2 Àlgebra Lineal Numèrica

23 Sigui $U = (u_{i,j})$ una matriu real $n \times n$, regular i triangular superior.

a) Demostreu que $U^{-1} = X = (x_{i,j})$ és també triangular superior.

b) Doneu fórmules recurrents per a trobar els elements de X en forma d'algorisme i compteu quants productes i quantes divisions cal fer (en funció de n).

24 Es considera la matriu 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & c & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

on c és un paràmetre. Per quins valors de c no és possible trobar la descomposició $A = LU$ fent eliminació gaussiana? Trobeu la descomposició en el cas $c = 0$.

25 a) Sigui $n > 2$ fixat, i considerem la matriu $n \times n$ tridiagonal simètrica

$$A = \begin{pmatrix} c & -1 & 0 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

on $c \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

Demostreu que $\det A = 1 + (c-1)n$. Per quins valors de c és A definida positiva?

b) Per quins valors de c existeix la factorització $A = LU$?

c) Repetiu els apartats anteriors quan canviem tots els valors 2 per 5, i tots els valors -1 per 2.

Indicació: $\det A$ es pot calcular recurrentment així. Per a $k = 1, 2, \dots, n$, sigui $d_k = \det A_k$, on A_k és la submatriu de A formada per la intersecció de les primeres k files i les primeres k columnes. Llavors $\det A = d_n$, i els d_k verifiquen una equació en diferències, lineal i de segon ordre, amb $d_1 = c$ i $d_2 = 5c - 4$. Plantegeu aquesta equació i resoleu-la, per tal d'obtenir explícitament $\det A$ en funció de n i de c.

Nota: Els valors de c que es demanen depenen de n.

26 El mètode de Gauss-Jordan per a resoldre un sistema lineal és una variació de l'eliminació gaussiana: en cada etapa k s'elimina la variable k, no només de les files $k+1$, $k+2$, …, n, sinó també de les files $1, 2, \dots, k-1$. D'aquesta manera, el sistema transformat final és diagonal (en lloc de triangular superior).

a) Resoleu pel mètode de Gauss-Jordan el sistema 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 14 & 30 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 58 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

b) Escriviu explícitament les fórmules que s'han d'usar per a resoldre un sistema lineal $n \times n$ pel mètode de Gauss-Jordan i compteu les operacions en funció de n (separadament: divisions, productes i sumes/restes).

Notes:

1) No cal preocupar-se de si els pivots són 0 o no. Suposarem que sempre són no nuls.

2) No us deixeu cap etapa, i no us oblideu de resoldre el sistema transformat final.

27 Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -6 \\ -2 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 13 & -18 \\ -6 & 5 & -18 & 33 \end{pmatrix}$$

una matriu simètrica.

a) Calculeu la seva descomposició LU, mitjançant el mètode d'eliminació gaussiana (sense pivotatge). Especifiqueu tots els passos.

b) A partir d'aquesta descomposició, calculeu la descomposició $A = LDL^T$, i deduïu si la matriu A és definida positiva, o no.

28 Si una matriu A és simètrica i definida positiva llavors admet la factorització de Cholesky: $A = U^T U$, on U és triangular superior amb elements de la diagonal positius. Els elements de U es poden trobar a partir dels elements de A de manera recurrent, imposant la igualtat dels elements de A i de $U^T U$ per a $j \geq i$, i aïllant en cada cas un element u_{ij} adequat.

a) Demostreu que, en el cas de dimensió $n = 4$, les fórmules són

$$\begin{array}{lll}
u_{11} = +\left(a_{11}\right)^{1/2} & \forall j = 2,3,4 & u_{1j} = a_{1j}/u_{11} \\
u_{22} = +\left(a_{22} - u_{12}^2\right)^{1/2} & \forall j = 3,4 & u_{2j} = \left(a_{2j} - u_{12}u_{1j}\right)/u_{22} \\
u_{33} = +\left(a_{33} - u_{13}^2 - u_{23}^2\right)^{1/2} & \forall j = 4 & u_{3j} = \left(a_{3j} - u_{13}u_{1j} - u_{23}u_{2j}\right)/u_{33} \\
u_{44} = +\left(a_{44} - u_{14}^2 - u_{24}^2 - u_{34}^2\right)^{1/2} & &
\end{array}$$

b) Escriviu les fórmules generals equivalents per al cas de dimensió n qualsevol, i compteu el nombre d'arrels quadrades, divisions i productes, separadament, que cal fer.

c) Trobeu la factorització de Cholesky de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 11 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & 38 \end{pmatrix}$$

29 Sigui $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $n \geq 4$, una matriu banda amb $a_{ij} = 0$ quan $i > j+1$ o $j > i+2$.

a) Suposant que A_n admet la factorització LU, escriviu les fórmules recurrents que permeten trobar els elements essencials de L i de U (de manera similar al cas tridiagonal). Treballeu només amb 4 vectors i un sol subíndex. Compteu la quantitat de divisions i la quantitat de productes, en funció de n.

b) Notem $D_n = \det A_n$. En el cas $a_{ii} = 3$, $a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = a_{i,i+2} = -1$ (per als valors de i que tinguin sentit), trobeu una fórmula lineal de D_n en funció de D_{n-1}, D_{n-2} i D_{n-3}. Useu-la per a calcular D_8.

c) Se suposa ara que $n = 4$, que $a_{ii} = c$ (paràmetre) i $a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = a_{i,i+2} = -1$. Per quins valors del paràmetre c NO es pot aplicar l'eliminació gaussiana sense pivotatge a A_4?

