

سوال 5) فرض کنید فضای X ، T نباشد، پس وجود دارد $x \in X$ به طوری که برای هر باز حول x مثل U داشته باشیم $x \notin U$.

حال فضای $X \setminus \{x\}$ را در نظر می‌گیریم. حال یک پوشش مثل U_α ها برای $X \setminus \{x\}$ در نظر می‌گیریم، یعنی

$$X \setminus \{x\} \subseteq \bigcup U_\alpha$$

پس U_α ها نقطه‌ای x را نیز پوشش می‌دهند اما از طوری چون هر باز حول x شامل x نیز است پس این پوشش فضای X را می‌پوشاند.

یعنی داریم: $X = \bigcup U_\alpha$ و چون X متناهی است پس زیر پوشش متناهی مثل $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$

وجود دارد که X را پوشش دهد، یعنی: $X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$

پس می‌توان گفت U_1, U_2, \dots, U_n ، $X \setminus \{x\}$ را نیز پوشش دهد.

$$X \setminus \{x\} \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$$

حال چون پوشش U_α ها دلخواه بود، پس می‌توان گفت $X \setminus \{x\}$ نیز متناهی است. که این خلاف فرض است پس تناقض است.

پس فضای X ، T_1 است.