РАЗДЕЛ 2. КИНЕМАТИКА.

ЛЕКЦИЯ 9

Тема 1.7. Основные понятия кинематики. Кинематика точки

Иметь представление о пространстве, времени, траектории, пути, скорости и ускорении.

Знать способы задания движения точки (естественный и координатный).

Знать обозначения, единицы измерения, взаимосвязь кинематических параметров движения, формулы для определения скоростей и ускорений (без вывода).

Основная задача кинематики – изучение общих законов движения материальных точек и твердых тел без учета причин, вызывающих эти движения.

Кинематика рассматривает движение как перемещение в пространстве. Причины, вызывающие движение, не рассматриваются. Кинематика устанавливает способы задания движения и определяет методы определения кинематических параметров движения.

Основные кинематические параметры

1. Траектория

Линию, которую очерчивает материальная точка при движении в пространстве, называют **траекторией.**

Траектория может быть прямой и кривой, плоской и пространственной линией.

Уравнение траектории при плоском движении: $y = f(x)$.

2. Пройденный путь

Путь измеряется вдоль траектории в направлении движения. Обозначение – S, единицы измерения – метры.

3. Уравнение движения точки

Уравнение, определяющее положение движущейся точки в зависимости от времени, называется **уравнением движения**.

Положение точки в каждый момент времени можно определить по расстоянию, пройденному вдоль траектории от некоторой неподвижной точки, рассматриваемой как начало отсчета (рис. 9.1). Такой **способ задания движения** называется **естественным**.

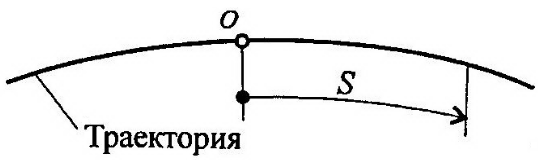


Рис. 9.1

Таким образом, уравнение движения можно представить в виде $S = f(t)$. Положение точки можно также определить, если известны ее координаты в зависимости от времени (рис. 9.2). Тогда в случае движения на плоскости должны быть заданы два уравнения:

$$\begin{cases} x = f_1(t); \\ y = f_2(t). \end{cases}$$

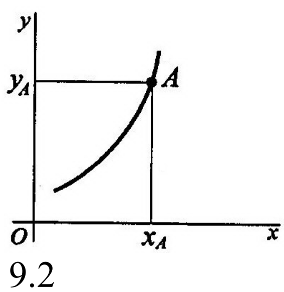


Рис. 9.2

В случае пространственного движения добавляется и третья координата.
Такой **способ задания движения** называют **координатным.**

4. Скорость движения

Векторная величина, характеризующая в данный момент быстроту и направление движения по траектории, называется **скоростью**.

Скорость – вектор, в любой момент направленный по касательной к траектории в сторону направления движения (рис. 9.3).

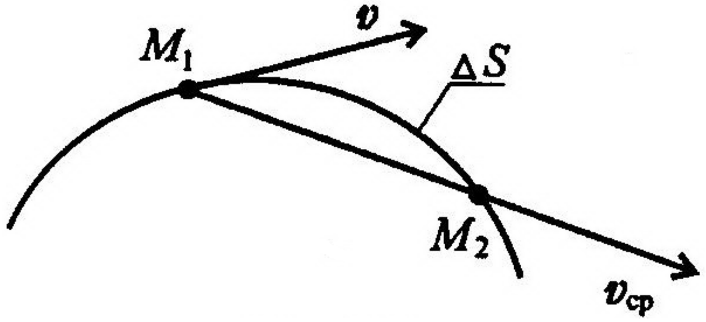


Рис. 9.3

Если точка за равные промежутки времени проходит равные расстояния, то движение называют **равномерным**.

Средняя скорость на пути ΔS определяется как

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где ΔS – пройденный путь за время Δt; Δt – промежуток времени.

Если точка за равные промежутки времени проходит неравные пути, то движение называют **неравномерным**.

В этом случае скорость – величина переменная и зависит от времени $v = f(t).$

При рассмотрении малых промежутков времени $(\Delta t \to 0)$ средняя скорость становится равной истинной скорости движения в данный момент. Поэтому скорость в данный момент определяют как производную пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt}.$$

За единицу скорости принимают 1 м/с. Иногда скорость измеряют в км/ч,

$$1\,\text{км/ч} = \frac{1000}{3600} = 0{,}278\,\text{м/с}.$$

Вспомним математику.

Производной *функции называется предел, к которому стремится отношение бесконечно малого приращения функции к соответствующему бесконечно малому приращению аргумента*, ($\dot{\vec{r}}$ *с точкой* – это производная по времени).

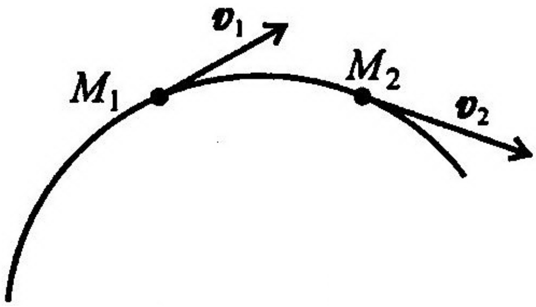
Математические обозначения:

] – пусть; $\exists$ – существует; $\exists!$ – существует единственный; $\forall$ – любой.

5. Ускорение точки

Векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по величине и направлению, называется **ускорением точки**.