30 Considerem el sistema quasi-tridiagonal

$$(T|z) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_1 & c_1 & & & & d & z_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & & z_2 \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & & z_3 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} & z_{n-1} \\ e & & & & b_n & a_n & z_n \end{array}\right)$$

a) Trobeu la descomposició LU de T, indicant només les operacions necessàries. Com queden les matrius L i U ? Resoleu el sistema. Compteu les operacions que cal fer.

b) Si la matriu fos a més simètrica, com s'hauria de variar el mètode a fi de minimitzar el nombre d'operacions.

c) Aplicació: Resoleu el sistema

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 4 \end{array}\right) .$$

31 Es considera una matriu regular, triangular per blocs, de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} ,$$

amb A_{ii} matriu $n_i \times n_i$ $(i = 1, 2)$, A_{12} matriu $n_1 \times n_2$, i 0 la matriu nul·la $n_2 \times n_1$.

Se suposen conegudes les descomposicions LU dels blocs de la diagonal:

$$\forall i = 1, 2 \;\; A_{ii} = L_i U_i \;\; ,$$

amb L_i triangulars inferiors amb 1's a la diagonal i U_i triangulars superiors.

Doneu una manera explícita de calcular la descomposició LU de la matriu A en funció dels blocs coneguts L_i, U_i $(i = 1, 2)$ i de A_{12}.

Aplicació: Useu aquest mètode per a calcular la descomposició LU de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} .$$

32 Sigui A una matriu regular i $\| \ \|$ una norma vectorial.

a) Demostreu que si $A+\delta A$ és una matriu singular llavors $\kappa(A) \geq \|A\|/\|\delta A\|$.

b) Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \epsilon & \epsilon \\ 1 & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}$, $0 < |\epsilon| < 1$. Doneu una fita inferior de $\kappa_\infty(A)$ d'acord amb (a) i compareu-la amb el valor exacte.

33 a) Sigui M una matriu $m \times m$ regular, i siguin b i $\bar{b}$ dos vectors de $\mathbb{R}^m$. Si $Mx = b$ i $M\bar{x} = \bar{b}$, doneu una fita inferior de $\kappa_\infty(M)$ en funció de x, $\bar{x}$, b, $\bar{b}$.

b) Sigui $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2n}$ la matriu quadrada $2n \times 2n$ definida per:

- $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{ii} = 5$ si $3 \leq i \leq 2n$,
- $a_{ij} = 2 \ \ \forall i,j \in \{1,2,\dots 2n\}$ tals que $i-j=2$ o $j-i=2$,
- la resta d'elements són 0.

Calculeu la seva descomposició LU.

Indicació: Podeu treballar amb les matrius partides en blocs de dimensió 2×2.

c) Demostreu que la matriu L de l'apartat anterior verifica $\kappa_\infty(L) \geq 2^{n-1}$.

Indicació: Useu a) amb $M = L$, $b = (0,\dots,0,1,1)^T \in R^{2n}$ i $\bar{b} = (\epsilon,\epsilon,0,\dots,0,1,1)^T \in R^{2n}$.

34 Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \text{per a} \quad 0 < \alpha < \frac{6}{7}\,.$$

a) Trobeu el nombre de condició $\kappa_\infty(A)$ com a un quocient de polinomis en α. Existeix quan $\alpha = 0$ o $\alpha = 6/7$?

b) Trobeu la descomposició LU de A, $A = LU$, per a $0 < \alpha < 6/7$ en els casos en que existeixi. Veieu que només hi ha un valor pel que no existeix, que anomenem $\alpha_0 \in (0, 6/7)$.

c) Demostreu que si $\alpha > \alpha_0$ i $|\alpha - \alpha_0|$ és prou petit, podem escriure

$$\kappa_\infty(L) = \frac{1}{(\alpha - \alpha_0)^2}\,(\mu + O(|\alpha - \alpha_0|))$$

on $\mu > 0$ és una constant que cal determinar.

d) Suposem que $\alpha > \alpha_0$ amb $|\alpha - \alpha_0|$ prou petit. Donat $b \in \mathbb{R}^3$ és ben condicionat el problema de resoldre el sistema $Ax = b$? I si el resolem usant la descomposició $A = LU$? Raoneu les respostes.

35 Volem resoldre el sistema $Mv = e_1$ amb $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ on M és la matriu real $n \times n$, no singular amb $b_i \neq 0, \forall i$:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & -b_2 & & & & \\ -b_2 & a_2 & -b_3 & & & \\ & -b_3 & a_3 & -b_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -b_{n-1} & a_{n-1} & -b_n \\ & & & & -b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Donada l'estructura especial del terme independent, considerarem la descomposició $M = UD^{-1}U^T$ amb

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & -b_2 & & & \\ & d_2 & -b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{n-1} & -b_n \\ & & & & d_n \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{n-1} & \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

a) Escriviu les fórmules per al càlcul de les d_i.

b) Demostreu que resoldre $Mv = e_1$ és equivalent a resoldre $D^{-1}U^T v = \dfrac{1}{d_1} e_1$

c) Resoleu el sistema anterior. Escriviu les fórmules per al càlcul de v en funció de les b_i i d_i.

d) Calculeu el determinant de M.

e) Si $n = 2k \geq 10$ i $b_k = 0$, compteu el nombre d'operacions necessàries per resoldre el sistema.

36 Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a \neq \pm b$ i considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

a) Apliqueu el mètode d'eliminació gaussiana amb pivotatge maximal per columnes, explicitant tots els passos (multiplicadors, si cal intercanvi, ...), per trobar la factorització $PA = LU$, amb P una matriu de permutació, L una matriu triangular inferior amb uns a la diagonal i U una matriu triangular superior.

Per a quins valors de a i b no es pot fer la factorització?

Escriviu les matrius L i U que s'obtenen, en els casos que existeix aquesta factorització.

b) Escriviu les matrius P, L i U en el cas $a = 1$ i $b = -2$. Especifiqueu clarament tots els passos que feu.