مریم علی‌پورحاجی آقا 9612037 | سحیا پاشاپور 9812009 | مریم جمالی 9712009

سوال ۱) با توجه به قضیه 17 و اثبات آن در تمرین 2 می‌دانیم که بین هر چسبندگی و توپولوژی تناظر دوسویی وجود دارد پس متناظر با چسبندگی δ_1 و چسبندگی δ_2 توپولوژی τ_1 و τ_2 وجود دارند. از آنجایی که اشتراک نامتناهی تا توپولوژی همچنان توپولوژی است پس اشتراک $\delta_1 \cap \delta_2$ نیز همچنان چسبندگی است

اما اجتماع دو توپولوژی لزوماً توپولوژی نیست پس اجتماع $\delta_1 \cup \delta_2$ لزوماً چسبندگی نیست.

مثال نقض:

$X = \{1, 2, 3\}$

$\tau_1 = \{\phi, X, \{1\}\}$

$\tau_2 = \{\phi, X, \{2\}\}$

اما $\tau_1 \cup \tau_2 = \{\phi, X, \{1\}, \{2\}\}$ توپولوژی نیست ✗

اجتماع تک عضوی‌ها در توپولوژی نیست.

پس چسبندگی متناظر با τ_1 و τ_2 مثال بالا که δ_1, δ_2 است داریم: اجتماع $\delta_1 \cup \delta_2$ برای

چسبندگی نیست.

سوال 2) تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f: D \to f(D)$$

$$\underset{\text{از تعریف چسبیدگی}}{S_i \longmapsto \{\underset{P(X)}{A_i} \mid \bar{A_i} = A_i\}}$$

خوش تعریف و یک به یک:

$$f(S_i) = f(S_j) \Longleftrightarrow S_i = S_j$$

می‌دانیم در تعریف چسبیدگی $\bar{A_i}$ یعنی مجموعه نقاطی که به A_i چسبیده‌اند پس اگر $S_i = S_j$ آن گاه $f(S_i)$ و $f(S_j)$ با هم برابرند و برعکس پس به وضوح تابع f یک به یک و خوش تعریف است.

تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g: I \to g(I)$$

$$T_i \longmapsto \{A_i^c \in P(X) \mid A_i \in T_i\}$$ (به وضوح یک به یک و خوش تعریف است)

می‌دانیم $g(I)$ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های $P(X)$ است که خاصیت‌های زیر را دارد:

(I) اشتراک هر گردایه‌ای از اعضای $g(I)$ عضو مجموعه است

(II) اجتماع متناهی تا گردایه از اعضای $g(I)$ عضو مجموعه است.

چون $f(D)$ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های $P(X)$ است. پس اگر نشان دهیم $f(D)$ دارای دو خاصیت I و II است آن گاه $f(D)$ با $g(I)$ برابر است پس یک تناظر یک به یک بین $f(D)$ و $g(I)$ وجود دارد.

$$f(S_1)=\{A_1\in P(X) \mid \bar{A}_1=A_1\}$$

تعریف چسبیدگی S_1

$$A_1, A_2\in f(S_1) \Rightarrow \bar{A}_1=A_1 ,\ \bar{A}_2=A_2$$

حکم: $A_1\cup A_2=\overline{A_1\cup A_2}$

$$x\,S\,A_1\cup A_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x\,S\,A_1 \\ \text{L} \\ x\,S\,A_2\end{array}\right. \xrightarrow[\bar{A}_2=A_2]{\bar{A}_1=A_1} \left\{\begin{array}{l} x\in A_1 \\ \text{L} \\ x\in A_2\end{array}\right. \Rightarrow x\in A_1\cup A_2$$

$$\Rightarrow \overline{A_1\cup A_2}=A_1\cup A_2$$

پس اجتماع هر دو عضو $f(S_1)$ همچنان عضو $f(S_1)$ است (خاصیت II)

$$\forall_{\alpha\in I}\quad A_\alpha\in f(S_1) \Rightarrow \forall_{\alpha\in I}\quad \bar{A}_\alpha=A_\alpha$$

حکم: $\overline{\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha}=\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$

$$x\,S\,(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) \Rightarrow \forall_{\alpha\in I}\quad x\,S\,A_\alpha \xRightarrow{\bar{A}_\alpha=A} \forall_{\alpha\in I}\quad x\in A_\alpha$$

$$\Rightarrow x\in \bigcap A_\alpha \Rightarrow \overline{\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha}=\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$$

پس اشتراک هر گردایه از اعضای $f(S_1)$ همچنان عضو $f(S_1)$ است (خاصیت I)

پس تابعی یک به یک و پوشا مثل h از $f(D)$ به $g(I)$ موجود است.

حال ψ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi = f\circ h\circ g^{-1}$$

چون f، h و g یک به یک و پوشا است پس ψ یک به یک و پوشا است.

