Solució al problema 9

a) En aquest cas, podem usar el desenvolupament de Taylor per evitar cancel·lacions per $x \approx 0$:

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots) - (1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots) \\ &= 2x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2}{5!}x^5 + \frac{2}{7!}x^7 + \cdots \end{aligned}$$

b) Per a evitar cancel·lacions per $x \approx \pi/4$ podem fer

$$\sin x - \cos x = (\sin x - \cos x)\, \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{-\cos(2x)}{\sin x + \cos x}.$$

c) En aquest cas, podem usar la fórmula de l'angle doble pel cosinus:
$1 - \cos x = 1 - \left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] = 1 - \left[1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$

d) Muliplicant i dividint per $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}$ evitem cancel·lacions per $x \approx 0$:

$$(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2})^{-1} = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{2x^2}.$$