Solució al problema 14

Anomenem $f_1(x) = \sin\frac{x}{2}$ i $f_2(x) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$.

En tots els casos tenim un error en z: $z_1 = fl(z) = z(1+\delta_1)$ amb $|\delta_1| \le \epsilon$. Per tant, $|\Delta z| \le |z|\epsilon$.

a) Usant la fórmula de propagació de l'error maximal: $|\Delta f_i(z)| \lesssim |f_i'(z)| \cdot |\Delta z|$ obtenim

$$|\Delta f_1| \lesssim \frac{1}{2}\left|\cos\left(\frac{z}{2}\right)\right| \cdot |z|\epsilon, \qquad |\Delta f_2| \lesssim \left|\frac{\sin z}{4f_2(z)}\right| \cdot |z|\epsilon.$$

Com que f_1 i f_2 són la mateixa funció i per tant també les seves derivades, és indiferent usar una fórmula o l'altra.

b) **Càlcul de** $f_1(z)$:

Sigui z_1 és el valor aproximat de z. Com que té un error relatiu fitat per ϵ, podem escriure $z_1 = z(1+\delta_1)$, amb $|\delta_1| \le \epsilon$.

A continuació volem calcular $\sin(z/2)$. Com que no avaluem la funció en z sino en z_1 i l'avaluació del sinus té un error relatiu fitat per 5ϵ, el valor calculat serà

$$\sin(z_1/2)(1+\delta_2) = \sin(z(1+\delta_1)/2)(1+\delta_2),$$

on $|\delta_1| \le \epsilon$ i $|\delta_2| \le 5\epsilon$. Si anomenem $y = \sin(z/2)$, l'error absolut de y, Δy serà:

$$\Delta y = \sin(z/2 + z\delta_1/2)(1+\delta_2) - \sin(z/2).$$

Fent el desenvolupament de Taylor de la funció sinus al voltant de $z/2$ podem escriure

$$\Delta y = \left(\sin(z/2) + \cos(z/2)\frac{z\delta_1}{2} + O(\epsilon^2)\right)(1+\delta_2) - \sin(z/2) \approx \sin(z/2)\delta_2 + \cos(z/2)\frac{z\delta_1}{2},$$

on hem menyspreat els termes de segon ordre. Per tant obtenim la fita aproximada:

$$|\Delta y| \lesssim |\cos(z/2)|\frac{|z|}{2}\epsilon + |\sin(z/2)| \cdot 5\epsilon.$$

Càlcul de $f_2(z)$:

Definim les funcions $g_1(x) = \cos(x)$ i $g_2(x) = \sqrt{x}$. Si definim $y = g_1(z)$, hem de calcular $f_2(z) = g_2((1-y)/2)$. Per a això procedim de la següent manera: primer avaluem $g_1(x)$ per $x = z_1$, on l'avaluació de $g_1(z_1)$ es fa amb un error relatiu δ_2 tal que $|\delta_2| \le 5\epsilon$. Per tant obtenim $y_1 = g_1(z_1)(1+\delta_2)$ en comptes de $y = g_1(z)$. Per acabar l'avaluació del valor aproximat de la funció $f_2(x)$ en $x = z$, hem de calcular $g_2((1-y_1)/2)$, perquè no disposem del valor exacte y. Però com que la funció g_2 s'avalua amb un error relatiu δ_3 tal que $|\delta_3| \le 5\epsilon$, obtindrem una aproximació $g_2((1-y_1)/2)(1+\delta_3)$ de $f_2(z)$.

Finalment tenim que l'error absolut en l'avaluació de $f_2(x)$ en $x = z$ és

$$\Delta f_2(z) = g_2((1-y_1)/2)(1+\delta_3) - f_2(z).$$

A continuació calcularem tot el que ens fa falta pas a pas usant el desenvolupament de Taylor a primer ordre de les funcions g_1 i g_2 :

En primer lloc tenim que

$$y_1 = g_1(z(1+\delta_1)(1+\delta_2) \approx (g_1(z) + g_1'(z)z\delta_1)(1+\delta_2) \approx$$

$$\approx g_1(z) + g_1'(z)z\delta_1 + g_1(z)\delta_2 = \cos(z) - \sin(z)z\delta_1 + \cos(z)\delta_2.$$

Notem que $\Delta y = y_1 - y \approx -\sin(z)z\delta_1 + \cos(z)\delta_2$, i $|\Delta y| \leq (|\sin(z)z| + 5\cos(z))\epsilon$. A continuació calculem

$$g_2((1-y_1)/2)(1+\delta_3) \approx \left(g_2((1-y)/2) + g_2'((1-y)/2)\frac{1}{2}\Delta y\right)(1+\delta_3) \approx$$

$$\approx \left(f_2(z) + \frac{1}{2\sqrt{(1-y)/2}}\frac{1}{2}(-\sin(z)z\delta_1 + \cos(z)\delta_2)\right)(1+\delta_3).$$

Finalment,

$$\Delta f_2(z) \approx -\frac{1}{4f_2(z)}(-\sin(z)z\delta_1 + \cos(z)\delta_2) + f_2(z)\delta_3,$$

i obtenim una fita de l'error absolut

$$|\Delta f_2(z)| \lesssim \left[\left|\frac{1}{4f_2(z)}\right|(|\sin(z)z| + 5|\cos(z)|) + 5|f_2(z)|\right]\epsilon.$$

Comparem els dos errors. De la igualtat trigonomètrica $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, deduïm que $\frac{|\sin(z)|}{|4f_2(z)|} = \frac{1}{2}|\cos\left(\frac{z}{2}\right)|$ i, si anomenem e_i a les fita de l'error absolut en l'avaluació de $f_i(z)$ $i = 1, 2$ tenim que

$$e_2 = e_1 + \left|\frac{5\cos(z)}{4f_2(z)}\right| > e_1.$$

Com que e_1 és més petit que e_2, podem dir que és millor usar la primera fórmula.