# Solució al problema 63

1. Sigui $e_n = x_n - \alpha$, per a tot $n \geq 0$.
   Cal veure que
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = C \neq 0$$
   i trobar $C$.

   Sabem que $e_{n+1} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

   Fem el desenvolupament de Taylor:

   $$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p$$

   $$= \frac{f^{(p)}(\xi_n)}{p!} e_n^p$$

   amb $\xi_n \in < x_n, \alpha >$ .

Anàlogament

$$f'(x_n) = \frac{f^{(p)}(\beta_n)}{(p-1)!}(x_n - \alpha)^{p-1} = \frac{f^{(p)}(\beta_n)}{(p-1)!} e_n^{p-1},$$

amb $\beta_n \in < x_n, \alpha >$ .

Per tant,

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n \left( 1 - \frac{1}{p} \frac{f^{(p)}(\xi_n)}{f^{(p)}(\beta_n)} \right).$$

Quan $n \to \infty$, $\xi_n, \beta_n \to \alpha$, del que deduïm que

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = 1 - \frac{1}{p}.$$

2. Si afegim el factor $p$ al mètode de Newton-Raphson, observem que en l'apartat anterior, obtindríem $C = 0$. Això vol dir que l'ordre serà $> 1$.

   Per a trobar-lo, usem un terme més del desenvolupament de Taylor

$$f(x_n) = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} e_n^p + \frac{f^{(p+1)}(\delta_n)}{(p+1)!} e_n^{p+1}$$

   i

$$f'(x_n) = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{(p-1)!} e_n^{p-1} + \frac{f^{(p+1)}(\gamma_n)}{p!} e_n^p,$$

   amb $\gamma_n, \delta_n \in < x_n, \alpha >$ .

   Llavors, per al mètode modificat (dividint numerador i denominador per $e_n^{p-1}/(p-1)!$):

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= e_n - \frac{f^{(p)}(\alpha)e_n + \frac{1}{p+1}f^{(p+1)}(\delta_n)e_n^2}{f^{(p)}(\alpha) + \frac{1}{p}f^{(p+1)}(\gamma_n)e_n} \\
&= \frac{\left[\frac{1}{p}f^{(p+1)}(\gamma_n) - \frac{1}{p+1}f^{(p+1)}(\delta_n)\right]e_n^2}{f^{(p)}(\alpha) + \frac{1}{p}f^{(p+1)}(\gamma_n)e_n}.
\end{aligned}
$$

Per tant,

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)\frac{|f^{(p+1)}(\alpha)|}{|f^{(p)}(\alpha)|} \neq 0.
$$

Per tant, l'ordre és 2 i el coeficient asimptòtic de l'error és

$$
\frac{1}{p(p+1)}\frac{|f^{(p+1)}(\alpha)|}{|f^{(p)}(\alpha)|}.
$$

3. Estem en el cas del primer apartat amb $\alpha = 0$ i $x_n = e_n$.

Per tant,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \approx 1 - \frac{1}{p}$$

o

$$p \approx \frac{x_n}{x_n - x_{n+1}}.$$

Calculant aquesta darrera quantitat amb les dades donades, obtenim $p \approx 3$, amb el que deduim que $p = 3$.

| $i$ | $x_i$ | $\lvert\Delta x_i\rvert$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.5 | |
| 1 | 0.333505 | 0.1664950 |
| 2 | 0.221832 | 0.1111673 |
| 3 | 0.147464 | 0.074368 |
| 4 | 0.0980568 | 0.0494072 |
| 5 | 0.0652386 | 0.0328182 |
| 6 | 0.0434272 | 0.0218114 |