3 Interpolació i aplicacions

37 Considerem la taula de punts següent:

x_k	-1	1	2	2.5
y_k	-10	4	0.5	-1.25

.

a) Trobeu el polinomi d'interpolació de la taula emprant els mètodes de Lagrange i de Newton.

b) Trobeu el polinomi d'interpolació que resulta en afegir a la taula anterior el valor $(5, 17)$.

c) Idem si afegim $(0, 2.5)$. Comenteu el resultat obtingut.

38 S'avalua un polinomi $p \in P_2[x]$ en 5 punts equidistants: $x_i = x_0 + ih,\ i = 0, 1, 2, 3, 4\ (h \neq 0)$. Els resultats obtinguts són:

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
$p(x)$	12	3	2	8	24

Però se sap que s'ha comès un error d'escriptura: una (i només una) de les dades $p(x)$ és incorrecta.

a) Detecteu la dada incorrecta i corregiu-la.

b) Si $p(x)$ és el polinomi interpolador en x_0, x_2 i x_4 d'una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitament diferenciable tal que $|f^{(k)}(z)| \leq M_k$, $\forall z \in [x_0, x_4]$, $\forall k \geq 0$, trobeu una fita de $|f(\overline{x}) - p(\overline{x})|$ en funció de h i d'alguna M_k, on $\overline{x}$ és l'abscissa del mínim de $p(x)$ en $[x_0, x_4]$.

39 a) Volem preparar una taula de la funció $f(x) = \ln x$ en punts equidistants de l'interval $x \in [1, 2]$:

$$x_i = 1 + ih\ ,\ i = 0, 1, \ldots, n\ ;\ \ h = \frac{1}{n}\ .$$

Després s'usarà aquesta taula per a aproximar $f(x)$ mitjançant interpolació lineal: $\forall z \in [1, 2]$, una aproximació de $f(z)$ serà $P_1(z)$, on $P_1(x)$ és el polinomi interpolador de $f(x)$ en les dues abscisses de la taula més properes a z.

Quin és el mínim valor de n que ens assegura, per a qualsevol $z \in [1, 2]$, un error en l'aproximació que sigui menor o igual que $\frac{1}{2}10^{-8}$?

b) Repetiu l'apartat anterior en el cas que la taula sigui de $f(x)$ i de $f'(x)$, i que, en lloc de $P_1(x)$, s'usa $P_3(x)$, el polinomi interpolador d'Hermite en les dues abscisses més pròximes.

40 D'una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es coneixen els valors $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ i $f'(1) = 1$. Sembla que f té un màxim relatiu a prop de $x = 1$, $y = 3$. L'objectiu d'aquest problema és calcular-lo aproximadament.

a) Calculeu (en la base natural dels polinomis) els coeficients del polinomi $p(x)$ de grau mínim que interpola els quatre valors anteriors.

b) Calculeu el màxim relatiu (abscissa i ordenada) del polinomi $p(x)$ que hi ha a l'interval d'abscisses $(0, 2)$.

c) Sigui $x = z$ l'abscissa del màxim anterior. Suposant que f és infinitament derivable i que

$$|f^{(k)}(x)| \leq 3(k+4) \quad \forall x \in (0,2) \quad \forall k > 0 \ ,$$

trobeu una fita numèrica de $|f(z) - p(z)|$.

41 Sigui $f(x) = x^{1/3}$,$\forall x \in \mathbb{R}$. Usant que $f(-x) = -f(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$), i que $f(1/x) = 1/f(x)$ (si $x \neq 0$), es pot restringir el domini a la semirecta $x \geq 1$.

a) Es disposa d'una taula amb els valors de $f(n)$ en les abscisses enteres $n = 1, 2, 3, \ldots, 1000$. Aleshores, quan $z \in (1, 1000)$ no és enter, es pot aproximar $f(z)$ pel valor $p(z)$ del polinomi interpolador de Lagrange en les dues abscisses de la taula més properes a z (observeu que $p(x) \in P_1([x])$).

Trobeu una fita (com més bona millor) de l'error relatiu $\frac{|f(z)-p(z)|}{|f(z)|}$ que depengui només del valor $n \in \mathbb{N}$ tal que $z \in (n, n+1)$.

Nota. La fita ha de ser de la forma $C\, n^e$, amb C racional i e enter.

Deduïu després una fita que valgui per a tots els valors de n.

b) És fàcilment comprovable que $f'(n) = \frac{f(n)}{3n}$ ($\forall n = 1, 2, 3, \ldots$). De manera que, a la taula amb els valors $f(n)$, s'hi pot afegir fàcilment els valors $f'(n)$.

