ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА (ЛЕКЦИИ)

Техническая механика состоит из следующих разделов:
1. Теоретическая механика.
2. Сопротивление материалов.
3. Детали машин.

Изучение технической механики вырабатывает навыки для постановки и решения прикладных задач и последующего изучения специальных дисциплин.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

ЛЕКЦИЯ 1

Теоретическая механика – это наука, изучающая общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

В основе теоретической механики лежат законы, которые называются законами классической механики или законами Ньютона, *которые установлены путем обобщения результатов большого количества экспериментов и наблюдений. Их справедливость проверена многовековой практической деятельностью человека.*

Теоретическая механика состоит из трех разделов: статики, кинематики и динамики.

Статика – это раздел теоретической механики, в котором изучают условия, при которых тело находится в равновесии.

Кинематика рассматривает движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, т.е. без учета сил, вызывающих это движение.

Динамика изучает законы движения материальных тел с учетом действующих на них сил.

В отличие от физики теоретическая механика изучает законы движения некоторых абстрактных *абсолютно твердых тел:* здесь материалы, форма тел существенного значения не имеют. При движении абсолютно твердое тело не деформируется и не разрушается. В случае, когда размерами тела можно пренебречь, тело заменяют материальной точкой. Это упрощение, принятое в теоретической механике, значительно облегчает решение задач о движении.

РАЗДЕЛ 1. Тема 1. 1 Статика

1.1.1 Основные понятия и аксиомы статики. Понятие о силе и системе сил. Связи, реакции связей.

Основные понятия.

1. Материальная точка – это тело, размерами которого в конкретных условиях можно пренебречь.

2. Механическая система *или система материальных точек* – это совокупность материальных точек связанных и взаимодействующих между собой.

Твердое тело является системой материальных точек.

3. Тело называют **абсолютно твердым** (или абсолютно жестким), если расстояние между любыми его точками не меняется при действии на него других тел.

Абсолютно твердое тело *– тело, в котором расстояния между двумя произвольными его точками остаются неизменными. Считая тела абсолютно твердыми, не учитывают деформаций, которые возникают в реальных телах.*

Понятие о силе и системе сил

4. Сила – это мера механического взаимодействия тел. Сила характеризуется тремя элементами: числовым значением, направлением и точкой приложения. Таким образом, **сила – величина векторная**.

Вектор силы изображается отрезком, на конце которого ставится стрелка. Стрелка указывает направление вектора, длина отрезка – значение вектора, измеренное в выбранном масштабе. ***Вектор в тексте*** *изображают одной буквой со стрелкой наверху* $\vec{F}, \vec{a}, \vec{v}$*, а* ***на схемах*** *(рис. 1.1, а, б) стрелки не ставятся, так как само обозначение вектора в виде направленного отрезка наглядно характеризует его свойства.*

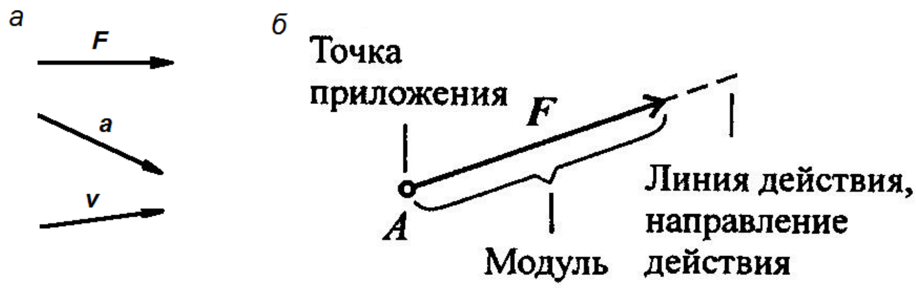


Рис. 1.1

Модуль или **численное значение силы** в СИ измеряется в ньютонах (Н). *Применяют также и более крупные единицы измерения: 1 килоньютон, 1 меганьютон. До сих пор иногда используют для измерения сил техническую систему (МКГСС), в которой в качестве единицы силы применяется килограмм-сила (кГс). Единицы силы в системах СИ и МКГСС связаны соотношением 1 кГс = 9,81 Н = 10 Н или 1 Н = 0,1 кГс.*

Силы, действующие на тело (или систему тел), делятся на **внешние и внутренние.** Внешние силы бывают активные и реактивные. **Активные силы** вызывают перемещение тела, **реактивные** стремятся противодействовать перемещению тела под действием внешних сил.

Внутренние силы возникают в теле под действием **внешних сил.**

5. Совокупность сил, действующих на какое-либо тело, называют **системой сил.**

Эквивалентная система сил — система сил, действующая так же, как заданная.

Уравновешенной (эквивалентной нулю) системой сил называется такая система, которая, будучи приложенной к телу, не изменяет его состояния.

Систему сил, действующих на тело, можно заменить одной **равнодействующей,** действующей так, как система сил.

АКСИОМЫ СТАТИКИ.

Аксиома – это заведомо истинное утверждение, принимаемое без доказательств.

Статика основана на аксиомах, вытекающих из опыта и принимаемых без доказательств.

Аксиомы отображают свойства сил, действующих на тело.

**' Векторные величины обозначаются полужирным шрифтом, скалярные величины — обычным.*

Аксиома 1 (аксиома инерции, или первый закон Ньютона)**.**
Всякое тело сохраняет свое состояние покоя или прямолинейного движения, пока какие-нибудь силы не выведут тело из этого состояния.

Аксиома 2 (аксиома взаимодействия, или третий закон Ньютона).
Две силы, равные по модулю и направленные по одной прямой в разные стороны уравновешиваются (рис. 1.2).

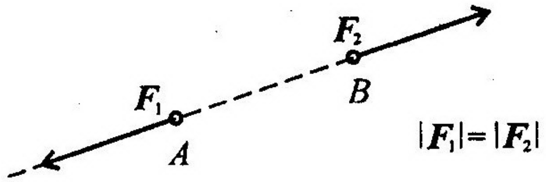


Рис. 1.2.

Аксиома 3.
Не нарушая механического состояния тела, можно добавить или убрать уравновешенную систему сил (принцип отбрасывания системы сил, эквивалентной нулю) (рис. 1.3.)

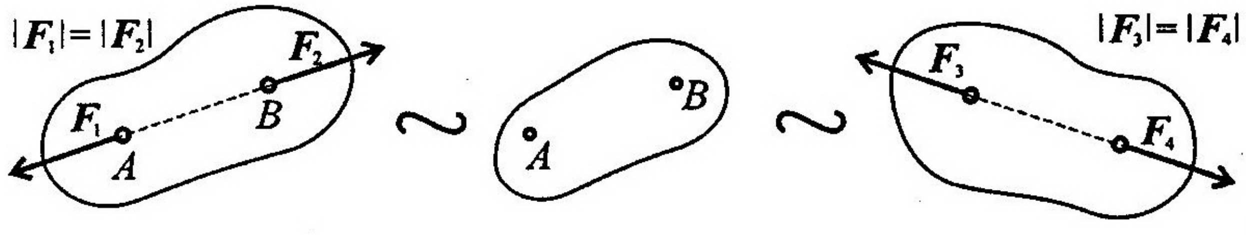


Рис. 1.3.

Аксиома 4 (правило параллелограмма сил).
Равнодействующая двух сил, приложена в той же точке и является диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах (рис. 1.4.).

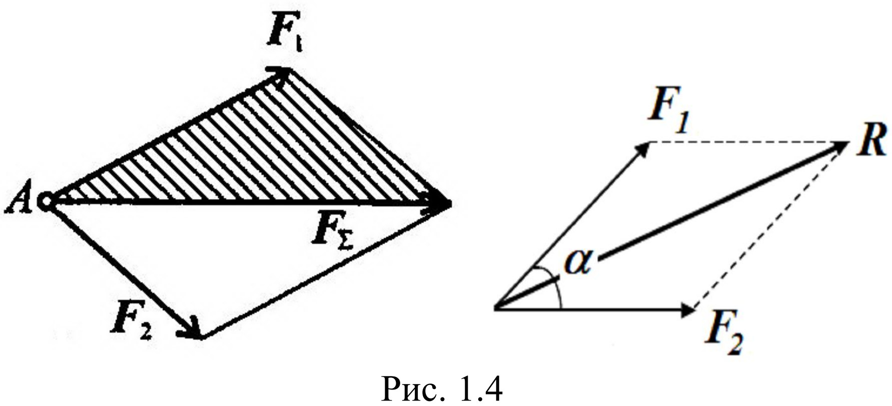


Рис. 1.4

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\left|R\right| = \sqrt{F_1^2 + F_1^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

Вместо параллелограмма можно построить треугольник сил: силы вычерчивают одна за другой в любом порядке; равнодействующая двух соединяет начало первой силы с концом второй.

Аксиома 5.
При взаимодействии тел всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие (рис. 1.5).
Силы, действующие и противодействующие всегда приложены к разным телам, поэтому они не уравновешиваются. Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, всегда равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в разные стороны.

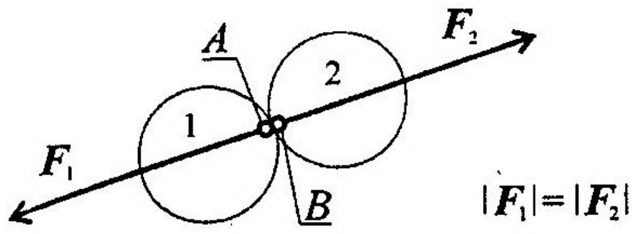


Рис. 1.5

Следствие из аксиом 3 и 4.
Силу, действующую на твердое тело, можно перемещать вдоль линии ее действия (рис. 1.6).

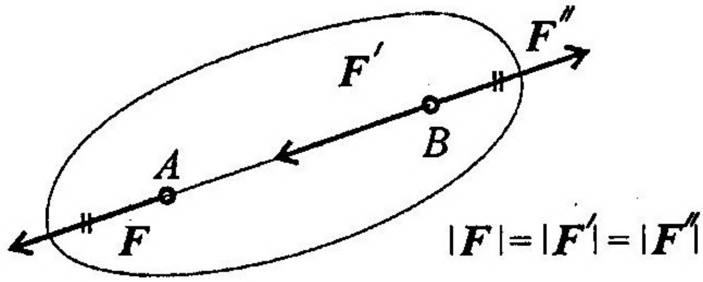


Рис. 1.6.

Сила ***F*** приложена в точке ***A***. Требуется перенести ее в точку ***B***.
Используя третью аксиому, добавим в точке ***B*** уравновешенную систему сил ***(F', F")***. Образуется уравновешенная по второй аксиоме система сил ***(F; F")***. Убираем ее и получим в точке ***B*** силу ***F"***, равную заданной ***F***.

Связи и реакции связей
Все законы и теоремы статики справедливы для свободного твердого тела.
Все тела делятся на свободные и связанные.
Свободные тела – тела, перемещение которых не ограничено.
Связанные тела – тела, перемещение которых ограничено другими телами.
Тела, ограничивающие перемещение других тел, называют **связями**.
Силы, действующие от связей и препятствующие перемещению, называют **реакциями связей**.
Реакция связи всегда направлена с той стороны, **куда нельзя перемещаться**.
Всякое связанное тело можно представить свободным, если связи заменить их реакциями (принцип освобождения от связей).

Все связи можно разделить на несколько типов.

1. Связь – гладкая опора (без трения)
Реакция опоры приложена в точке опоры и всегда направлена перпендикулярно опоре (рис. 1.7).

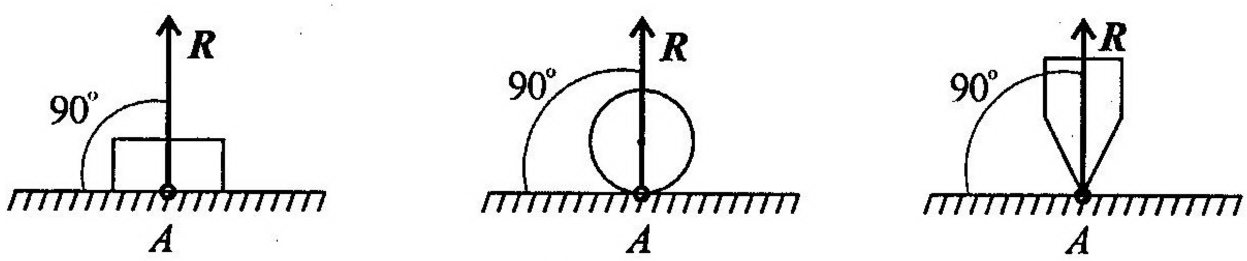


Рис. 1.7

2. Гибкая связь (нить, веревка, трос, цепь)
Груз подвешен на двух нитях (рис. 1.8).

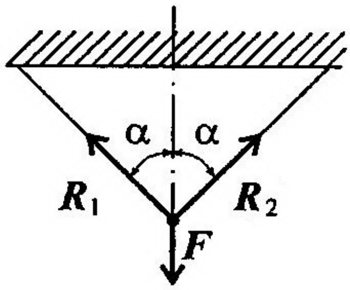


Рис. 1.8

Реакция нити направлена вдоль нити от тела, при этом нить может быть только растянута.

3. Жесткий стержень
На схемах стержни изображают толстой сплошной линией (рис. 1.9).

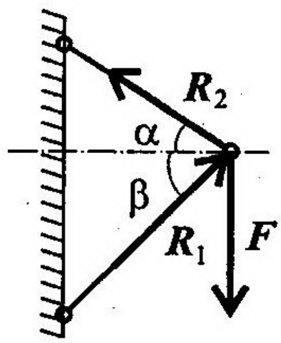


Рис. 1.9

Стержень может быть сжат или растянут. Реакция стержня направлена вдоль стержня. Стержень работает на растяжение или сжатие. Точное направление реакции определяют, мысленно убрав стержень и рассмотрев возможные перемещения тела без этой связи.
Возможным перемещением точки называется такое бесконечно малое мысленное перемещение, которое допускается в данный момент наложенными на него связями.

