①

(a) $\boxed{(\sqrt{3}-1)^4} = \left[(\sqrt{3}-1)^2\right]^2 = \boxed{(4-2\sqrt{3})^2} = \boxed{28-16\sqrt{3}}$

$\qquad \shortparallel$

$\boxed{\left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)^4} = \left(\frac{4}{4+2\sqrt{3}}\right)^2 = \boxed{\left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^2} = \boxed{\frac{4}{7+4\sqrt{3}}}$

O sigui, les 4 expressions donades són equivalents i, a més, n'he trobat unes altres dues

Nota. Hi ha moltes altres possibles expressions equivalents. El que és important és que, de cara a la propagació de l'error de l'apartat (b), siguin "numèricament" diferents respecte a aproximacions en $\sqrt{3}$. Per exemple:

* $(\sqrt{3}-1)^4 = (\sqrt{3}-1)^3(\sqrt{3}-1)\,\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2} = (\sqrt{3}-1)^3\cdot\frac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} = \underbrace{\frac{(\sqrt{3}-1)^3(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+2)}}$

aquesta expressió és "fonamentalment" diferent de les 4 donades, respecte a fer canvis en $\sqrt{3}$.

* $(\sqrt{3}-1)^4 = \underbrace{\frac{1}{16}(2\sqrt{3}-2)^4}$

aquesta extressió no és "fonamentalment" diferent de la de partida, respecte a canvis en $\sqrt{3}$

(b) S'aplica propagació de l'error en una variable: $y=f(x) \Rightarrow |\Delta y| \lesssim |f'(x)||\Delta x|$

La dada x és una aproximació de $\sqrt{3}$.

Tenim 6 funcions diferents. Per a cadascuna calculem aproximadament $|f'(x)|$ i el valor més petit correspon a la millor expressió (numèricament parlant, respecte propagació de l'error)

		En $\alpha=1{,}7\approx\sqrt{3}$
$f_1(x)=(x-1)^4$	$f_1'(x)=4(x-1)^3$	$f_1'(\alpha)=1.372$
$f_2(x)=(4-2x)^2=4(2-x)^2$	$f_2'(x)=-8(2-x)$	$f_2'(\alpha)=-2.4$
$f_3(x)=\left(\frac{2}{x+1}\right)^4=16(x+1)^{-4}$	$f_3'(x)=-64(x+1)^{-5}$	$f_3'(\alpha)=-0.446$
$f_4(x)=\left(\frac{2}{2+x}\right)^2=4(2+x)^{-2}$	$f_4'(x)=-8(2+x)^{-3}$	$f_4'(\alpha)=-0.158$
$f_5(x)=28-16x$	$f_5'(x)=-16$	$f_5'(\alpha)=-16$
$f_6(x)=\frac{4}{7+4x}=4(7+4x)^{-1}$	$f_6'(x)=-16(7+4x)^{-2}$	$f_6'(\alpha)=-0.084$

Es poden usar aproximacions millors de $\sqrt{3}$ i llavors els resultats de l'última columna seran diferents, però la millor funció és sempre $f_6(x)=\frac{4}{7+4x}$

Nota. De les 4 que es donen a l'enunciat, la millor és la quarta $f_4(x)=\frac{4}{(2+x)^2}$

② $a,b,c,d>0$

(a) $E = ab+cd$

$$fl(E) = [ab(1+\varepsilon_1) + cd(1+\varepsilon_2)](1+\varepsilon_3) = \qquad |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \leq u << 1$$

$$= [ab + ab\varepsilon_1 + cd + cd\varepsilon_2](1+\varepsilon_3) =$$

$$= (ab+cd) + (ab+cd)\varepsilon_3 + ab\varepsilon_1 + cd\varepsilon_2 + O(u^2) =$$

$$= (ab+cd)\Big[1 + \underbrace{\varepsilon_3 + \frac{ab}{ab+cd}\varepsilon_1 + \frac{cd}{ab+cd}\varepsilon_2}_{\text{error relatiu, a 1r ordre: } e_r} + O(u^2)\Big]$$

$$\Rightarrow |e_r| \underset{\substack{\uparrow \\ a,b,c,d>0 \\ \Downarrow \\ ab+cd>0}}{\leq} \left(1 + \frac{ab}{ab+cd} + \frac{cd}{ab+cd}\right) u = \boxed{2u}$$

