مریم علی پور حاجی آقا ۹۶۱۲۰۳۷
مریم جمالی ۹۷۱۲۰۰۹
محیا پاشاپور ۹۸۱۲۰۰۹

۱- فرض کنید X فضایی توپولوژیک، C زیرمجموعه‌ای همبند از آن و A زیرمجموعه‌ای دلخواه از X باشد. نشان دهید اگر C شامل نقطه‌ای از A و نقطه‌ای از A' (متمم A در X) باشد، شامل نقطه‌ای از مرز A نیز هست.

فرض خلف کنیم $C\cap A^{\partial}=\emptyset \Rightarrow C\cap(\bar{A}\cap\overline{A^c})=\emptyset$

C را می‌توانیم به صورت $(C\cap A)\cup(C\cap A^c)$ بنویسیم. علت:

$$(C\cap A)\cup(C\cap A^c) \overset{\text{توزیع‌پذیری}}{=} C\cap(\underbrace{A\cup A^c}_{X}) = C$$

حال داریم:

$$(C\cap A)\cap(C\cap A^c) = C\cap(\underbrace{A\cap A^c}_{\emptyset}) = \emptyset$$

$$\overline{(C\cap A)}\cap(C\cap A^c) \subseteq (\bar{C}\cap\bar{A})\cap(C\cap A^c) = (\bar{C}\cap C)\cap(\bar{A}\cap A^c)$$

Subject: Date:

$\subseteq C \cap (\bar{A} \cap \underbrace{A^c}_{\subseteq \bar{A^c}}) \overset{\text{فرض}}{=} \emptyset \Rightarrow (\overline{C \cap A}) \cap (C \cap A^c) = \emptyset$

$(C \cap A) \cap (\overline{C \cap A^c}) \subseteq (C \cap A) \cap (\bar{C} \cap \bar{A^c}) = (C \cap \bar{C}) \cap (A \cap \bar{A^c}) \subseteq$

$\subseteq C \cap (A \cap \bar{A^c}) \subseteq C \cap (\bar{A} \cap \bar{A^c}) \overset{\text{فرض}}{=} \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow (C \cap A) \cap (\overline{C \cap A^c}) = \emptyset$

هم چنین می دانیم که $C \cap A$, $C \cap A^c$ ناتهی است (بنا بر

صورت سؤال) پس یک جداسازی برای C بصورت

$C = (C \cap A) | (C \cap A^c)$ پیدا کردیم که تناقض است چون

C همبند بود پس فرض ما اشتباه است و $C \cap A^c$ ناتهی می باشد

و C شامل نقطه ای از مرز A است.

۲- فرض کنید X فضای توپولوژیک و Y و Z زیرمجموعه های بسته آن

باشند. نشان دهید اگر $Y \cup Z$, $Y \cap Z$ همبند باشند، Y و Z نیز همبندند.

فرض خلف کنیم Y همبند نباشد در این صورت داریم $Y = A | B$

بطوریکه A و B ناتهی اند: $A \cap B = \bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ $Y = A \cup B$

Subject:

Date:

فرض کنیم $Y \cap Z = S$ باشد. پس داریم: $S = Y \cap Z = (A \cup B) \cap Z$

$\Rightarrow S = (A \cap Z) \cup (B \cap Z)$

$(A \cap Z) \cap (B \cap Z) = (A \cap B) \cap Z = \emptyset \cap Z = \emptyset$

$(\overline{A \cap Z}) \cap (B \cap Z) \subseteq (\bar{A} \cap \underbrace{\bar{Z}}_{Z}) \cap (B \cap Z) = (\bar{A} \cap B) \cap Z = \emptyset \cap Z = \emptyset$

$(A \cap Z) \cap (\overline{B \cap Z}) \subseteq (A \cap Z) \cap (\bar{B} \cap \underbrace{\bar{Z}}_{Z}) = (A \cap \bar{B}) \cap Z = \emptyset \cap Z = \emptyset$

برای حالتی که $A \cap Z$ و $B \cap Z$ ناتهی باشد یک جداساز برای

$Y \cap Z$ بصورت $A \cap Z$ و $B \cap Z$ پیدا کردیم. که تناقض است

چون $Y \cap Z$ همبند بود (درصورت تهی بودن یکی از طرفین جداساز از

$Y \cup Z$ استفاده می کنیم و باز به تناقض می رسیم). پس فرض

نا درست بوده و Y همبند است. به همین صورت فرض خلف می کنیم

که Z همبند نبوده و با این اثبات به تناقض می رسیم و نتیجه می گیریم

Z همبند است.

