تمرین 48) سری مک لورن تابع $f(z)=\frac{z}{z^2+9}$ را به دست آورید.

$$f(z)=\frac{z}{9}\cdot\frac{1}{1+z^4/9}$$

$$* \quad \frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\overset{*}{\Longrightarrow}\ \frac{1}{1-\left(-\frac{z^4}{9}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^4}{9}\right)^n(-1)^n$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{z}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^4}{9}\right)^n(-1)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n+1}}{9^{n+1}}(-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n+1}}{3^{2(n+1)}}(-1)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n+1}}{3^{2n+2}}(-1)^n \quad \boxed{\circ}$$

تمرین 49) نمایش سری تیلور زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \qquad |z-i|<\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-i)-(z-i)}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}}$$

سوال قبل

$$\overset{*}{=}\ \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n(-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}(-1)^n$$

تمرین 30) سری لوران تابع $f(z)=\dfrac{z^2}{z^2-z-2}$ را در هر یک از حوزه‌های زیر به دست آورید.

الف) $1<|z|<2$ ب) $0<|z-2|<1$

الف)

$$\frac{z^2}{z^2-z-2}=1+\frac{z+2}{(z-2)(z+1)}=1+\frac{4}{3(z-2)}-\frac{1}{3(z+1)}$$

$$1<|z|<2 \longrightarrow \frac{z^2}{z^2-z-2}=1-\frac{2}{3}\,\frac{1}{1-z/2}-\frac{1}{3z}\,\frac{1}{1+1/z}$$

$$=1-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^{n}-\frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(z)^{-n}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}2^{1-n}z^{n}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}z^{-n} \quad \boxed{\cdot}$$

ب) $0<|z-2|<1$

$$\frac{z^2}{z^2-z-2}=1+\frac{4}{3(z-2)}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{3+(z-2)}$$

$$=1+\frac{4}{3(z-2)}-\frac{1}{9}\,\frac{1}{1+\frac{(z-2)}{3}}$$

$$=1+\frac{4}{3(z-2)}-\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}3^{-n}(z-2)^{n}$$

$$=\frac{8}{9}+\frac{4}{3(z-2)}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}3^{-n-2}(z-2)^{n} \quad \boxed{\cdot}$$

تمرین 51) همه‌ی سری‌های لوران تابع $f(z)=\dfrac{3}{(1+z)(2-z)}$ را در نقطه‌ی $z_0=0$ بیابید.

$$\frac{3}{(1+z)(2-z)}=\frac{1}{(1+z)}+\frac{1}{(2-z)}$$

$$\frac{1}{(1+z)}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z)^n \quad , \quad \frac{1}{2-z}=\frac{1}{2(1-z/2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(z)^n(2)^{-n}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(z)^n(2)^{-n}$$

تمرین 52) برای هر یک از توابع الف) قسمت اصلی تابع را در نقاط تکین تنها بنویسید ب) نوع نقاط تکین تنها را مشخص کنید ج) مانده‌ی تابع را در هر یک از نقاط تکین حساب کنید.

الف) $f(z)=(1-z^2)(e^{1/z})$ ب) $f(z)=\tan z$ ج) $(1-z^2)\sin(1/z)$

الف) $$(1-z^2)\exp\left(\frac{1}{z}\right)=(1-z^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^{n-2}}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n!)(z)^{n-2}}-\left(z^2+z+\frac{1}{2}\right)$$

قسمت اصلی ∞ پس تابع نقطه تکین ضروری در 0 دارد.

$$=-z^2-z+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!\,z^n}=-z^2-z+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)z^{-n}$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{1!}-\frac{1}{(1+2)!}=\frac{5}{6}$$

ب) $f(z)=\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z} \Rightarrow$ نقاط تکین $:= \cos z=0$

$$\Rightarrow \{\cos z=0\}=\{z=k\pi+\pi/2 \;;\; k\in\mathbb{Z}\}$$

حال متغیر $w=z-k\pi-\pi/2$ را تعریف می‌کنیم:

$$\tan z=\tan(w+k\pi+\pi/2)=\tan(w+\pi/2)=-\frac{\cos w}{\sin w}$$

چون $\sin w$ در صفر، صفر مرتبه ۱ دارد با توجه به قضیه‌ای که داشتیم $\tan z$ در $z=k\pi+\pi/2$ قطب ساده دارد پس:

$$\underset{z=k\pi+\pi/2}{\operatorname{Res}} \tan z=\underset{w=0}{\operatorname{Res}}\left(-\frac{\cos w}{(\sin w)'}\right)=-\frac{\cos w}{(\sin w)'}\bigg|_{w=0}=-1$$

قسمت اصلی سری لوران آن $\tan z$:

$$-\frac{1}{w}=-\frac{1}{z-k\pi-\pi/2}$$

ج) $$(1-z^2)\sin\left(\frac{1}{z}\right)=(1-z^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{((2n+1)!)\,z^{2n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{((2n+1)!)\,z^{2n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{((2n+1)!)\,z^{2n-1}}$$

$$=-z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{((2n+1)!)\,z^{2n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{((2n+1)!)\,z^{2n-1}}$$

$$=-z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{((2n+1)!)\,z^{2n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)!\,z^{2n+1}}=-z+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(2n+1)!}+\frac{1}{(2n+3)!}\right)z^{-2n+1}}_{\text{قسمت اصلی}}$$

$$\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}=7/6.$$

تمرین 53) انتگرال $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}$ را با تبدیل به انتگرال یک تابع مختلط محاسبه کنید.

