

**Тренировочная работа №3 по МАТЕМАТИКЕ****11 класс**

14 февраля 2024 года

Вариант МА2310312

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО \_\_\_\_\_ класс \_\_\_\_\_

**Инструкция по выполнению работы**

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

***Желаем успеха!*****Справочные материалы**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

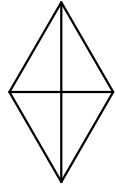
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

*Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.*

**1**

Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 14 и 6.



Ответ: \_\_\_\_\_.

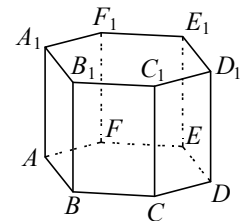
**2**

Длина вектора  $\vec{a}$  равна  $12\sqrt{2}$ , угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $45^\circ$ , а скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  равно 36. Найдите длину вектора  $\vec{b}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**3**

В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все рёбра равны 20. Найдите угол между прямыми  $B_1 D$  и  $A A_1$ . Ответ дайте в градусах.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**4**

При изготовлении подшипников диаметром 66 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше чем на 0,01 мм, равна 0,973. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 65,99 мм или больше чем 66,01 мм.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 5 Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 6. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

Ответ: \_\_\_\_\_.

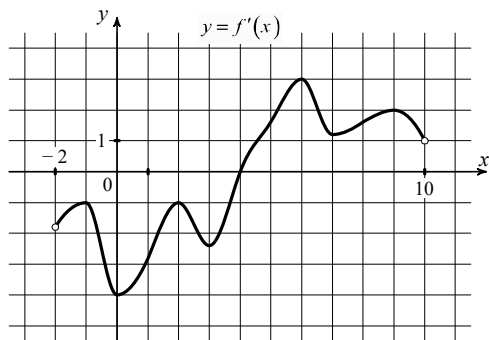
- 6 Найдите корень уравнения  $3^{x-8} = 27$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 Найдите значение выражения  $\frac{25 \cos 84^\circ}{\sin 6^\circ}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 8 На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-2; 10)$ . В какой точке отрезка  $[4; 9]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?



Ответ: \_\_\_\_\_.

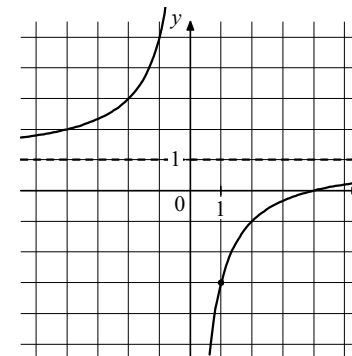
- 9 По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна  $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ , где  $\varepsilon$  — ЭДС источника (в вольтах),  $r = 4$  Ом — его внутреннее сопротивление,  $R$  — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 40 % от силы тока короткого замыкания  $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$ ? Ответ дайте в омах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 На изготовление 500 деталей первый рабочий тратит на 5 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11 На рисунке изображён график функции  $f(x) = \frac{k}{x} + a$ . Найдите  $f(25)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 12 Найдите точку максимума функции  $y = \ln(x-5) - 5x + 12$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение  $\frac{13\cos 2x - 11\cos x + 1}{169\sin^2 x - 25} = 0$ .
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$ .
- 14 Основание пирамиды  $SABC$  — прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$ . Ребро  $SA$  является высотой пирамиды. Точки  $E$  и  $F$  лежат на рёбрах  $AC$  и  $BS$  соответственно так, что  $SF : FB = AE : EC = 1 : 3$ .
- а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $E$  и  $F$  перпендикулярно прямой  $AC$ , является прямоугольником.
- б) Точки  $H$  и  $M$  — точки пересечения плоскости  $\alpha$  с прямыми  $AB$  и  $CS$  соответственно. Найдите объём многогранника  $BCMEHF$ , если объём пирамиды  $SABC$  равен 64.
- 15 Решите неравенство  $\log_{\frac{1}{9}}(36 - 9x) < \log_{\frac{1}{9}}(x^2 - 9x + 20) + \log_{\frac{1}{9}}(x + 1)$ .

- 16 В июле 2024 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
  - в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Долг (в млн рублей)
Июль 2024	$S$
Июль 2025	$0,8S$
Июль 2026	$0,6S$
Июль 2027	$0,4S$
Июль 2028	$0,2S$
Июль 2029	0

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором каждый платёж будет меньше 2,5 млн рублей.

