Unités facultatives

Unité de mathématiques approfondies

L'objectif de l'enseignement de mathématiques approfondies est de préparer la personne étudiante à d'éventuelles poursuites d'études et à la familiariser aux calculs correspondants avec sa calculatrice et d'autres moyens informatiques, et à interpréter les résultats ainsi obtenus. À nouveau, l'utilisation de moyens informatiques (calculatrice, ordinateur) est recommandée pour faciliter la compréhension de concepts par des illustrations graphiques et numériques et pour les calculs non élémentaires.
Les exemples et exercices reposent sur des situations de vie courante ou issues des autres disciplines.
La compréhension d'une modélisation et son interprétation seront jugées plus importantes qu'une agilité calculatoire.
Le programme est constitué des modules suivants décrits par le programme de mathématiques des brevets de technicien supérieur (arrêté du 4 juin 2013) :
- Suites numériques ;
- Fonctions d'une variable réelle, à l'exception de l'item « *Fonctions sinus et cosinus* » et des paragraphes « *Approximation locale d'une fonction* » et « *Courbes paramétrées* » ;
- Calcul intégral, à l'exception de l'item « Complément : primitives de $t \mapsto \cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto \sin(\omega t + \phi)$ » du paragraphe « *Primitives* » et de l'item « *Formule d'intégration par parties* » du paragraphe « *Intégration* » ;
- Statistique descriptive ;
- Probabilités 1, à l'exception de l'item « *Théorème de la limite centrée* » ;
- Probabilités 2, à l'exception du paragraphe « *Exemples de processus aléatoires* ».

Annexe III.A – Grille horaire de formation sous statut scolaire

Première année	Premier semestre (15 semaines)					Deuxième semestre (15 semaines)				
Enseignements	Horaire hebdomadaire				*Volume semestriel (à titre indicatif)*	Horaire hebdomadaire				*Volume semestriel (à titre indicatif)*
	Total étud.	div. [3]	½ div. [4]	Lab. [5]		Total étud.	div. [3]	½ div. [4]	Lab. [5]	
Mathématiques pour l'informatique	3	2	1		*45*	3	2	1		*45*
Enseignements facultatifs										
Mathématiques approfondies	2	2			*30*	2	2			*30*

Deuxième année (24 semaines)					
Enseignements	Horaire hebdomadaire				*Volume annuel (à titre indicatif)*
	Total étud.	div. [3]	½ div. [4]	Lab. [5]	
Mathématiques pour l'informatique	3	2	1		*72*
Enseignements facultatifs					
Mathématiques approfondies	2	2			*48*

[3] Lors des séances en classe entière d'enseignement professionnel, les étudiants doivent pouvoir accéder en tant que de besoin à un environnement informatique.

[4] Lors des séances en demi-division, les étudiants doivent pouvoir accéder en tant que de besoin à un environnement informatique adapté.

[5] Les temps de formation en laboratoire informatique doivent permettre l'accès de chaque étudiante ou étudiant à l'équipement nécessaire à la réalisation des travaux informatiques, individuels et collectifs.

SUITES NUMÉRIQUES

Les suites sont un outil indispensable pour l'étude des phénomènes discrets, et c'est à ce titre qu'elles font l'objet d'une initiation. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée à leur propos. Le programme se place dans le cadre des suites définies pour tout entier naturel ou pour tout entier naturel non nul.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Mode de génération d'une suite et comportement global		
Exemples de génération d'une suite.	• Calculer une liste de termes ou un terme de rang donné d'une suite à l'aide d'un logiciel, d'une calculatrice ou d'un algorithme.	On privilégie les situations issues de la vie économique et sociale ou de la technologie pouvant être modélisées à l'aide de suites.
Suites croissantes, suites décroissantes.	• Réaliser et exploiter, à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, une représentation graphique des termes d'une suite.	On se limite à une approche graphique.
Suites arithmétiques et géométriques		
Expression du terme général.	• Écrire le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique définie par son premier terme et sa raison.	
	• Calculer avec la calculatrice ou le tableur la somme de n termes consécutifs (ou des n premiers termes) d'une suite arithmétique ou géométrique.	Une expression de la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique est donnée si nécessaire.
Limite d'une suite		On approche expérimentalement la notion de limite en utilisant les outils logiciels et en programmant des algorithmes.
Limite d'une suite géométrique	• Étant donné une suite géométrique (u_n), utiliser un tableur ou un algorithme pour déterminer, lorsque cela est possible : – un seuil à partir duquel $u_n \geq a$, a étant un réel donné ; – un seuil à partir duquel $\lvert u_n \rvert \leq 10^{-p}$, p étant un entier naturel donné.	Selon les besoins, on peut résoudre un problème de comparaison d'évolutions et de seuils pour des situations ne relevant pas d'une modélisation par une suite géométrique.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

