مریم علی پور حاجی آقا - محیا پاشاپور - مریم جمالی

Year:........ Month:........ Day:........

۱- X را فضای توپولوژیک و $X \times X$ را با توپولوژی حاصل ضربی بگیرید. نشان دهید (الف) $\Delta(X^2)=\{(x,x) : x \in X\}$ از $X \times X$ که قطر X^2 خوانده می شود بسته است اگر و تنها اگر X هوسدورف باشد. ب) نشان دهید $\Delta(X^2)$ باز است اگر و تنها اگر X گسسته باشد.

الف) $(\Leftarrow)$

فرض کنیم $\Delta(X^2)$ بسته است ثابت می کنیم X هوسدورف است

اگر $\Delta(X^2)$ بسته باشد $\Leftarrow$ $X \times X \setminus \Delta(X^2)$ باز است

هر دو عضوی از X در نظر بگیریم که $x \neq y$ باشد، (x,y) عضو $X \times X \setminus \Delta(X^2)$ خواهد بود

هر مجموعه ی بازی اجتماع زیرمجموعه های باز خودش است دو مجموعه باز U و V را از X در نظر میگیریم بطوریکه $U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta(X^2)$ و $y \in V$ ، $x \in U$.

هر عضو دلخواهی مانند (x',y') از $U \times V$ در نظر بگیریم چون $(x',y') \in (\Delta(X^2))^c$ است پس $x' \neq y'$ پس U و V هیچ عضو مشترکی ندارند پس $U \cap V = \emptyset$ خواهد بود پس X هوسدورف است.

الف) $(\Rightarrow)$

فرض کنیم X هوسدورف است ثابت می کنیم $\Delta(X^2)$ بسته است. اگر ثابت کنیم $(\Delta(X^2))^c$ باز است به حکم می رسیم.

فرض کنیم $(x,y) \in (\Delta(X^2))^c \Rightarrow (x,y) \in X \times X \wedge (x,y) \notin \Delta(X^2)$

$\Rightarrow x \neq y \xrightarrow{X \text{ هاسدورف}}$ همسایگی های باز U و V از x و y وجود دارند به طوریکه $x \in U$, $y \in V$

$\Rightarrow (x,y) \in U \times V$

Year:........ Month:........ Day:........

حال فرض کنیم $(u,v) \in U \times V$ باشد $\Leftarrow$ $v \in V$, $u \in U$ دلخواه

چون $U \subseteq X \Leftarrow u \in X$ ، چون $V \subseteq X \Leftarrow v \in X$

اگر $u = v$ باشد در اینصورت $U \cap V \neq \emptyset$ خواهد بود که تناقض است. پس

$u \neq v$ است. پس $(u,v) \notin \Delta(X^2) \Leftarrow (u,v) \in (\Delta(X^2))^c$

داشتیم که $(u,v) \in U \times V \Leftarrow (u,v) \in \underbrace{(\Delta(X^2))^c}_{X \times X \setminus \Delta(X^2)}$

$$\Rightarrow U \times V \subseteq (\Delta(X^2))^c = X \times X \setminus \Delta(X^2)$$

$$\Rightarrow (x,y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta(X^2)$$

یعنی هر عضوی از $(\Delta(X^2))^c$ در نظر بگیریم همسایگی های آن نقطه زیرمجموعه خودش

است پس هر عضوی از $(\Delta(X^2))^c$ یک نقطه درونی است. پس $(\Delta(X^2))^c$ باز

است پس متمم آن یعنی $\Delta(X^2)$ بسته است.

Year:........ Month:........ Day:........

سؤال ۱ قسمت (ب)

($\Leftarrow$) فرض کنیم $\Delta(X^2)$ باز باشد. دو مجموعه باز U و V را از توپولوژی T

انتخاب می کنیم بطوری که $(x,x) \in U \times V \subseteq \Delta(X^2)$ باشد چون $U \times V$ از توپولوژی

حاصل ضربی آمده اند پس باز است. می دانیم $\{x\} \subseteq U$ است. اگر $U \neq \{x\}$

باشد پس عضوی مانند y وجود دارد بطوریکه $y \in U$ و $y \neq x$ هم چنین می دانیم

$\{x\} \subseteq V$ در اینصورت $(y,x) \in U \times V$ در حالیکه $y \neq x$ است پس تناقض است

در اینصورت U باید برابر $\{x\}$ و به همین ترتیب V برابر $\{x\}$ باشد پس $\{x\}$ باز است

و می دانیم یک توپولوژی گسسته است اگر و تنها اگر تمام مجموعه های تک عضوی باز

باشند درنتیجه X گسسته است.

