0.1 Estimation

0.2 Chaîne de Markov cachée

0.3 Méthode séquentielle - Approche Probabiliste

0.4 Filtrage bayésien

Le filtrage bayésien consiste à écrire la récurrence sur les lois de probabilité, pour estimer, en fonction des observations passées et courante $y_{1:k}$ l'état courant $\boldsymbol{x}_k$ et de prédire l'état future $\boldsymbol{x}_{k+1}$.

Pour simplifier les notations, l'exposant $^{|k}$ qui conditionne la densité par les observations $\boldsymbol{y}_{1:N}$. La densité de l'état est initialisée par la densité a priori de l'état initial p_{X_0}.

Puis pour tout $k \geq 0$ les lois de probabilité sont propagées.

L'étape de propagation ou *forecast* loi *a priori* est obtenue grace à la loi des probabilité totales

$$p^{|k}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x}) = \int p_{\boldsymbol{X}_{k+1}|\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{x}) p^{|k}_{\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{x}')dx' \tag{1}$$

La loi *a priori* de la $k+1$ observations peut être otenue de nouveau grace à la loi de probabilité totale

$$p^{|k}_{\boldsymbol{Y}_{k+1}}(\boldsymbol{y}) = \int p_{\boldsymbol{Y}_{k+1}|\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) p^{|k}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x})dx$$

Après la $k+1$ observation $\boldsymbol{y}_{k+1}$, l'étape d'*analyse* permet de déterminer la loi *a posteriori* de l'état avec la loi de Bayes appliquées après mesure de $\boldsymbol{Y}_n$

$$p^{|k+1}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x}) = p^{|k}_{\boldsymbol{X}_{k+1}|\boldsymbol{Y}_{k+1}=\boldsymbol{y}_{k+1}}(\boldsymbol{x}) = \frac{p^{|k}_{\boldsymbol{Y}_{k+1}|\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) p^{|k}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x})}{p^{|k}_{\boldsymbol{Y}_{k+1}}(\boldsymbol{y})}.$$

la loi de Bayes après mesure de $\boldsymbol{Y}_n$

0.4.1 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman introduit en 1960 [**?**] est une version du filtre Bayésien appliqué à un modèle linéaire Gaussien. Dans ces conditions, la distribution de l'état a priori de l'état et des observations sont défini par leur deux premiers moment tel que la propagation devient

$$E[\boldsymbol{X}^{\{}_{k+1}|midk] = \boldsymbol{M}E[\boldsymbol{X}^{\{}_{k+1}|midk],$$

$$E[\boldsymbol{X}^{\{}_{k+1}|midk] = \boldsymbol{M}E[\boldsymbol{X}^{\{}_{k+1}|midk]\boldsymbol{M}^T + \boldsymbol{Q},$$

et le modèle d'observation donne

$$E[\boldsymbol{Y}^{\{}_{k+1}|midk\ |] = ME[X^{\{}_{k+1}|midk], E[\boldsymbol{X}^{\{}|midk] = \boldsymbol{M}E[\boldsymbol{X}^{\{}_{k+1}|midk]\boldsymbol{M}^T + \boldsymbol{R}, [\boldsymbol{Y}^{\{}|midk, \boldsymbol{X}^{\{}|midk] = E[\boldsymbol{X}^{\{}_{k+1}|midk]H^T$$

De telle sorte que la distribution conditionnelle de $\boldsymbol{Y}_{k+1}$ par $^{|k}$ et $\boldsymbol{X}_{k+1}$ si cette dernière est non-dégénérée

$$E[\boldsymbol{Y}^{\{}|midk \mid \boldsymbol{X}^{\{}|midk] = ME[X^{\{}_{k+1}|midk] +$$

$$E[Y^{\{}_{k+1}|midk] = H$$

0.4.2 Filtre Particulaire

Le filtre particulaire est une implémentation du filtre bayésien qui approxime la PDF à l'aide d'une distribution empirique. Les transformations du filtre, *forecast* et *analysis* sont appliquées sur les membres de cet échantillon. Cette méthode converge vers la distribution exacte lorsque le nombre de particule $N \to \infty$.