Убираем стержень 1, в этом случае стержень 2 падает вниз. Следовательно, сила от стержня 1 (реакция) направлена вверх. Убираем стержень 2. В этом случае точка А опускается вниз, отодвигаясь от стены. Следовательно, реакция стержня 2 направлена к стене.

4. Шарнирная опора

Шарнир допускает поворот вокруг точки закрепления. Различают два вида шарниров.

4.1. Подвижный шарнир

Стержень, закрепленный на шарнире, может поворачиваться вокруг шарнира, а точка крепления может перемещаться вдоль направляющей (площадки) (рис. 1.10).

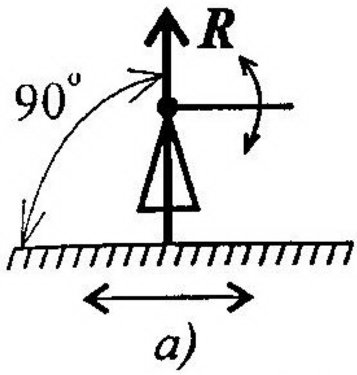


Рис. 1.10

Реакция подвижного шарнира направлена перпендикулярно опорной поверхности, т.к. не допускается только перемещение поперек опорной поверхности.

4.2. Неподвижный шарнир

Точка крепления перемещаться не может. Стержень может свободно поворачиваться вокруг оси шарнира. Реакция такой опоры проходит через ось шарнира, но неизвестна по направлению. Ее принято изображать в виде двух составляющих: горизонтальной и вертикальной (R_x; R_y) (рис. 1.11).

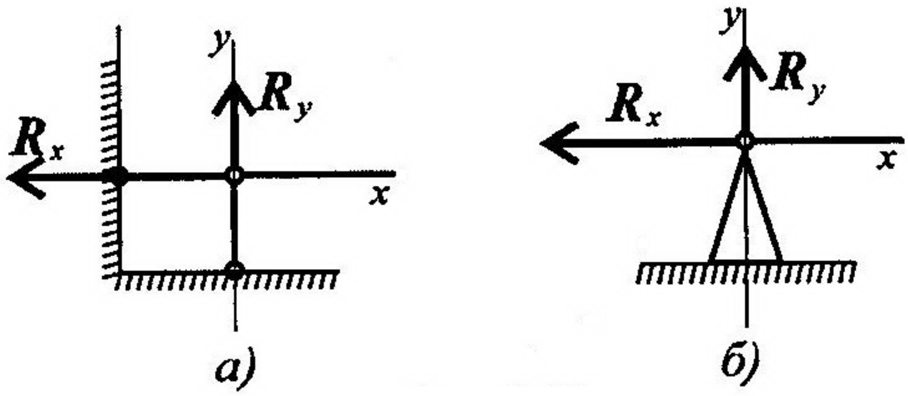


Рис. 1.11

5. Защемление или «заделка»

Любые перемещения точки крепления невозможны.

Под действием внешних сил в опоре возникают реактивная сила и реактивный момент M_R, препятствующий повороту (рис. 1.12).

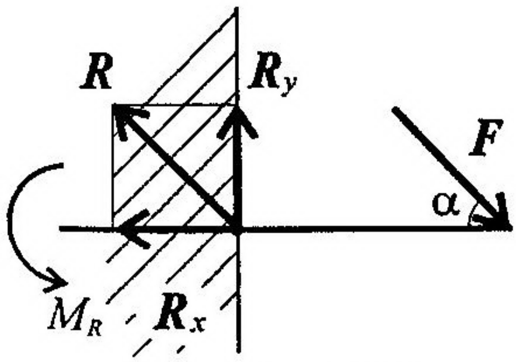


Рис. 1.12

Реактивную силу принято представлять в виде двух составляющих вдоль осей координат

$R = R_x + R_y$

Примеры решения задач

Пример 1.

Груз подвешен на стержнях и канатах и находится в равновесии (рис. 1.13). Изобразить систему сил, действующих на шарнир А.

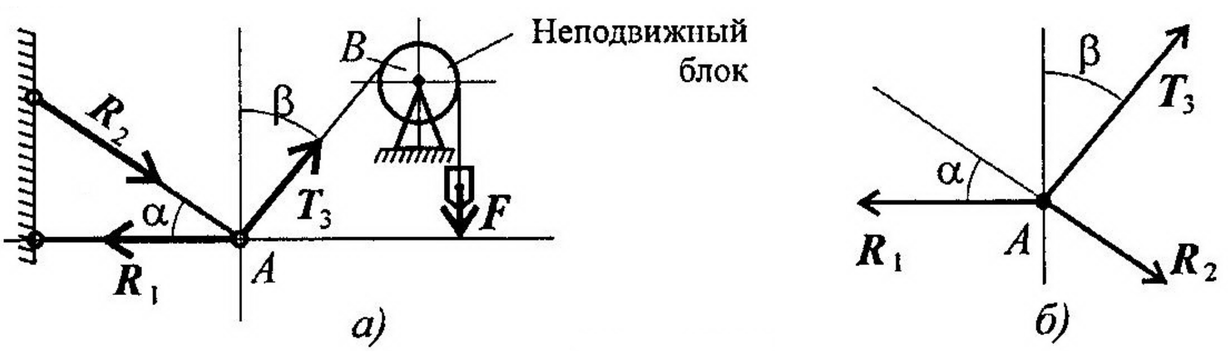


Рис. 1.13

Решение

1. Реакции стержней направлены вдоль стержней, реакции гибких связей направлены вдоль нитей в сторону натяжения (рис. 1.13а).

2. Для определения точного направления усилий в стержнях мысленно убираем последовательно стержни 1 и 2. Анализируем возможные перемещения точки А. Неподвижный блок с действующими на него силами не рассматриваем.

3. Убираем стержень 1, точка А поднимается и отходит от стены, следовательно, реакция стержня 1 направлена к стене.

4. Убираем стержень 2, точка А поднимается и приближается к стене, следовательно, реакция стержня 2 направлена от стены вниз.

5.Канат тянет вправо.

6. Освобождаемся от связей (рис. 1.13 *б*).

Пример 2.

Шар подвешен на нити и опирается на стену (рис. 1.14 *а*). Определить реакции нити и гладкой опоры (стенки).

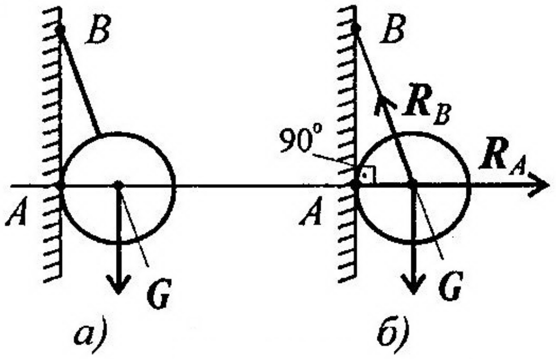


Рис. 1.14

Решение

1. Реакция нити – вдоль нити к точке ***B*** вверх (рис. 1.14 *б*).
2. Реакция гладкой опоры (стенки) – по нормали от поверхности опоры.

Контрольные вопросы и задания

1. Какая из приведенных систем сил (рис. 1.15) уравновешена?

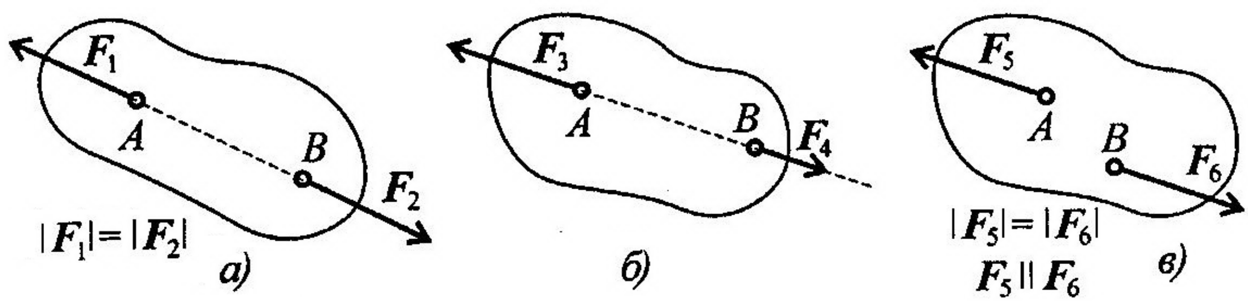


Рис. 1.15

2. Какие силы системы (рис. 1.16) можно убрать, не нарушая механического состояния тела?

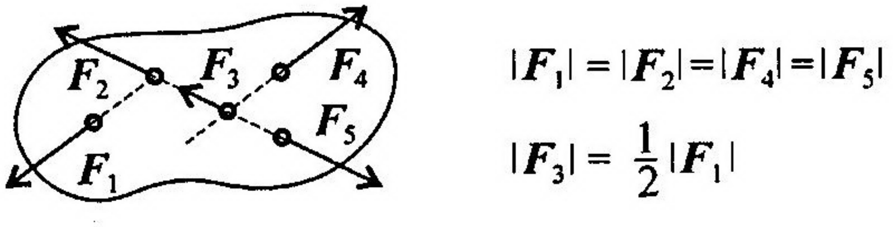


Рис. 1.16

3. Тела 1 и 2 (рис. 1.17) находятся в равновесии. Можно ли убрать действующие системы сил, если тела абсолютно твердые?

Что изменится, если тела реальные, деформируемые?

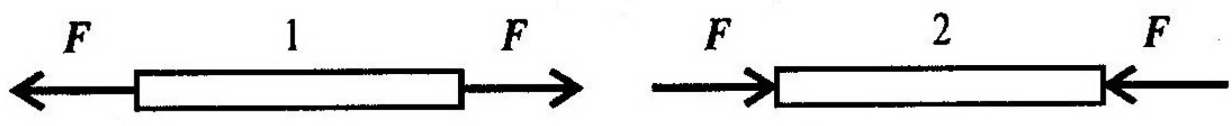


Рис. 1.17

4. Укажите возможное направление реакций в опорах (рис. 1.18).

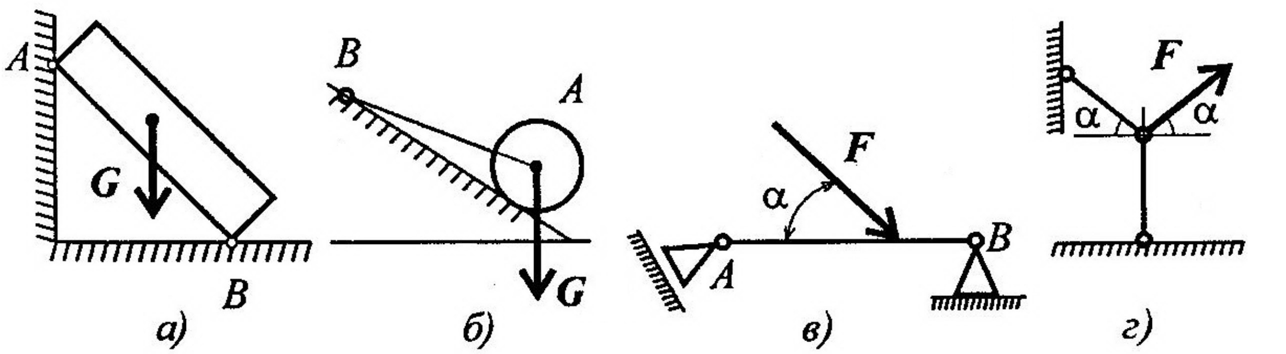


Рис.1.18

ЛЕКЦИЯ № 2 (Олофинская В.П.)

Тема 1.2. Плоская система сходящихся сил. Определение равнодействующей геометрическим способом

Знать геометрический способ определения равнодействующей системы сил, условия равновесия плоской системы сходящихся сил.

Уметь определять равнодействующую, решать задачи на равновесие в геометрической форме.

Плоская система сходящихся сил

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется *сходящейся* (рис. 2.1).

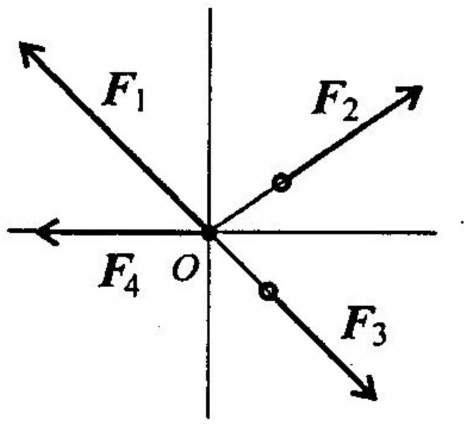


Рис. 2.1.

Необходимо определить равнодействующую системы сходящихся сил ($F_1; F_2; F_2; ......; F_n$), *n* – число сил, входящих в систему.

По следствию из аксиом статики, все силы системы можно переместить вдоль линии действия, и все силы окажутся приложенными в одной точке.

Равнодействующая сходящихся сил

Равнодействующую двух пересекающихся сил можно определить с помощью параллелограмма или треугольника сил (4-я аксиома) (рис. 2.2).

