مریم علی‌پور حاجی آقا ۹۶۱۲۰۳۷
محیا پاشاپور ۹۸۱۲۰۰۹
مریم جمالی ۹۷۱۲۰۰۹

Subject: Date:

۱ـ فرض کنید $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح باشد. برای هر دو عضو a، d از $\mathbb{Z}$ قرار می‌دهیم $[a]_d = \{a+nd \mid n\in\mathbb{Z}\}$ نشان دهید $B=\{[a]_d \cap \mathbb{Z} \mid (a,d)=1\}$ پایهٔ یک توپولوژی بر $\mathbb{Z}$ است. آیا این توپولوژی هاسدورف است؟

برای اینکه نشان دهیم B یک پایهٔ توپولوژی بر $\mathbb{Z}$ است. ابتدا باید ثابت کنیم $\cup B = \mathbb{Z}$. (شرط ۱)

به ازای هر n, d, a عضو $\mathbb{Z}$ داریم $[a]_d = \underbrace{a}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{nd}_{\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$

پس $\{[a]_d \cap \mathbb{Z}\} = \{[a]_d\} \Leftarrow [a]_d \subseteq \mathbb{Z}$

اگر قرار دهیم $a=1$ ، $d=1$ در نتیجه داریم $(a,d)=(1,1)=1$

در نتیجه $1+(1)1=2$ $\quad 1+(0)1=1$ $\quad 1+(-1)1=0$ $\quad 1+(-2)1=-1$

پس داریم $[1]_1 = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\} = \mathbb{Z}$

پس $[1]_1$ کل اعضای $\mathbb{Z}$ را تشکیل می‌دهد. که عضوی از B هم هست

پس اجتماع این مجموعه با دیگر اعضای B کل $\mathbb{Z}$ را تشکیل می‌دهد پس داریم $\cup B = \mathbb{Z}$

حال اگر B_1 ، B_2 در B باشند و $x \in B_1 \cap B_2$ باید نشان دهیم

MICRO

Subject: Date:

B_3 ای در B هست چنانکه $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

فرض کنیم $B_1 \in B$, $B_2 \in B$ داریم:

$B_1 = \{a_1 + nd_1 \mid (a_1, d_1) = 1 \ , n \in \mathbb{Z}\}$

$B_2 = \{a_2 + nd_2 \mid (a_2, d_2) = 1 \ , n \in \mathbb{Z}\}$

هم چنین داریم $x \in B_1 \cap B_2$ است پس وجود دارد n_1

و n_2 عضوِ $\mathbb{Z}$ بطوریکه $x = a_1 + n_1 d_1 = a_2 + n_2 d_2$

فرض کنیم $[d_1, d_2] = t$ است. مجموعه B_3 را مجموعهٔ اعضای

مشترک B_1 , B_2 درنظر میگیریم دراین مجموعه فاصله بین اعداد

برابر کمم d_1 , d_2 است. $B_3 = \{a + nt \mid n \in \mathbb{Z}\}$

اولین عدد مشترک B_1 , B_2 که نسبت به t اول است را بیابیم اگر

درابر a قرار میدهیم دراین صورت داریم $(a, t) = 1$

پس B_3 عضوِ B بیابیم که $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ است وچون

B_3 شامل اعضای مشترک $B_1 \cap B_2$ است پس $x \in B_3$ درنهایت

داریم $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ پس هردو شرط پایه

MICRO®

Scanned with CamScanner

Subject: Date:

بودن B برای توپولوژی $\mathbb{Z}$ برقرار است پس B پایه برای توپولوژی بر $\mathbb{Z}$ است.

