۱- آ) $f: \prod_{\beta\in J} X_\beta \to X_\alpha$ بطوریکه $x_\beta \in X_\beta$ است.

$(x_\beta)_{\beta\in J} \to x_\alpha$

هر زیرمجموعهٔ باز از $\prod_{\beta\in J} X_\beta$ در نظر بگیریم بصورت حاصل ضرب $\prod_{\beta\in J} U_\beta$ خواهد بود که

U_β در X_β باز است.

$f(\prod_{\beta\in J} U_\beta) = U_\alpha \longrightarrow$ U_α در X_α باز است

پس f نگاشتی باز است.

Subject: Year: Month: Day:

$h_\alpha : Z \to X_\alpha$ اثبات -

$h : Z \to \prod_{\beta \in J} X_\beta \qquad h(z) = (h_\beta(z))_{\beta \in J}$ ~~[illegible]~~ کامل
راه‌حل

فرض کنیم π_β تصویر این حاصلضرب بر روی عامل β ام آن باشد، تابع π_β پیوسته است، زیرا اگر U_β در X_β باز باشد، مجموعه $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ یک عضو زیرپایه توپولوژی حاصلضربی در $\prod X_\alpha$ است حال فرض کنیم تابع $h : Z \to \prod X_\alpha$ پیوسته باشد. تابع h_β برابر است با تابع مرکب $\pi_\beta \circ h$ که چون ترکیب دو تابع پیوسته می‌باشد، پس پیوسته است

بعکس، فرض کنیم هر تابع h_α پیوسته باشد برای اثبات اینکه h پیوسته است کافی است ثابت کنیم که تصویر عکس هر عضو زیرپایه تحت h در Z باز است. می‌دانیم یک عضو نوعی زیرپایه توپولوژی حاصل ضربی در $\prod X_\alpha$ مجموعه‌ای به صورت $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ است، که در آن β یکی از اندیس‌ها و U_β در X_β باز است، حال چون $h_\beta = \pi_\beta \circ h$ درنتیجه

$$h^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)) = h_\beta^{-1}(U_\beta)$$

و بنابر پیوستگی h_β این مجموعه در Z باز است، و این همان است که می‌خواستیم

راه حل دوم قسمت $(\Leftarrow)$ این اثبات صفحه‌ی بعد است.

سؤال ۱.ب - فرض کنیم به ازای هر $\alpha \in J$، h_α پیوسته باشد. برای اینکه ثابت کنیم

h پیوسته است می‌توانیم از معادل آن استفاده کنیم و ثابت کنیم اگر $A \subseteq Z$ $\Leftarrow$ $h(\bar{A}) \subseteq \overline{h(A)}$

حال فرض کنیم $A \subseteq Z$ باشد در نتیجه داریم: $h(\bar{A}) = (h_B(\bar{A}))_{B \in J}$

چون h_α به ازای هر $\alpha \in J$ پیوسته است $\Leftarrow$ $h_\alpha(\bar{A}) \subseteq \overline{h_\alpha(A)}$

پس داریم $\rightarrow h(\bar{A}) = (h_B(\bar{A}))_{B \in J} \subseteq (\overline{h_B(A)})_{B \in J} = \overline{h(A)}$

پس $h(\bar{A}) \subseteq \overline{h(A)}$ در نتیجه h پیوسته است.

حال ...

$\forall \alpha \in J$

اب ← فرض کنیم X_α فضای متریک پذیر باشد. طبق قضیه ای می دانیم ویژگی متریک پذیری ضربی است (جزوه استاد) پس $\prod_{\beta\in J} X_\beta$ با توپولوژی حاصل ضرب طبق این قضیه متریک پذیر است.

حال فرض کنیم $\prod_{\beta\in J} X_\beta$ با توپولوژی حاصل ضرب متریک پذیر است. فرض کنیم T توپولوژی فضای $\prod_{\beta\in J} X_\beta$ باشد. چون T یک توپولوژی حاصل ضرب است پس مجموعه $\{U_1\times U_2\times \cdots \mid U_i\in T_i\}$ که T_i توپولوژی فضای X_i است، پایه برای T است.

