تمرین تحویلی سری سوم

مریم علیپور حاجی آقا | 9612037

تمرین 23) حدهای زیر را در صورت وجود پیدا کنید:

a) $\lim_{z\to -i} \frac{iz^3+1}{z^2+1}$ b) $\lim_{z\to\infty} \frac{4+z^2}{(z-1)^2}$ c) $\lim_{z\to\infty} \frac{\operatorname{Im} z}{z}$

a) $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0 \iff \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$

$$\lim_{z\to -i} \frac{z^2+1}{iz^3+1} = \frac{(-1)+1}{(-1)+1} = 0 \Rightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{iz^3+1}{z^2+1} = \infty$$

b) $\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w \iff \lim_{z\to\infty} f(z) = w$

$$\lim_{z\to 0} \frac{4+(1/z^2)}{(1/z-1)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{4z^2+1}{z^2}}{\frac{1+z^2-2z}{z^2}} = \lim_{z\to 0} \frac{4z^2+1}{1+z^2-2z} = 1 \Rightarrow \lim_{z\to\infty} \frac{4+z^2}{(z-1)^2} = 1$$

c) $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{z} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{\operatorname{Im} z}{z} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{y}{x+iy} = 0 \\ \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{Im} z}{z} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y}{x+iy} = i^{-1} \end{cases} \Rightarrow$ تابع $\frac{\operatorname{Im} z}{z}$ در $z=0$ حد ندارد

تمرین ۲۴) قرار دهید $\Delta z = z - z_0$ و نشان دهید $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ اگر و فقط اگر $\lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0$.

طرف اول: فرض کنیم $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد یک $\delta > 0$ به طوری که:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |z - z_0| = |\Delta z - 0| < \delta \ \wedge \ |f(z_0 + \Delta z) - w_0| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0$$

طرف دوم: فرض کنیم $\lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0$ پس داریم:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{s.t} \ |\Delta z - 0| < \delta \rightarrow |f(z_0 + \Delta z) - w_0| < \varepsilon$$

$$\xrightarrow{z_0 + \Delta z = z} |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

تمرین ۲۵) نشان دهید حدهای زیر وجود ندارند.

a) $\lim_{z \to \infty} e^{-z}$ b) $\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2}$ c) $\lim_{z \to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$

$$a)\ \lim_{z \to \infty} e^{-z} = \begin{cases} \lim_{(x,0) \to \infty} e^{-x}\cos y - i e^{-x}\sin y = 0 \\ \lim_{(-x,0) \to \infty} e^{x}\cos y - i e^{x}\sin y = \infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ حد e^{-z} وقتی $z \to \infty$ وجود ندارد

$$b)\ \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} = \begin{cases} \lim_{(x,0) \to (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,0) \to 0} \frac{1}{x} = \infty \\ \lim_{(0,y) \to (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2} = \lim_{(0,y) \to (0,0)} \frac{0}{y^2} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ حد وجود ندارد

c) $\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar z}\right)^2$

یک بار از مسیر $y=x$ به سمت صفر می‌رویم یک بار از مسیر $(x,0)$:

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)}\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^2=\lim_{(x,0)\to 0}\left(\frac{x}{x}\right)^2=1$$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)}\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^2=\lim_{(x,x)\to 0}\frac{(x+ix)^2}{(x-ix)^2}=\lim_{(x,x)\to 0}\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$$

$$=\lim\frac{(\sqrt2 e^{i\pi/4})^2}{(\sqrt2 e^{-i\pi/4})^2}=e^{-i\pi/2}=-1$$

مقدار حد در دو مسیر متفاوت، مختلف است پس حد وجود ندارد.

تمرین 26) $\lim_{z\to -3}(\mathrm{Arg}z)^2$ را محاسبه کنید.

$$\lim_{z\to -3}(\mathrm{Arg}z)^2=\lim_{z\to -3}|\mathrm{Arg}z|^2=\left(\lim_{z\to -3}|\mathrm{Arg}z|\right)^2$$

می‌دانیم که آرگومان اصلی z در شاخه $(-\infty,0]$ ناپیوسته است اما $|\mathrm{Arg}z|$ در شاخه‌ی $(-\infty,0)$ پیوسته است. اگر z_0 عضو شاخه‌ی $(-\infty,0)$ باشد و z از ربع دوم به سمت z_0 میل کند $\mathrm{Arg}z$ به π میل می‌کند در نتیجه $|\mathrm{Arg}z|$ به π میل می‌کند. اگر z از ربع سوم به z_0 میل کند $\mathrm{Arg}z$ به $-\pi$ میل می‌کند اما $|\mathrm{Arg}z|$ به π میل می‌کند. پس داریم:

$$\lim_{z\to z_0}|\mathrm{Arg}z|=\pi$$

$$z_0=-3 \Rightarrow \lim_{z\to -3}(\mathrm{Arg}z)^2=\left(\lim_{z\to -3}|\mathrm{Arg}z|\right)^2=\pi^2$$

تمرین 27) تحلیلی بودن تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ را در نقطه $(0,0)$ بررسی کنید.

