aleshores existiria un x ∈ X tal que x /∈ Y; i per tant x ∈ X \ Y i x /∈ Y \ X, contradient la hipòtesis X \ Y = Y \ X. I en el segon pas demostrem que

si X \ Y = 3 = Y \ X, aleshores X = Y.

Per la simetria entre la X i la Y és suficient demostrar que si X \ Y = 3, aleshores X ⊆ Y. I això és cert perquè si x ∈ X i x /∈ Y, aleshores x ∈ X \ Y, contradicció.

**4.** Demostra per inducció que per a tot n ⩾ 2, si a1,..., an són nombres reals arbitraris estrictament entre 0 i 1,

aleshores

(1 − a1) · (1 − a2) · ... · (1 − an) > 1 − a1 − ... − an. Justifica i motiva tots els passos de la teva demostració.

Seguint el mètode d’inducció, cal provar primer la propietat per a n = 2 i després provar que si suposem que val per a n = k aleshores també val per a n = k + 1.

**Cas** n = 2**:** Cal demostrar que per a a1, a2 ∈ **R** arbitraris tals que 0 < a1, a2 < 1, (1 − a1) · (1 − a2) > 1 − a1 − a2.

Desenvolupem el producte i veiem que

(1 − a1) · (1 − a2) = 1 − a1 − a2 + a1a2 > 1 − a1 − a2.

La darrera desigualtat és certa perquè en ser a1, a2 > 0 per hipòtesi, també a1a2 > 0 (el producte de dos reals positius és un real positiu). **Pas d’inducció:** Sigui k ⩾ 2, i suposem que per a qualssevol reals a1,..., ak tals que 0 < a1,..., ak < 1, val:

(1 − a1) · (1 − a2) · ... · (1 − ak) > 1 − a1 − ... − ak. (HI)

2

**LiRM 2012–2013 Solucions al primer parcial**

Hem de provar que per a qualssevol reals a1,..., ak+1 tals que 0 < a1,..., ak+1 < 1, val:

(1 − a1) · (1 − a2) · ... · (1 − ak) · (1 − ak+1) > 1 − a1 − ... − ak − ak+1. (?)

Com que sabem que ak+1 < 1, també sabem que 1 − ak+1 > 0 i per tant podem multiplicar els dos termes de (HI) per 1 − ak+1 i es consevarà la desigualtat; és a dir, sabem que

(1 − a1) · (1 − a2) · ... · (1 − ak) · (1 − ak+1) > (1 − a1 − ... − ak) · (1 − ak+1). (1)

Ara, per a provar (?) a partir de (1) només ens cal demostrar

(1 − a1 − ... − ak) · (1 − ak+1) > 1 − a1 − ... − ak − ak+1. (??)

Desenvolupem el producte del terme esquerre i veiem que:

(1 − a1 − ... − ak) · (1 − ak+1) = 1 − a1 − ... − ak − ak+1(1 − a1 − ... − ak)

= 1 − a1 − ... − ak − ak+1 + ak+1(a1 + ... + ak) > 1 − a1 − ... − ak − ak+1.

La darrera desigualtat és veritat perquè ak+1(a1 + ... + ak) > 0 ja que tots els ai són estrictament positius. Per tant, efectivament hem demostrat (??), i per tant hem demostrat (?), c.v.d.

**Principals errors detectats en aquest problema:** A més d’errors (molt greus) d’aritmètica elemental, destaquem:

• Creure que de (HI) ja es dedueix (?) només demostrant que 1 − ak+1 > −ak+1. Aquest fet és cert (i trivial, perquè 0 < ak+1 < 1), però això no demostra el que volem: cal observar que el terme de l’esquerra està multiplicant, i el de la dreta està sumant, per tant la deducció és incorrecta.

• Comprovar el cas n = 2 només per a dos valors concrets de a1 i a2, per exemple 0,3 i 0,5. Cal demostrar-ho per a tots els valors possibles entre 0 i 1; això és el que es vol dir quan es diu que cal provar quelcom per a valors arbitraris.

• Comprovar només els valors 0 i 1. Per una banda, no són “estrictament entre 0 i 1”, per tant no estan entre els valors considerats en aquesta propietat. Per altra banda, com abans, comprovar dos valors no demostra res, ja que cal demostrar-ho per a tots els valors possibles entre 0 i 1.

• No argumentar correctament, especialment no posar correctament el sentit de les implicacions, no justificar-les i posar equivalències quan només son implicacions.

