Solució al problema 64

1. Suposem que $g'(\alpha) = \cdots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$ i $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Pel teorema de Taylor:

$$g(x_n) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{g^{(i)}(\alpha)}{i!}(x_n - \alpha)^i + \frac{g^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p$$

$$= g(\alpha) + \frac{g^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p$$

amb $\xi_n \in < x_n, \alpha >$. Usant que α és un punt fix i que $x_{n+1} = g(x_n)$, tenim

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = \frac{g^{(p)}(\xi_n)}{p!} e_n^p .$$

Per tant, com que g és de classe $\mathcal{C}^p$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!} \neq 0$$

2. Sigui
$$g(x) = px + \frac{qc}{x^2} + \frac{rc^2}{x^5}.$$

Imposem que $g(\alpha) = \alpha$, $g'(\alpha) = 0$, $g''(\alpha) = 0$.

- $\underline{g(\alpha) = \alpha}$:

  Hem d'imposar que
  $$\alpha = p\alpha + \frac{qc}{\alpha^2} + \frac{rc^2}{\alpha^5},$$
  que és equivalent a
  $$\alpha^6 = p\alpha^6 + qc\alpha^3 + rc^2,$$
  i tenint en compte que $\alpha^3 = c$, tenim que
  $$c^2 = pc^2 + qc^2 + rc^2,$$
  del que deduïm que
  $$1 = p + q + r.$$

UNIVERSITAT DE BARCELONA

- $\underline{g'(\alpha) = 0}$:

  Com que

$$g'(x) = p - \frac{2qc}{x^3} - \frac{5rc^2}{x^6},$$

  hem d'imposar que

$$0 = p - \frac{2qc}{\alpha^3} - \frac{5rc^2}{\alpha^6} = p - 2q - 5r.$$

- $\underline{g''(\alpha) = 0}$:

  Ara

$$g''(x) = \frac{6qc}{x^4} + \frac{30rc^2}{x^7}.$$

  Per tant,

$$0 = \frac{6qc}{\alpha^4} + \frac{30rc^2}{\alpha^7} = \frac{1}{\alpha}(6q + 30r),$$

  amb el que hem d'imposar que

$$0 = q + 5r.$$

Finalment, hem de resoldre el sistema

$$\begin{aligned} 1 &= p + q + r \\ 0 &= p - 2q - 5r \\ 0 &= q + 5r \end{aligned}$$

que té solució $p = 5/9$, $q = 5/9$ i $r = -1/9$.
A més,

$$g'''(\alpha) = -\frac{24qc}{\alpha^5} - \frac{240rc^2}{\alpha^8} = \frac{1}{\alpha^2}(-24q - 210r) = \frac{10}{\alpha^2} \neq 0.$$

Això ens dona el mètode

$$x_{n+1} = \frac{5}{9}x_n + \frac{5c}{9x_n^2} - \frac{c^2}{9x_n^5},$$

que és d'ordre 3.

3. Definim $e_k = x_k - \alpha$.
Per a $c = 2$, $\alpha \approx 1.26$ i $x_0 = 1$. Per tant, tenim que $e_0 \approx -0.26$ i

$$|e_{k+1}| \approx \left|\frac{1}{6} g'''(\alpha) e_k^3\right| \approx \left|\frac{1}{6} \cdot \frac{10}{1.26^2} e_k^3\right| \leq 1.05 |e_k|^3.$$

Aleshores,

$$|e_1| \lesssim 1.05 \cdot 0.26^3 \approx 1.84548 \times 10^{-2},$$

$$|e_2| \lesssim 1.05 |e_1^3| \approx 6.6 \times 10^{-6},$$

$$|e_4| \lesssim 1.05 |e_3^3| \approx 2.9 \times 10^{-47},$$

i $|e_5|$ ja és menor que 10^{-100}.

Per tant, 5 iteracions són suficients.