

Modelo Diferencial para a História Térmica do Universo

Bruna Guedes Pereira¹, Mariana Melo Pereira²

Ilum Escola de Ciência

Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais (CNPEM)

Campinas, Brasil

Resumo. Este trabalho investiga a evolução da temperatura da Radiação Cósmica de Fundo (CMB) durante a expansão do universo, modelando-a com equações diferenciais ordinárias (EDOs). A CMB, remanescente do Big Bang, resfria conforme o fator de escala cresce, seguindo aproximadamente $T \propto 1/a(t)$. Propomos, então, uma EDO para esse problema e aplicamos dois métodos de solução: analítico, com coeficientes constantes, e numérico, via Runge-Kutta de quarta ordem. Os resultados seguem a tendência teórica e observacional, mesmo não atingindo exatamente o valor esperado, e destacam a relevância das EDOs na compreensão da termodinâmica cosmológica.

Palavras-chave. Radiação Cósmica de Fundo, Equações Diferenciais Ordinárias, Expansão do Universo, Temperatura Cosmológica, Método de Coeficientes Constantes, Runge-Kutta.

1 Introdução

A CMB é uma das evidências mais sólidas do modelo cosmológico padrão, remanescente do Big Bang que permeia todo o universo. Prevista por Gamow, Alpher e Herman (1948) e descoberta por Penzias e Wilson (1965), apresenta espectro de corpo negro com temperatura média atual de cerca de 2,725 K, conforme medições das missões COBE, WMAP e Planck [1, 3]. Essa radiação surgiu cerca de 380 mil anos após o Big Bang, quando o universo esfriou para 3000 K, permitindo a recombinação e tornando-o transparente à luz. Nesse sentido, a expansão do universo, descrita pela métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), implica que o fator de escala $a(t)$ cresce com o tempo e a temperatura decai como $T \propto 1/a(t)$ [4, 5]. Essa relação é essencial para compreender a evolução térmica do cosmos e pode ser modelada por EDOs. Então, dado que o estudo da CMB confirma o Big Bang e fornece parâmetros cosmológicos como densidade de matéria, energia escura e taxa de expansão; neste trabalho, formulamos uma EDO para a evolução térmica da CMB e aplicamos dois métodos: (i) solução analítica com coeficientes constantes e (ii) método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem [2, 6], permitindo analisar a variação da temperatura do universo primordial até hoje.

2 Propondo o Modelo Diferencial

2.1 Suposições teóricas

A evolução do universo é descrita pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que assume homogeneidade e isotropia. [4] A dinâmica do fator de escala ($a(t)$) é governada pela equação de Friedmann, derivada das equações de campo da Relatividade Geral:

¹bruna25037@ilum.cnpem.br

²mariana25021@ilum.cnpem.br

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1)$$

onde H é a taxa de expansão do universo (constante de Hubble), G é a constante gravitacional, ρ é a densidade de energia total, k é o parâmetro de curvatura espacial e Λ é a constante cosmológica.

Para simplificação e alinhamento ao conteúdo estudado, consideramos um universo plano ($k = 0$) e desprezamos Λ , além de assumir H constante. Essa escolha implica que o fator de escala evolui como: $a(t) \propto e^{H_0 t}$. Isso representa um modelo idealizado de expansão exponencial. Essa aproximação permite resolver a equação de forma analítica e explorar a relação fundamental $T \propto 1/a(t)$, mesmo que não reflita a evolução real do universo, onde $H(t)$ varia ao longo do tempo.

2.2 Desenvolvendo o Modelo Diferencial

Sob a hipótese de expansão exponencial com H constante ($H = H_0$), a temperatura da radiação cósmica de fundo obedece à equação diferencial ordinária por nós proposta:

$$\frac{dT}{dt} = -H_0 T + k_m n_0 e(t), \quad (2)$$

onde k_m é um coeficiente de acoplamento térmico e $n_0 e(t)$ é a densidade de elétrons ou partículas que interagem com a radiação. Dessa forma, assumindo que $n_0 e(t)$ decai exponencialmente com o tempo, $n_0 e(t) = n_0 e^{-t/\tau}$, a equação se torna:

$$\frac{dT}{dt} = -H_0 T + k_m n_0 e^{-t/\tau}. \quad (3)$$

Essa é uma EDO linear não homogênea com coeficientes constantes. Importante reforçar que, nesse caso, $a(t)$ é proporcional a $e^{H_0 t}$ quando assumimos H_0 constante, o que implica que $T(t)$ decai exponencialmente. Mesmo assim, é mantida a relação $T \propto 1/a(t)$, característica da expansão adiabática do universo.

