MÈTODES NUMÈRICS I. Grau de Matemàtiques. Curs 2019-20. Tardor

EXAMEN FINAL. 10 de gener de 2020

TEMES 3 I 4 : Interpolació polinomial i Zeros de funcions

Poseu el NOM i els COGNOMS amb lletra ben clara en cadascun dels fulls. Entregueu problemes diferents en fulls diferents.

Problema 1 (10 punts) Sigui $f \in C^8([a,b])$ una funció tal que $|f^{(k)}(z)| \leq M_k$, $\forall z \in [a,b]$, per a $1 \leq k \leq 8$. Sigui $n = 4$, i considerem les abscisses equiespaiades a l'interval $[a,b]$, $x_k = a + kh,\ k = 0,\dots,n$.

a) Calculeu el polinomi interpolador de f en les abscisses x_0, x_2 i x_4. Avalueu-lo en el punt x_1 i doneu una fita de l'error en x_1. Doneu els resultats en funció de h.

b) Volem calcular una aproximació de la integral $\int_a^b f(x)\ dx$. Per això calculem $p(x)$, el polinomi interpolador de f en les abscisses x_1, x_2 i x_3 usant el mètode de Lagrange, i aproximem el valor de la integral de f pel de la integral del polinomi. Obtenim la fórmula (on $f_i = f(x_i)$):

$$\int_a^b f(x)\ dx \simeq h\,[A f_1 + B f_2 + C f_3]$$

Calculeu els pesos A, B i C.

De la funció f coneixem la següent taula de valors:

x	0	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625
$f(x)$	1.00000	0.984496	0.939413	0.868815	0.778801	0.676634
x	0.750	0.875	1.00			
$f(x)$	0.569783	0.465043	0.367879			

Calculeu una aproximació de la integral $\int_0^1 f(x)\ dx$

c) usant el mètode de l'apartat anterior,

d) usant la fórmula de Simpson simple i la composta amb dos intervals.

Doneu els resultats amb 6 dígits significatius.

Problema 2 (10 punts) Volem trobar els zeros positius de la funció $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \cos(x)$.

a) Demostreu que f té un únic zero positiu, α. Trobeu un interval I de longitud 1 i extrems enters tal que $\alpha \in I$.

b) Considerem la funció $g(x) = -1 + \sqrt{1 + 2\cos x}$. Demostreu que $g(x)$ està ben definida si $x \in I$ i que α és l'únic punt fix de g en I.

c) Trobeu una constant L tal que $0 < L < 1$ i $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$, per a tot $x, y \in I$.

d) Considerem el procés iteratiu $x_{k+1} = g(x_k)$, amb x_0 el punt mig de I. Trobeu $k_0 \geq 0$ tal que si $k \geq k_0$ llavors $|x_k - \alpha| \leq 10^{-30}$.

e) Considerem ara el procés iteratiu $x_{k+1} = h(x_k)$, on $h(x) = \cos x - \frac{1}{2}x^2$. És localment convergent? En tal cas, és millor o pitjor que l'anterior?

MÈTODES NUMÈRICS I. Grau de Matemàtiques. Curs 2019-20. Tardor

EXAMEN FINAL. 10 de gener de 2020

TEMES 1 I 2 : Problemes numèrics i errors i Algebra lineal numèrica

Poseu el NOM i els COGNOMS amb lletra ben clara en cadascun dels fulls. Entregueu problemes diferents en fulls diferents.

Problema 3 (10 punts) Volem calcular $\det A$, on

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

amb $a \neq 0$ i $\det A \neq 0$. En aquest cas podem calcular el determinant almenys de dues maneres:

$$\det A = ad - cb \text{ (fórmula 1)}, \qquad \det A = a\left(d - \frac{c}{a}b\right) \text{ (fórmula 2)}$$

A més, suposem que les operacions aritmètiques tenen errors relatius fitats per u i que els valors de a, b, c i d són exactes.

a) Trobeu una fita a primer ordre en u de l'error relatiu de $\det A$, quan usem la fórmula 1.

b) Trobeu una fita a primer ordre en u de l'error relatiu de $\det A$, quan usem la fórmula 2.

c) Determineu en quins casos sembla que és millor usar la fórmula 1 i en quins sembla que és millor usar la fórmula 2.

d) Si sabem que $ad > 0$ i $cb < 0$, trobeu millors fites dels errors relatius en aquest cas. Què es pot dir sobre la conveniència d'usar una o l'altra fórmula?

e) Si a, b, c i d tenen un error relatiu fitat per u, però no hi ha error en les operacions, trobeu fites aproximades (a primer ordre) de l'error absolut de $\det A$ per a les dues fórmules proposades.

Problema 4 (10 punts) Volem resoldre el sistema $Mv = e_1$ amb $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$ on M és la matriu real $n \times n$, no singular amb $b_i \neq 0, \forall i$:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & -b_2 & & & & \\ -b_2 & a_2 & -b_3 & & & \\ & -b_3 & a_3 & -b_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -b_{n-1} & a_{n-1} & -b_n \\ & & & & -b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Donada l'estructura especial del terme independent, considerarem la descomposició $M = UD^{-1}U^T$ amb

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & -b_2 & & & \\ & d_2 & -b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{n-1} & -b_n \\ & & & & d_n \end{pmatrix} \text{ i } D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{n-1} & \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

a) Escriviu les fórmules per al càlcul de les d_i.

b) Demostreu que resoldre $Mv = e_1$ és equivalent a resoldre $D^{-1}U^T v = \dfrac{1}{d_1} e_1$

c) Resoleu el sistema anterior. Escriviu les fórmules per al càlcul de v en funció de les b_i i d_i.

d) Calculeu el determinant de M.

e) Si $n = 2k \geq 10$ i $b_k = 0$, compteu el nombre d'operacions necessàries per resoldre el sistema.