مریم علی‌پور حاجی آقا ۹۶۱۲۰۳۷
مریم جمالی ۹۷۱۲۰۰۹
محیا پاشاپور ۹۸۱۲۰۰۹

Subject: Date:

۱. آ) فرض کنید X، Y، Z فضاهای توپولوژیک، $p: X \to Y$ نگاشتی خارج قسمتی، $g: Y \to Z$ و $h: X \to Z$ تابع‌هایی پیوسته باشند چنانکه $h = g \circ p$. نشان دهید g خارج قسمتی است $\Leftrightarrow$ h خارج قسمتی باشد.

طبق تعریف نگاشت خارج قسمتی (کتاب مانکرز) فرض کنیم X، Y دو فضای توپولوژیک، $p: X \to Y$ نگاشتی پوشا باشد. p را نگاشت خارج قسمتی گوییم در صورتی که هر زیرمجموعهٔ Y مانند U در Y باز باشد اگر و فقط اگر $p^{-1}(U)$ در X باز باشد.

فرض کنیم g خارج قسمتی باشد. p و g هر دو پوشا هستند. فرض کنیم $z \in Z$ داشته باشیم چون g پوشاست برای هر z از Z وجود دارد y از Y بطوریکه $g(y) = z$، چون p پوشاست به ازای هر y از Y، وجود دارد x از X بطوریکه $p(x) = y$

پس به ازای هر z از Z که فرض کنیم، وجود دارد x از X بطوریکه $h(x) = z$ پس h پوشاست.

حال زیرمجموعهٔ بازی مانند U از Z در نظر می‌گیریم چون h پوشاست

Subject: Date:

$h^{-1}(U)$ که بصورت $(gop)^{-1}(U)$ است در نظر می‌گیریم $(gop)^{-1}(U)$ برابر

است با $p^{-1}(g^{-1}(U))$ چون g خارج قسمتی است پس $g^{-1}(U)$ باز

است و چون p خارج قسمتی است پس $p^{-1}(g^{-1}(U))$ در X باز است

پس $(gop)^{-1}(U)$ باز است در نتیجه $h^{-1}(U)$ در X باز است

چون U دلخواه انتخاب شده پس به ازای هر باز U از Z، $h^{-1}(U)$

در X باز است. حال زیر مجموعه V از Z را در نظر می‌گیریم

بطوریکه $h^{-1}(V)$ در X باز باشد می‌دانیم $h^{-1}(V)=p^{-1}(g^{-1}(V))$

چون p خارج قسمتی است پس $g^{-1}(V)$ در Y باز است و چون

g خارج قسمتی است پس V در Z باز است چون V دلخواه

اختیار شده پس به ازای هر V از Z که $h^{-1}(V)$ در X باز است پس

V در Z باز است. طبق تعریف نگاشت خارج قسمتی، h یک

نگاشت خارج قسمتی است. (اثبات طرف اول)

حال فرض کنیم h خارج قسمتی باشد پس h پوشاست پس به ازای هر

MICRO®

z از Z وجود دارد x از X بطوریکه $z=h(x)=g(p(x))$

چون p پوشاست پس به ازای هر z از Z وجود دارد y از Y

بطوریکه $p(x)=y$ و $g(y)=z$ پس درنتیجه g پوشاست.

حال زیرمجموعه U باز از Z را درنظر می‌گیریم چون h خارج

قسمتی است پس $h^{-1}(U)$ در X باز است می‌دانیم $h^{-1}(U)=p^{-1}(g^{-1}(U))$

پس $p^{-1}(g^{-1}(U))$ در X باز است. p خارج قسمتی است پس

$g^{-1}(U)$ در Y باز است. چون U از Z دلخواه انتخاب شد

پس به ازای هر باز U از Z، $g^{-1}(U)$ در Y باز است. حال

زیرمجموعه V از Z درنظر می‌گیریم بطوریکه $g^{-1}(V)$ در Y

باشد چون p خارج قسمتی است پس $p^{-1}(g^{-1}(V))$ در X باز است

و می‌دانیم $h^{-1}(V)=p^{-1}(g^{-1}(V))$ یعنی $h^{-1}(V)$ در X باز است

و h خارج قسمتی است در نتیجه V از Z باز است چون V

دلخواه درنظر گرفته شده پس برای هر V از Z که $g^{-1}(V)$ در X باز باشد V هم

باز است پس طبق تعریف g یک نگاشت خارج قسمتی است (اثبات طرف دوم)

Subject: Date:

الف) نشان دهید هر خارج قسمت فضای گسسته، فضایی گسسته است.