On se place dans le cadre des fonctions à valeurs réelles, définies sur un intervalle ou une réunion d'intervalles de **R**, qui servent à modéliser des phénomènes continus. Les étudiants doivent savoir traiter les situations issues des disciplines techniques et scientifiques qui se prêtent à une telle modélisation. Pour aider les étudiants à faire le lien avec ces autres disciplines, il est indispensable d'employer régulièrement des notations variées sur les fonctions et de diversifier les modes de présentation d'une fonction : fonction donnée par une courbe, par un tableau de valeurs ou définie par une formule et un ensemble de définition.

Le but de ce module est double :
– consolider les acquis sur les fonctions en tenant compte, notamment sur les limites, des programmes de mathématiques suivis antérieurement par les étudiants ;
– apporter des compléments sur les fonctions d'une variable réelle, qui peuvent être utiles pour aborder de nouveaux concepts.
Tout particulièrement dans ce module, on utilise largement les moyens informatiques (calculatrice, ordinateur), qui permettent notamment de faciliter la compréhension d'un concept en l'illustrant graphiquement et numériquement, sans être limité par d'éventuelles difficultés techniques.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions de référence Fonctions affines. Fonctions polynômes de degré 2. Fonctions logarithme népérien et exponentielle de base e. Fonction racine carrée. Fonctions sinus et cosinus.	• Représenter une fonction de référence et exploiter cette courbe pour retrouver des propriétés de la fonction.	En fonction des besoins, on met l'accent sur les fonctions de référence les plus utiles. En cas de besoin lié à la spécialité, on peut être amené à étudier l'une ou l'autre des fonctions suivantes : – la fonction logarithme décimal ; – des cas particuliers de fonctions puissances $t \mapsto t^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$ ou exponentielles de base a avec $a \in]0, +\infty[$.
Dérivation Dérivée des fonctions de référence. Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient. Dérivée de fonctions de la forme : $x \mapsto u^n(x)$ avec n entier naturel non nul, $x \mapsto \ln(u(x))$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$.	• Calculer la dérivée d'une fonction : – à la main dans les cas simples ; – à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas. • Étudier les variations d'une fonction simple.	On privilégie des exemples de fonctions issues de problématiques abordées dans les autres disciplines. Il s'agit de compléter et d'approfondir les connaissances antérieures sur la dérivation. En particulier, il est important de rappeler et de travailler l'interprétation graphique du nombre dérivé.

	• Exploiter le tableau de variation d'une fonction f pour obtenir : – un éventuel extremum de f ; – le signe de f ; – le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$. • Mettre en œuvre un procédé de recherche d'une valeur approchée d'une racine.	Les solutions d'une équation du type $f(x) = k$ sont déterminées : – explicitement dans les cas simples ; – de façon approchée sinon. On étudie alors, sur des exemples, des méthodes classiques d'obtention de ces solutions : balayage, dichotomie, méthode de Newton par exemple. C'est notamment l'occasion de développer au moins un algorithme et d'utiliser des logiciels.
Limites de fonctions Asymptotes parallèles aux axes : –limite finie d'une fonction à l'infini ; – limite infinie d'une fonction en un point. Limite infinie d'une fonction à l'infini. Cas d'une asymptote oblique. Limites et opérations.	• Interpréter une représentation graphique en termes de limite. • Interpréter graphiquement une limite en termes d'asymptote. • Déterminer la limite d'une fonction simple. • Déterminer des limites pour des fonctions de la forme : $x \mapsto u^n(x)$, n entier naturel non nul ; $x \mapsto \ln(u(x))$; $x \mapsto e^{u(x)}$.	La diversité des programmes du lycée doit particulièrement inciter à veiller aux connaissances sur les limites acquises antérieurement ou non par les étudiants. Toute étude de branche infinie, notamment la mise en évidence d'asymptote, doit comporter des indications sur la méthode à suivre. On se limite aux fonctions déduites des fonctions de référence par addition, multiplication ou passage à l'inverse et on évite tout excès de technicité.
Approximation locale d'une fonction Développement limité en 0 d'une fonction. Développement limité en 0 et tangente à la courbe représentative d'une fonction.	• Déterminer, à l'aide d'un logiciel, un développement limité en 0 et à un ordre donné d'une fonction. • Exploiter un développement limité pour donner l'équation réduite de la tangente et préciser sa position par rapport à la courbe représentative de la fonction.	On introduit graphiquement la notion de développement limité en 0 d'une fonction f en s'appuyant sur l'exemple de la fonction exponentielle sans soulever de difficulté théorique. L'utilisation et l'interprétation des développements limités trouvés doivent être privilégiées.

