4 Zeros

54 Localitzeu els zeros de les funcions

a) $f_1(x) = \sin x - 2 - 0.3x$,

b) $f_2(x) = x^3 - e^x + 3$.

Trobeu-los usant els mètodes de bisecció, Newton i secant.

55 Sigui $I = [0,1]$ i considerem la iteració

$$x_0 = 0.5 \ , \ \ x_{k+1} = g(x_k) \ , \ k = 0,1,2,\dots \ ,$$

on $g(x) = \frac{1}{3}\left(5x^3 - 7x^2 + x + 2\right)$.

a) Vegeu que $g(I) \subset I$.

b) Demostreu que $L \equiv \max_{x\in[0,1]}\{|g'(x)|\} = \frac{34}{45}$.

c) Demostreu que l'equació $f(x) \equiv 5x^3 - 7x^2 - 2x + 2 = 0$, quan $x \in I$, té una única arrel.

d) Sigui α l'arrel de l'apartat anterior. Quantes iteracions (n) del mètode inicial cal fer per tal d'assegurar que $|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}10^{-6}$?

e) A partir de $x_0 = 0.5$, feu 3 iteracions del mètode de Newton-Raphson, aplicat a la funció $f(x)$, arrodonint cada iterat x_{i+1} a 5 decimals, abans de calcular el següent. Comproveu que, amb aquesta precisió, $x_2 = x_3$.

56 En el cas del moviment el·líptic en el problema de dos cossos, per a trobar la posició en l'òrbita, en un determinat temps, cal resoldre l'equació de Kepler

$$f(x) \equiv x - e\sin(x) - M = 0 \ ,$$

on $e \in (0,1)$ (excentricitat) i $M \in R$ (anomalia mitjana) són constants conegudes.

(a) Demostreu que $f(x)$ té un únic zero real α, el qual està situat entre $(M - e)$ i $(M + e)$.

(b) Es considera la iteració simple $x_{k+1} = e\sin(x_k) + M$ ($\forall k \geq 0$), amb $x_0 = M$. Demostreu que la successió $(x_k)_{k\geq 0}$ convergeix a α.

(c) En el cas $e = 0.1$, doneu una estimació a priori de quants iterats de la iteració simple anterior faran falta per a obtenir una precisió de 10^{-20}. I si $e = 0.9$?

(d) Es canvia la iteració simple anterior per la de Newton-Raphson, amb la mateixa condició inicial $x_0 = M$. Feu una estimació de quantes iteracions caldria fer ara, en els dos casos de l'apartat anterior.

57 a) Sigui $a > 0$ fixat. Es considera la iteració

$$x_{k+1} = g(x_k) \equiv +\sqrt{x_k + a} \ , \ \ \forall k \geq 0 \ ,$$

amb un valor inicial $x_0 \geq -a$ per tal que la successió $(x_n)_{n\geq 0}$ estigui ben definida.

a) Demostreu que, si la successió és convergent, llavors el seu límit α és l'arrel més gran de la funció $f(x) = x^2 - x - a$. Deduïu que $\alpha > 1$.

b) Vegeu que la iteració proposada és *localment* convergent en un entorn del valor α anterior.

c) Es considera la successió generada amb la condició inicial $x_0 = 1$. Vegeu que és estrictament monòtona creixent i que està fitada superiorment (per tant, és convergent i, pel primer apartat, el seu límit és el valor α).

   Nota. Les gràfiques de les funcions $y = g(x)$ i $y = x$ us poden donar idees, però cal fer les demostracions sense dibuixos.

d) Continuant de l'apartat anterior, feu una estimació d'un valor n_0, independent de a, tal que $|x_n - \alpha| < 10^{-6}|x_0 - \alpha|$, $\forall n \geq n_0$.

58 Sigui $a > 0$ un valor real. Volem calcular $\alpha = \frac{1}{a}$ amb molta precisió, sense fer la divisió. Per això, considerem la funció

$$f(x) = \frac{1}{x} - a \ ,$$

l'únic zero de la qual és α.

(a) Escriviu la iteració que s'obté aplicant el mètode de Newton-Raphson a la funció $f(x)$. Comproveu que es pot passar d'un iterat al següent fent només dos productes i una resta.

(b) Sigui $(x_n)_{n\geq 0}$ una successió generada pel mètode anterior. Vegeu que $x_{n+1} - \alpha = -a(x_n - \alpha)^2$.

(c) En el cas $a = 3$ i prenent $x_0 = 0.3$, de manera que $|e_0| = 0.0333\ldots$, quantes iteracions k caldria fer per a assegurar que $|x_k - \alpha| < 10^{-1000}$?

59 Sigui $f : R \to R$ una funció tantes vegades diferenciable com calgui. I sigui α una arrel doble (i no triple) de f. O sigui, $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) \neq 0$. En aquest cas, és conegut que el mètode de Newton-Raphson per a trobar α té ordre 1.

Es considera la funció $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, la qual està ben definida en un entorn de α i verifica $g(\alpha) = 0$.

(a) Comprova que el mètode de Newton-Raphson aplicat a la funció $g(x)$ dóna

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)} \ .$$

(b) Demostra que aquesta iteració, suposant que és convergent a α i que $f'''(\alpha) \neq 0$, té ordre 2. Calcula el coeficient asimptòtic de l'error en funció de derivades adequades de f en α.