ب) ($\Rightarrow$)

اگر X گسسته باشد هر زیرمجموعه ای از آن باز است پس برای هر $x \in X$

$\{x\}$ باز است درنتیجه در فضای $X \times X$ مجموعه $\{(x,x)\}$ باز است. می دانیم

$\Delta(X^2) = \{(x,x) \mid x \in X\}$ پس $\Delta = \bigcup_{x \in X} \{(x,x)\}$ و می دانیم اجتماع تعداد

دلخواه مجموعه باز، باز است پس $\bigcup_{x \in X} \{(x,x)\}$ باز است $\Leftarrow$ $\Delta(X^2)$ باز است

۲ـ فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک و $f: X \to Y$, $g: X \to Y$ تابع های پیوسته باشند
نشان دهید اگر Y هوسدرف باشد $\{x \in X : f(x)=g(x)\}$ زیرمجموعه‌ای بسته از X است.

برای اینکه نشان دهیم $\{x \in X : f(x)=g(x)\}$ زیرمجموعه‌ای بسته از X است باید
نشان دهیم شامل تمام نقاط چسبیده خودش است یعنی $A=\{x \in X : f(x)=g(x)\}$
اگر $x \delta A$ باید $x \in A$ باشد.
δ چسبیدگی (X, τ) و δ' چسبیدگی (Y, τ') است
فرض کنیم

$$\longrightarrow x_0 \delta A \xrightarrow{f \text{ پیوسته}} f(x_0) \delta' f(A)$$

$$x_0 \delta A \xrightarrow{g \text{ پیوسته}} g(x_0) \delta' g(A)$$

برای $x_0 \delta A$ اگر فرض خلف کنیم $f(x_0) \neq g(x_0)$ است. چون Y هوسدرف
است زیرمجموعه های باز U و V داریم به طوریکه $g(x_0) \in V$ و $f(x_0) \in U$
چون U و V باز هستند پس برای $f(x_0)$, $g(x_0)$ همسایگی محسوب می‌شوند
وچون f و g پیوسته‌اند پس $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ دو همسایگی برای نقطه x_0
هستند. $\Rightarrow x_0 \in f^{-1}(V) , x_0 \in f^{-1}(U) \Rightarrow x_0 \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(\underbrace{U \cap V}_{\emptyset}) \neq \emptyset \quad \times$$

درحالیکه می‌دانیم هیچ عضوی به تهی نگاشته نمی‌شود و $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ پس به تناقض
می‌رسیم پس فرضی که کرده بودیم اشتباه است واگر $x_0 \delta A$ درآن صورت $f(x_0)=g(x_0)$
درنتیجه $x_0 \in A$ می‌باشد

Year:........ Month:........ Day:........

۳ـ فرض کنید X فضای توپولوژیک و $(Y, <)$ مجموعه‌ای کلاً مرتب باشد. Y را با توپولوژی ترتیبی در نظر بگیرید و فرض کنید تابع‌های $f: X \to Y$ و $g: X \to Y$ در نقطه x_0 از X پیوسته باشند نشان دهید تابع‌های $f \vee g: X \to Y$ و $f \wedge g: X \to Y$ با دستورهای $f \vee g(x) = f(x) \vee g(x)$ و $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$ در x_0 پیوسته‌اند.

لم 1 : f در a پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ بطوریکه :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

$(\Leftarrow)$ فرض کنیم f در a پیوسته است پس به ازای هر همسایگی حول $f(a)$ مثل $N_{f(a)}$ ، $f^{-1}(N_{f(a)})$ یک همسایگی حول a است. پس به ازای همسایگی $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ داریم $f^{-1}(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ یک همسایگی حول a است یعنی وجود دارد δ بطوریکه $(a-\delta, a+\delta)$ زیرآن همسایگی باشد. که این همان قسمت دوم است.