Le prior de l'état $p(\boldsymbol{x})$ à l'instant k est représenté par un ensemble de N réalisations $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots \boldsymbol{x}_N\}$ de tel sorte que

$$p_{\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{x}) \simeq \sum_{i=1}^{N} \omega_k^i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k^i) \quad \text{with} \sum_{i=1}^{N} \omega_k^i = 1, \quad \omega_k^i > 0.$$

où δ est la masse de Dirac et ω_k^i les poids associés à chaque membre. Initialement, les échantillons sont supposés tirés de manière uniforme de tel sorte que $\omega_k^i = 1/N$.

Lors de l'étape de *propagation*, les particules sont propagés par le modèle de manière déterministe.

Pour s'en convaincre, le loi de probabilité totale **??** peut être réécrite

$$\begin{aligned}
p^{|k}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x}) &= \int p_{\boldsymbol{X}_{k+1}|\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{x}) p^{|k}_{\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{x}') dx' \\
&\simeq \int p_{\boldsymbol{X}_{k+1}|\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{x}) \sum_{i=1}^{N} \omega_k^i \delta(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_k^i) dx' \\
&\simeq \sum_{i=1}^{N} \omega_k^i \int p_{\boldsymbol{X}_{k+1}|\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{x}) \delta(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_k^i) dx' \\
&\simeq \sum_{i=1}^{N} \omega_k^i \delta(\boldsymbol{x} - \mathcal{M}_{k,k+1}(\boldsymbol{x}_k^i) - \boldsymbol{\eta}_{k,k+1}) = \sum_{i=1}^{N} \omega_k^i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{k+1}^i).
\end{aligned}$$

Quant à l'étape d'analyse, elle correspond à une mise à jour du poids de chaque membre, qui correspond à sa vraissemblance conditionnée aux données

$$\begin{aligned}
p^{|k+1}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x}) &\propto p^{|k}_{\boldsymbol{Y}_{k+1}|\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) \sum_{i=1}^{N} \omega_k^i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{k+1}^i) \\
&\propto \sum_{i=1}^{N} \omega_k^i \, p^{|k}_{\boldsymbol{Y}_{k+1}|\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{x}_{k+1}^i}(\boldsymbol{y}) \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{k+1}^i)
\end{aligned}$$

Leading to

$$\omega_{k+1}^i = \frac{\omega_k^i \, p^{|k}_{\boldsymbol{Y}_{k+1}|\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{x}_{k+1}^i}(\boldsymbol{y}_{k+1})}{\omega_k^j \, \sum_j^N p^{|k}_{\boldsymbol{Y}_{k+1}|\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{x}_{k+1}^j}(\boldsymbol{y}_{k+1})}$$

Où le dénominateur est simplement un terme de normalisation.

Cependant, lorsque la dimension est grande, le nombre de poids non nulle à tendance à tendre vers 0. Pour éviter cela, des méthodes de rééchantillonnage du *posterior* ont été développé. Le filtre bootstrap [**?**] consiste à selectionner les membres de poids les plus élevé, de les cloner de manière proportionnelle à leurs poids. Après échantillonnage, N particules sont rassemblées, dont certaines sont identitiques avec des approximativement égaux. Un exemple d'algorithme suivant

Algorithme 1 : Implémentation du rééchantillonnage par *bootstrap*.

pour *membre* n *do* **faire**
- Tirer u dans $\mathcal{U}[0,1[$;
- Initialiser $j = 1$;
- Affecter $S_w = w^1$;
- **tant que** $S_w < u$ **faire**
  - $j = j + 1$;
  - $S_w = S_w + w(j)$
- Le membre j est conservé et remplace le membre n.