سوال 3) ① مجموعه $\emptyset_{\leq x}=\{y\in\emptyset \mid y\leq x\}=\emptyset$ پس x ، sup مجموعه‌ی $\emptyset_{\leq x}$
نیست در نتیجه $x\bar{S}\emptyset$

② اگر $x\in A$ ⇐ xSA

حل: اگر $x\in A$ در نتیجه x ، sup مجموعه‌ی $A_{\leq x}=\{y\in A \mid y\leq x\}$
هست زیرا $x\in A_{\leq x}$ پس در نتیجه xSB .

③ اگر $xS(A\cup B)$ ⇐ xSA یا xSB

حل: اگر $xS(A\cup B)$ در نتیجه x ، sup مجموعه‌ی $(A\cup B)_{\leq x}=\{y\in A\cup B \mid y\leq x\}$
می‌دانیم $(A\cup B)_{\leq x}=(A_{\leq x})\cup(B_{\leq x})$
پس چون x ، sup مجموعه‌ی $(A\cup B)_{\leq x}$ در نتیجه x ، sup مجموعه‌ی
$A_{\leq x}$ یا $B_{\leq x}$ است یعنی xSA یا xSB .

④ اگر xSA و برای هر عضو a در A داشته باشیم aSB ⇐ xSB

حل: اگر xSA در نتیجه x ، sup مجموعه‌ی $A_{\leq x}=\{y\in A \mid y\leq x\}$
و برای هر عضو a در A داریم: a ، sup مجموعه $B_{\leq a}=\{y\in B \mid y\leq a\}$
به ویژه برای هر $a\in A_{\leq x}$ نیز a ، sup مجموعه‌ی $B_{\leq a}=\{y\in B \mid y\leq a\}$
است . حال می‌خواهیم نشان دهیم x ، sup مجموعه‌ی $B_{\leq x}=\{y\in B \mid y\leq x\}$
فرض کنیم چنین نباشد یعنی وجود دارد α ای که کران بالای $B_{\leq x}$ و $\alpha \not\geq x$
(یعنی x کوچکترین کران بالای $B_{\leq x}$ نیست)

یعنی هر عضوش مثل $b \in B_{\preccurlyeq x}$ ، $b \preccurlyeq \alpha$.

می‌دانیم $\forall a \in A_{\preccurlyeq x}$ داریم: $B_{\preccurlyeq a} \subseteq B_{\preccurlyeq x}$

پس چون α کران بالای $B_{\preccurlyeq x}$ پس کران بالای $B_{\preccurlyeq a}$ نیز هست. (برای هر $a \in A_x$)

حال چون برای هر $a \in A_{\preccurlyeq x}$ داریم ، $a \mathcal{S} B$ یعنی a ، sup مجموعه‌ی $B_{\preccurlyeq a}$

پس $a \preccurlyeq \alpha$ برای هر a عضو $A_{\preccurlyeq x}$.

پس α کران بالای برای $A_{\preccurlyeq x}$ و از طرفی می‌دانیم x ، sup مجموعه‌ی $A_{\preccurlyeq x}$ است. پس $x \preccurlyeq \alpha$ ، که این تناقض است پس x ، sup مجموعه‌ی $B_{\preccurlyeq x}$ است که یعنی $x \mathcal{S} B$.

سوال ۴) فضای (X, τ) با توپولوژی گسسته را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم در این توپولوژی هر تک عضوی باز است. یعنی $\forall a \in X$ داریم $\{a\} \in \tau$

حال پایه‌ای مثل B برای τ تعریف می‌کنیم، به طوری که B شامل تمام تک عضوی‌ها است. به وضوح این یک پایه‌ای برای توپولوژی گسسته روی فضای X است.

حال این مجموعه B را یک مجموعه مرتب در نظر می‌گیریم به طوری که فاصله‌ی هر دو عضو آن عدد 1 است.
حال به این شکل فاصله‌ی تک عضوی $\{a_1\}$ از $\{a_2\}$ برابر 1 و فاصله‌ی $\{a_2\}$ از $\{a_3\}$ برابر 1 است. پس فاصله‌ی $\{a_1\}$ از $\{a_3\}$ برابر 2 است.
بدین شکل بازه‌ی $(\{a_1\}, \{a_3\})$ تنها شامل $\{a_2\}$ است.
حال می‌دانیم پایه‌ی توپولوژی ترتیبی روی X به صورت بازه‌های باز است که می‌دانیم طبق تعریف این ترتیب و این بازه‌ها، چون بازه‌ی $(\{a_1\}, \{a_3\})$ همان تک عضوی $\{a_2\}$ است
پس در کل پایه‌ی توپولوژی ترتیبی، شامل تک عضوی‌ها نیز هستند. پس توپولوژی ترتیبی حاصل شامل $P(X)$ است. پس توپولوژی ترتیبی حاصل از این ترتیب دقیقاً برابر $P(X)$ است. (زیرا هر توپولوژی زیر مجموعه‌ای از $P(X)$ است)
پس توپولوژی ترتیبی حاصل از پایه‌ی تعریف شده همان توپولوژی گسسته است

$$\Downarrow$$

توپولوژی گسسته ترتیب‌پذیر است.