Combinatorics

General

$$\sum_{0\leq k\leq n} n-kk = Fib_{n+1}$$

$$nk = nn-k$$

$$nk + nk+1 = n+1k+1$$

$$knk = nn-1k-1$$

$$nk = \frac{n}{k}n-1k-1$$

$$\sum_{i=0}^{n} ni = 2^n$$

$$\sum_{i\geq 0} n2i = 2^{n-1}$$

$$\sum_{i\geq 0} n2i+1 = 2^{n-1}$$

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i ni = (-1)^k n-1k$$

$$\sum_{i=0}^{k} n+ii = \sum_{i=0}^{k} n+in = n+k+1k$$

$$1n1 + 2n2 + 3n3 + \ldots + nnn = n2^{n-1}$$

$$1^2n1 + 2^2n2 + 3^2n3 + \ldots + n^2nn = (n+n^2)2^{n-2}$$

0.1 Vandermonde's Identity:

$$\sum_{k=0}^{r} mknr-k = m+nr$$

0.2 Hockey-Stick Identity:

$$n, r \in N,\ n > r, \quad \sum_{i=r}^{n} ir = n+1r+1$$

$$\sum_{i=0}^{k} ki2^i = 2kk$$

$$\sum_{k=0}^{n} nknn-k = 2nn$$

$$\sum_{k=q}^{n} nkkq = 2^{n-q}nq$$

$$\sum_{i=0}^{n} k^i ni = (k+1)^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2ni = 2^{2n-1} + 122nn$$

$$\sum_{i=1}^{n} nin-1i-1 = 2n-1n-1$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2ni^2 = 12\Big(4n2n + 2nn^2\Big)$$

0.3 Highest Power of 2 that divides $2nn$:

Let x be the number of 1s in the binary representation. Then the number of odd terms will be 2^x. Let it form a sequence. The n-th value in the sequence (starting from $n = 0$) gives the highest power of 2 that divides $2nn$.

Pascal Triangle

In a row p, where p is a prime number, all the terms in that row except the 1s are multiples of p. **Parity:** To count odd terms in row n, convert n to binary. Let x be the number of 1s in the binary representation. Then the number of odd terms will be 2^x. Every entry in row $2^n - 1$, $n \geq 0$, is odd. An integer $n \geq 2$ is prime if and only if all intermediate binomial coefficients are inserted.

$$n1, n2, \ldots, nn-1$$

are divisible by n.

0.4 Kummer's Theorem

For given integers $n \geq m \geq 0$ and a prime number p, the largest power of p dividing nm is equal to the number of carries when m is added to $n-m$ in base p. For implementation, take inspiration from Lucas theorem.

0.5 Counting Problems

Number of different binary sequences of length n such that no two 0's are adjacent:

$$Fib_{n+1}$$

0.6 Combination with repetition

Choosing k elements from an n-element set, order does not matter, repetition allowed:

$$n+k-1k$$

Number of ways to divide n persons in nk equal groups of size k:

$$\frac{n!}{k!^{n/k}(n/k)!} = \prod_{n \geq k} n-1k-1$$

Number of non-negative solutions of equation:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n \quad \Rightarrow \quad n+k-1n$$

Number of ways to choose n ids from 1 to b such that every id has distance at least k:

$$b-(n-1)(k-1)n$$

Restricted Cycle Permutations

Let $T(n,k)$ be the number of permutations of size n for which all cycles have length $\leq k$:

$$T(n,k) = \{\, n!n \leq kn \cdot T(n-1,k) - F(n-1,k) \cdot T(n-k-1,k)n > k$$

where

$$F(n,k) = n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

Lucas Theorem

If p is prime, then

$$pak \equiv 0 \pmod{p}$$

For non-negative integers m and n and a prime p:

$$mn \equiv \prod_{i=0}^{k} m_i n_i \pmod{p}$$

where

$$m = m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + \ldots + m_1 p + m_0,$$
$$n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \ldots + n_1 p + n_0$$

are the base-p expansions of m and n. Convention: $mn = 0$ when $m < n$.

0.1 Propriedades Matemáticas

- **Conjectura de Goldbach:** Todo número par $n > 2$ pode ser representado como $n = a + b$, onde a e b são primos.
- **Primos Gêmeos:** Existem infinitos pares de primos $p, p+2$.
- **Conjectura de Legendre:** Sempre existe um primo entre n^2 e $(n+1)^2$.
- **Lagrange:** Todo número inteiro pode ser representado como soma de 4 quadrados.
- **Zeckendorf:** Todo número pode ser representado como soma de números de Fibonacci diferentes e não consecutivos.
- **Tripla de Pitágoras (Euclides):** Toda tripla pitagórica primitiva pode ser gerada por $(n^2 - m^2, 2nm, n^2 + m^2)$ onde n e m são coprimos e um deles é par.
- **Wilson:** n é primo se e somente se $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$.
- **Problema do McNugget:** Para dois coprimos x e y, o número de inteiros não representáveis como $ax + by$ é $\frac{(x-1)(y-1)}{2}$. O maior inteiro não representável é $xy - x - y$.
- **Fermat:** Se p é primo, então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Se x e m são coprimos e m é primo, então $x^k \equiv x^{k \bmod (m-1)} \pmod{m}$. *Euler:* $x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, onde $\varphi(m)$ é o totiente de Euler.
- **Teorema Chinês do Resto:** Dado o sistema:

  $$x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \quad \ldots, \quad x \equiv a_n \pmod{m_n}$$

  com m_i coprimos dois a dois. Seja $M_i = \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{m_i}$ e $N_i \equiv M_i^{-1} \pmod{m_i}$. A solução é:

  $$x = \sum_{i=1}^{n} a_i M_i N_i \pmod{m_1 m_2 \cdots m_n}$$

- **Números de Catalan:** Exemplo: expressões de parênteses bem formadas. $C_0 = 1$, e:

  $$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

- **Bertrand (Ballot):** Com $p > q$ votos, a probabilidade de sempre haver mais votos do tipo A do que B até o fim é:

  $$\frac{p-q}{p+q}$$

  Permitindo empates:

  $$\frac{p+1-q}{p+1}$$

  Multiplicando pela combinação total $\binom{p+q}{q}$, obtém-se o número de possibilidades.
- **Linearidade da Esperança:** $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$
- **Variância:** $\mathrm{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$
- **Progressão Geométrica:** $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$
- **Soma dos Cubos:** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

- **Lindström-Gessel-Viennot:** A quantidade de caminhos disjuntos em um grid pode ser computada como o determinante da matriz do número de caminhos.
- **Lema de Burnside:** Número de colares diferentes (sem rotações), com m cores e comprimento n:

  $$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} m^{\gcd(i,n)}$$

- **Inversão de Möbius:**

  $$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **Propriedades de Coeficientes Binomiais:**

  $$\binom{N}{N-K} = \frac{N}{K}\binom{N-1}{K-1} = \binom{N}{K}$$

  $$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$$

  $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

  $$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$$

  $$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

- **Triângulo de Pascal**
  (ilustração omitida)
- **Identidades Clássicas:**
  - **Hockey-stick:** $\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$
  - **Vandermonde:** $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$
- **Distribuições de Probabilidade:**
  - **Uniforme:** $X \in \{a, a+1, \ldots, b\}, \quad E[X] = \frac{a+b}{2}$
  - **Binomial:** n tentativas com probabilidade p de sucesso:

    $$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad E[X] = np$$

  - **Geométrica:** Número de tentativas até o primeiro sucesso:

    $$P(X = x) = (1-p)^{x-1} p, \quad E[X] = \frac{1}{p}$$