نگاشت $Y \to p: X$ در نظر می‌گیریم بطوریکه در آن X دارای

توپولوژی گسسته و Y خارج قسمت فضای X است. می‌دانیم

توپولوژی فضای Y بصورت روبرو است $T_Y = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in T_X\}$

چون Y فضای خارج قسمتی است پس هر عضو از آن شامل اعضایی از

X است که در یک رده همارزی قرار دارند ⇐ p پوشاست.

چون X فضای گسسته است هر زیرمجموعه مانند U از Y انتخاب

کنیم $p^{-1}(U)$ در X باز است پس عضو T_X است. پس تمام

زیرمجموعه‌های Y می‌توانند در T_Y قرار بگیرند پس Y فضایی است

که دارای توپولوژی گسسته است. پس نتیجه می‌گیریم خارج قسمت

هر فضای گسسته، فضایی گسسته است.

پ) آیا هر فضای توپولوژیک خارج قسمت فضایی هوسدورف است؟

ابتدا لم نوشته شده در صفحه بعد را ثابت می‌کنیم. سپس از آن

استفاده می‌کنیم.

MICRO

Scanned with CamScanner

لم: برای هر فضای X، فضای هوسدورف Y وجود دارد بطوریکه

$Y = \bigcup_{x \in X} Y_x$ بطوریکه Y_x ها هیچ اشتراکی با هم ندارند و جدا از هم اند

و در Y چگال اند.

اثبات: مجموعۀ $Y = X^{\mathbb{N}}$ را که $Y_x = \{f \in Y \mid \exists n \in \mathbb{N} : f(n) = x\}$ را

در نظر می‌گیریم اما Y_x ها اشتراک ناتهی ندارند در عوض می‌توانیم

هر فضای جزیی پذیر های هوسدورف که $Z = A \cup B$ که A , B در Z چگال

هستند انتخاب کنیم. و در مجموعه $Y_x = \{f : X \to Z \mid f(x) \in A \wedge \forall y \neq x\ f(y) \in B\}$

Y_x ها اشتراک تهی دارند زیرا A و B اشتراک ناتهی دارند و هر Y_x در

Z^X چگال است زیرا هر مجموعۀ باز ناتهی از Z^X، $\prod_{y \in Y} U_y$ را که

U_y ها ناتهی و باز در Z هستند را در بر می‌گیرد. سپس

$a_y \in U_y \cap A$ و $b_y \in U_y \cap B$ در نظر می‌گیریم تابع

$f(y) = \begin{cases} a_y & x = y \\ b_y & x \neq y \end{cases}$ در $\prod_{y \in X} U_y \cap Y_x$ قرار دارد.

این حاصلضرب های هوسدورف است زیرا حاصل ضرب فضاهای هاسدورف است.

حال می‌خواهیم ثابت کنیم برای هر فضای توپولوژیک X، فضای

هاوسدورفی $\hat{X}$، نگاشت خارج قسمت وجود دارد که $\pi : \hat{X} \to X$

مجموعهٔ Y در لم قبل را بصورت $Y = \bigcup_{x\in X} Y_x$ و X را با توپولوژی گسسته

درنظر می‌گیریم. مجموعهٔ $\hat{X} = \bigcup_{x\in X} \{x\} \times Y_x$ و نگاشت $\pi(x,y) = x$

بطوریکه $\hat{X}$ زیرفضایی از $X \times Y$ است و π تابع تصویر چپ و پیوسته است

$\hat{X}$ هاوسدورفی نیز هست زیرا برای هر $(x,y) \neq (x',y')$ اگر

$y = y' \in Y_x \cap Y_{x'}$ آنگاه $x = x'$ و تناقض است $\Leftarrow$ $y \neq y'$ درنتیجه داریم

$y \in U$ و $y' \in U'$ که $U \cap U' = \emptyset$ انتخاب کنیم و از مجموعه‌های

$(X \times U) \cap \hat{X}$ و $(X \times U') \cap \hat{X}$ استفاده کنیم. برای اینکه نشان