Aleshores, quan z no és enter, podem aproximar $f(z)$ pel valor $q(z)$ del polinomi interpolador d'Hermite de la funció $f(x)$ en els dues abscisses de la taula més pròximes a z (observeu que $q(x) \in P_3([x])$).

Quines són ara unes fites de l'error relatiu?

42 Considereu la funció $f(x) = 1/x$.

a) Trobeu els polinomis de Taylor al voltant de $x_0 = 1$ de graus 2, 3 i 4.

b) Calculeu el polinomi interpolador a $f(x)$ en els nodes $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$.

c) Avalueu la funció i els polinomis obtinguts en els apartats anteriors en els punts 0.5, 1, 2, 2.25, 2.75, 3, 3.5, 4 i 5. Compareu els resultats.

d) Considereu els polinomis i els punts de l'apartat anterior. Quines són les fites teòriques de l'error?

Indicació: Apliqueu la fórmula de l'error en la interpolació i la resta de Lagrange per al polinomi de Taylor.

43 Siguin $T > 0$ fixat, i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció tan diferenciable com calgui que, a més, és $T-$periòdica: $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Llavors només cal considerar-la a l'interval $[0, T]$, per exemple. Notem que $f(T) = f(0)$, i també $f'(T) = f'(0)$.

Calculeu el polinomi $p(x)$, de grau 3 com a màxim, que interpola f i f' en els punts 0 i T. Heu d'escriure'l en la base natural: $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, amb coeficients a, b, c i d en funció de $f(0)$, $f'(0)$ i T.

Fiteu l'error $f(x) - p(x)$, a tot l'interval $[0, T]$, tan bé com pugueu, per una constant que només depengui de T i d'una fita d'una derivada adequada de f.

44 Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable tantes vegades com faci falta.

a) Fixem un valor $a \in \mathbb{R}$ qualsevol, i sigui $h > 0$ un pas de discretització. Deduïu els valors adequats de les constants $A, B, C \in \mathbb{R}$ que donen una fórmula de derivació numèrica de la forma

$$\frac{Af(a) + Bf(a+h) + Cf(a+3h)}{h} = f'(a) + O(h^2)\ .$$

b) Suposem que una taula de valors de $f(x)$ és:

x	0	0.1	0.3	0.9
$f(x)$	1	1.05	1.14	1.38

Trobeu aproximacions de $f'(0)$ usant la fórmula de l'apartat a) per a dos valors diferents del pas h. Feu després un pas d'extrapolació per a obtenir una aproximació millor.

45 D'una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tan diferenciable amb continuïtat com calgui, es coneixen els valors $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_0+h)$ i $g_1 = f'(x_0+h)$, on $h > 0$. Es vol calcular aproximadament $f'(x_0)$. Siguin $M_j = \max_{x_0 \le z \le x_0+h} |f^{(j)}(z)|$, $\forall j \ge 0$.

a) Calculeu el polinomi $p(x)$ que interpola f en x_0, i f i f' en $x_0 + h$, en funció de f_0, f_1, g_1 i h. Doneu també una fita de l'error $|f(x) - p(x)|$, com més bona millor, que valgui per a qualsevol $x \in [x_0, x_0 + h]$, de la forma KM_jh^p, amb constants K, j i p adequades.

b) Una aproximació de $f'(x_0)$ és $p'(x_0)$. Escriviu aquesta aproximació en funció de f_0, f_1, g_1 i h. Doneu també una expressió de l'error $f'(x_0) - p'(x_0)$ de la forma $Kf^{(j)}(\xi)h^p$, amb constants adequades K, j i p.

c) Es busca ara una fórmula de derivació numèrica per a aproximar $f'(x_0)$ de la forma

$$F(h) \equiv \frac{Af(x_0) + Bf(x_0+h)}{h} + Cf'(x_0+h) = f'(x_0) + a_1h^{p_1} + a_2h^{p_2} + \dots$$

amb $h > 0$ i exponents $0 < p_1 < p_2 < \dots$. Trobeu els valors de les constants A, B i C per tal que l'ordre p_1 sigui el màxim possible. Doneu també els valors p_i en funció de i, i els valors a_i en funció de derivades adequades de f en x_0.

d) Aplicació. D'una determinada funció es coneixen $f(0) = 0.2955$, $f(0.1) = 0.3894$, $f(0.2) = 0.4794$, $f'(0.1) = 0.9211$ i $f'(0.2) = 0.8776$. Trobeu una aproximació de $f'(0)$ mitjançant l'aplicació de la fórmula de l'apartat c) amb 2 passos h diferents, i fent després extrapolació.