Скорость точки при перемещении из точки M_1 в точку M_2 меняется по величине и направлению. Среднее значение ускорения за этот промежуток времени (рис. 9.4):



$$a_{ср} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Рис. 9.4

При рассмотрении бесконечно малого промежутка времени среднее ускорение превратится в ускорение в данный момент:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Обычно для удобства рассматривают две взаимно перпендикулярные составляющие ускорения: нормальное и касательное (рис. 9.5).

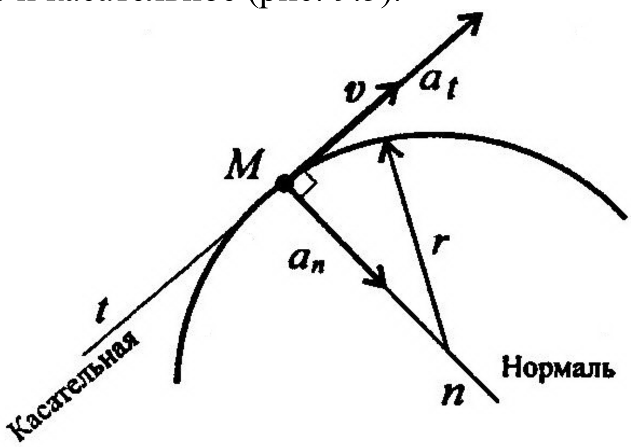


Рис. 9.5

Нормальное ускорение a_n характеризует изменение скорости по направлению и определяется как

$$a_n = \frac{v^2}{r},$$

где r – радиус кривизны траектории в данный момент времени.

Нормальное ускорение всегда направлено перпендикулярно скорости к центру дуги.

Касательное ускорение a_t характеризует изменение скорости по величине и всегда направлено по касательной к траектории; при ускорении его направление **совпадает** с направлением скорости, а при замедлении оно направлено **противоположно** направлению вектора скорости.

Формула для определения касательного ускорения имеет вид:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = v' = S''.$$

Значение **полного** ускорения определяется как $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ (рис. 9.6).

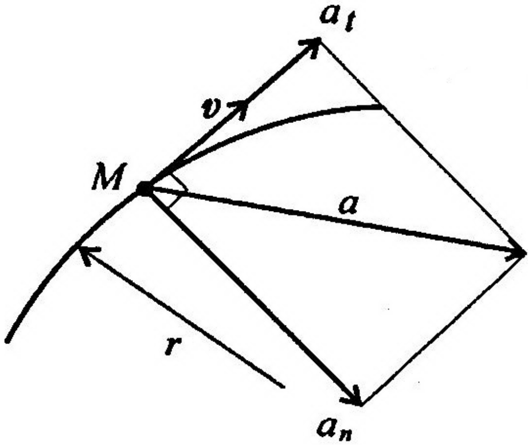


Рис. 9.6

Примеры решения задач

Пример 1. Дано уравнение движения точки: $S = 0{,}36t^2 + 0{,}18t.$ Определить скорость точки в конце третьей секунды движения и среднюю скорость за первые 3 секунды.

Решение

1. Уравнение скорости

$$v = \frac{dS}{dt};\ S' = 2 \cdot 0{,}36t + 0{,}18;\ v = 0{,}72t + 0{,}18.$$

2. Скорость в конце третьей секунды

$$(t = 3\,c)\ v_3 = 0{,}72 \cdot 3 + 0{,}18 = 2{,}34\,\text{м/с}.$$

3. Средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t};\ v_{\text{ср}} = (0{,}36 \cdot 3^2 + 0{,}18 \cdot 3)/3 = 1{,}26\,\text{м/с}.$$

Пример 2. Точка движется по кривой радиуса $r = 10\,\text{м}$ согласно уравнению $S = 2{,}5t^2 + 1{,}2t + 2{,}5$ (рис. 9.6).

Определить полное ускорение точки в конце второй секунды движения и указать направление касательной и нормальной составляющих ускорения в точке М.

Решение

1. Касательное ускорение определяется как $a_t = \frac{dv}{dt}.$

Уравнение скорости: $v = \frac{dS}{dt}$.

Скорость будет равна $v = 2 \cdot 2{,}5t + 1{,}2;\ v = 5t + 1{,}2\ (\text{м/с}).$

Касательное ускорение: $a_t = v' = 5\,\text{м/с}^2.$

Вывод: касательное ускорение не зависит от времени, оно постоянно.

2. Нормальное ускорение: $a_n = \frac{v^2}{r}.$

Скорость на второй секунде будет равна $v_2 = 5{\cdot}2{+}1{,}2 = 11{,}2\,\text{м/с}.$

Величина нормального ускорения: $a_{n2} = \frac{(11{,}2)^2}{10} = 12{,}54\,\text{м/с}^2.$

3. Полное ускорение: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$

Полное ускорение в конце второй секунды: $a_2 = \sqrt{5^2 + 12{,}54^2} = 13{,}5\,\text{м/с}^2.$

4. Нормальное ускорение направлено перпендикулярно скорости к центру дуги. Касательное ускорение направлено по касательной к кривой и совпадает с направлением скорости, т. к. касательное ускорение – положительная величина (скорость растет).

Контрольные вопросы и задания

1.Запишите в общем виде закон движения в естественной и координатной форме.

2.Что называют траекторией движения?

3.Как определяется скорость движения точки при естественном способе задания движения?

4.Запишите формулы для определения касательного, нормального и полного ускорений.

5.Что характеризует касательное ускорение и как оно направлено по отношению к вектору скорости?

