No sé si les sols. están DE :)

$f_1 = 0.02958$ $f_2 = 0.02944$ $f_3 = 0.03$

$f_4 = 0.02944$

MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2018/19, primer semestre.
Examen de reavaluació: 29 de gener de 2019.

1.- [2 punts] Les 4 expressions següents són matemàticament equivalents:

1.25

$$R = \left(3-\sqrt{8}\right)^2 = \frac{1}{\left(3+\sqrt{8}\right)^2} = \left(17-6\sqrt{8}\right) = \underbrace{\frac{1}{17+6\sqrt{8}}}_{\text{millor}}.$$

(a) Calculeu els 4 resultats aproximats que s'obtenen quan en fan totes les operacions tal com estan escrites i suposant que després de cada operació individual s'arrodoneix a 4 dígits significatius.

(b) Suposeu que $\sqrt{8}$ es coneix només aproximadament. Raoneu quina de les 4 expressions és numèricament millor, estudiant la propagació de l'error a primer ordre, per a cadascuna de les 4 expressions.

2.- [2 punts] Es considera un sistema lineal $Ax = b$, de n equacions i incògnites (n és gran), amb una estructura molt especial: la matriu $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ té zeros a totes les posicions que NO són:

0.75

- o de la primera columna,
- o de la diagonal principal,
- o de l'última columna.

A més, $a_{11} \neq 0$.

$6[n-1]+1$

(a) Adapteu a aquest cas el mètode de resolució basat en fer primer eliminació gaussiana sense pivotatge per a transformar el sistema en un de triangular superior, i resoldre després per substitució endarrera. Escriviu totes les fórmules que caldria programar, i compteu el nombre total d'operacions aritmètiques, en funció de n.

Hi ha algun moment del procés on pot aparèixer un 0 dividint?

(b) Calculeu explícitament la factorització LU d'una matriu A, de dimensió $n \times n$ tal que tots els elements de la primera columna, de la diagonal principal i de l'última columna són 1; i tots els altres elements són 0.

3.- [1 punt] Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on $a \ge 1$ és un paràmetre. Es defineix $B = A^T A$. Determineu quin és el valor de $a \ge 1$ que fa mínim el nombre de condició $k_\infty(B)$.

$K_\infty(B) = \dfrac{(a+a^2)^2}{(a+1)^2}$

1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$a=1$

$\|B\| = a+a^2$

$\|B^{-1}\|_\infty = \dfrac{a+a^2}{(a+1)^2}$