- 17 В треугольнике  $ABC$  биссектрисы  $AK$  и  $BL$  пересекаются в точке  $I$ . Известно, что около четырёхугольника  $CKIL$  можно описать окружность.
- а) Докажите, что угол  $BCA$  равен  $60^\circ$ .
- б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если его периметр равен 50 и  $IC = 10$ .
- 18 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\log_a \sqrt{6 + a^{2\sin x}} = 2\sin x$  имеет хотя бы одно решение.
- 19 Пусть  $\overline{ml}$  обозначает двузначное число, равное  $10m + l$ , где  $m$  и  $l$  — цифры,  $m \neq 0$ .
- а) Существуют ли такие различные ненулевые цифры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , что  $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 495$ ?
- б) Существуют ли такие различные ненулевые цифры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , что  $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 693$ , если среди цифр  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  есть цифра 7?
- в) Какое наибольшее значение может принимать выражение  $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc}$ , если цифры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  различны и среди них есть цифры 4 и 7?

[math100.ru](http://math100.ru)

**Ответы на тренировочные варианты 2310309-2310312 (профильный уровень) от  
14.02.2024**

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
<b>2310309</b>	<b>10</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>0,35</b>	<b>0,73</b>	<b>11,5</b>	<b>- 8</b>	<b>- 7</b>	<b>32</b>	<b>6</b>	<b>- 25</b>	<b>- 4,8</b>
<b>2310310</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>90</b>	<b>0,43</b>	<b>0,24</b>	<b>8,5</b>	<b>- 4</b>	<b>- 5</b>	<b>18</b>	<b>8</b>	<b>- 20</b>	<b>- 10,9</b>
<b>2310311</b>	<b>36</b>	<b>4</b>	<b>60</b>	<b>0,018</b>	<b>0,56</b>	<b>7</b>	<b>14</b>	<b>7</b>	<b>12</b>	<b>30</b>	<b>1,6</b>	<b>7,1</b>
<b>2310312</b>	<b>42</b>	<b>3</b>	<b>60</b>	<b>0,027</b>	<b>0,58</b>	<b>11</b>	<b>25</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>25</b>	<b>0,84</b>	<b>5,2</b>

## Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

- 13 а) Решите уравнение  $\frac{13\cos 2x - 11\cos x + 1}{169\sin^2 x - 25} = 0$ .
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$ .

**Решение.**

а) Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 13\cos 2x - 11\cos x + 1 = 0, \\ 169\sin^2 x - 25 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 26\cos^2 x - 11\cos x - 12 = 0, \\ \sin^2 x \neq \frac{25}{169}. \end{cases}$$

Получаем:

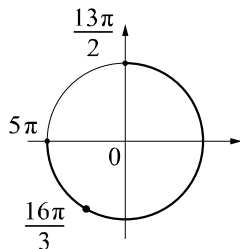
$$\begin{cases} \cos x = \frac{12}{13}, \\ \sin x \neq \pm \frac{5}{13} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \sin x \neq \pm \frac{5}{13}. \end{cases}$$

Для  $\cos x = \frac{12}{13}$  не выполняется условие  $\sin x \neq \pm \frac{5}{13}$ .

Для  $\cos x = -\frac{1}{2}$  условие  $\sin x \neq \pm \frac{5}{13}$  выполняется, находим:

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{или} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$ .



Получим число  $\frac{16\pi}{3}$ .

**Ответ:** а)  $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$  б)  $\frac{16\pi}{3}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

Основание пирамиды  $SABC$  — прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$ . Ребро  $SA$  является высотой пирамиды. Точки  $E$  и  $F$  лежат на рёбрах  $AC$  и  $BS$  соответственно так, что  $SF:FB = AE:EC = 1:3$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $E$  и  $F$  перпендикулярно прямой  $AC$  и пересекает рёбра  $AB$  и  $CS$  в точках  $H$  и  $M$  соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$  является прямоугольником.

б) Найдите объём многогранника  $BCMEHF$ , если объём пирамиды  $SABC$  равен 64.

**Решение.**

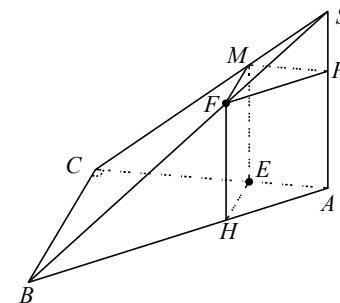
а) Прямые  $EH$  и  $BC$  параллельны, так как они лежат в одной плоскости и перпендикулярны прямой  $AC$ . Поэтому треугольники  $AEH$  и  $ACB$  подобны по двум углам,  $EH = \frac{1}{4}BC$ ,  $AE = \frac{1}{4}AC$ .

Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $EH$ , параллельную прямой  $BC$ . Поэтому линия пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $BSC$  параллельна прямой  $BC$ . Следовательно, треугольники  $BSC$  и  $FSM$  подобны по двум углам,  $FM = \frac{1}{4}BC$ ,  $SM = \frac{1}{4}SC$ .

Таким образом, отрезки  $FM$  и  $EH$  равны и лежат на параллельных прямых. Следовательно,  $EHFM$  — параллелограмм.

Прямая  $EH$  перпендикулярна прямой  $AC$  и лежит в плоскости  $ABC$ , перпендикулярной плоскости  $CSA$ , поэтому прямая  $EH$  перпендикулярна плоскости  $CSA$ , значит, отрезок  $ME$  перпендикулярен отрезку  $EH$ .

Таким образом, в параллелограмме  $EHFM$  угол  $MEH$  прямой, поэтому параллелограмм является прямоугольником.



б) Плоскость  $\alpha$  делит пирамиду на два пятигранника  $SFMAHE$  и  $BCMEHF$ . Пятигранник  $SFMAHE$  можно разбить на пирамиду  $SFMP$  и призму  $FMPHEA$ , где  $P$  — точка пересечения плоскости  $FMP$ , параллельной плоскости  $ABC$ , с ребром  $SA$ .

Обозначим  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $SA = h$ . Тогда:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{6} abh = 64;$$

$$V_{SFMP} = \frac{1}{3} \cdot SP \cdot \frac{1}{2} \cdot MP \cdot MF = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} h \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} b \cdot \frac{1}{4} a = \frac{abh}{64 \cdot 6};$$

$$V_{FMPHEA} = PA \cdot \frac{1}{2} \cdot MP \cdot MF = \frac{3}{4} h \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} b \cdot \frac{1}{4} a = \frac{3abh}{64 \cdot 2}.$$

Следовательно, объём пятигранника  $SFMAHE$ :

$$V_{SFMAHE} = V_{SFMP} + V_{FMPHEA} = \frac{abh}{64 \cdot 6} + \frac{3abh}{64 \cdot 2} = \frac{10abh}{64 \cdot 6}.$$

Объём пятигранника  $BCMEHF$  равен разности объёмов пирамиды  $SABC$  и пятигранника  $SFMAHE$ :

$$V_{BCMEHF} = V_{SABC} - V_{SFMAHE} = \frac{abh}{6} - \frac{10abh}{64 \cdot 6} = \frac{54}{64} \cdot \frac{abh}{6} = 54.$$

Ответ: б) 54.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ . ИЛИ При обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15

Решите неравенство  $\log_{\frac{1}{9}}(36 - 9x) < \log_{\frac{1}{9}}(x^2 - 9x + 20) + \log_{\frac{1}{9}}(x + 1)$ .

**Решение.**

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_{\frac{1}{9}}(9(4 - x)) < \log_{\frac{1}{9}}((5 - x)(4 - x)) + \log_{\frac{1}{9}}(x + 1);$$

$$\log_{\frac{1}{9}} 9 + \log_{\frac{1}{9}}(4 - x) < \log_{\frac{1}{9}}(5 - x) + \log_{\frac{1}{9}}(4 - x) + \log_{\frac{1}{9}}(x + 1).$$

Неравенство определено при  $-1 < x < 4$ , поэтому при  $-1 < x < 4$  неравенство

$$\log_{\frac{1}{9}} 9 < \log_{\frac{1}{9}}(5 - x) + \log_{\frac{1}{9}}(x + 1)$$

принимает вид:

$$9 > (5 - x)(x + 1); \quad 9 > 5 + 4x - x^2; \quad x^2 - 4x + 4 > 0,$$

откуда следует, что  $x \neq 2$ . Учитывая ограничение  $-1 < x < 4$ , получаем:  $-1 < x < 2$ ;  $2 < x < 4$ .

Ответ:  $(-1; 2)$ ;  $(2; 4)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением точки 2. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 16** В июле 2024 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
  - в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Долг (в млн рублей)
Июль 2024	$S$
Июль 2025	$0,8S$
Июль 2026	$0,6S$
Июль 2027	$0,4S$
Июль 2028	$0,2S$
Июль 2029	0

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором каждый платёж будет меньше 2,5 млн рублей.

#### Решение.

В январе 2025 года долг будет составлять  $1,15S$  млн рублей, а в июле 2025 года —  $0,8S$  млн рублей. Значит, платёж в 2025 году составит  $0,35S$  млн рублей.

