Solució al problema 55

1. Busquem els valors màxim i mínim de g en I. Tenim

$$g(0) = \frac{2}{3}, \qquad g(1) = \frac{1}{3}, \qquad g'(x) = \frac{1}{3}(15x^2 - 14x + 1).$$

Els estrems relatius de g en l'interval I : $g'(x) = 0$ sii

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{34}}{15}.$$

Els extrems relatius són $x_1 \approx 0.855$ i $x_2 \approx 0.0779$. Per tant, $x_1, x_2 \in I$ i es verifica

$$g(x_1) \approx 0.28765 \in I, \qquad g(x_2) \approx 0.67926 \in I.$$

De tot això deduïm que $g(I) \subset I$.

2. Busquem el màxim de $|g'(x)|$ a $x \in [0,1]$. Tenim

$$g'(0) = \frac{1}{3}, \qquad g'(1) = \frac{2}{3}, \qquad g''(x) = \frac{1}{3}(30x - 14).$$

Per trobar els extrems relatius:

$$g''(x) = 0 \quad \text{sii} \quad x = \frac{7}{15}$$

i

$$g'\left(\frac{7}{15}\right) = -\frac{34}{45}.$$

Per tant,

$$L = \max\left\{|g'(0)|, |g'(1)|, \left|g'\left(\frac{7}{15}\right)\right|\right\} = \frac{34}{45}.$$

3. Usant els apartats anteriors, g és una contracció en I i per tant existeix una arrel única en I.

4. Usarem que

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$$

amb $L = \dfrac{34}{45}$.

Sabem que $x_0 = \dfrac{1}{2}$, d'on

$$x_1 = g(x_0) = \frac{11}{24} \quad \text{i} \quad |x_1 - x_0| = \frac{1}{24}$$

Per tant, cal imposar que

$$\frac{(34/45)^n}{11/45} \cdot \frac{1}{24} \leq \frac{1}{2} 10^{-6},$$

és a dir

$$\left(\frac{34}{45}\right)^n \leq \frac{11 \cdot 12}{45} \cdot 10^{-6}.$$

Prenent logaritmes

$$n \log_{10}\left(\frac{34}{45}\right) \leq \log_{10}\left(\frac{132}{45}\right) - 6,$$

i obtenim que $n \geq 45.448\ldots$.

Per assegurar la precisió demanada, podem agafar

$$n \geq 46.$$

Nota: També podem usar

$$|x_n - \alpha| \le L^n |x_0 - \alpha|$$

I sabem que

$$|x_0 - \alpha| \le \frac{1}{2}.$$

En aquest cas, imposant que

$$\left(\frac{34}{45}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} 10^{-6},$$

obtenim que

$$n \ge -\frac{6}{\log_{10}(34/45)} \approx 49.3,$$

amb el que agafariem $n \ge 50$, que és una mica pitjor.

5. Tenim que

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

on

$$f(x) = 5x^3 - 7x^2 - 2x + 2, \qquad f'(x) = 15x^2 - 14x - 2.$$

Llavors

$$x_1 = 0.476190\ldots \approx 0.47619, \qquad x_2 \approx 0.47623, \qquad x_3 \approx 0.47623.$$