$(\Rightarrow)$ حال فرض کنیم به ازای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ بطوریکه :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

حال می‌خواهیم نشان دهیم f در a پیوسته است. هر باز حول $f(a)$ مثل $U_{f(a)}$ را در نظر بگیرید پس وجود دارد ε بطوریکه $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon) \subseteq U_{f(a)}$ زیرا آن باز بیفتد پس طبق فرض وجود دارد δ که به ازای هر عضو $x \in (a-\delta, a+\delta)$ ، $f(x)$ در $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ پس $f^{-1}(U_{f(a)})$ یک همسایگی حول a است پس f پیوسته است.

لم ۲: اگر f در a پیوسته باشد آنگاه $|f|$ در a پیوسته است.

طبق لم ۱ چون f در a پیوسته است پس برای هر $\varepsilon>0$ وجود دارد $\delta>0$

بطوریکه: $\forall x\in\mathbb{R} \quad |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

حال می خواهیم نشان دهیم $|f|$ در a پیوسته است پس برای هر $\varepsilon>0$

همان δ را در نظر بگیریم که برای f در نظر گرفته بودیم پس داریم:

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

از طرفی می دانیم $\big||f(x)|-|f(a)|\big| \leqslant |f(x)-f(a)|$

پس برای هر $\varepsilon>0$ وجود دارد $\delta>0$ بطوریکه (چون f پیوسته است)

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad |x-a|<\delta \Rightarrow \big||f(x)|-|f(a)|\big| \leqslant |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

پس $|f|$ نیز پیوسته است.

لم ۳: اگر f پیوسته باشد آنگاه به ازای $c\in\mathbb{R}$، cf پیوسته است.

می دانیم تابع ثابت $g: X\to\mathbb{R}$ ($x\mapsto \underset{\text{ثابت}}{c}$) پیوسته است پس می توان بجای cf

نوشت gf. حال می خواهیم نشان دهیم gf پیوسته است

قبلاً نشان دادیم اگر f و g پیوسته باشند پس تابع $h: X\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ با

ضابطه ی $h(x)=(g(x),f(x))$ پیوسته است. حال در سؤال بعدی

Year:........... Month:........... Day:...........

نشان می‌دهیم تابع $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y)\to xy$ پیوسته است و چون ترکیب دو

تابع پیوسته، پیوسته است پس تابع $(\cdot\, o\, h)(x)$ پیوسته است.

لم ۴: اگر تابع f و g پیوسته باشد آنگاه $(f+g)(x)$ نیز پیوسته است.

قبلاً نشان دادیم اگر f و g پیوسته باشد تابع $h: X\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ با ضابطه ی

$h(x)=(f(x), g(x))$ پیوسته است.

حال در سؤال بعدی نشان می‌دهیم تابع $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x,y)\to x+y$ پیوسته است

و چون ترکیب دو تابع پیوسته است. پس تابع $(+o\, h)(x)$ پیوسته است

که تابع $(+oh)(x)$ همان $(f+g)(x)$ است پس تابع $f+g$ پیوسته است.

حال داریم: $(f\vee g)(x)=\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$

حال چون g در x_0 پیوسته است. پس طبق لم ۳ به ازای $-1\in\mathbb{R}$

$-g(x)$ نیز در x_0 پیوسته است و چون $-g$ و f در x_0 پیوسته است

پس طبق لم ۴، $(f+(-g))(x)$ نیز در x_0 پیوسته است

پس $(f-g)(x)$ در x_0 پیوسته است. و چون f و g پیوسته است

پس طبق لم ۴، $f+g$ نیز در x_0 پیوسته است. حال چون $(f-g)$

در x_0 پیوسته است. پس طبق لم ۲، $|f-g|$ نیز در x_0 پیوسته است

Year:........ Month:........ Day:........

حال چون $|f-g|$ و $f+g$ در x_0 پیوسته است پس طبق لم ۴

$f+g+|f-g|$ در x_0 پیوسته است.

