1 Problemes numèrics i errors

1 Quant acuradament necessitem conèixer una aproximació de π per poder calcular $\sqrt{\pi}$ amb 4 decimals correctes?

2 Calculeu la distància focal f d'una lent usant la fórmula

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

on $a = 32 \pm 1$mm i $b = 46 \pm 1$mm. Doneu una estimació de l'error.

3 Segons una llegenda, Tales de Milet va calcular l'altura de la piràmide de Keops mesurant 3 longituds (la d'un bastó posat verticalment, la de la seva ombra, i la de l'ombra de la piràmide), i usant el resultat que relaciona quatre costats de dos triangles semblants:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ .$$

Siguin $a = 1.5 \pm 0.05$, $b = 285.0 \pm 0.1$ i $c = 1.86 \pm 0.01$ (en metres).

a) Doneu fites aproximades a primer ordre de la propagació de l'error de les dades, per a funcions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Apliqueu-lo a aquest cas per a trobar $d \pm \epsilon$.

b) Calculeu un interval I, el més petit possible, tal que es pugui assegurar rigorosament $d \in I$. Escriviu-lo també en la forma $d \pm \epsilon$. (Indicació: Useu raonaments de monotonia).

4 Es vol calcular la quantitat $R = \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2$.

a) Demostreu que les 4 expressions següents són equivalents:

$$\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2 \ , \quad 8 - 2\sqrt{3}\sqrt{5} \ , \quad \frac{4}{\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^2} \ , \quad \frac{2}{4 + \sqrt{3}\sqrt{5}} \ .$$

b) Suposem que $\sqrt{5}$ i $\sqrt{3}$ es coneixen només aproximadament, amb errors absoluts pròxims a 0 i de magnitud semblant. Quina de les 4 expressions de l'apartat anterior és millor numèricament per a calcular R?

5 Es considera el càlcul recurrent

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ dades conegudes} \ , \\ x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \ . \end{cases}$$

a) Demostreu que $x_5 = 31x_1 - 30x_0$.

b) Trobeu una fórmula explícita de x_n en funció de x_1 i x_0. O sigui, trobeu $f(n)$ i $g(n)$ tals que $x_n = f(n)x_1 + g(n)x_0$, $\forall n \geq 0$.

c) Suposem que els càlculs es fan exactament (sense errors d'arrodoniment), i suposem que x_0 i x_1 es coneixen només aproximadament, amb uns errors absoluts fitats per ϵ. Demostreu que l'error absolut en el valor x_n obtingut, està fitat per $(2^{n+1} - 3)\epsilon$.

6 Sigui $f(x,y)=x^y$, definida en el quadrat: $0<x,y\leq 10$.

a) Estudieu la propagació de l'error relatiu, a primer ordre. O sigui, cal trobar expressions E_x i E_y, dependents de x i de y, tals que, en primer ordre d'aproximació, es verifiqui

$$\frac{(\Delta f)}{f}\approx E_x\frac{(\Delta x)}{x}+E_y\frac{(\Delta y)}{y}\ ,$$

on el símbol Δ fa referència a l'error absolut en la variable que acompanya.

Per quins valors de x i de y hi ha problemes de propagació de l'error relatiu?

b) Aplicació. Siguin $x=0.11(1\pm\epsilon)$ i $y=10(1\pm\epsilon)$, on $\epsilon=10^{-2}$. Trobeu una fita (a primer ordre en ϵ) de l'error relatiu en $f(x,y)=x^y$.

7 Es considera la fórmula d'Heró per a calcular l'àrea A d'un triangle de costats a, b i c:

$$A=A(a,b,c)=(s(s-a)(s-b)(s-c))^{1/2}\ \text{ on }\ s=(a+b+c)/2\ .$$

Calculeu els factors de propagació de l'error absolut de les dades cap al resultat, a primer ordre (per simetria, és suficient fer-ho respecte una sola de les variables). Suposant que les longituds a, b i c dels costats no són pròximes a 0, pot ser mal condicionada la fórmula d'Heró?

8 S'avalua la funció $f(x,y,z)=\cos(9x)/(y^2-z)$ per a uns valors de les variables que només es coneixen aproximadament: arrodonint als decimals mostrats en cada cas, són $x\approx 0.70$, $y\approx 2.4$, $z\approx 1.82$. Es vol estudiar l'efecte que la imprecisió en les dades provoca en el resultat.

a) Calculeu un interval aproximat per al resultat, usant la fórmula de propagació de l'error a primer ordre. Feu tots els càlculs numèrics amb 5 decimals, arrodonint.

b) Calculeu l'interval més petit possible, per al qual es pugui assegurar rigorosament que conté el resultat. Els extrems de l'interval final s'han de donar amb 5 decimals.

