باسمه تعالی

تمرینهای توپولوژی (۴)

۱- X را فضای توپولوژیک، و $X \times X$ را با توپولوژی حاصل‌ضربی بگیرید. نشان دهید زیرمجموعهٔ $\Delta(X^2) = \{(x,x) : x \in X\}$ از $X \times X$ –که قُطر X^2 خوانده می‌شود– بسته است اگر و تنها اگر X هوسدرف باشد. نشان دهید $\Delta(X^2)$ باز است اگر و تنها اگر X گسسته باشد.

۲- فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک، و $f : X \longrightarrow Y$ و $g : X \longrightarrow Y$ تابعهای پیوسته باشند. نشان دهید اگر Y هوسدرف باشد، $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ زیرمجموعه‌ای بسته از X است.

۳- فرض کنید X فضای توپولوژیک و $(Y, \preccurlyeq)$ مجموعه‌ای کلاً مرتب باشد. Y را با توپولوژی ترتیبی در نظر بگیرید و فرض کنید تابعهای $f : X \longrightarrow Y$ و $g : X \longrightarrow Y$ در نقطهٔ x_0 از X پیوسته باشند. نشان دهید تابعهای $f \vee g : X \longrightarrow Y$ و $f \wedge g : X \longrightarrow Y$ با دستورهای $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$ و $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$ در x_0 پیوسته‌اند.

۴- $\mathbb{R}$ را با توپولوژی اقلیدسی و $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ را زیرفضای $\mathbb{R}$ بگیرید. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ و $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times$ را با توپولوژی حاصل‌ضربی در نظر بگیرید. نشان دهید تابعهای جمع و تفریق و ضرب از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$، و تابع تقسیم از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times$ به $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

۵- فرض کنیم (Y, d) فضای متری باشد. اگر B زیرمجموعه‌ای ناتهی از Y باشد، $\sup\{d(b, b') : b, b' \in B\}$ را **قطر زیرمجموعهٔ** B می‌نامیم و آن را با $D(B)$ نشان می‌دهیم. اگر X فضای توپولوژیک، x نقطه‌ای در X، و $f : X \longrightarrow Y$ تابع باشد، $\inf\{D(f(N)) : N \in \mathcal{N}_x\}$ را **نوسان** f در x می‌نامیم و آن را با $\omega_f(x)$ نشان می‌دهیم.

فضای توپولوژیک X، فضای متری (Y, d) با توپولوژی متر d، و تابع $f : X \longrightarrow Y$ در نظر بگیرید. نشان دهید

(آ) $f : X \longrightarrow Y$ در نقطهٔ x پیوسته است اگر و تنها اگر $\omega_f(x) = 0$.

(ب) به ازای هر عدد حقیقیِ b، $\{x \in X : \omega_f(x) < b\}$ زیرمجموعه‌ای باز از X است. نتیجه بگیرید مجموعهٔ نقاط پیوستگی f زیرمجموعه‌ای G_δ – جی دلتا یعنی اشتراکی شمارا از زیرمجموعه‌های باز – از X است. همچنین مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی f زیرمجموعه‌ای F_σ – اِف سیگما یعنی اجتماعی شمارا از زیرمجموعه‌های بسته – از X است.

(پ) $\mathbb{R}$ را با توپولوژی اقلیدسی در نظر بگیرید و نشان دهید تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ای نیست که مجموعهٔ نقاط پیوستگی‌اش $\mathbb{Q}$ باشد. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ای مثال بزنید که مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی‌اش $\mathbb{Q}$ باشد.