MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2015/16, primer semestre.

Examen final del 19 de gener de 2016.

PRIMERA PART (Temes de l'examen parcial)

1.- [6 punts] Es defineix $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{2x+7} dx$, $\forall n \geq 0$.

(a) Demostra que els elements de $(I_n)_{n\geq 0}$ verifiquen la recurrència $I_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - 7I_{n-1}\right)$, $\forall n \geq 1$, i també les desigualtats $\frac{1}{9n+9} \leq I_n \leq \frac{1}{7n+7}$, $\forall n \geq 0$ (per tant, $I_n \geq 0$, $\forall n \geq 0$, i $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$).

(b) Calcula directament la integral en el cas $n = 0$ i arrodoneix el resultat final a 6 decimals. Què dóna? (ho anomenem $\overline{I}_0$). Siguin $\overline{I}_n (n \geq 1)$ els valors que s'obtindrien si s'uses la recurrència amb l'aproximació inicial $\overline{I}_0$. Per a qualsevol $n > 0$, expressa l'error $e_n \equiv \overline{I}_n - I_n$ en funció de l'error inicial e_0 i de n. La recurrència, és numèricament estable o inestable? Quin és el mínim valor de n per al qual $\overline{I}_n$ seria negatiu? (NO heu de calcular explícitament els $\overline{I}_n$, sinó deduïr-ho de l'expressió de l'error e_n)

2.- [4 punts] Sigui $|x| << 1$. Es vol calcular el valor $y = \frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x}$ amb poc error relatiu.

(a) Per què el càlcul de y usant l'expressió donada és numèricament desaconsellable? Troba una expressió matemàticament equivalent que sigui numèricament millor.

(b) Suposant que es treballa en base 10, en punt flotant i arrodonint a 6 dígits significatius el resultat de cada operació, calcula què donaria y de les dues maneres, en el cas $x = 1.23456 \cdot 10^{-4}$.

3.- [10 punts] Es considera un sistema $Ax = b$, $n \times n$, tal que la matriu $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ verifica:

- és no singular (per tant, el sistema té solució única),
- és de tipus Hessenberg superior ($a_{i,j} = 0$ quan $i > j + 1$),
- $a_{i+1,i} \neq 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Es transformarà el problema de resoldre el sistema lineal en un problema de resoldre una equació en la variable x_n.

(a) Fes el següent: $\forall i = n, n - 1, \ldots, 2$, de l'equació i del sistema, aïlla la variable x_{i-1} en funció de $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Compta quantes divisions, quants productes i quantes sumes/restes cal fer, en funció de n.

(b) L'apartat anterior permet obtenir els valors de totes incognites $x_i (i < n)$ en funció de x_n, i encara no s'ha usat la primera equació. Sigui $f(x_n) \equiv b_1 - (Ax)_1$ el residu de la primera equació en funció de x_n. Demostra que $f(x_n)$ és una funció afí de x_n (o sigui, de la forma $f(x_n) = \alpha + \beta x_n$).

(c) S'usen els apartats anteriors per a obtenir dues avaluacions de $f(x_n)$, per exemple, quan $x_n = 1$ i quan $x_n = 2$. Com es pot obtenir la component x_n de la solució de $Ax = b$ en funció de $f(1)$ i $f(2)$?

(d) Compteu el nombre total d'operacions (divisions, productes i sumes/restes) que cal fer per a resoldre un sistema de tipus Hesenberg d'aquesta manera. És més barat usar aquest mètode que l'eliminació gaussiana?

Entregueu problemes diferents en fulls diferents

MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2015/16, primer semestre.

Examen final del 19 de gener de 2016.

SEGONA PART (Temes de després de l'examen parcial)

4.- [6 punts] S'avalua un polinomi $p \in P_2[x]$ en 5 punts equidistants: $x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4 \ (h \neq 0)$. Els resultats obtinguts són:

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
$p(x)$	12	3	2	8	24

Però se sap que s'ha comès un error d'escriptura: una (i només una) de les dades $p(x)$ és incorrecta.

(a) Detecta la dada incorrecta i corregeix-la.

(b) Si $p(x)$ és el polinomi interpolador en x_0, x_2 i x_4 d'una funció $f : R \to R$ infinitament diferenciable tal que $|f^{(k)}(z)| \leq M_k \ , \forall z \in [x_0, x_4] \ , \forall k \geq 0$, troba una fita de $|f(\overline{x}) - p(\overline{x})|$ en funció de h i d'alguna M_k, on $\overline{x}$ és l'abscissa del mínim de $p(x)$ en $[x_0, x_4]$.

NOTA. Si, per a facilitar els càlculs, decidiu fer-ho per a uns valors determinats de x_0 i h, després heu de raonar el cas general (x_0 i $h \neq 0$ qualssevol).

5.- [6 punts] (Fórmula de Simpson amb correcció final)

(a) Es busca una fórmula d'integració de la forma

$$\int_{-h}^{+h} f(x)dx \approx h\left[af(-h) + bf(0) + af(+h)\right] + h^2\left[cf'(-h) - cf'(+h)\right] \ .$$

Troba les constants a, b, c per tal que el grau de precisió sigui el màxim possible. Quin és aquest grau?

(b) Escriu la fórmula d'integració composta per a calcular $\int_a^b f(x)dx$. O sigui, fixat $n > 1$, es defineixen $h = (b-a)/2n$ i $x_i = a + ih$, $\forall i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$; llavors s'aplica la fórmula de l'apartat (a) a cada interval $[x_{2j}, x_{2j+2}]$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, i cal trobar explícitament els coeficients dels $f(x_i)$ i dels $f'(x_i)$.

6.-[8 punts] A la primera meitat del segle XIII, Fibonacci va resoldre l'equació $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

(a) Demostra que l'equació anterior només té una arrel real (sigui α), i troba l'interval I de longitud 1 i d'extrems enters que conté α.

(b) Es consideren els dos mètodes iteratius

$$x_{k+1} = \frac{20 - 2x_k^2 - x_k^3}{10} \equiv g(x_k) \ , \qquad x_{k+1} = \frac{20}{10 + 2x_k + x_k^2} \equiv h(x_k) \ .$$

Quin dels dos és millor per a trobar α? Per què?

(c) Se suposa que x_0 és el punt mig de I i que es poden fer els càlculs amb precisió il·limitada. Per al mètode definit per la iteració $h(x)$, quants iterats són necessaris per a obtenir α amb 20 decimals correctes?

Entregueu problemes diferents en fulls diferents

Qualificacions: A partir del divendres, 22 de gener, al Campus Virtual.

Revisió: Dimarts 2 de febrer, de 12h a 13h al xalet.