② $y = \dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{1-x}{1+x}$

(a) $|x| \ll 1 \Rightarrow 1+2x \approx 1,\ 1+x \approx 1,\ 1-x \approx 1 \Rightarrow \underbrace{y \approx 1-1=0}$

es produeix una cancel·lació:
molt desaconsellable numèricament

Repàs teoria:

Siguin $\begin{cases} \bar{a} = a(1+\delta_1) \\ \bar{b} = b(1+\delta_2) \end{cases}$ $|\delta_1|, |\delta_2| \le \varepsilon \ll 1$ (δ_1, δ_2: errors relatius en $\bar{a}$ i $\bar{b}$)

Llavors, $\bar{a} - \bar{b} = a + a\delta_1 - b - b\delta_2 = (a-b) + \underbrace{(a\delta_1 - b\delta_2)}_{\text{error absolut en el resultat}} = (a-b)\left[1 + \underbrace{\frac{a\delta_1 - b\delta_2}{a-b}}_{\text{error relatiu en el resultat}}\right]$

Per tant, $|\text{error relatiu}| \le \dfrac{(|a|+|b|)\varepsilon}{|a-b|}$ (fita no millorable)

I, quan $a \approx b$, el denominador és ≈ 0 i, per tant, la fita de l'error relatiu en el resultat és molt més gran que la fita de l'error relatiu en les dades (ε).

Alternativa: operem

$$\frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x} = \frac{(1+x)-(1-x)(1+2x)}{(1+2x)(1+x)} = \frac{(\cancel{1}+\cancel{x})-\cancel{1}-\cancel{2x}+\cancel{x}+2x^2}{(1+2x)(1+x)} = \boxed{\frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}} \equiv z$$

Aquí no hi ha cancel·lacions

(b) Sigui $x = 1.23456 \times 10^{-4}$

Anem fent operacions i arrodonint a 6 dígits

$$\left.\begin{aligned} 1-x &= 0.999876|544 \approx 0.999877 \\ 1+x &= 1.00012|3456 \approx 1.00012 \\ 2x &= 2.46912 \times 10^{-4} \\ 1+2x &= 1{,}00024|6912 \approx 1{,}00025 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{1}{1+2x} &= 0.999750|0625\ldots \approx 0.999750 \\ \frac{1-x}{1+x} &= 0.999757|0292\ldots \approx 0.999757 \end{aligned}$$

Restant: $y = -0.000007 = \boxed{-7 \times 10^{-6}}$

$\uparrow$ només 1 dígit
(a més, dolent, comparant amb (*))

De l'altra manera:

$x^2 = 1.52413|839\ldots \times 10^{-8} \approx 1.52414 \times 10^{-8}$

$2x^2 = 3.04828 \times 10^{-8}$

$\dfrac{2x^2}{1+2x} = 3.04751|812\ldots \times 10^{-8} \approx 3.04752 \times 10^{-8}$

$z = 3.047154341\ldots \times 10^{-8} \approx \boxed{3.04715 \times 10^{-8}}$ (tots els dígits són correctes)

Nota. Si es treballa amb més decimals, dóna $3.0471481\ldots \times 10^{-8}$ (*)

③

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & & \vdots \\ & & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$a_{i+1,i} \neq 0 \quad \forall i = 1 \div n-1$

(a) Donat x_n:

De l'última equació $\quad x_{n-1} = \dfrac{b_n - a_{nn}x_n}{a_{n,n-1}}$

$\vdots$

De la 2a equació $\quad x_1 = \dfrac{b_2 - \sum_{j=2}^{n} a_{2j}x_j}{a_{21}}$

Fórmula general:

$$\boxed{\forall i = n, n-1, \ldots, 2 \qquad x_i = \frac{b_{i+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i+1,j}x_j}{a_{i+1,i}}}$$

$(/)$: $n-1$

$\left.\begin{matrix}(*)\\(-)\end{matrix}\right\}\ 1+2+\ldots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

(b) $\quad f(x_n) = (b - Ax)_1 = b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j$