6.Что характеризует и как направлено нормальное ускорение?

ЛЕКЦИЯ 10

Тема 1.8. Кинематика точки

Иметь представление о скоростях средней и истинной, об ускорении при прямолинейном и криволинейном движениях, о различных видах движения точки.

Знать формулы (без вывода) и графики равномерного и равнопеременного движений точки.

Уметь определять параметры движения точки по заданному закону движения, строить и читать кинематические графики.

Анализ видов и кинетических параметров движений

Равномерное движение

Равномерное движение — **это движение с постоянной скоростью**:

$$v = \text{const}.$$

Для прямолинейного равномерного движения (рис. 10.lа)

$$a_t = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_t = 0;$$

$$r = \infty \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{r} = 0.$$

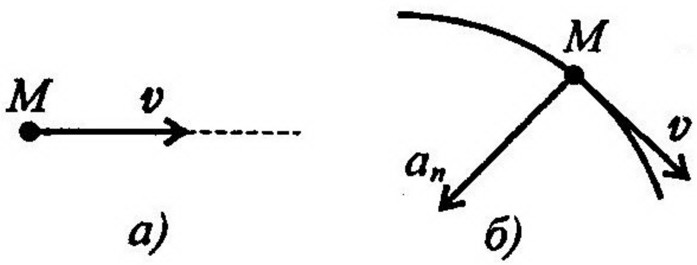


Рис. 10.1

Полное ускорение движения точки равно нулю: $a = 0$.

При криволинейном равномерном движении (рис. 10.1б)

$$r \neq \infty \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{r} \neq 0.$$

Полное ускорение равно нормальному ускорению: $a = a_n$.

Уравнение (закон) движения точки при равномерном движении можно получить, проделав ряд несложных операций.

Так как $v = const$, закон равномерного движения в общем виде является уравнением прямой: $S = S_0 + vt$, где S_0 — путь, пройденный до начала отсчета.

Равнопеременное движение

Равнопеременное движение – **это движение с постоянным касательным ускорением**:

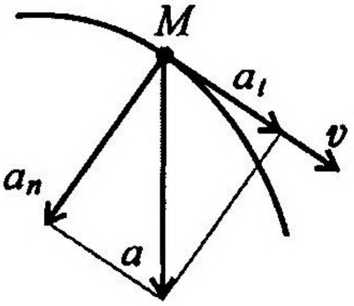
$$a_t = \text{const}.$$

Для прямолинейного равнопеременного движения

$$r = \infty \Rightarrow a_n = 0; \quad a = a_t = \text{const}.$$

Полное ускорение равно касательному ускорению.

Криволинейное равнопеременное движение (рис. 10.2):



$$a_n \neq 0; \quad a_t = \text{const} \neq 0.$$

Рис. 10.2

Учитывая, что $a_t = \dfrac{dv}{dt}$; $a_t = \text{const}$ и сделав ряд преобразований

$$dv = a_t dt; \quad \int_v dv = a_t \int_t dt,$$

получим значение скорости при равнопеременном движении

$$v = v_0 + a_t t; \quad v = \frac{dS}{dt}.$$

После интегрирования будем иметь закон равнопеременного движения в общем виде, представляющий уравнение параболы:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2},$$

где v_0 — начальная скорость движения;

S_0 — путь, пройденный до начала отсчета;

a_t — постоянное касательное ускорение.

Неравномерное движение

При *неравномерном движении* численные значения скорости и ускорения меняются. Уравнение неравномерного движения в общем виде представляет собой уравнение третьей $S = f(t^3)$ и выше степени.

Кинематические графики

Кинематические графики – это графики изменения пути, скорости и ускорений в зависимости от времени.

Равномерное движение (рис. 10.3)

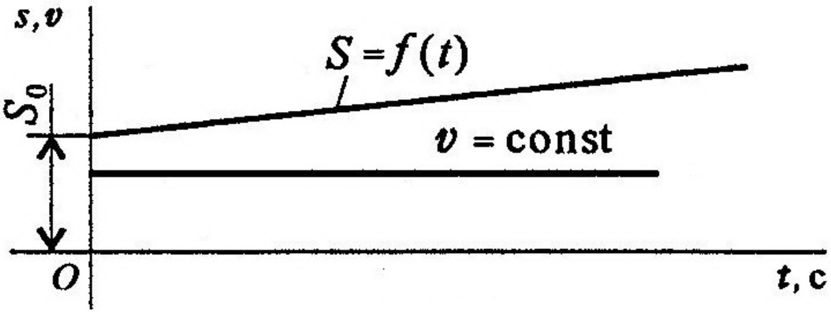
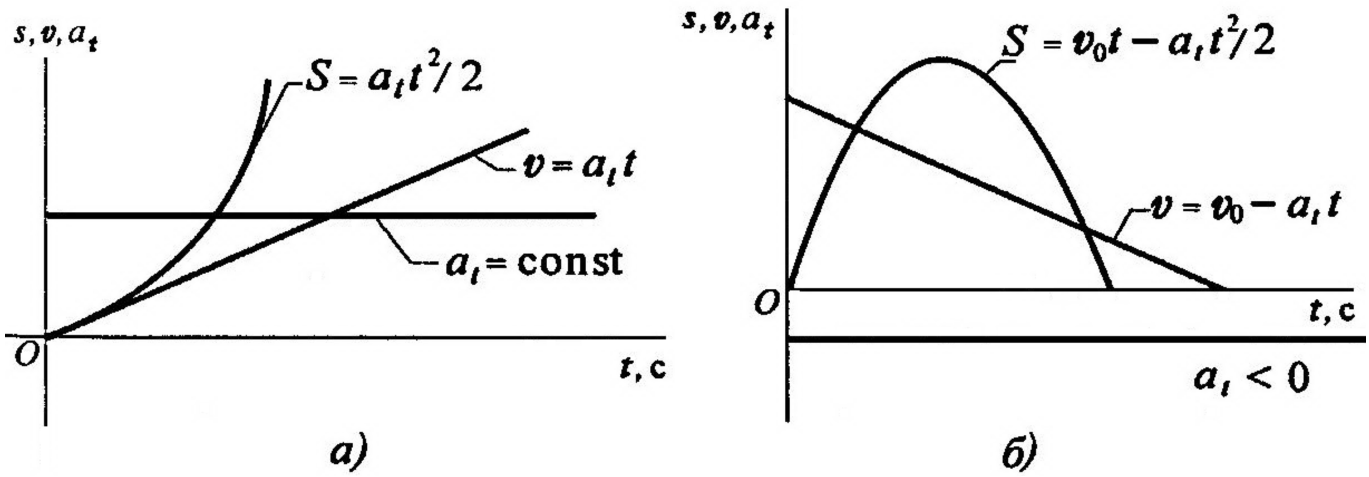


