9612037 مریم علی پور حاجی آقا

سه شنبه ۱۵ تیر

۱۴۴۲ ذی القعده ۲۵ / 6 July 2021

توضیحات آماری: فاصله اطمینان برای μ

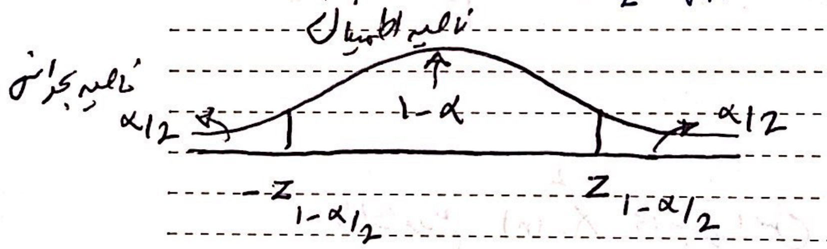
الف) σ^2 معلوم: برای تابع محوری

$$Q = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

داریم:

$$P\left(-Z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \mu \in \left(\bar{X} - Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\, \bar{X} + Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{(I)}$$



ب) σ^2 مجهول: در تابع محوری Q به جای σ^2 برآورد یابِ آن S^2 را می گذاریم تا تابع محوری زیر که دارای توزیع تی با $n-1$ درجه ی آزادی است بدست آید.

$$Q^* = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim T(n-1)$$

$$P\left(-t_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha/2}(n-1)\right)$$

$$\Rightarrow \mu \in \left(\bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \,,\, \bar{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{(II)}$$

هر دو فاصله ی I و II دارای احتمال های مساوی در دو انتها هستند (در هر دو انتها مقدار احتمال $\frac{\alpha}{2}$ است) و می توان ثابت کرد بهترین فواصل اطمینان هستند. منحنی چگالی Q^* مانند منحنی چگالی Q است به ویژه اگر $n \geq 30$ باشد تقریباً $(n-1)$ $t_{1-\alpha/2}$ و $z_{1-\alpha/2}$ برابرند.

فاصله اطمینان برای σ^2:

الف) μ معلوم: آماره S_0^2 یک برآوردیاب برای σ^2 است و

$$Q_1 = n\frac{S_0^2}{\sigma^2}$$

دارای توزیع $\chi^2(n)$ می باشد. پس Q_1 تابع محوری است روی محور طولها فاصله $\left(\chi^2_{\alpha/2}(n), \chi^2_{1-\alpha/2}(n)\right)$ را اختیار می کنیم دو سر این فاصله را انتخاب می کنیم

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2}(n) < \frac{nS_0^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}(n)\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \sigma^2 \in \left(\frac{nS_0^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{nS_0^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right) *$$

ب) حل مجهول : آماره S^2 یک برآوردیاب نااریب برای σ^2 است و :

$$Q^* = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

دارای توزیع $\chi^2(n-1)$ می‌باشد تا سین اگر در فاصله‌ی

اگر $\hat{S}^2$ را S^2 و n را به $n-1$ تبدیل کنیم فاصله اطمینان

در این حالت به دست می‌آید