Solució al problema 23

a) Imposem que $UX = I$, és a dir, $UX_j = e_j$, per $j = 1, 2, \ldots, n$,
on X_j és la columna j de X: $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ i
e_j el vector amb totes les components zero excepte la j, que val 1.

Per a $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenim

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1j} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2j} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & 0 & & u_{jj} & \cdots & u_{jn} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{jj} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

- Com que U és regular tenim que $u_{kk} \neq 0$, per a $k = 1, \ldots, n$.
- Multipliquem l'última fila de U per X_j, $j = 1, \ldots, n$ i igualem:

$$u_{nn}x_{nj} = 0 \quad j = 1, \ldots, n-1, \qquad u_{nn}x_{nn} = 1$$

Com que $u_{nn} \neq 0$, deduïm que

$$\begin{aligned} x_{nj} &= 0 \qquad j = 1, \ldots, n-1 \\ x_{nn} &= \frac{1}{u_{nn}} \end{aligned}$$

- Multipliquem la fila $n-1$ de U per X_j, per a $j < n-1$, i igualem:

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1,j} + u_{n-1,n}x_{nj} = 0$$

Sabem que $x_{nj} = 0$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, per tant,

$$x_{n-1,j} = 0,\ j = 1, \ldots, n-2$$

- Suposem que ho hem vist per a les files $n, n-1, \ldots, j+2$. Ho fem per a la fila $j+1$.
  Multipliquem la fila $j+1$ de U per X_i, $i = 1, \ldots, j$:

$$u_{j+1,j+1}x_{j+1,i} + \sum_{k=j+2}^{n} u_{j+1,k}x_{ki} = 0$$

  Aplicant inducció ($x_{ki} = 0, k = j+2, \ldots, n, i = 1, \ldots, k-1$), l'expressió anterior queda

$$u_{j+1,j+1}x_{j+1,i} = 0,$$

  amb el que $x_{j+1,i} = 0$, $i = 1, \ldots, j$.

- Per tant, la columna j de X és el vector

$$X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{jj}, 0, \ldots, 0)^T,$$

  i això vol dir que la matriu X és triangular superior.

b) Busquem fórmules recurrents per calcular les columnes de X.

Suposem que volem calcular la columna j de X, per $j = 1, 2, \ldots, n$.
$UX_j = e_j$, per $j = 1, 2, \ldots, n$.
Només cal considerar les files de U amb $i \leq j$, ja que sinó sabem que dona 0.

- Multipliquem la fila i de U per X_j, amb $1 \leq i \leq j$:

$$\sum_{k=i}^{j} u_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}$$

- Per a $i = j$ ens queda: $u_{jj} x_{jj} = 1$. Per tant,

$$x_{jj} = \frac{1}{u_{jj}}$$

- Per a $i = j - 1$: $u_{j-1,j-1} x_{j-1,j} + u_{j-1,j} x_{jj} = 0$. Per tant,

$$x_{j-1,j} = -\frac{u_{j-1,j} x_{jj}}{u_{j-1,j-1},}.$$

- En general per a la fila i ($1 \le i < j$), tenim

$$x_{ij} = -\frac{\sum_{k=i+1}^{j} u_{ik} x_{kj}}{u_{ii}}.$$

- En resum: per a $j = 1, \dots, n$, hem de calcular

$$\begin{aligned} x_{jj} &= \frac{1}{u_{jj}} \\ x_{ij} &= -\frac{\sum_{k=i+1}^{j} u_{ik} x_{kj}}{u_{ii}} \qquad i = j-1, j-2, \dots, 1 \end{aligned}$$

- Nombre d'operacions fixada j ($j = 1, \dots, n$)

divisions: 1 per cada element; en total j
productes: fixada i, 1 per a cada element del sumatori indicat, és a dir, $j - i$; en total:

$$\sum_{i=1}^{j-1} (j - i) = \frac{j(j-1)}{2}$$

Nombre d'operacions

Operació	columna j	Total
$*$	$\frac{j(j-1)}{2}$	$\sum_{j=1}^{n} \frac{j(j-1)}{2} = \frac{n^3-n}{6}$
$/$	j	$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

Per calcular el nombre total d'operacions, usem el lema 8.3.1 del llibre (pàg.195):

$$\sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

En el nostre cas,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}(j^2-j) = \frac{1}{12}(n+1)n(2n+1) - \frac{1}{4}n(n+1) = \frac{n^3-n}{6}$$