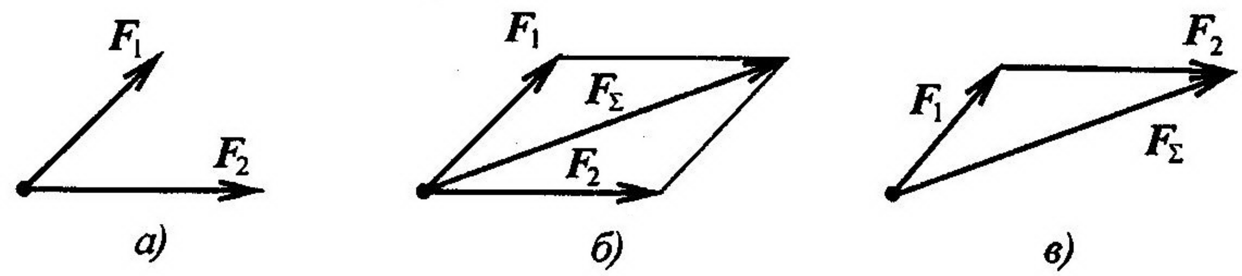


Рис. 2.2.

Используя свойства векторной суммы сил, можно получить равнодействующую любой сходящейся системы сил, складывая последовательно силы, входящие в систему. Образуется многоугольник сил (рис. 2.3). Вектор равнодействующей силы соединит начало первого вектора с концом последнего.

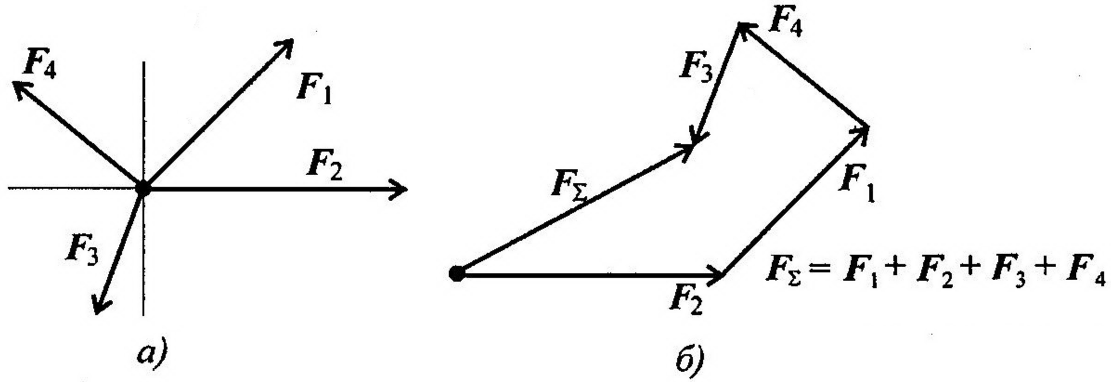


Рис. 2.3

I

При графическом способе определения равнодействующей векторы сил можно вычерчивать в любом порядке, результат (величина и направление равнодействующей) при этом не изменится.

Вектор равнодействующей направлен *навстречу* векторам сил-слагаемых. Такой способ получения равнодействующей называют геометрическим.

Замечание. При вычерчивании многоугольника обращать внимание на параллельность сторон многоугольника соответствующим векторам сил.

Порядок построения многоугольника сил

1. Вычертить векторы сил заданной системы в некотором масштабе один за другим так, чтобы конец предыдущего вектора совпадал с началом последующего.
2. Вектор равнодействующей замыкает полученную ломаную линию; он соединяет начало первого вектора с концом последнего и направлен ему навстречу.
3. При изменении порядка вычерчивания векторов в многоугольнике меняется *вид* фигуры. *На результат порядок вычерчивания не влияет.*

Условие равновесия плоской системы сходящихся сил

При равновесии системы сил равнодействующая должна быть равна нулю, следовательно, при геометрическом построении конец последнего вектора должен *совпасть с* началом первого.

Если плоская система сходящихся сил находится в равновесии, многоугольник сил этой системы должен быть замкнут.

ЛЕКЦИЯ 3

Тема 1.2. Плоская система сходящихся сил. Определение равнодействующей аналитическим способом

ЛЕКЦИЯ 4

Тема 1.3. Пара сил и момент силы относительно точки

Знать обозначение, модуль и определение моментов пары сил и силы относительно точки, условия равновесия системы пар сил.

Уметь определять моменты пар сил и момент силы относительно точки, определять момент результирующей пары сил.

1. Пара сил

Парой сил называется система двух сил, равных по модулю, параллельных и направленных в разные стороны.

Рассмотрим систему сил *(F;F'},* образующих пару.

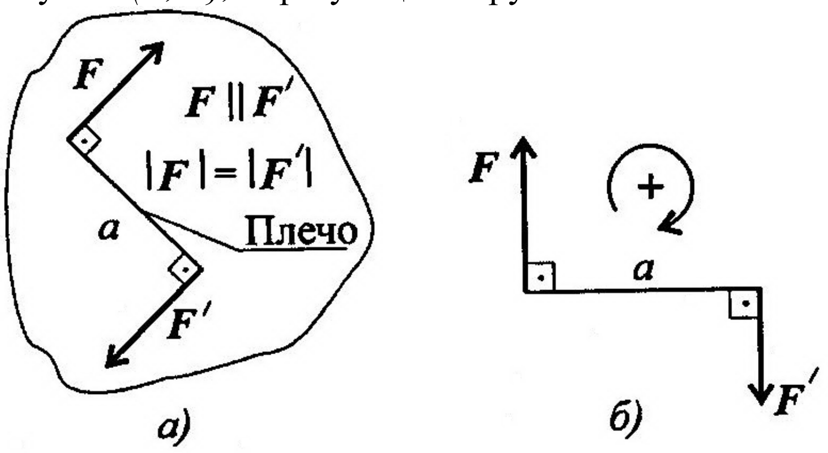


Рис. 4.1

Пара сил вызывает вращение тела и ее действие на тело оценивается моментом. Силы, входящие в пару, не уравновешиваются, т. к. они приложены к двум точкам (рис. 4.1). Их действие на тело не может быть заменено одной силой (равнодействующей).

2. Момент пары сил

Момент пары сил численно **равен произведению модуля силы на расстояние между линиями действия сил** *(плечо пары).* $M = F \cdot a \quad [H \cdot м]$

Момент считают положительным, если пара вращает тело по часовой стрелке (*рис. 4.1, б.*

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется *плоскостью действия пары.*

3. Свойства пар (без доказательств):

1. Пару сил можно перемещать в плоскости ее действия.

2. Эквивалентность пар. Две пары, моменты которых равны, (рис. 4.2) эквивалентны (действие их на тело аналогично).

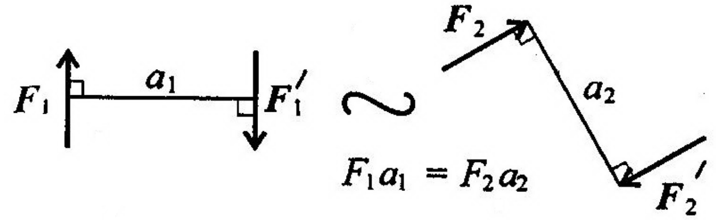


Рис. 4.2

3. Сложение пар сил. Систему пар сил можно заменить равнодействующей парой. Момент равнодействующей пары равен алгебраической сумме моментов пар, составляющих систему (рис. 4.3):

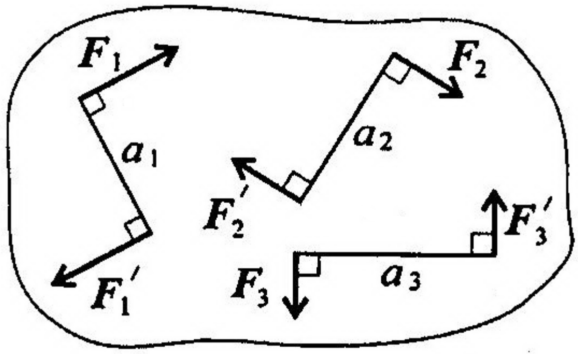


Рис. 4.3

$$M_\Sigma = F_1a_1 + F_2a_2 + F_3a_3 + \cdots + F_na_n; \quad M_\Sigma = \sum_0^n m_k.$$

4. Равновесие пар.
Для равновесия пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов пар системы равнялась нулю:

$$M_\Sigma = 0 \Longrightarrow \sum_0^n m_k = 0.$$

3. Момент силы относительно точки

Сила, не проходящая через точку крепления тела, вызывает вращение тела относительно точки, поэтому действие такой силы на тело оценивается моментом.
Момент силы относительно точки численно равен произведению модуля силы на расстояние от точки до линий действия силы.
$M = \pm F \cdot a \quad [H \cdot м]$
Перпендикуляр, опущенный из точки на линию действия силы (рис. 4.4), называется ***плечом*** **силы**.

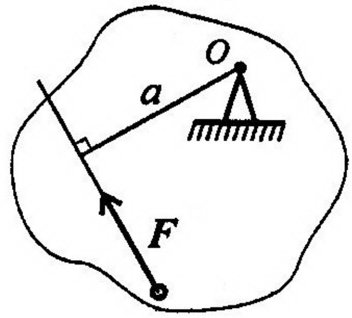
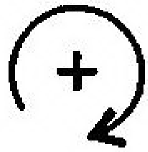


Рис. 4.4

Обозначение момента *Mo(F)* или *mo(F);*
$m_0(F) = Fa$.
Единица измерения *[mo(F)]* = Н·м.
Момент считается положительным, если сила разворачивает тело по часовой стрелке.



***Примечание**. В разных учебных пособиях знак момента назначается по-разному.*
Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через точку, т. к. в этом случае расстояние от точки до силы равно нулю.

Примеры решения задач

Пример 1. Дана пара сил $|F_1| = |F_1'| = 42$ кН; плечо а = 2 м. Заменить заданную пару сил эквивалентной парой с плечом а = 0,7 м (*рис. 4.5*).

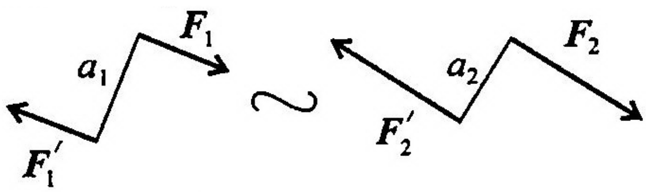


Рис. 4.5

Решение
Пары сил эквивалентны, если моменты этих пар численно равны:

$$M_1 = F_1 \cdot a_1 = 42 \cdot 2 = 84\ кН \cdot м; \quad M_2 = F_2 \cdot a_2; \quad M_1 = M_2 .$$

Откуда $F_2 = \dfrac{84}{0,7} = 120$ кН.

Пример 2. Дана система пар сил (*рис. 4.6*). Определить момент результирующей пары.

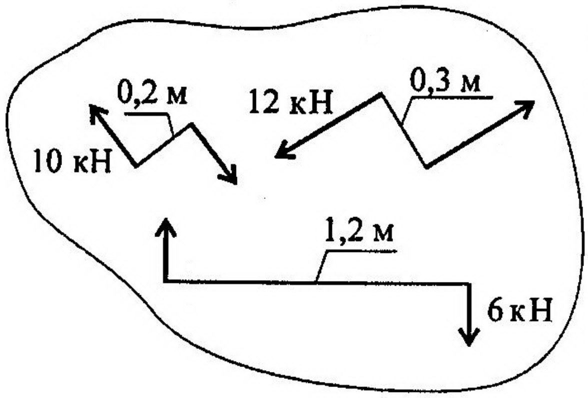


Рис. 4.6

Решение

Момент результирующей пары равен алгебраической сумме моментов пар системы:

$$M_{\sum} = \sum_{0}^{n} M_k$$

Подставив численные значения, получим:

$M_1 = 10 \cdot 0,2 = 2\ кН \cdot м;$

$M_2 = -12 \cdot 0,3 = -3,6\ кН \cdot м;$

$M_3 = 6 \cdot 1,2 = 7,2\ кН \cdot м;$

$M_{\sum} = 2 + (-3,6) = 7,2 = 5,6\ кН \cdot м.$

Знак свидетельствует о том, что момент вызывает вращение по часовой стрелке. Величину силы и плеча определить не удается.

Примечание. Чтобы уравновесить данную систему пар, необходимо приложить пару сил, равную по модулю и направленную
в обратную сторону. Такую пару сил называют *уравновешивающей.*

Занятие №7

Пример 3. Рассчитать сумму моментов сил относительно точки *O* (рис. 4.7).

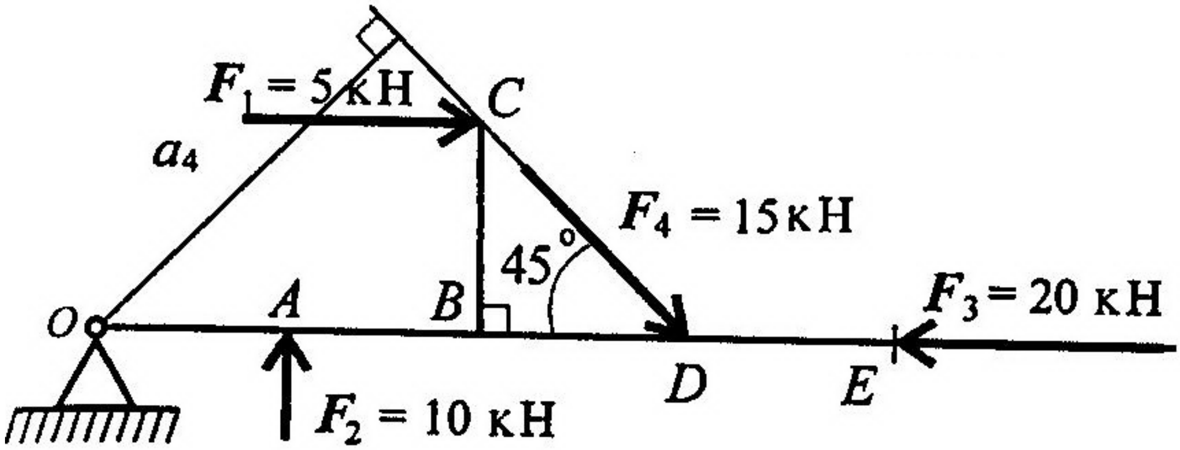


Рис. 4.7

OA = AB = BD = DE = CB = 2м.