دهیم π باز است یک عضو پایه از $\hat{X}$ انتخاب می‌کنیم که این عضو

بصورت $S = (U \times V) \cap \hat{X}$ است که $U \subseteq X$، $V \subseteq Y$ و V, U

باز هستند درین صورت $\pi(S) \subseteq U$ ادعا می‌کنیم $\pi(S) = U$

بنابراین می‌توان گفت $\pi(S)$ باز است. $x \in U$ را درنظر می‌گیریم که

Subject: Date:

Y_x در Y چگال است. پس وجود دارد $y \in Y_x \cap U$ درنتیجه

$(x, y) \in (U \times V) \cap \hat{X} = S$

$\pi((x, y)) = x \in \pi(S) \Rightarrow U \subseteq \pi(S) \Rightarrow U = \pi(S)$

Subject:　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Date:

۲ آ) تابع f ممکن است پیوسته باشد یا نباشد باز باشد یا نباشد بسته باشد یا نباشد. برای هر ۸ حالت مثال بزنید.

حالت ۱: پیوسته است. باز است. بسته است.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to x$$

دامنه و برد با توپولوژی خط حقیقی هستند.

اثبات پیوستگی: فرض کنیم δ، چسبیدگی در فضای $\mathbb{R}$ باشد که توپولوژی اقلیدسی از آن حاصل شده پس اگر $x \, \delta A$ ($x \in \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$) $\Leftarrow$ می‌دانیم $f(x) = x$ و $f(A) = A$ پس $f(x) \, \delta f(A)$ $\Leftarrow$ پیوسته است.

اثبات باز بودن: برای هر زیرمجموعه باز U از $\mathbb{R}$ می‌دانیم $f(U) = U$ پس $f(U)$ در برد باز است $\Leftarrow$ f باز است.

اثبات بسته بودن: برای هر زیرمجموعه بسته V از $\mathbb{R}$ می‌دانیم $f(V) = V$ پس $f(V)$ در برد بسته است $\Leftarrow$ f بسته است.

حالت ۲: پیوسته است. باز است. بسته نیست.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to e^{x}$$

دامنه و برد با توپولوژی خط حقیقی هستند.

اثبات پیوستگی: به ازای هر $A \subseteq \mathbb{R}$ با توجه به تعریف تابع $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ است پس f پیوسته است.

MICRO®

Subject: Date:

اثبات باز بودن: به ازای هر زیرمجموعه باز مانند (a,b) از $\mathbb{R}$، $f((a,b))$ برابر است با (e^a,e^b) که در برد باز است $\Leftarrow$ f باز است.

$\Leftarrow$ صعودی اکید

اثبات بسته نبودن: $\mathbb{R}$ زیرمجموعه‌ای بسته از خودش است که داریم $f((-\infty,+\infty))=(0,+\infty)$ پس f مجموعه بسته از دامنه را به بازی از برد می‌برد $\Leftarrow$ f بسته نیست.

حالت ۳: پیوسته است. باز نیست. بسته است.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to 1$

دامنه و برد با توپولوژی خط حقیقی هستند.

اثبات پیوستگی: δ حیثیت قبلی $\mathbb{R}$ فرض کنیم $x\delta A$ ، $1 \in f(A)$ ، $f(x)=1$

$\Leftarrow f(x) \delta f(A)$ $\Leftarrow$ f پیوسته است.

اثبات باز نبودن: $\{1\}$ در $\mathbb{R}$ با توپولوژی خط حقیقی بسته است (مکمل آن باز است و خودش از T نیست) هر بازی از دامنه به $\{1\}$ بسته می‌رود $\Leftarrow$ f باز نیست.

اثبات بسته بودن: هر زیرمجموعه بسته از دامنه به $\{1\}$ بسته از برد می‌رود

$\Leftarrow$ f بسته است

حالت ۴: پیوسته است. باز نیست. بسته نیست.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x$

دامنه با توپولوژی گسسته و برد با توپولوژی خط حقیقی است.

MICRO®

اثبات پیوسته بودن: هر بازی مانند U از برد در نظر بگیریم $f^{-1}(U)$ چون زیرمجموعهٔ دامنه است با توجه به توپولوژی گسسته در $\mathbb{R}$ باز است $\Leftarrow$ f پیوسته است.