Рис. 10.3

Равнопеременное движение (рис. 10.4)



Между кинематическими графиками существует определенная взаимосвязь.
Так, для **равномерного** движения график скорости изображается линией, параллельной оси абсцисс, а график расстояния – прямой наклонной линией.
Для **равнопеременного** движения график ускорения является прямой, параллельной оси абсцисс, график скорости – наклонная прямая, а график расстояний – параболическая кривая.

Примеры решения задач

Пример 1. По заданному закону движения $S = 10 + 20t - 5t^2$ ($[S]$ = м; $[t]$ = с) определить вид движения, начальную скорость и касательное ускорение точки, время до остановки.
(Рекомендуется обойтись без расчетов, использовать метод сравнения заданного уравнения с уравнениями различных видов движений в общем виде.)

Решение

1. Вид движения: равнопеременное $(S = S_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2})$.
2. При сравнении уравнений очевидно, что
S_0 – начальный путь, пройденный до начала отсчета = 10м;
v_0 – начальная скорость = 20 м/с;
– постоянное касательное ускорение $\frac{a_t}{2} = -5\,\text{м/с}^2;\ a_t = -10\,\text{м/с}^2.$

– ускорение отрицательное, следовательно, движение замедленное (равнозамедленное), ускорение направлено в сторону, противоположную направлению скорости движения.
3. Можно определить время, при котором скорость точки будет равна нулю: $v = S' = 20 - 2 \cdot 5t$; $v = 20 - 10t$; $v = 0$; $t = \frac{20}{10} = 2\,\text{c}$.

Примечание. Если при равнопеременном движении скорость растет, значит, ускорение – положительная величина, график пути – вогнутая парабола. При торможении скорость падает, ускорение (замедление) – отрицательная величина, график пути – выпуклая парабола (рис. 10.4).

Пример 2. Точка движется по желобу из точки ***A*** в точку ***D*** (рис. 10.5).

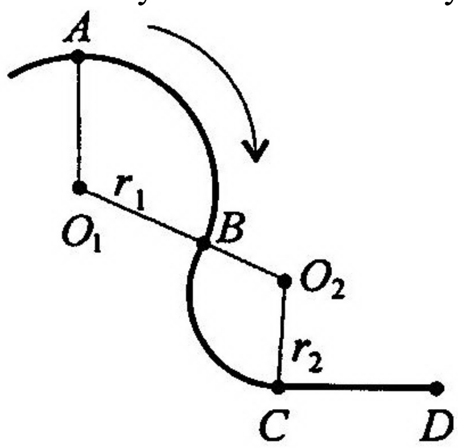


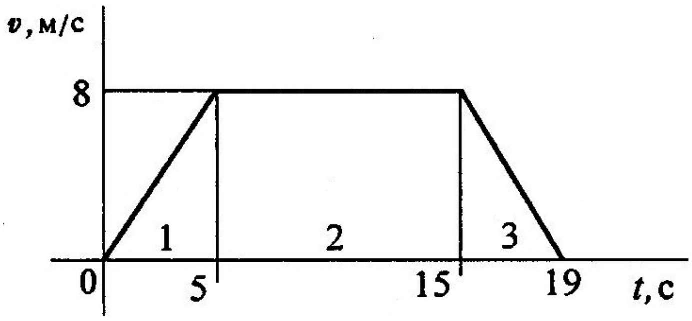
Рис. 10.5

Как изменятся касательное и нормальное ускорения при прохождении точки через ***B*** и ***C***?
Скорость движения считать постоянной. Радиус участка *AB* = 10 м, радиус участка *BC =5м.*
Решение
1. Рассмотрим участок *AB.* Касательное ускорение **равно нулю**, т.к. $\boldsymbol{v}$ = const.
Нормальное ускорение

$$\left(a_n = \frac{v^2}{r}\right)$$

при переходе через точку ***B*** увеличивается в 2 раза, оно меняет направление, т. к. центр дуги ***AB*** не совпадает с центром дуги ***BC***.
2. На участке ***BC***:
– касательное ускорение равно нулю: $a_t = 0$;
– нормальное ускорение при переходе через точку ***C*** меняется: до точки ***C*** движение вращательное, после точки ***C*** движение становится прямолинейным, нормальное напряжение на прямолинейном участке равно нулю.
3. На участке ***CD*** полное ускорение равно нулю.

