تمرین ۱) نشان دهید دستور دوجمله‌ای برای اعداد مختلط نیز برقرار است.

$$(z_1+z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^{k} \quad , \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad (k=0,1,\dots,n)$$

ابتدا لم پاسکال را تعریف می‌کنیم: برای n و k عضو اعداد صحیح و $n \geq k \geq 1$ داریم:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

اثبات: فرض می‌کنیم $z_1, z_2 \neq 0$ هستند پس $z_1^0 = 1$ و $z_2^0 = 1$

حال اگر $n=1$:

$$(z_1+z_2)^n = z_1+z_2 = \binom{1}{0} z_1^0 z_2^{1-0} + \binom{1}{1} z_1^1 z_2^{1-1} = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} z_1^{k} z_2^{1-k}$$

پس برای $n=1$ دستور دوجمله‌ای برقرار است. ✓

فرض استقرا: فرض می‌کنیم دستور دوجمله‌ای برای $n=n$ برقرار است

حکم استقرا: برای $n+1$ اثبات می‌کنیم:

$$(z_1+z_2)^{n+1} = (z_1+z_2)(z_1+z_2)^n = (z_1+z_2)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^{k} z_2^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^{k+1} z_2^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^{k} z_2^{n+1-k}$$

$$= \binom{n}{n} z_1^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z_1^{k+1} z_2^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z_1^{k} z_2^{n+1-k} + \binom{n}{0} z_2^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} z_1^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} z_1^{k} z_2^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z_1^{k} z_2^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} z_2^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} z_1^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] z_1^{k} z_2^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} z_2^{n+1}$$

لم پاسکال $\longrightarrow \binom{n+1}{n+1} z_1^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} z_1^{k} z_2^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} z_2^{n+1}$

$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} z_1^{k} z_2^{n+1-k}$ $\boxed{\cdot}$ پس دستور دوجمله‌ای برای همه‌ی n ها برقرار است

در حالتی که یکی از z_1 یا z_2 صفر باشند خواهیم داشت ، $z_1+z_2=z_1$ یا $z_1+z_2=z_2$
که جمع آن ها در بسط خواهد بود z_1^n یا z_2^n که قضیه برای این حالت هم برقرار است
و 0^0 را 1 در نظر می‌گیریم.

تمرین 2) نشان دهید اگر $w=\frac{z+i}{1+iz}$ ، $\mathrm{Im}\,w>0$ آنگاه $|z|<1$.

* می‌دانیم: $0 < \mathrm{Im}\,w < |\mathrm{Im}\,w| < |w|$

$$w=\frac{z+i}{1+iz}=\frac{(x+iy)+i}{1+i(x+iy)}$$

$$=\frac{x+i(1+y)}{(1-y)+ix}\cdot\frac{(1-y)-ix}{(1-y)-ix}=i\,\frac{1-y^2-x^2}{(1-y)^2+x^2}$$

$$\xrightarrow{*} \frac{1-y^2-x^2}{(1-y^2)+x^2}>0 \Rightarrow 1-y^2-x^2>0 \rightarrow x^2+y^2<1$$

$$\rightarrow |z|<1 \checkmark$$

تمرین 3) مکان های هندسی زیر را بیابید.

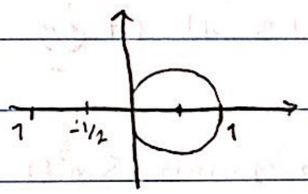
1) $Re\left(\frac{1}{z}\right) > 1$ 2) $\left|\frac{z+1}{z-3}\right| = 1$ 3) $z\bar{z} + (1+i) + \overline{(1+i)}z + 1 = 0$

1) فرض کنیم: $z = x+iy$

$$Re\left(\frac{1}{z}\right) = Re\left(\frac{1}{x+iy}\right) = Re\left(\frac{1}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy}\right)$$

$$= Re\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) > 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2} > 1 \to x > x^2+y^2$$

$$\to x^2+y^2-x < 0 \xrightarrow[\text{اضافه کنیم } (1/2)^2]{\text{به طرفین نامساوی}} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$



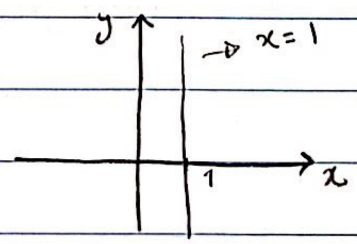
دایره ای به مرکز $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ و شعاع $\frac{1}{2}$

2) فرض کنیم: $z = x+iy$

$$\left|\frac{z+1}{z-3}\right| = \frac{|(x+1)+iy|}{|(x-3)+iy|} = 1$$

$$\Rightarrow |(x+1)+iy| = |(x-3)+iy| \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = (x-3)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = (x-3)^2 \Rightarrow x^2+2x+1 = x^2-6x+9 \Rightarrow 8x = 8 \Rightarrow x = 1$$