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} \overset{\text{تابع زوج}}{=} \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}$$

$$z=e^{i\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2} \quad , \quad d\theta = -iz^{-1}dz$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{-i\,dz}{2z\left(2-(z+z^{-1})/2\right)} = i\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-4z+1}$$

$$\frac{1}{z^2-4z+1} = \frac{1}{(z-2-\sqrt{3})(z-2+\sqrt{3})}$$

این تابع در حوزه $|z|<1$ در $z=2-\sqrt{3}$ نقطه تکین دارد:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-4z+1} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2-\sqrt{3}} \frac{1}{z^2-4z+1} = 2\pi i \left.\frac{1}{(z^2-4z+1)'}\right|_{z=2-\sqrt{3}} = \frac{\pi i}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

تمرین 54) ثابت کنید $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$$p(x)=1 \,,\; q(x)=x^4+1 \,,\; q'(x)=4x^3$$

$$z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1 \Rightarrow z_k = e^{i\pi/4 + k\pi/2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} = \frac{1}{4(z_k)^3} \Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=z_0} = \frac{1}{4(e^{i\pi/4})^3} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{1}{4(e^{i3\pi/4})^3} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = -\int_{C_R} f(z)\,dz + 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\operatorname{Res}} f(z)$$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = -\int_{C_R} f(z)\,dz + 2\pi i \cdot \frac{-2i}{4\sqrt{2}}$$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = -\int_{C_R} f(z)\,dz + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$|q(z)| = |z^4+1| \geq ||z|^4-1| = R^4-1$$

$$\Rightarrow |f(z)| = \frac{1}{|z^4+1|} \leq \frac{1}{R^4-1}$$

$$\Rightarrow \int_{C_R} f(z) \leq \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow{\lim_{R\to\infty}} \int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

تمرین 55) ثابت کنید $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}$

$p(z)=1$, $q(z)=(z^2+1)^3$, $q'(z)=3(z^2+1)(2z)$

$(z^2+1)^3=0 \Rightarrow z^2+1=0 \Rightarrow z^2=-1 \Rightarrow z_k = e^{i\pi/2+k\pi}$

$\Rightarrow z_0 = e^{i\pi/2}$, $z_1 = e^{i3\pi/2}$

$$\underset{z=z_k}{\operatorname{Res}} = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} = \frac{1}{3(z^2+1)^2 2z} = \frac{1}{3(e^{i\pi}+1)^2 2e^{i\pi/2}} = \frac{1}{6}$$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = -\int_{C_R} f(z)\,dz + 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\operatorname{Res}} f(z) = -\int_{C_R} f(z)\,dz + \frac{\pi i}{3}$$

تمرین 56) مقدار انتگرال $\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$ را که در جهت عکس عقربه‌های ساعت روی دایره

الف) $|z|=2$ ب) $|z+2|=3$ گرفته شده پیدا کنید.

برای حل این سوال از قضیه: z_0 قطب مرتبه m است اگر و تنها اگر بتوان

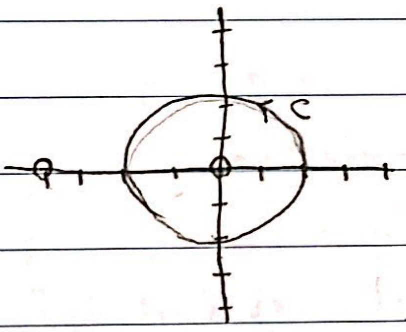
$$f(z)=\frac{Q(z)}{(z-z_0)^m}$$

نوشت که $Q(z_0)\neq 0$ و $Q(z)$ تحلیلی است.

و مانده‌ی z_0 اگر $m=1$ ؛ $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)=Q(z_0)$

و اگر $m\geq 2$ $\operatorname{Res} f(z)=\frac{Q^{m-1}(z_0)}{(m-1)!}$

حوزه‌ی $|z|=2$ را رسم می‌کنیم که تابع در این حوزه نقاط تکین $z=0$ و $z=-4$ هستند.