MICRO®

Scanned with CamScanner

Subject:　　　　　　　　　　Date:

۳- آ. فرض کنید X فضای توپولوژیک همبند و Y زیرمجموعه‌ای همبند از X باشد
نشان دهید اگر $X\setminus Y = A|B$ زیر مجموعه‌های $Y\cup A$ ، $Y\cup B$ از X همبندند.

ابتدا فرض خلف کنیم $Y\cup A$ ناهمبند باشد $\Leftarrow$ $Y\cup A = C|D$

بطوریکه $Y\cup A = C\cup D$ ، C,D ناتهی‌اند $C\cap D = \bar{C}\cap D = C\cap \bar{D} = \emptyset$

طبق قضیه‌ای می‌دانیم اگر $X = A|B$ ، $Y\subseteq X$ همبند باشد درنتیجه

$Y\subseteq A$ ، $Y\subseteq B$. پس فرض کنیم که $Y\subseteq C$ باشد (فرقی

نمی‌کند می‌توان D هم قرار داد.) حال اگر $A\subseteq C$ باشد در آن

صورت D تهی است (تناقض برای ناهمبندی) و اگر $A\cap C\neq\emptyset$

، $A\cap D\neq\emptyset$ باشد آنگاه $D\cap C\neq\emptyset$ که باز هم امکان ندارد.

درنتیجه $A\subseteq D$ می‌باشد

پس داریم: $\bar{Y}\cap A\subseteq \bar{Y}\cap D\subseteq \bar{C}\cap D=\emptyset \Rightarrow \bar{A}\cap Y=\emptyset$

طبق فرض سؤال هم داریم: $X\setminus Y = A|B \Rightarrow \begin{cases} Y\cap A=\emptyset, Y\cap B=\emptyset \\ (A\cup B)\cup Y = X \end{cases}$

حال مجموعه $A\cup(B\cup Y)$ درنظر می‌گیریم می‌دانیم که برابر X است.

$A\cap(B\cup Y) = (A\cap B)\cup(A\cap Y) = \emptyset\cup\emptyset=\emptyset$

Subject: Date:

$\bar{A}\cap(B\cup Y)=(\bar{A}\cap B)\cup(\bar{A}\cap Y)=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$

$A\cap(\overline{B\cup Y})=A\cap(\bar{B}\cup\bar{Y})=(A\cap\bar{B})\cup(A\cap\bar{Y})=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$

همچنین می دانیم که چون $X\setminus Y=A|B$ پس A ناتهی و

$B\cup Y$ ناتهی است. پس یک جداساز بصورت A و $B\cup Y$

برای X پیدا کردیم یعنی $X=A|(B\cup Y)$ ولی این

تناقض است چون X همبند بود پس فرض محال باطل است و

$Y\cup A$ همبند است. به همین صورت همبند بودن $Y\cup B$ (با

فرض خلف همبند نبودن، جداساز $X=B|(A\cup Y)$) اثبات می شود.

پس $Y\cup A$ و $Y\cup B$ همبندند.

ب) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک همبند باشد. نقطه x در X را برشی X نامند اگر $X\setminus\{x\}$ ناهمبند باشد. نشان دهید هرگاه x نقطه برشی باشد، $\{x\}$ زیر مجموعه ای باز یا بسته از X است.

طبق قضیه ای می دانیم فضای توپولوژیک X ناهمبند است اگر و تنها اگر

افرازی به دو زیر مجموعه باز (و در نتیجه بسته) داشته باشد.

$\Rightarrow X\setminus\{x\}=A|B \rightarrow$ A, B هر دو باز هستند $\Rightarrow$ $A\cup B$ باز است

Subject: Date:

$\Rightarrow (X\setminus\{x\})^c = \{x\} = (\underbrace{A\cup B}_{\text{باز}})^c \Rightarrow$ بسته است $(A\cup B)^c \Leftarrow$ باز است $\{x\}$

$X\setminus\{x\} = A|B \rightarrow$ A و B هر دو بسته هستند $\Rightarrow$ $A\cup B$ بسته است

$\Rightarrow (X\setminus\{x\})^c = \{x\} = (\underbrace{A\cup B}_{\text{بسته}})^c \Rightarrow$ باز است $(A\cup B)^c \Leftarrow$ باز است $\{x\}$

پس ثابت کردیم که $\{x\}$ زیر مجموعه‌ای باز یا بسته از X است

پ) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک همبند باشد. نقطهٔ x در X را پراکنده X می‌نامند اگر $X\setminus\{x\}$ کاملاً ناهمبند باشد. نشان دهید نقطهٔ پراکنده در صورت وجود یکتاست. در واقع در صورت وجود نقطهٔ پراکنده نقطهٔ برشی دیگری وجود ندارد.

