مریم علیپور حاجی آقا | 9612037

تمرین تحویلی سری سوم توابع مختلط

تمرین 35) انتگرال $\int_0^\infty t e^{zt} dt$ را وقتی $Re(z)<0$ محاسبه کنید.

$$\int_0^\infty t e^{zt} dt = \frac{1}{z}\int_0^\infty t\, d(e^{zt}) = \frac{1}{z}\left(t e^{zt}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{zt} dt\right)$$

$$= \frac{1}{z}\left(\lim_{t\to\infty} t e^{zt} - \frac{1}{z}\left(\lim_{t\to\infty} e^{zt} - 1\right)\right) = \frac{1}{z^2}$$

زیرا: $\lim_{t\to\infty} t e^{zt} = \lim_{t\to\infty} e^{zt} = 0$ *

$$*: \lim_{t\to\infty} |t e^{zt}| = \lim_{t\to\infty} t e^{t Re(z)} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{-xt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{x e^{-xt}} = 0$$

و

$$*: \lim_{t\to\infty} |e^{zt}| = \lim_{t\to\infty} e^{t Re(z)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{-xt}} = 0 \quad (x = Re(z) < 0)$$

تمرین 36) انتگرال $\int_\gamma \underbrace{(z+2\bar{z})}_{f(z)} dz$ را محاسبه کنید که $\gamma(t) = (1+i)t$ ، $(0<t<1)$.

$$\int_\gamma (z+2\bar{z}) dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left((1+i)t + 2(1-i)t\right)(1+i)\, dt = \int_0^1 4it + 2t\, dt = \int_0^1 4it\, dt + \int_0^1 2t\, dt$$

$$= 4i\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + t^2\Big|_0^1 = 2i + 1$$

تمرین 37) فرض کنید C_R دایره $|z|=R$ $(R>1)$ با جهت مثبت باشد. ابتدا نشان دهید

$$\left|\int_{C_R}\frac{Log(z^2)}{z^2}dz\right|<4\pi\left(\frac{\pi+\ln R}{R}\right)$$ سپس نتیجه‌گیری کنید که $$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{Log(z^2)}{z^2}dz=0$$

$$|Log(z^2)|\leq\left|\ln|z^2|\right|+\pi=2\ln R+\pi$$

$$\xrightarrow{|z|=R>1}\left|\int_{C_R}\frac{Log(z^2)}{z^2}dz\right|\leq 2\pi R\left(\frac{\pi+2\ln R}{R^2}\right)=4\pi\left(\frac{\pi/2+\ln R}{R}\right)<4\pi\left(\frac{\pi+\ln R}{R}\right)$$

حال چون $\lim_{R\to\infty}4\pi\left(\frac{\pi+\ln R}{R}\right)=4\pi\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}=0 \Longrightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{Log(z^2)}{z^2}dz=0$

تمرین 38) بدون محاسبه‌ی انتگرال نشان دهید $$\left|\int_C\frac{dz}{\bar{z}^2+\bar{z}+1}\right|\leq\frac{9\pi}{16}$$ که در آن C بخشی از دایره $|z|=3$ از $z=3$ تا $z=3i$ است.

$$|\bar{z}^2+\bar{z}+1|\geq|\bar{z}^2|-|\bar{z}|-1=|z|^2-|z|-1\overset{|z|=3}{=\!=}5$$

$$\Rightarrow\left|\frac{1}{\bar{z}^2+\bar{z}+1}\right|\leq\frac{1}{5}\Rightarrow\left|\int_C\frac{dz}{\bar{z}^2+\bar{z}+1}\right|\leq\frac{6\pi}{4}\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{3\pi}{10}\leq\frac{9\pi}{16}$$

تمرین 39) نشان دهید $\int_{-1}^{1}z^i dz=\frac{1+e^{-\pi}}{2}(1-i)$ که در آن z^i شاخه اصلی ($|z|>0,\ -\pi<Arg z<\pi$) $z^i=e^{i\log z}$ و مسیر انتگرال‌گیری هر مسیر دلخواهی از $z=-1$ تا $z=1$ است که به غیر از نقاط انتهایی آن در بالای محور x ها است.

$$f(z)=z^i=e^{i\log z}=e^{i(\ln r+i\theta)}$$ از شاخه‌ی $r>0,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$ استفاده می‌کنیم.

