Solució al problema 37

1. Per trobar el polinomi d'interpolació usant el mètode de Newton, cal calcular la taula de diferències dividides:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
-1	-10			
		$\frac{4+10}{1+1} = 7$		
1	4		$\frac{-3.5-7}{2+1} = -3.5$	
		$\frac{0.5-4}{2-1} = -3.5$		$\frac{0+3.5}{2.5+1} = 1$
2	0.5		$\frac{-3.5+3.5}{2.5-1} = 0$	
		$\frac{-1.25-0.5}{2.5-2} = -3.5$		
2.5	-1.25			

Per tant, el polinomi interpolador és

$$p_3(x) = -10 + 7(x+1) - 3.5(x+1)(x-1) + (x+1)(x-1)(x-2)$$

Per trobar el polinomi d'interpolació usant el mètode de Lagrange, cal calcular els polinomis de Lagrange.

$$
\begin{aligned}
p_3(x) \quad = \quad & -10\,\frac{(x-1)(x-2)(x-2.5)}{(-1-1)(-1-2)(-1-2.5)} \\
& +4\,\frac{(x+1)(x-2)(x-2.5)}{(1+1)(1-2)(1-2.5)} \\
& +0.5\,\frac{(x+1)(x-1)(x-2.5)}{(2+1)(2-1)(2-2.5)} \\
& -1.25\,\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(2.5+1)(2.5-1)(2.5-2)}
\end{aligned}
$$

Per tant,

$$
\begin{aligned}
p_3(x) \quad = \quad & \frac{10}{21}(x-1)(x-2)(x-2.5)+\frac{4}{3}(x+1)(x-2)(x-2.5) \\
+ \quad & \frac{-1}{3}(x+1)(x-1)(x-2.5)-\frac{10}{21}(x+1)(x-1)(x-2)
\end{aligned}
$$

2. En afegir un punt, en el mètode de Newton podem usar la taula de diferències agregant el nou punt i calculant les diferències que falten

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m]$
-1	-10				
		7			
1	4		-3.5		
		-3.5		1	
2	0.5		0		$\frac{0.9-1}{5+1} = -\frac{1}{60}$
		3.5		$\frac{3.6-0}{4} = 0.9$	
2.5	-1.25		$\frac{7.3+3.5}{5-2} = 3.6$		
		$\frac{17+1.25}{5-2.5} = 7.3$			
5	17				

El polinomi interpolador és

$$
\begin{aligned}
p_4(x) &= p_3(x) - \frac{1}{60}(x+1)(x-1)(x-2)(x-2.5) \\
&= -10 + 7(x+1) - 3.5(x+1)(x-1) + (x+1)(x-1)(x-2) \\
&\quad - \frac{1}{60}(x+1)(x-1)(x-2)(x-2.5)
\end{aligned}
$$

Per trobar el polinomi d'interpolació usant el mètode de Lagrange, cal calcular els nous polinomis de Lagrange.

$$
\begin{aligned}
p_4(x) \quad = \quad & -10\,\frac{(x-1)(x-2)(x-2.5)(x-5)}{(-1-1)(-1-2)(-1-2.5)(-1-5)} \\
& +4\,\frac{(x+1)(x-2)(x-2.5)(x-5)}{(1+1)(1-2)(1-2.5)(1-5)} \\
& +0.5\,\frac{(x+1)(x-1)(x-2.5)(x-5)}{(2+1)(2-1)(2-2.5)(2-5)} \\
& -1.2\,\frac{(x+1)(x-1)(x-2)(x-5)}{(2.5+1)(2.5-1)(2.5-2)(2.5-5)} \\
& +17\,\frac{(x+1)(x-1)(x-2)(x-2.5)}{(5+1)(5-1)(5-2)(5-2.5)}
\end{aligned}
$$

El polimoni és:

$$\begin{aligned} p_4(x) &= -\frac{5}{63}(x-1)(x-2)(x-2.5)(x-5) \\ &\quad -\frac{1}{3}(x+1)(x-2)(x-2.5)(x-5) \\ &\quad +\frac{1}{9}(x+1)(x-1)(x-2.5)(x-5) \\ &\quad +\frac{4}{21}(x+1)(x-1)(x-2)(x-5) \\ &\quad +\frac{17}{180}(x+1)(x-1)(x-2)(x-2.5) \end{aligned}$$

3. Afegim el nou punt a la taula de diferències inicial i calculem les diferències que falten

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_j]$	$f[x_i,x_j,x_k]$	$f[x_i,x_j,x_k,x_l]$	$f[x_i,x_j,x_k,x_l,x_m]$
-1	-10				
		7			
1	4		-3.5		
		-3.5		1	
2	0.5		0		0
		-3.5		$\frac{-1-0}{-1}=1$	
2.5	-1.25		$\frac{-1.5+3.5}{-2}=-1$		
		$\frac{2.5+1.25}{-2.5}=-1.5$			
0	2.5				

Per tant, el polinomi és

$$p_4(x) = p_3(x) + 0(x+1)(x-1)(x-2)(x-2.5) = p_3(x)$$

Això vol dir que p_3 també interpola el nou punt.

UNIVERSITAT DE BARCELONA