فرض کنیم x یک نقطهٔ پراکنده برای فضای توپولوژیک همبند X باشد در آن صورت $X\setminus\{x\}$ کاملاً ناهمبند است پس ناهمبند نیز می‌باشد.

چون مؤلفه‌های آن تک عضوی‌ها هستند. حال H را به صورت اجتماع از اعضای X مانند x_j $j\in J$ در نظر می‌گیریم چون $\{x_j\}$ بسته است $\Leftarrow$ H بسته می‌باشد و چون H متمم مجموعه‌ای بسته از X است $\Leftarrow$ باز است پس H بستاز است.

در نتیجه $H \subset X\setminus\{x\}$ حال B را به صورت $B = (X\setminus\{x\})\setminus H$

MICRO®

Subject:

Date:

در نظر نمی‌گیریم. ثابت می‌کنیم $H \cup \{x\}$ همبند است. فرض خلف

کنیم نباشد $\Leftarrow$ $H \cup \{x\} = C | D$ بطوریکه $x \in D$ است. حال می‌دانیم

D, C هر دو بازند

$H \cup \{x\} \cup B = X \Leftarrow C \cup D \cup B = X$ حال $C \cap (D \cup B)$

را محاسبه می‌کنیم. $C \cap (D \cup B) = (C \cap D) \cup (C \cap B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

با توجه به تعریف B

می‌دانیم C باز است و D, B باز هستند $\Leftarrow$ $D \cup B$ باز است پس

یک افراز برای X بدست آوردیم که تناقض است چون X همبند بود.

پس فرض اشتباه و $H \cup \{x\}$ همبند است. طبق لم می‌دانیم اگر

x دلخواه از X باشد و $H \subseteq X \setminus \{x\}$ بطوریکه بازه باشد در آن صورت

$X \setminus H$ همبند است. حال فرض کنیم $y \in H$ باشد در آن صورت

$X \setminus B = H \cup \{y\}$ زیرمجموعه‌ای همبند از $X \setminus \{x\}$ شامل y است و

$X \setminus H = B \cup \{y\}$ زیرمجموعه‌ای همبند از $X \setminus \{x\}$ شامل y است

می‌دانیم $X \setminus \{x\}$ بطور کلی ناهمبند است $\Leftarrow$ B باید تهی باشد

در آن صورت $X \setminus \{y\}$ برابر $H \cup \{x\}$ است پس $X \setminus \{y\}$ همبند است

پس نقطه برشی نیست

MICRO®

Subject: Date:

۴- فرض کنید X فضایی توپولوژیک باشد، و x نقطه‌ای در X باشد. نشان دهید شبه مولفه x، اشتراک تمام زیرمجموعه‌های از X است که باز و بسته و شامل x باشند.

این سوال را یکی از دوستانم حل کرده پاسخ را در داخل این فایل پی دی اف قرار می‌دهم.

Scanned with CamScanner

سوال ۹) فرض: X فضای توپولوژیک و x نقطه‌ای در X است و C_x شبه مولفه‌ای شامل x است.

حکم: نشان دهید اشتراک تمام زیرمجموعه‌های بستباز شامل x برابر با C_x است.

عضوی مانند y از C_x را در نظر می‌گیریم، می‌خواهیم نشان دهیم y عضو هر بستباز شامل x است.

$$y \in C_x \iff y \in \bigcap D_\alpha \,, \quad D_\alpha \text{ بستباز شامل } x \text{ هستند}$$

بستباز دلخواهی مثل D را در نظر می‌گیریم که شامل x است می‌خواهیم نشان دهیم $y \in D$
فرض کنیم چنین نباشد پس $y \in D^c$ پس می‌توان گفت: $X = \underset{x}{\underset{\Downarrow}{D}} \,|\, \underset{y}{\underset{\Downarrow}{D^c}}$ و D^c باز است
چون D بستباز است که این تناقض است چون $y \in C_x$ و C_x یک شبه مولفه است
یعنی می‌توان A و B بازی پیدا کرد که $X = A | B$ و $x \in A$ و $y \in B$.
پس چون D دلخواه بود، پس $y \in \bigcap D_\alpha$ که D_αها بستباز شامل x هستند.

