1 Problemes numèrics i errors

1 Quant acuradament necessitem conèixer una aproximació de π per poder calcular $\sqrt{\pi}$ amb 4 decimals correctes?

2 Calculeu la distància focal f d'una lent usant la fórmula

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

on $a = 32 \pm 1$mm i $b = 46 \pm 1$mm. Doneu una estimació de l'error.

3 Segons una llegenda, Tales de Milet va calcular l'altura de la piràmide de Keops mesurant 3 longituds (la d'un bastó posat verticalment, la de la seva ombra, i la de l'ombra de la piràmide), i usant el resultat que relaciona quatre costats de dos triangles semblants:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ .$$

Siguin $a = 1.5 \pm 0.05$, $b = 285.0 \pm 0.1$ i $c = 1.86 \pm 0.01$ (en metres).

a) Enuncieu una fórmula que doni fites aproximades a primer ordre de la propagació de l'error de les dades, per a funcions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Apliqueu-lo a aquest cas per a trobar $d \pm \epsilon$.

b) Calculeu un interval I, el més petit possible, tal que es pugui assegurar rigorosament $d \in I$. Escriviu-lo també en la forma $d \pm \epsilon$. (Indicació: Useu raonaments de monotonia).

4 Es vol calcular la quantitat $R = \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2$.

a) Demostreu que les 4 expressions següents són equivalents:

$$\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2 \ , \quad 8 - 2\sqrt{3}\sqrt{5} \ , \quad \frac{4}{\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^2} \ , \quad \frac{2}{4 + \sqrt{3}\sqrt{5}} \ .$$

b) Suposem que $\sqrt{5}$ i $\sqrt{3}$ es coneixen només aproximadament, amb errors absoluts pròxims a 0 i de magnitud semblant. Quina de les 4 expressions de l'apartat anterior és millor numèricament per a calcular R?

5 Es considera el càlcul recurrent

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ dades conegudes} \ , \\ x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \ . \end{cases}$$

a) Demostreu que $x_5 = 31x_1 - 30x_0$.

b) Trobeu una fórmula explícita de x_n en funció de x_1 i x_0. O sigui, trobeu $f(n)$ i $g(n)$ tals que $x_n = f(n)x_1 + g(n)x_0$, $\forall n \geq 0$.

c) Suposem que els càlculs es fan exactament (sense errors d'arrodoniment), i suposem que x_0 i x_1 es coneixen només aproximadament, amb uns errors absoluts fitats per ϵ. Demostreu que l'error absolut en el valor x_n obtingut, està fitat per $(2^{n+1} - 3)\epsilon$.

6 Sigui $f(x,y) = x^y$, definida en el quadrat: $0 < x, y \leq 10$.

a) Estudieu la propagació de l'error relatiu, a primer ordre. O sigui, cal trobar expressions E_x i E_y, dependents de x i de y, tals que, en primer ordre d'aproximació, es verifiqui

$$\frac{(\Delta f)}{f} \approx E_x \frac{(\Delta x)}{x} + E_y \frac{(\Delta y)}{y} \ ,$$

on el símbol Δ fa referència a l'error absolut en la variable que acompanya.

Per quins valors de x i de y hi ha problemes de propagació de l'error relatiu?

b) Aplicació. Siguin $x = 0.11(1 \pm \epsilon)$ i $y = 10(1 \pm \epsilon)$, on $\epsilon = 10^{-2}$. Trobeu una fita (a primer ordre en ϵ) de l'error relatiu en $f(x,y) = x^y$.

7 Sigui el sistema d'equacions lineals

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & + & ay & = & 10 \\ 5x & + & by & = & 20 \end{array} \right.$$

on els valors $a = 2.100$ i $b = 3.300$ estan arrodonits al nombre de xifres que es mostren i les operacions es fan de manera exacta.

Calculeu un valor aproximat de $x + y$ i una cota de l'error.

