Solució al problema 26

a) Anem a resoldre el sistema

$$Ax = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 14 & 30 \\ -2 & -2 & -3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{r} 17 \\ 58 \\ -2 \end{array}\right).$$

pas a pas, indicant el valor dels multiplicadors. Inicialment tenim:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 9 & 17 \\ 4 & 14 & 30 & 58 \\ -2 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right).$$

Ara calculem $m_{21} = 4$ i $m_{31} = -2$. La nova matriu és

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 9 & 17 \\ 0 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & 6 & 15 & 32 \end{array}\right).$$

Solució del problema 26

A continuació tenim que $m_{12} = -2$ i $m_{32} = -3$. Obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Finalment, $m_{13} = 1$ i $m_{23} = 2$, i la darrera matriu és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

D'aquí obtenim que la solució és $(x_1, x_2, x_3) = (-5, 7, -2/3)$.

b) Escrivim les fórmules quan A és una matriu $n \times n$ i calculem el nombre d'operacions:

Eliminació:

Hi ha n passos que ens porten a una matriu diagonal. Sigui $1 \leq k \leq n$ fixat. Llavors definin per $i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, k+2, \ldots, n$:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},$$

i per $j = k+1, k+2, \ldots, n$:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}, \qquad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik} b_k^{(k-1)}.$$

Resolució del sistema diagonal final:

Per a tot $i = 1, 2, \dots, n$:

$$x_i = \frac{b_i^{(n)}}{a_{ii}^{(n)}}.$$

Operacions:

Divisions: $n(n-1)$ per l'eliminació i n per la resolució. Total: n^2.

Productes per a l'eliminació

Per a cada j entre $k+1$ i n es fa un producte, més un altre pel terme independent. Total: $n-k+1$. Per a cada i entre $1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ es fan $(n-k+1)(n-1)$ productes. Finalment per tot el procés es fan

$$\sum_{k=1}^{n}(n-1)(n+1-k) = (n-1)\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3-n}{2}.$$

El mateix nombre de diferències.