برای هر دو عدد x و y که $x \neq y$ است مجموعه‌های U_x و U_y در نظر می‌گیریم بطوریکه:
$U_x = \{x + nd \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$U_y = \{y + nd \mid n \in \mathbb{Z}\}$

که در این دو مجموعه d نخستین عدد اول بزرگتر از x و y است

پس به وضوح داریم $(x,d) = 1$ $(y,d) = 1$
(d در هر دو یکسان است)

چون فاصله بین اعضای هر مجموعه برابر d است و به ازای n برابر صفر x و y دو عدد مختلف هستند پس این دو مجموعه هیچ دو عضو مشترکی ندارند. در نتیجه $U_x \cap U_y = \varnothing$

به ازای هر $a \in U_x$ داریم: $N(a) = A$ s.t $a \in A$

که این $A \subseteq U_x$ است پس برای هر عضو U_y هم همین ویژگی برقرار است پس U_x و U_y هر دو باز هستند.

MICRO

Subject : Date :

$x \in U_x$, $y \in U_y$ به ازای $n=0$ داریم ، $U_x \cap U_y = \emptyset$

پس به ازای هر $x, y \in Z$ که $x \neq y$ زیرمجموعه های باز و جدا از هم

U_y ، U_x را می یابیم بطوریکه $x \in U_x$ ، $y \in U_y$

پس این توپولوژی هوسدورف است.

۲- فضای توپولوژیک (X, T) را الکساندروف گوییم هرگاه T نسبت به اشتراک بسته باشد. برای هر زیرمجموعه A از T داشته باشیم $\cap A \in T$

آ) نشان دهید هر فضای توپولوژیک متناهی الکساندروف است.

در هر فضای توپولوژیک (X, T) اگر A زیرگردایه ای متناهی از

T باشد یعنی $A \subseteq T$ در این صورت $\cap A \in T$ (خاصیت توپولوژی)

طبق قضیه ای می دانیم اگر مجموعه X متناهی باشد توپولوژی T بر X

نیز متناهی خواهد بود (برای نشان دادن متناهی بودن T می توان

از قسمت ب همین سؤال استفاده کرد چون X متناهی است پس

$n < \infty$ در نتیجه $|T| < \infty$ است $2^{n(n-1)}$)

چون T متناهی است به ازای هر زیرگردایه A' از T ، A' نیز

متناهی خواهد بود پس طبق خاصیت مطرح شده در توپولوژی

$\cap A$ عضوی از T خواهد بود. پس هر فضای توپولوژیک

متناهی الکساندروف است.

ب) ثابت کنید فضای توپولوژیک (X,T) الکساندروف است اگر و تنها اگر T دارای پایهٔ کمین باشد یعنی پایه‌ای چون B که هر پایهٔ T شامل آن است.

اثبات $\Leftarrow$) لم ۱: ابتدا ثابت می‌کنیم اگر در فضای توپولوژیک (X,T)

بازای هر نقطهٔ $x\in X$ یک باز مینیمال حول x مثل S_x وجود

داشته باشد، آنگاه توپولوژی الکساندروف است.

می‌خواهیم ثابت کنیم (X,T) الکساندروف است پس باید ثابت کنیم

اشتراک هر گردایه‌ای از بازها باز است. یعنی نشان می‌دهیم:

$V_\alpha \subseteq T$ ، $\alpha\in I$ پس $U=\bigcap_{\alpha\in I} V_\alpha \in T$ که V_α ها همگی باز هستند.

اگر $U=\emptyset$ آنگاه اشتراک بازها، باز می‌شود چون $\emptyset$ باز است و مسئله حل است.

اگر $U\neq\emptyset$ پس وجود دارد x بطوریکه $x\in U=\bigcap_{\alpha\in I} V_\alpha$ پس

بازای هر $\alpha\in I$ ، $x\in V_\alpha$

Subject: Date:

از طرفی می‌دانیم باز مینیمالی حول x مثل S_x وجود دارد پس

$x \in S_x \subseteq V_\alpha$ (چون S_x مینیمال است) پس به ازای هر $\alpha \in I$ داریم

$S_x \subseteq V_\alpha$ پس $S_x \subseteq U = \bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha$ پس برای هر عضو در U باز حول

آن نقطه وجود دارد بطوریکه زیر U هست پس U باز است.

