9612037 حریم علی پور حاجی آقا

تمرین دوم: فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد و $(A_n)_{n\geq 1}$ دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های فشرده همبند است. ثابت کنید که $C=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ نیز یک مجموعه‌ی فشرده همبند است.

اثبات: ابتدا سه لم را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم 1: در فضای توپولوژیک هاسدورف (X,τ) فرض کنیم $(K_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های فشرده باشد که دارای ویژگی اشتراک متناهی است. در اینصورت $\bigcap_{i\in I} K_i$ مجموعه‌ای ناتهی است.

اثبات لم 1: فرض کنیم اتفاقاً $\bigcap_{i\in I} K_i=\phi$، اندیس $j\in I$ را ثابت نگه می‌داریم.

داریم: $K_j\cap(\bigcap_{i\neq j} K_i)=\phi$ یا $K_j\subseteq\bigcup_{i\neq j} K_i^c$. حال چون فضای X هاسدورف است پس هر K_i بسته است چون فشرده است، پس در نتیجه K_i^c باز است.

پس K_i^c ها یک پوشش باز برای K_j است و چون K_j فشرده است پس داریم:

$\exists_{i_1,\dots,i_n\in I}$ s.t $K_j\subseteq K_{i_1}^c\cup\dots\cup K_{i_n}^c$

$\Rightarrow K_{i_1}\cap\dots\cap K_{i_n}\cap K_j=\phi$

که این با ویژگی اشتراک متناهی در تناقض است.

حال می‌توان از لم 1 نتیجه گرفت اگر $(K_n)_{n\geq 1}$ دنباله‌ی نزولی از مجموعه‌های فشرده ناتهی باشد آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\neq\phi$ (زیرا $(K_n)_{n\geq 1}$ ها دارای ویژگی اشتراک متناهی است)

لم 2: در فضای توپولوژیک هاسدورف (X,τ)، فرض کنیم مجموعه‌ی باز U و دنباله‌ی نزولی $(K_n)_{n\geq 1}$ از مجموعه‌های فشرده به گونه‌ای باشند که $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\subseteq U$. در اینصورت به ازای اندیسی مانند m داریم $K_m\subseteq U$.

s.a.m

اثبات لم 2: از فرض $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq U$ نتیجه می‌شود $\bigcap_{n=1}^{\infty} (K_n \cap U^c) = \emptyset$. حال چون فضای X هاوسدورف است پس K_n بسته است و $K_n \cap U^c$ نیز بسته است و چون $K_n \cap U^c \subset K_n$ نتیجه می‌گیریم که $K_n \cap U^c$ ها فشرده‌اند.

حال چون $(K_n \cap U^c)_{n \geq 1}$ دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های فشرده‌اند پس طبق عکس نقیض لم 1 چون $\bigcap_{n=1}^{\infty} (K_n \cap U^c) = \emptyset$ پس باید یکی از آن‌ها مثل $K_m \cap U^c$ برابر تهی باشد و این دقیقاً یعنی $K_m \subseteq U$

لم 3: اگر A و B دو زیرمجموعه بسته در فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف $(X, \mathcal{T})$ باشند آن‌گاه دو مجموعه‌ی باز جدا از هم مثل U و V وجود دارند به طوری که $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$.

اثبات لم 3: A و B فشرده‌اند، حال پوشش باز برای A و B پیدا می‌کنیم. نقطه‌ی y را از B در نظر می‌گیریم. به ازای هر نقطه‌ای مثل x در A بازی حول x مثل U_x و بازی حول y مثل V_x وجود دارد به طوری که $U_x \cap V_x = \emptyset$ (چون فضا هاسدورف است)

حال U_x ها به ازای هر $x \in A$ یک پوشش باز برای A است و چون A فشرده است پس می‌توان یک زیرپوشش متناهی از U_x ها پیدا کرد که A را بپوشاند مثل:

$$A \subseteq U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup U_{x_3} \cup \dots \cup U_{x_n}$$

حال متناظر با آن V_{x_1} تا V_{x_n} را در نظر می‌گیریم.

واضح است $y \in \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} \neq \emptyset$ و $\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}\right) = \emptyset$ به وضوح $\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} = V$

بازی حول y است. پس به ازای هر $y \in B$، بازی حول y مثل V_y و بازی حول A مثل $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = U_y$ وجود دارد به طوری که $V \cap U = \emptyset$. پس داریم به ازای هر $y \in B$، V_y ها پوششی برای فضای B است و به ازای هر $y \in B$، U_y ای حول A وجود دارد به طوری که $V_y \cap U_y = \emptyset$.

s.a.m

پس داریم: $B \subseteq \bigcup_{y\in B} V_y$. و چون B فشرده است پس زیرپوشش متناهی از V_y ها وجود دارد که B را بپوشاند. یعنی:

$$B \subseteq V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \dots \cup V_{y_n}$$

و متناظر با V_{y_i} ها، U_{y_i} ای حول A وجود دارد.

واضح است: $A \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ و $\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}\right) = \phi$

و به وضوح $\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ بازی حول A است

و $\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ بازی حول B است که با هم اشتراک ندارند.

پس برای هر B و A فشرده در فضای هاسدورف بازی حول A مثل U و بازی حول B مثل V وجود دارد که $U \cap V = \phi$.

- حال می خواهیم به کمک این 3 لم مسئله را اثبات کنیم:

چون فضای (X,τ) هاسدورف است و هر A_n فشرده است، پس هر A_n بسته است. پس $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ نیز بسته است. پس چون $C \subseteq A_1$ و A_1 فشرده است پس C فشرده است. (I)

حال می خواهیم نشان دهیم C همبند است:

فرض کنیم C اجتماع دو مجموعه بسته جدا از هم مانند A و B باشد یعنی $C = A \cup B$

با توجه به لم 3، می توان دو مجموعه باز جدا از هم مثل U و V یافت به طوری که $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$. حال بنابر لم 2 اندیسی مانند j وجود دارد به طوری که $A_j \subseteq U \cup V$

و از این رو چون A_j همبند است پس $A_j \subseteq U$ یا $A_j \subseteq V$. فرض کنیم $A_j \subseteq U$ در این صورت $C \subseteq A_j \subseteq U$ و در نتیجه $B = \phi$ و اگر $A_j \subseteq V$ در اینصورت $C \subseteq A_j \subseteq V$ و در نتیجه $A = \phi$

پس تناقض است. پس نتیجه می گیریم C همبند است. (II)

$(I), (II) \longrightarrow$ $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ همبند و فشرده است.

s.a.m