Solució al problema 38

1. Usem diferències dividides per a calcular el polinomi interpolador

$$
\begin{array}{c|ccc}
x_0 & 12 & & \\
 & & -\frac{9}{h} & \\
x_1 & 3 & & \frac{4}{h^2} \\
 & & -\frac{1}{h} & \\
x_2 & 2 & &
\end{array}
$$

Per tant, el nostre candidat a ser p és

$$p(x) = 12 - \frac{9}{h}(x - x_0) + \frac{8}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1).$$

Si avaluem aquest polinomi en els altres punts dona:

$$p(x_3) = 9, \qquad p(x_4) = 24.$$

Per tant, efectivament és el polinomi cercat i $p(x_3) = 9$.

2. En primer lloc observem que no cal tornar a calcular $p(x)$. Per a calcular el mínim fem $p'(x) = 0$.

Obtenim que

$$p'(x) = -\frac{9}{h} + \frac{4}{h^2}(2x - x_0 - x_1) = 0.$$

Per tant,

$$\bar{x} = x_0 + \frac{13}{8}h.$$

Sabem que l'error satisfà:

$$\begin{aligned} |f(\bar{x}) - p(\bar{x})| &\leq \frac{M_3}{6}|(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_2)(\bar{x} - x_4)| \\ &= \frac{M_3}{6} \cdot \frac{13}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{19}{8} h^3 = \frac{247}{1024} M_3 h^3 \end{aligned}$$