همچنین T توپولوژی حاصل ضرب است پس هر x_i را بصورت $B_d(x,r)$ در نظر می گیریم که d متری از $X_\alpha\times X_\alpha \to \mathbb{R}$ می باشد، $r\in\mathbb{R}^+$ که $B_d(x,r)$ گوی فضای باز می باشد پس توپولوژی تک تک X_α ها باید حاصل از پایه تمام گوی ها در X_α باشد $\Leftarrow$ به ازای هر $\alpha\in J$ ، X_α متریک پذیر است

سوال 2) فضای (X,T) را در نظر می‌گیریم که این فضا T_0 است حال فضای شرپینسکی (S, T_S) را در نظر می‌گیریم که در آن

$S=\{0,1\}$ ، $T_S=\{\phi, S, \{1\}\}$

حال تابع زیر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f: X \longrightarrow (S_x)_{x\in X} \qquad \forall x\in X \quad S_x = S$$

که ضابطه‌ی آن به این شکل است:

$f(x)=e_x \longrightarrow$ یعنی در جایگاه x ام 1 و در بقیه جاها 0 است.

به وضوح این یک تابع یک به یک است.

N را یک باز در $(S_x)_{x\in X}$ در نظر می‌گیریم پس داریم:

$$(U_x)_{x\in X}\subset N$$

به طوری که U_x یک باز در T_S است یعنی یا ϕ است یا $\{1\}$ است و یا $\{0,1\}$

که در هر کدام از این حالت‌ها $f^{-1}(N)$ به صورت ϕ یا X در می‌آید پس باز هستند.

پس f پیوسته است.

حال $f^{-1}: Imf \to X$ را در نظر می‌گیریم، $Imf=\{e_x | x\in X\}$

که هر تک عضوی در آن باز است زیرا آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$e_x = (S_i)_{i\in X}\cap (A_i)_{i\in X}$$

که در آن A_i ها به صورت رو به رو هستند:

$i=x \qquad A_i=\{1\}$

$i\neq x \qquad A_i=\{0,1\}$

پس e_x در Imf باز است پس Imf گسسته است، پس f^{-1} نیز پیوسته است

(زیرا می‌دانیم اگر در تابع $f: X\to Y$ ، X گسسته باشد آنگاه f پیوسته است)

پس می‌توان گفت فضای توپولوژیک (X,τ) را می‌توان در حاصلضربی از فضای شرپینسکی نشاند.

Subject: Year: Month: Day:

-۳

می‌خواهیم یک نگاشت از $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ به P بسازیم دنباله‌ای از اعداد گویای $Q=\{q_n : n\in \mathbb{N}\}$ را در نظر بگیرید. دنباله‌ای از مجموعه‌های باز $\langle I_s : s\in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\rangle$ [$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$: دنباله‌ای متناهی از اعضای $\mathbb{N}$ است] را می‌سازیم به طوری که شرایط زیر برای آن برقرار باشد

1- $I_{\langle\rangle}=\mathbb{R}$ و برای $s\neq\langle\rangle$ (دنباله‌ای ناتهی) هر I_s بازه‌ی بازی در $\mathbb{R}$ است که ابتدا و انتهای بازه اعداد گویا هستند

۲- برای هر $s\in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ و $n\in \mathbb{N}$ ، $I_{s^\frown n}\subseteq I_s$. [$I_{s^\frown n}$ دنباله‌ای را نشان می‌دهد که با s شروع می‌شود]

۳- انتهای بازه‌ی $I_{s^\frown n}$ با ابتدای بازی $I_{s^\frown n+1}$ برابر است.