Пример 3. По заданному графику скорости найти путь, пройденный за время движения (рис. 10.6).



1. По графику следует рассмотреть три участка движения. Первый участок – разгон из состояния покоя (равноускоренное движение).

Уравнение скорости $v_1 = v_0 + a_1 t_1;\ v_0 = 0.$

Ускорение $$a_1 = \frac{v_1}{t_1};\ a_1 = \frac{8}{5} = 1{,}6\,\text{м/с}^2.$$

Второй участок – равномерное движение: $v = 8\,\text{м/с};\ a_2 = 0.$

Третий участок – торможение до остановки (равнозамедленное движение).

Уравнение скорости $v_3 = v_{03} + a_3 t_3;\ v_3 = 0.$

Ускорение $$a_3 = -\frac{v_{03}}{t_3};\ a_3 = -\frac{8}{4} = -2\,\text{м/с}^2.$$

2. Путь, пройденный за время движения, будет равен:

первый участок: $$S_1 = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2};\quad S_0 = 0;\ v_0 = 0;$$

$$S_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2};\quad S_1 = \frac{1{,}6 \cdot 5^2}{2} = 20\,\text{м/с};$$

второй участок: $S_2 = vt_2 = 8 \cdot 10 = 80\,\text{м/с};$

третий участок: $$S_3 = S_{03} + v_{03} t_3 + \frac{a_3 t_3^2}{2};\quad S_{03} = S_1 + S_2;$$

$$v_{03} = 8\ \text{м/с};\quad a_3 = -2\ \text{м/с}^2.$$

Путь за время движения

$$S_\Sigma = S_3 = 100 + 8 \cdot 4 + \frac{-2 \cdot 4^2}{2} = 116\ \text{м}.$$

ЛЕКЦИЯ 11

Тема 1.9. Простейшие движения твердого тела

Иметь представление о поступательном движении, его особенностях и параметрах, о вращательном движении тела и его параметрах.

Знать формулы для определения параметров поступательного и вращательного движений тела.

Уметь определять кинематические параметры тела при поступательном и вращательном движениях, определять параметры любой точки тела.

Поступательное движение

Поступательным называют такое движение твердого тела, при котором всякая прямая линия на теле при движении остается параллельной своему начальному положению (рис. 11.1, 11.2).

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково: скорости и ускорения в каждый момент одинаковы. Поэтому для описания движения тела можно рассматривать движение одной его точки, обычно центра масс.

Поступательное движение может быть прямолинейным и криволинейным.

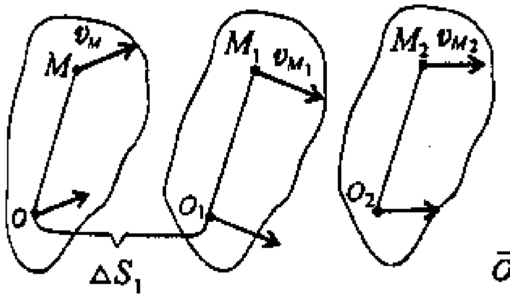


Рис. 11.1

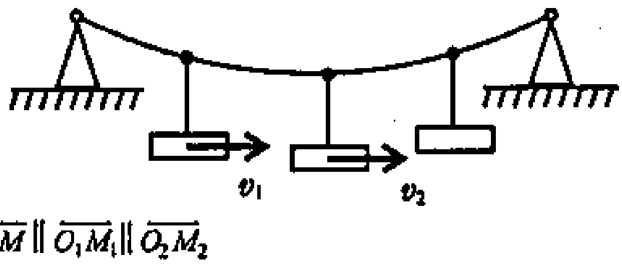


Рис. 11.2

Вращательное движение

При вращательном движении все точки тела описывают окружности вокруг общей неподвижной оси.

Неподвижная ось, вокруг которой вращаются все точки тела, называется *осью вращения.*

При этом каждая точка движется по окружности, радиус которой равен расстоянию точки до оси вращения. Точки на оси вращения не перемещаются.

Для описания вращательного движения тела вокруг неподвижной оси можно использовать только угловые параметры (рис. 11.3):

φ – угол поворота тела, [φ] = рад;

и; ω – угловая скорость, определяет изменение угла поворота в единицу времени, [ω] = рад/с.

