مریم علیپور حاجی آقا - محیا پاشاپور - مریم جمالی

سوال ۱) ابتدا لم ۱ را بیان و ثابت می کنیم:

لم ۱: اگر A بسته باشد داریم $(A^{\partial})^{\circ} = \phi$

اثبات:

$$(A^{\partial})^{\circ} = (\bar{A} \cap \overline{A^c})^{\circ} \underset{\text{بسته}A}{=} (A \cap \overline{A^c})^{\circ} = A^{\circ} \cap (\overline{A^c})^{\circ}$$

فرض کنیم $A^{\circ} \cap (\overline{A^c})^{\circ} \neq \phi$ پس داریم:

$$x \in A^{\circ} \Rightarrow \exists U_x \subseteq A \Rightarrow U_x \cap A^c = \phi \quad \text{(II)}$$

$$x \in (\overline{A^c})^{\circ} \Rightarrow x \in \overline{A^c} \quad \text{(I)}$$

از رابطه (I) داریم که برای هر باز حول x علی الخصوص U_x داریم:

$$U_x \cap A^c \neq \phi$$

$$\xrightarrow{\text{(I)},\text{(II)}} \quad \times \quad \text{به تناقض رسیدیم} \Rightarrow (A^{\partial})^{\circ} = \phi$$

حال می خواهیم ثابت کنیم $A^{\partial\partial\partial} = A^{\partial\partial}$

$$(A^{\partial\partial})^{\circ} = ((A^{\partial})^{\partial})^{\circ} \xrightarrow[\text{طبق لم 1}]{\text{بسته}A^{\partial}} \phi \quad *$$

$$A^{\partial\partial\partial} = (A^{\partial\partial})^{\partial} = \overline{A^{\partial\partial}} \cap \overline{(A^{\partial\partial})^c} \underset{\text{بسته}A^{\partial\partial}}{=} A^{\partial\partial} \cap ((A^{\partial\partial})^{\circ})^c \underset{*}{=} A^{\partial\partial} \cap \phi^c$$

$$= A^{\partial\partial} \cap X = A^{\partial\partial}$$

سوال 2) فرض: X مرز زیرمجموعه‌ای از X است:

حکم: هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از X مرز زیرمجموعه‌ای از X است.

با توجه به فرض داریم: $\exists B \subseteq X \text{ s.t. } B^{\partial} = X \Rightarrow B^{\partial} = \overline{B} \cap \overline{B^c} = X$

$\Rightarrow \overline{B} = X \wedge \overline{B^c} = X \Rightarrow$ B و B^c در X چگال اند

زیرمجموعه‌ی بسته A از X را در نظر می‌گیریم، ادعا می‌کنیم مرز زیرمجموعه‌ی $(A \setminus A^{\circ} \cap B) = C$، مجموعه‌ی بسته A است.

نشان می‌دهیم اگر $x \notin A$ آن‌گاه $x \notin C^{\partial}$ و اگر $x \in A$ آن‌گاه $x \in C^{\partial}$.

ابتدا فرض می‌کنیم $x \notin A$ پس $x \in A^c$، چون A^c باز است پس وجود دارد باز U_x حول x به طوری که $U_x \subseteq A^c$ پس $U_x \cap A = \phi$ و چون $C \subseteq A$ پس $U_x \cap C = \phi$ پس $x \notin C^{\partial}$.

حال اگر $x \in A$ باشد، دو حالت داریم:

① حالت اول: $x \in A \,,\, x \notin A^{\circ}$

② حالت دوم: $x \in A \,,\, x \in A^{\circ}$

①: پس $x \in A \setminus A^{\circ}$، پس برای هر باز U_x حول x داریم، $x \in U_x \cap A \setminus A^{\circ} \neq \phi$، چون $C \supseteq A \setminus A^{\circ}$ پس $U_x \cap C \neq \phi$ (I)

و چون $x \notin A^{\circ}$ پس برای هر باز U_x حول x داریم، $U_x \cap A^c \neq \phi$ و چون $A^c \subseteq C^c$ پس $U_x \cap C^c \neq \phi$ (II)

$\xrightarrow{\text{I}, \text{II}} x \in C^{\partial}$

②: $x \in A \,,\, x \in A^{\circ}$ پس برای هر باز U_x: $x \in U_x \cap A^{\circ} \neq \phi$

چون U_x باز است و A° هم باز است پس $U_x \cap A^{\circ}$ نیز باز است و ناتهی و چون B, B^c چگال اند داریم:

$(U_x \cap A^{\circ}) \cap B \neq \phi \Rightarrow U_x \cap (A^{\circ} \cap B) \neq \phi \xrightarrow{A^{\circ} \cap B \subseteq C^c} U_x \cap C^c \neq \phi$ (I)

$(U_x \cap A^{\circ}) \cap B^c \neq \phi \Rightarrow U_x \cap (A^{\circ} \cap B^c) \neq \phi \xrightarrow{A^{\circ} \cap B^c \subseteq C} U_x \cap C \neq \phi$ (II)

$(I)', (II)' \longrightarrow x \in C^{\partial}$

پس نتیجه می‌شود: $(A \setminus A^{\circ} \cap B)^{\partial} = A$

برعکس: فرض می‌کنیم هر زیرمجموعه بسته از X مرز زیرمجموعه‌ای از X است. ثابت می‌کنیم X مرز زیرمجموعه‌ای از X است:

کافی است X را همان مجموعه‌ی بسته در نظر بگیریم پس داریم X مرز زیرمجموعه‌ای از X است.

سوال 3) فرض: حداکثر یک نقطه از X بی نهایت بار در دنباله تکرار شده است.

حکم: دنباله همگرا است.