$$\Rightarrow C_x \subseteq \bigcap D_\alpha \quad (\mathrm{I})$$

حال فرض می‌کنیم $y \in \bigcap D_\alpha$، می‌خواهیم ثابت کنیم $y \in C_x$.
فرض کنیم چنین نباشد یعنی $y \notin C_x$ پس A و B بازی پیدا می‌شود که $X = A | B$ که $x \in A$ و $y \in B$ پس نتیجه می‌گیریم $y \notin A$ و A یک بستباز شامل x است
که این تناقض است با اینکه $y \in \bigcap D_\alpha$، پس $y \in C_x$

$$\Rightarrow \bigcap D_\alpha \subseteq C_x \quad (\mathrm{II})$$

$$\xrightarrow{(\mathrm{I}),(\mathrm{II})} C_x = \bigcap D_\alpha \quad \square$$

۵ب- از $\mathbb{R}$، بازهٔ $I = [0,1]$ را با ترتیب معمولی درنظر بگیرید به دو طریق بر $I \times I$ توپولوژی تعریف کنید. نخست این که $I \times I$ را با ترتیب قاموسی بگیرید و به آن توپولوژی ترتیبی دهید. دیگر اینکه $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ را با توپولوژی ترتیب قاموسی بگیرید، و $I \times I$ را زیرفضایش بگیرید. مؤلفه ها، مؤلفه های راهی و نقاط همبندی موضعی این دو فضا را به دست آورید.

با ترتیب قاموسی داریم به ازای هر عضو (x,y) از $[0,1] \times [0,1]$ داریم:

$$(x,y) < (x',y') \iff (x < x') \text{ یا } (x = x',\ y < y')$$

$$x < x' \Rightarrow (x,y) < (x',y') \qquad z < y \Rightarrow (x,z) < (x,y)$$

فضای X را برابر $[0,1] \times [0,1]$ درنظر می‌گیریم. کوچکترین عضو برابر $(0,0)$ و بزرگترین برابر $(1,1)$ است. پایهٔ توپولوژی را بصورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$B = \{((x,y),(x',y')) \mid (x,y),(x',y') \in X\} \cup \{[(0,0),(x',y')) \mid (x',y') \in X\} \cup \{((x,y),(1,1)] \mid (x,y) \in X\}$$

Subject: Date:

حال نشان می دهیم رابطه ترتیب کلی بر X وجود دارد:

$\forall (x,y)\in X$ می دانیم چون $x=x$, $y\le y$ ⇐ $(x,y)\le(x,y)$

بازتابی ✓

فرض کنیم $\underset{(1)}{(x,y)\le(x',y')}$, $\underset{(2)}{(x',y')\le(x,y)}$ از (1) اگر $x<x'$

آنگاه با توجه به (2) تناقض است ⇐ $x=x'$, $y\le y'$ از (2) هم

نتیجه می گیریم $y'\le y$ $\xRightarrow{(1),(2)}$ $y=y'$ ⇐ $(x,y)=(x',y')$

تقارنی ✓

اگر $(x,y)\le(x',y')$, $(x',y')\le(t,z)$ ⇐ اگر $x<x'$, $x'<t$ ⇐ $x<t$ ⇐

$(x,y)\le(t,z)$ ⇐ اگر $x<x'$, $x'=t$ ⇐ $x<t$ ⇐ $(x,y)\le(t,z)$

اگر $x=x'$, $y\le y'$, $x'<t$ ⇐ $(x,y)\le(t,z)$

اگر $x=x'$, $y\le y'$, $x'=t$, $y'\le z$ ⇐ $(x,y)\le(t,z)$ ترایایی ✓

$\forall (x,y),(x',y')\in X$ یا $x\neq x'$ ⇐ $(x,y)\le(x',y')$ یا $(x',y')\le(x,y)$

و یا $x=x'$, $y\le y'$ یا $y'\le y$ ⇐ $(x,y)\le(x',y')$ یا $(x',y')\le(x,y)$

پس ترتیب کلی بر X برقرار است ⇐ توپولوژی ترتیبی است.

برای توپولوژی زیرفضایی هم همین اثبات را برای $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ داریم

Subject: Date:

در آن صورت با توپولوژی زیرفضایی برای $I \times I$ خواهیم داشت:

$$T_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{((x,y),(x',y')) \mid (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow T_{I\times I} = \{((r,s),(r',s')) \cap I\times I \mid (r,s),(r',s') \in T_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\}$$

فضای $I \times I$ با توپولوژی ترتیب قاموسی همبند است پس مولفه آن برابر خودش است ولی همبند راهی نیست چون نمی‌توان تابعی مانند $f:[a,b] \to I\times I$ یافت که در آن نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ را بهم وصل کند. پس مولفه های راهی بصورت خطوط عمودی و افقی بین نقاط می‌توانند باشند.

