MÈTODES NUMÈRICS I. Grau de Matemàtiques. Curs 2019-20. Tardor

SOLUCIÓ RESUMIDA DE L'EXAMEN FINAL. 10 de gener de 2020

Problema 1 Si $n=4$, llavors $h=\frac{b-a}{4}$, i $x_k = a+kh,\ k=0,\dots,4$ i anomenem $f_k = f(x_k)$.

a) Calculant les difererències dividides per a les abscisses x_0, x_2 i x_4, obtenim el polinomi interpolador

$$p(x) = f_0 + \frac{f_2-f_0}{2h}(x-x_0) + \frac{f_4-2f_2+f_0}{8h^2}(x-x_0)(x-x_2).$$

Avaluat en x_1, tenim

$$p(x_1) = \frac{-f_4+6f_2+3f_0}{8}$$

Fita de l'error en x_1 :

$$|f(x_1)-p(x_1)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6}|(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_4)| \le \frac{M_3}{2}h^3$$

b) Usant el mètode de Lagrange, hem de calcular els polinomis de Lagrange:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)},\ L_1(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

El polinomi interpolador és $p(x) = f_1L_0(x)+f_2L_1(x)+f_3L_2(x)$.

Tenim

$$\int_a^b p(x)\,dx = f_1\int_a^b L_0(x)\,dx + f_2\int_a^b L_1(x)\,dx + f_3\int_a^b L_2(x)\,dx$$

Cal calcular els pesos $\int_a^b L_i(x)\,dx$ per a $i=0,1,2$.

Fent el canvi de variable $x=a+sh, dx=hds, (x=a, s=0), (x=b, s=4)$ i integrant obtenim

$$\int_a^b L_0(x)\,dx = \frac{8h}{3},\ \int_a^b L_1(x)\,dx = \frac{-4h}{3},\ \int_a^b L_2(x)\,dx = \frac{8h}{3}$$

Per tant, la fórmula obtinguda és

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[8f_1-4f_2+8f_3\right]$$

c) En el nostre cas $[a,b]=[0,1]$, $h=\frac{1}{4}$ i els punts $x_k=kh,\ k=0,\dots,4$. Per tant, $x_1=0.250, x_2=0.5$ i $x_3=0.75$, i l'aproximació

$$\frac{1}{12}(8f(0.250)-4f(0.5)+8f(0.75)) = 0.746530$$

d) Per a Simpson simple, tenim $h=\frac{1}{2}$ i els punts a agafar són $x_0=0, x_2=0.5, x_4=1$

$$\frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_2)+f(x_4)) = 0.747181$$

Per a Simpson amb dos intervals: $h=\frac{1}{4}$

$$S(h) = \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)) = 0.746855$$

Problema 2 a) En primer lloc observem que $f(0) = -1$ i $f(1) = 1.5 - \cos 1 > 0$. Per tant en l'interval $(0,1)$ existeix un zero de f. A més, $f'(x) = x + 1 + \sin(x) \geq x > 0$ si $x > 0$, el que implica que el zero és únic i $I = [0,1]$.

b) Si $x \in I$ llavors $\cos x > 0$ i això implica que la funció està ben definida.

Per altra banda, si $x \in I$ és un punt fix de g llavors $(x+1)^2 = 1 + 2\cos x$. Per tant, $x^2 + 2x = 2\cos x$, amb el que $x = \alpha$.

c) Sigui $x \in I$. Tenim que

$$g'(x) = \frac{-\sin x}{\sqrt{1 + 2\cos x}}.$$

A més $\cos x \geq \cos 1 > 0$. Per tant, $|g'(x)| \leq \frac{\sin 1}{\sqrt{1+2\cos 1}} < 0.584 < 1$. Per tant, pel teorema del valor mitjà, podem agafar $L = 0.584$.

d) Sabem que $x_0 = 1/2$ i que $\alpha \in I$. Per tant, $|x_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$. Per altra banda, $g'(x) < 0$ si $x \in I$, i per tant, $g(I) = [g(1), g(0)] = [-1 + \sqrt{1 + 2\cos 1}, -1 + \sqrt{3}] \subset I$. Així:

$$|x_k - \alpha| \leq |g(x_{k-1}) - g(\alpha)| \leq L|x_{k-1} - \alpha| \leq \cdots \leq L^k|x_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}L^k.$$

Per tant, cal que $\frac{1}{2}L^k < 10^{-30}$. Prenent logaritmes obtenim que $k_0 \geq \frac{-\log 2 - 30\log 10}{\log L} \approx 126.89$ amb el que podem agafar $k_0 = 127$.

e) Cal calcular $h'(\alpha)$. És fàcil veure que $\alpha \in [0.6, 0.7]$ i com que $h'(x) = -\sin x - x$, $h''(x) = -\cos(x) - 1 < 0$ si $x \in I$. Llavors $h'([0.5, 0.7]) = [-\sin 0.7 - 0.7, -\sin 0.6 - 0.6]$, amb el que $|h'(\alpha)| > 1$ i per tant no és convergent.