В январе 2026 года долг будет составлять  $1,15 \cdot 0,8S = 0,92S$  млн рублей, а в июле 2026 года —  $0,6S$  млн рублей. Значит, платёж в 2026 году составит  $0,32S$  млн рублей.

В январе 2027 года долг будет составлять  $1,15 \cdot 0,6S = 0,69S$  млн рублей, а в июле 2027 года —  $0,4S$  млн рублей. Значит, платёж в 2027 году составит  $0,29S$  млн рублей.

В январе 2028 года долг будет составлять  $1,15 \cdot 0,4S = 0,46S$  млн рублей, а в июле 2028 года —  $0,2S$  млн рублей. Значит, платёж в 2028 году составит  $0,26S$  млн рублей.

В январе 2029 года долг перед банком составит  $1,15 \cdot 0,2S = 0,23S$  млн рублей, а в июле — 0 рублей. Значит, платёж в 2029 году составит  $0,23S$  млн рублей.

Наибольший платёж составляет  $0,35S$ . Решим неравенство

$$0,35S < 2,5, \text{ откуда } S < \frac{250}{35} = 7\frac{1}{7}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства — 7.

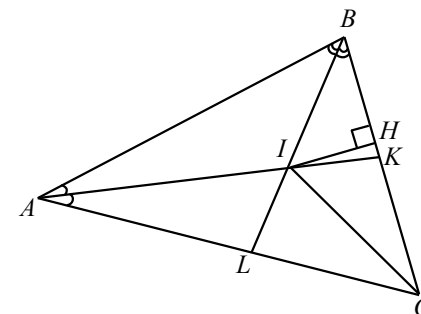
**Ответ:** 7.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 17** В треугольнике  $ABC$  биссектрисы  $AK$  и  $BL$  пересекаются в точке  $I$ . Известно, что около четырёхугольника  $CKIL$  можно описать окружность.
- Докажите, что угол  $BCA$  равен  $60^\circ$ .
  - Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если его периметр равен 50 и  $IC = 10$ .

#### Решение.

а) Обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$  углы  $CAB$  и  $ABC$  соответственно. Тогда углы  $IAB$  и  $ABI$  равны  $\frac{\alpha}{2}$  и  $\frac{\beta}{2}$  соответственно. По теореме о сумме углов треугольника получаем, что угол  $BIA$  равен  $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ . Такая же величина вертикального угла  $LIK$ .



По условию около четырёхугольника  $CKIL$  можно описать окружность. Следовательно, угол  $BCA$  дополняет угол  $LIK$  до  $180^\circ$ . С другой стороны, по теореме о сумме углов треугольника угол  $BCA$  дополняет до  $180^\circ$  сумму углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Следовательно,  $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \alpha + \beta$ , откуда  $\alpha + \beta = 120^\circ$ .

Значит, угол  $BCA$  равен  $60^\circ$ .

б) Поскольку точка  $I$  является точкой пересечения биссектрис  $AK$  и  $BL$ , она также лежит на биссектрисе угла  $BCA$  и является центром вписанной окружности в треугольник  $ABC$ . Значит, радиус этой окружности равен длине перпендикуляра  $IH$ , опущенного из этой точки на сторону  $BC$ .

По доказанному, угол  $HCI$  равен половине угла  $BCA$ , то есть он равен  $30^\circ$ . В прямоугольном треугольнике  $HCI$  против угла в  $30^\circ$  лежит катет  $IH$ .

Следовательно,  $IH = \frac{1}{2} \cdot IC = 5$ .

Площадь треугольника  $ABC$  равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности. Значит, эта площадь равна  $\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 5 = 125$ .

**Ответ:** б) 125.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ . ИЛИ При обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\log_a \sqrt{6 + a^{2\sin x}} = 2\sin x$$

имеет хотя бы одно решение.

### Решение.

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ a^{4\sin x} - a^{2\sin x} - 6 = 0. \end{cases}$$

Пусть  $a^{2\sin x} = t$ ,  $t > 0$ .

Поскольку  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , для  $t = (a^2)^{\cos x}$  получаем:  $a^2 \leq t \leq \frac{1}{a^2}$  при  $0 < a < 1$  и

$$\frac{1}{a^2} \leq t \leq a^2 \text{ при } a > 1.$$

Тогда уравнение принимает вид  $t^2 - t - 6 = 0$ . Оно имеет корни  $t_1 = -2$  и  $t_2 = 3$ . Поскольку  $t > 0$ , корень  $t_1 = -2$  исключаем.