(b) $E = ab - cd$

Actuant com a l'apartat (a):

$$fl(E) = [ab(1+\varepsilon_1) - cd(1+\varepsilon_2)](1+\varepsilon_3) =$$

$$= [ab - cd + ab\varepsilon_1 - cd\varepsilon_2](1+\varepsilon_3) =$$

$$= (ab-cd) + (ab-cd)\varepsilon_3 + ab\varepsilon_1 - cd\varepsilon_2 + O(u^2) =$$

$$= (ab-cd)\Big[1 + \underbrace{\varepsilon_3 + \frac{ab}{ab-cd}\varepsilon_1 + \frac{-cd}{ab-cd}\varepsilon_2}_{\text{error relatiu, a 1r ordre: } e_r} + O(u^2)\Big]$$

Però ara, com que $ab-cd$ pot tenir qualsevol signe,

$$|e_r| \leq \left[1 + \frac{|ab|+|cd|}{|ab-cd|}\right] u = \left[1 + \underbrace{\frac{ab+cd}{|ab-cd|}}_{\substack{\uparrow \\ \text{i això pot ser arbitràriament gran}}}\right] u$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{no es pot trobar una fita independent de } a,b,c,d}$

3

(a) Les fórmules són:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall k = 1,2,\ldots,n-1 \\ \quad \left[\begin{array}{l} \forall i = k+1, k+2, \ldots, n \\ \quad m = a_{ik}/a_{kk} \\ \quad \left[\begin{array}{l} \forall j = k+1, k+2, \ldots, n \\ \quad a_{ij} \Leftarrow a_{ij} - m \cdot a_{kj} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}}$$

Comentaris:

- Cal usar 3 índexs. Aquí: k, i, j
- Per a cada pas k, l'objectiu és posar 0's en les posicions de sota de la diagonal de la columna k
- i indica una fila, j indica una columna
- no hem escrit les operacions que sabem que donen 0: $\forall k = 1 \div n-1 \quad \forall i = k+1 \div n \quad a_{ik} \Leftarrow 0$
- Per a poder-se portar a terme, cal $a_{kk} \neq 0 \ \forall k$. (abans de fer el quocient)

(b) Cas tridiagonal

$$\begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 & \cdots \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Observem:

- $\forall k = 1 \div n-1$, només cal transformar la fila $k+1$ (restant-li un múltiple de la fila k)
  - l'element $a_{k+1,k}$ passarà a ser 0
  - l'element $a_{k+1,k+1}$ es canviarà
  - l'element $a_{k+1,k+2}$ <u>no</u> canviarà (se li resta un múltiple de 0)

Així doncs, les fórmules són:

$$\boxed{\forall k = 1,2,\ldots,n-1 \qquad a_{k+1,k+1} \Leftarrow a_{k+1,k+1} - \frac{a_{k+1,k}}{a_{k,k}} \cdot a_{k,k+1}}$$

Operacions: $\left.\begin{array}{l} 1 \ * \\ 1 \ / \\ 1 \ - \end{array}\right\} \ \forall k = 1,2,\ldots,n-1 \quad \Rightarrow \quad$ Total: $\boxed{3(n-1)}$

(c) $d_1 = |2| = 2$

$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot d_2 - d_1$

En general, si considerem $d_k = \det A_k$ i desenvolupem per Laplace, obtenim: $\boxed{d_k = 2d_{k-1} - d_{k-2}} \quad \forall k \geq 3$

Demostrem que $\boxed{d_k = k+1 \ \text{ per inducció.}}$

- Ja ho hem vist per a $k=1$ i $k=2$
- Suposant-lo cert fins a $k-1$:

$d_k = 2d_{k-1} - d_{k-2} = 2(k-1+1) - (k-2+1) = 2k - k + 1 = k+1$ c.v.d

(d) Anem guardant els multiplicadors en la mateixa matriu. En cada pas, només canvien 2 elements $\left\{\begin{array}{l} \text{un es fa 0, i en el seu lloc guardem el multiplicador} \\ \text{l'altre és a la diagonal} \end{array}\right.$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{m = 1/2 \\ a_{22} = 2 - \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}}]{\text{pas } 1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{m = \frac{1}{3/2} = 2/3 \\ a_{33} = 2 - \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{4}{3}}]{\text{pas } 2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \\ & 2/3 & 4/3 & 1 \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \longrightarrow \text{etc}$$

Al final, $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 & 1 \\ & 2/3 & 1 \\ & & 3/4 & 1 \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \frac{n-1}{n} & 1 \end{pmatrix}$; $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 3/2 & 1 \\ & & 4/3 & 1 \\ & & & 5/4 & 1 \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & n+1/n \end{pmatrix}$; $\boxed{l_{n,n-1} = \frac{n-1}{n}}$ $\boxed{u_{n,n} = \frac{n+1}{n}}$

(e) $\|A\|_\infty = \max\{3,4\} = \boxed{4}$; $\|L\|_\infty = \max\left\{1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{2}{3}, \ldots, 1+\frac{n-1}{n}\right\} = \boxed{1+\frac{n-1}{n}}$, $\|U\|_\infty = \max\left\{2+1, \frac{3}{2}+1, \ldots, \frac{n}{n-1}+1, \frac{n}{}\ldots\right.$ $= \boxed{3}$

$\|L\|_\infty \|U\|_\infty = \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)3 = \frac{6n-3}{n} \geq 5 > 4 = \|A\|_\infty$.

