

سوال 4) ابتدا نشان می دهیم فضای  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$  همبند میسر است.  
 فرض کنیم  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$  و  $y_1, y_2$  گسسته است. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می کنیم  $y_2$  گسسته است. حال می خواهیم نشان دهیم از نقطه  $(x_1, y_2)$  به نقطه ای دلخواه از  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$  مثل  $(x_1, y)$  میسر وجود دارد. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می کنیم  $x_2$  گسسته است.  
 ابتدا نشان می دهیم از نقطه  $(x_1, y_2)$  به نقطه  $(x_1, y)$  میسر وجود دارد، که در این  $y$  عددی گسسته و مخالف  $x_1, x_2, y_2$  است. پس داریم:

$$f_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$$

$$f_1(\lambda) = (x_1, \lambda y + (1-\lambda)y_2)$$

به وضوح  $f_1$  تابعی پیوسته است و  $f_1(0) = (x_1, y_2)$  و  $f_1(1) = (x_1, y)$ ، پس از  $(x_1, y_2)$  به  $(x_1, y)$  میسر وجود دارد.

حال نشان می دهیم از  $(x_1, y)$  به  $(x, y)$  میسر وجود دارد. پس داریم:  $f_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$

$$f_2(\lambda) = (\lambda x + (1-\lambda)x_1, y)$$

که به وضوح  $f_2$  تابعی پیوسته است و  $f_2(0) = (x_1, y)$  و  $f_2(1) = (x, y)$ ، پس از  $(x_1, y)$  به  $(x, y)$  میسر وجود دارد.

حال نشان می دهیم از  $(x, y)$  به  $(x, y_2)$  میسر وجود دارد. پس داریم:  $f_3: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$

$$f_3(\lambda) = (x, \lambda y_2 + (1-\lambda)y)$$

که به وضوح  $f_3$  تابعی پیوسته است و  $f_3(0) = (x, y)$  و  $f_3(1) = (x, y_2)$ ، پس از  $(x, y)$  به  $(x, y_2)$  میسر وجود دارد. پس با توجه به سه تابع  $f_1, f_2, f_3$

می توانیم نشان دهیم از  $(x_1, y_2)$  به  $(x, y_2)$  میسر وجود دارد.

حال اگر  $x_2$  گسسته بود مانند روش قبل نشان می دهیم از  $(x_1, y_2)$  میسر به  $(x_1, y)$  وجود دارد و از  $(x_1, y)$  میسر به  $(x, y)$  وجود دارد.

پس فضای  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$  همبند میسر است و متعلق مقصده ای می دانیم هر همبند میسر، همبند است پس  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$  همبند میسر باشد.