# Solució al problema 60

1. Com que el discriminant de $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$ és $-104$, $f'(x)$ té signe constant, i per tant

$$f'(x) > 0.$$

Això implica que $f$ és estrictament monòtona creixent.

A més, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

i per tant, $f(x)$ té una única arrel real.

L'interval demanat és $I = [1, 2]$, ja que $f(1) = -7$ i $f(2) = 16$.

2. D'entrada comprovem que les iteracions $g(x)$ i $h(x)$ siguin consistents amb l'equació $f(x) = 0$ :
   - Si $x = g(x)$, llavors $10x = 20 - 2x^2 - x^3$ i $f(x) = 0$.
   - Si $x = h(x)$ llavors $x(10 + 2x + x^2) = 20$ i $f(x) = 0$.

Seran localment convergents si $|g'(\alpha)| < 1$ i $|h'(\alpha)| < 1$, respectivament, i serà millor la de derivada més petita en mòdul.

<u>Estudi de la iteració $g(x)$ :</u>

$$g(x) = \frac{20 - 2x^2 - x^3}{10}, \quad g'(x) = -\frac{4x + 3x^2}{10}, \quad g''(x) = -\frac{4 + 6x}{10}.$$

Considerem un interval $J = [1.3, 1.4] \subset I$.
Tenim que $f(1.3) = -1.423$ i $f(1.4) = 0.664$. Per tant, $\alpha \in J$.

Per altra banda, $g'(1.3) = -1.027$ i $g'(x)$ és estrictament monòtona decreixent, ja que $g''(x) < 0$, per a tot $x > 0$.

Com que $g'(\alpha) < -1$, $g(x)$ no és localment convergent.

Estudi de la iteració $h(x)$ :

$$h(x) = \frac{20}{10+2x+x^2}, \; h'(x) = -\frac{20(2+2x)}{(10+2x+x^2)^2}, \; h''(x) = \frac{120(x^2+x-2)}{(x^2+2x+10)^3}$$

Observem que $h''(x) > 0$ per a tot $x$ en l'interior de $I$, el que implica que $h'(x)$ és monòtona creixent a $I$.
Per tant, com que

$$h'(1) = -80/13^2 \approx -0.473 \text{ i } h'(2) = -120/18^2 \approx -0.370,$$

podem concloure que $|h'(\alpha)| \leq 0.48 < 1$. Per tant, $h$ és localment convergent.
Com que $h'(x) < 0$, per a tot $x \in I$ i $h(1) = \frac{20}{13} \in I$ i $h(2) = \frac{20}{18} \in I$.
Tenim que $h(I) \subset I$.

La conclusió final és que és millor usar $h$, ja que per a qualsevol condició inicial $x_0 \in I$ tenim que $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

3. Definim l'error

$$e_n = x_n - \alpha, \quad \forall n \geq 0,$$

on $x_0 = 3/2$ i $x_{n+1} = h(x_n)$, per a tot $n \geq 0$.

Llavors,

$$e_n := x_n - \alpha = h(x_{n-1}) - h(\alpha) = h'(\xi_{n-1})(x_{n-1} - \alpha) = h'(\xi_{n-1})e_{n-1},$$

on $\xi_{n-1} \in \langle x_{n-1}, \alpha \rangle \subset I$.

Si $L = 0.48$, tenim $|e_n| \leq L|e_{n-1}|$, i per tant

$$|e_n| \leq L^n |e_0|.$$

Com que $|e_0| = |x_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$, i volem que $|e_n| \leq \frac{1}{2}10^{-20}$, n'hi ha prou en demanar que

$$L^n \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} 10^{-20},$$

o el que és el mateix

$$n \geq -\frac{20}{\log_{10} L} \approx 62.74.$$

Per tant, podem agafar $n \geq 63$.

**Nota:** També ho podriem haver fet usant

$$|e_n| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|.$$