Solucions al Laboratori de problemes 2

1 a) La descomposició $A = LU$ no es pot fer si $p = 5$ o $p \neq 5$ i $q = \frac{4}{p-5}$.

En els casos que existeix, tenim

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 0 & -\frac{2}{p-5} & 1 & \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{p-5} & \frac{92-18p}{q(p-5)-4} & 1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & p-5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & q - \frac{4}{p-5} & \frac{-18p+92}{p-5} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix},$$

$u_{44} = \frac{(94p-475)[q(p-5)-4]-5(92-18p)^2}{5[q(p-5)-4](p-5)}$.

La descomposició de Cholesky existeix si $p > 5$, $q > \frac{4}{p-5}$ i $u_{44} > 0$.

b) La matriu R, triangular inferior, de la descomposició de Cholesky $A = RR^T$ és (amb 4 xifres)

$$R = \begin{pmatrix} 2.236 & & & \\ -2.236 & 1.414 & & \\ 0.0000 & -1.414 & 4.243 & \\ 0.4472 & 0.7071 & -4.007 & 1.498 \end{pmatrix}.$$

La solució del sistema és $x = (1.733, 1.559, 2.126, 2.134)^T$.

2 a) Cal distingir 4 casos:

- $|a| > |b|$ i $|\alpha| \geq |b|$ $(\alpha = \frac{a^2-b^2}{a})$

$$U = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & \frac{a^2-b^2}{a} & b \\ 0 & 0 & \frac{a^3-2ab^2}{a^2-b^2} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{b}{a} & 1 & \\ 0 & \frac{ab}{a^2-b^2} & 1 \end{pmatrix}, \quad P = I.$$

- $|a| > |b|$ i $|\alpha| < |b|$ $(\alpha = \frac{a^2-b^2}{a})$

$$U = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & \frac{2b^2-a^2}{b} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ \frac{b}{a} & \frac{a^2-b^2}{ab} & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Els dos casos amb $|a| < |b|$ són anàlegs.

La factorització es pot fer sempre.

b)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$$