تمرین ۶) ثابت کنید هرگاه $a\neq 1$، نگاشت $z\mapsto az$

الف) به جز نقطه‌ی $z=0$ نقطه‌ی ثابت دیگری ندارد.

ب) هر دایره در صفحه‌ی z ها را به دایره‌ای در صفحه‌ی w ها تبدیل می‌کند

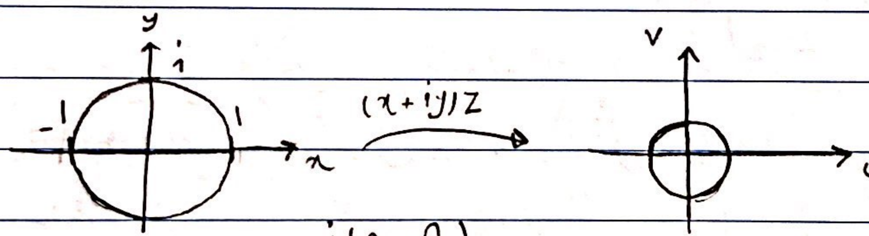
ج) هر خط در صفحه‌ی z ها را به خطی در صفحه‌ی w ها تبدیل می‌کند

الف) $z\mapsto az$ $\qquad a=x_2+iy_2 \;,\; z=x_1+iy_1$

$$w=f(z)=(x_2+iy_2)(x_1+iy_1)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$$

به وضوح با شرط $a\neq 1$ تنها در صورتی $f(z)=z$ خواهد بود که $z=0$ باشد.

ب)

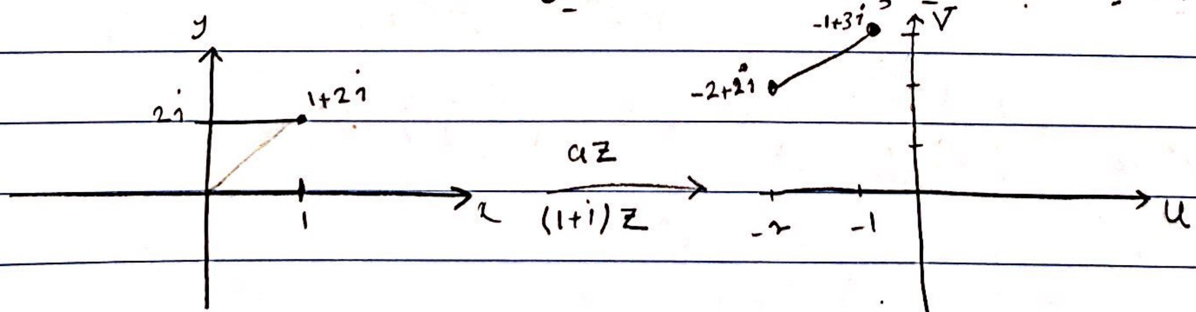


$(|a|<1)$

$$w=f(z)=\sqrt{x^2+y^2}\; r e^{i(\theta_a+\theta_1)}$$

از آنجایی که r در همه‌ی نقاط ثابت است پس با ضرب طول a $(x+iy)$ در طول نقاط روی دایره دایره‌ای بزرگتر یا کوچکتر در صفحه‌ی w ها تشکیل می‌شود.

ج)



$$w=f(z)=|a|re^{i(\theta_a+\theta_1)}$$

از آنجایی که تبدیل az تمام نقاط روی خط را به اندازه‌ی آرگومان a دوران می‌دهد و به یک اندازه منبسط یا منقبض می‌کند پس تبدیل یک خط تحت این نگاشت یک خط در صفحه‌ی w ها خواهد بود.

تمرین ۱۰) نشان دهید تصویر نیم صفحه ی $y>c_2$ تحت تبدیل $w=\frac{1}{z}$ درون یک دایره است به شرط اینکه $c_2>0$. تصویر را وقتی $c_2<0$ پیدا کنید. همچنین تصویر را وقتی $c_2=0$ بیابید.