اثبات باز نبودن: $\{1\}$ در $\mathbb{R}$ با توپولوژی گسسته باز است ولی $f(1)=1$ در

در $\mathbb{R}$ با توپولوژی خط حقیقی باز نیست $\Leftarrow$ f باز نیست.

اثبات بسته نبودن: $(0,1)$ در دامنه بسته است ولی $f((0,1))=(0,1)$ در برد بسته نیست $\Leftarrow$ f بسته نیست.

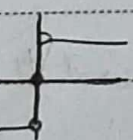
حالت ۵: پیوسته نیست. باز نیست. بسته است.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

دامنه و برد با توپولوژی خط حقیقی هستند.

اثبات پیوسته نبودن:



نقطهٔ $x=0$ یک نقطهٔ ناپیوستگی است
(از تعریف اپسیلون دلتا می‌توان استفاده کرد)

اثبات باز نبودن: $(0,+\infty)$ در دامنه باز است که $f((0,+\infty))=\{1\}$ در برد باز نیست $\Leftarrow$ f باز نیست.

اثبات بسته بودن: برای هر زیرمجموعه بسته F از دامنه داریم $f(F) \subseteq \{-1,0,1\}$

چون $\{-1,0,1\}$ در برد بسته است و زیرمجموعه‌هایش هم بسته است پس f بسته است.

Subject: Date:

حالت ۶: پیوسته نیست . باز نیست . بسته نیست $f: (1,3] \to R^- \cup [1,2]$

دامنه و برد با توپولوژی خط حقیقی اند.

$$f: \begin{cases} x-1 & x \in [2,3] \\ -3 & x \in (1,2) \end{cases}$$

اثبات پیوسته نبودن: $\{-3\}$ در برد بسته است که $f^{-1}(\{-3\})$ در دامنه برابر

$(1,2)$ است که در دامنه باز است پس وجود دارد بسته ای که f آن را بسته بر نمی گرداند

پس f پیوسته نیست.

اثبات باز نبودن: $(1,2)$ در دامنه زیر مجموعه ای باز است ولی $f((1,2))$

برابر $\{-3\}$ است که در برد بسته است پس f باز نیست.

اثبات بسته نبودن: می دانیم $[2,3]$ زیر مجموعه بسته ای از دامنه است ولی

$f([2,3])$ برابر $[1,2]$ است که در برد باز است.

حالت ۷: پیوسته نیست . باز است . بسته نیست. $f: [1,3] \cup [-1,0] \to [1,2] \cup \{-1\}$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \in [2,3] \\ x & x \in [1,2) \\ -1 & x \in [-1,0] \end{cases}$$

دامنه و برد با توپولوژی خط حقیقی اند.

اثبات پیوسته نبودن: $\{-1\}$ در برد باز است در حالیکه f^{-1} آن

برابر $[-1,0]$ است که در دامنه بسته است پس وجود دارد بازی که f آن

MICRO

را به باز بر نمی گرداند پس f پیوسته نیست.

اثبات باز بودن: هر بازی از دامنه در نظر بگیریم بنا به ضابطه f (در ۳ حالت)

به بازی در برد می روند پس f باز است.

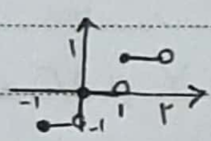
اثبات بسته نبودن: $[1,2)$ در دامنه بسته است ولی $f([1,2))=[1,2)$ است

که در برد باز است پس f بسته نیست.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
$x \to [x]$ تابع جزء صحیح

حالت ۸: پیوسته نیست. باز است. بسته است.

$\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Z}$ با توپولوژی گسسته هستند.

اثبات پیوسته نبودن:  به وضوح تابع در نقاط صحیح

ناپیوستگی دارد.

اثبات باز بودن: هر بازی از $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم چون $\mathbb{Z}$ با توپولوژی گسسته

است پس f آن باز خواهد بود لذا f باز است.

اثبات بسته بودن: هر بسته ای از $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم چون $\mathbb{Z}$ با توپولوژی

گسسته است پس f آن زیرمجموعه بسته خواهد بود لذا f بسته است.

