Solució al problema 27

a) Fent eliminació gaussiana (sense pivotatge), obtenim

$$U = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -6 \\ & 1 & 0 & 2 \\ & & 9 & -12 \\ & & & 4 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

b) Agafem $D = diag(u_{ii}) = diag(4, 1, 9, 4)$

Mètodes Numèrics I. UB

Podem escriure

$$A = LU = LDD^{-1}U = LDU'$$

Comprovem que $U' = L^T$:

$$U' = D^{-1}U = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{9} & \\ & & & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ & 1 & 0 & 2 \\ & & 1 & -\frac{4}{3} \\ & & & 1 \end{pmatrix} = L^T$$

Mètodes Numèrics I. UB

Hem vist que la descomposició LDL^T de A és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 1 & & \\ & & 9 & \\ & & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ & 1 & 0 & 2 \\ & & 1 & -\frac{4}{3} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Com que tots els elements de D són positius, existeix la descomposició de Cholesky.
Per trobar-la, definim la matriu

$$D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & & & \\ & \sqrt{1} & & \\ & & \sqrt{9} & \\ & & & \sqrt{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

que té elements reals.

Mètodes Numèrics I. UB

Tenim que $D^{1/2}D^{1/2} = D$ i podem reescriure

$$A = LDL^T = (LD^{1/2})(D^{1/2}L^T) = C^T C$$

La matriu $C = D^{1/2}L^T$ és una matriu triangular superior:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ & 1 & 0 & 2 \\ & & 1 & -\frac{4}{3} \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -3 \\ & 1 & 0 & 2 \\ & & 3 & -4 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

Existeix la descomposició $A = C^T C$ on C triangular superior amb elements diagonals positius.

Per tant, la matriu és definida positiva.

Mètodes Numèrics I. UB