حال برای اثبات حکم اگر نشان دهیم توپولوژی که پایه مینیمال دارد

به ازای هر نقطه x در X یک باز مینیمال حول x وجود دارد آنگاه طبق

لم ا حکم اثبات می‌شود.

حال داریم فضای توپولوژیک (X,T) دارای پایهٔ کمینه است نقطهٔ

دلخواه $x \in X$ درنظر می‌گیریم. پس طبق تعریف پایه عضوی از پایهٔ کمین

مثل B_x وجود دارد که $x \in B_x$. فرض کنیم B_x کوچکترین عضو پایهٔ

کمینه است که شامل x است، ادعا می‌کنیم که B_x همان باز

مینیمال حول x است. زیرا اگر چنین نباشد پس وجود دارد باز

کوچکتری که شامل x است یعنی وجود دارد بازی مثل U_x بطوریکه

$x \in U_x \subset B_x$ چون U_x باز است پس طبق تعریف

پایه عضوی از پایه کمینه مثل γ وجود دارد بطوریکه $x \in \gamma \subseteq U_x$

اما می‌دانیم که B_x کوچک‌ترین عضو پایه کمینه شامل x است

که این تناقض است.

پس اگر فضای توپولوژیک (X,T) دارای پایه کمین باشد آنگاه به ازای هر

عضو $x \in X$ باز مینیمالی حول x وجود دارد که طبق لم ا می‌توان

نتیجه گرفت فضای توپولوژیک (X,T) الکساندروف است.

(اثبات $\Leftarrow$) فرض کنیم فضای توپولوژیک (X,T) الکساندروف است

می‌خواهیم ثابت کنیم پایه کمینه دارد پایه B را بدین شکل تعریف

می‌کنیم: $\forall x \in X \quad B_x = \bigcap_{\substack{U \text{ باز} \\ x \in U}} U$ (چون الکساندروف است پس B_x باز است)

پس داریم: $B = \{ B_x \mid x \in X \}$

پس به وضوح $\bigcup_{x \in X} B_x = X$ پس $\bigcup B = X$ (پس شرط ۱ پایه بودن دارا است.)

حال فرض کنیم $z \in B_x \cap B_y$ ، B_z را در نظر می‌گیریم چون

B_z کوچکترین باز شامل z است پس $B_z \subseteq B_x$ ، $B_z \subseteq B_y$

پس $z \in B_z \subseteq B_x \cap B_y$ (پس شرط ۲ پایه بودن را دارا است)

Subject :
Date :

حال باید نشان دهیم B پایهٔ توپولوژی مذکور است. به ازای هر U

باز در T داریم: $\forall x \in U \quad \exists B_x \quad s.t \quad x \in B_x \subseteq U$

زیرا B_x کوچکترین باز شامل x است. پس B یک پایه برای

توپولوژی T است. حال باید ثابت کنیم B یک پایهٔ کمینه است.

پایهٔ B' برای (X,T) را درنظر می‌گیریم نشان می‌دهیم $B \subseteq B'$

هر عضو B بصورت B_x است که $x \in X$. پس عضو دلخواه هر

از B مانند B_x انتخاب می‌کنیم می‌دانیم B_x باز است پس $B_x \in T$

و چون B' پایه است پس برای $x \in B_x$ عضوی از پایهٔ B' مثل

B' وجود دارد که $x \in B' \subseteq B_x$ از طرفی چون B' پایه است

پس $B' \in T$ یعنی B' باز است و چون B' شامل x است

و از طرف دیگر B_x کوچکترین باز شامل x است پس نتیجه

می‌گیریم که $B' = B_x$ پس $B_x \in B'$ پس $B \subseteq B'$ پس B یک

پایهٔ کمینه است.

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject: Date:

ب) نشان دهید تعداد توپولوژی ها بر مجموعهٔ n عضوی کمتر یا مساوی $2^{n(n-1)}$ است.