تابع اولیه $f(z)$: $F(z) = \dfrac{z^{i+1}}{i+1} = \dfrac{e^{(i+1)\log z}}{i+1} = \dfrac{e^{(i+1)(\ln r + \theta)}}{i+1}$

$r>0 \ , \ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

برای محاسبه‌ی انتگرال به مقادیر $F(-1)$ و $F(1)$ نیاز داریم. پس -1 و 1 را به صورت قطبی می‌نویسیم. دقت کنید که θ بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ است:

$$-1 = e^{\pi i} \quad , \quad 1 = 1e^{0i}$$

$$F(-1) = \frac{e^{(1+i)(\ln 1 + i\pi)}}{i+1} = \frac{e^{-\pi + i\pi}}{1+i} = \frac{e^{-\pi}(\cos(\pi) + i\sin(\pi))}{1+i} = -\frac{e^{-\pi}}{1+i} = \frac{-e^{-\pi}(1-i)}{2}$$

$$F(1) = \frac{e^{(1+i)(\ln 1 + 0i)}}{i+1} = \frac{e^{0}}{1+i} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$$

حال می‌توانیم انتگرال $\int_{-1}^{1} z^i dz$ را محاسبه کنیم:

$$\int_{-1}^{1} z^i dz = \int_{-1}^{1} f(z)dz = F(z)\Big|_{-1}^{1} = F(1) - F(-1)$$

$$= \frac{1-i}{2} + \frac{e^{-\pi}}{2}(1-i) = \boxed{\frac{1+e^{-\pi}}{2}(1-i)}$$

تمرین ۹۵) انتگرال $\int_{C_R(z_0)} Im(z)dz$ را محاسبه کنید که در آن $C_R(z_0)$ دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع R با جهت مثبت است. پس نشان دهید تابع $Im\, z$ در هیچ زیرمجموعه‌ی بازی از $\mathbb{C}$ تابع اولیه ندارد. همین مطلب را برای $Re\, z$ نیز نشان دهید.

تمرین ۴۱) انتگرال های $g(z)$ را در امتداد دایره $|z + i| = 2$ (با جهت مثبت) بیابید وقتی که

الف) $g(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$ ب) $g(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)}$

الف)

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{A}{(z-2i)} + \frac{B}{(z+2i)}$$

$$\Rightarrow A(z+2i) + B(z-2i) = 1 \quad \xrightarrow{z=-2i} B = i/4 \qquad \xrightarrow{z=2i} A = -i/4$$

$$-2i \notin \{|z-i| \leq 2\} \quad , \quad 2i \in \{|z-i| \leq 2\}$$

$$\Rightarrow \int_{|z-i|=2} g(z) = \int_{C_2(i)} \frac{i/4}{(z-2i)} = i/4 \times 2\pi i = \frac{\pi}{2}$$

ب) با استفاده از قضیه 27 ی داریم:

$$\int_{C_2(i)} \frac{1}{z(z^2+4)} dz = \int_{C_r(0)} g(z)\, dz + \int_{C_r(2i)} g(z)\, dz$$

با استفاده از فرمول انتگرال کوشی

$$\int_{C_r(0)} \frac{\overbrace{\frac{1}{(z^2+4)}}^{f(z)}}{z-0} = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i \times \frac{1}{0+4} = \frac{\pi i}{2}$$

$$\int_{C_r(2i)} \frac{\frac{1}{z(z+2i)}}{(z-2i)} = 2\pi i\, f(2i) = 2\pi i \times \frac{1}{2i(4i)} = -\frac{\pi i}{4}$$

$$\Rightarrow \int_{C_r(i)} g(z) = \frac{\pi i}{2} + \left(-\frac{\pi i}{4}\right) = \frac{\pi i}{4}$$

تمرین 43) فرض کنید C دایره واحد $z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[-\pi,\pi])$ باشد، ابتدا نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی و ثابت a داریم $\int_C \frac{e^{az}}{z}dz=2\pi i$ ، سپس با نوشتن انتگرال برحسب θ ، فرمول مقابل را نتیجه بگیرید.