④

Polinomi interpolador de (x_i, f_i) $i=0,1,\dots,n$. Expressió de Lagrange: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot L_i(x)$

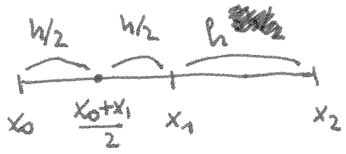
on $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$

En el nostre cas:

$$p(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$
$$q(x) = (f_0+\varepsilon) L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$

Per tant, $q(x) - p(x) = \varepsilon \cdot L_0(x)$. A més, $L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

Observem



$$\Rightarrow L_0\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = \frac{(-h/2)(-3h/2)}{(-h)(-2h)} = \frac{3}{8}$$

Per tant, $\boxed{\left| q\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) - p\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) \right| = \frac{3}{8} |\varepsilon|}$

5

(a) El polinomi interpolador d'Hermite de $f(x)$ en el punt $x_{i+1/2}$ és

$$p_1(x) = f(x_{i+1/2}) + f'(x_{i+1/2})\,(x - x_{i+1/2}). \qquad (\equiv \text{Taylor de 1r. ordre})$$

Per tant, $$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_1(x) = \left[f(x_{i+1/2})\,x + f'(x_{i+1/2})\,\frac{(x-x_{i+1/2})^2}{2}\right]_{x_i}^{x_{i+1}} = f(x_{i+1/2})\cdot h + f'(x_{i+1/2})\cdot \underbrace{\left[\frac{(h/2)^2}{2} - \frac{(h/2)^2}{2}\right]}_{=0}$$

O sigui, $$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx h\cdot f(x_{i+1/2})} \qquad (\text{per tant, } \boxed{A=1} \text{ i } \boxed{B=0})$$

Nota: Hi ha maneres de comprovar el resultat. Per ex. integrant $f(x)\equiv 1$ i $f(x)=x$ la fórmula ha de ser exacta.

(b)
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - h f(x_{i+1/2}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x)-p_1(x)]\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f''(\xi(x))}{2}\cdot \underbrace{(x-x_{i+1/2})^2}_{\geq 0} =$$

expressió de l'error en la interpolació polinomial

T.V.M. integral, $f\in C^2$ i $(x-x_{i+1/2})^2 \geq 0\ \forall x$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_{i+1/2})^2 dx = \frac{1}{2} f''(\xi_i)\left[\frac{(x-x_{i+1/2})^3}{3}\right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{2} f''(\xi_i)\cdot \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3}{3} =$$

(per algun $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$)

$x_{i+1}-x_i = h$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi_i)\,\frac{2\cdot h^3/8}{3} = \boxed{\frac{1}{24} f''(\xi_i)\cdot h^3}$$

(c)
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \underset{(a),(b)}{=} \sum_{i=0}^{n-1}\left[h f(x_{i+1/2}) + \frac{1}{24} f''(\xi_i)\cdot h^3\right] =$$

$$= \boxed{h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2})} + \frac{h^3}{24}\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)}_{=\, n\cdot f''(\xi)}$$

$f\in C^2$

$n\cdot f''(\xi)$ (per algun $\xi\in[a,b]$)

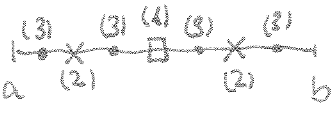
Fórmula composta

$(nh = b-a)$ $$= \boxed{\frac{(b-a)}{24} h^2 f''(\xi)}$$

Expressió de l'error

L'expressió de l'error és molt semblant a trapezis (de fet, és "millor": $\frac{1}{24}$ en lloc de $\frac{1}{12}$)

El desavantatge respecte trapezis és que, quan passem de n a $2n$, els valors calculats $f(x_{i+1/2})$ no es poden aprofitar: els "nous" punts intermitjos no inclouen els "antics" punts intermitjos.