8 Per a cada $x \neq 0$, es considera la seva representació en punt flotant normalitzat, usant base 10 i 5 dígits de mantissa, arrodonint:

$$fl(x) = \pm d_0.d_1 d_2 d_3 d_4 \cdot 10^e \ ,$$

on $e \in Z$, $d_i \in Z$, $0 \leq d_i \leq 9$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, i $d_0 \neq 0$ (condició de normalització). Per exemple, $fl(\pi) = +3.1416 \cdot 10^0$ i $fl(-0.012345678) = -1.2346 \cdot 10^{-2}$.

D'altra banda, es considera el següent algorisme per a fer la suma de dues representacions:

- Si els 2 exponents són diferents, aleshores es canvia la representació del valor que el té més petit, igualant l'exponent amb el més gran i canviant la mantissa adequadament (se suprimeix la condició de normalització i s'usen tants dígits decimals com calgui).
- Se sumen les mantisses exactament, amb tants dígits com calgui.
- S'adequa el resultat al sistema de representació, tornant a normalitzar i a arrodonir a 5 dígits (si cal).

Per exemple, $fl(9.8765 \cdot 10^2 + 4.3219 \cdot 10^1) \approx 9.8765 \cdot 10^2 + 0.43219 \cdot 10^2 \equiv 10.30869 \cdot 10^2 \approx 1.0309 \cdot 10^3$.

Siguin $x = 123.44321$, $y = 0.0987$ i $z = 5.00511$.

a) Escriviu les representacions $fl(x)$, $fl(y)$ i $fl(z)$.

b) Calculeu $fl(fl(fl(x) + fl(y)) + fl(z))$ i $fl(fl(x) + fl(fl(y) + fl(z)))$. Comproveu que no dóna el mateix. Quin seria el millor ordre per fer la suma?

9 Useu el desenvolupament de Taylor per evitar cancel·lacions o useu una reformulació en les següents expressions:

a) $e^x - e^{-x}$, per a $x \approx 0$.

b) $\sin x - \cos x$, per a $x \approx \pi/4$.

c) $1 - \cos x$, per a $x \approx 0$.

d) $(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2})^{-1}$ per a $x \approx 0$.

10 Sigui $a + b\mathbf{i} \in \mathbb{C}$, amb $b > 0$.

a) Demostreu que la seva arrel quadrada $u + v\mathbf{i}$ es pot calcular així:

$$u = +\left(\frac{r+a}{2}\right)^{1/2} \quad \text{i} \quad v = +\left(\frac{r-a}{2}\right)^{1/2}, \quad \text{on} \quad r = +\left(a^2 + b^2\right)^{1/2} .$$

b) Quin problema numèric es produeix quan $|a| \gg |b|$? Com es pot evitar?

11 El semiperíode d'oscil·lació del pèndol simple és $S = \pi(L/g)^{1/2}$, on L és la longitud i g és l'acceleració de la gravetat.

a) El pèndol de Foucault original (1851) media $L = 67.0 \pm 0.01$ metres. Si es pren $\pi = 3.142 \pm \frac{1}{2}10^{-3}$ i $g = 9.81 \pm \frac{1}{2}10^{-2}$ metres/segons^2, doneu una aproximació del semiperíode S i una fita de l'**error absolut** d'aquest resultat (podeu trobar una fita rigorosa, o una fita aproximada usant propagació de l'error a primer ordre).

b) Se suposa que les operacions elementals i les funcions matemàtiques es fan en precisió finita, amb un **error relatiu** fitat per $u = 10^{-7}$. Trobeu una fita (a primer ordre en u) de l'**error absolut** en S degut a les operacions, quan s'usa la fórmula donada amb les dades aproximades conegudes de l'apartat a).

12 Sigui $A = \begin{pmatrix} a & e \\ e & d \end{pmatrix}$ una matriu 2×2, real i simètrica. Per a trobar els seus valors propis (reals) s'usa l'algorisme: primer es calculen els coeficients b i c del polinomi característic $p(x) = x^2 + bx + c$ i després es resol $p(x) = 0$ usant la fórmula habitual.

a) Se suposa que les dades a, d i e es coneixen només aproximadament, amb **errors absoluts** fitats per ϵ. Treballant a primer ordre en ϵ, trobeu una fita de l'error absolut en els valors propis, que sigui de la forma $K\epsilon$, amb K independent dels elements de A.

b) Se suposa ara que els elements de A no tenen error, que $ad < 0$, i que cada operació elemental es fa amb un **error relatiu** fitat per $u \ll 1$. Treballant a primer ordre en u, trobeu fites dels errors relatius en b i en c de la forma Lu, amb L independent dels elements de A.