چون اجتماع تعداد دلخواهی از زیر دایه های هر توپولوژی، عضو آن توپولوژی است پس برای هر فضای توپولوژیک (X, T) یکی از پایه های T برابر خود T است پس بجای نشان دادن کران بالایی برای تعداد توپولوژی ها کران بالای برای پایه ها پیدا میکنیم.

مجموعهٔ B را درنظر میگیریم شرط اول پایه بودن این است که $\bigcup B = X$ پس برای هر $x_i \in X$ باید وجود داشته باشد $B \in B$ که $x_i \in B$

اگر B_i را عضوی از پایه درنظر بگیریم که شامل x_i است تتمهٔ اعضای X می توانند در B_i باشند یا نباشند پس چون تعداد تتمهٔ اعضا $n-1$ تاست پس تعداد حالت های B_i، 2^{n-1} حالت است. برای هر $x_i \in X$ که تعداد این x_i ها برابر n است این حالت ها را داریم پس بیشترین تعداد ممکن برای پایه ها $2^{(n-1)n}$ است پس تعداد توپولوژی ها بر مجموعهٔ n عضوی کمتر یا مساوی $2^{n(n-1)}$ است.

Subject: Date:

۳- فرض کنیم (X,T) فضای توپولوژیک باشد. عملگرهای $\alpha : P(X) \to P(X)$
و $\beta : P(X) \to P(X)$ را برای هر زیرمجموعهٔ A از X بصورت
$\alpha(A) = A^{-\circ}$ ، $\beta(A) = A^{\circ -}$ تعریف می‌کنیم.

آ) ثابت کنید $\alpha^2 = \alpha$ ، $\beta^2 = \beta$

برای اینکه ثابت کنیم $\alpha^2 = \alpha$ باید نشان دهیم $\alpha^2 \subseteq \alpha$ و $\alpha \subseteq \alpha^2$

برای هر زیرمجموعه A از X داریم $\alpha(A) = A^{-\circ}$

$$\alpha^2(A) = \alpha(\alpha(A)) = \alpha(A^{-\circ}) = (A^{-\circ})^{-\circ}$$

$$\alpha(A) = A^{-\circ} \subseteq (A^{-\circ})^{-} \Rightarrow (A^{-\circ})^{\circ} \subseteq (A^{-\circ})^{-\circ}$$

می‌دانیم برای هر مجموعه‌ای مثل G ، $G^{\circ\circ}$ برابر G° است یعنی

درون هر مجموعهٔ بازی با خود آن مجموعهٔ باز برابر است.

$$\Rightarrow (A^{-\circ})^{\circ} = (A^{-})^{\circ\circ} = A^{-\circ} \subseteq (A^{-\circ})^{-\circ}$$

در نتیجه $\alpha(A) \subseteq \alpha^2(A)$ است.

$$A^{-\circ} \subseteq A^{-} \Rightarrow (A^{-\circ})^{-} \subseteq A^{--}$$

می‌دانیم برای هر مجموعه‌ای مثل G ، G^{--} برابر G^{-} است یعنی

بستار هر مجموعهٔ بسته‌ای با خود آن مجموعه بسته برابر است

Subject: Date:

$\Rightarrow (A^{-\circ})^{-} \subseteq A^{--} = A^{-} \Rightarrow (A^{-\circ})^{-\circ} \subseteq A^{-\circ}$

در نتیجه $\alpha^2(A) \subseteq \alpha(A)$ است و ثابت کردیم $\alpha(A) \subseteq \alpha^2(A)$ مجموعهٔ

A دلخواه بود پس به ازای هر زیرمجموعهٔ X، $\alpha^2 = \alpha$ است.

برای هر زیرمجموعهٔ A از X داریم $\beta(A) = A^{\circ -}$

$\beta^2(A) = \beta(\beta(A)) = \beta(A^{\circ -}) = (A^{\circ -})^{\circ -}$

می‌دانیم $A^{\circ} \subseteq A^{\circ -} \Rightarrow A^{\circ\circ} \subseteq A^{\circ -} \Rightarrow A^{\circ\circ} = A^{\circ} \subseteq (A^{\circ -})^{\circ}$

$\Rightarrow A^{\circ} \subseteq (A^{\circ -})^{\circ} \Rightarrow A^{\circ -} \subseteq (A^{\circ -})^{\circ -}$

در نتیجه $\beta(A) \subseteq \beta^2(A)$ می‌باشد.

