مریم علیپور حاجی آقا 9612037

سوال 2) (1) $\forall x\in\mathbb{R}$ داریم، $x\in[x,+\infty)\in S$، پس اعضای S کل $\mathbb{R}$ را می‌پوشانند.

(2) $z\in[x,+\infty)\cap[y,+\infty)$ پس یعنی، $z\geq x$, $z\geq y$

پس $[z,+\infty)\subset[x,+\infty)$, $[z,+\infty)\subset[y,+\infty)$ $\Longrightarrow z\in[z,+\infty)\subseteq[x,+\infty)\cap[y,+\infty)$

پس S یک پایه برای یک توپولوژی بر $\mathbb{R}$ است.

حال S را به عنوان زیرپایه در نظر می‌گیریم.
اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای S به صورت $[a,+\infty)$ است زیرا اعضای S به صورت بازه‌های تو در تو هستند پس پایه‌ی حاصل از زیرپایه‌ی S همان S است.

حال بازها در توپولوژی حاصل از این پایه به صورت $(a,+\infty)$ و $[a,+\infty)$ است، زیرا برای هر $x\in(a,+\infty)$ داریم:

$$x\in[x,+\infty)\subseteq(a,+\infty)$$

و $[x,+\infty)$ یک عضو پایه است پس $(a,+\infty)$ باز است.

حال می‌خواهیم بستار $\{0\}$ را پیدا کنیم. اگر $a>0$ آنگاه $[a,+\infty)\cap\{0\}=\emptyset$ پس $a\notin\overline{\{0\}}$
اگر $a\leq 0$ آنگاه برای هر باز شامل a مثل $(x,+\infty)$ داریم:

$$(x,+\infty)\cap\{0\}\neq\emptyset \Rightarrow a\in\overline{\{0\}} \Rightarrow \overline{\{0\}}=(-\infty,0]$$

پایه‌ی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A=\{[a,+\infty)\mid a\in\mathbb{Q}\}$$

به وضوح A شمارا است. تنها باید نشان دهیم A یک پایه برای توپولوژی مورد نظر است.
A به وضوح یک پایه است (مانند همان روشی که در ابتدا نوشتم)

حال نشان می‌دهیم اعضای S را می‌توان توسط اعضای A نوشت .

اگر $a \in \mathbb{Q} \Leftarrow$ $\quad [a, +\infty) \in S$

اگر $a \in \mathbb{Q}^c \Leftarrow$ وجود دارد دنباله‌ای صعودی از اعداد گویای به طوری که $\{q_n\}$ به a میل می‌کند. پس می‌توان نوشت :

$$[a, +\infty) = \bigcap [q_n, +\infty)$$

چون q_n ها به صورت صعودی به a میل می‌کند

پس اعضای S را می‌توان توسط اعضای A ساخت و $A \subseteq S$ پس A یک پایه‌ی شمارا برای توپولوژی است .