MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2013-14, primer semestre.

Examen de reavaluació: 30 de gener de 2014.

1.- [10 punts]

Sigui $A = \begin{pmatrix} a & e \\ e & d \end{pmatrix}$ una matriu 2×2, real i simètrica. Per a trobar els seus valors propis (reals) s'usa l'algorisme:

(1) Es calculen els coeficients b i c del polinomi característic $p(x) = x^2 + bx + c$.

(2) Es resol $p(x) = 0$ usant la fórmula habitual.

Contesteu les dues preguntes següents:

(a) Se suposa que les dades a, d i e es coneixen només aproximadament, amb **errors absoluts** fitats per ϵ. Treballant a primer ordre en ϵ, trobeu una fita de l'error absolut en els valors propis, que sigui de la forma $K\epsilon$, amb K independent dels elements de A.

(b) Se suposa ara que els elements de A no tenen error i que $ad < 0$. Però se suposa també que cada operació elemental es fa amb un **error relatiu** fitat per $u << 1$. Treballant a primer ordre en u, trobeu fites dels errors relatius en b i en c de la forma Lu, amb L independent dels elements de A.

Notes: Canviar el signe d'un valor no introdueix cap error nou. Elevar un valor al quadrat sí que introdueix error.

2.- [10 punts]

(a) (Teoria) Sigui A una matriu regular $n \times n$, i siguin x, δx, $b \neq 0$, δb vectors de $\mathbb{R}^n$ tals que $Ax = b$ i $A(x + \delta x) = b + \delta b$. Sigui $\| \ \|$ una norma vectorial i també la corresponent norma matricial. Definiu el nombre de condició $\kappa(A)$ en aquesta norma, i demostreu que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

(b) Demostreu que, per a qualsevol matriu A regular, existeixen vectors no nuls x, δx, b i δb tals que $Ax = b$, $A(x + \delta x) = b + \delta b$, i es verifica

$$\|A\|_\infty \|x\|_\infty = \|b\|_\infty, \qquad \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \kappa_\infty(A) \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

Indicació: Busqueu vectors adequats x i δb tals que $\|x\|_\infty = 1$ i $\|\delta b\|_\infty = 1$.

(c) Sigui ara $n = 3$ i

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a+1 & a \\ a+1 & a & a \\ a & a & a-1 \end{pmatrix},$$

on $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$. Trobeu la descomposició LU de A i useu-la per a trobar la inversa de A.

3.- [10 punts]

D'una funció $f : R \to R$, es coneixen els valors $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ i $f'(1) = 1$. Sembla que f té un màxim relatiu a prop de $x = 1$, $y = 3$. L'objectiu d'aquest problema és calcular-lo aproximadament.

(a) Calculeu (en la base natural dels polinomis) els coeficients del polinomi $p(x)$ de grau mínim que interpola els quatre valors anteriors.

(b) Calcula el màxim relatiu (abscissa i ordenada) del polinomi $p(x)$ que hi ha a l'interval d'abscisses $(0, 2)$.

(c) Sigui $x = z$ l'abscissa del màxim anterior. Suposant que f és infinitament derivable i que

$$|f^{(k)}(x)| \leq 3(k+4) \quad \forall x \in (0,2) \quad \forall k > 0 \ ,$$

trobeu una fita numèrica de $|f(z) - p(z)|$.

4.- [10 punts]

Es considera l'equació

$$e^{4x+1} = \frac{1}{x+3} \ \ , \ x > -3 \ .$$

(a) Demostreu que té una única solució real i que aquesta pertany a l'interval $I = (-1, 0)$.

(b) Es consideren els dos mètodes iteratius

$$\exp(4x_k + 1) = \frac{1}{x_{k+1} + 3} \quad \text{i} \quad \exp(4x_{k+1} + 1) = \frac{1}{x_k + 3} \ \ , \ \forall k \geq 0 \ .$$

Només un d'ells és localment convergent a la solució de l'apartat (a). Quin?

(c) Pel mètode localment convergent anterior (el notem $x_{k+1} = g(x_k)$), demostreu que $g(I) \subset I$. Si es comença amb $x_0 \in I$, feu una estimació a priori de quants iterats són necessaris per a aconseguir una precisió de $\frac{1}{2}10^{-10}$.

Feu cada exercici en fulls diferents
Qualificacions: Dimarts 11 de febrer, al Campus Virtual.
Revisió: Dimecres 12 de febrer, de 12h a 13h al xalet.