MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2015/16, primer semestre.

Examen final del 19 de gener de 2016.

Solució dels problemes 1,4 i 5

1.- [6 punts]

Solució:

(a) Només cal tenir en compte que

$$\frac{x^n}{2x+7} = \frac{1}{2}x^{n-1} - \frac{7}{2}\frac{x^{n-1}}{2x+7}$$

i integrar. Equivalentment, es pot veure que

$$I_n + \frac{7}{2}I_{n-1} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}.$$

El segon resultat es dedueix de que

$$\frac{x^n}{9} \le \frac{x^n}{2x+7} \le \frac{x^n}{7}, \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

(b) En aquest cas tenim que $\overline{I}_0 = I_0 + \epsilon$, on $|\epsilon| \le u = \frac{1}{2}10^{-6}$. Fent el càlcul explícit tenim

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{2x+7}\,dx = \frac{1}{2}\log(9/7) = 0.125657214140453038 84\ldots.$$

Si arrodonim a 6 xifres decimals tenim que $\overline{I}_0 = 0.125657$, amb un error $e_0 = -0.00000021\ldots < -2\cdot 10^{-7}$. Per altra banda, usant la recurrència, podem demostrar que

$$e_n = (-1)^n\left(\frac{7}{2}\right)^n e_0.$$

Per tant, l'error tendeix a infinit quan $n \to \infty$, el que indica que la recurrència és numèricament inestable. A més,

$$\overline{I}_n = I_n + e_n,$$

el que implica que si n és senar llavors $\overline{I}_n$ és positiu, i si n és parell llavors

$$\frac{1}{9n+9} - \left(\frac{7}{2}\right)^n 3\cdot 10^{-7} \le \overline{I}_n \le \frac{1}{7n+7} - \left(\frac{7}{2}\right)^n 2\cdot 10^{-7}.$$

Fent el càlcul, veiem que per $n < 10$ és positiu, i que per $n = 10$ és negatiu.

4.- [6 punts]

Solució:

(a) Usem diferències dividides per a calcular el polinomi interpolador

$$\begin{array}{c|ccc}
x_0 & 12 & & \\
 & & -\frac{9}{h} & \\
x_1 & 3 & & \frac{4}{h^2} \\
 & & -\frac{1}{h} & \\
x_2 & 2 & &
\end{array}$$

Per tant, el nostre candidat a ser p és

$$p(x) = 12 - \frac{9}{h}(x - x_0) + \frac{8}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1).$$

Si avaluem aquest polinomi en els altres punts dona:

$$p(x_3) = 9, \qquad p(x_4) = 24.$$

Per tant, efectivament és el polinomi cercat i $p(x_3) = 8$.

(b) En primer lloc observem que no cal tornar a calcular $p(x)$. Per a calcular el mínim fem $'(x) = 0$. Obtenim que

$$p'(x) = -\frac{9}{h} + \frac{4}{h^2}(2x - x_0 - x_1) = 0.$$

Per tant,

$$\bar{x} = x_0 + \frac{13}{8}h.$$

Finalment, sabem que l'error satisfà:

$$|f(\bar{x}) - p(\bar{x})| \leq \frac{M_3}{6}|(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_2)(\bar{x} - x_4)| = \frac{M_3}{6} \cdot \frac{13}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{19}{8}h^3 = \frac{247}{1024}M_3h^3.$$

5.- [6 punts]

Solució:
(a) Hem d'imposar que

$$\int_{-h}^{h} f(x) = h\left[af(-h) + bf(0) + af(+h)\right] + h^2\left[cf'(-h) - cf'(+h)\right] \ ,$$

per $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Notem que la igualtat és trivialment certa si k és senar, ja que les dues expressions donen zero. Per tant, cal imposar la igualtat per $f(x) = x^{2k}$.

1. $k = 0$:

$$\int_{-h}^{h} dx = 2h = h(2a + b),$$

$$\int_{-h}^{h} x^2\, dx = \frac{2}{3}h^3 = (2a - 4c)h^3.$$

$$\int -h^h x^4\, dx = \frac{2}{5}h^5 = (2a - 8c)h^5.$$

   Per tant, cal resoldre el sistema:

$$\begin{aligned} 2 &= 2a + b \\ \frac{2}{3} &= 2a - 4c \\ \frac{2}{5} &= 2a - 8c \end{aligned}$$

   La solució és: $a = 7/15$, $b = 16/15$, $c = 1/15$. Per altra banda, es pot veure que no hi ha coincidència en el cas que $f(x) = x^6$. Per tant, el grau de precisió és 5.

(b) Tenim que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i+1}-h}^{x_{2i+1}+h} \approx \sum_{i=0}^{n-1} h\left[\frac{7}{15}f(x_{2i}) + \frac{16}{15}f(x_{2i+1}) + \frac{7}{15}f(x_{2i+2})\right] + h^2\left[\frac{1}{15}f'(x_{2i}) - \frac{1}{15}f'(x_{2i+2})\right]$$

$$h\left[\frac{7}{15}f(a) + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{16}{15}f(x_{2i+1}) + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{14}{15}f(x_{2i}) + \frac{7}{15}f(b)\right] + h^2\left[\frac{1}{15}f'(a) - \frac{1}{15}f'(b)\right].$$