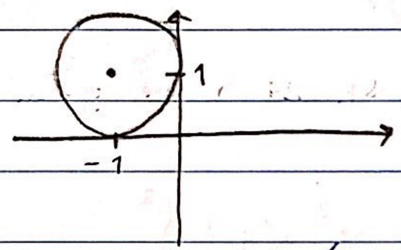


3) $z = x + iy$: $z\bar{z} + (1+i)z + \overline{(1+i)z} + 1 = 0$

$$\Rightarrow |z|^2 + 2\,Re\big((1+i)z\big) + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2\,Re\big((x-y) + i(y+x)\big) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \xrightarrow[\text{+1 را اضافه می‌کنیم}]{\text{به طرفین تساوی}} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

دایره‌ای به مرکز $(-1,1)$ و شعاع 1



تمرین ۴) با استفاده از فرمول دموآور اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

1) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$ 2) $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

با استفاده از فرمول دموآور داریم:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$\cos^3\theta + 3\cos^2\theta\,(i\sin\theta) + 3\cos\theta\,(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i\,(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

از عبارت بالا با جدا کردن قسمت حقیقی و موهومی طرفین و برابر قرار دادن آن‌ها به دو عبارت خواسته‌شده‌ی سوال می‌رسیم.

تمرین 5) نشان دهید که معادله ی $|z-z_0|=R$ برای دایره به مرکز z_0 و شعاع R را می توان چنین نوشت:

$$|z|^2-2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)+|z_0|^2=R^2$$

می دانیم: $z\bar{z}=|z|^2$ و $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}\,z$:

$$|z-z_0|=R \Rightarrow |z-z_0|^2=R^2 \Rightarrow (z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=R^2$$

$$\Rightarrow z\bar{z}-(z\bar{z}_0+\overline{z\bar{z}_0})+z_0\bar{z}_0=R^2 \Rightarrow |z|^2-2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)+|z_0|^2=R^2$$

تمرین 6) اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\dots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin((2n+1)\theta/2)}{2\sin(\theta/2)}$$

راهنمایی: در اتحاد $1+z+\dots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ و $z\neq 1$ به جای z قرار دهید $e^{i\theta}$.

$$1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}+\dots+e^{in\theta}=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

قسمت حقیقی سمت چپ معادله بالا به وضوح عبارت زیر است:

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\dots+\cos n\theta$$

حال قسمت حقیقی سمت راست را محاسبه می کنیم:

$$\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\cdot\frac{e^{-i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}}$$

$$=\frac{e^{-i\theta/2}-e^{i(2n+1)\theta/2}}{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}}=\frac{\cos\theta/2-i\sin\theta/2-\cos(2n+1)\theta/2-i\sin(2n+1)\theta/2}{-2i\sin\theta/2}\times\frac{i}{i}$$

$$=\frac{(\sin\theta/2+\sin(2n+1)\theta/2)+i(\cos\theta/2-\cos(2n+1)\theta/2)}{2\sin\theta/2}$$

پس قسمت حقیقی سمت راست معادله برابر است با:
$$\frac{1}{2}+\frac{\sin(2n+1)\theta/2}{2\sin\theta/2}$$

در نتیجه:
$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\dots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin(2n+1)\theta/2}{2\sin\theta/2}$$

تمرین 7) فرض کنید $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ و $z_1 z_2 \in \mathbb{R} \neq 0$. نشان دهید $r \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که: $z_1 = r\bar{z}_2$

$z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$z_1 z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2) \xrightarrow{\text{طبق فرض } z_1z_2\in\mathbb{R}} z_1z_2 = x_1x_2-y_1y_2$$

$$\Rightarrow x_1y_2+y_1x_2=0 \Rightarrow x_1y_2=-y_1x_2$$

حال داریم:
$$\frac{z_1}{\bar{z}_2}=\frac{(x_1+iy_1)}{(x_2-iy_2)}\cdot\frac{(x_2+iy_2)}{(x_2+iy_2)}=\frac{(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)}{x^2+y^2}$$

$$\xrightarrow{x_1y_2+x_2y_1=0} \frac{z_1}{\bar{z}_2}=\underbrace{\frac{x_1x_2-y_1y_2}{x^2+y^2}}_{r\in\mathbb{R}} \Rightarrow \frac{z_1}{\bar{z}_2}=r \xrightarrow{\times \bar{z}_2} z_1=r\bar{z}_2$$

تمرین 8) نشان دهید: $\sqrt{2}\,|z| \geq |Re z| + |Im z|$

عبارت فوق را به شکل زیر می‌نویسیم: $z = x + iy$:

$$\sqrt{2}\,\sqrt{x^2+y^2} \geq |x| + |y|$$

$$2(x^2+y^2) \geq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

$$|x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \geq 0$$

$$(|x| - |y|)^2 \geq 0$$

که این نامساوی همواره برقرار است چون مربع کامل است
پس عبارت سوال نیز درست است