Solució al problema 56

Tenim

$$f(x) = x - e\sin x - M, \qquad e \in (0,1), \qquad M \in \mathbb{R},$$

$$f'(x) = 1 - e\cos x,$$

$$f''(x) = -e\sin x.$$

(a) Com que $f'(x) \geq 1 - e > 0$, i $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$,

$f(x)$ té una única solució real α.

$$f(M-e) = -e - e\sin(M-e) = -e(1+\sin(M-e)) \leq 0,$$

$$f(M+e) = e(1-\sin(M+e)) \geq 0.$$

implica que $\alpha \in [M-e, M+e]$.

Solució II

(b) $x_{k+1} = g(x_k)$, on $g(x) = e \sin x + M$. Com que $g'(x) = e \cos x$:

$$|g'(x)| \le e < 1, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Aplicant el teorema del valor mitjà obtenim

$$|g(x) - g(y)| \le e|x - y|.$$

Per tant si $\epsilon_i = x_i - \alpha$ llavors $\epsilon_n \le e^n \epsilon_0 \to 0$ quan $n \to \infty$.

(c) Si $x_0 = M$ llavors $\epsilon_0 \le e$ i per tant $\epsilon_n \le e^{n+1}$. Per a tenir $\epsilon_n \le 10^{-20}$, imposem

$$e^{n+1} \le 10^{-20}$$

. Per tant,

$$n \ge 20 \log 10/(-\log e) - 1.$$

Si $e = 0.1$ cal que $n \ge 19$ i si $e = 0.9$ cal que $n \ge 438$.

(d) Sabem que pel mètode de Newton-Raphson

$$\epsilon_{k+1} \approx \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right|\epsilon_k^2.$$

Com que

$$\left|\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right| = \left|\frac{e\sin\alpha}{1-e\cos\alpha}\right| \leq \frac{e}{1-e},$$

podem fer l'estimació:

$$\epsilon_{k+1} \approx \frac{1}{2}\frac{e}{1-e}\epsilon_k^2$$

i $\epsilon_0 \leq e$.
Per $e = 0.1$ obtenim que $n \geq 4$ i per $e = 0.9$ no podem determinar el nombre d'iterats, ja que $\epsilon_1 > 1$ i l'estimació no és bona.

Nota

Podem fer una estimació rigorosa si tenim en compte que

$$0 = f(x_n)+f'(x_n)(x_{n+1}-x_n), \quad 0 = f(x_n)+f'(x_n)(\alpha-x_n)+\frac{1}{2}f''(\xi)(\alpha-x_n)^2.$$

on $\xi \in \langle x_n, \alpha \rangle$. Aleshores

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2,$$

amb el que obtenim que

$$\epsilon_{k+1} \leq \frac{1}{2}\frac{e}{1-e}\epsilon_k^2,$$

i podem procedir com abans.