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)\,d\theta=\pi$$

فرمول انتگرال کوشی $\longrightarrow$ $$\int_C \frac{e^{az}}{z}dz=\int_C \frac{e^{az}}{z-0}=2\pi i\left[e^{az}\right]_{z=0}=2\pi i$$

$$\int_C \frac{e^{az}}{z}dz=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\exp(ae^{i\theta})}{e^{i\theta}}\,ie^{i\theta}\,d\theta=i\int_{-\pi}^{\pi}\exp[a(\cos\theta+i\sin\theta)]\,d\theta$$

$$=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{a\cos\theta}e^{ia\sin\theta}=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{a\cos\theta}\left[\cos(a\sin\theta)+i\sin(a\sin\theta)\right]d\theta$$

$$=-\int_{-\pi}^{\pi}e^{a\cos\theta}\sin(a\sin\theta)\,d\theta+i\int_{-\pi}^{\pi}e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)\,d\theta=2\pi i$$

قسمت موهومی $\longrightarrow$ $$\int_{-\pi}^{\pi}e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)\,d\theta=2\pi$$

چون تابع داخل انتگرال زوج است پس داریم:

$$\int_0^{\pi}e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)\,d\theta=\pi$$

تمرین (۴۴) فرض کنید f درون و روی مسیر ساده بسته C با جهت مثبت تحلیلی و z_0 روی C نباشد

در اینصورت نشان دهید:

$$(n-1)! \int_C \frac{f^{m}(z)}{(z-z_0)^n}\,dz = (m+n-1)! \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+n}}\,dz$$

اگر z_0 خارج از C باشد:

$$\int_C \frac{f^{m}(z)}{(z-z_0)^n}\,dz = \int \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+m}}\,dz = 0$$

با استفاده از فرمول انتگرال کوشی، چون $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+m}}$ و $\frac{f^{m}(z)}{(z-z_0)^n}$ روی و داخل C تحلیلی هستند.

اگر z_0 داخل C باشد:

$$(n-1)! \int_C \frac{f^{m}(z)}{(z-z_0)^n}\,dz = \left(f^{m}(z)\right)^{n-1}\Big|_{z=z_0} = f^{(m+n-1)}(z_0)$$

$$(m+n-1)! \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+n}}\,dz = f^{(m+n-1)}(z_0)$$

با استفاده از فرمول انتگرال کوشی، در نتیجه:

$$(n-1)! \int_C \frac{f^{m}(z)}{(z-z_0)^n}\,dz = (m+n-1)! \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+n}}\,dz \quad \blacksquare$$

تمرین ۴۶) فرض کنید $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در ناحیه بسته و کراندار R پیوسته و در داخل R تحلیلی و غیرثابت باشد. نشان دهید که $u(x,y)$ در R دارای مقدار ماکسیمم و مینیمم است که آن ها را روی مرز R اختیار می کند. همین مطلب را برای $v(x,y)$ نیز نشان دهید.

چون $f=u+iv$ است می توانیم $g(z)=-if(z)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$g(z)=-if(z)=-i\left(u(x,y)+iv(x,y)\right)=v(x,y)-iu(x,y)$$

چون f در ناحیه بسته و کراندار R تحلیلی است پس g هم تحلیلی است چون تابع $h(z)=-iz$ در C تحلیلی است حال می دانیم $Re\,g(z)=v(x,y)$ در R مینیمم خود را روی R اختیار می کند.

تمرین ۴۵) فرض کنید f در ناحیه بسته و کراندار R پیوسته و در داخل R تحلیلی و غیرثابت باشد. با فرض اینکه همه جا در R داشته باشیم $f(z)\neq 0$، ثابت کنید $|f(z)|$ در R مقدار min خاص m دارد که بر مرز R گرفته می شود. با ارائه مثالی نشان دهید $f(z)\neq 0$ شرطی لازم است.

تابع $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ را در نظر بگیرید، شرط $f(z)\neq 0$ لازم است.

حال چون f پیوسته (تحلیلی) در درون R است، g نیز در درون R پیوسته و تحلیلی است. حال با توجه به اصل ماکسیمم قدر مطلق، ماکسیمم $|g|$ در R (چون R فشرده است موجود دارد) در یک نقطه ای مانند z_0 روی R اتفاق می افتد.

حال داریم:

$$\forall z\in R \quad |g(z)|<|g(z_0)| \Rightarrow \frac{1}{|f(z)|}<\frac{1}{|f(z_0)|} \Rightarrow |f(z)|>|f(z_0)|$$

پس برای هر z در R، $f(z)$ مقدار مینیمم خود را در z_0 روی R اختیار می کند.