⑥ Comentari:

$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) \neq 0$

Definim $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. En principi, mal definida en α: $g(\alpha) = \dfrac{0}{0}$ indeterminat

Però $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{f'(x)} \underset{\text{l'Hôpital}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{f''(x)} = \dfrac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)} = 0$. De manera que és "natural" definir $\boxed{g(\alpha) = 0}$

Respecte $g'(x)$, es pot fer una cosa anàloga.

$$g'(x) = \frac{f'(x)^2 - f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2} = 1 - \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$$

En $x = \alpha$: $g'(\alpha) = 1 - \dfrac{0}{0}$ indeterminat.

$$\lim_{x\to\alpha} g'(x) = 1 - \lim \frac{f\cdot f''}{(f')^2} \underset{\text{l'Hop.}}{\overset{\uparrow}{=}} 1 - \lim \frac{f' f'' + f f'''}{2(f')(f'')} = 1 - \frac{1}{2} - \lim \frac{f f'''}{2 f' f''} \underset{\text{l'Hôp.}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2} - \underbrace{\lim \frac{f' f''' + f f^{iv}}{2(f'')^2 + 2 f' f'''}}_{=0} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \boxed{g'(\alpha) = \frac{1}{2}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha$ és una arrel simple de g

(a) NR: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{g(x_k)}{g'(x_k)}$

$g = \dfrac{f}{f'}$; $g' = 1 - \dfrac{f\cdot f''}{(f')^2}$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f/f'}{1 - f\cdot f''/(f')^2} = x_k - \frac{f\cdot f'}{(f')^2 - f\cdot f''}$$

Efectivament, $\boxed{x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)\cdot f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k) f''(x_k)}}$

(b) Se sap: si apliquem NR a $g(x)$ i trobem $\alpha \mid g(\alpha) = 0$, $g'(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ ordre ≥ 2

Si, a més, $g''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ ordre 2 i coef. asimp. $\dfrac{1}{2}\dfrac{g''(\alpha)}{g'(\alpha)}$

Pel comentari del començament $\Rightarrow$ ordre ≥ 2.

Es pot calcular de manera semblant $g''(\alpha)$ i veure que és $\neq 0$, i deduiríem que l'ordre és 2.

Però ho fem d'una altra manera, usant desenvolup. de Taylor.

$$\left.\begin{aligned} f(x_k) &= \tfrac{1}{2} f''(\alpha) e_k^2 + \tfrac{1}{6} f'''(\xi_k) e_k^3 \\ f'(x_k) &= f''(\alpha) e_k + \tfrac{1}{2} f'''(\eta_k) e_k^2 \\ f''(x_k) &= f''(\alpha) + f'''(\varepsilon_k) e_k \end{aligned}\right\} \text{ on } e_k = x_k - \alpha.$$

Substituïm això a la iteració (a).

[Nota. No posem els punts $x_k, \xi_k, \eta_k, \varepsilon_k$ per a simplificar la notació. Quan fem $k\to\infty$, tots tendeixen a α].

$$e_{k+1} = e_k - \frac{f\cdot f'}{(f')^2 - f f''} = e_k - \frac{\frac{1}{2}(f'')^2 e_k^3 + \overbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)}^{5/12} f'' f''' + O_5}{(f'')^2 e_k^2 + (f'' f''') e_k^3 + O_4 - \frac{1}{2}(f'')^2 e_k^2 - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)}_{2/3} f'' f''' e_k^3 + O_4} =$$

$$= \frac{\cancel{\left[(f'')^2 - \frac{1}{2}(f'')^2 - \frac{1}{2}(f'')^2\right]} e_k^3 + \left[f'' f''' - \frac{2}{3} f'' f''' - \frac{5}{12} f'' f'''\right] e_k^4 + O_5}{\frac{1}{2}(f'')^2 e_k^2 + O_3}$$

$$\Rightarrow \frac{e_{k+1}}{e_k^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\left(1 - \frac{2}{3} - \frac{5}{12}\right)}{1/2} \frac{f'''(\alpha)}{(f''(\alpha))} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{ordre 2 i coef. asimpt. } -\frac{1}{6}\frac{f'''(\alpha)}{f''(\alpha)}}$$

(c) És fàcil comprovar:

NR a $f \Rightarrow x_{k+1} = x_k \dfrac{1+2x_k}{2+3x_k}$. Per tant $1 \mapsto \boxed{\frac{3}{5}} \mapsto \boxed{33/95}$

NR a $g = f/f' \Rightarrow x_{k+1} = -x_k^2/(2+4x_k+3x_k^2)$. Per tant $1 \mapsto \boxed{-1/9} \mapsto \boxed{-1/129}$