

۱- (آ) فرض کنید X و Y و Z فضاهای توپولوژیک، $p : X \rightarrow Y$ نگاشتی خارج قسمتی، و $g : Y \rightarrow Z$ و $h : X \rightarrow Z$ تابعهایی پیوسته باشند چنان که $h = g \circ p$. نشان دهید g خارج قسمتی است اگر و تنها اگر h خارج قسمتی باشد.
(ب) نشان دهید هر خارج قسمت فضای گسسته، فضایی گسسته است.
(پ) آیا هر فضای توپولوژیک، خارج قسمت فضایی هوسدرف است؟

۲- (آ) فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک و $f : X \rightarrow Y$ تابع باشد. f را **نگاشت باز** می نامیم اگر f هر زیرمجموعه باز از X را به زیرمجموعه‌ای باز از Y ببرد. f را **نگاشت بسته** می نامیم اگر f هر زیرمجموعه بسته از X را به زیرمجموعه‌ای بسته از Y ببرد. تابع f ممکن است پیوسته باشد یا نباشد، باز باشد یا نباشد، بسته باشد یا نباشد. برای هر ۸ حالت مثال بزنید.
(ب) نشان دهید هر نگاشت پوشا و باز و پیوسته، خارج قسمتی است. نشان دهید هر نگاشت پوشا و بسته و پیوسته، خارج قسمتی است. نگاشتی خارج قسمتی مثال بزنید که نه باز باشد و نه بسته.

۳- فرض کنیم X فضای توپولوژیک باشد. تابع پیوسته $r : X \rightarrow X$ را **تنجش (retraction)** گوئیم اگر $r \circ r = r$. زیرفضای A از X را **تنجیده (retract of X)** گوئیم اگر بُرد تنجشی از X باشد. ثابت کنید
(آ) زیرفضای A تنجیده X است اگر و تنها اگر تابع شمول $i : A \rightarrow X$ وارون چپ پیوسته داشته باشد.
(ب) A زیرفضای تنجیده X است اگر و تنها اگر برای هر فضای توپولوژیک Y ، تابع پیوسته دلخواه $f : A \rightarrow Y$ توسعه‌ی پیوسته به X داشته باشد. (تابعی پیوسته چون $g : X \rightarrow Y$ وجود داشته باشد که $f = g|_A$).
(پ) هر زیرفضای تنجیده یک فضا، خارج قسمت آن فضا است.
(ت) اگر X هوسدرف باشد همه زیرفضاهای تنجیده‌اش بسته‌اند.