حال چون $f+g+|f-g|$ در x_0 پیوسته است به ازای $\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$

طبق لم ۳ : $\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ در x_0 پیوسته است پس

$(f\vee g)(x)=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$ در x_0 پیوسته است.

و چون $(f\wedge g)(x)=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$ به همین ترتیب

بالا می‌توان نشان داد $(f\wedge g)(x)$ نیز پیوسته است.

Year:............ Month:............ Day:............

۴ـ $\mathbb{R}$ را با توپولوژی اقلیدسی و $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ را زیرفضای $\mathbb{R}$ بگیرید. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times$ را با توپولوژی حاصل ضربی در نظر بگیرید نشان دهید تابعهای جمع و تفریق و ضرب از $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ و تابع تقسیم از $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times$ به $\mathbb{R}$ پیوسته اند.

می دانیم اگر X پایه‌ی شمارا در x داشته باشد و هر دنباله $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در X که $x_n \to x$ داشته باشیم $f(x_n) \to f(x)$، تابع پیوسته است.

از آنالیز ریاضی می دانیم اگر $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$ که $x_n \to x$ و $\{y_n\}$ در $\mathbb{R}$ که $y_n \to y$ آنگاه داریم دنباله $\{x_n+y_n\}$ به $x+y$ همگراست.

حال چون $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ در هر نقطه پایه شمارا دارد پس به ازای (x,y) داریم دنباله $\{(x_n,y_n)\}$ بطوریکه $x_n \to x$ و $y_n \to y$، پس $\{(x_n,y_n)\}$ به (x,y) همگراست.

حال داریم $+(\{(x_n,y_n)\}) = \{x_n+y_n\}$ که می دانیم x_n+y_n به $+(x,y) = x+y$ همگراست. پس چون $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ در x پایه‌ی شمارا دارد پس تابع $(+)$ پیوسته است.

از آنالیز ریاضی داریم اگر $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$ که $x_n \to x$ و $\{y_n\}$ در $\mathbb{R}$ که $y_n \to y$ آنگاه دنباله $\{x_n - y_n\}$ به $x-y$ و دنباله $\{x_n y_n\}$ به دنباله‌ی xy همگراست. پس طبق روش قبل می توان نشان داد

Year:........ Month:........ Day:........

تابع $(-)$ و تابع $(\cdot)$ پیوسته است. همچنین اگر دنباله $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ به x همگرا باشد بطوریکه $x\neq 0$ و دنباله $\{y_n\}$ در $\mathbb{R}$ که به y همگرا باشد آنگاه دنباله $\{\frac{y_n}{x_n}\}$ به $\frac{y}{x}$ همگرا است.

وچون $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}$ در هر نقطه پایه شمارا دارد طبق روش قبل می‌توان نشان داد تابع $\div$ نیز پیوسته است.

Scanned with CamScanner

۵- فرض کنیم (Y,d) فضای متری باشد، اگر B زیرمجموعه‌ای ناتهی از Y باشد
$\sup\{d(b,b'): b,b' \in B\}$ را قطر زیرمجموعه B می‌نامیم و آن را با $D(B)$ نشان می‌دهیم.
اگر X فضای توپولوژیک، x نقطه‌ای در X، و $f: X \to Y$ تابع باشد $\inf\{D(f(N)): N \in \mathcal{N}_x\}$
را نوسان f در x می‌نامیم و آن را با $\omega_f(x)$ نشان می‌دهیم.

آ) $f: X \to Y$ در نقطه x پیوسته است اگر و تنها اگر $\omega_f(x)=0$

ب) به ازای هر عدد حقیقی b، $\{x\in X: \omega_f(x) < b\}$ زیرمجموعه‌ای باز از X است. نتیجه بگیرید
مجموعه نقاط پیوستگی f زیرمجموعه‌ای G_δ - (یعنی اشتراکی شمارا از زیرمجموعه‌های باز) از X است
همچنین مجموعه نقاط ناپیوستگی f زیرمجموعه‌ای F_σ - (یعنی اجتماعی شمارا از زیرمجموعه‌های بسته) از X است.