Courbes paramétrées Exemples de courbes paramétrées définies par des fonctions polynomiales.	• Déterminer un vecteur directeur de la tangente en un point où le vecteur dérivé n'est pas nul. • Tracer une courbe à partir des variations conjointes.	L'étude de ces quelques exemples a pour objectif de familiariser les étudiants avec le rôle du paramètre, la notion de courbe paramétrée et de variations conjointes. On se limite à quelques exemples où les fonctions polynômes sont de degré inférieur ou égal à deux. ⇆ Trajectoire d'un solide, design.

CALCUL INTÉGRAL

Le programme se place dans le cadre de fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle ou une réunion d'intervalles de **R**. La diversité des programmes du lycée doit particulièrement inciter à veiller aux connaissances sur les primitives et les intégrales acquises antérieurement ou non par les étudiants.

L'accent est mis sur la diversité des approches numérique, graphique et algorithmique, lesquelles contribuent à l'appropriation du concept d'intégrale.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Primitives Primitives de fonctions de référence, opérations algébriques. Complément : primitives de $t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$, ω et φ étant réels.	• Déterminer des primitives d'une fonction : – à la main dans les cas simples ; – à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas. • Déterminer les primitives d'une fonction de la forme $u'u^n$ (n entier relatif, différent de – 1), $\frac{u'}{u}$ et $u'e^u$.	Pour les primitives de $\frac{u'}{u}$, on se limite au cas où u est strictement positive.
Intégration Calcul intégral : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f. Propriétés de l'intégrale : relation de Chasles, linéarité et positivité.	• Déterminer une intégrale : – à la main dans les cas simples ; – à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas.	
Calcul d'aires.	• Déterminer l'aire du domaine défini par : $\{M(x, y),\ a \leq x \leq b \text{ et } f(x) \leq y \leq g(x)\}$ où f et g sont deux fonctions telles que pour tout réel x de $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.	On étudie le cas où f (resp. g) est la fonction nulle. On familiarise les étudiants avec quelques exemples de mise en œuvre d'algorithmes liés à des méthodes élémentaires d'approximation d'une intégrale (point-milieu, trapèzes, Monte-Carlo).

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle : définition, interprétation géométrique. Formule d'intégration par parties.	• Déterminer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle. • Calculer une intégrale par intégration par parties.	Cette notion est illustrée par des exemples issus des disciplines professionnelles. ⇆ Valeur moyenne, valeur efficace dans un transfert énergétique ; centre d'inertie, moment d'inertie.

STATISTIQUE DESCRIPTIVE

Il s'agit de consolider et d'approfondir les connaissances acquises les années antérieures. On s'attache, d'une part à étudier des situations issues de la technologie, d'autre part à relier cet enseignement à celui de l'économie et de la gestion.