الف) $y>c_2$ و $c_2>0$: می دانیم x و y تحت تبدیل $z\mapsto\frac{1}{z}$ به صورت زیر هستند:

$$z=\frac{1}{w}=\frac{\bar{w}}{|w|^2}\xrightarrow[w=u+iv]{z=x+iy} x=\frac{u}{u^2+v^2}\ ,\ y=-\frac{v}{u^2+v^2}$$

$$y>c_2\Rightarrow\frac{-v}{u^2+v^2}>c_2\Rightarrow\frac{-v}{c_2}>u^2+v^2$$

$$\xrightarrow[u^2+v^2>0]{c_2>0}\left(\frac{1}{2c_2}\right)^2>\left(v^2+\frac{v}{c_2}+\left(\frac{1}{2c_2}\right)^2\right)+u^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2c_2}\right)^2>\left(v+\frac{1}{2c_2}\right)^2+u^2$$

پس تصویر نیم صفحه ی $y>c_2$ تحت نگاشت $\frac{1}{z}$ داخل دایره است که مرکز آن روی محور v (y ها) است و بر محور x ها در مبدأ مماس است.

ب) $y>c_2$ ، $c_2<0$:

$$x=\frac{u}{u^2+v^2}\ ,\ y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

$$\frac{-v}{u^2+v^2}>c_2\Rightarrow -c_2>\frac{v}{u^2+v^2}\Rightarrow\frac{v}{-c_2}<u^2+v^2$$

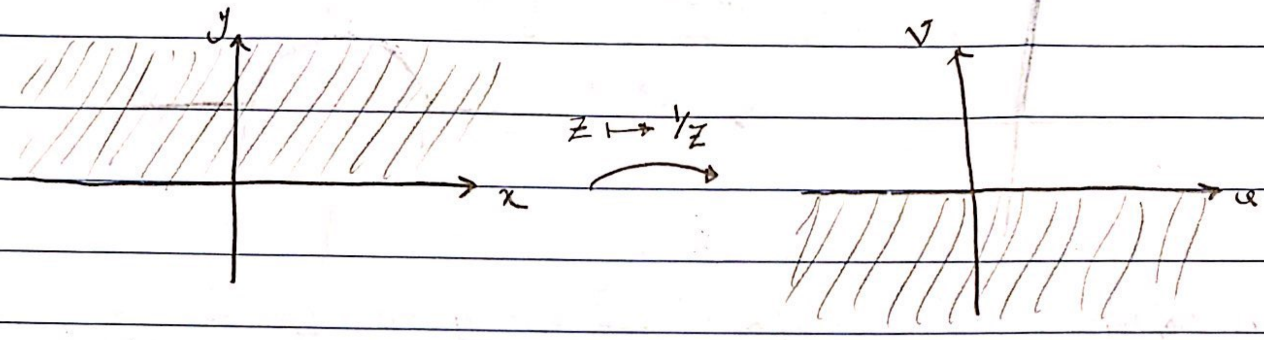
$$\xrightarrow[u^2+v^2>0]{-c_2>0}\left(\frac{1}{2c_2}\right)^2<\left(v^2+\frac{v}{c_2}+\left(\frac{1}{2c_2}\right)^2\right)+u^2$$

$$\Rightarrow\left(v+\frac{1}{2c_2}\right)^2+u^2>\left(\frac{1}{2c_2}\right)^2$$

تصویر نیم صفحه ی $y>c_2$ به شرط $c_2<0$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ ، خارج دایره به مرکز $(0,-\frac{1}{2c_2})$ و شعاع $\frac{1}{2c_2}$ است.

ج) $y>c_2$ و $c_2=0$: $\quad y>0 \Rightarrow \frac{-v}{u^2+v^2}>0$

$$u^2+v^2>0 \Rightarrow -v>0 \Rightarrow v<0$$



تمرین ۱۱) تصویر دایره $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ را تحت تبدیل $w=\frac{1}{z}$ بیابید و از لحاظ هندسی توصیف کنید.