Решение
1. Момент силы относительно точки численно равен произведению модуля силы на плечо силы.
2. Момент силы равен нулю, если линия действия силы проходит через точку.

$$m_{O1} = F_1 a_1; \qquad m_{O1} = 5 \cdot 2 = 10\,\text{кН·м};$$
$$m_{O2} = F_2 a_2; \qquad m_{O2} = -10 \cdot 2 = -20\,\text{кН·м};$$
$$m_{O3} = F_3 a_3; \qquad m_{O3} = 0;$$
$$m_{O4} = F_4 a_4; \qquad m_{O4} = 15 \cdot 6 \cdot 0{,}707 = 69{,}3\,\text{кН·м};$$
$$m_{O\Sigma} = 10 - 20 + 69{,}3 = 59{,}3\,\text{кН·м}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какие силы из системы сил (рис. 4.8) образуют пары?

F1= $F_2 = F_4$; $F_3 = F_6$; $F_5 = 0{,}9F_6$.

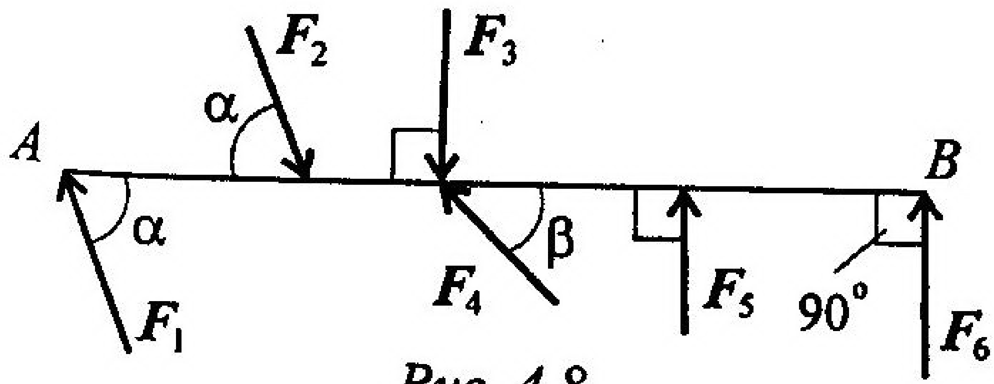


Рис. 4.8

2. Определите момент изображенной на рис. 4.9 пары сил.

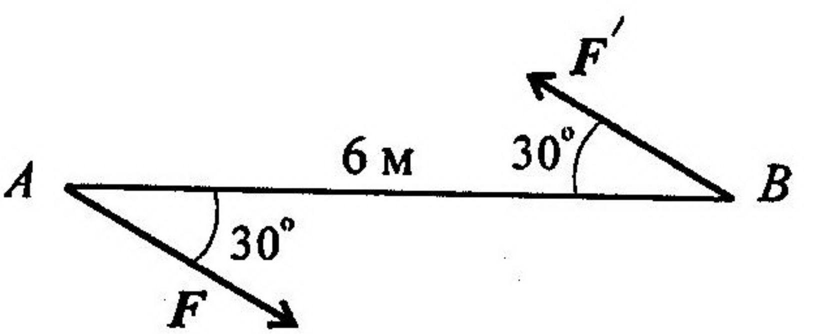


Рис. 4.9

3. Какие из изображенных пар (рис. 4.10) эквивалентны, если ***F1= F_2 = 8кН; F_3 = 6,4кН; a1 = 2м; a_2 = 2,5м?***

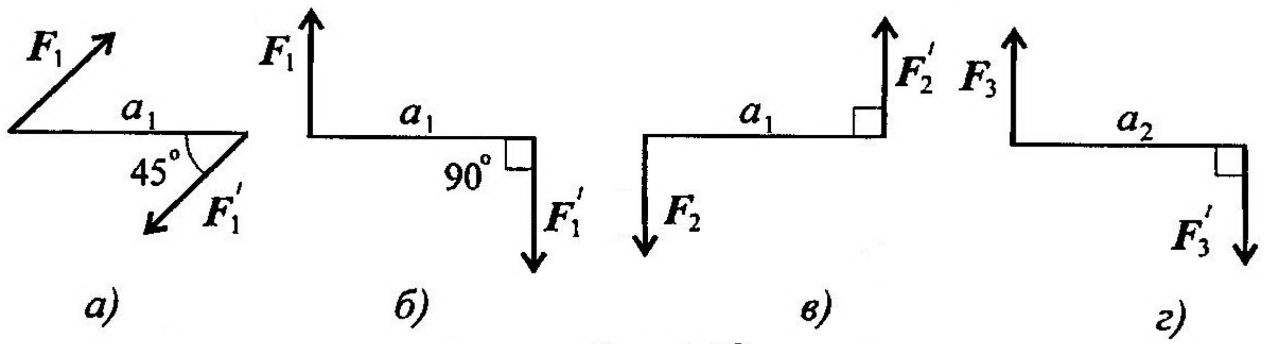


Рис. 4.10

ЛЕКЦИЯ 5

Тема 1.4. Плоская система произвольно расположенных сил

Иметь представление о главном векторе, главном моменте, равнодействующей плоской системы произвольно расположенных сил.

Знать теорему Пуансо о приведении силы к точке, приведение произвольной плоской системы сил к точке, три формы уравнений равновесия.

Уметь заменять произвольную плоскую систему сил одной силой и одной парой.

Теорема Пуансо о параллельном переносе сил

Силу можно перенести параллельно линии ее действия, при этом нужно *добавить пару сил с моментом,* равным произведению модуля силы на расстояние, на которое перенесена сила.

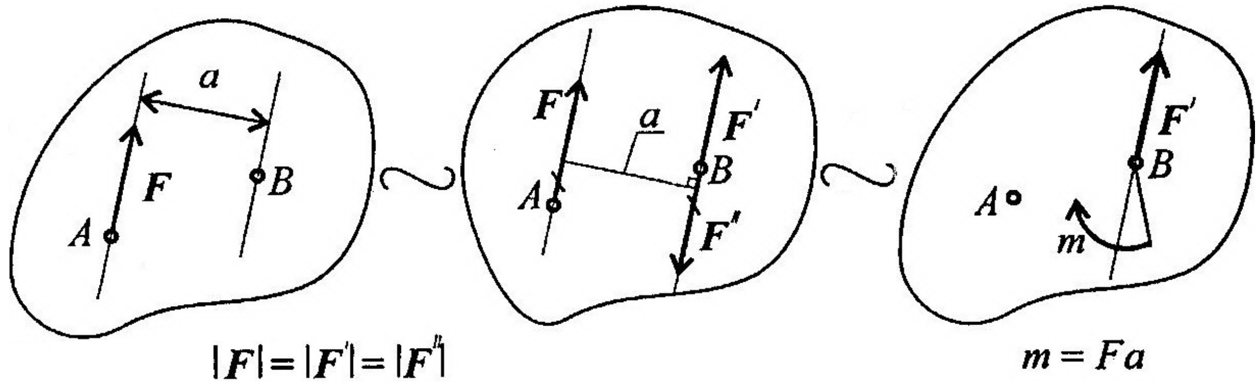


Рис. 5.1

Дано: сила в точке *A* (рис. 5.1).

Добавим в точке *B* уравновешенную систему сил ($F';F''$). Образуется пара сил ($F;F''$). Получим силу в точке ***B*** и момент пары ***m***.

Приведение к точке плоской системы произвольно расположенных сил

Линии действия произвольной системы сил не пересекаются в одной точке, поэтому для оценки состояния тела такую систему следует упростить. Для этого все силы системы переносят в одну произвольно выбранную точку — точку приведения. Применяют теорему Пуансо. При любом переносе силы в точку, не лежащую на линии ее действия, добавляют пару сил.

Появившиеся при переносе пары называют ***присоединенными*** парами.

Дана плоская система произвольно расположенных сил (рис. 5.2).

Переносим все силы в точку *O*. Получим пучок сил в точке *O,* который можно заменить одной силой — ***главным вектором системы.*** Образующуюся систему пар сил можно заменить одной эквивалентной парой — ***главным моментом системы***.

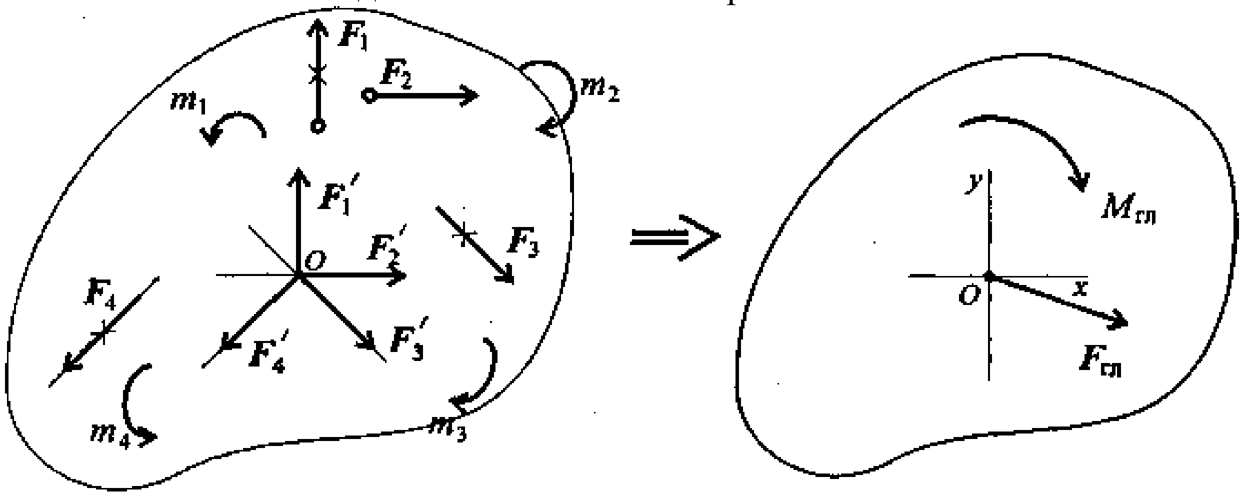


Рис. 5.2

$$F_{Гл} = \sum_{0}^{n} F_k$$

Главный вектор равен геометрической сумме векторов произвольной плоской системы сил. Проецируем все силы системы на оси координат и, сложив соответствующие проекции на оси, получим проекции главного вектора.

$$F_{Глx} = \sum_{0}^{n} F_{kx}; \quad F_{Глy} = \sum_{0}^{n} F_{ky}.$$

По величине проекций главного вектора на оси координат находим модуль главного вектора:

$$F_{Гл} = \sqrt{F_{Глx}^2 + F_{Глy}^2}.$$

Главный момент системы сил равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно точки приведения.

$$M_{Гл0} = m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n;$$

$$M_{Гл0} = \sum_{0}^{n} m_0\left(F_k\right)$$

Таким образом, произвольная плоская система сил приводится к одной силе (главному вектору системы сил) и *одному моменту* (главному моменту системы сил).

Влияние точки приведения

Точка приведения выбрана произвольно. При изменении положения точки приведения величина главного вектора не изменится.

Величина главного момента при переносе точки приведения изменится, т. к. меняются расстояния от векторов-сил до новой точки приведения.

С помощью теоремы Вариньона о моменте равнодействующей можно определить точку на плоскости, относительно которой главный момент равен нулю. ***Тогда произвольная плоская система сил может быть заменена одной силой.***

Эту силу называют ***равнодействующей*** системы сил.

Численно равнодействующая равна главному вектору системы сил, но приложена в другой точке, относительно которой главный момент равен нулю. Равнодействующую принято обозначать $F_{\sum}$.

Численно ее значение определяется так же, как главный вектор системы сил:

$$F_{\sum} = F_{Гл},$$

$$F_{\sum} = \sqrt{\left(\sum_{0}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{0}^{n} F_{ky}\right)^2}.$$

$$F_{\Sigma} = F_{гл},$$

$$F_{\Sigma} = \sqrt{\left(\sum^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum^{n} F_{ky}\right)^2}$$

Точку приложения равнодействующей можно определить по формуле

$$d = \frac{M_{Гл}}{F_{Гл}},$$

где d — расстояние от выбранной точки приведения до точки приложения равнодействующей;

$M_{Гл}$ – величина главного момента относительно выбранной точки приведения;

$F_{Гл}$ – величина главного вектора системы сил.

Частные случаи приведения системы сил к точке

При приведении системы сил к точке возможны следующие варианты:

1. $\begin{matrix} F_{Гл} = 0 \\ M_{Гл0} \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow$ тело вращается вокруг неподвижной оси.

2. $\begin{matrix} M_{Гл0} = 0 \\ F_{Гл} \neq 0; \quad F_{Гл} = F_{\sum} \end{matrix} \Rightarrow$ тело движется прямолинейно ускоренно.

3. $\begin{matrix} M_{Гл0} = 0 \\ F_{Гл} = 0 \end{matrix} \Rightarrow$ тело находится в равновесии.

Условие равновесия произвольной плоской системы сил

1. При равновесии главный вектор системы равен нулю ($F_{Гл} = 0$).

Аналитическое определение главного вектора приводит к выводу:

$$F_{Гл} = \sqrt{F_{Глx}^2 + F_{Глy}^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum\limits_0^n F_{ky} = 0, \end{cases}$$

F_{kx} и F_{ky} – проекции векторов на оси координат.

