سوال 5)

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}\,dx$$

(تابع زوج است)

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}\,dx = \text{P.V}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}\,dx$$

تابع $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+\alpha^2)^2}$ را در نظر بگیرید تنها نقطه تکین تابع در $z=i\alpha$ است، در بالای محور xها قرار دارد ⇐

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i\alpha} f(z)$$

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-i\alpha)^2(z+i\alpha)^2} = \frac{z^2/(z+i\alpha)^2}{(z-i\alpha)^2} \qquad \phi(z)$$

$$\phi(i\alpha) = \frac{(i\alpha)^2}{(i\alpha+i\alpha)^2} = \frac{-\alpha^2}{-4\alpha^2} = \frac{1}{4} \neq 0$$ و تحلیلی است

$\Rightarrow$ $i\alpha$ قطب مرتبه 2 تابع f است $\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=i\alpha} f(z) = \dfrac{\phi'(i\alpha)}{1!} =$

$$= \frac{2i\alpha(i\alpha+i\alpha)^2 - 2(i\alpha+i\alpha)(i\alpha)^2}{(z+i\alpha)^4} = \frac{-8i\alpha^3+4i\alpha^3}{(i\alpha+i\alpha)^4} = \frac{-4i\alpha^3}{16\alpha^4} = \frac{-i}{4\alpha}$$

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+\alpha^2)^2}\right| \leq \int \frac{|z^2|}{|z^2+\alpha^2|^2} \leq \pi R \times \frac{R^2}{(R^2-\alpha^2)^2}$$

حد عبارت وقتی R به بی‌نهایت میل می‌کند برابر صفر است

$$\Rightarrow \int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+\alpha^2)^2} = 0$$

(ادامه صفحه بعد)

$$\Rightarrow \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \times \frac{-i}{4\alpha} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{4\alpha}$$