**MÈTODES NUMÈRICS I**

Grau de Matemàtiques. Curs 2014/15, primer semestre.

Examen final del 19 de gener de 2015.

**PRIMERA PART (Temes de l'examen parcial)**

**1.-** [5 punts] Es consideren les expressions $E_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ i $E_2 = \sqrt{3}+\sqrt{2}$. Evidentment, $E_1 = E_2 \equiv E$. Suposem que $\sqrt{3}$ i $\sqrt{2}$ no es coneixen exactament, sinó que només se sap que $\sqrt{3} \in [1.73, 1.74]$ i que $\sqrt{2} \in [1.41, 1.42]$.
Raoneu quina de les dues expressions és numèricament millor per a calcular $E$. A més, doneu el millor valor aproximat de $E$ que pugueu (usant només la informació coneguda), així com una fita de l'error que té aquesta aproximació.

**2.-** [5 punts] Es calcula el determinant d'una matriu $2\times 2$ usant la fórmula estàndard $d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Se sap que els coeficients són tals que es verifica $2 \le a_{11}a_{22} \le 3$ i $0 \le a_{12}a_{21} \le 1$. També se suposa que cada operació elemental es fa amb un error relatiu fitat per $u = 10^{-10}$.
Trobeu una fita de l'error relatiu en el resultat $d$ (a primer ordre en $u$), que sigui independent dels coeficients de la matriu.
Nota. Heu de trobar la millor fita que pugueu, tenint en compte les condicions que verifiquen els coeficients.

**3.-** [10 punts] Si una matriu $A$ és simètrica i definida positiva llavors admet la factorització de Choleski: $A = U^T U$, on $U$ és triangular superior amb elements de la diagonal positius. Els elements de $U$ es poden trobar a partir dels elements de $A$ de manera recurrent, imposant la igualtat dels elements de $A$ i de $U^T U$ per a $j \ge i$, i aïllant en cada cas un element $u_{ij}$ adequat.

(a) Demostreu que, en el cas de dimensió $n = 4$, les fórmules són

$$\begin{array}{lll}
u_{11} = +\left(a_{11}\right)^{1/2} & \forall j = 2,3,4 & u_{1j} = a_{1j}/u_{11} \\
u_{22} = +\left(a_{22} - u_{12}^2\right)^{1/2} & \forall j = 3,4 & u_{2j} = \left(a_{2j} - u_{12}u_{1j}\right)/u_{22} \\
u_{33} = +\left(a_{33} - u_{13}^2 - u_{23}^2\right)^{1/2} & \forall j = 4 & u_{3j} = \left(a_{3j} - u_{13}u_{1j} - u_{23}u_{2j}\right)/u_{33} \\
u_{44} = +\left(a_{44} - u_{14}^2 - u_{24}^2 - u_{34}^2\right)^{1/2} & &
\end{array}$$

(b) Escriviu les fórmules generals equivalents per al cas de dimensió $n$ qualsevol, i compteu el nombre d'arrels quadrades, divisions i productes, separadament, que cal fer.

(c) Trobeu la factorització de Choleski de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 11 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & 38 \end{pmatrix}$$

<u>Entregueu problemes diferents en fulls diferents</u>

**MÈTODES NUMÈRICS I**
Grau de Matemàtiques. Curs 2014/15, primer semestre.
Examen final del 19 de gener de 2015.
**SEGONA PART (Temes de després de l'examen parcial)**

**4.-** [6 punts] Es considera la funció $f(x) = 1/x$ a l'interval $x \in [1, 2]$. Sigui $p \in P_5$ el polinomi que interpola la funció $f(x)$, la primera derivada $f'(x)$ i la segona derivada $f''(x)$ en els punts $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$.

(a) Quan val $p(3/2)$? (doneu el resultat com el quocient entre dos enters)

(b) Doneu una fita numèrica de $|f(x) - p(x)|$ que valgui per a qualsevol $x \in [1, 2]$.

**5.-** [6 punts] Es vol trobar una fórmula aproximada per al càlcul de derivades segones de la forma

$$\frac{Af(a) + Bf(a+h)}{h^2} + \frac{Cf'(a) + Df'(a+h)}{h} = f''(a) + Kh^p + O(h^{p+1}) \ .$$

(a) Calculeu els coeficients $A$, $B$, $C$ i $D$ per tal que l'exponent $p > 0$ sigui el més gran possible, i doneu el valor de $K$ en funció d'una derivada adequada de $f$ en el punt $a$.

Nota. Feu algun cas particular per a comprovar els resultats. Per exemple, quan $f(x) = x^2$, $a = 1$ i $h = 1$, la fórmula ha de ser exacta.

(b) Per a calcular $f''(0)$ apliqueu la fórmula que heu trobat, amb 2 passos $h$ diferents, a les dades

| $x$ | 0 | 0.1 | 0.2 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.234 | 1.596 | 2.081 |
| $f'(x)$ | 3.123 | 4.173 | 5.589 |

i feu després un pas d'extrapolació (en total, tindreu 3 aproximacions de $f''(0)$).

**6.-**[8 punts] Sigui $f : R \to R$ una funció diferenciable amb continuïtat tantes vegades com calgui, estrictament monòtona creixent i amb un zero $\alpha$ (o sigui $f(\alpha) = 0$).
Sigui $x_0$ una aproximació inicial de $\alpha$, i sigui $p(x)$ el polinomi de Taylor de grau 2 de $f(x)$ en $x_0$. Si el discriminant de l'equació de segon grau $p(x) = 0$ no és negatiu, definim $x_1$ com l'arrel real de $p(x)$ que sigui més pròxima a $x_0$.
Repetint aquest procés (suposant que sempre s'obtenen discriminants no negatius), s'obté un mètode per a buscar arrels.

(a) Escriviu explícitament la fórmula de $x_1$ en funció de $x_0$, $f(x_0)$, $f'(x_0)$ i $f''(x_0)$.

(b) Cas particular. Siguin $f(x) = x^3 + x^2 + x$ i $x_0 = 0.1$. Calculeu $x_1$ per aquest mètode i també per Newton-Raphson. Quin des dos mètodes sembla més ràpid?

(c) Estudieu quin és l'ordre en el cas de convergència, suposant que $f'(\alpha) \neq 0$ i $f'''(\alpha) \neq 0$.

Entregueu problemes diferents en fulls diferents
Qualificacions: Dilluns 26 de gener, al Campus Virtual.
Revisió: Dimarts 27 de gener, de 12h a 13h al xalet.