L'objectif est de faire réfléchir sur des données réelles, variées et en grand nombre, issues par exemple des disciplines professionnelles ou de fichiers mis à disposition sur des sites institutionnels, de synthétiser l'information et de proposer des résumés numériques ou graphiques pertinents. L'utilisation de logiciels, notamment d'un tableur, et des calculatrices est nécessaire.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Série statistique à une variable	• Utiliser un logiciel ou une calculatrice pour résumer et représenter des séries statistiques à une variable. • Interpréter les résultats obtenus pour une série statistique ou pour comparer deux séries statistiques. • Choisir des résumés numériques ou graphiques adaptés à une problématique.	Il s'agit de réactiver les connaissances déjà traitées au lycée : – méthodes de représentation ; – caractéristiques de position (médiane, moyenne) ; – caractéristiques de dispersion (étendue, écart interquartile, écart type). Aucun cours spécifique n'est donc attendu. L'utilisation des outils logiciels permet de faire réfléchir les étudiants à la pertinence de regroupements par classes lors du traitement statistique.
Série statistique à deux variables Nuage de points ; point moyen. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés.	• Utiliser un logiciel ou une calculatrice pour représenter une série statistique à deux variables et en déterminer un ajustement affine selon la méthode des moindres carrés. • Réaliser un ajustement se ramenant, par un changement de variable simple donné, à un ajustement affine. • Utiliser un ajustement pour interpoler ou extrapoler.	Pour l'ajustement affine, on distingue liaison entre deux variables statistiques et relation de cause à effet. Pour la méthode des moindres carrés, on observe, à l'aide d'un logiciel, le caractère minimal de la somme des carrés des écarts. On fait observer que l'on crée une dissymétrie entre les deux variables statistiques qui conduit, suivant l'utilisation de l'ajustement, à privilégier l'une des deux droites.

Coefficient de corrélation linéaire.		On utilise le coefficient de corrélation linéaire, obtenu à l’aide d’un logiciel ou d’une calculatrice, pour comparer la qualité de deux ajustements. ⇆ Contrôle qualité, mesures physiques sur un système réel, droite de Henry, étude économique ou mercatique.

PROBABILITÉS 1

On réinvestit et on approfondit le travail sur les probabilités mené au lycée, en s'adaptant au parcours antérieur des étudiants. L'objectif est que les étudiants sachent traiter quelques problèmes simples mettant en œuvre des probabilités conditionnelles ou des variables aléatoires dont la loi figure au programme. Les sciences et techniques industrielles et économiques fournissent un large éventail de tels problèmes, que l'on peut étudier en liaison avec d'autres enseignements.
L'apprentissage doit largement faire appel à l'outil informatique, aussi bien pour la compréhension et l'acquisition de concepts par l'expérimentation réalisée à l'aide de simulations, que pour les calculs de probabilités.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Conditionnement et indépendance Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$.	• Construire un arbre et/ou un tableau des probabilités en lien avec une situation donnée. • Exploiter l'arbre et/ou le tableau des probabilités pour déterminer des probabilités. • Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.	On représente une situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau de probabilités. Un arbre de probabilités correctement construit constitue une preuve. La formule des probabilités totales n'est pas un attendu mais sa mise en œuvre doit être maîtrisée.
Indépendance de deux événements.	• Utiliser ou justifier l'indépendance de deux événements.	⇆ Contrôle qualité, fausses alertes, tests biologiques.
Exemple de loi discrète Variable aléatoire associée au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli. Loi binomiale.	• Simuler un schéma de Bernoulli. • Reconnaître et justifier qu'une situation relève de la loi binomiale. • Représenter graphiquement la loi binomiale à l'aide d'un logiciel. • Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.	Aucun développement théorique n'est attendu à propos de la notion de variable aléatoire. On utilise une calculatrice ou un logiciel pour calculer directement des probabilités et représenter graphiquement la loi binomiale. La connaissance d'une expression explicite de la loi binomiale n'est pas attendue.