۲. ب) نشان دهید هر نگاشت پوشا، باز و پیوسته، خارج قسمتی است. نشان دهید هر نگاشت پوشا، بسته و پیوسته، خارج قسمتی است.

طبق تعریف می‌دانیم اگر $p: X \to Y$ نگاشت پوشا باشد p را خارج قسمتی گوییم در صورتی که هر زیرمجموعهٔ U در Y باز (بسته) باشد $\Leftrightarrow$ $p^{-1}(U)$ در X باز (بسته) باشد. همین تعریف معادلاً برای زیرمجموعهٔ بسته هم برقرار است.

حال فرض کنیم $p: X \to Y$ پوشا، باز و پیوسته باشد $\Leftarrow$ شرط پوشا بودن برقرار است. چون p پیوسته است هر بازی مانند U از Y انتخاب کنیم $p^{-1}(U)$ در X باز است. حال V از Y را انتخاب می‌کنیم بطوریکه $p^{-1}(V)$ در X باز باشد چون p تابعی باز است پس $p(p^{-1}(V))$ در Y باز است. $p(p^{-1}(V)) = V$ پس V در Y باز است. U و V دلخواه انتخاب شده بودند پس p یک نگاشت خارج قسمتی است.

حال فرض کنیم $p: X \to Y$ پوشا، بسته و پیوسته باشد $\Leftarrow$ شرط پوشا بودن برقرار است. چون p پیوسته است هر بسته‌ای مانند U از Y انتخاب کنیم $p^{-1}(U)$ در X بسته است. حال V از Y را انتخاب می‌کنیم بطوریکه

Subject: Date:

$p^{-1}(V)$ در X بسته باشد چون p تابعی بسته است پس $p(p^{-1}(V))$ در Y

بسته است. $p(p^{-1}(V)) = V$ پس V در Y بسته است. U، V دلخواه

انتخاب شده بودند پس p یک نگاشت خارج قسمتی است.

نگاشت خارج قسمتی مثال بزنید که نه باز باشد و نه بسته.

فرض کنیم $A = \mathbb{R} \times \{0\} \cup [0, \infty] \times \mathbb{R}$ و تابع $f: A \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x$ در نظر میگیریم

زیرمجموعه B را طوری فرض میکنیم که $B = \{(x, y) \mid xy = 1\}$ حال C

را برابر $\underbrace{A}_{\text{بسته}} \cap \underbrace{B}_{\text{بسته}}$ داریم که بسته است ولی تصویر آن برابر $(0, \infty)$ است که

در برد باز است پس f بسته نیست. حال زیرمجموعه $W = (-2, 2) \times (1, 2)$

را داریم فرض کنیم $V = \underbrace{W}_{\text{باز}} \cap \underbrace{A}_{\text{باز}}$ پس V در A باز است ولی

تصویر آن $[0, 2)$ است که در برد باز نیست پس f باز نیست.

یک روش برای اینکه نشان دهیم نگاشت مثل f خارج قسمتی است (کتاب مانکرز)

این است که تابعی مانند $\sigma: \mathbb{R} \to A$ بیابیم که $f \circ \sigma$ همانی باشد کافی

است σ را با دستور $\sigma(x) = (x, 0)$ در نظر بگیریم. در این صورت $\forall x \in \mathbb{R}$

$f \circ \sigma(x) = f(\sigma(x)) = f((x, 0)) = x \to$ همانی

پس f نگاشت خارج قسمتی است.

Subject: Date:

۳) آ) زیرفضای A تنجیده X است $\Leftrightarrow$ تابع شمول $i: A \to X$ وارون چپ پیوسته داشته باشد.

فرض کنیم زیرفضای A تنجیده X است پس تابعی پیوسته داشت $r: X \to A$ موجود است که $r \circ r = r$ پس به ازای هر $a \in A$ داریم $r(r(a)) = r(a)$ پس چون r پیوسته و پوشاست با اثر دادن r^{-1}

از طرفین داریم $r^{-1}(r(r(a))) = r^{-1}(r(a)) \Rightarrow r(a) = a$

برای اینکه ثابت کنیم تابع شمول $i: A \to X$ وارون چپ پیوسته $i(a) = a$ داشته باشد باید نشان دهیم $g: X \to A$ وجود دارد بطوریکه پیوسته است و به ازای هر $a \in A$ ، $g(i(a)) = a$