حالت اول: فرض کنیم هیچ عضوی از دنباله بی نهایت بار تکرار نشده است. پس دنباله به هر عضو خود همگرا است، زیرا: هر بازی حول x بگیریم چون توپولوژی متمم متناهی است تعدادی متناهی تا از اعضای فضا خارج از آن باز می افتند و از آن جا که هر عضو دنباله متناهی بار تکرار شده اند پس تعدادی متناهی از اعضای دنباله خارج از آن باز می افتند.

حالت دوم: فرض کنیم یک عضو دنباله بی نهایت بار تکرار شده باشد. پس حد دنباله همان عضو است. فرض کنیم x_i بی نهایت بار تکرار شده باشد پس هر باز حول آن متناهی تا از اعضای دنباله را در خود ندارد.

فرض: هر دنباله همگرا است

حکم: حداکثر یک نقطه از X بی نهایت بار در دنباله تکرار شده است.

برهان خلف: فرض می کنیم حداقل دو نقطه در دنباله بی نهایت بار تکرار شده است، بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می کنیم x_i و x_j بی نهایت بار تکرار شده اند. فرض کنیم دنباله به x همگرا است و $x \neq x_i, x_j$ یک باز مانند $X \setminus \{x_j\}$ یا $X \setminus \{x_i\}$ حول x وجود دارد که نامتناهی تا جمله خارج از آن هستند پس x حد دنباله نیست. فرض کنیم x_i حد دنباله باشد پس $X \setminus \{x_j\}$ بازی حول x_i است که نامتناهی تا جمله از دنباله خارج از آن هستند پس x_i نیز حد دنباله نیست و به همین ترتیب x_j پس دنباله حد ندارد که تناقض با فرض مسئله است پس فرض خلف باطل شده.

سوال ۹) الف) فرض: دنباله‌ای در X وجود دارد که به x همگرا نیست.

حکم: زیر دنباله‌ای در آن دنباله وجود دارد که هیچ زیر دنباله‌ای از آن به x همگرا نیست.

اثبات: با توجه به فرض یک باز حول x بگیریم نامتناهی تا از اعضای دنباله خارج از آن می‌افتند.

حال آن زیر دنباله را همان اعضای نامتناهی از دنباله که خارج آن باز هستند می‌گیریم.

به وضوح هر زیر دنباله از این زیر دنباله به x همگرا نیست.

ب) دنباله $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ در X را در نظر می‌گیریم. مجموعه A را تمام حدهای زیر دنباله‌های $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ قرار می‌دهیم. حال می‌خواهیم ثابت کنیم مجموعه‌ی A بسته است. برای این منظور کافی است نشان دهیم $\bar{A} \subseteq A$.

در نظر می‌گیریم $x \in \bar{A}$. یعنی به ازای هر باز حول x مثل U_x، $U_x \cap A \neq \phi$

حال چون فضای X، شمارای نوع اول است پس حول نقطه‌ی x، پایه‌ی شمارا دارد. مثل $\{B_1, B_2, \dots\}$ قرار می‌دهیم $U_n = \bigcap_{i=1}^{n} B_i$.

پس داریم $\{U_1, U_2, \dots\}$ که پایه‌ی شمارا حول نقطه‌ی x است. به وضوح $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$

حال چون $x \in \bar{A}$ و حول x پایه‌ای شمارا وجود دارد پس طبق قضیه‌ای که داریم وجود دارد دنباله‌ای در A، مثل $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ که حد آن برابر x است.

می‌دانیم که x_iها، حد زیر دنباله‌ای از دنباله‌ی $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ است.

حال چون حد دنباله‌ی $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ برابر x است، پس برای هر باز حول x به خصوص U_iها داریم، تعداد متناهی از x_iها بیرون آن باز می‌افتند.

باز U_i را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم این باز حول x است و وجود دارد x_{n_i}ای که در U_i می‌افتد. پس U_i یک باز حول x_{n_i} نیز است. پس چون x_{n_i} در A است پس زیر دنباله‌ای از $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ وجود دارد که به x_{n_i} همگرا است. پس عضوی از $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ در باز U_i قرار دارد. این عضو را z_i قرار می‌دهیم. پس برای هر عضو پایه مثل U_i وجود دارد عضوی در $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ مثل z_i.

پس داریم دنباله‌ی $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیر دنباله‌ای از $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ است که به x همگرا است. پس x عضو A است

یعنی $\text{if } x \in \bar{A} \Rightarrow x \in A$ ، پس $\bar{A} \subseteq A$ پس A بسته است.

قسمت دوم ؛ مثال جزوه : مجموعه‌ی $X = (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \cup \{\infty\}$ را با توپولوژی $\tau = P(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \cup \mathcal{A}$ در نظر می‌گیریم

که در آن $\mathcal{A}$ مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌هایی از X است که علاوه بر ∞ تقریباً تمام اعضا از

تقریباً تمام سطرهای $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ را دارد. اگر قرار دهیم $A = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ، دیده می‌شود که $\infty \in \bar{A}$

ولی هیچ دنباله ای در A همگرا به ∞ نیست.

چون مجموعه‌ی $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ با مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ در تناظر یک به یک است پس اعضای $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ را

می‌توان به صورت $x_1, x_2, x_3, \dots$ نوشت.

حال دنباله‌ی زیر را تعریف می‌کنیم :

$$x_1 \quad x_2 \quad x_1 x_2 x_3 \quad x_1 x_2 x_3 x_4 \quad x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots\dots$$

واضح است به ازای هر x_i ، زیر دنباله‌ای از دنباله‌ی بالا وجود دارد (زیر دنباله‌ی ثابت)

که به x_i همگرا است. پس $A = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ برابر است با مجموعه‌ی حدهای زیر دنباله‌های آن

دنباله. که به وضوح A بسته نیست چون $\infty \in \bar{A}$ و $\infty \notin A$.