

Solució al problema 7

Usant la fórmula de la propagació de l'error, tenim que l'error per al càlcul de A és

$$\Delta A \approx \frac{\partial A}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial A}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial A}{\partial c} \Delta c,$$

on Δa , Δb i Δc són els errors dels costats del triangle i, per tant, els factors de propagació de l'error són les derivades parcials $\frac{\partial A}{\partial a}$, $\frac{\partial A}{\partial b}$ i $\frac{\partial A}{\partial c}$.

Fent el càlcul obtenim

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{2A} \left[\frac{1}{2}(s-a)(s-b)(s-c) - \frac{1}{2}s(s-b)(s-c) + \frac{1}{2}s(s-a)(s-c) + \frac{1}{2}s(s-a)(s-b) \right],$$

on hem usat que $\partial s / \partial a = \frac{1}{2}$. Operant:

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{4} \left[\frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{s(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s-a}} + \frac{\sqrt{s(s-a)(s-c)}}{\sqrt{s-b}} + \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)}}{\sqrt{s-c}} \right].$$

Les expressions per les altres derivades són anàlogues, només cal canviar el signe menys de lloc. Per tant, obtenim que $|\partial A / \partial a|$, $|\partial A / \partial b|$ i $|\partial A / \partial c|$ estan fitades per

$$E = \frac{1}{4} \left[\left| \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}} \right| + \left| \frac{\sqrt{s(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s-a}} \right| + \left| \frac{\sqrt{s(s-a)(s-c)}}{\sqrt{s-b}} \right| + \left| \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)}}{\sqrt{s-c}} \right| \right].$$

Això implica que

$$|\Delta A| \lesssim E(|\Delta a| + |\Delta b| + |\Delta c|),$$

el que ens diu que E és una fita del factor de propagació de l'error absolut.

Per a veure si la fórmula pot ser mal condicionada, cal analitzar l'expressió per a l'error relatiu de l'àrea del triangle. Notem que

$$\frac{|\Delta A|}{|A|} \lesssim \frac{1}{4} \left[\left| \frac{1}{s} \right| + \left| \frac{1}{s-a} \right| + \left| \frac{1}{s-b} \right| + \left| \frac{1}{s-c} \right| \right] (|\Delta a| + |\Delta b| + |\Delta c|).$$

Per tant, la fórmula pot ser mal condicionada quan s és petit, que hem descartat ja que implica que a , b i c són petits, i en l'enunciat del problema ens diu que suposem que no ho són. També pot ser mal condicionada si s és aproximadament igual a un dels costats a , b o c , és a dir, si la suma de dos costats és aproximadament igual a l'altra costat. Això es donaria en alguns casos específics de triangles molt obtusos o molt aguts.