Notes: Canviar el signe d'un valor no introdueix cap error nou. Elevar un valor al quadrat sí que introdueix error.

13 Volem calcular el valor de la funció $F(x) = \sin x - \cos x$ en el punt $\bar{x}$.

a) Treballant amb 4 xifres significatives i arrodoniment, calculeu $F(0.785)$. Useu una fórmula millor des del punt de vista numèric. Compareu els resultats i comenteu-los.

b) Suposem que no hi ha error en la representació del nombre $\bar{x}$ i que usem un ordinador que comet errors relatius fitats per ϵ i 5ϵ en les operacions aritmètiques i en el càlcul de les funcions trigonomètriques, respectivament. Fiteu l'error comès en el càlcul de $F(\bar{x})$.

14 El semieix major, a, de l'òrbita d'un satèl·lit artificial que orbita al voltant de la terra amb un període de T segons es calcula mitjançant la fórmula:

$$a = \sqrt[3]{k\mu},$$

on $k = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$ i μ és una constant gravitatòria (k es mesura en s^2 i μ en $\frac{Km^3}{s^2}$).

a) Suposem que els valors $k = 1.25 \cdot 10^6$ i $\mu = 3.986 \cdot 10^5$ estan arrodonits al nombre de xifres que es mostren i que les operacions es fan de manera exacta. Fiteu l'error relatiu en el càlcul d'a.

b) Per calcular a usem un ordinador que comet errors relatius fitats per ε en la representació en punt flotant de k i de μ i en l'operació producte. Suposem també que comet errors relatius fitats per 3ε en el càlcul de l'arrel. Doneu la millor fita aproximada de l'error relatiu en el càlcul d'a.

15 Usem un ordinador que comet errors relatius fitats per ϵ en la representació de nombres en punt flotant i en les operacions aritmètiques, i per 2ϵ i 5ϵ en el càlcul de l'arrel quadrada i de les funcions trigonomètriques, respectivament.

Doneu la millor fita (aproximada) per a l'error relatiu comès en el càlcul de $f(x, y) = \sin(x + \sqrt{y})$.

16 a) S'avalua $f(x, y, z) = \tan(xy^2 - z)$ per a $x = 3.25 \pm \frac{1}{2}10^{-2}$, $y = 0.792 \pm \frac{1}{2}10^{-3}$, i $z = 1.18 \pm \frac{1}{2}10^{-2}$. Calculeu una fita, aproximada a primer ordre, del resultat $f(3.25, 0.792, 1.18) \approx 1.158291$.

b) En el mateix càlcul anterior, suposem ara que les dades no tenen error, però que cada operació individual (quadrat, producte, resta i funció trigonomètrica) es fa amb un error **relatiu** fitat per $u = 10^{-8}$. Trobeu una fita de l'error **absolut** en el resultat, a primer ordre en u.

17 En les reaccions químiques en què un compost es trasforma en dues substàncies més simples, convé fer càlculs de la forma

$$z = +\left(\frac{x}{x + y}\right)^{1/2},$$

on $0 < x, y$.

a) Si es coneixen les dades aproximades $x = 0.664 \pm \frac{1}{2}10^{-3}$ i $y = 9.87 \pm \frac{1}{2}10^{-2}$, doneu una bona aproximació de z, així com una fita, com més bona millor, de l'error absolut comès.

b) Suposem ara que es coneixen unes dades x i y exactes, però que cada operació elemental (suma, divisió i arrel quadrada) es fa amb un error relatiu fitat per $u \ll 1$. Doneu una fita, aproximada a primer ordre en u, de l'error relatiu en el resultat z.

18 Usem un ordinador que comet errors relatius fitats per ϵ en la representació de nombres en punt flotant i en les operacions aritmètiques, i per 3ϵ en el càlcul de l'arrel cúbica. Doneu la millor fita (aproximadament) per a l'error relatiu comès en el càlcul de $\sqrt[3]{x + y}, x, y > 0$.