2.3 Solução analítica pelo Método dos Coeficientes Constantes

Primeiro, resolvemos a parte homogênea:

$$\frac{dT}{dt} + H_0 T = 0. \quad (4)$$

Separando as variáveis:

$$\frac{dT}{T} = -H_0 dt. \quad (5)$$

Integrando:

$$\ln |T| = -H_0 t + C' \implies T_h(t) = C e^{-H_0 t}. \quad (6)$$

Já o termo não homogêneo é proporcional a $e^{-t/\tau}$. Pelo método dos coeficientes constantes, supomos:

$$T_p(t) = A e^{-t/\tau}. \quad (7)$$

Calculamos a derivada:

$$\frac{dT_p}{dt} = -\frac{A}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (8)$$

Substituímos na equação original:

$$-\frac{A}{\tau} e^{-t/\tau} + H_0 A e^{-t/\tau} = k_m n_0 e^{-t/\tau}. \quad (9)$$

Cancelamos $e^{-t/\tau}$:

$$-\frac{A}{\tau} + H_0 A = k_m n_0. \quad (10)$$

Fatoramos:

$$A(H_0 - \frac{1}{\tau}) = k_m n_0 \implies A = \frac{k_m n_0}{H_0 - \frac{1}{\tau}}. \quad (11)$$

A solução geral é, portanto:

$$T(t) = C e^{-H_0 t} + \frac{k_m n_0}{H_0 - \frac{1}{\tau}} e^{-t/\tau}. \quad (12)$$

Esta solução mostra duas contribuições: a primeira, associada à expansão do universo, decai com $e^{-H_0 t}$; a segunda, ligada ao termo de interação, decai com $e^{-t/\tau}$. Nela, C é determinada pela condição inicial $T(0) = T_0$. Temos, então:

$$T_0 = C + \frac{k_m n_0}{H_0 - \frac{1}{\tau}} \implies C = T_0 - \frac{k_m n_0}{H_0 - \frac{1}{\tau}}. \quad (13)$$

$$T(t) = \left(T_0 - \frac{k_m n_0}{H_0 - \frac{1}{\tau}} \right) e^{-H_0 t} + \frac{k_m n_0}{H_0 - \frac{1}{\tau}} e^{-t/\tau}. \quad (14)$$

2.4 Aproximação pelo Método de Runge-Kutta

Para resolver numericamente o Modelo Diferencial proposto, utilizamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). Ele calcula a solução aproximada em passos discretos usando quatro estimativas para maior precisão. Para um passo h , partindo de (t_n, T_n) :

$$T_{n+1} = T_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (15)$$

com:

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(t_n, T_n), & k_2 &= h f\left(t_n + \frac{h}{2}, T_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= h f\left(t_n + \frac{h}{2}, T_n + \frac{k_2}{2}\right), & k_4 &= h f(t_n + h, T_n + k_3). \end{aligned} \quad (16)$$

onde:

$$f(t, T) = -H_0 T + k_m n_0 e^{-t/\tau}. \quad (17)$$

Para problemas cosmológicos, onde a evolução ocorre em escalas de tempo muito grandes, a precisão do método RK4 é essencial para evitar acúmulo de erros. A sua implementação computacional consiste em definir os parâmetros H_0 , k_m , n_0 , τ e a condição inicial $T(0) = T_0$; depois, escolher o intervalo de integração e o tamanho do passo h ; por fim, aplicar iterativamente as fórmulas de RK4 para calcular $T(t)$ em cada ponto.

2.5 Representações gráficas

Na Figura 1, observa-se a evolução da temperatura da Radiação Cósmica de Fundo ao longo do tempo, conforme a solução análítica pelo Método de Coeficientes Constantes propõe. Na Figura 2, tem-se o resultado gráfico obtido com o Método de Runge-Kutta de quarta ordem. Novamente, identifica-se uma exponencial decrescente, como esperado pela própria proposta do Modelo Diferencial. E, para fins de comparação, gerou-se a Figura 3, por meio da qual é possível identificar que a solução analítica praticamente coincide com a encontrada pelo Método de Runge-Kutta.

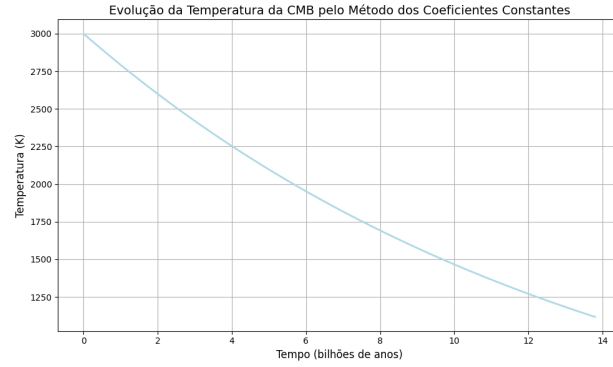


Figura 1: Representação da Evolução da Temperatura da CMB pelo Método dos Coeficientes Constantes