Problema 3 a) Per la fórmula 1 tenim

$$\text{fl}\ (\det A) = (ad(1+\varepsilon_1) - cb(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_3) = \det A\left(1 + \frac{ad\varepsilon_1 - cb\varepsilon_2}{\det A} + \varepsilon_3 + O(u^2)\right),$$

on $|\varepsilon_i| \leq u$, $i = 1,2,3$. Per tant, a primer ordre tenim que

$$|e_r(\text{fl}\ (\det A))| \leq \left(\frac{|ad| + |cb|}{|\det A|} + 1\right)u = K_1 u.$$

b) Per la fórmula 2

$$\text{fl}\ (\det A) = a\left[d - \frac{c}{a}(1+\varepsilon_1)b(1+\varepsilon_2)\right](1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4) = \det A\left[1 - \frac{cb}{\det A}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right](1+\varepsilon_3+\varepsilon_4+O(u^2)),$$

on $|\varepsilon_i| \leq u$, $i = 1,2,3,4$. Per tant, a primer ordre tenim que

$$|e_r(\text{fl}\ (\det A))| \leq 2\left(\frac{|cb|}{|\det A|} + 1\right)u = K_2 u.$$

c) La primera fórmula serà la millor si $K_1 < K_2$ i la segona serà la millor si $K_2 > K_1$.

d) En aquest cas, $K_1 = 2$, $K_2 = -2bc/\det A + 2 > 2$, i per tant sempre és millor la primera fórmula.

e) Sabem que $|e_a(\bar{a})| \lesssim |\bar{a}|u$, $|e_a(\bar{b})| \lesssim |\bar{b}|u$, $|e_a(\bar{c})| \lesssim |\bar{c}|u$, $|e_a(\bar{d})| \lesssim |\bar{d}|$, on $\bar{a}$, $\bar{b}$ i $\bar{b}$ són els valors aproximats (resp.) de a, b, c i d. Usant la fórmula generalitzada de propagació de l'error tenim que

$$|e_a(\det\bar{A})| \lesssim 2(|\bar{a}| \cdot |\bar{d}| + |\bar{c}| \cdot |\bar{b}|)u.$$

Problema 4 a)

$$M = UD^{-1}U^T = \begin{pmatrix} d_1 + \frac{b_2^2}{d_2} & -b_2 & & & \\ -b_2 & d_2 + \frac{b_3^2}{d_3} & -b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{n-1} + \frac{b_n^2}{d_n} & -b_n \\ & & & -b_n & d_n \end{pmatrix}$$

Igualant terme a terme, obtenim $d_n = a_n,\ d_i + \frac{b_{i+1}^2}{d_{i+1}} = a_i,\ i = n-1, \ldots, 1.$

Per tant,

$$\begin{aligned} d_n &= a_n \\ d_i &= a_i - \frac{b_{i+1}^2}{d_{i+1}},\ \ i = n-1, \ldots, 1 \end{aligned}$$

b) De $UD^{-1}U^T v = e_1$, tenim

$$D^{-1}U^T v = U^{-1} e_1$$

U^{-1} és un matriu triangular superior, per tant aplicada a e_1 és múltiple de e_1, en particular $\frac{1}{d_1} e_1$

c) Per resoldre el sistema $D^{-1}U^T v = \frac{1}{d_1} e_1$, primer resolem el sistema $D^{-1} y = \frac{1}{d_1} e_1$, que té la solució $y = e_1$ i després el sistema $U^T v = e_1$ o el sistema $D^{-1}U^T v = \frac{1}{d_1} e_1$ que és un sistema triangular inferior, i es resol per substitució cap endavant.

S'obté

$$\begin{cases} v_1 &= \frac{1}{d_1} \\ v_i &= \frac{b_i}{d_i} v_{i-1} = 0,\ i = 2, \ldots, n \end{cases}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{d_1} \\ v_i &= \frac{b_2 \cdots b_i}{d_1 \cdots d_i},\ \ i = 2, \ldots, n \end{aligned}$$

d) De $M = UD^{-1}U^T$ tenim que $\det M = \det U \det D^{-1} \det U^T = d_1 \cdots d_n$.

e) En el càlcul dels v_i veiem que a partir del v_k són tots nuls, per tant només cal calcular $v_1 = \frac{1}{d_1}$ i $v_i = \frac{b_i}{d_i} v_{i-1} = 0, i = 2, \ldots, k-1$: $k-2$ productes i $k-1$ divisions.
Cal comptar també les operacions necessàries per a calcular els d_i.