می‌دانیم با ترکیب تابع r و i داریم: $r(i(a)) = r(a) = a$ به ازای هر $a \in A$

و چون r پیوسته است پس می‌توانیم خود تابع r که تنجش است را وارون چپ پیوسته تابع شمول i قرار دهیم پس اگر زیرفضای A تنجیده X باشد، تابع شمول $i: A \to X$ وارون چپ پیوسته دارد. (اثبات طرف اول)

MICRO

Subject: Date:

حال فرض کنیم تابع شمول $i: A \to X$ که $A \subseteq X$ است دارای

$i(a) = a$

وارون چپ پیوسته باشد پس تابعی مانند $g: X \to A$ وجود دارد

که پیوسته است و به ازای هر $a \in A$ ، $g(i(a)) = a$

می‌دانیم $g(i(a)) = g(a)$ است پس داریم $g(a) = a$ پس

$g(g(a)) = g(a)$ (خاصیت تابع) پس می‌توانیم g را یک

تنجش از X درنظر بگیریم (طبق تعریف صورت سؤال) که برد آن

برابر A است در این صورت زیرفضای A تنجیدهٔ X است.

پس اگر تابع شمول $i: A \to X$ وارون چپ پیوسته داشته باشد، زیرفضای

A تنجیدهٔ X است.

Subject: Date:

۳- ب) A زیرفضای تنجیدهٔ X است <=> برای هر فضای توپولوژیک Y تابع پیوستهٔ دلخواه $f: A \to Y$ توسیعی پیوسته به X داشته باشد (تابعی پیوسته چون $g: X \to Y$ وجود داشته باشد که $f = g|_A$)

فرض کنیم A زیرفضای تنجیدهٔ X است پس نگاشت $r: X \to A$ که در آن $\forall a \in A$ ، $r(a) = a$ وجود دارد که تنجش می‌باشد.

حال به ازای هر تابع پیوستهٔ دلخواه $f: A \to Y$ ، تابع $g: X \to Y$ را در نظر می‌گیریم بطوریکه $g = f \circ r$ نشان می‌دهیم g پیوسته است و $f = g|_A$. چون r , f هر دو تابع پیوسته هستند و ترکیب ۲ تابع پیوسته ، تابعی پیوسته است <= g پیوسته است

حال تحدید g به A را در نظر می‌گیریم.

$$\forall a \in A \quad g(a) = f \circ r(a) = f(r(a)) = f(a)$$

می‌دانیم دامنهٔ f برابر A بود پس به ازای هر عضو a از A $g(a) = f(a)$ است پس تحدید g به A برابر f است <= $g|_A = f$

پس f توسیعی پیوسته به X دارد طرف اول اثبات شد.

MICRO

Subject: Date:

حال برای طرف دوم طبق فرض می‌دانیم برای هر فضای توپولوژیک

Y، تابع پیوسته دلخواه $f: A \to Y$ توسیعی پیوسته به X دارد.

چون فضای توپولوژیک Y دلخواه است و A زیرفضایی از X است

پس Y را برابر A در نظر می‌گیریم و چون $f: A \to Y$ دلخواه است

آن را تابع همانی در نظر می‌گیریم پس $f: A \to A$ با دستور

$f(a) = a$ می‌باشد. چون f توسیعی پیوسته به X دارد پس

$g: X \to A$ وجود دارد که پیوسته است و $f = g|_A$ پس به ازای

هر $a \in A$، $g(a) = a$ است پس g یک تنجش است و

A زیرفضایی تنجیده از X است.

۳-پ) هر زیرفضای تجزیه‌ی یک فضا، خارج قسمت آن فضاست.

فرض کنیم A زیرفضای تجزیه‌ی X است در این صورت تابعی مانند $r:X\to A$

وجود دارد که به ازای هر $a\in A$ ، $r(a)=a$ و به ازای هر $x\in X$ ، $r(x)\in A$

فرض کنیم $\alpha_i\in A$ $\forall i\in I$ چون r روی A همانی است $r(\alpha_i)=\alpha_i$

حال در $X-A$ تمام x هایی را درنظر می‌گیریم که: $r(x)=\alpha_i$ ، حال

نه و تمام x های عضو $X-A$ که $r(x)=\alpha_i$ را هم از درنظر می‌گیریم.