پ) $\mathbb{R}$ را با توپولوژی اقلیدسی در نظر بگیرید و نشان دهید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ای نیست که مجموعه
نقاط پیوستگی‌اش $\mathbb{Q}$ باشد. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ی مثال بزنید که مجموعه نقاط ناپیوستگی‌اش $\mathbb{Q}$ باشد.

قسمت (آ) $\Longleftarrow$

نوسان f در گوی به شعاع δ و مرکز x

در ابتدا این تعریف را در نظر میگیریم: $\Leftarrow$ $\omega_f(x,\delta)=\omega_f(N_\delta(x)\cap A)$
که $A\subseteq X$ ، $x\in \bar{A}$ و $\delta>0$

تعریف معادل برای نوسان f در x مانند روبه‌رو در نظر میگیریم: $\omega_f(x)=\inf\limits_{\delta>0}\omega_f(x,\delta)$

در ابتدا فرض می‌کنیم چون f در x پیوسته است پس داریم $\lim\limits_{x'\to x} f(x')=f(x)$

پس f در همسایگی از x مانند $A=N_r(x)$ تعریف شده است

فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد چون $\lim\limits_{x'\to x} f(x')=f(x)$ بنا به تعریف
حد $\delta>0$ موجود است به قسمی که به ازای هر $x'\in X$ اگر داشته باشیم،

$$0<d_1(x',x)<\delta \xrightarrow{\text{نتیجه داریم}} d_2(f(x'),f(x))<\frac{\varepsilon}{2} \quad *$$

واضح است که این δ می‌تواند آنقدر کوچک باشد که $N_\delta(x)\subseteq A$ $[\delta<r]$ و لذا

Year:........ Month:........ Day:........

$N_\delta(x)\cap A = N_\delta(x)$. بنابراین با توجه به * برای هر $f(x'), f(y') \in f(N_\delta(x)\cap A)$

چون $x', y' \in N_\delta(x)$ داریم:

$$d_2(f(x'),f(y')) \leq d_2(f(x'),f(x)) + d_2(f(x),f(y')) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

لذا ε کران بالای برای : $\{d_2(f(x'),f(y')) \mid f(x'),f(y') \in f(N_\delta(x)\cap A)\}$

می‌باشد و چون سوپریمم کوچکترین کران بالاست

$$\omega_f(x,\delta) = \omega_f(N_\delta(x)\cap A) < \varepsilon$$

پس برای هر $\varepsilon>0$ عضوی از مجموعه $\{\omega_f(x,\delta) \mid \delta>0\}$ یافتیم که کوچکتر

یا مساوی ε است و لذا با توجه به خاصیت مشخصه اینفیمم داریم:

$$\inf\{\omega_f(x,\delta) \mid \delta>0\} = 0$$

بنابراین $\omega_f(x) = 0$

قسمت ۲ $(\Rightarrow)$

در ابتدا تعریف معادلی برای $\omega_f(x)$ در نظر میگیریم که بتوانیم از تعریف حد استفاده

کنیم:

$$\omega_f(x) = \lim_{h\to 0} \Omega_f((x-h,x+h)\cap A)$$

$$\Omega_f(A) = \sup\{f(x')-f(y') : x',y' \in A\}$$

فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد و $\omega_f(x) = \lim_{h\to 0} \Omega_f((x-h,x+h)\cap A) = 0$

Scanned with CamScanner

درایصورت طبق تعریف حد داریم برای $\varepsilon_1=\varepsilon>0$ وجود دارد $\delta_1>0$ به

طوری که اگر $|h|<\delta_1$ آنگاه :

**

$$\Omega_f((x-h,x+h)\cap A)=\sup\{f(x')-f(y'):x',y'\in(x-h,x+h)\cap A\}<\varepsilon_1=\varepsilon$$

اگر $\delta=\delta_1$ برای هر x' که : $|h|<\delta_1=\delta$

$$x'\in \underbrace{N_h(x)}_{\text{همسایگی برای } x \text{ به شعاع } h}=(x-h,x+h)\subseteq N_\delta(x)=(x-\delta,x+\delta)$$

در نظر بگیریم رابطه ی ** صدق می کند درایصورت داریم:

$$f(x')-f(x)\leqslant|f(x')-f(x)|=\varepsilon_1=\varepsilon$$

درایصورت برای هر $\varepsilon>0$ وجود دارد $\delta>0$ به طوری که اگر $x'\in N_\delta(x)$ باشد

$|f(x')-f(x)|<\varepsilon$ برقرار است که این همان تعریف پیوستگی است پس

f در x پیوسته است.