При  $0 < a < 1$  должно выполняться условие  $a^2 \leq 3 \leq \frac{1}{a^2}$ , получим:

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ a^2 \leq 3, \\ \frac{1}{a^2} \geq 3, \end{cases}$$

откуда  $0 < a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

При  $a > 1$  должно выполняться условие  $\frac{1}{a^2} \leq 3 \leq a^2$ , получим:

$$\begin{cases} a > 1, \\ a^2 \geq 3, \\ \frac{1}{a^2} \leq 3 \end{cases}$$

откуда  $a \geq \sqrt{3}$ .

При  $0 < a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  $a \geq \sqrt{3}$  исходное уравнение имеет хотя бы одно решение.

**Ответ:**  $0 < a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  $a \geq \sqrt{3}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только исключением точек $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и / или $a = \sqrt{3}$	3
С помощью верного рассуждения получено одно из множеств $0 < a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ или $a \geq \sqrt{3}$ множества значений $a$ , возможно, с исключением точек $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ или $a = \sqrt{3}$ . ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2



Найдены корни уравнения $(a^{2\cos x})^2 - a^{2\cos x} - 6 = 0$ при $a > 0$ и $a \neq 1$ : $a^{2\cos x} = -2$ , $a^{2\cos x} = 3$ , и задача верно сведена к исследованию корней уравнений $a^{2\cos x} = -2$ и / или $a^{2\cos x} = 3$ при $a > 0$ и $a \neq 1$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

- 19 Пусть  $\overline{ml}$  обозначает двузначное число, равное  $10m + l$ , где  $m$  и  $l$  — цифры,  $m \neq 0$ .
- а) Существуют ли такие различные ненулевые цифры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , что  $\overline{ab \cdot cd} - \overline{ba \cdot dc} = 495$ ?
- б) Существуют ли такие различные ненулевые цифры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , что  $\overline{ab \cdot cd} - \overline{ba \cdot dc} = 693$ , если среди цифр  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  есть цифра 7?
- в) Какое наибольшее значение может принимать выражение  $\overline{ab \cdot cd} - \overline{ba \cdot dc}$ , если цифры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  различны и среди них есть цифры 4 и 7?

### Решение.

а) Да. Действительно, поскольку

$$\overline{ab \cdot cd} - \overline{ba \cdot dc} = (10a + b) \cdot (10c + d) - (10b + a) \cdot (10d + c) = 99 \cdot (ac - bd),$$

нужно подобрать такие попарно различные ненулевые цифры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , чтобы  $ac - bd = 5$ . Это верно, например, при  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 7$  и  $d = 9$ .

б) Докажем, что это невозможно. Имеем  $\overline{ab \cdot cd} - \overline{ba \cdot dc} = 99 \cdot (ac - bd)$ .

Значит, если  $\overline{ab \cdot cd} - \overline{ba \cdot dc} = 693$ , то  $99 \cdot (ac - bd) = 693 = 99 \cdot 7$  и  $ac - bd = 7$ .

Поскольку одна из цифр  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  равна 7, то одно из произведений  $ac$  или  $bd$  делится на 7, а значит, и другое произведение тоже должно делиться на 7. Это невозможно, так как в этом случае среди цифр  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  есть по крайней мере две цифры 7.

в) Как показано выше, имеем  $\overline{ab \cdot cd} - \overline{ba \cdot dc} = 99 \cdot (ac - bd)$ . Рассмотрим все возможные случаи, когда среди цифр  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  есть цифры 4 и 7.

Если цифры 4 и 7 — это  $a$  и  $c$ , то  $ac - bd \leq 4 \cdot 7 - 1 \cdot 2 = 26$ .

Если цифры 4 и 7 — это  $b$  и  $d$ , то  $ac - bd \leq 8 \cdot 9 - 4 \cdot 7 = 44$ .

Если цифра 4 — это  $a$  или  $c$ , а цифра 7 — это  $b$  или  $d$ , то

$$ac - bd \leq 4 \cdot 9 - 7 \cdot 1 = 29.$$

Если цифра 7 — это  $a$  или  $c$ , а цифра 4 — это  $b$  или  $d$ , то

$$ac - bd \leq 7 \cdot 9 - 4 \cdot 1 = 59.$$

Значит, наибольшее возможное значение выражения  $\overline{ab \cdot cd} - \overline{ba \cdot dc}$  равно  $99 \cdot 59 = 5841$ , оно достигается при  $a = 7$ ,  $b = 4$ ,  $c = 9$  и  $d = 1$ .

Ответ: а) да; б) нет; в)  $99 \cdot 59 = 5841$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ , $b$ и $в$	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте $в$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $b$	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ и $b$ . ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте $в$	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $b$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4