

۱- فضای توپولوژیک  $X$  و دو زیرمجموعه فشردۀ  $A$  و  $B$  از آن را مثال بزنید چنان که  $A \cap B$  فشردۀ نباشد. (توجه کنید که  $X$  نباید هوسدرف باشد).

۲- نشان دهید هر فضای توپولوژیک فشردۀ و نامتناهی دارای زیرمجموعه‌ای شماراست که بسته نیست.

۳- تمام فضاهای توپولوژیک را بیابید که همهٔ زیرمجموعه‌هایش فشردۀ است.

۴- فرض کنید  $X$  فضایی توپولوژیک و  $A$  زیرمجموعه‌ای فشردۀ از آن باشد. نشان دهید اشتراک همهٔ زیرمجموعه‌های بازِ شامل  $A$  فشردۀ است. نشان دهید اشتراک تمام زیرمجموعه‌های بستهٔ شامل  $A$  لزوماً فشردۀ نیست.

۵- زیرمجموعه‌های فشردۀ در یک فضای توپولوژیک، از بسیاری جهات شبیه زیرمجموعه‌های تک نقطه‌ای هستند.  
(آ) فرض کنید  $X$  یک فضای توپولوژیک هوسدرف، و  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی فشردۀ و جدا از هم از آن باشند. نشان دهید زیرمجموعه‌های باز و جدا از هم  $U$  و  $V$  از  $X$  وجود دارد چنان که  $U \subseteq A$  و  $B \subseteq V$ . (فقط بخش (ب) را حل کنید).  
(ب) فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو فضای توپولوژیک،  $A$  زیرمجموعه‌ای فشردۀ از  $X$ ، و  $B$  زیرمجموعه‌ای فشردۀ از  $Y$  باشد. نشان دهید اگر  $W$  زیرمجموعه‌ای باز از  $X \times Y$  (با توپولوژی حاصل‌ضربی) و شامل  $A \times B$  باشد، زیرمجموعه‌های باز  $U$  از  $X$  و  $V$  از  $Y$  وجود دارد چنان که  $A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$ .

۶- فضای توپولوژیک  $X$  را فشردۀ بیشین می‌نامند اگر  $X$  با هر توپولوژی اکیداً ظریفتر، فشردۀ نباشد. فضای توپولوژیک  $X$  را هوسدرف کمین می‌نامند اگر  $X$  با هر توپولوژی اکیداً درشت‌تر، هوسدرف نباشد.  
(آ) نشان دهید هر فضای توپولوژیک هوسدرف و فشردۀ، فشردۀ بیشین و هوسدرف کمین است.  
(ب) نشان دهید هر فضای توپولوژیک فشردۀ بیشین، فضایی  $T_1$  است.  
(پ) ثابت کنید فضای توپولوژیک  $X$  فشردۀ بیشین است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ فشردۀ  $X$  بسته باشد.