9612037 مریم علی پور حاجی آقا

تمرین اول: فضای توپولوژیک و غیرمتناهی (X,τ) و دو زیرمجموعه غیرتهی K و A از X با فرض اینکه $A\subset K$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که B و C دو زیرمجموعه بسته‌ی فضای (K,τ_K) باشند و داشته باشیم:

$$A\subseteq B\cup C \quad , \quad A\cap C\neq\phi \quad , \quad A\cap B\neq\phi$$

ثابت کنید اگر A همبند باشد آنگاه $A\cap B\cap C\neq\phi$

اثبات:

با برهان خلف مسئله را اثبات می‌کنیم. از آن جا که $A\subseteq B\cup C$، داریم:

$$A=A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

حال بنا به فرض خلف داریم:

$$(A\cap B)\cap(A\cap C)=A\cap B\cap C=\phi$$

اما: $A\cap B\neq\phi$, $A\cap C\neq\phi$

حال کافی است نشان دهیم که $(A\cap B)$ و $(A\cap C)$ در توپولوژی زیرفضای A بسته‌اند. زیرا در اینصورت $(A\cap B)$ و $(A\cap C)$ یک ناهمبندی برای A خواهند بود که با همبند بودن A در تناقض است.

حال برای اینکه اثبات کنیم $(A\cap B)$ و $(A\cap C)$ در توپولوژی زیرفضای A بسته‌اند داریم: طبق فرض می‌دانیم B و C در (K,τ_K) بسته‌اند. لذا مجموعه‌های بسته B_1 و C_1 در (X,τ) وجود دارند، به طوری که $B=B_1\cap K$ و $C=C_1\cap K$، که می‌توان نتیجه گرفت:

$$A\cap B=A\cap B_1 \quad , \quad A\cap C=A\cap C_1 \quad (\text{زیرا } A\subset K)$$

پس در نتیجه چون B_1 و C_1 در (X,τ) بسته‌اند پس $A\cap B=A\cap B_1$ و $A\cap C_1=A\cap C$ در A بسته‌اند. پس چون $A\cap B$ و $A\cap C$ در A بسته‌اند و $(A\cap B)\cap(A\cap C)=\phi$ طبق فرض خلف پس A ناهمبند است، که این تناقض است با همبند بودن A

پس فرض خلف باطل است و $A\cap B\cap C\neq\phi$

s.a.m