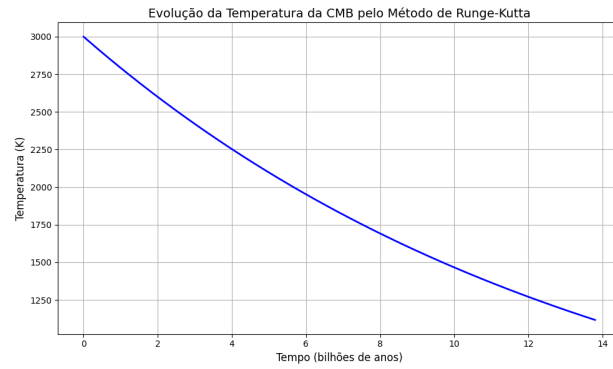


Figura 2: Representação da Evolução da Temperatura da CMB pelo Método Runge-Kutta

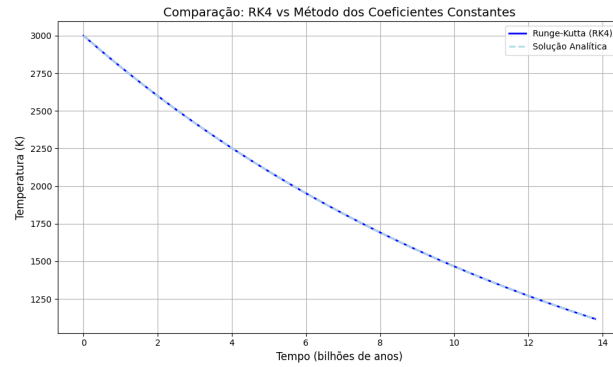


Figura 3: Comparação da Evolução da Temperatura da CMB pelos Métodos de Resolução da EDO

O resultado do código também nos mostra que, sob a hipótese de H constante, seriam necessários aproximadamente 100 bilhões de anos para atingir a temperatura atual da radiação cósmica de fundo, muito maior que a idade real do universo $\sim 13,8$ bilhões de anos. Isso evidencia que o modelo com H constante não descreve corretamente a evolução cosmológica, mas serve como uma aproximação simplificada para ilustrar a relação $T \propto 1/a(t)$.

3 Considerações Finais

Apesar de o modelo não ser totalmente fiel à realidade, ele consegue explorar de maneira simplificada a evolução da temperatura da CMB. A comparação entre a solução analítica e a aproximação numérica confirma a consistência do modelo para a evolução da temperatura da CMB. A forma analítica explicita dois termos principais: o primeiro, associado à expansão do universo, decai com a taxa H_0 ; o segundo, ligado à interação, decai com a constante de tempo τ , permitindo interpretação física clara. Já o método de Runge-Kutta mostrou alta precisão e flexibilidade, reproduzindo os resultados analíticos com passo adequado e sendo essencial para casos mais complexos. Ambas as abordagens são complementares: a analítica para interpretação e validação, e a numérica para simulações realistas. O código está disponível em: https://github.com/marip864/ModeloDiferencial_HistoriaTermica.

4 Contribuições dos autores

Bruna: Análise formal, Validação, Redação - revisão e edição.

Mariana: Implementação, Análise formal, Redação.

Agradecimentos

Agradecemos ao professor Nelson Studart Filho por apresentar o tema da Radiação Cósmica de Fundo (CMB), que inspirou este trabalho, e ao professor Vinicius Francisco Wasques pela orientação durante a disciplina, contribuindo com sugestões e esclarecimentos fundamentais para o desenvolvimento do estudo. O preâmbulo deste arquivo .tex foi adaptado do preâmbulo fornecido pela Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC).

Referências

- [1] Astronoo. **Radiação Cósmica de Fundo: O Eco Térmico do Big Bang**. Acesso em: 20 nov. 2025. 2025. URL: <https://astronoo.com/pt/artigos/radiacao-cosmica-de-fundo.html>.
- [2] A. T. B. Celeste, V. H. de Holanda e D. S. Santos. “Uma exposição didática do método de Runge-Kutta no estudo do pêndulo amortecido”. Em: **Revista Brasileira de Ensino de Física** 46 (2024), e20240088. DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0088. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/10d9/f798962d78f3bbefc348aca16831d5ab4429.pdf>.
- [3] ESA / Planck Collaboration. **Planck and the cosmic microwave background**. Acesso em: 20 nov. 2025. 2025. URL: https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Planck/Planck_and_the_cosmic_microwave_background.
- [4] Instituto de Física - UFRJ. **Medindo parâmetros cosmológicos**. Acesso em: 20 nov. 2025. 2025. URL: <https://www.if.ufrj.br/~orca/intcosmo/122/Aula1Cap7.pdf>.
- [5] UFSC. **Curso de Cosmologia – Astrofísica para Todos**. Acesso em: 20 nov. 2025. 2025. URL: <https://astrofisica.ufsc.br/curso-de-cosmologia/cosmologia1/material/>.
- [6] UNICAMP. **Aula 13 – Métodos de Runge-Kutta**. 2015. URL: <https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2015/MS211/Aula13.pdf>.