Mirant les fórmules de l'apartat (a): $\quad x_{n-1}$ és funció afí de x_n

i, recurrentment, $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_2, x_1$ també

Per tant $f(x_n)$ és una funció afí. Sigui $f(x_n) = \alpha + \beta x_n$

(c)

$$\left.\begin{matrix} f(1) = \alpha + \beta \\ f(2) = \alpha + 2\beta \end{matrix}\right\} \iff \boxed{\begin{matrix} \beta = f(2) - f(1) \\ \alpha = 2f(1) - f(2) \end{matrix}}$$

La component x_n de la solució de $Ax=b$ ha de verificar $f(x_n) = 0 \iff \alpha + \beta x_n = 0$

$$\iff x_n = \frac{-\alpha}{\beta} \iff \boxed{x_n = \frac{f(2) - 2f(1)}{f(2) - f(1)}}$$

(d)

Avaluació de $f(1)$: $\begin{cases} \text{càlcul de } x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1 \text{ fet a (a)}: & (n-1)\ (/) \text{ i } \frac{n(n-1)}{2}\ (*) \text{ i } (-) \\ \text{avaluació del residu } f(1)\ ((b)): & n\ (*) \text{ i } (-) \end{cases}$

Avaluació de $f(2)$: les mateixes

Càlcul de x_n: $1(*)$, $2(-)$ i $1(/)$

Càlcul definitiu de $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$ (torna a ser (a)): $(n-1)(/)$ i $\frac{n(n-1)}{2}(*)$ i $(-)$

<u>Total</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} (/) &: 3(n-1) + 1 \\ (*) &: 3\frac{n(n-1)}{2} + 1 \\ (-) &: 3\frac{n(n-1)}{2} + 2 \end{aligned}}$$

(3) (contin.)

Si fem eliminació gaussiana + sist. triangular quan la matriu inicial és Hessenberg:

Eliminació:

$\forall k = 1, 2, \rightarrow n-1$
  $i = k+1$ (només cal eliminar 1 fila)
  $m_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$
  $\forall j = k+1, k+2, \rightarrow n, n+1$ (n+1 correspon al terme independent)
    $a_{ij} = a_{ij} - m_{ik} a_{kj}$

$(/) : n-1$

$$\left.\begin{matrix}(*)\\(-)\end{matrix}\right\} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n+1} 1 = \sum_{k=1}^{n-1} (n+1-k) = (n) + (n-1) + \dots + 2 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

Resolució sistema triangular superior

$(/) : n$

$$\left.\begin{matrix}(*)\\(-)\end{matrix}\right\} : \frac{n(n-1)}{2}$$

Total: $(/) : \approx 2n \qquad < 3n$

$$\left.\begin{matrix}(*)\\(-)\end{matrix}\right\} : \approx n^2 + O(n) \qquad < \frac{3}{2} n^2$$

$\boxed{\text{És més barat Gauss}}$

⑥ $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$

ⓐ $f'(x) = 3x^2+4x+10$; $f'(x)=0 \iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-120}}{6} \notin \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)$ de signe clau $\Rightarrow f'(x)>0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(0)=10>0$

Per tant, $f(x)$ és estrict. monòtona creixent

A més, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{f(x) \text{ té una única arrel real}}$

Calculem:

$f(0) = -20 < 0$

$f(1) = -7 < 0$

$f(2) = +16 > 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha \in I \equiv [1,2]}$

ⓑ D'entrada, comprovem que les iteracions $g(x)$ i $h(x)$ siguin "consistents" amb l'equació $f(x)=0$

* Si $x=g(x)$, llavors $10x = 20-2x^2-x^3$ i $f(x)=0$ o.k!
* Si $x=h(x)$, llavors $x(10+2x+x^2)=20$ i $f(x)=0$ o.k!

Seran "localment" convergents si $|g'(\alpha)|<1$ i $|h'(\alpha)|<1$, respectivament.