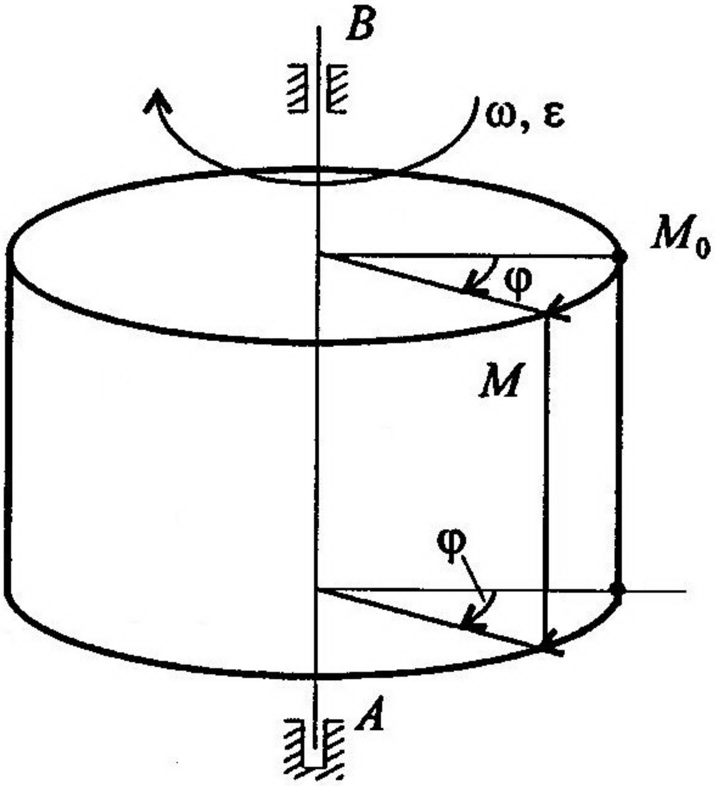


Рис. 11.3

Для определения положения тела в любой момент времени используется уравнение

$$\varphi = f(t).$$

Следовательно, для определения угловой скорости можно пользоваться выражением

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Иногда для оценки быстроты вращения используют угловую частоту вращения n, которая оценивается в оборотах в минуту.
Угловая скорость и частота вращения физически близкие величины:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

Изменение угловой скорости во времени определяется угловым ускорением

ε, $[\varepsilon] = \text{рад/с}^2$;

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Частные случаи вращательного движения
Равномерное вращение (угловая скорость постоянна):

$$\omega = \text{const}.$$

Уравнение (закон) равномерного вращения в данном случае имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 угол поворота до начала отсчета.

Кинематические графики для этого вида движения изображены на рис. 11.4.

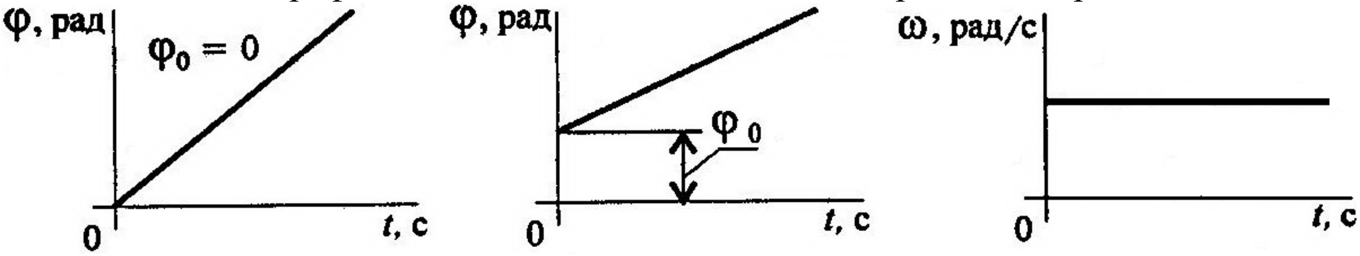


Рис. 11.4

Равнопеременное вращение (угловое ускорение постоянно):

$$\varepsilon = \text{const}.$$

Уравнение (закон) равнопеременного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где ω_0 – начальная угловая скорость.

Угловое ускорение *при ускоренном* движении – величина *положительная;* угловая скорость будет все время возрастать.

Угловое ускорение *при замедленном* движении – величина *отрицательная;* угловая скорость убывает.

Для данного движения кинематические графики представлены на рис. 11.5.

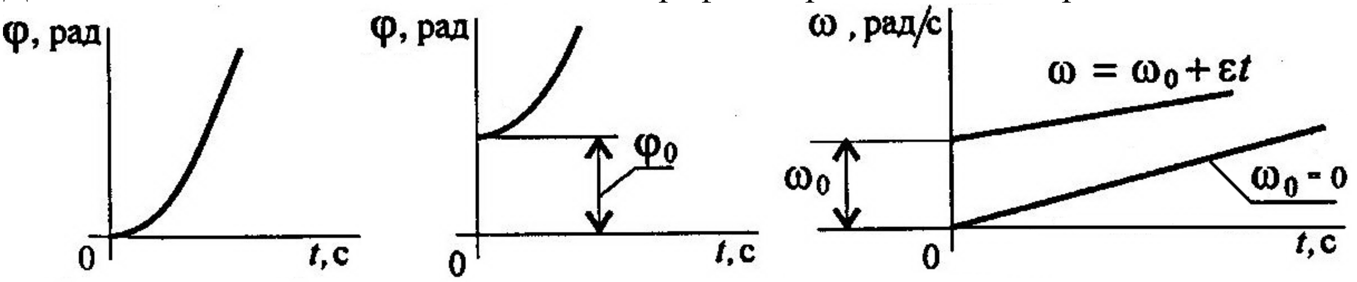
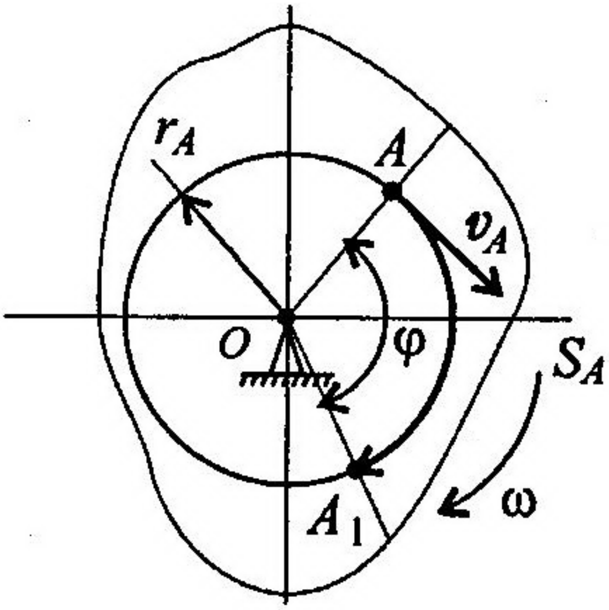


Рис. 11.5

Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Тело вращается вокруг точки ***O***. Определим параметры движения точки ***A***, расположенной на расстоянии r_A от оси вращения (Рис. 11.6, 11.7).



