تمرین تحویلی سری هشت / مریم علیپور حاجی آقا - محیا پاشاپور - مریم جمالی

سوال ۱) فضای $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ را در نظر می‌گیریم. و توپولوژی زیر را بروی $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tau = \tau_{\text{اقلیدسی بروی } \mathbb{R}} \cup \{\mathbb{R}\cup\{+\infty\},\ \mathbb{R}\cup\{-\infty\},\ \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}\}$$

به وضوح τ یک توپولوژی بر روی $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ است.

حال دو زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ و $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ را در نظر می‌گیریم. این دو زیرمجموعه فشرده است. زیرا اگر پوشش بازی $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ را بپوشاند، طبق تعریف توپولوژی آن پوشش باز شامل باز $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ یا $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ است.

یعنی اگر اجتماع U_α ها پوشش بازی برای $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ است پس داریم:

$$\mathbb{R}\cup\{+\infty\} \subseteq \bigcup U_\alpha$$

پس چون U_α ها $\{+\infty\}$ را می‌پوشانند و بازهایی که $\{+\infty\}$ را در این فضای توپولوژیک می‌پوشانند $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ و $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ است پس این پوشش شامل $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ یا $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ است.

پس در هر دو صورت $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ را می‌توان تنها با یک باز پوشاند که این یعنی $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ فشرده است.

به همین طریق می‌توان ثابت کرد $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ فشرده است.

اما می‌دانیم $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})\cap\{\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\}$ فشرده نیست.

SANAY
شرکت گروه توسعه سیستم سانای شرق
www.sanayco.ir

سوال 2) فرض می کنیم یک زیرمجموعه ی نامتناهی مانند A وجود دارد که نقطه ی حدی ندارد ، A بسته است چون $A' = \phi$ و $A = \bar{A}$ ، زیرمجموعه های بسته از فضاهای فشرده ، فشرده هستند پس A فشرده است ، اما هر نقطه در A ایزوله است یعنی یک پوشش نامتناهی از مجموعه های باز به ما می دهد که هیچ زیرپوشش متناهی ندارد که متناقض با فشرده بودن A است .

اثبات لم

حال یک زیرمجموعه ی نامتناهی شمارا از فضای فشرده را در نظر می گیریم با توجه به لم فوق (لم : در فضاهای فشرده تمام زیرمجموعه های نامتناهی یک نقطه ی حدی دارند) حتماً یک نقطه ی حدی دارد ، اگر شامل این نقطه ی حدی نباشد ، بسته نخواهد بود اما شمارا نامتناهی است. اگر شامل نقطه ی حدی خود باشد ، نقطه ی حدی را از آن جدا می کنیم و مجموعه ای که باقی می ماند بسته نیست اما همچنان شمارای نامتناهی است.

تهران - ونک - خیابان گاندی شمالی -کوچه شهید صانعی- شماره ۵۰ -واحد ۸
تلفن:۸۸۶۶۴۲۹۳ فاکس:۸۸۶۶۴۲۹۴ کد پستی: ۱۶۹۹۱۳۱۵۱

سوال 3) اگر فضای X هاسدورف باشد، آنگاه هر زیرمجموعه‌ی فشرده از X، بسته است.

پس برای اینکه هر زیرمجموعه‌ی X، فشرده باشد باید تمام زیرمجموعه‌های X، بسته باشند

پس باید X گسسته باشد و می‌دانیم فضای گسسته X، فشرده است اگر متناهی باشد.

پس هر زیرمجموعه از فضای هاسدورف X، فشرده است اگر X متناهی باشد.

حال اگر X هاسدورف نباشد را بررسی می‌کنیم:

ابتدا فضای نوتری را تعریف می‌کنیم: فضای X نوتری است اگر برای هر زنجیر از بازهای آن مثل $U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$ داشته باشیم $n_0 \in \mathbb{N}$ بطوریکه برای هر $n > n_0$، $U_n = U_{n_0}$

حال ادعا می‌کنیم، هر زیرمجموعه از فضای X فشرده است $\Longleftrightarrow$ X نوتری باشد

اگر X نوتری باشد و $A \subseteq X$، می‌خواهیم نشان دهیم A فشرده است.