می‌دانیم $(A^{\circ -})^{\circ} \subseteq (A^{\circ -}) \Rightarrow (A^{\circ -})^{\circ -} \subseteq (A^{\circ -})^{-} = A^{\circ -}$

$\Rightarrow (A^{\circ -})^{\circ -} \subseteq A^{\circ -}$

در نتیجه $\beta^2(A) \subseteq \beta(A)$ است. همچنین ثابت کردیم $\beta(A) \subseteq \beta^2(A)$

پس داریم $\beta^2(A) = \beta(A)$ مجموعهٔ A دلخواه بود پس

به ازای هر زیرمجموعهٔ X داریم $\beta^2 = \beta$.

MICRO

Subject :   Date :

ب) نشان دهید اگر U و V اعضایی جدا از هم از T باشند $\alpha(U)$ و $\alpha(V)$ نیز چنین اند.

این سئوال را یکی از همگروهی های دیگرم با گوشی گرده عکس را بعد از این صفحه قرار داده ام.

سوال 3) ب)

عکس نقیض را نشان می‌دهیم. یعنی اگر $\alpha(U) \cap \alpha(V) \neq \emptyset$ آنگاه $U \cap V \neq \emptyset$.

حال چون $\alpha(U) \cap \alpha(V) \neq \emptyset$ پس وجود دارد عضوی مثل x که

یعنی $x \in \alpha(U) \cap \alpha(V)$ $\quad$ $x \in \bar{U}^{\circ} \cap \bar{V}^{\circ}$

می‌دانیم $A^{\circ} \cap B^{\circ} = (A \cap B)^{\circ}$ پس داریم: $x \in (\bar{U} \cap \bar{V})^{\circ}$

پس وجود دارد بازی مثل N_x حول x بطوریکه $N_x \subseteq \bar{U} \cap \bar{V}$

یعنی $N_x \subseteq \bar{U}$ و $N_x \subseteq \bar{V}$.

پس به ازای هر همسایگی حول x، مثل N_x داریم $N_x \cap U \neq \emptyset$

و $N_x \cap V \neq \emptyset$. پس وجود دارد $y \in N_x \cap U$ ، $z \in N_x \cap V$

حال چون U و V و N_x باز هستند. پس همسایگی حول y وجود دارد مثل

N_y بطوریکه $\underbrace{N_y \subseteq N_x \cap U}_{(I)}$ و به همین شکل برای z یعنی

$N_z \subseteq N_x \cap V$

می دانستیم که $N_x \subseteq \bar{V}$ و $N_x \subseteq \bar{U}$. پس برای هر عضو N_x

علی الخصوص y داریم، برای هر همسایگی حول y علی الخصوص

$y \in N_x \subseteq \bar{V}$ و $y \in N_x \subseteq \bar{U}$

داریم $N_y \cap V \neq \emptyset$ و $N_y \cap U \neq \emptyset$. از (I) می دانیم

پس چون $N_y \subseteq U$.

پس $N_y \cap V \neq \emptyset$

$U \cap V \neq \emptyset$.

ب) نشان دهید اگر به طور متوالی از A بستار یا متمم نسبت به X بگیریم حداکثر ۱۴ زیر مجموعه از X بدست می آید. برای $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی زیرمجموعه ای مثال بزنید که از آن دقیقا ۱۴ زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ بدست آید.