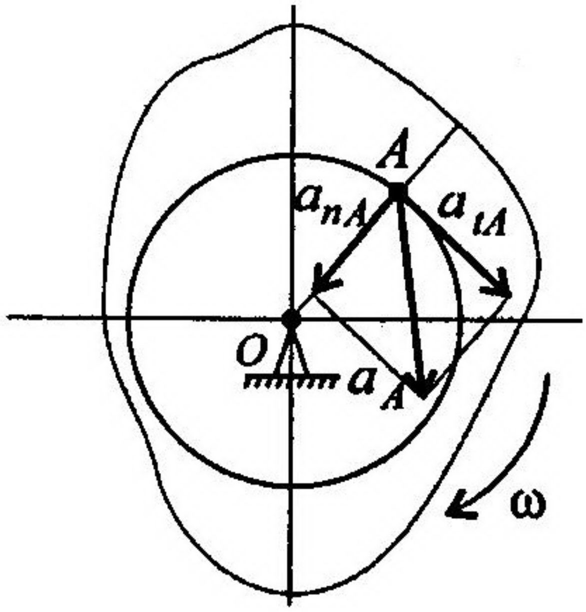


Рис. 11.6, 11.7

Путь точки *A:* $S_A = \varphi r_A.$

Линейная скорость точки *A:* $v_A = \omega r_A.$

Ускорения точки *A:* $a_{tA} = \varepsilon r_A$ – касательное; $a_{nA} = \omega^2 r_A$ – нормальное, где r_A – радиус окружности, траектории точки *A*.

Примеры решения задач

Пример 1. По заданному графику угловой скорости (рис. 11.8) определить вид вращательного движения.

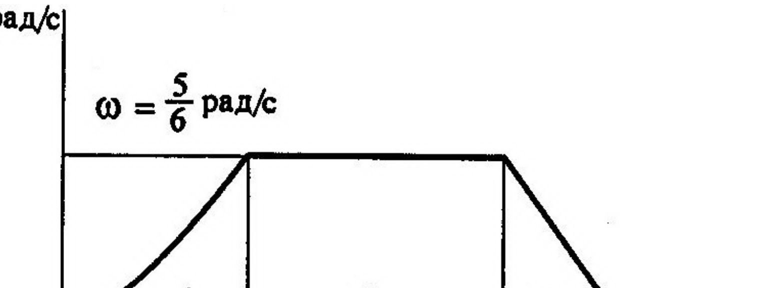


Рис. 11.8

Решение

1. Участок 1 – неравномерное ускоренное движение, $\omega = \varphi'$; $\varepsilon = \omega'$.
2. Участок 2 – скорость постоянна – движение равномерное, $\omega = \text{const}$.
3. Участок 3 – скорость убывает равномерно – равнозамедленное движение, $\varepsilon = \omega' < 0$.

Пример 2. Ротор электродвигателя вращается со скоростью, описываемой уравнением $\omega = 2\pi t$. Определить вид движения.

Решение

1.Анализируем выражение для скорости: скорость меняется и зависит от времени линейно. Следовательно, угловое ускорение – постоянно,

$$\varepsilon = \omega' = 2\pi = \text{const}.$$

2.Движение равнопеременное (равноускоренное, т. к. **ускорение положительно**).

Пример 3. Тело вращалось равноускоренно из состояния покоя и сделало 360 оборотов за 2 мин. Определить угловое ускорение.

Решение

1. Один оборот равен 2π радиан. Следовательно:

$$360 \text{ оборотов} = 720\pi \text{ рад}, \quad \varphi = 720\pi \text{ рад}.$$

2. Закон равнопеременного вращательного движения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

В данном случае $\varphi_0 = 0; \omega_0 = 0$.

Следовательно, $\varphi = \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$. Откуда $\varepsilon = \dfrac{2\varphi}{t^2}$.

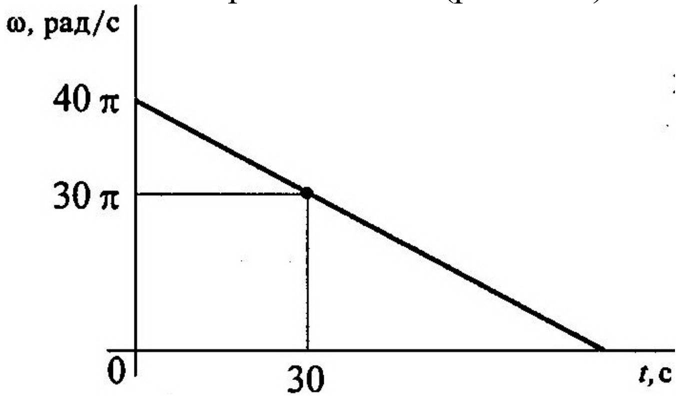
3. Угловое ускорение равно

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot 720 \cdot \pi}{(120)^2} = 0{,}314 \text{ рад/с}^2.$$

Пример 4. Тело вращалось с угловой частотой 1200 об/мин. Затем движение стало равнозамедленным, и за 30 секунд скорость Упала до 900 об/мин. Определить число оборотов тела за это время и время до полной остановки.

