باسمه تعالی

تمرینهای توپولوژی (۷)

۱- فرض کنید X فضایی توپولوژیک، C زیرمجموعه‌ای همبند از آن، و A زیرمجموعه‌ای دلخواه از X باشد. نشان دهید اگر C شامل نقطه‌ای از A و نقطه‌ای از A' (متمم A در X) باشد، شامل نقطه‌ای از مرز A نیز هست.

۲- فرض کنید X فضایی توپولوژیک، و Y و Z زیرمجموعه‌های بستهٔ آن باشند. نشان دهید اگر $Y \cup Z$ و $Y \cap Z$ همبند باشند، Y و Z نیز همبندند.

۳- (آ) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک همبند، و Y زیرمجموعه‌ای همبند از X باشد. نشان دهید اگر $X \backslash Y = A|B$، زیرمجموعه‌های $Y \cup A$ و $Y \cup B$ از X همبندند.
(ب) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک همبند باشد. نقطهٔ x در X را **نقطهٔ بُرشی** X می‌نامند اگر $X \backslash \{x\}$ ناهمبند باشد. نشان دهید هرگاه x نقطهٔ برشی باشد، $\{x\}$ زیرمجموعه‌ای باز یا بسته از X است.
(پ) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک همبند باشد. نقطهٔ x در X را **نقطهٔ پراکندگی** X می‌نامند اگر $X \backslash \{x\}$ کلاً ناهمبند باشد. نشان دهید نقطهٔ پراکندگی در صورت وجود یکتاست. در واقع در صورت وجودِ نقطهٔ پراکندگی، نقطهٔ بُرشی دیگری وجود ندارد.

۴- فرض کنید X فضایی توپولوژیک و x نقطه‌ای در X باشد. نشان دهید شبه مؤلفهٔ شامل x، اشتراک تمام زیرمجموعه‌هایی از X است که بازبسته و شامل x باشند.

۵- $\mathbb{R}$ و بازهٔ $\mathbb{I} = [۰,۱]$ از آن را با ترتیب معمولی در نظر بگیرید. به دو طریق بر $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ توپولوژی تعریف کنید. نخست این که $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ را با ترتیب قاموسی بگیرید و به آن توپولوژی ترتیبی دهید. دیگر این که $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ را با توپولوژی ترتیب قاموسی بگیرید و $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ را زیرفضایش بگیرید. مؤلفه‌ها، مؤلفه‌های راهی، و نقاط همبندی موضعی این دو فضا را به دست آورید.

۶- (آ) نشان دهید نگاشت خارج‌قسمتی فضای همبند موضعی را به فضای همبند موضعی می‌بَرد، ولی نگاشت پیوسته لزوماً این ویژگی را ندارد.
(ب) فرض کنید I مجموعه‌ای نمایه‌گذار و $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ گردایه‌ای از فضاهای توپولوژیک ناتهی باشد. نشان دهید $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ همبند موضعی است اگر و تنها اگر X_αها همه همبند موضعی و تقریباً همه (یعنی همه جز تعدادی متناهی) همبند باشند.