برای این که نشان دهیم یک تابع تحلیلی است باید نشان دهیم در معادلات کوشی - ریمان صدق کند:

$$u_x=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad v_y=0$$

$$u_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(0+h,0)-u(0,0)}{h}=0=v_y=0 \quad ✓$$

$$u_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(0,0+h)-u(0,0)}{h}=0=-v_x=0 \quad ✓$$

در نتیجه تابع فوق تحلیلی است.

تمرین 28) نشان دهید تابع $f(z)=\sin\bar{z}$ هیچ جا تحلیلی نیست.

$f(z)=\sin\bar{z}$

$=\sin(x-iy)=\sin x\cosh y-i\cos x\sinh y$

$\Rightarrow u(x,y)=\sin x\cosh y \quad , \quad v(x,y)=-\cos x\sinh y$

$u_x=\cosh y\cos x \quad , \quad u_y=\sinh y\sin x$

$v_x=\sinh y\sin x \quad , \quad v_y=-\cosh y\cos x$

این مشتقات جزئی فقط در نقاط $\frac{\pi}{2}+n\pi$ در معادلات کوشی ریمان صدق می کند. اما تابع f برای تحلیلی بودن باید معادلات کوشی ریمان را در مجموعه باز ارضا کند. پس $\sin\bar{z}$ تحلیلی نیست.

تمرین 29) فرض کنید $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\bar{z}^2}{|z|} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ نشان دهید $f(z)$ همه جا پیوسته است ولی هیچ جا تحلیلی نیست.

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{|z|}=\lim_{z\to 0}\left|\frac{\bar{z}^2}{|z|}\right|=\lim_{z\to 0}\frac{|\bar{z}|^2}{|z|}=\lim_{z\to 0}|z|=0$$

$\Rightarrow$ پیوسته است

$f(0)=0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\bar{z}^2}{|z|}\right)=\left(\frac{2\bar{z}}{|z|}-\frac{x\bar{z}^2}{|z|^3}\right)+i\left(-\frac{2i\bar{z}}{|z|}-\frac{y\bar{z}^2}{|z|^3}\right)$$

$$=\frac{(4z-x-iy)\bar{z}^2}{|z|^3}+\frac{2\bar{z}}{|z|}\neq 0 \Rightarrow$$ $f(z)$ هیچ جا تحلیلی نیست.

تمرین 30) مشخص کنید تابع $\tan^{-1}=\frac{i}{2}\operatorname{Log}\frac{i+z}{i-z}$ کجا تحلیلی است.

شاخه ای از $\tan^{-1}(z)$ ، $\left\{z:\frac{i+z}{i-z}=w\in(-\infty,0]\right\}=\left\{z: z=i\frac{w-1}{w+1},\ w\in(-\infty,0]\right\}$

$$\forall w\in(-\infty,0];\quad \frac{w-1}{w+1}=1-\frac{2}{w+1}\in(-\infty,-1]\cup(1,\infty)$$

$\Rightarrow$ تابع $\tan^{-1}(z)$ در $\mathbb{C}\setminus\{z: Re(z)=0, Im(z)\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\}$ تحلیلی است.

تمرین 31) فرض کنید $f(z_0)=g(z_0)=0$ و $f'(z_0)$ و $g'(z_0)$ موجود باشند به طوری که $g'(z_0)\neq 0$
نشان دهید

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

$$\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\lim\limits_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}$$

تمرین 32) نقاطی که $f(z)=x^3+i(1-y)^3$ در آن ها مشتق پذیر است را مشخص کنید.

یک تابع زمانی مشتق پذیر است در یک نقطه که مشتقات جزئی u و v در آن نقطه موجود و پیوسته باشند و در معادلات کوشی-ریمان صدق کنند.

$u(x,y)=x^3 \quad , \quad v(x,y)=(1-y)^3$

$u_x=3x^2 \quad , \quad v_x=0$

$u_y=0 \quad , \quad v_y=-3(1-y)^2$

$$\xrightarrow{CR} 3x^2=-3(1-y)^2 \xRightarrow{z=1} 3(0)^2=-3(1-1)^2=0 \checkmark$$

$$\Rightarrow f'(z)=u_x+iv_x=3x^2$$

تمرین 33) حدهای زیر را محاسبه کنید.

a) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{Log(z+1)}{z}$

b) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{1+iz}{z(z-i)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to i} 1+iz}{\lim\limits_{z\to i} z(z-i)} = \dfrac{0}{0} = 0$

a) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{Log(z+1)}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{Ln|z+1| + i\theta}{z} = \dfrac{i\theta}{0} = \infty$

تمرین 34) نشان دهید تابع زیر در صفر پیوسته است ولی $f'(0)$ وجود ندارد.

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^3}{z^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

$\bar{z}^3$ و z^2 هر دو روی $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ پیوسته هستند پس $f(z) = \dfrac{\bar{z}^3}{z^2}$ روی $\mathbb{C}^*$ پیوسته است.

$$\lim_{z\to 0} |f(z)| = \lim_{z\to 0} \left|\frac{\bar{z}^3}{z^2}\right| = \lim_{z\to 0} |z| = 0$$

پس $f(z)$ در صفر نیز پیوسته است.

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^3}{z^3} = f'(0)$$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{\bar{z}^3}{z^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$\Rightarrow$ $f'(0)$ وجود ندارد.

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{\bar{z}^3}{z^3} = \lim_{y\to 0} \frac{(-iy)^3}{(iy)^3} = -1$$