Решение

1. Построить график изменения скорости за 30 с (рис. 11.9).



Определяем угловую скорость вращения тела:

$$\omega_0 = \frac{1200 \cdot \pi}{30} = 40\pi \text{ рад/с}; \qquad \omega = \frac{900\pi}{30} = 30\pi \text{ рад/с}.$$

Определяем угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{30\pi - 40\pi}{30} = -\frac{1}{3}\pi \text{ рад/с}^2.$$

Определяем угол поворота за прошедшее время:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\varphi_0 = 0;$$

$$\varphi = 40\pi \cdot 30 - \frac{1}{3}\frac{\pi \cdot (30)^2}{2};$$

$$\varphi = 1050\pi \text{ рад}.$$

Число оборотов за 30 с:

$$z = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1050\pi}{2\pi} = 525 \text{ об.}$$

2. Определяем время до полной остановки.

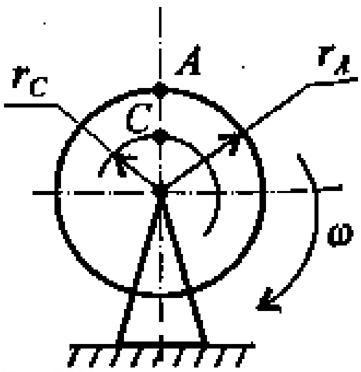
Скорость при остановке равна нулю, $\omega = 0$.

Таким образом, $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$; $0 = \omega_0 + \varepsilon t$.

Тогда $t_{\text{ост}} = -\frac{\omega_0}{\varepsilon}$; $t_{\text{ост}} = \frac{40\pi \cdot 3}{\pi} = 120$ с.

Пример 5. Маховое колесо вращается равномерно со скоростью 120 об/мин (рис. 11.10). Радиус колеса 0,3 м. Определить скорость и полное ускорение точек на ободе колеса, а также скорость точки, находящейся на расстоянии 0,15 м от центра.

Решение



1. Угловая скорость

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 120}{30} \approx 12{,}56 \text{ рад/с}.$$

2. Линейная скорость на ободе колеса

$v = \omega r$; $v_A = \omega r_A$; $v_A = 12{,}56 \cdot 0{,}3 = 3{,}77$ м/с.

3. Скорость в точке C (рис. 11.10)

$v_C = \omega r_C$; $v_C = 12{,}56 \cdot 0{,}15 = 1{,}88$ м/с.

4. Угловое ускорение $\varepsilon = \omega' = 0$.

Касательное ускорение точки *A* $a_{tA} = 0$;

нормальное ускорение точки A $a_{nA} = \omega^2 r_A;$

$$a_{nA} = (12{,}56)^2 \cdot 0{,}3 = 47{,}3\,\text{м/с}^2.$$

5. Полное ускорение точек на ободе колеса

$$a_A = \sqrt{a_{tA}^2 + a_{nA}^2}; \quad a_A = a_{nA} = 47{,}3\,\text{м/с}^2.$$

Контрольные вопросы и задания

1.Какими кинематическими параметрами характеризуется поступательное движение и почему?

2.Запишите уравнение равномерного поступательного движения твердого тела.

3.Запишите уравнение равнопеременного поступательного движения твердого тела.

4.Запишите уравнения равномерного и равнопеременного вращательного движений твердого тела.

5.Задано уравнение движения тела $\boldsymbol{S = f(t)}$. Как определяют скорость и ускорение?

6.Для заданного закона (уравнения) движения $\varphi = 6{,}28 + 12t + 3t^2$ выберите соответствующий кинематический график движения (рис. 11.11).

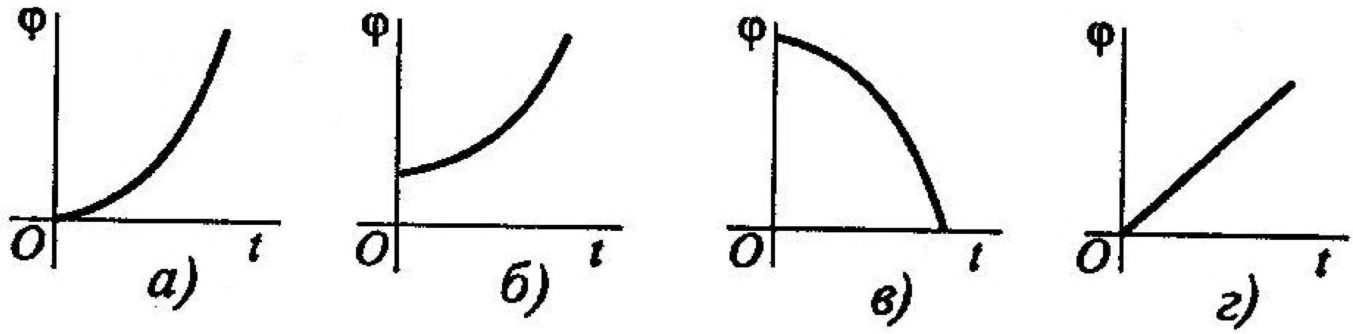


Рис. 11.11

7. Для движения, закон которого задан в вопросе ***6***, определите угловое ускорение в момент t = 5 с.