Solució al problema 40

1. Calculem el polinomi interpolador usant diferències dividides:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	1			
		2		
1	3		-1	
		1		$-\frac{1}{2}$
1	3		-2	
		-1		
2	2			

Així tenim que el polinomi interpolador és

$$p(x) = 1 + 2x - x(x-1) - \frac{1}{2}x(x-1)^2 = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x + 1$$

2. Per calcular el màxim relatiu, calculem $p'(x)$

$$p'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$$

Tenim un punt crític a l'interval $(0, 2)$, que és

$$z = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

A més, $p''(x) = -3x$, pel que

$$p''(z) = -3\sqrt{\frac{5}{3}} < 0$$

Això vol dir que z és un màxim local.

3. Sabem que l'error en z ve donat per:

$$f(z) - p(z) = \frac{f^{(4)}(\xi(z))}{4!}\, z(z-1)^2(z-2)$$

i que

$$|f^{(4)}(x)| \leq 3(4+4) = 24 \quad \forall x \in (0,2)$$

Per tant,

$$\begin{aligned} |f(z) - p(z)| &= \left| \frac{f^{(4)}(\xi(z))}{4!}\, z(z-1)^2(z-2) \right| \\ &\leq \frac{24}{4!} \sqrt{\frac{5}{3}} \left(\sqrt{\frac{5}{3}} - 1 \right)^2 \left(2 - \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \approx 7.75 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$