Solució al problema 50

1. Fem diferències dividides generalitzades:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
0	f_0		
		f_0'	
0	f_0		$\frac{f_1-f_0-f_0'}{1-0}$
		$\frac{f_1-f_0}{1-0}$	
1	f_1		

Per tant,

$$p(x) = f_0 + f_0' x + (f_1 - f_0 - f_0')x^2.$$

2. Usem la fórmula de l'error en la interpolació polinomial:

$$|f(x)-p(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}x^2(x-1)\right| = \frac{|f^{(3)}(\xi(x))|}{6}|x^2(x-1)|.$$

Fitem $q(x) = x^2(x-1)$ a l'interval $[0,1]$:

$$q(0) = 0, \qquad q(1) = 0.$$

$$q'(x) = 3x^2 - 2x,$$

amb el que $q'(x) = 0$ sii $x = 0$ o $x = 2/3$. Com que $q(2/3) = -4/27$ tenim que

$$|q(x)| \leq \frac{4}{27}, \qquad \text{per a tot } x \in [0,1].$$

Per tant,

$$|f(x)-p(x)| \leq \frac{2}{81} M_3.$$

UNIVERSITAT DE BARCELONA

3. La fórmula serà exacta per a tot $p \in \mathcal{P}_2$ sii és exacte per a una base de $\mathcal{P}_2$.
Calcularem, doncs, els coeficients c_0, c_0', c_1 imposant exactitud per a la base $1, x, x^2$. Obtenim el sistema

$$
\begin{aligned}
1 &= c_0 + c_1 \\
\frac{1}{2} &= c_0' + c_1 \\
\frac{1}{3} &= c_1
\end{aligned}
$$

Resolent el sistema obtenim $c_1 = 1/3$, $c_0' = 1/6$, $c_0 = 2/3$.

UNIVERSITAT DE BARCELONA

4. Observem que si $p(x)$ interpola f com a l'apartat a) llavors

$$c_0 f(0) + c_0' f'(0) + c_1 f(1) = c_0 p(0) + c_0' p'(0) + c_1 p(1) = \int_0^1 p(x)\, dx,$$

on la darrera igualtat es dedueix de 3.
Per tant,

$$\int_0^1 f(x)\, dx - [c_0 f(0) + c_0' f'(0) + c_1 f(1)] = \int_0^1 f\, dx - \int_0^1 p(x)\, dx =$$

$$\int_0^1 (f(x) - p(x))\, dx = \int_0^1 \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!} x^2(x-1)\, dx.$$

Com que $x^2(x-1)$ no canvia de signe a $[0,1]$ i $f^{(3)}$ és contínua, podem usar el teorema del valor mitjà per a integrals:

$$|\text{Error}| = \left| \frac{f^{(3)}(\eta)}{6} \int_0^1 x^2(x-1)\, dx \right| \leq \frac{M_3}{6} \left| \int_0^1 x^2(x-1)\, dx \right| = \frac{M_3}{72}.$$