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \xrightarrow[B=-2,\ D=0]{A=1,\ C=-2} x^2+y^2-2x-2y=0$$

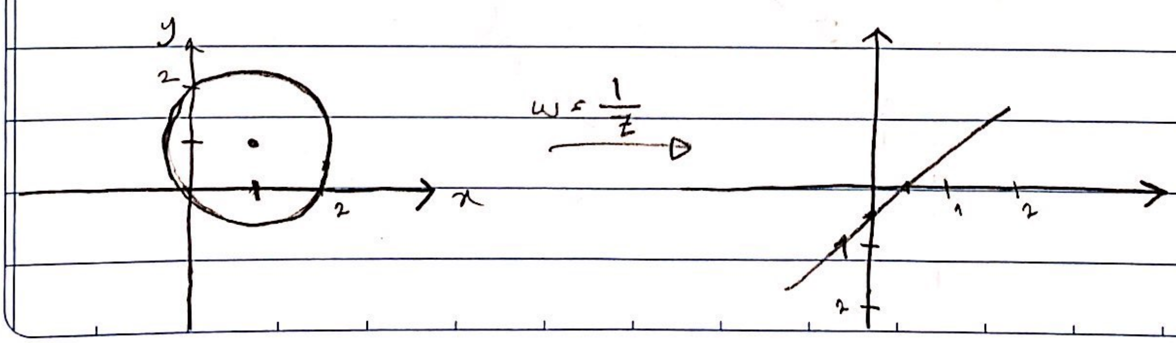
می‌دانیم تصویر دایره‌ای که از مبدأ می‌گذرد تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ خطی است که از مبدأ نمی‌گذرد.

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\quad y=\frac{-v}{u^2+v^2} \Rightarrow \left(\frac{u}{u^2+v^2}-1\right)^2+\left(\frac{-v}{u^2+v^2}-1\right)^2=2$$

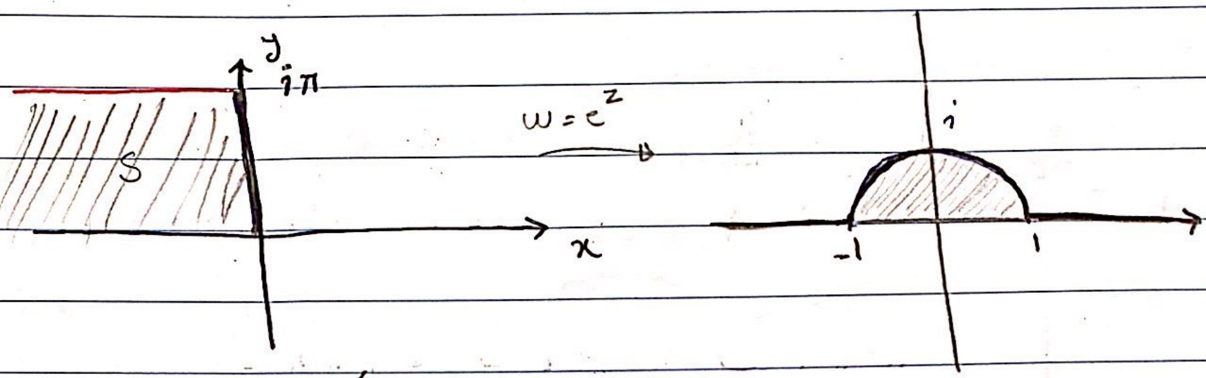
$$\Rightarrow \frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\cancel{1}-\frac{2u}{v^2+u^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}+\cancel{1}+\frac{2v}{u^2+v^2}=\cancel{2}$$

$$\Rightarrow \frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{2v-2u}{u^2+v^2}=\frac{1+2v-2u}{u^2+v^2}=0$$

