0.1 Méthode séquentielle - Approche Probabiliste

0.1.1 Filtrage bayésien

Le filtrage bayésien consiste à écrire la récurrence sur les lois de probabilité, pour estimer, en fonction des observations passées et courante $y_{1:k}$ l'état courant $\boldsymbol{x}_k$ et de prédire l'état future $\boldsymbol{x}_{k+1}$.

Pour simplifier les notations, l'exposant $^{|k}$ qui conditionne la densité par les observations $\boldsymbol{y}_{1:N}$. La densité de l'état est initialisée par la densité a priori de l'état initial p_{X_0}.

Puis pour tout $k \geq 0$ les lois de probabilité sont propagées.

L'étape de propagation ou *forecast* loi *a priori* est obtenue grace à la loi des probabilité totales

$$p^{|k}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x}) = \int p_{\boldsymbol{X}_{k+1}|\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{x}) p^{|k}_{\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{x}')dx' \tag{1}$$

La loi *a priori* de la $k+1$ observations peut être otenue de nouveau grace à la loi de probabilité totale

$$p^{|k}_{\boldsymbol{Y}_{k+1}}(\boldsymbol{y}) = \int p_{\boldsymbol{Y}_{k+1}|\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) p^{|k}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x})dx$$

Après la $k+1$ observation $\boldsymbol{y}_{k+1}$, l'étape d'*analyse* permet de déterminer la loi *a posteriori* de l'état

$$p^{|k+1}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x}) = p^{|k}_{\boldsymbol{X}_{k+1}|\boldsymbol{Y}_{k+1}=\boldsymbol{y}_{k+1}}(\boldsymbol{x}) = \frac{p^{|k}_{\boldsymbol{Y}_{k+1}|\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) p^{|k}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x})}{p^{|k}_{\boldsymbol{Y}_{k+1}}(\boldsymbol{y})}$$

la loi de Bayes après mesure de $\boldsymbol{Y}_n$

0.1.2 Filtre Particulaire

Le filtre particulaire est une implémentation du filtre bayésien qui approxime la PDF à l'aide d'une distribution empirique. Les transformations du filtre, *forecast* et *analysis* sont appliquées sur les membres de cet échantillon. Cette méthode converge vers la distribution exacte lorsque le nombre de particule $N \to \infty$.

Le prior de l'état $p(\boldsymbol{x})$ à l'instant k est représenté par un ensemble de N réalisations $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots \boldsymbol{x}_N\}$ de tel sorte que

$$p_{\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{x}) \simeq \sum_{i=1}^{N} \omega^i_k \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i_k) \quad \text{with} \sum_{i=1}^{N} \omega^i_k = 1, \quad \omega^i_k > 0.$$

où δ est la masse de Dirac et ω^i_k les poids associés à chaque membre. Initialement, les échantillons sont supposés tirés de manière uniforme de tel sorte que $\omega^i_k = 1/N$.

Lors de l'étape de *propagation*, les particules sont propagés par le modèle de manière déterministe.

Pour s'en convaincre, le loi de probabilité totale 1 peut être réécrite

$$\begin{aligned}
p^{|k}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x}) &= \int p_{\boldsymbol{X}_{k+1}|\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{x}) p^{|k}_{\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{x}')dx' \\
&\simeq \int p_{\boldsymbol{X}_{k+1}|\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{x}) \sum_{i=1}^{N} \omega^i_k \delta(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^i_k)dx' \\
&\simeq \sum_{i=1}^{N} \omega^i_k \int p_{\boldsymbol{X}_{k+1}|\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{x}) \delta(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^i_k)dx' \\
&\simeq \sum_{i=1}^{N} \omega^i_k \delta(\boldsymbol{x} - \mathcal{M}_{k,k+1}(\boldsymbol{x}^i_k) - \boldsymbol{\eta}_{k,k+1}) = \sum_{i=1}^{N} \omega^i_k \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i_{k+1}).
\end{aligned}$$

Quant à l'étape d'analyse, elle correspond à une mise à jour du poids de chaque membre, qui correspond à sa vraissemblance conditionnée aux données

$$\begin{aligned} p^{|k+1}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x}) &\propto p^{|k}_{\mathbf{Y}_{k+1}|\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) \sum_{i=1}^{N} \omega_k^i \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^i_{k+1}) \\ &\propto \sum_{i=1}^{N} \omega_k^i \, p^{|k}_{\mathbf{Y}_{k+1}|\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{x}^i_{k+1}}(\boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^i_{k+1}) \end{aligned}$$

Leading to

$$\omega^i_{k+1} = \frac{\omega_k^i \, p^{|k}_{\mathbf{Y}_{k+1}|\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{x}^i_{k+1}}(\boldsymbol{y}_{k+1})}{\omega_k^j \, \sum_j^N p^{|k}_{\mathbf{Y}_{k+1}|\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{x}^j_{k+1}}(\boldsymbol{y}_{k+1})}$$

Où le dénominateur est simplement un terme de normalisation.

Cependant, lorsque la dimension est grande, le nombre de poids non nulle à tendance à tendre vers 0. Pour éviter cela, des méthodes de rééchantillonnage du *posterior* ont été développé. Le filtre bootstrap [1] consiste à selectionner les membres de poids les plus élevé, de les cloner de manière proportionnelle à leurs poids. Après échantillonnage, N particules sont rassemblées, dont certaines sont identitiques avec des approximativement égaux. Un exemple d'algorithme suivant

Algorithme 1 : Implémentation du rééchantillonnage par *bootstrap*.

pour *membre* n *do* **faire**
    Tirer u dans $\mathcal{U}[0, 1[$;
    Initialiser $j = 1$;
    Affecter $S_w = w^1$;
    tant que $S_w < u$ **faire**
        $j = j + 1$;
        $S_w = S_w + w(j)$
    Le membre j est conservé et remplace le membre n.

Références

[1] N.J. Gordon. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing)*, 140 :107–113(6), April 1993.