2. Поскольку точка приведения выбрана произвольно, ясно, что при равновесии сумма моментов сил системы относительно любой точки на плоскости должна равняться нулю:

$$M_{Гл0} = \sum_0^n m_0\left(F_k\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_0^n m_A F_k = 0; \\ \sum\limits_0^n m_B F_k = 0, \end{cases}$$

где A и B – разные точки приведения.

Условие равновесия произвольной плоской системы сил может быть сформулировано следующим образом:

Для того чтобы твердое тело под действием произвольной плоской системы сил находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равнялась нулю и алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно любой точки в плоскости действия сил равнялась нулю.

Получим основную форму уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum\limits_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum\limits_0^n F_{ky} = 0; \\ \sum\limits_0^n m_A\left(F_k\right) = 0; \\ \sum\limits_0^n m_B\left(F_k\right) = 0; \quad \}\,\textit{уравнения моментов.} \\ \sum\limits_0^n m_C\left(F_k\right) = 0 \end{cases}$$

Теоретически уравнений моментов можно записать бесконечное множество, но практически доказано, что на плоскости можно составить только три независимых уравнения моментов и при этом три точки (центры моментов) не должны лежать на одной линии.

Таким образом, имеем пять независимых уравнений равновесия.

Практически для решения задач на плоскости достаточно трех уравнений равновесия. В каждом конкретном случае используются уравнения с одним неизвестным.

Для разных случаев используются три группы уравнений равновесия.

Первая форма уравнений равновесия:

Теоретически уравнений моментов можно записать бесконечное множество, но практически доказано, что на плоскости можно составить только три независимых уравнения моментов и при этом три точки (центры моментов) не должны лежать на одной линии.

Таким образом, имеем пять независимых уравнений равновесия.

Практически для решения задач на плоскости достаточно трех уравнений равновесия. В каждом конкретном случае используются уравнения с одним неизвестным.

Для разных случаев используются три группы уравнений равновесия.

$$\begin{cases} \sum\limits_{0}^{n} F_{kx} = 0; \\ \sum\limits_{0}^{n} F_{ky} = 0; \\ \sum\limits_{0}^{n} m_A(F_k) = 0. \end{cases}$$

Вторая форма уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum\limits_{0}^{n} F_{kx} = 0; \\ \sum\limits_{0}^{n} m_A(F_k) = 0; \\ \sum\limits_{0}^{n} m_B(F_k) = 0. \end{cases}$$

Третья форма уравнений равновесия:

$$\begin{cases}\sum_0^n m_A(F_k)=0;\\ \sum_0^n m_B(F_k)=0;\\ \sum_0^n m_C(F_k)=0.\end{cases}$$

Для частного случая, если уравновешена система параллельных сил, можно составить только два уравнения равновесия:

$$\sum_0^n F_{kx}=0; \quad \sum_0^n m_A(F_k)=0.$$

Ось ***Ox*** системы координат параллельна линии действия сил.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти момент присоединенной пары при переносе силы $\boldsymbol{F_3}$ в точку ***B*** (рис. 5.3). ***F1 = 10 кН; F_2 = 15 кН; F_3 = 18 кН; a = 0,2 м***.

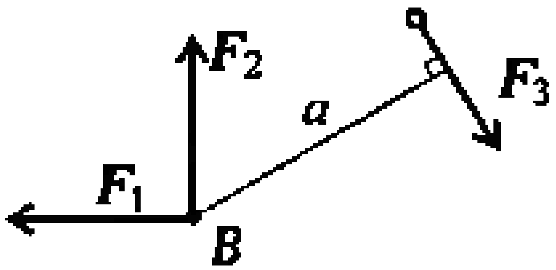


Рис. 5.3

Решение

Используем теорему Пуансо.

$$\sum_0^n m_B(F_3)=18\cdot 0,2=3,6 \text{ кН·м.}$$

Пример 2. Найти главный вектор системы (рис. 5.4). F1 = 10 кН; F_2 = 16 кН; F_3 = 12 кН; m = 60 кН·м.

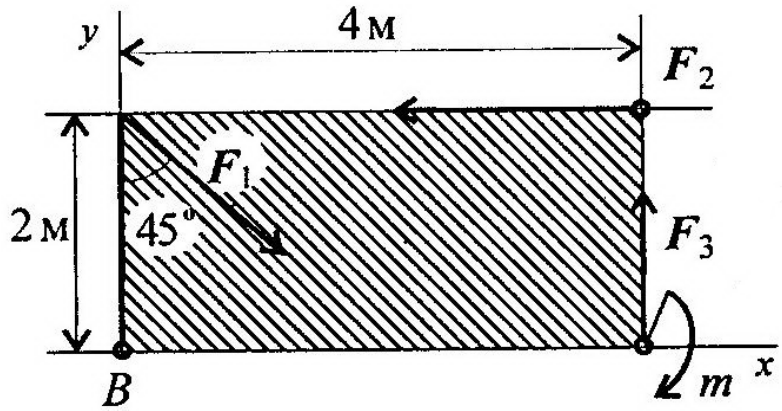


Рис. 5.4

Решение

Главный вектор равен геометрической сумме сил:

$$\boldsymbol{F}_{\text{гл}_x} = \sum_{0}^{n} \boldsymbol{F}_{kx};$$

$$F_{\text{гл}_x} = F_1 \cos 45^\circ - F_2 = -9\,\text{кН}$$

$$\boldsymbol{F}_{\text{гл}_y} = \sum_{0}^{n} \boldsymbol{F}_{ky};$$

$$F_{\text{гл}_y} = -F_1 \cos 45^\circ + F_3 = 5\,\text{кН}$$

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F^2_{\text{гл}_x} + F^2_{\text{гл}_y}};$$

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{(-9)^2 + 5^2} \approx 10\,\text{кН}.$$

Пример 3. Найти главный момент системы относительно точки В (использовать данные примера 2).

Решение

Главный момент равен алгебраической сумме моментов сил относительно точки приведения:

$$M_{\text{гл}} = \sum_{0}^{n} m_B(\boldsymbol{F}_k);$$

$$\sum m_B = F_1 \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ - F_2 \cdot 2 - F_3 \cdot 4 + m;$$

$$M_{\text{гл}} = 10 \cdot 2 \cdot 0{,}7 - 16 \cdot 2 - 12 \cdot 4 + 60 = -6\,\text{кН·м}.$$

Пример 4. К телу приложена уравновешенная система сил (рис. 5.5). Две из них неизвестны. Определить неизвестные силы.

$$F_1 = 10\,\text{кН};\ F_2 = 16\,\text{кН}.$$

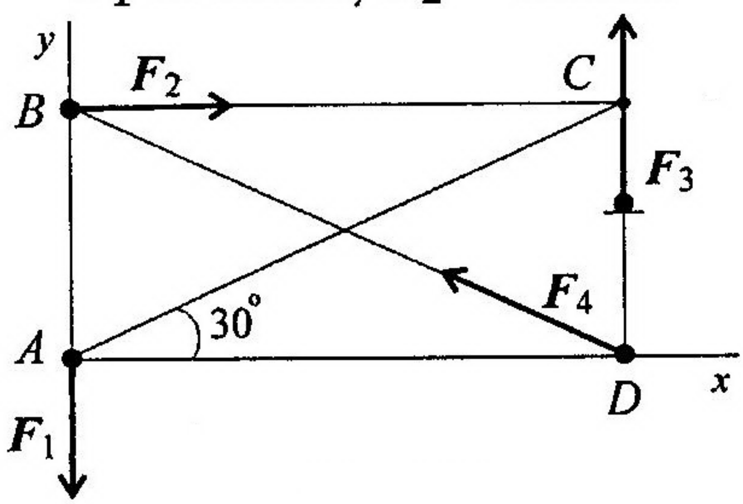


Рис. 5.5

Наносим оси координат и используем уравнения равновесия:

$$\sum F_x = 0;\ F_2 - F_4\cos 30^\circ = 0;$$
$$F_4 = F_2/\cos 30^\circ \cong 18{,}5\,\text{кН};$$
$$\sum F_y = 0;\ -F_1 + F_3 + F_4\cos 60^\circ = 0;$$
$$F_3 = F_1 - F_4\cos 60^\circ;$$
$$F_3 = 10 - 18{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}75\,\text{кН}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Чему равен главный вектор системы сил?
2. Чему равен главный момент системы сил при приведении ее к точке?
3.Чем отличается главный вектор от равнодействующей плоской системы произвольно расположенных сил?

Выбрать из предложенных ответов:

— величиной;
— направлением;
— величиной и направлением;
— точкой приложения;
— Ничем.

4. Тело движется равномерно и прямолинейно (равновесие).
Чему равны главный вектор и главный момент системы?
5. Тело вращается вокруг неподвижной оси.
Чему равны главный вектор и главный момент действующей на него системы сил?
6. Найдите главный вектор и главный момент системы сил, если центр приведения находится в точке *A* (*рис. 5.6*).

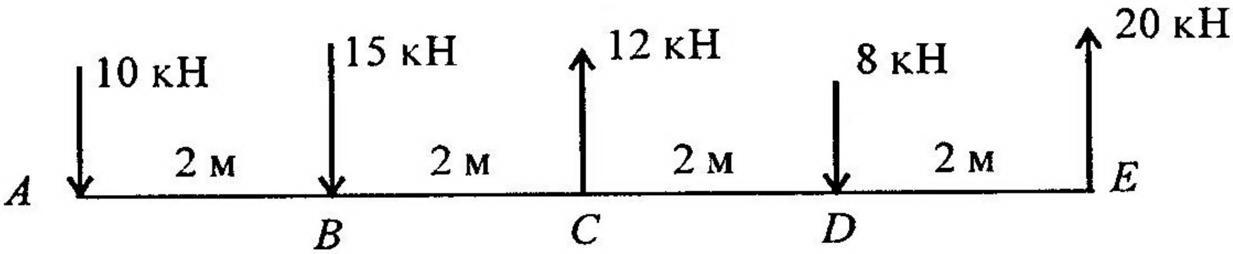


Рис.5.6

7. Какое еще уравнение равновесия нужно составить, чтобы убедиться в том, что система сил (*рис. 5.7*) находится в равновесии?

$$\sum_0^n F_{kx} = 0;\ \sum_0^n F_{ky} = 0.$$

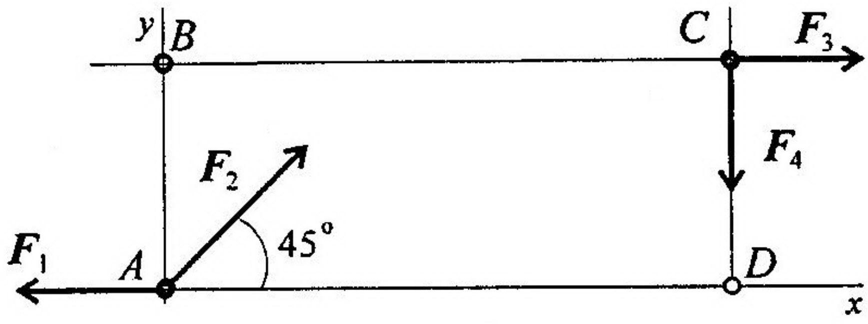


Рис. 5.7

ЛЕКЦИЯ 6

Тема 1.4. Балочные системы.
Определение реакций опор и моментов защемления

Иметь представление о видах опор и возникающих реакциях в опорах.
Знать три формы уравнений равновесия и уметь их использовать для определения реакций в опорах балочных систем.
Уметь выполнять проверку правильности решения.

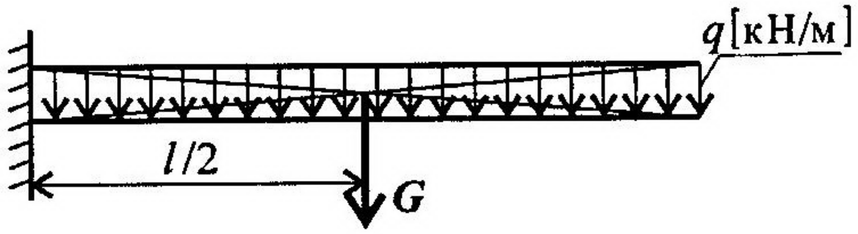
Виды нагрузок и разновидности опор

Виды нагрузок

По способу приложения нагрузки делятся на **сосредоточенные** и **распределенные**. Если реально передача нагрузки происходит на пренебрежимо малой площадке (в точке), нагрузку называют *сосредоточенной.*

Часто нагрузка распределена по значительной площадке или линии (давление воды на плотину, давление снега на крышу и т.п.), тогда нагрузку считают *распределенной.*

В задачах статики для абсолютно твердых тел ***распределенную нагрузку*** *можно* ***заменить равнодействующей*** **сосредоточенной силой** (рис. 6.1).



q — интенсивность нагрузки; l — длина стержня;

$G = ql$ — равнодействующая распределенной нагрузки.

Рис. 6.1

Разновидности опор балочных систем (см. лекцию 1) Балка — конструктивная деталь в виде прямого бруса, закрепленная на опорах и изгибаемая приложенными к ней силами.

Высота сечения балки незначительна по сравнению с длиной.

Жесткая заделка (защемление} (рис. 6.2)

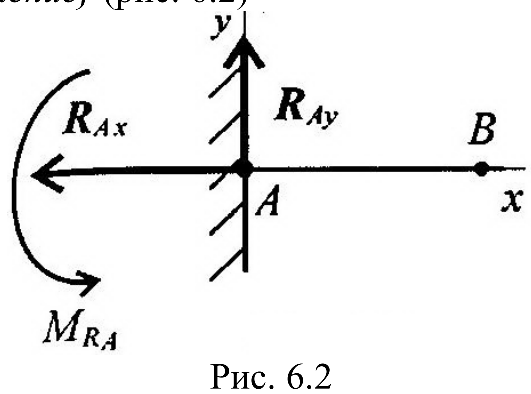


Рис. 6.2

Опора не допускает перемещений и поворотов. Заделку заменяют двумя составляющими силы R_{Ax} и R_{Ay} и парой с моментом M_R.