می توانیم بصورت متوالی بستار یا متمم بگیریم برای هر زیرمجموعه A از X داریم

$$(A^c)^{-c} = (A^c)^{c\circ} = (A^{cc})^\circ = A^\circ$$

پس می توانیم بصورت متوالی بستار یا متمم یا درون بگیریم

پس برای هر A عملیات زیر را داریم:

$$A,\ A^c,\ A^-,\ A^\circ,\ A^{c-},\ A^{c\circ},\ A^{-\circ},\ A^{\circ-},\ (A^{c-})^\circ,$$

$$(A^{c\circ})^-,\ (A^{-\circ})^-,\ (A^{\circ-})^\circ,\ (A^{c-})^{\circ-},\ (A^{c\circ})^{-\circ}$$

اگر در آخر عملیات های متوالی متمم بگیریم مانند این است که ابتدا متمم بگیریم بعد از آن درون یا بستار را بطور متوالی اعمال کنیم.

پس حداکثر ۱۴ زیر مجموعه از X بدست می آید. (از کلمهٔ حداکثر استفاده می کنیم چون ممکن است A هم باز و هم بسته باشد در این صورت مجموعه های تکراری در برخی تولید می شود)

برای $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی مجموعهٔ A را در نظر می گیریم بطوریکه $A \subseteq \mathbb{R}$

$$A = (0\ 1) \cup (1\ 2) \cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap (4\ 5)) \subseteq \mathbb{R}$$

$$A^c = (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2\ 3) \cup (3\ 4] \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [4\ 5]) \cup [5\ \infty)$$

$$A^- = [0\ 2] \cup \{3\} \cup [4\ 5] \qquad A^\circ = (0\ 1) \cup (1\ 2)$$

$$A^{c-} = (-\infty\ 0] \cup \{1\} \cup [2\ \infty) \qquad A^{c\circ} = (-\infty, 0) \cup (2\ 3) \cup (3\ 4) \cup (5\ \infty)$$

$$A^{-\circ} = (0\ 2) \cup (4\ 5) \qquad A^{\circ -} = [0\ 2] \qquad (A^{c-\circ}) = (-\infty\ 2) \cup (2\ \infty)$$

$$(A^{c\circ})^- = (\infty\ 1] \cup [2\ 4] \cup [5\ \infty) \qquad (A^{-\circ})^- = [0\ 2] \cup [4\ 5]$$

$$(A^{\circ -})^\circ = (0\ 2) \qquad (A^{c-})^{\circ -} = (-\infty\ 2] \cup [2\ \infty)$$

$$(A^{c\circ})^{-\circ} = (-\infty\ 0) \cup (2\ 4) \cup (5\ +\infty)$$

Subject: Date:

پس با ۱٤ مرحله بستار و درون و متمم گیری از A ، ۱٤ زیرمجموعه

حتما پیدا از R به وجود می آید پس A مثالی برای این سؤال

است

۱۹٤. نشان دهید اگر در فضای توپولوژیک دلخواه (X,T) فقط مرز زیر

مجموعه های X را بشناسیم توپولوژی T معلوم می شود.

این پاسخ را یکی دیگر از هم گروهی هایم پاکنویس کرده که بعد از این

صفحه قرار داده ام.

در ابتدا مجموعه‌ی ϕ را از (*) انتخاب می‌کنیم از آنجا که شامل هیچ نقطه‌ی مرزی نیست لذا مجموعه‌ی نقاط مرزی آن ϕ است مجموعه‌ای می‌سازیم مانند B_{α_0} که : $B_{\alpha_0}=X\setminus\phi$

Year: Month: Day:

فرض کنیم X مجموعه‌ی مرجع باشد و $\bigcup_{\alpha\in I} P_\alpha(X)$ (*) گردایه همه‌ی زیرمجموعه‌های X به جز خود X باشد
و $\bigcup_{\alpha\in I} P^\delta_\alpha(X)$ مجموعه‌ی تمام نقاط مرزی باشد

حال یک زیرمجموعه از (*) مانند $P_{\alpha_n}(X)$ انتخاب می‌کنیم از آنجا که طبق فرض سؤال نقاط مرزی را می‌شناسیم : فرض کنیم $P^\delta_{\alpha_n}(X)$ نقاط مرزی مجموعه‌ی انتخابی باشد مجموعه‌ای می‌سازیم که شامل نقاط مرزی مجموعه‌ی انتخابی نباشد : $B_{\alpha_n}=X\setminus P^\delta_{\alpha_n}(X)$