Espérance, variance et écart type de la loi binomiale.	• Interpréter l'espérance et l'écart type d'une loi binomiale dans le cadre d'un grand nombre de répétitions.	Les formules donnant l'espérance et l'écart type de la loi binomiale sont admises. On conforte expérimentalement ces formules à l'aide de simulations de la loi binomiale.
Exemples de lois à densité Loi uniforme sur $[a, b]$. Espérance, variance et écart type de la loi uniforme. Loi normale d'espérance μ et d'écart type σ. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.	 • Concevoir et exploiter une simulation dans le cadre d'une loi uniforme. • Interpréter l'espérance et l'écart type d'une loi uniforme dans le cadre d'un grand nombre de répétitions. • Utiliser une calculatrice ou un tableur pour calculer une probabilité dans le cadre de la loi normale. • Connaître et interpréter graphiquement une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]\}$, $\{X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]\}$, lorsque X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ. • Déterminer les paramètres de la loi normale approximant une loi binomiale donnée.	Toute théorie générale des lois à densité est exclue. Pour les lois étudiées, on représente et on exploite la fonction de densité et la fonction de répartition. La définition de l'espérance et de la variance constituent un prolongement dans le cadre continu de celles d'une variable aléatoire discrète. Toute théorie sur les intégrales impropres est exclue. La loi normale est introduite à partir de l'observation, à l'aide d'un logiciel, du cumul des valeurs obtenues lors de la répétition à l'identique d'une expérience aléatoire dont le résultat suit une loi uniforme. L'utilisation d'une table de la loi normale centrée réduite n'est pas une nécessité. On s'appuie sur des exemples issus des autres disciplines. On peut simuler la loi normale à partir de la loi uniforme sur [0, 1]. ⇆ Maîtrise statistique des processus. Toute théorie est exclue. On illustre cette approximation à l'aide de l'outil informatique. Les conditions d'approximation d'une loi binomiale par une loi normale ne sont pas exigibles. Il convient de mettre en évidence la raison d'être de la correction de continuité lors de l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale ; toutes les indications sont fournies.

Espérance et variance des lois de $aX + b$, $X + Y$, $X - Y$ dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.	• Savoir déterminer les paramètres des lois de $aX + b$, $X + Y$ et $X - Y$ dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.	Toute théorie concernant la notion de variables aléatoires indépendantes est exclue. Les résultats sont conjecturés à l'aide de simulations, puis admis.
Théorème de la limite centrée.	• Savoir déterminer les paramètres de la loi normale correspondant à une moyenne dans le cadre du théorème de la limite centrée.	Le théorème, admis, s'énonce en termes d'approximation par une loi normale de la somme de n variables indépendantes de même loi. L'outil informatique permet une approche expérimentale.

PROBABILITÉS 2

On approfondit dans ce module la connaissance des lois de probabilités en étudiant la loi exponentielle et la loi de Poisson, dans le contexte de processus aléatoires à temps continu. Une initiation aux processus aléatoires discrets permet d'élargir le champ d'étude des phénomènes aléatoires. Les sciences et techniques industrielles et économiques fournissent de nombreuses situations, que l'on peut étudier en liaison avec d'autres enseignements.
L'apprentissage doit largement faire appel à l'outil informatique, notamment pour la simulation et la mise en œuvre d'algorithmes.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Loi exponentielle		
	• Exploiter une simulation dans le cadre de la loi exponentielle. • Représenter graphiquement la loi exponentielle. • Calculer une probabilité dans le cadre de la loi exponentielle.	On peut simuler la loi exponentielle à partir de la loi uniforme sur [0, 1].
Espérance, variance et écart type de la loi exponentielle.	• Interpréter l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.	⇆ Fiabilité, désintégration nucléaire.
Loi de Poisson		
	• Représenter graphiquement la loi de Poisson. • Calculer une probabilité dans le cadre de la loi de Poisson à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.	La loi de Poisson est introduite comme correspondant au nombre de réalisations observées, durant un intervalle de temps de longueur donnée, lorsque le temps d'attente entre deux réalisations est fourni par une loi exponentielle. La connaissance d'une expression explicite de la loi de Poisson n'est pas attendue.
Espérance, variance et écart type de la loi de Poisson.	• Interpréter l'espérance et l'écart type dans le cadre d'un grand nombre de répétitions.	
Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.	• Déterminer le paramètre de la loi de Poisson approximant une loi binomiale donnée.	Les conditions d'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson ne sont pas exigibles. On illustre cette approximation à l'aide de l'outil informatique. ⇆ Fiabilité, gestion de stocks ou de réseaux.

Exemples de processus aléatoires Graphe probabiliste à N sommets. Exemples de chaînes de Markov.	• Représenter un processus aléatoire simple par un graphe probabiliste. • Exploiter un graphe probabiliste pour calculer la probabilité d'un parcours donné. • Simuler un processus aléatoire simple. • Exploiter une simulation d'un processus aléatoire pour estimer une probabilité, une durée moyenne ou conjecturer un comportement asymptotique.	On étudie des marches aléatoires sur un graphe à quelques sommets. ⇆ Pertinence d'une page web, gestion d'un réseau, fiabilité, étude génétique de populations, diffusion d'une épidémie.