قسمت (ب) برای قسمت ب ابتدا لازم است تعاریف ولم های زیر را

در نظر بگیریم :

تعریف نیم پیوستگی از بالا : f را نیم پیوسته از بالا در نقطه ی $a\in X$ نامیم

هرگاه برای هر $u\in R^*$ که $f(a)<u$ عددی مانند $\delta>0$ موجود باشد به قسمی که به

ازای هر $x\in X$ اگر $d(x,a)<\delta$ آنگاه $f(x)<u$

لم ۱: فرض کنیم $f:(X,d) \to R^*$ یک تابع باشد اگر f نیم پیوسته از بالا باشد آنگاه

برای هر $b \in R^*$ مجموعه $\{x \in X \mid f(x) < b\}$ مجموعه‌ای G_δ در X است.

اثبات: اگر $b=+\infty$ آنگاه: $\{x \in X \mid f(x) < +\infty\} = X$

و اگر $b=-\infty$ آنگاه: $\{x \in X \mid f(x) < -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f(x) < -n\}$

بنابراین فرض کنیم $b \in R$ در این صورت:

$$\{x \in X \mid f(x) < b\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f(x) < b + \frac{1}{n}\}$$

لذا در هر حالت مجموعه‌ی مذکور G_δ است ▨

لم ۲: فرض کنیم $f:(X,d_1) \to (Y,d_2)$ یک تابع باشد. در این صورت

Ω که به صورت: $\Omega:(X,d_1) \to R^*$

$$\Omega(x) = \omega_f(x)$$

تعریف می‌شود نیم پیوسته از بالا می‌باشد.

اثبات: در نقاطی که $\Omega(x)$ برابر $+\infty$ باشد این تابع نیم پیوسته از بالا است

فرض کنیم $x \in X$ نقطه‌ی دلخواهی باشد که $\Omega(x) \in R$ نیز فرض کنیم $\varepsilon > 0$

داده شده باشد بنابر خاصیت مشخصه اینفیمم $\delta > 0$ هست که

نوسان f در $N_\delta(x)$

$$\omega_f(x,\delta) < \omega_f(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Year:........ Month:........ Day:........

بنابراین به ازای هر $x' \in X$ اگر : $0 < d_1(x', x) < \delta'$

آنگاه چون $x', y' \in N_{\delta'}(x)$ پس $f(x'), f(y') \in f(N_{\delta'}(x))$ و لذا

$$d_2(f(x'), f(y')) < \omega_f(x) + \frac{\varepsilon}{2} = \Omega(x) + \frac{\varepsilon}{2} \quad *$$

حال قرار می‌دهیم $\delta = \frac{\delta'}{2}$ در این صورت به ازای هر $z \in X$ اگر :

$$d_1(z, x) < \delta \Rightarrow \Omega(z) < \Omega(x) + \varepsilon$$

زیرا اگر $z = x$ آنگاه نامساوی فوق واضح است و اگر $z \neq x$ آنگاه به ازای

هر $f(x')$ و $f(y')$ در $f(N_\delta(z))$ چون $x', y' \in N_\delta(z)$ پس

$$d_1(x', z) < \delta \quad , \quad d_1(y', z) < \delta$$

و لذا $d_1(x', y') \leq d_1(x', z) + d_1(z, y') < \delta + \delta = 2\delta = \delta'$

در نتیجه با توجه به $*$ داریم : $d_2(f(x'), f(y')) < \Omega(x) + \frac{\varepsilon}{2}$