46 Sigui $p_4(x)$ el polinomi d'interpolació de la funció $f(x)$ en els punts $a-2h$, $a-h$, a, $a+h$ i $a+2h$.

a) Volem calcular una aproximació del valor de $f'(a)$ a partir de $p_4'(a)$. Es pot demostrar que la fórmula que surt és:

$$f'(a) \simeq F(h) = \frac{1}{12h}\ (f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h))$$

b) Trobeu una fórmula de l'error, $f'(a) - p_4'(a)$, si $f \in \mathcal{C}^6$.

c) Demostreu que, si f és prou derivable, es té el desenvolupament asimptòtic (b_i independent d'h)

$$F(h) = f'(a) + b_1 h^4 + b_2 h^6 + b_3 h^8 + \dots$$

Especifiqueu els valors de b_1 i b_2.

d) Tenim tabulada la funció f i volem aproximar $f'(2.5)$ mitjançant la fórmula $F(h)$.

Escriviu la fórmula que surt d'aplicar a $F(h)$ un pas de l'extrapolació de Richardson. Apliqueu-la a calcular $f'(2.5)$, començant amb $h = 1/2$.

x	1.2500	1.5000	1.7500	2.0000	2.2500	2.5000	2.7500	3.0000
$f(x)$	–0.070168	0.14139	0.42092	0.74159	1.0665	1.3513	1.5485	1.6111

x	3.2500	3.5000	3.7500
$f(x)$	1.4977	1.1768	0.63054

e) Deduïu la fórmula del primer apartat.

47 Es vol trobar una fórmula aproximada per al càlcul de derivades segones de la forma

$$\frac{Af(a) + Bf(a+h)}{h^2} + \frac{Cf'(a) + Df'(a+h)}{h} = f''(a) + Kh^p + O(h^{p+1}) \; .$$

a) Calculeu els coeficients A, B, C i D per tal que l'exponent $p > 0$ sigui el més gran possible, i doneu el valor de K en funció d'una derivada adequada de f en el punt a.

Nota. Feu algun cas particular per a comprovar els resultats. Per exemple, quan $f(x) = x^2$, $a = 1$ i $h = 1$, la fórmula ha de ser exacta.

b) Per a calcular $f''(0)$ apliqueu la fórmula que heu trobat, amb 2 passos h diferents, a les dades

x	0	0.1	0.2
$f(x)$	1.234	1.596	2.081
$f'(x)$	3.123	4.173	5.589

i feu després un pas d'extrapolació (en total, tindreu 3 aproximacions de $f''(0)$).

48 a) D'una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ coneixem tres condicions:

$$f(x_0) = f_0 \; , \;\; f'(x_1) = f'_1 \; , \;\; f(x_2) = f_2 \; ,$$

on $x_0 < x_1 < x_2$. Trobeu quina relació hi ha d'haver entre les abscisses x_0, x_1 i x_2 per tal que existeixi un únic polinomi de $P_2(x)$ que interpoli la funció f segons les tres condicions anteriors.

b) Sigui ara $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificant

$$f(0) = 3 \; , \;\; f(1) = 3 \; , \;\; f'(1) = 0 \; , \;\; f(2) = 9 \; .$$

Calculeu una aproximació de $\int_0^2 f(x)dx$ mitjançant $\int_0^2 p(x)dx$, on $p \in P_3(x)$ és el polinomi interpolador d'Hermite de f segons les condicions donades.

c) Si la funció de l'apartat b) també verifica

$$f \in C^4([0,2])\ ,\ \ \text{i}\ \ |f^{(4)}(z)| \leq 24\ \ \forall z \in [0,2]\ ,$$

trobeu una fita de l'error absolut comès a l'apartat anterior.

49 D'una funció $f(x)$ infinitament diferenciable es coneixen les dades

x_i	-1	0	$+1$
$f(x_i)$	1	3	2
$f'(x_i)$	4		1

i també se sap que $|f^{(k)}(x)| \leq M_k\ \ \forall x \in [-1,+1]\ \ \forall k > 0$.

a) Sigui $p \in P_4[x]$ el polinomi interpolador de la taula anterior. S'aproxima $f'(0)$ per $p'(0)$. Què dóna?

b) Doneu una fita de $|f'(0) - p'(0)|$ en funció d'alguna M_k.

c) Doneu una fita de $\int_{-1}^{+1} f(x)dx - \int_{-1}^{+1} p(x)dx$ en funció d'alguna M_k.