I serà "millor" la de derivada més petita en mòdul

Estudi de la iteració $g(x)$

$g(x) = \frac{20-2x^2-x^3}{10}$; $g'(x) = \frac{-4x-3x^2}{10}$; $g''(x) = \frac{-4-6x}{10}$

$g(1) = 1.7 \in I$

$g(2) = 0.4 \notin I$

Per tant, $g(I) \not\subset I$. Això ja és un inconvenient, però potser podem trobar $J \subset I$ | $\alpha \in J$ i $g(J) \subset J$

A més, $g''(x)<0 \ \forall x \in I \Rightarrow g'(x)$ estrict. monòt. decreixent a I

$g'(1) = -0.7$

$g'(2) = -2 < -1$

$\Rightarrow$ no podem assegurar $|g'(\alpha)|<1$

Busquem interval més petit.

$f(1) = -7 < 0$

$f(1.1) = -5.249 < 0$

$f(1.2) = -3.392 < 0$

$f(1.3) = -1.423 < 0$

$f(1.4) = +0.664 > 0$

$\Rightarrow \alpha \in J \equiv [1.3, 1.4] \subset I$

i $g'(1.3) = -1.027$

i $g'(x)$ estrict. monòt. decreixent

$\Rightarrow g'(\alpha) < -1 \Rightarrow$ $\boxed{g(x) \text{ no localment convergent}}$

Estudi de la iteració $h(x)$

$h(x) = \frac{20}{10+2x+x^2}$; $h'(x) = \frac{-20(2+2x)}{(10+2x+x^2)^2}$; $h''(x) = \dots = \frac{120(x^2+x-2)}{(x^2+2x+10)^3}$

Tant el numerador com el denominador de $h''(x)$ són $>0 \ \forall x \in I$ (obert)

Per tant, $h''(x)>0 \ \forall x \in I \Rightarrow h'(x)$ estrict. monòtona creixent a I

$h'(1) = -80/13^2 \approx -0.473$

$h'(2) = -120/18^2 = -0.3\overline{70}$

$\Rightarrow \boxed{|h'(\alpha)| \leq 0.48 \equiv L < 1}$

$\boxed{\text{i } h(x) \text{ SÍ és localment convergent}}$

A més, mirem si $h(I) \subset I$.

$h'(x) < 0 \ \forall x \in I \Rightarrow h(x)$ estrict. monòtona decreixent a I

$h(1) = \frac{20}{13} \in I$

$h(2) = \frac{20}{18} \in I$

$\Rightarrow h(I) \subset I$

$\boxed{\text{És millor usar } h(x)}$

Per tant $\forall x_0 \in I$, la successió $(x_n)_{n\geq 0}$ generada per $x_n = h(x_{n-1}) \ \forall n \geq 1$ és convergent a α.

(6) (contin.)

(c) Definim els errors $e_n = x_n - \alpha$ $\forall n \geq 0$, on $\begin{cases} x_0 = 1.5 & \text{(punt mig de } I) \\ x_n = h(x_{n-1}) & \forall n \geq 1 \end{cases}$

Llavors,

$e_n \equiv x_n - \alpha = h(x_{n-1}) - h(\alpha) = h'(\xi_{n-1})(x_{n-1} - \alpha) = h'(\xi_{n-1})\, e_{n-1}$, on $\xi_{n-1} \in \text{Int}\langle x_{n-1}, \alpha \rangle \subset I$

Per tant, $|e_n| = |h'(\xi_{n-1})|\,|e_{n-1}| \leq L \cdot |e_{n-1}|$ on $\boxed{L \equiv 0.48}$

Iterant això s'obté $|e_n| \leq L^n |e_0|$ i sabem $|e_0| = |x_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$

$\begin{cases} \alpha \in [1,2] \\ x_0 = 1.5 \end{cases}$

Volem $|e_n| \leq \frac{1}{2} 10^{-20}$

És suficient imposar $L^n \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} 10^{-20}$ on $L = 0.48$

$\Leftrightarrow n (\log_{10} L) \leq -20$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{-20}{\log_{10} L} \approx \dfrac{-20}{-0.318\ldots} \approx 62.74 \Rightarrow \boxed{n \geq 63}$ és suficient.

$\log_{10} L < 0$

(Com que és tracta amb fites, probablement, a la realitat, calguin algunes iteracions menys)