(c) Aplicació: Per a $f(x) = x^2 + x^3$ i $\alpha = 0$, es considera $x_0 = 1$. Fes 2 iterats del mètode de Newton-Raphson aplicat a f. Fes també 2 iterats del mètode de Newton-Raphson aplicat a $g = f/f'$.

60 A la primera meitat del segle XIII, Fibonacci va resoldre l'equació $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

(a) Demostra que l'equació anterior només té una arrel real (sigui α), i troba l'interval I de longitud 1 i d'extrems enters que conté α.

(b) Es consideren els dos mètodes iteratius

$$x_{k+1} = \frac{20 - 2x_k^2 - x_k^3}{10} \equiv g(x_k) \ , \qquad x_{k+1} = \frac{20}{10 + 2x_k + x_k^2} \equiv h(x_k) \ .$$

Quin dels dos és millor per a trobar α? Per què?

(c) Se suposa que x_0 és el punt mig de I i que es poden fer els càlculs amb precisió il·limitada. Per al mètode definit per la iteració $h(x)$, quants iterats són necessaris per a obtenir α amb 20 decimals correctes?

61 Volem trobar els zeros positius de la funció $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \cos(x)$.

a) Demostreu que f té un únic zero positiu, α. Trobeu un interval I de longitud 1 i extrems enters tal que $\alpha \in I$.

b) Considerem la funció $g(x) = -1 + \sqrt{1 + 2\cos x}$. Demostreu que $g(x)$ està ben definida si $x \in I$ i que α és l'únic punt fix de g en I.

c) Trobeu una constant L tal que $0 < L < 1$ i $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$, per a tot $x, y \in I$.

d) Considerem el procés iteratiu $x_{k+1} = g(x_k)$, amb x_0 el punt mig de I. Trobeu $k_0 \geq 0$ tal que si $k \geq k_0$ llavors $|x_k - \alpha| \leq 10^{-30}$.

e) Considerem ara el procés iteratiu $x_{k+1} = h(x_k)$, on $h(x) = \cos x - \frac{1}{2}x^2$. És localment convergent? En tal cas, és millor o pitjor que l'anterior?

62 Es considera l'equació

$$e^{4x+1} = \frac{1}{x+3} \ \ , \ x > -3 \ .$$

(a) Demostreu que té una única solució real i que aquesta pertany a l'interval $I = (-1, 0)$.

(b) Es consideren els dos mètodes iteratius

$$\exp(4x_k + 1) = \frac{1}{x_{k+1} + 3} \quad \text{i} \quad \exp(4x_{k+1} + 1) = \frac{1}{x_k + 3} \ \ , \ \forall k \geq 0 \ .$$

Només un d'ells és localment convergent a la solució de l'apartat (a). Quin?

(c) Pel mètode localment convergent anterior (el notem $x_{k+1} = g(x_k)$), demostreu que $g(I) \subset I$. Si es comença amb $x_0 \in I$, feu una estimació a priori de quants iterats són necessaris per a aconseguir una precisió de $\frac{1}{2}10^{-10}$.

63 (a) Sigui $f : R \to R$ una funció suficientment derivable amb continuïtat, i α un zero de multiplicitat $p \geq 2$: $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \ldots, f^{(p-1)}(\alpha) = 0, f^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Sigui (x_n) una successió generada pel mètode de Newton-Raphson, aplicat a la funció f, tal que convergeix cap a α i $x_n \neq \alpha$ $(\forall n \geq 0)$. Demostreu que l'ordre de convergència és 1 i trobeu el coeficient asimptòtic de l'error.

(b) Trobeu l'ordre i el coeficient asimptòtic si afegim la hipòtesi $f^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, i modifiquem el mètode de Newton-Raphson de la manera següent:

$$x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

(c) Aplicant el mètode de Newton-Raphson a una determinada funció obtenim la successió

i	x_i
0	0.5
1	0.333505
2	0.221832
3	0.147464
4	0.0980568
5	0.0652386
6	0.0434272

Sembla convergir cap a 0, però no quadràticament sinó linealment, indicant que $\alpha = 0$ és una arrel múltiple. Quina és la seva multiplicitat?

64 (a) Sigui $g(x)$ una funció $p(\geq 1)$ vegades diferenciable amb continuïtat en un entorn d'un punt fix $\alpha = g(\alpha)$ i que verifica

$$g^{(j)}(\alpha) = 0 \;\; \forall j = 1, 2, \ldots, p-1 \; , \quad g^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Demostreu que el mètode iteratiu $x_{n+1} = g(x_n)$, si dóna una successió convergent a α, té ordre de convergència p. Quin és el coeficient asimptòtic de l'error?

(b) Sigui $c > 0$ un valor real fixat. Per a calcular $\alpha = c^{1/3}$ es vol usar una fórmula iterativa de la forma:

$$x_{n+1} = px_n + \frac{qc}{x_n^2} + \frac{rc^2}{x_n^5} \;\; \forall n \geq 0 \; ,$$

on p, q i r han de ser constants. Determineu els valors de p, q i r per tal que el mètode sigui adequat per a trobar α i tingui l'ordre més gran possible (us ha de donar ordre 3).

(c) Per a la fórmula trobada a l'apartat (b), considerem el cas $c = 2$. Se sap que $\alpha \approx 1.26$ i es pren $x_0 = 1$. Suposant que els càlculs es poden fer amb precisió infinita, feu una estimació de quants iterats farien falta per a aconseguir una precisió de 10^{-100}.