MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2018/19, primer semestre.

Examen final del 11 de gener de 2019.

PRIMERA PART (Temes I i II)

ATENCIÓ: De cada problema només es corregirà una cara d'un full. O sigui, no entreguen més d'una cara escrita de cap problema.

1.- Es considera la fórmula d'Heró per a calcular l'àrea A d'un triangle de costats a, b i c:

$$A = A(a,b,c) = (s(s-a)(s-b)(s-c))^{1/2} \quad \text{on} \quad s = (a+b+c)/2 \,.$$

Calculeu els factors de propagació de l'error absolut de les dades cap al resultat, a primer ordre (per simetria, és suficient fer-ho respecte una sola de les variables). Suposant que les longituds a, b i c dels costats no són pròximes a 0, pot ser mal condicionada la fórmula d'Heró?

2.- Siguin x i y dues quantitats molt semblants. Se suposa que cada operació elemental es fa en punt flotant i amb precisió finita (o sigui, amb un error relatiu fitat per la precisió del sistema). Quin dels dos càlculs següents (matemàticament equivalents) té menys error relatiu en el resultat: $1 - \frac{x}{y}$ o $\frac{y-x}{y}$? Justifiqueu-ho.

3.- S'aplica el mètode d'eliminació gaussiana amb pivotatge parcial a un sistema lineal $Ax = b$ de dimensió $n \times n$. Resulta que el procés es pot fer completament i que s'obté un sistema triangular equivalent $Ux = c$; però els elements u_{nn} i c_n són zero.
Per tant, el sistema inicial és compatible, però indeterminat: les solucions $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ depenen d'un paràmetre lliure, per exemple x_n.
Escriviu un tros de programa en C que faci el següent: es llegeix un valor arbitrari de x_n, es calculen recurrentment la resta de components (usant els elements de U i c), i es calcula la norma euclidiana del vector solució x. Podeu suposar que totes les variables han estat declarades adequadament.
Compteu el nombre total d'operacions aritmètiques $(+, -, *, /)$ que es fan al vostre tros de programa, en funció de n.

4.- Es considera la matriu 4×4, real, simètrica i tridiagonal, depenent d'un paràmetre c, següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 & 0 \\ c & 1 & c & 0 \\ 0 & c & 1 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix} .$$

Aquesta matriu és definida positiva només per a un interval de valors de c. Trobeu aquest interval.
Per a aquests valors de c, calculeu explícitament la factorització de Cholesky $A = L\,L^t$. Cal donar tots els elements de L en funció de c.

5.- Trobeu totes les matrius reals, 3×3, de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, amb $a \geq b \geq 0$, tals que verifiquin $det(M) = 1$ i $k_\infty(M) = 1$.
Indicació. Els càlculs són curts si factoritzeu (en productes) les expressions de $det(M)$ i $k_\infty(M)$.

Entregueu problemes diferents en fulls diferents

Qualificacions: Dijous, 17 de gener de 2019, al Campus Virtual.

Revisió: Divendres, 18 de gener, de 12h30m a 13h30m, al xalet.

MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2018/19, primer semestre.
Examen final del 11 de gener de 2019.
SEGONA PART (Temes III i IV)

ATENCIÓ: De cada problema només es corregirà una cara d'un full. O sigui, no entreguen més d'una cara de cap problema.

1.- Siguin $T > 0$ fixat, i $f : R \to R$ una funció tan diferenciable com calgui que, a més, és $T-$periòdica: $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in R$. Llavors només cal considerar-la a l'interval $[0, T]$, per exemple. Notem que $f(T) = f(0)$, i també $f'(T) = f'(0)$.
Calculeu el polinomi $p(x)$, de grau 3 com a màxim, que interpola f i f' en els punts 0 i T. Heu d'escriure'l en la base natural: $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, amb coeficients a, b, c i d en funció de $f(0)$, $f'(0)$ i T.
Fiteu l'error $f(x) - p(x)$, a tot l'interval $[0, T]$, tan bé com pugueu, per una constant que només depengui de T i d'una fita d'una derivada adequada de f.

2.- Sigui $h > 0$ petit. D'una funció $f(x)$ només es coneixen els valors $f(0) = f_0$, $f(h) = f_1$, $f(2h) = f_2$ i $f(4h) = f_4$. Es vol trobar una aproximació de $f'(0)$ Deduïu-ne una fórmula de la manera següent (se suposa que f és tan diferenciable com calgui):
1) Trobeu una fórmula de derivació de la forma $D(h) = \frac{Af(0)+Bf(h)+Cf(2h)}{h}$, d'ordre com més gran millor.
2) Apliqueu-la per a dos passos diferents i feu una etapa d'extrapolació.
Quina fórmula final obteniu, en funció de f_0, f_1, f_2, f_4 i h? L'heu d'escriure com $\frac{\alpha f_0+\beta f_1+\gamma f_2+\delta f_4}{h}$.

3.- Sigui $I = \int_a^b f(x)dx$, amb $a < b$ reals i f tan regular com calgui. Es fixa $n > 1$ un natural i es divideix $[a, b]$ en $2n$ subintervals iguals: $h = \frac{b-a}{2n}$, i $x_i = a + ih$, $\forall i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$. Escriu les següents fórmules en funció de h i dels $f(x_i)'s$:
1) $T(h)$: fórmula composta dels trapezis amb pas h.
2) $T(2h)$: fórmula composta dels trapezis amb pas $2h$.
3) S: fórmula que resulta de fer extrapolació entre les dos fórmules anteriors.
S'assembla S a alguna fórmula coneguda?

4.- Sigui $c > 2$ qualsevol, i considerem l'equació: $\exp(x)\ (c + \sin(x)) = 1$.
Demostreu que té una única arrel real.
Es considera el mètode iteratiu simple que s'obté aïllant la x de la funció exponencial. Demostreu que hi ha convergència global a l'arrel, o sigui, sigui quina sigui l'aproximació inicial x_0, la successió generada pel mètode convergeix a l'arrel,

5.- Sigui $I = [a, b]$ amb $b - a = 0.5$, i sigui $f : I \to R$ una funció de classe C^2 que verifica: té una única arrel α a I, $4.2 \le f'(x) \le 9.3$ $(\forall x \in I)$ i $7.1 \le f''(x) \le 10.5$ $(\forall x \in I)$. S'aplica el mètode de Newton-Raphson a partir de x_0, punt mig de l'interval I. Se suposa que tots els iterats x_k són a I. Siguin $e_k = |x_k - \alpha|$ els errors. Trobeu una fita rigorosa de e_{k+1} en funció de e_k. Apliqueu-la per a saber quants iterats k cal fer per a tenir $e_k \le 10^{-30}$.

Entregueu problemes diferents en fulls diferents
Qualificacions: Dijous, 17 de gener de 2019, al Campus Virtual.
Revisió: Divendres, 18 de gener, de 12h30m a 13h30m, al xalet.