Solució al problema 31

- Escrivim $A = LU$ amb

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}.$$

  on $L_{ii} = L_i, U_{ii} = U_i, \ i = 1, 2.$

- Imposem que $A = LU$:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L_{11} & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U_{11} & U_{12} \\ \hline 0 & U_{22} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} L_{11}U_{11} & L_{11}U_{12} \\ \hline L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \end{array}\right)$$

- Igualant tenim

$$\begin{aligned} A_{11} &= L_{11}U_{11} \\ 0 &= L_{21}U_{11} \\ A_{12} &= L_{11}U_{12} \\ A_{22} &= L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \end{aligned}$$

- La primera igualtat es verifica per hipòtesi.
- De la segona deduïm $L_{21} = 0$, ja que U_{11} és regular, per ser-ho A_{11}.
- Com que $L_{21} = 0$, l'última igualtat queda,

$$A_{22} = L_{22}U_{22}$$

que es verifica per hipòtesi.

- Per tant, només hem de resoldre els sistemes

$$L_{11} U_{12} = A_{12}$$

per trobar U_{12}.

- Son n_2 sistemes lineales en n_1 incògnites amb la mateixa matriu triangular inferior L_{11}.

Aplicació: en aquest cas $n_2 = n_1 = 2$.

- Primer trobem la descomposició LU de les matrius 2×2 de la diagonal:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 25/4 \end{pmatrix}.$$

- Ara cal trobar $U_{12} = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

que dona:

$$U_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 25/4 \end{pmatrix}.$$