Для определения этих неизвестных удобно использовать систему уравнений в виде

$$\sum_{0}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{0}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{0}^{n} m_{kA} = 0.$$

Каждое уравнение имеет одну неизвестную величину и решается без подстановок. Для контроля правильности решений используют дополнительное уравнение моментов относительно любой точки на балке, например *B:*

$$\sum_{0}^{n} m_{kB} = 0.$$

Шарнирно-подвижная опора (рис. 6.3)

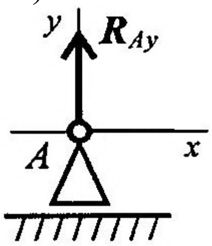


Рис. 6.3

Опора допускает поворот вокруг шарнира и перемещение вдоль опорной поверхности. **Реакция направлена перпендикулярно опорной поверхности**.

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 6.4)

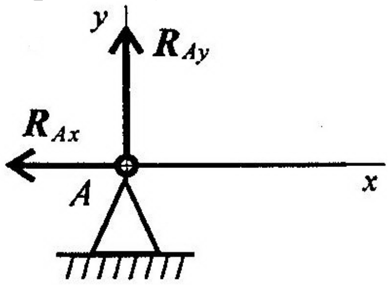


Рис. 6.4

Опора допускает поворот вокруг шарнира и может быть заменена **двумя составляющими силы вдоль осей координат**.

Балка на двух шарнирных опорах (рис. 6.5)

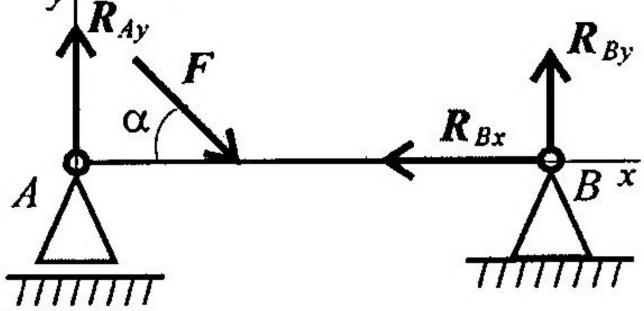


Рис. 6.5

Не известны три силы, две из них — вертикальные, следовательно, удобнее для определения неизвестных использовать систему уравнений во второй форме

$$\sum_{0}^{n} m_{kA} = 0; \quad \sum_{0}^{n} m_{kB} = 0; \quad \sum_{0}^{n} F_{kx} = 0.$$

Составляются уравнения моментов относительно точек крепления балки. Поскольку момент силы, проходящей через точку крепления, равен 0, в уравнении останется одна неизвестная сила.

Из уравнения $\sum_{0}^{n} F_{kx} = 0$ определяется реакция R_{Bx}.

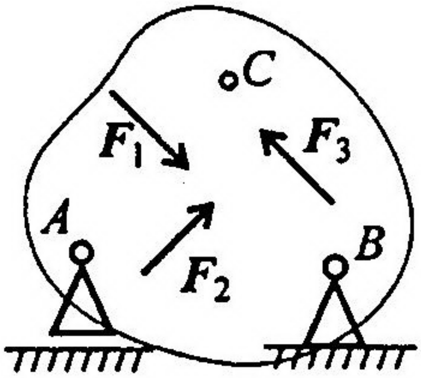
Из уравнения $\sum_{0}^{n} m_{kA} = 0$ определяется реакция R_{By}.

Из уравнения $\sum_{0}^{n} m_{kB} = 0$ определяется реакция R_{Ay}.

Для контроля правильности решения используется дополнительное уравнение

$$\sum_{0}^{n} F_{ky} = 0.$$

При равновесии твердого тела, где можно выбрать три точки, не лежащие на одной прямой, удобно использовать систему уравнений в третьей форме (рис. 6.6):



$$\begin{cases} \sum_{0}^{n} m_A(F_k) = 0; \\ \sum_{0}^{n} m_B(F_k) = 0; \\ \sum_{0}^{n} m_C(F_k) = 0. \end{cases}$$

Рис. 6.6

Примеры решения задач

Пример 1. Одноопорная (защемленная) балка нагружена сосредоточенными силами и парой сил (рис. 6.7). Определить реакции заделки.

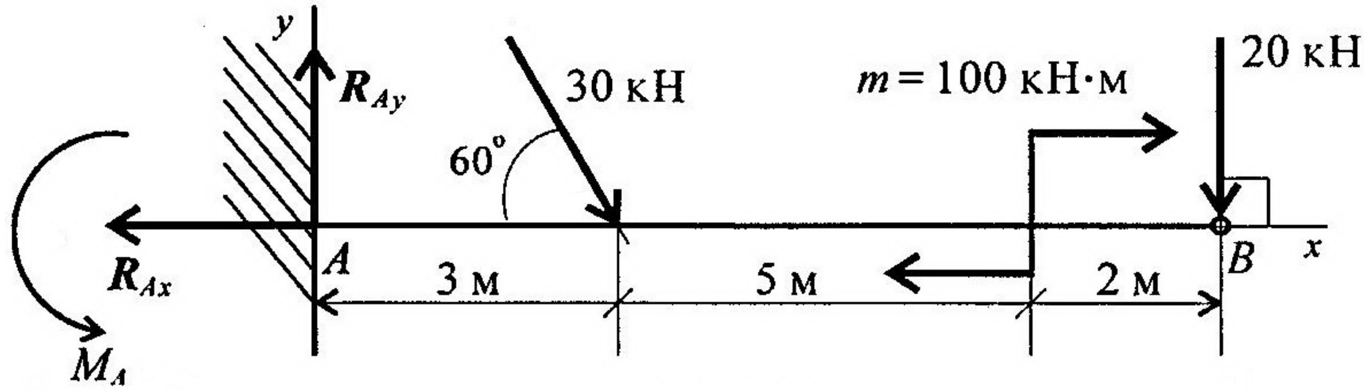


Рис. 6.7

Решение

1. В заделке может возникнуть реакция, представляемая двумя составляющими $(R_{Ay}; R_{Ax})$, и реактивный момент M_A. Наносим на схему балки возможные направления реакций.

Замечание. Если направления выбраны неверно, при расчетах получим отрицательные значения реакций. В этом случае реакции на схеме следует направить в противоположную сторону, не повторяя расчета.

В силу малой высоты считают, что все точки балки находятся на одной прямой; все три неизвестные реакции приложены в одной точке. Для решения удобно использовать систему уравнений равновесия в первой форме. Каждое уравнение будет содержать одну неизвестную.

2. Используем систему уравнений:

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad \sum_0^n F_{ky} = 0; \quad \sum_0^n m_{k_A} = 0.$$

$$\sum_0^n F_{kx} = -R_{Ax} + 30 \cdot \cos 60° + 20 \cdot \cos 90° = 0.$$

$$R_{Ax} = 30 \cdot \cos 60° + 20 \cdot \cos 90° = 15\,\text{кН}.$$

$$\sum_0^n F_{ky} = R_{Ay} - 30 \cdot \cos 30° - 20 \cdot \cos 0° = 0.$$

$$R_{Ay} = 30 \cdot 0{,}866 + 20 \cdot 1 = 45{,}98\,\text{кН}.$$

$$\sum_0^n m_{kA} = -M_A + 30 \cdot 3 \cdot \sin 60° + 100 + 20 \cdot 10 = 0.$$

$$M_A = 377{,}94\,\text{кН·м}.$$

Знаки полученных реакций $(+)$, следовательно, направления реакций выбраны верно.

3. Для проверки правильности решения составляем уравнение моментов относительно точки *B*.

$$\sum m_{kB} = -M_A + R_{Ay} \cdot 10 - 30 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ + 100 = 0.$$

Подставляем значения полученных реакций:

$$-377{,}94 + 45{,}98 \cdot 10 - 210 \cdot 0{,}866 + 100 = 0;$$

$$-559{,}8 + 559{,}8 = 0.$$

Решение выполнено верно.

Пример 2. Двухопорная балка с шарнирными опорами *A* и *B* нагружена сосредоточенной силой $\boldsymbol{F}$, распределенной нагрузкой с интенсивностью $\boldsymbol{q}$ и парой сил с моментом $\boldsymbol{m}$ (рис. 6.8 а). Определить реакции опор.

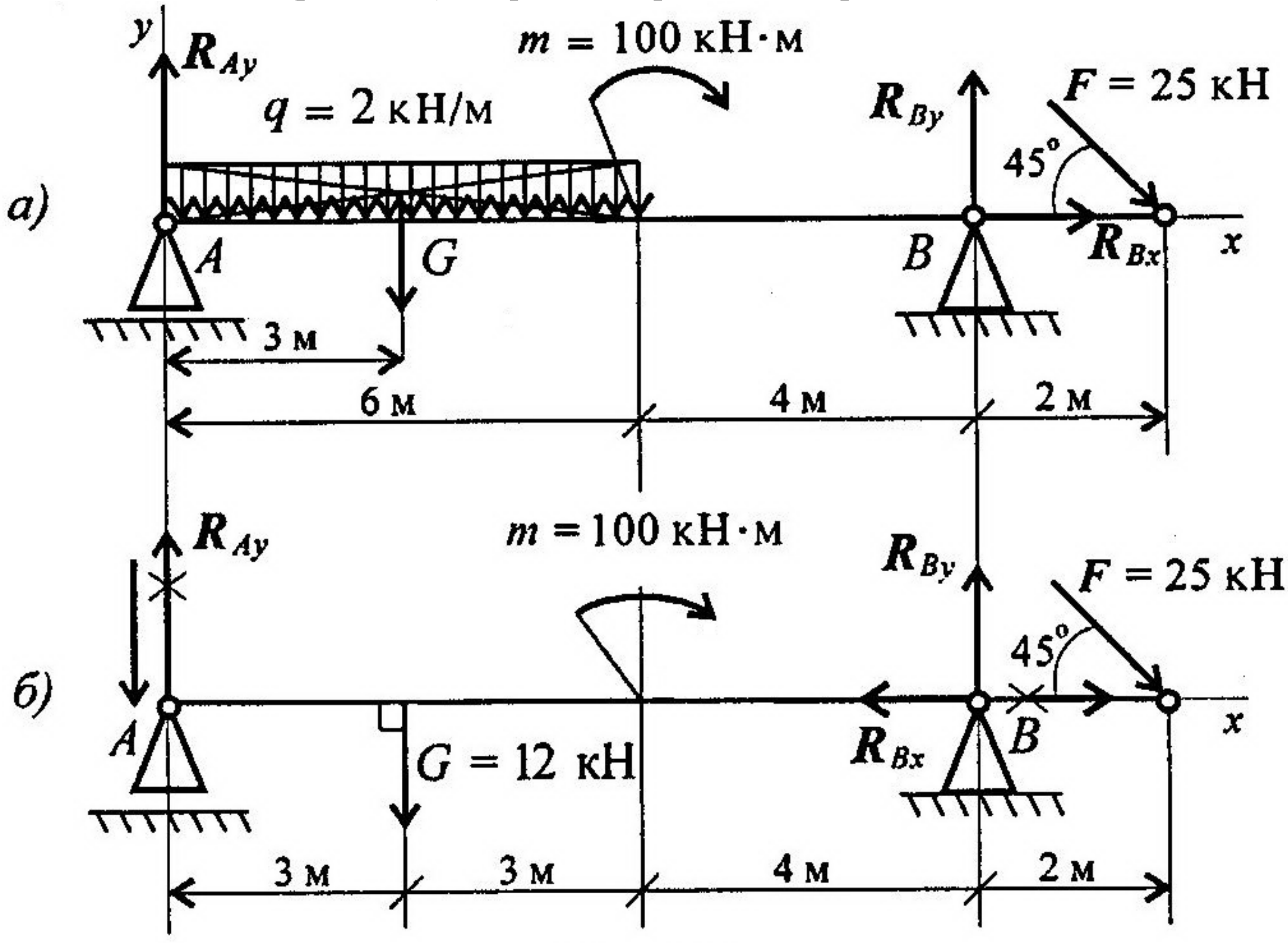


Рис. 6.8

Решение

1. Левая опора (точка *A)* — подвижный шарнир, здесь **реакция направлена перпендикулярно** опорной поверхности.

Правая опора (точка *B]* — неподвижный шарнир, здесь наносим **две составляющие реакции вдоль осей координат**. Ось $\boldsymbol{Ox}$ совмещаем с продольной осью балки.

2. Поскольку на схеме возникнут две неизвестные вертикальные реакции, использовать первую форму уравнений равновесия нецелесообразно.

3. Заменяем распределенную нагрузку сосредоточенной:

$$G = ql; \quad G = 2 \cdot 6 = 12\,\text{кН}.$$

Сосредоточенную силу помещаем в середине пролета, далее задача решается с сосредоточенными силами (рис. 6.8 б).

4. Наносим возможные реакции в опорах (направление произвольное).

