باسمه تعالی

تمرینهای توپولوژی **(۲)**

۱- فرض کنید $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح باشد. برای هر دو عضو a و d از $\mathbb{Z}$ قرار می‌دهیم $[a]_d = \{a + nd : n \in \mathbb{Z}\}$. نشان دهید

$$\mathcal{B} = \{[a]_d \cap \mathbb{Z} : \ (a, d) = ۱\}$$

پایهٔ یک توپولوژی بر $\mathbb{Z}$ است. آیا این توپولوژی هوسدرف است؟

۲- فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ را اَلیکساندرُف گوییم هرگاه $\mathcal{T}$ نسبت به اشتراک بسته باشد؛ به عبارت دیگر، برای هر زیرمجموعهٔ $\mathcal{A}$ از $\mathcal{T}$ داشته باشیم $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

(آ) نشان دهید هر فضای توپولوژیک متناهی اَلیکساندرف است.

(ب) ثابت کنید فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ اَلیکساندرُف است اگر و تنها اگر $\mathcal{T}$ دارای پایهٔ کمین باشد، یعنی پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ که هر پایهٔ $\mathcal{T}$ شامل آن است.

(پ) نشان دهید تعداد توپولوژیها بر مجموعهٔ nعضوی کمتر یا مساوی $۲^{n(n-۱)}$ است.

۳- فرض کنیم $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک باشد. عملگرهای $\alpha: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ و $\beta: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ را برای هر زیرمجموعهٔ A از X به صورت $\alpha(A) = A^{-\circ}$ و $\beta(A) = A^{\circ -}$ تعریف می‌کنیم.

(آ) ثابت کنید $\alpha^۲ = \alpha$ و $\beta^۲ = \beta$.

(ب) نشان دهید اگر U و V اعضایی جدا از هم از $\mathcal{T}$ باشند، $\alpha(U)$ و $\alpha(V)$ نیز چنین‌اند.

(پ) (مسألهٔ کوراتُفسکی) فرض کنید A زیرمجموعه‌ای دلخواه از X باشد. نشان دهید اگر به طور متوالی از A بستار، یا متمم نسبت به X بگیریم حداکثر ۱۴ زیرمجموعه از X به دست می‌آید. برای $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی، زیرمجموعه‌ای مثال بزنید که از آن دقیقاً ۱۴ زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ به دست آید.

۴- نشان دهید اگر در فضای توپولوژیک دلخواه $(X, \mathcal{T})$ فقط مرز زیرمجموعه‌های X را بشناسیم، توپولوژی $\mathcal{T}$ معلوم می‌شود.