سپس یک زیرمجموعه‌ی دیگری از (*) انتخاب می‌کنیم که قبلاً انتخاب نکرده‌ایم فرض کنیم این زیرمجموعه‌ی انتخابی $P_{\alpha_\gamma}(X)$ باشد طبق فرض نقاط مرزی را می‌شناسیم حال مجموعه‌ای می‌سازیم که شامل نقاط مرزی $P_{\alpha_\gamma}(X)$ و مجموعه‌ای که قبلاً انتخاب کرده‌ایم نباشد
پس داریم : $B_{\alpha_\gamma}=B_{\alpha_n}\setminus P_{\alpha_\gamma}(X)$

به همین ترتیب زیرمجموعه‌هایی از (*) را انتخاب می‌کنیم که قبلاً انتخاب نکرده‌ایم در واقع با این کار، مجموعه‌هایی تولید می‌کنیم که در هر مرحله از مجموعه‌ی نقاط مرزی آن کم می‌شود در نهایت به مجموعه‌ای مانند B^* می‌رسیم که شامل هیچ یک از نقاط مرزی نیست و همه‌ی زیرمجموعه‌های آن مجموعه‌های باز هستند پس در واقع به درون همه‌ی زیرمجموعه‌های X رسیدیم.

حال بررسی می‌کنیم مجموعه‌هایی که ساختیم تشکیل پایه می‌دهند :

الف) $\bigcup B = X$ طبق تعریفی که از مجموعه‌های انتخابی داشتیم :

$$\bigcup B = B_{\alpha_0}\cup B_{\alpha_n}\cup B_{\alpha_\gamma}\cup\cdots = X\cup\left(X\setminus P^\delta_{\alpha_m}(x)\right)\cup\left(B_{\alpha_m}\setminus P_{\alpha_\gamma}(x)\right)\cup\cdots = X$$

ب) فرض کنیم $z\in B_{\alpha_{m'}}\cap B_{\alpha_\gamma}$ باشد
دو حالت پیش می‌آید :
① z مرز هیچ مجموعه‌ای نباشد : طبق توضیحات بالا در نهایت به مجموعه‌ای مانند B^* رسیدیم که شامل هیچ یک از نقاط مرزی نیست متقابلاً شامل همه‌ی نقاط غیرمرزی هست پس $z\in B^*$ چون z غیرمرزی است و طبق تعاریفی که داشتیم $B^*\subseteq B_{\alpha_{m'}}\cap B_{\alpha_\gamma}$ نیز هست

Year:........ Month:........ Day:........

(۲) z نقطه‌ی مرزی حداقل یک مجموعه باشد : چون نقاط مرزی را می‌شناسیم پس می‌دانیم

z نقطه‌ی مرزی کدام زیرمجموعه‌ها است پس از $B_{\alpha_x} \cap B_{\alpha_y}$ ، طبق تعریفی که داشتیم پایه‌ای

برمی‌گزینیم که شامل نقطه‌ی مرزی z باشد یعنی مثلاً فرض کنید : $\bigcup_{\beta \in I} P_\beta(X)$ تمام مجموعه‌هایی

باشند که به ازای هر $\beta \in I$ که درنظر میگیریم $P_\beta(X)$ حاوی نقطه‌ی مرزی z باشد پس پایه‌ای که

انتخاب می‌کنیم باید حاوی مرزهای $P_\beta(X)$ ازجمله نقطه‌ی مرزی z به ازای هر $\beta \in I$ باشند

پس در اینجا پایه‌ای پیدا کرده‌ایم که هم زیرمجموعه‌ی $B_{\alpha_x} \cap B_{\alpha_y}$ است و هم حاوی

z است پس شرط دوم هم برقرار است.