Solució al problema 39 I

(a) Donat $z \in [x_i, x_{i+1}]$ sabem que

$$|f(z) - p_1(z)| \le \frac{h^2}{8} \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f''(x)|,$$

on p_1 és el polinomi d'iterpolació. Per altra banda, $f''(x) = -1/x^2$, el que implica que

$$|f(z) - p_1(z)| \le \frac{h^2}{8} = \frac{1}{8n^2}.$$

Imposant que $1/(8n^2) \le \frac{1}{2}10^{-8}$, obtenim que $n \ge 10^4/2 = 5000$.

(b) En aquest cas, sigui $p_3(x)$ el polinomi interpolador. Llavors

$$f(z) - p_3(z) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}(z - x_i)^2(z - x_{i+1})^2, \qquad \eta \in [1, 2].$$

Com que

$$|(z - x_i)^2(z - x_{i+1})^2| \leq \frac{h^4}{16}, \qquad f^{(4)}(x) = -6/x^4,$$

tenim que

$$|f(z) - p_3(z)| \leq \frac{h^4}{64} = \frac{1}{64n^4}.$$

Si imposem que $1/(64n^4) \leq \frac{1}{2}10^{-8}$, resulta que

$$n \geq \frac{1}{\sqrt[4]{32}}10^2 \approx 42.05.$$

Per tant, és suficient agafar $n = 43$.