$$\Rightarrow 2v-2u+1=0 \longrightarrow$$ معادله‌ی خط



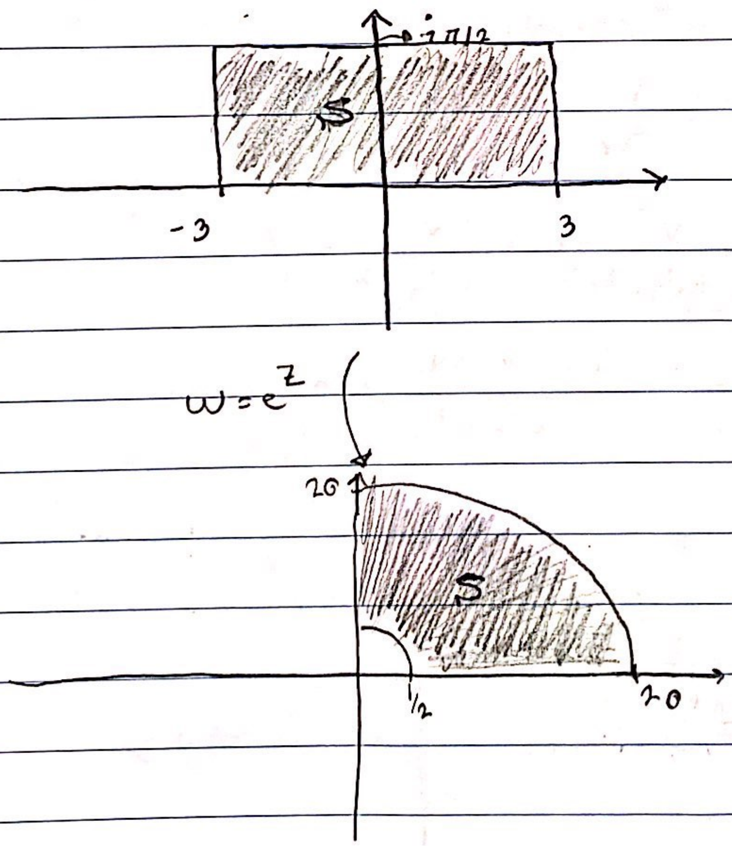
تمرین ۱۲) تصویر ناحیه‌ی زیر را تحت تبدیل $w = e^z$ رسم کنید.



تصویر خط افقی $y = i\pi$ تحت $w = e^z$ نیم‌خطی است که با محور xها زاویه‌ی π می‌سازد.

تصویر خط عمودی $x = 0$ نیم‌دایره است در صفحه‌ی w-ها به مرکز مبدأ و شعاع $e^0 = 1$ نیم‌دایره است چون خط از ۰ تا $i\pi$ رفته است.

و تصویر خط افقی $y = 0$ نیم‌خطی است که با محور x زاویه‌ی ۰ درجه می‌سازد.



تمرین 13) نشان دهید اگر e^z حقیقی باشد، آنگاه $Im z = k\pi$ که $k \in \mathbb{Z}$، اگر e^z موهومی محض باشد چه محدودیتی برای z به وجود می‌آید؟

① e^z حقیقی است: $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$$= e^x\cos y + i e^x \sin y \xrightarrow[\text{حقیقی است } e^z]{} e^x \sin y = 0$$

$$\xrightarrow{e^x > 0} \sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi \Rightarrow Im Z = k\pi$$

② e^z موهومی است: $e^z = e^x\cos y + i\sin y\, e^x \xrightarrow[\text{موهومی}]{} e^x \cos y = 0$

$$\xrightarrow{e^x > 0} \cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\Rightarrow Im Z = \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

تمرین 14) ابتدا نشان دهید $\log\left(\frac{1}{z}\right) = -\log z$ $(z \neq 0)$، به این معنی که $\log\left(\frac{1}{z}\right)$، $-\log z$ دارای یک مجموعه مقادیرند و سپس نشان دهید $\log z_1 - \log z_2 = \log\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$، $(z_1, z_2 \neq 0)$