پس $\Omega(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ کران بالایی برای مجموعه :

$$\{d_2(f(x'), f(y')) \mid f(x'), f(y') \in N_\delta(z)\}$$

می‌باشد و چون سوپریمم کوچکترین کران بالاست پس :

$$\omega_f(N_\delta(z)) \leq \Omega(x) + \frac{\varepsilon}{2} < \Omega(x) + \varepsilon$$

در نتیجه :

Year:........ Month:........ Day:........

$$\Omega(z) = \omega_f(z) = \inf_r \omega_f(z,r)$$

$$\leqslant \omega_f(z,\delta) = \omega_f(N_\delta(z)) < \Omega(x)+\varepsilon$$

بنابراین Ω در x نیم پیوسته از بالا است

اثبات اصلی: بخش اول قسمت (ب)

لم ۲

بنا بر لم 1 و چون Ω $\underbrace{\text{نیم پیوسته از بالا است}}$ پس برای هر $b\in\mathbb{R}$

از جمله $b=0$ مجموعه $\{x\in X \mid \Omega(x) < b\}$ مجموعه ای G_δ است اما

$$\{x\in X \mid \Omega(x) \leqslant 0\} = \{x\in X \mid 0 \leqslant \Omega(x) \leqslant 0\}$$
$$= \{x\in X \mid \Omega(x)=0\}$$
$$= \{x\in X \mid \omega_f(x)=0\}$$

بخش دوم قسمت (ب)

فرض کنیم D مجموعه ی نقاط ناپیوستگی f باشد بنا بر قضیه ای که قسمت

(آ) ثابت کردیم [f در x پیوسته است اگر و تنها اگر $\omega_f(x)=0$] داریم:

چون ناپیوسته است $D = \{x\in X \mid \omega_f(x) \neq 0\}$ در

می دانیم متمم این مجموعه G_δ است پس D مجموعه ای F_δ می باشد.

ه پ

فرض کنیم وجود دارد تابعی که در نقاط گویا پیوسته باشد

فرض کنیم $x\in\mathbb{Q}$ باشد و بازه‌ی باز N_1 یک همسایگی برای $f(x)$ باشد چون f در
نقاط گویا پیوسته است لذا $f^{-1}(N_1)$ همسایگی بازی برای $x\in\mathbb{Q}$ می‌باشد با توجه
به رابطه ترتیب روی $\mathbb{Q}$ نقطه‌ی گویای بعد از x را در نظر میگیریم فرض کنیم این نقطه
y باشد بازه‌ی بازی از $f(y)$ مانند N_2 اختیار می‌کنیم چون فرض کردیم f
در نقاط گویا پیوسته است پس در y هم پیوسته است لذا $f^{-1}(N_2)$ همسایگی ای
برای y است با توجه به چگال بودن اعداد گنگ در اعداد گویا نتیجه می‌شود
$\phi\neq f^{-1}(N_1)\cap f^{-1}(N_2)$ و وجود دارد $z\in\mathbb{Q}^c$ که $z\in f^{-1}(N_1)\cap f^{-1}(N_2)$ *

از * داریم: $f(z)\in N_1\cap N_2$ ← پس از اینجا می‌توان گفت $N_1\cap N_2$
همسایگی ای برای $f(z)$ است. حال نشان می‌دهیم $f^{-1}(N_1\cap N_2)$ همسایگی
ای برای z است: چون $f^{-1}(N_1\cap N_2)=f^{-1}(N_1)\cap f^{-1}(N_2)$
و طبق * داشتیم $z\in f^{-1}(N_1)\cap f^{-1}(N_2)$ پس نتیجه می‌شود $z\in f^{-1}(N_1\cap N_2)$
پس $f^{-1}(N_1\cap N_2)$ همسایگی ای برای z است اما z عدد گنگ بود و طبق فرض
تابع در اعداد گویا پیوسته است پس این تناقض است

مثال از تابعی که در Q ناپیوسته است

تابع خط‌کش گویا که در هر عدد گویای $x=\frac{p}{q}$ قرار می‌دهیم $f(x)=\frac{1}{q}$

در حالی که در نقاط گنگ x ، $f(x)=0$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in Q \\ 0 & x\in Q^c \end{cases}$$