یعنی $x\in X$ که با اعمال تابع r روی آنها مقدار یکسانی می‌گیرند را در یک

رده قرار می‌دهیم. بطور معادل افرازی می‌سازیم که:

$\bigcup \alpha_i = A$ ، $\bigcup B_i = X$ ، $r_i: B_i\to\alpha_i$ ، $\forall x_{\alpha_i}\in X$, $i\in I$ ، $r_i(x_{\alpha_i})=\alpha_i$

حال ثابت می‌کنیم تابعی که در آن $r(x_{\alpha_i})=\alpha_i$ است و روی هر افراز

تعریف شده است پوشاست و باز را به باز برمی‌گرداند [یا پیوسته است]

نگاشتی بسته یا باز است [البته می‌تواند نه باز باشد نه بسته]

اثبات پوشایی: بنا به تعریف r_i این تابع در هر افراز برای هر $i\in I$

ثابت است و مقدار آن برابر α_i است که برابر برد تابع است پس پوشاست

Subject: Date:

اثبات پیوستگی: چون برد تابع یک عضوی $\{\alpha_i\}$ است لذا $\{\alpha_i\}$ در آن

باز است و $r_i^{-1}(\alpha_i)$ برابر است با افرازی از B_i که چون دامنه تابع

است پس برابر $\{B_i\}$ بوده که باز است پس باز را به باز برمی‌گرداند.

اثبات باز بودن: چون برد تابع r_i برابر یک تک‌عضوی $\{\alpha_i\}$ است

بنابراین α_i در برد باز است پس به ازای هر زیرمجموعهٔ باز از B_i

r_i آن برابر α_i است پس باز را به باز می‌برد

پس r_i ویژگی‌های لازم را دارد و B_i برده‌های هم‌ارزی فضای

خارج قسمت هستند.

Subject: Date:

۳-ت) اگر X هاسدورف باشد همهٔ زیرفضاهای تنجیده‌اش بسته‌اند.

طبق صورت سؤال اگر $A \subseteq X$ باشد آن را تنجیده‌ای از X گوییم

بطوریکه $r: X \to A$ و $r \circ r = r$ در این صورت برای اعضای A

تابع r مانند همانی خواهد بود که در آن به ازای هر $a \in A$ ، $r(a) = a$

حال فرض کنیم X هاسدورف است و A زیرمجموعه‌ای سره از آن.

در این صورت وجود دارد $x \in X$ بطوریکه $x \notin A$ ، $r(x) \in A$ است.

فرض کنیم $r(x) = y$ باشد. چون X هاسدورف است پس زیرمجموعه

های باز جدا از هم U و V وجود دارند بطوریکه $x \in U$ ، $y \in V$

است. برای اینکه ثابت کنیم A بسته است توسط عکس نقیض نشان

می‌دهیم که اگر x عضو A نباشد آنگاه x عضو $\bar{A}$ هم نخواهد بود.

طبق فرض نوشته شده‌مان می‌دانیم $x \notin A$ ، $r(x) = y \in A$.

حال بازهٔ $r^{-1}(V \cap A) \cap U$ را در نظر می‌گیریم. چون $r^{-1}(V \cap A)$

برابر $p^{-1}(V) \cap p^{-1}(A)$ است و $p^{-1}(A) = X$ برابر $r^{-1}(V)$ چون

Subject: Date:

$r(x)=y\in V$ است در نتیجه $x\in r^{-1}(V)$ است پس x عضو

$r^{-1}(V\cap A)\cap U$ است پس $r^{-1}(V\cap A)\cap U$ یک همسایگی برای

نقطه x است، و چون $x\notin A$ پس به ازای هر عضو A، چون

X هاسدورف است اشتراک این همسایگی با یک همسایگی ها برابر

تهی است پس همسایگی مورد نظر هیچ اشتراکی با A ندارد $\Leftarrow$ x عضو

$\bar{A}$ نیست پس اگر $x\notin A$ آنگاه $x\notin \bar{A}$ یا عکس نقیض اگر $x\in\bar{A}$

آنگاه $x\in A$ پس $\bar{A}\subseteq A$ پس $\bar{A}=A$ $\Leftarrow$ A بسته است.