الف) $\log\left(\frac{1}{z}\right) = \log\left(\frac{1}{r}e^{-i\theta}\right) = \ln\left(\frac{1}{r}\right) + i(-\theta + 2k\pi)$

$$= -\ln(r) - i(\theta - 2k\pi) = -(\ln(r) + i(\theta - 2k\pi)) = -\log z$$

ب) حال می‌دانیم: $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right) = \log z_1 + \log\left(\frac{1}{z_2}\right)$$

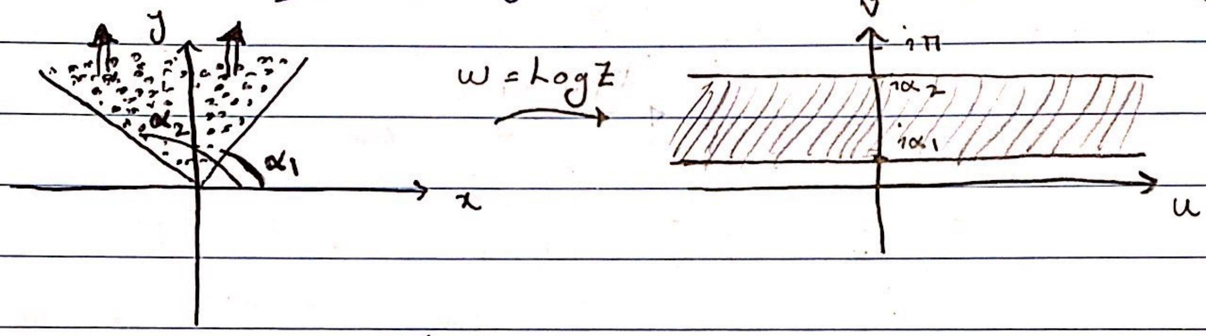
$$\xrightarrow{\log\left(\frac{1}{z_2}\right) = -\log z_2} \log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log(z_2)$$

روش دوم: می‌دانیم $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$:

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + i\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = (\ln|z_1| + i\arg z_1) - (\ln|z_2| + i\arg z_2)$$

$$= \log z_1 - \log z_2$$

تمرین ۱۵) تصویر ناحیه‌ی روبه‌رو را تحت نگاشت $w = \mathrm{Log}\, z$ رسم کنید.



تمرین ۱۶) الف) نشان دهید اگر $\mathrm{Re}\, z_1 > 0$ و $\mathrm{Re}\, z_2 > 0$، آنگاه $\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$

ب) نشان دهید به ازای هر دو عدد مختلط ناصفر z_1 و z_2 داریم:

$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2 + 2N\pi i$$

که در آن N یکی از مقادیر ۰، ۱± را داراست.

الف) $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ، $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ $\quad \begin{matrix}\mathrm{Re}\, z_1 > 0\\ \mathrm{Re}\, z_2 > 0\end{matrix} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \theta_1 , \theta_2 < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow -\pi < \theta_1 + \theta_2 < \pi$$

$$\Rightarrow \mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}\left(r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right) = \ln(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2)$$

$$= (\ln(r_1) + i\theta_1) + (\ln(r_2) + i\theta_2) = \mathrm{Log}(r_1 e^{i\theta_1}) + \mathrm{Log}(r_2 e^{i\theta_2})$$

$$= \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$$

ب) $\mathrm{Log}(z_1z_2) = \ln(|z_1z_2|) + i\,\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \ln(|z_1|) + \ln(|z_2|) + i\,\mathrm{Arg}(z_1z_2)$

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \ , \ z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$;

$-\pi < \mathrm{Arg}\, z_1 , \mathrm{Arg}\, z_2 < \pi \Rightarrow \quad -2\pi < \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 < 2\pi$

$-\pi < \mathrm{Arg}(z_1z_2) < \pi$

$\Rightarrow \mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 + 2N\pi$

$$, N = \begin{cases} 1 & \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 < -\pi \\ 0 & -\pi < \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 < \pi \\ -1 & \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 > \pi \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathrm{Log}(z_1z_2) = \ln(|z_1|) + \ln(|z_2|) + i(\mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) + 2N\pi)$

$= \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) + 2N\pi i \quad \boxed{\cdot}$

تمرین 17) نشان دهید $\log z^{1/n} = \frac{1}{n}\log z$.