نقاط همبند موضعی از $I \times I$ نقاطی هستند که باید از زیرمجموعه‌های همبند داشته باشند که برای نقاط بین $(0,0)$ و $(1,1)$ برقرار است. (بصورت بازه)

Subject: Date:

۶ - آ. نشان دهید نگاشت خارج قسمتی فضای همبند موضعی را به فضای

همبند موضعی می برد. ولی نگاشت پیوسته لزوماً این ویژگی را ندارد.

فرض کنیم $Y \to f: X$ نگاشت خارج قسمتی باشد و X همبند موضعی

است. ثابت می کنیم که Y هم همبند موضعی است. فرض کنیم $y \in Y$

باشد یک همسایگی باز مانند U_y برای y در Y در نظر می گیریم بطوریکه

V_y یک مؤلفه همبندی باشد که $y \in V_y \subseteq U_y$. حال فرض کنیم

$V = f^{-1}(V_y)$ باشد $\Leftarrow$ $x \in V$ باشد آنگاه $f(x) \in V_y \subseteq U_y$.

چون f نگاشت خارج قسمتی است پس وارون هر باز از Y، در X

باز است، و می دانیم $x \in f^{-1}(U_y)$ $\Leftarrow$ $f^{-1}(U_y)$ در X باز است و x نقطه

درونی برای آن است $\Leftarrow$ چون X همبند موضعی است پس پایه ای

از زیر مجموعه های همبند در x دارد یکی از آنها را مانند U_x در نظر می گیریم

بطوریکه $U_x \subseteq f^{-1}(U_y)$ چون U_x همبند است $\Leftarrow$ $f(U_x)$ در Y

همبند است، و چون x نقطه اشتراک $f(U_x)$ و V_y است پس

MICRO® $f(U_x) \cup V_y$ همبند است. و چون V_y مؤلفه همبندی

بود پس ماکزیمال است ⇐ $f(U_x) \subseteq V_y$ پس داریم

$V = f^{-1}[V_y] \supseteq U_x$ و x نقطهٔ درونی برای V بود پس برای هر

همسایگی ، V در X باز است ، چون f نگاشت خارج قسمتی بود

⇐ V_y در Y باز است پس برای هر زیرمجموعهٔ باز از Y چون

V_y دلخواه انتخاب شده هر مؤلفهٔ همبندی باز است ⇐ Y

یک فضای همبند موضعی است.

ولی برای پیوستگی در این نوع اثبات لزوما نمی‌توانیم باز بودن

V_y در Y را نشان دهیم چون پیوستگی این شرط را ندارد پس

(باز به باز ببرد)

نگاشت پیوسته لزوما این ویژگی را ندارد

ب) فرض کنید I مجموعه نمایه گذاری و $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ گردایه‌ای از فضاهای توپولوژیک نا تهی باشد. نشان دهید $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ همبند موضعی است $\Longleftrightarrow$ X_α ها همه همبند موضعی و تقریبا همه (یعنی همه جز تعداد متناهی) همبند باشند.

اثبات ($\Leftarrow$) فرض کنیم $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ همبند موضعی باشد $\Leftarrow$ همه مولفه‌های هر زیرمجموعه باز از آن باز است. زیرمجموعه‌های باز $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ بصورت $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ می‌باشند که U_α در X_α باز است. مولفه‌های $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ بصورت $\prod_{\alpha\in I} C_\alpha$ می‌باشند که C_α در U_α مولفه است. با توجه به فرض چون $\prod_{\alpha\in I} C_\alpha$ در $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ باز است $\Leftarrow$ C_α در U_α باز است. پس برای هر فضای X همه مولفه‌های هر زیرمجموعه باز از آن باز است

$\Leftarrow$ همه X_α ها همبند موضعی هستند.

اثبات ($\Rightarrow$) حال فرض می‌کنیم X_α ها همه همبند موضعی و همه جز تعداد متناهی همبند باشد. پس برای هر مجموعه همبند هر زیرمجموعه باز خودش مولفه خواهد بود حاصل ضرب این مولفه‌ها با تعدادی متناهی مولفه باز مانند C_α $\alpha\in\{1,\dots,n\}$

Subject: Date:

درنظر می‌گیریم. حاصل ضرب این مؤلفه‌ها به عنوان زیرمجموعهٔ

باز از $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ خواهد بود. پس همهٔ مولفه‌های هر زیرمجموعهٔ

باز آن باز است $\Leftarrow$ $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ همبند موضعی است.