Alignement des champs de vorticité

Marius Duvillard

22 février 2024

1 Définition du problème

On suppose que les champs de vorticité ont été mal aligné. Pour corriger cette erreur, on souhaite appliquer une correction qui respecte les contraintes d'un écoulement incompressible. Pour cela, on introduit un transformation Φ qui doit corriger l'ébauche. On réécrit la loi de Bayes avec cette information

$$p(\omega, \Phi \mid y) \propto p(y \mid \omega, \Phi) p(\omega \mid \Phi) p(\Phi)$$

Pour les deux premiers termes on retrouve facilement la vraissemblance conditionnée par l'ébauche déformée c'est à dire $\Phi(\omega)$ qui est appliqué sur les coordonnées lagrangienne du champ. Le prior est également défini sur le champ déformé. Enfin il faut définir un prior pour Φ. Ce terme est assez arbitraire. On veut simplement qu'il vérifie la condition d'un écoulement incompressible.

2 Correction dans le span des champs de vitesse des membres

On cherche une transformation définie par l'intégration de la position d'un jeu de particule $P = \{(x_p, \Gamma_p)\}$ par un champs de vitesse u tel que

$$\begin{aligned} x(t; u) &= x_p + \int_0^t u(x(t'))\mathrm{d}t' \\ \tilde{x}_p &= x(1; u). \end{aligned}$$

On souhaite identifier ce champ de vitesse tel que

$$u = \underset{u \in \mathcal{V}}{\arg\min} \left\| u^{obs} - h_u(\{(x_p, \Gamma_p)\}; x_{obs}, u) \right\|^2_{R^{-1}}.$$

où u^{obs} sont les vitesse observées en x_{obs}, h_u l'opérateur d'observation après application du champ de vitesse u pour déplacer les particules.

Le champ u est défini dans un espace vectoriel $\mathcal{V}$ dans lequel il admet une décomposition.

Dans un premier temps on choisi $\mathcal{V} = \mathrm{Span}(u_m)$ où u_m est le champ de vitesse du m-ème membre.

Ce choix est cohérent car par CL, il permet de définir une transformation à divergence nulle. De plus, il est cohérent avec la philosophie du filtre de Kalman d'utiliser la distribution des membres.

Ainsi le champ u se réécrit comme $u = \sum_m a_m u_m$.
On peut réécrire la fonction objectif en fonction du vecteur $a \in \mathbb{R}^N$

$$\mathcal{L}_a = \left\| u^{obs} - h_a(\{(x_p, \Gamma_p)\}; x_{obs}, a) \right\|^2_{R^{-1}} .$$

Il convient de définir l'opérateur h comme l'observation du champ de vitesse aux coordonnées x_{obs} après déplacement des particules selon u

$$h_a(\{(x_p, \Gamma_p)\}; x_{obs}, a) = h(\{(\tilde{x}_p, \Gamma_p)\}; x_{obs}) = U_{obs}(\tilde{x}_p, \Gamma_p).$$

Du fait de la non-linéarité du problème (non linéarité de $x(t; a)$ par rapport à a), le problème n'est pas convexe. On se propose de résoudre le problème à l'aide d'un algoritme de minimisation NL. Pour cela on souhaite évaluer le gradient de $\mathcal{L}_a$.

Dans un premier temps, ce vecteur est évalué par approximation de la dérivée directionnelle

$$\frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial a_i}(a) = D_{u_i} \mathcal{L}_a(a) \approx \frac{\mathcal{L}_a(a + \delta a_i u_i) - \mathcal{L}_a(a)}{\delta a_i}$$

Connaissant $\mathcal{L}_a$ et son gradient, on peut appliquer des algorithmes de minimisation NL.