5. Для решения выбираем уравнение равновесия в виде

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_0^n m_{kA} = 0; \\ \sum\limits_0^n m_{kB} = 0; \\ \sum\limits_0^n F_{kx} = 0. \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \text{Проверка:} \\ \sum\limits_0^n F_{ky} = 0. \end{array}$$

6. Составляем уравнения моментов относительно точек крепления:

$$\sum_0^n m_{kA} = G \cdot 3 + m - R_{By} \cdot 10 + F \cdot 12 \cdot \sin 45° = 0.$$

$$R_{By} \cdot 10 = G \cdot 3 + m + F \cdot 12 \cdot \sin 45°;$$

$$R_{By} \cdot 10 = 12 \cdot 3 + 100 + 25 \cdot 12 \cdot 0{,}7; \quad R_{By} = \frac{346}{10} = 34{,}6\,\text{кН}.$$

Реакция направлена верно.

$$\sum_0^n m_{kB} = R_{Ay} \cdot 10 - G \cdot 7 + m + F \cdot 2 \cdot \sin 45° = 0.$$

$$R_{Ay} \cdot 10 = G \cdot 7 - m - F \cdot 2 \cdot \sin 45°;$$

$$R_{Ay} \cdot 10 = 12 \cdot 7 - 100 - 50 \cdot 0{,}7; \quad R_{Ay} = -\frac{51}{10} = -5{,}1\,\text{кН}.$$

Реакция отрицательная, следовательно, R_{Ay} нужно направить в противоположную сторону.

7. Используя уравнение проекций, получим:

$$\sum_0^n F_{kx} = R_{Bx} + F\cos 45° = 0; \quad R_{Bx} = -F\cos 45° = -17{,}5\,\text{кН};$$

R_{Bx} — горизонтальная реакция в опоре *B*.

Реакция отрицательна, следовательно, на схеме ее направление будет противоположно выбранному.

8. ***Проверка правильности решения***. Для этого используем четвертое уравнение равновесия

$$\sum_0^n F_{ky} = 0: \; -R_{Ay} - G + R_{By} - F\cos 45° = 0.$$

Подставим полученные значения реакций. Если условие выполнено, решение верно:

$$-5{,}1 - 12 + 34{,}6 - 25 \cdot 0{,}7 = 0.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Замените распределенную нагрузку сосредоточенной и определите расстояние от точки приложения равнодействующей до опоры *A* (рис. 6.9).

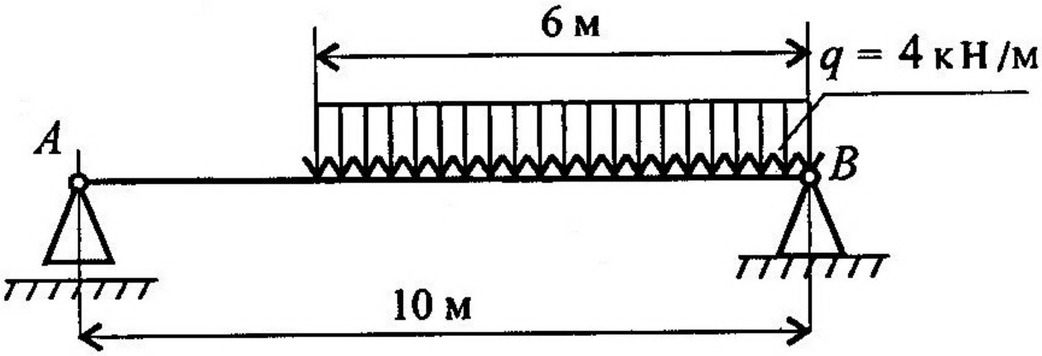


Рис. 6.9

2. Рассчитайте величину суммарного момента сил системы относительно точки ***A*** (рис. 6.10).

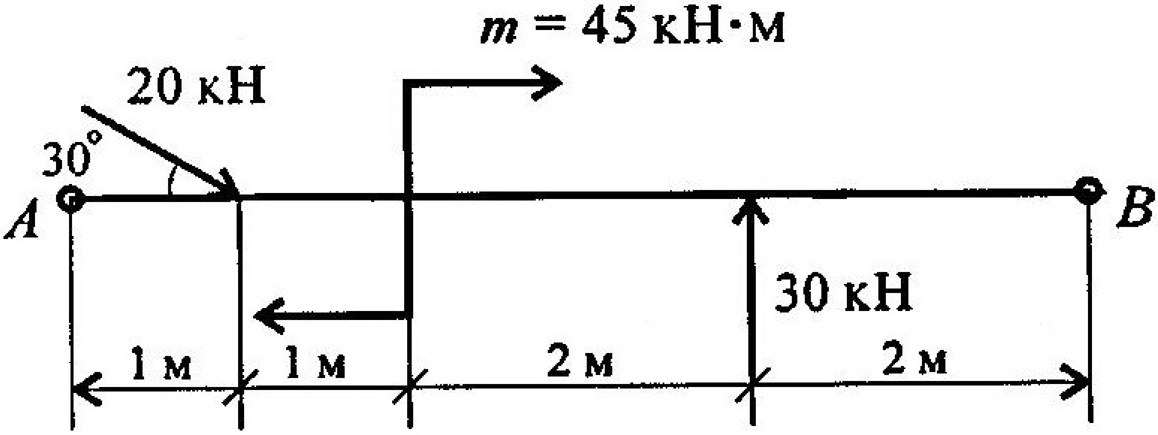


Рис. 6.10

3. Какую из форм уравнений равновесия целесообразно использовать при определении реакций в заделке?
4. Какую форму системы уравнений равновесия целесообразно использовать при определении реакций в опорах двухопорной балки и почему?
5. Определите реактивный момент в заделке одноопорной балки, изображенной на схеме (рис. 6.11).

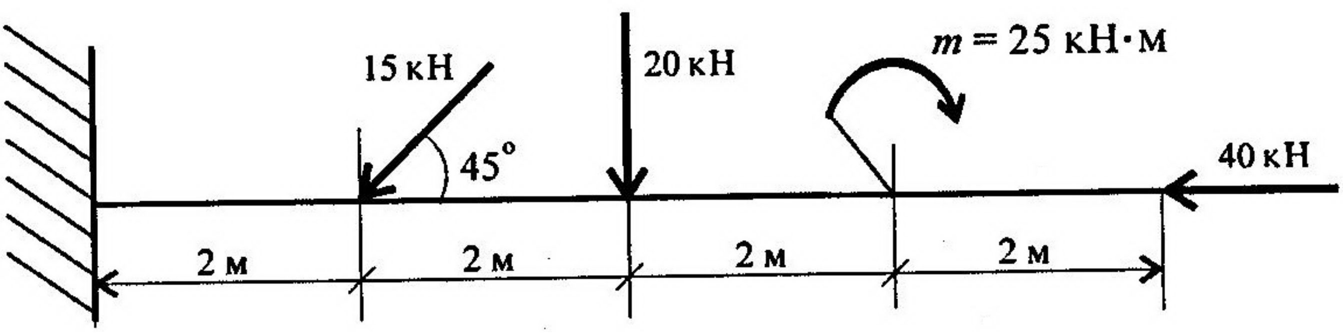


Рис. 6.11

6. Определите вертикальную реакцию в заделке для балки, представленной на рис. 6.11.

ЛЕКЦИЯ 8

Тема 1.6. Центр тяжести

Иметь представление о системе параллельных сил и центре системы параллельных сил, о силе тяжести и центре тяжести.

Знать методы для определения центра тяжести тела и формулы для определения положения центра тяжести плоских фигур.

Уметь определять положение центра тяжести простых геометрических фигур, составленных из стандартных профилей.

Сила тяжести

Сила тяжести — равнодействующая сил притяжения к Земле, она распределена по всему объему тела. Силы притяжения, приложенные к частицам твердого тела, образуют систему сил, линии действия которых сходятся в центре Земли (рис. 8.1). Поскольку радиус Земли значительно больше размеров любого земного тела, силы притяжения можно считать параллельными.

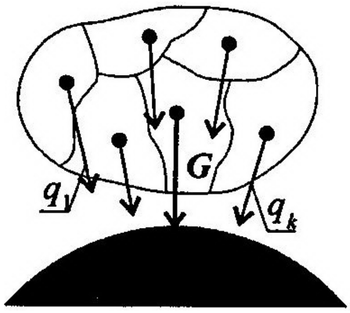


Рис. 8.1

Точка приложения силы тяжести

Для определения точки приложения силы тяжести (равнодействующей параллельных сил) используем теорему Вариньона о моменте равнодействующей:

Момент равнодействующей относительно оси равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно этой оси.

Изображаем тело, составленное из некоторых частей, в пространственной системе координат (рис. 8.2).

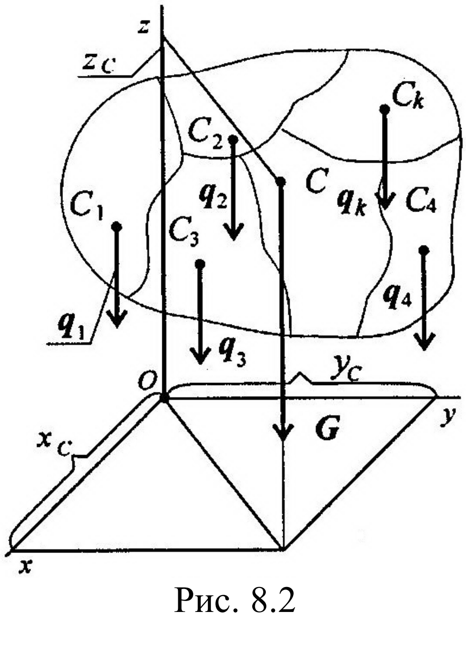


Рис. 8.2

Тело состоит из частей, силы тяжести которых q_k приложены в центрах тяжести (ЦТ) этих частей.
Пусть равнодействующая (сила тяжести всего тела) приложена в неизвестном пока центре ***C***.

x_C, y_C и z_C — координаты центра тяжести C.

x_k, y_k и z_k — координаты центров тяжести частей тела.

Из теоремы Вариньона следует:

$$M_x(\boldsymbol{F}_\Sigma) = Gy_C = \sum_0^n q_k y_k; \quad y_C = \frac{\sum_0^n q_k y_k}{G};$$

$$M_y(\boldsymbol{F}_\Sigma) = Gx_C = \sum_0^n q_k x_k; \quad x_C = \frac{\sum_0^n q_k x_k}{G};$$

аналогично для оси Oz:

$$M_z(\boldsymbol{F}_\Sigma) = Gz_C = \sum_0^n q_k z_k; \quad z_C = \frac{\sum_0^n q_k z_k}{G}.$$

В однородном теле сила тяжести пропорциональна объему V:

$$G = \gamma V;$$

,

где γ - вес единицы объема.
Следовательно, в формулах для однородных тел:

$$x_C = \frac{\sum_0^n \gamma V_k x_k}{\gamma V} = \frac{\sum_0^n V_k x_k}{V}; \quad y_C = \frac{\sum_0^n \gamma V_k y_k}{\gamma V} = \frac{\sum_0^n V_k y_k}{V};$$

$$z_C = \frac{\sum_0^n V_k z_k}{V},$$

где V_k — объем элемента тела; V — объем всего тела.

Центр тяжести однородных плоских тел (плоских фигур)

Очень часто приходится определять центр тяжести различных плоских тел и геометрических плоских фигур сложной формы. Для плоских тел можно записать:

$$V = Ah,$$

где *A* — площадь фигуры, *h* — ее высота.
Тогда после подстановки в записанные выше формулы получим:

$$x_C=\frac{\sum_0^n A_k h x_k}{Ah}=\frac{\sum_0^n A_k x_k}{A};\quad y_C=\frac{\sum_0^n A_k h y_k}{Ah}=\frac{\sum_0^n A_k y_k}{A};\quad z_C=\frac{h}{2},$$

где A_k - площадь части сечения; $x_k,\ y_k$ — координаты ЦТ частей сечения.

Выражение $\sum_0^n A_k x_k$ называют *статическим моментом площади* (S_y).

$$S_y = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \ldots + A_n \cdot x_n;$$

$$S_x = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + \ldots + A_n \cdot y_n.$$

Координаты центра тяжести сечения можно выразить через статический момент:

$$\sum_0^n A_k x_k = S_y;\quad x_C=\frac{S_y}{A};\quad \sum_0^n A_k y_k = S_x;\quad y_C=\frac{S_x}{A}.$$

$$x_c=\frac{S_y}{A}=\frac{A_1\cdot x_1 + A_2\cdot x_2 + \ldots + A_n\cdot x_n}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n};$$

$$y_c=\frac{S_x}{A}=\frac{A_1\cdot y_1 + A_2\cdot y_2 + \ldots + A_n\cdot y_n}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}.$$

Оси проходящие через центр тяжести, называются центральными осями. Статический момент относительно центральной оси равен нулю.

Определение координат центра тяжести плоских фигур

Примечание. Центр тяжести симметричной фигуры находится на оси симметрии.

