باسمه تعالی

تمرینهای توپولوژی (۶)

۱- فرض کنید J مجموعه‌ای نمایه‌گذار، و $\left((X_\beta, \mathcal{T}_\beta)\right)_{\beta\in J}$ گردایه‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد.

(آ) نشان دهید به ازای هر α در J، تابع تصویر بر مؤلفهٔ αم نگاشتی باز است. نشان دهید لزومی ندارد این تابع بسته یا خارج‌قسمتی باشد.

(ب) فرض کنید Z فضایی توپولوژیک باشد. به ازای هر α در J، تابع $h_\alpha : Z \longrightarrow X_\alpha$ را در نظر بگیرید و تابع $h : Z \longrightarrow \prod_{\beta\in J} X_\beta$ را با دستور $h(z) = \left(h_\beta(z)\right)_{\beta\in J}$ تعریف کنید. نشان دهید h پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر α در J، تابع h_α پیوسته باشد.

(پ) فرض کنید J شمارا باشد. نشان دهید $\prod_{\beta\in J} X_\beta$ با توپولوژی حاصل‌ضربی متر‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر α در J، فضای X_α متر‌پذیر باشد.

۲- نشان دهید هر فضای T_0 را می‌توان در حاصل‌ضربی از فضاهای شرپینیسکی نشاند.

۳- فرض کنید $\mathbb{P}$ زیرفضای اعداد گنگ از $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی با توپولوژی اقلیدسی) باشد. نشان دهید $\mathbb{P}$ با فضای حاصل‌ضربی $\prod_{\beta\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$ همسانریخت است. ($\mathbb{N}$ را با توپولوژی گسسته در نظر گرفته‌ایم.) از اینجا نتیجه بگیرید $\mathbb{P}\times\mathbb{P}$ با $\mathbb{P}$ همسانریخت است. آیا $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ با $\mathbb{Q}$ همسانریخت است؟

۴- فضای توپولوژیک X را **همگن** گوییم هرگاه برای هر دو نقطهٔ x و x' در X، همسانریختی $h : X \longrightarrow X$ وجود داشته باشد چنان که $h(x) = x'$. فضایی همگن مثال بزنید که T_0 باشد ولی T_1 نباشد.