**5.** Sigui z un nombre enter. Considera les següents propietats de z, expressades amb símbols:

**P1**: ∀p ∈ **Z**(z = 6p + 2) ∧ ∀q ∈ **Z**(z = 6q − 1) **P2**: ¬∃s(s ∈ **Z** ∧ z = 3s + 2)

**(a)** Expressa amb símbols les negacions de P1 i de P2, sense que apareguin les expressions ¬∀ i ¬∃. Recorda

que cal justificar tots els passos.

¬**P1**: ¬(∀p ∈ **Z**(z = 6p + 2) ∧ ∀q ∈ **Z**(z = 6q − 1)) ≡ usant ¬(P ∧ Q) ≡ ¬P ∨ ¬Q :

¬∀p ∈ **Z**(z = 6p + 2) ∨ ¬∀q ∈ **Z**(z = 6q − 1) ≡ usant ¬∀ ≡ ∃¬ : ∃p ∈ **Z**¬(z = 6p + 2) ∨ ∃q ∈ **Z**¬(z = 6q − 1) ≡ i com que “¬ =” és “=” : ∃p ∈ **Z**(z = 6p + 2) ∨ ∃q ∈ **Z**(z = 6q − 1)

¬**P2**: ¬(¬∃s(s ∈ **Z** ∧ z = 3s + 2)) ≡ usant ¬¬P ≡ P :

∃s(s ∈ **Z** ∧ z = 3s + 2)

3

**LiRM 2012–2013 Solucions al primer parcial**

**(b)** Expressa les negacions obtingudes a l’apartat anterior en llenguatge informal, de la forma més entenedora

possible.

Observem que ¬**P1** expressa que

z és un múltiple de 6 més 2 o z és un múltiple de 6 menys 1.

Sense utilitzar cap símbol el que estem dient és que un nombre compleix la propietat ¬**P1** si i només si el nombre compleix que o bé és un múltiple de 6 més 2 o bé és un múltiple de 6 menys 1. En altres paraules, si o bé el nombre menys 2 és un múltiple de 6 o bé el nombre més 1 és un múltiple de 6.

Observem que ¬**P2** expressa que

z és un múltiple de 3 més 2.

Sense utilitzar cap símbol el que estem dient és que un nombre compleix la propietat ¬**P2** si i només si el nombre compleix que és un múltiple de 3 més 2. En altres paraules, si el nombre menys 2 és un múltiple de 3.

**(c)** Demostra per contrarecíproc que si z compleix P1, aleshores z compleix P2.

Demostrar per contrarecíproc quesi z compleix P1, aleshores z compleix P2,

és demostrar que

si z no compleix P2, aleshores z no compleix P1.

És a dir, hem de demostrar que

si “z és un múltiple de 3 més 2”, aleshores “z és un múltiple de 6 més 2 o z és un múltiple de 6 menys 1”.

A continuació donem una demostració directa d’aquest darrer condicional. Sigui z un mútiple de 3 més 2, és a dir, z = 3s + 2 per algun s ∈ **Z**. Seguidament distingim casos segons la paritat de s.

**Cas** s **és parell:** Si s és parell, aleshores s = 2p per algun p ∈ **Z**. Substituint en la hipòtesi obtenim que z = 3s + 2 = 3(2p) + 2 = 6p + 2 i com que p ∈ **Z**, tenim que z és múltiple de 6 més 2. En particular, també és compleix la disjunció “z és un múltiple de 6 més 2 o z és un múltiple de 6 menys 1”. **Cas** s **és senar:** Si s és senar, aleshores s = 2q + 1 per algun q ∈ **Z**. Substituint en la hipòtesi obtenim z = 3s + 2 = 3(2q + 1) + 2 = 6q + 5 = 6(q + 1) − 1 i com que q + 1 ∈ **Z**, tenim que z és múltiple de 6 menys 1. En particular, també és compleix la disjunció “z és un múltiple de 6 més 2 o z és un múltiple de 6 menys 1”.

Això finalitza la demostració ja que en ambdós casos hem demostrat que “z és un múltiple de 6 més 2 o z és un múltiple de 6 menys 1”.

**Principals errors detectats en aquest problema:** Destaquem els comentaris següents:

• Recordem que expressions com ¬((∀p ∈ **Z**) ... ) són lògicament equivalents a (∃p ∈ **Z**)¬ . . . ; que no és el mateix que dir (∃p /∈ **Z**)¬ ....

• Les quatre propietats considerares (P1, P2, ¬P1 i ¬P2) són dependents d’un paràmetre, el qual ha estàt anomenat z a l’enunciat.

• En el tercer apartat no es poden distingir els casos “z és un múltiple de 6 més 2” i “z és un múltiple de 6 menys 1” ja que formen part de la conclusió que hem de demostrar.

4