9 Useu el desenvolupament de Taylor per evitar cancel·lacions o useu una reformulació en les següents expressions:

a) e^x-e^{-x}, per $x\approx 0$.

b) $\sin x-\cos x$, per $x\approx\pi/4$.

c) $1-\cos x$, per $x\approx 0$.

d) $(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})^{-1}$ per $x\approx 0$.

10 Sigui $a+b\mathbf{i}\in\mathbb{C}$, amb $b>0$.

a) Demostreu que la seva arrel quadrada $u+v\mathbf{i}$ es pot calcular així:

$$u=+\left(\frac{r+a}{2}\right)^{1/2}\ \text{ i }\ v=+\left(\frac{r-a}{2}\right)^{1/2},\ \text{ on }\ r=+\left(a^2+b^2\right)^{1/2}\ .$$

b) Quin problema numèric es produeix quan $|a|\gg|b|$? Com es pot evitar?

11 Volem calcular el valor de la funció $F(x) = \sin x - \cos x$ en el punt $\bar{x}$.

a) Treballant amb 4 xifres significatives i arrodoniment, calculeu $F(0.785)$. Useu una fórmula millor des del punt de vista numèric. Compareu els resultats i comenteu-los.

b) Suposem que no hi ha error en la representació del nombre $\bar{x}$ i que usem un ordinador que comet errors relatius fitats per ϵ i 5ϵ en les operacions aritmètiques i en el càlcul de les funcions trigonomètriques, respectivament. Fiteu l'error comès en el càlcul de $F(\bar{x})$.

12 Sigui $A = \begin{pmatrix} a & e \\ e & d \end{pmatrix}$ una matriu 2×2, real i simètrica. Per a trobar els seus valors propis (reals) s'usa l'algorisme: primer es calculen els coeficients b i c del polinomi característic $p(x) = x^2 + bx + c$ i després es resol $p(x) = 0$ usant la fórmula habitual.

a) Se suposa que les dades a, d i e es coneixen només aproximadament, amb **errors absoluts** fitats per ϵ. Treballant a primer ordre en ϵ, trobeu una fita de l'error absolut en els valors propis, que sigui de la forma $K\epsilon$, amb K independent dels elements de A.

b) Se suposa ara que els elements de A no tenen error, que $ad < 0$, i que cada operació elemental es fa amb un **error relatiu** fitat per $u \ll 1$. Treballant a primer ordre en u, trobeu fites dels errors relatius en b i en c de la forma Lu, amb L independent dels elements de A.

Notes: Canviar el signe d'un valor no introdueix cap error nou. Elevar un valor al quadrat sí que introdueix error.

13 El semiperíode d'oscil·lació del pèndol simple és $S = \pi(L/g)^{1/2}$, on L és la longitud i g és l'acceleració de la gravetat.

a) El pèndol de Foucault original (1851) media $L = 67.0 \pm 0.01$ metres. Si es pren $\pi = 3.142 \pm \frac{1}{2}10^{-3}$ i $g = 9.81 \pm \frac{1}{2}10^{-2}$ metres/segons^2, doneu una aproximació del semiperíode S i una fita de l'**error absolut** d'aquest resultat (podeu trobar una fita rigorosa, o una fita aproximada usant propagació de l'error a primer ordre).

b) Se suposa que les operacions elementals i les funcions matemàtiques es fan en precisió finita, amb un **error relatiu** fitat per $u = 10^{-7}$. Trobeu una fita (a primer ordre en u) de l'**error absolut** en S degut a les operacions, quan s'usa la fórmula donada amb les dades aproximades conegudes de l'apartat a).

14 Volem calcular $v = \sin \frac{z}{2}$ per a un cert valor de z $(0 \le z \le 2\pi)$, que coneixem només aproximadament amb un error relatiu fitat per ϵ.

Sabem que es verifica la identitat trigonomètrica

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

Volem analitzar des del punt de vista numèric, les dues possibles maneres de calcular v. Trobeu una fita de l'error absolut que es produeix en el càlcul de les dues funcions en z, suposant

a) que les operacions aritmètiques i les funcions es fan sense error apreciable;

b) que les operacions aritmètiques es fan sense error apreciable, però que l'arrel quadrada i les funcions trigonomètriques es fan amb un error relatiu fitat per 5ϵ.

Indiqueu quina és la millor manera en els dos casos.

15 El semieix major, a, de l'òrbita d'un satèl·lit artificial que orbita al voltant de la terra amb un període de T segons es calcula mitjançant la fórmula:

$$a = \sqrt[3]{k\mu},$$

on $k = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$ i μ és una constant gravitatòria (k es mesura en s^2 i μ en $\frac{Km^3}{s^2}$).

a) Suposem que els valors $k = 1.25 \cdot 10^6$ i $\mu = 3.986 \cdot 10^5$ estan arrodonits al nombre de xifres que es mostren i que les operacions es fan de manera exacta. Fiteu l'error relatiu en el càlcul d'a.

b) Per calcular a usem un ordinador que comet errors relatius fitats per ε en la representació en punt flotant de k i de μ i en l'operació producte. Suposem també que comet errors relatius fitats per 3ε en el càlcul de l'arrel. Doneu la millor fita aproximada de l'error relatiu en el càlcul d'a.