$z = re^{i\theta}$ s.t $r = |z| > 0 \ , \ -\pi < \theta < \pi \ , \ z^{1/n} = \{ r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \}$

$k = 0, \dots, n-1$

$\log(z^{1/n}) = \{ \frac{1}{n}\ln r + i\frac{\theta + 2(pn+k)\pi}{n} \mid 0 \le k \le n-1 , p \in \mathbb{Z} \}$

$= \frac{1}{n}\{ \ln r + i(\theta + 2(pn+k)\pi) \mid 0 \le k \le n-1 , \ p \in \mathbb{Z} \}$

$= \frac{1}{n}(\ln r + i(\theta + 2q\pi)) = \frac{1}{n}\log z$

تمرین ۱۸) فرض کنید c, d, z حروف اعداد مختلطی باشند $z \neq 0$. ثابت کنید اگر همه‌ی توان‌ها مقادیر اصلی باشند:

الف) $\frac{1}{z^c} = z^{-c}$ ب) $(z^c)^n = z^{cn}$ ج) $z^c z^d = z^{c+d}$ د) $\frac{z^c}{z^d} = z^{c-d}$

الف) $\frac{1}{z^c} = \frac{1}{e^{c\log z}} = \frac{1}{e^{c(\ln r + i\theta)}} = \frac{1}{e^{c\ln r} \cdot e^{ci\theta}} = \frac{1}{r^c \cdot e^{ci\theta}}$

$= r^{-c} \cdot e^{-ci\theta} = (re^{i\theta})^{-c} = z^{-c}$

ب) $(z^c)^n = (e^{c\log z})^n = e^{cn \cdot \log z} = z^{cn}$

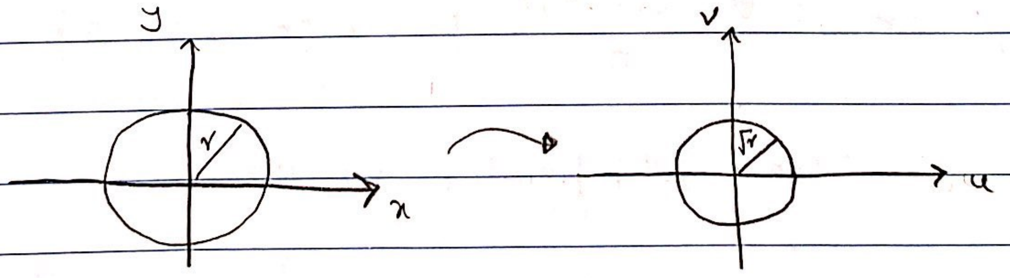
ج) $z^c z^d = e^{c\log z} \cdot e^{d \cdot \log z} = e^{(c+d)\log z} = z^{c+d}$

د) $\frac{z^c}{z^d} = \frac{e^{c\log z}}{e^{d\log z}} = e^{c\log z - d\log z} = e^{(c-d)\log z} = z^{c-d}$