50 Sigui $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funció derivable amb continuïtat tantes vegades com calgui, i sigui $M_k = \max_{x\in[0,1]} |f^{(k)}(x)|$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

a) Calculeu $p \in P_2$ tal que $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ i $p(1) = f(1)$.

b) Doneu una fita numèrica de $|f(x) - p(x)|$, en funció d'alguna M_k, que valgui per a qualsevol $x \in [0,1]$.

c) Calculeu els coeficients c_0, c_0' i c_1 per tal que la fórmula d'integració numèrica

$$\int_0^1 f(x)dx \approx c_0 f(0) + c_0' f'(0) + c_1 f(1)$$

sigui exacta quan f sigui un polinomi de grau 2 qualsevol.

d) Trobeu una fita numèrica de l'error en la fórmula anterior en funció d'alguna M_k.

51 (Fórmula dels trapezis corregida) Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció derivable amb continuïtat tantes vegades com calgui. Volem una fórmula d'integració numèrica de la forma

$$\int_0^h f(x)dx \approx h(af(0) + bf(h)) + h^2(cf'(0) + df'(h))\ ,$$

on $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ són constants independents de la funció $f(x)$.

a) Deduïu els coeficients a, b, c i d que s'obtenen si l'aproximació consisteix a canviar l'integrand $f(x)$ pel polinomi $p(x) \in P_3[x]$ que interpola $f(x)$ i $f'(x)$ en els punts 0 i h. **Nota:** Us han de donar constants tals que $a = b$ i $d = -c$.

b) Per a la fórmula d'integració numèrica trobada, deduïu una fita de l'error que depengui d'una derivada de la funció f en un punt $\xi \in [0,h]$ i d'una potència de h.

c) Escriviu la fórmula composta que s'obté per a calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$, si dividim $[0,1]$ en n subintervals iguals de longitud $h = 1/n$ i, en cadascun, apliquem la fórmula anterior. Determineu també una expressió de l'error.

52 Siguin $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in Z$, $n > 1$, $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n$. Per a cada interval $[x_i, x_{i+1}]$, es defineixen els punts mitjos $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$.

a) (*Regla del punt mig*) Calculeu els coeficients de la fórmula d'integració numèrica

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx h(Af(x_{i+1/2}) + Bf'(x_{i+1/2}))$$

que s'obté quan se substitueix la funció integrand $f(x)$ pel polinomi interpolador d'Hermite, $p \in P_1$, en el punt $x_{i+1/2}$ (o sigui, p interpola la funció f i la derivada f' en el punt $x_{i+1/2}$).

b) Demostreu que, si la funció $f(x)$ és de classe C^2, llavors l'error en l'aproximació anterior és

$$\frac{f''(\zeta_i)}{24}h^3\ ,\ \zeta_i \in [x_i, x_{i+1}]\ .$$

c) Troba la fórmula d'integració composta corresponent al mètode anterior, així com una expressió de l'error que depengui directament de h^2. Quin desavantatge té aquest mètode respecte al de trapezis, quan l'apliquem recurrentment, anant doblant el valor de n cada vegada.

53 Sigui $f \in C^8([a,b])$ una funció tal que $|f^{(k)}(z)| \leq M_k\ , \forall z \in [a,b]$, per a $1 \leq k \leq 8$. Sigui $n = 4$, i considerem les abscisses equiespaiades a l'interval $[a,b]$, $x_k = a + kh,\ k = 0, \ldots, n$.

a) Calculeu el polinomi interpolador de f en les abscisses x_0, x_2 i x_4. Avalueu-lo en el punt x_1 i doneu una fita de l'error en x_1. Doneu els resultats en funció de h.

b) Volem calcular una aproximació de la integral $\int_a^b f(x)\ dx$. Per això calculem $p(x)$, el polinomi interpolador de f en les abscisses x_1, x_2 i x_3 usant el mètode de Lagrange, i aproximem el valor de la integral de f pel de la integral del polinomi. Obtenim la fórmula (on $f_i = f(x_i)$):

$$\int_a^b f(x)\ dx \simeq h\,[Af_1 + Bf_2 + Cf_3]$$

Calculeu els pesos A, B i C.

De la funció f coneixem la següent taula de valors:

x	0	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625
$f(x)$	1.00000	0.984496	0.939413	0.868815	0.778801	0.676634
x	0.750	0.875	1.00			
$f(x)$	0.569783	0.465043	0.367879			

Calculeu una aproximació de la integral $\int_0^1 f(x)\ dx$

c) usant el mètode de l'apartat anterior,

d) usant la fórmula de Simpson simple i la composta amb dos intervals.

Doneu els resultats amb 6 dígits significatius.