$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ را یک پوشش باز برای A در نظر می‌گیریم. برای هر U_α وجود دارد باز V_α در X بطوریکه $U_\alpha = V_\alpha \cap A$ حال V_αها یک پوشش باز برای مجموعه‌ی باز $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ است

و حال زنجیر زیر را در نظر می‌گیریم: $V_1 \subseteq V_1 \cup V_2 \subseteq V_1 \cup V_2 \cup V_3 \subseteq \cdots$ و چون فضا نوتری است

پس n_0ای وجود دارد بطوریکه به ازای هر $n \geq n_0$، $\bigcup_{1 \leq \alpha \leq n} V_\alpha = \bigcup_{1 \leq \alpha \leq n_0} V_\alpha$، پس می‌توان $\bigcup V_\alpha$ها را با متناهی تا (n_0 تا) V_α پوشاند، پس نتیجه می‌گیریم A فشرده است.

پس نتیجه می‌گیریم اگر X نوتری باشد، آنگاه هر زیرمجموعه از فضای X فشرده است.

سوال ۴ - سری ۸ - قسمت اول . فرض کنیم $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ باشد که $\{\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\}$ پوشش باز برای

A باشد ، $\{C_{\alpha_1}, \dots, C_{\alpha_n}\}$ زیرپوشش متناهی برای A باشد

حال فرض کنیم $\{F_\beta : \beta \in J\}$ مجموعه های باز شامل A باشند می دانیم

$A \subseteq F_\beta \quad \forall \beta \in J \Rightarrow A \subseteq \bigcap_{\beta \in J} F_\beta$ در نتیجه برای مجموعه $\bigcap_{\beta \in J} F_\beta$ می توانیم

پوشش باز : $(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) \cup (\bigcup_{\beta \in J} F_\beta)$ در نظر بگیریم چون $\bigcup B_\alpha$ ، $\bigcup F_\beta$ باز هستند

پس $(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) \cup (\bigcup_{\beta \in J} F_\beta)$ باز است ، $A \subseteq \bigcap_{\beta \in J} F_\beta \subseteq (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) \cup (\bigcup_{\beta \in J} F_\beta)$

حال مجموعه $\{\bigcup_{i=1}^{n} C_{\alpha_i}\} \cup \{\underbrace{\bigcap F_\beta \setminus A}_{D}\}$ را در نظر می گیریم. می دانیم که

$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_{\alpha_i}$ پس می توانیم $\{\bigcup_{i=1}^{n} C_{\alpha_i} \cup D\}$ را یک زیرپوشش

متناهی برای $\bigcap_{\beta \in J} F_\beta$ در نظر بگیریم $\Rightarrow$ $\bigcap_{\beta \in J} F_\beta$ فشرده است.

مریم علیپور حاجی آقا 9612037 / محیا پاشاپور 9812009 / مریم جمالی 9712009

سوال ۶) ب) فرض کنیم فضای X ، T_1 نباشد، پس وجود دارد $x,y \in X$ به طوریکه به ازای هر باز حول x مثل U داشته باشیم $y \in U$.

حال فضای $X \setminus \{y\}$ را در نظر می‌گیریم. حال یک پوشش مثل U_α ها برای $X \setminus \{y\}$ در نظر می‌گیریم، یعنی

$X \setminus \{y\} \subseteq \bigcup U_\alpha$

پس U_α ها نقطه‌ی x را نیز می‌پوشانند اما از طرفی چون هر باز حول x، شامل y نیز است پس این پوشش فضای X را می‌پوشاند.

یعنی داریم: $X = \bigcup U_\alpha$ و چون X فشرده است پس زیرپوشش متناهی مثل $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ موجود دارد که X را بپوشاند، یعنی: $X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$

پس می‌توان گفت U_1 تا U_n، $X \setminus \{y\}$ را نیز می‌پوشانند.

یعنی $X \setminus \{y\} \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$

حال چون پوشش U_α ها دلخواه بود، پس می‌توان گفت $X \setminus \{y\}$ نیز فشرده است، که این خلاف فرض است پس تناقض است.

پس فضای X، T_1 است.