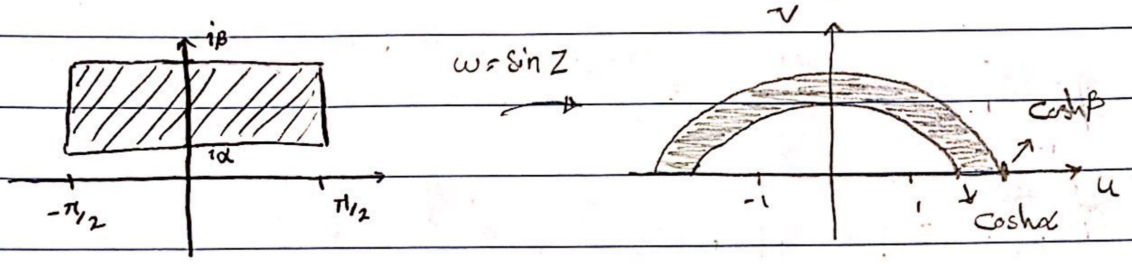
تمرین ۱۹) تصویر ناحیه زیر تحت نگاشت $w = z^{1/2}$ را بدست آورید.

$z^{1/2} = e^{1/2 \operatorname{Log} z} = e^{1/2 \ln r} \cdot e^{1/2 i\theta} = r^{1/2} e^{i\theta/2}$

پس نقاط تحت نگاشت $z^{1/2}$، از اندازه‌ی آن‌ها جذر گرفته می‌شود و آرگومان آن‌ها نصف می‌شود.



تمرین 20) تصویر ناحیه مقابل را تحت تبدیل $w=\sin z$ به دست آورید.



تمرین 21) جواب های معادله ی $\cos z=3$ را به دست آورید.

$\cos z=3 \Rightarrow \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y=3$

$\cos x\cosh y=3$

$\Rightarrow \sin x\sinh y=0 \Rightarrow \sin x=0$ یا $\sinh y=0$

if $\sinh y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \cosh y=1 \Rightarrow \cos x=3 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

if $\sin x=0 \Rightarrow x=\pm k\pi$

$\xrightarrow{x=-k\pi} \cos x=-1 \Rightarrow \cosh y=-3 \xrightarrow{\cosh y>0}$ معادله جواب ندارد

$\xrightarrow{x=k\pi} \cos x=1 \Rightarrow \cosh y=3 \Rightarrow y=\cosh^{-1}(3)$

$\Rightarrow z=k\pi+\cosh^{-1}(3) \qquad k\in\mathbb{Z}$

تمرین 22) فرض کنید $f(z)=P.V\sqrt[3]{z}$ و الف) $f(-i)$ را محاسبه کنید

ب) برای $z_1,z_2\neq 0$ نشان دهید $f(z_1)f(z_2)=\lambda f(z_1z_2)$

الف) $f(-i)=(-i)^{1/3}=e^{\frac{1}{3}\mathrm{Log}(-i)}=e^{\frac{1}{3}(\mathrm{Ln}1-i\frac{\pi}{2})}=e^{-i\pi/6}=\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})$

$=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

ب) $f(z_1)+f(z_2)=\lambda f(z_1 z_2)$

$$f(z_1)=p.v\sqrt[3]{z_1}=p.v\, z_1^{1/3}=e^{\frac{1}{3}Log\, z_1}=e^{\frac{1}{3}(Ln|z_1|+i\theta_1)}=|z_1|^{1/3}+e^{i\theta_1/3}$$

$$f(z_2)=|z_2|^{1/3}+e^{i\frac{\theta_2}{3}}$$

$$\Rightarrow f(z_1)+f(z_2)=|z_1|^{1/3}+|z_2|^{1/3}+e^{i\frac{\theta_1}{3}}+e^{i\frac{\theta_2}{3}}$$

$$f(z_1z_2)=p.v\sqrt[3]{z_1z_2}=(z_1z_2)^{1/3}=e^{\frac{1}{3}Log(z_1z_2)}=e^{\frac{1}{3}(Log\, z_1+Log\, z_2+2n\pi i)}$$

$$=e^{\frac{1}{3}(Ln|z_1|+i\theta_1+Ln|z_2|+i\theta_2+2n\pi i)}=|z_1|^{1/3}+e^{i\frac{\theta_1}{3}}+|z_2|^{1/3}+e^{i\theta_2/3}+e^{i\frac{2}{3}n\pi i}$$