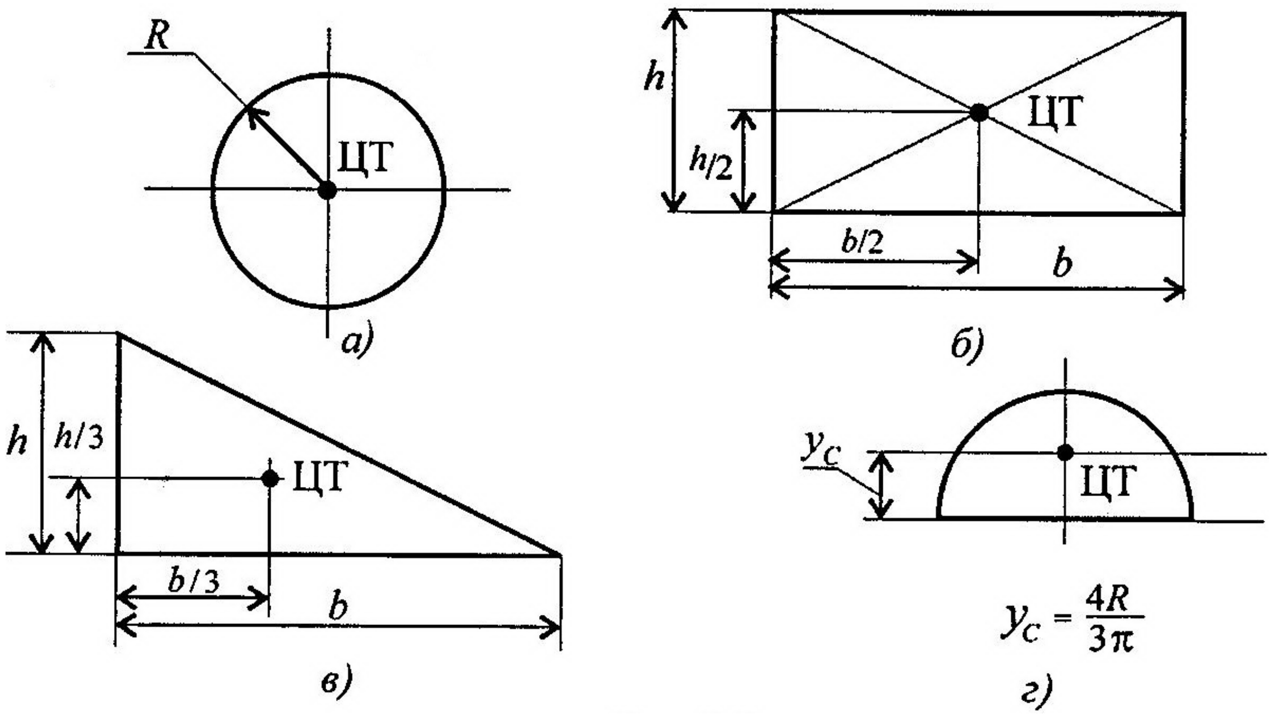


Рис.8.3

При решении задач используются следующие методы:
1 – метод симметрии: центр тяжести симметричных фигур находится на оси симметрии;
2 – метод разделения: сложные сечения разделяем на несколько простых частей, положение центров тяжести которых легко определить;
3 - метод отрицательных площадей: полости (отверстия) рассматриваются как часть сечения с отрицательной площадью.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить положение центра тяжести фигуры, представленной на рис. 8.4.

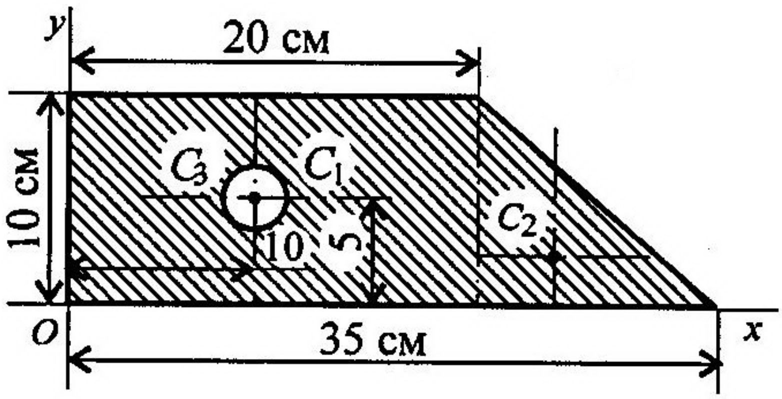


Рис. 8.4

Решение
Разбиваем фигуру на три части:

1 - прямоугольник, $A_1 = 10 \cdot 20 = 200\,\text{см}^2;$

2 - треугольник, $A_2 = 1/2 \cdot 10 \cdot 15 = 75\,\text{см}^2;$

3 - круг, $A_3 = \pi R^2;\ A_3 = 3{,}14 \cdot 3^2 = 28{,}3\,\text{см}^2.$

ЦТ фигуры 1: $x_1 = 10$ см; $y_1 = 5$ см.
ЦТ фигуры 2: $x_2 = 20 + 1/3 \cdot 15 = 25$ см; $y_2 = 1/3 \cdot 10 = 3{,}3$ см
ЦТ фигуры 3: $x_3 = 10$ см; $y_3 = 5$ см;

$$x_C = \frac{200 \cdot 10 + 75 \cdot 25 - 28{,}3 \cdot 10}{200 + 75 - 28{,}3} = 14{,}5 \text{ см.}$$

Аналогично определяется $y_C = 4{,}5$ см.

Пример 2. Определить координаты центра тяжести составного сечения. Сечение состоит из листа и прокатных профилей (рис. 8.5).

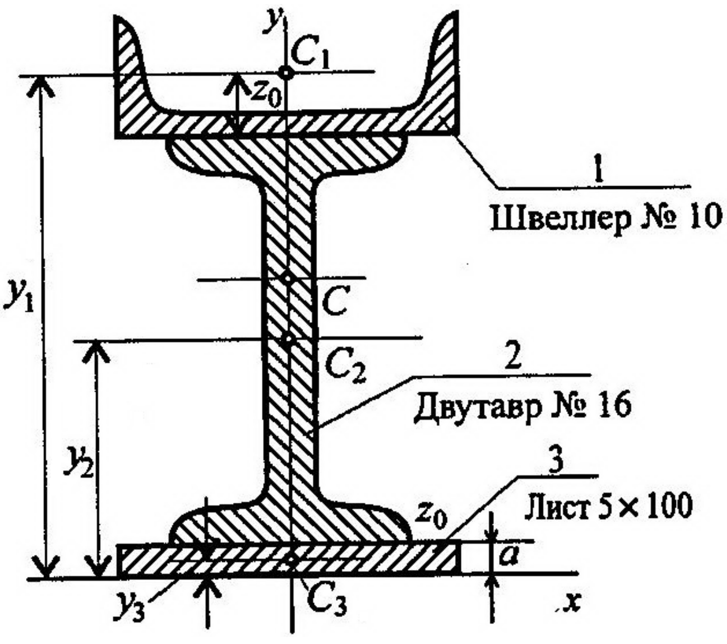


Рис.8.5

Примечание. Часто рамы сваривают из разных профилей, создавая необходимую конструкцию. Таким образом, уменьшается расход металла и образуется конструкция высокой прочности.

Для стандартных прокатных профилей собственные геометрические характеристики известны. Они приводятся в соответствующих стандартах.

Решение

1. Обозначим фигуры номерами и выпишем из таблиц необходимые данные:

1 — швеллер № 10 (ГОСТ 8240-89); высота h = 100 мм; ширина полки b = 46 мм; площадь сечения $A1$ = 10,9см^2;

2 — двутавр № 16 (ГОСТ 8239-89); высота 160 мм; ширина полки 81мм; площадь сечения $A2$ = 20,2см^2;

3 — лист 5х100; толщина 5мм; ширина 100мм; площадь сечения $A3$ = 0,5 • 10 = 5 см^2.

2. Координаты центров тяжести каждой фигуры можно определить по чертежу. Составное сечение симметрично, поэтому центр тяжести находится на оси симметрии и координата $x_c = 0$.

Швеллер 1: $y_1 = a + h_2 + z_0$; $y_1 = 0{,}5 + 16 + 1{,}44 = 17{,}54$ см.

Двутавр 2: $y_2 = a + \dfrac{h_2}{2}$; $y_2 = 0{,}5 + 16/2 = 8{,}5$ см.

Лист 3: $y_3 = a/2 = 0{,}25$ см.

3. Определение центра тяжести составного сечения:

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3},$$

$$y_C = \frac{10{,}9 \cdot 17{,}54 + 20{,}2 \cdot 8{,}5 + 5 \cdot 0{,}25}{10{,}9 + 20{,}2 + 5} = 10 \text{ см}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Почему силы притяжения к Земле, действующие на точки тела, можно принять за систему параллельных сил?
2. Запишите формулы для определения положения центра тяжести неоднородных и однородных тел, формулы для определения положения центра тяжести плоских сечений.
3. Повторите формулы для определения положения центра тяжести простых геометрических фигур: прямоугольника, треугольника, трапеции и половины круга.
4. Что называют статическим моментом площади?
5. Вычислите статический момент данной фигуры относительно оси *Ox*. h = 30 см; b = 120 см; c = 10см (рис. 8.6).

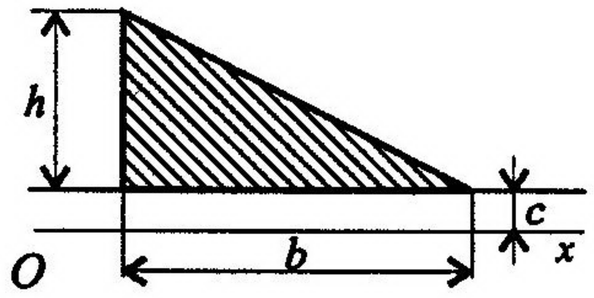


Рис. 8.6

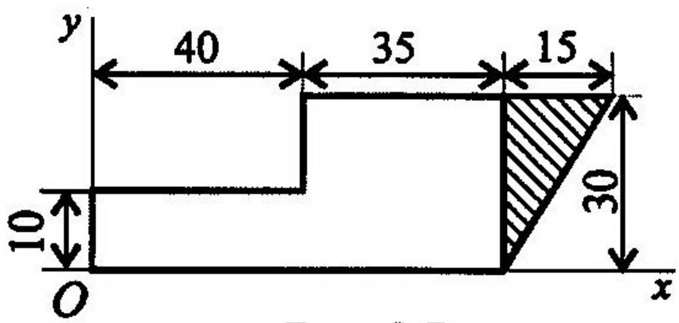


Рис. 8.7

6. Определите координаты центра тяжести заштрихованной фигуры (рис. 8.7). Размеры даны в мм.
7. Определите координату y фигуры 1 составного сечения (рис. 8.8).

При решении воспользоваться справочными данными таблиц ГОСТ «Сталь горячекатанная» (см. Приложение 1).

— уголок равнополочный № 10,

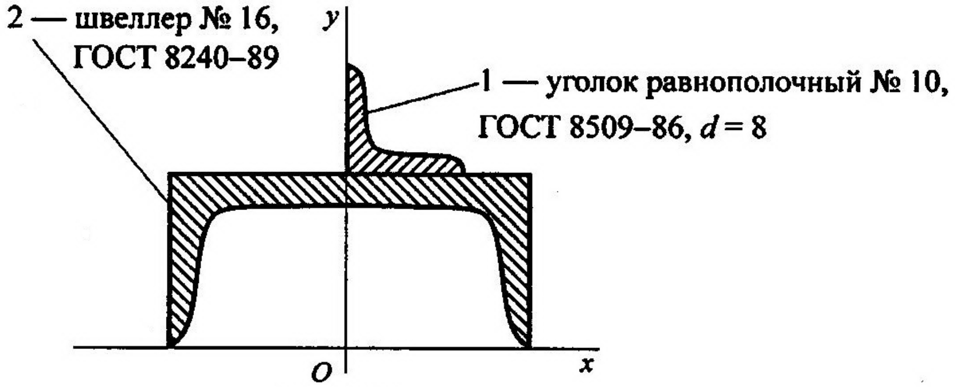
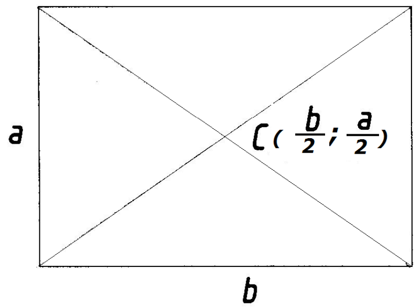
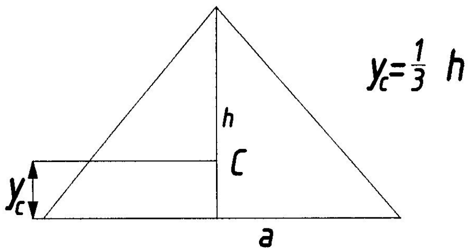
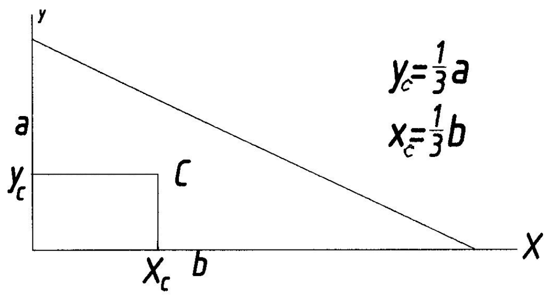
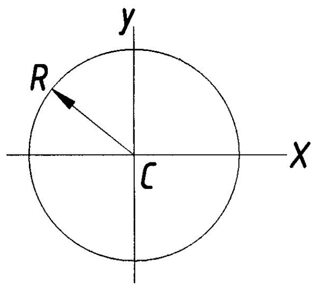
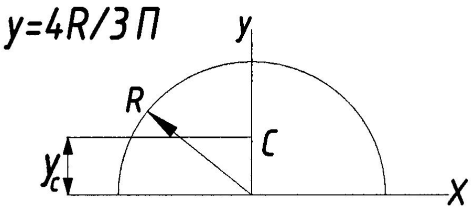
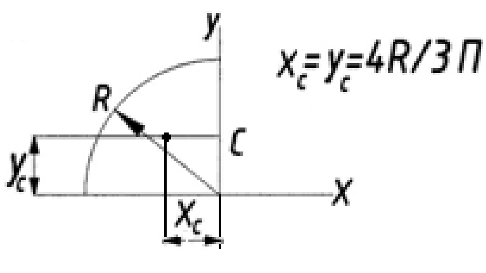


Рис. 8.8

<table>
<tr><th>Положение центра тяжести простейших фигур</th><th>Площадь</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$A=ab$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$A=ah/2$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$A=ab/2$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$A=\Pi R^2$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$A=\Pi R^2/2$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$A=\Pi R^2/4$</td></tr>
</table>