16 Usem un ordinador que comet errors relatius fitats per ϵ en la representació de nombres en punt flotant i en les operacions aritmètiques, i per 2ϵ i 5ϵ en el càlcul de l'arrel quadrada i de les funcions trigonomètriques, respectivament.

Doneu la millor fita (aproximada) per a l'error relatiu comès en el càlcul de $f(x, y) = \sin(x + \sqrt{y})$.

17 Cal avaluar la funció $f(x, y, z) = \cos(9x)/(y^2 - z)$ per a diversos valors (x, y, z) del domini $[0.5, 1] \times [2, 2.5] \times [1.5, 2]$, i es vol estudiar l'efecte dels errors d'arrodoniment. Se suposa que cada càlcul individual (n'hi ha 5) es fa amb un error relatiu fitat per $u = 2^{-24}$.

a) Fiteu l'error relatiu en el resultat, a primer ordre en u, en funció de x, y i z.

b) Raoneu si hi ha valors de les variables (x, y, z) en el seu domini, tals que l'error relatiu degut als errors d'arrodoniment pot ser molt gran.

18 a) S'avalua $f(x, y, z) = \tan(xy^2 - z)$ per a $x = 3.25 \pm \frac{1}{2}10^{-2}$, $y = 0.792 \pm \frac{1}{2}10^{-3}$, i $z = 1.18 \pm \frac{1}{2}10^{-2}$. Calculeu una fita, aproximada a primer ordre, del resultat $f(3.25, 0.792, 1.18) \approx 1.158291$.

b) En el mateix càlcul anterior, suposem ara que les dades no tenen error, però que cada operació individual (quadrat, producte, resta i funció trigonomètrica) es fa amb un error **relatiu** fitat per $u = 10^{-8}$. Trobeu una fita de l'error **absolut** en el resultat, a primer ordre en u.

19 En les reaccions químiques en què un compost es trasforma en dues substàncies més simples, convé fer càlculs de la forma

$$z = +\left(\frac{x}{x+y}\right)^{1/2},$$

on $0 < x, y$.

a) Si es coneixen les dades aproximades $x = 0.664 \pm \frac{1}{2}10^{-3}$ i $y = 9.87 \pm \frac{1}{2}10^{-2}$, doneu una bona aproximació de z, així com una fita, com més bona millor, de l'error absolut comès.

b) Suposem ara que es coneixen unes dades x i y exactes, però que cada operació elemental (suma, divisió i arrel quadrada) es fa amb un error relatiu fitat per $u \ll 1$. Doneu una fita, aproximada a primer ordre en u, de l'error relatiu en el resultat z.

20 Usem un ordinador que comet errors relatius fitats per ϵ en la representació de nombres en punt flotant i en les operacions aritmètiques, i per 3ϵ en el càlcul de l'arrel cúbica. Doneu la millor fita (aproximadament) per a l'error relatiu comès en el càlcul de $\sqrt[3]{x+y}, x, y > 0$.

21 Volem calcular el volum d'un con, on el radi de la base és $r = 0.250$m i l'alçada és $h = 0.500$m,

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

a) Suposem que la precisió de les mides correspon als dígits donats (amb arrodoniment), i que usem l'aproximació $\pi \approx 3.1416$. Usant la fórmula de propagació d'errors, digueu a quin interval es troba el volum del con (suposem que no es comet cap error en les operacions).

b) Suposant que l'error en les mesures de r i h és el mateix, amb quina exactitud cal conèixer les dades (i π) per tal de garantir un error absolut menor que 10^{-5} en el càlcul del volum del con?

c) Si es comet un error relatiu de 10^{-10} en les operacions aritmètiques, com afecta això a l'error final comès a l'apartat a)?

22 Siguin a i b dos nombres reals positius tals que $a > b$, i considerem les dues expressions equivalents

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Suposem que cada operació aritmètica es fa amb un error relatiu fitat per u.

a) Trobeu fites dels errors relatius per a les dues expressions, en funció de u, a i b.

b) Raoneu quina de les dues expressions és numèricament millor, en cadascun dels dos casos: $a \gg b$ i $a \approx b$. Indicació: Podeu fer proves numèriques. Per exemple, considereu $a = 9.8765$ i els dos casos $b = 0.011111$ i $b = 9.8754$. Feu els càlculs amb pocs dígits.