با توجه به قضیه مانده‌ها:

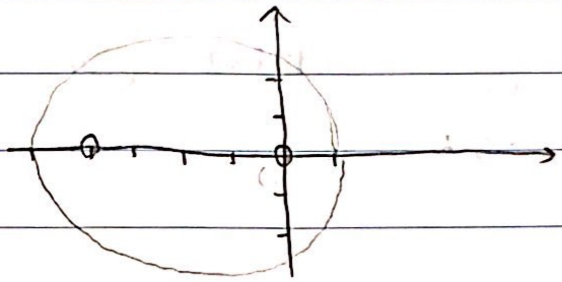
$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

$f(z)=\frac{Q(z)}{z^3}$, $Q(z)=\frac{1}{z+4}$ ⟵ تحلیلی است و در 0 ناصفر است

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} f(z)=\frac{Q''(0)}{2!}=\frac{Q''(z)}{2}\Big|_{z=0}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+4}\right)''\Big|_{z=0}$$

$$=\frac{1}{(z+4)^3}\Big|_{z=0}=\frac{1}{64} \Rightarrow \int_C f(z)\,dz=2\pi i\cdot\frac{1}{64}=\frac{\pi i}{32}$$

ب) حوزه $|z+2| = 3$ را رسم می‌کنیم که نقاط تکین تابع در صفر و -4 هستند



هر دو نقطه تکین تابع درون دایره هستند.

حال مانده در $z=-4$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(z) = \frac{Q(z)}{z+4} \quad , \quad Q(z) = \frac{1}{z^3}$$

$Q(z)$ تحلیلی است و در -4 ناصفر است. پس -4 قطب ساده $f(z)$ است پس:

$$\operatorname{Res}_{z=-4} f(z) = Q(-4) = -\frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-4} f(z) = 0 \Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

تمرین 57) تابع $f(z) = \frac{1}{[q(z)]^2}$ را در نظر بگیرید که در آن تابع q در z_0 تحلیلی است و $q(z_0) = 0$, $q'(z_0) \neq 0$ نشان دهید z_0 قطب مرتبه $m=2$ تابع f است با مانده:

$$B_0 = -\frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3}$$

از قضیه ای که در سوال قبل مطرح کردیم استفاده می کنیم و همچنین از آنجایی که z_0 صفر مرتبه ۱ است
می توانیم $q(z)=(z-z_0)g(z)$ را تعریف کنیم که $g(z)$ تحلیلی و در z_0 ناصفر باشد.

حال داریم: $Q(z)=\dfrac{1}{(g(z))^2}$ ، $f(z)=\dfrac{1}{[(z-z_0)g(z)]^2}=\dfrac{Q(z)}{(z-z_0)^2}$

چون $g(z)$ تحلیلی و در z_0 ناصفر است پس $Q(z)$ نیز تحلیلی و در z_0 ناصفر است.
پس z_0 قطب مرتبه 2، $f(z)$ است.

حال مانده را محاسبه می کنیم:

$$B_0=\frac{Q'(z_0)}{1!}=\left(\frac{1}{(g(z))^2}\right)'\Bigg|_{z=z_0}=\frac{g(z)^2-2g(z)g'(z))}{(g(z))^4}\Bigg|_{z=z_0}$$

$$=-2\frac{g'(z)}{(g(z))^3}\Bigg|_{z=z_0}=\frac{-2g'(z_0)}{(g(z))^3}$$

حال $q'(z_0)$ و $q''(z_0)$ را محاسبه می کنیم تا بتوانیم آن ها را برحسب $g(z_0)$ بنویسیم.

$$q(z)=(z-z_0)g(z)$$
$$q'(z)=g(z)+(z-z_0)g'(z) \quad \Big|\xrightarrow{z=z_0} \quad q'(z_0)=g(z_0)$$
$$q''(z)=g'(z)+g'(z)+(z-z_0)g''(z) \qquad , \quad q''(z_0)=2g'(z_0)$$

$$\Rightarrow B_0=\frac{-q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3} \quad \boxed{}$$

تمرین 58) نشان دهید تابع $u(x,y)=x+e^{-x}\cos y$ همساز است و مزدوج همساز آن را بیابید.

$u_x=1-e^{-x}\cos y \qquad u_{xx}=e^{-x}\cos y$

$u_y=-e^{-x}\sin y \qquad u_{yy}=-e^{-x}\cos y$

$u_{xx}+u_{yy}=0 \Rightarrow$ $u(x,y)$ همساز است

پس همساز آن تابعی مانند $v(x,y)$ است که به وسیله ی معادلات کوشی ریمان به آن وابسته است:

$u_x=v_y \quad , \quad u_y=-v_x$

$v_y=1-e^{-x}\cos y \Rightarrow v=\int(1-e^{-x}\cos y)\,dy+\phi(x)$

$\Rightarrow v=y-e^{-x}\sin y+\phi(x)$

$\xrightarrow{v_x=-u_y} e^{-x}\sin y+\phi'(x)=e^{-x}\sin y \Rightarrow \phi'(x)=0 \Rightarrow \phi(x)=C$

$\Rightarrow v(x,y)=y-e^{-x}\sin y+C$: مزدوج همساز تابع $u(x,y)$