۴- $\{I_{s^\frown n} : n\in \mathbb{N}\}$ کل I_s را می‌پوشانند به جز نقاط سر و ته بازه

۵- طول I_s کمتر از $\frac{1}{|s|}$ برای $s\neq\langle\rangle$ می‌باشد [$|s|$: طول s]

۶ و n امین عدد گویای q_n انتهای بازه‌ی I_t هست برای $t<n+1$

تابع $f:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to P$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم حذف کنیم

Subject: .... Year: .... Month: .... Day: ....

$m \in N$ داده شده باشد مجموعه $\bigcap_{n \in N} I_n$ باید از یک عدد تنها تشکیل

شده باشد. این مجموعه ناتهی است زیرا $\overline{I_{n+1}} \subseteq I_n$ این

مجموعه تنها یک عضو دارد چون قطر آنها (I_n ها) به سمت صفر میل

می‌کند. بنابراین می‌توانیم f را به صورت $\{f(n)\} = \bigcap_{n \in N} I_n$ تعریف

کنیم. تابع f یک به یک است چون اگر دو t منحصر بفرد باشند

آنگاه I_s و I_t اشتراک تهی دارند

از آنجا که برای هر $u \in p$ و $n \in N$ وجود دارد s ای با طول n با $u \in I_s$.

این تابع همسانریختی است زیرا $f([s]) = I_s \cap p$، و مجموعه های به

شکل $I_s \cap p$ پایه‌ای برای p تشکیل می‌دهند.

سوال ۴) فضای توپولوژیک زیر را بروی $\mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم:

$$\tau_{\mathbb{Z}} = \{A_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \mathbb{Z} \cup \emptyset$$

به طوری که در آن داریم:

$$A_i = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < i\}$$

$\tau_{\mathbb{Z}}$ یک توپولوژی است زیرا $\emptyset$ و $\mathbb{Z}$ را شامل است و اشتراک هر دو عضو آن عضو آن است:

$$A_i \cap A_j = A_{\min\{i,j\}}$$

و اجتماع هر گردایه از A_i ها نیز به صورت یک A_j است پس در $\tau_{\mathbb{Z}}$ است.

حال نشان می‌دهیم فضای توپولوژیک $(\mathbb{Z}, \tau_{\mathbb{Z}})$ همگن است:

پس باید نشان دهیم به ازای هر دو نقطه x، x'، همسانریختی $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ وجود دارد به طوری که $h(x) = x'$

دو نقطه‌ی دلخواه x و x' را در نظر می‌گیریم. چون این دو نقطه در $\mathbb{Z}$ هستند پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\exists y \in \mathbb{Z} \quad s.t. \quad x' = x + y$$

حال تابع h را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$h: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto x + y = x'$$

به وضوح $h(x) = x'$ حال باید نشان دهیم h همسانریخت است.

به وضوح h یک تابع یک به یک و پوشا است تنها باید نشان دهیم h و h^{-1} پیوسته هستند.

باز A_i را در نظر می‌گیریم، داریم: $h(A_i) = A_{i+y}$ که A_{i+y} نیز باز است

پس نشان دادیم h^{-1} پیوسته است.

حال باز A_i را در مقصد در نظر می‌گیریم، داریم $h^{-1}(A_i) = A_{i-y}$ که A_{i-y} نیز باز است

پس نشان دادیم که h نیز پیوسته است

پس فضای توپولوژیک $(\mathbb{Z}, \tau_{\mathbb{Z}})$ همگن است.

حال باید نشان دهیم این فضا T_0 است اما T_1 نیست.

به ازای هر دو عدد $n, n' \in \mathbb{Z}$ داریم:

فرض کنید $n < n'$، پس A_{n+1} بازی است شامل n که در آن n' نیست.

پس فضا T_0 است.

ولی این فضا T_1 نیست چون اگر دو عدد $n, n' \in \mathbb{Z}$ را در نظر بگیریم و فرض کنید $n < n'$، هر باز شامل n'، شامل n نیز است. زیرا هر باز شامل n' به صورت A_i است که $i \geq n'+1$ پس $i \geq n+1$ نیز است پس A_i شامل n نیز است، پس T_1 نیست.

Scanned with CamScanner