0.1 Méthode séquentielle - Approche Probabiliste

0.1.1 Filtrage bayésien

Le filtrage bayésien consiste à écrire la récurrence sur les lois de probabilité, pour estimer, en fonction des observations passées et courante $y_{1:k}$ l'état courant $\boldsymbol{x}_k$ et de prédire l'état future $\boldsymbol{x}_{k+1}$.

Pour simplifier les notations, l'exposant $^{|k}$ qui conditionne la densité par les observations $\boldsymbol{y}_{1:N}$. La densité de l'état est initialisée par la densité a priori de l'état initial p_{X_0}.

Puis pour tout $k \geq 0$ les lois de probabilité sont propagées.

L'étape de propagation ou *forecast* loi *a priori* est obtenue grace à la loi des probabilité totales

$$p^{|k}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x}) = \int p_{\boldsymbol{X}_{k+1}|\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{x}) p^{|k}_{\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{x}')dx'$$

La loi *a priori* de la $k+1$ observations peut être otenue de nouveau grace à la loi de probabilité totale

$$p^{|k}_{\boldsymbol{Y}_{k+1}}(\boldsymbol{y}) = \int p_{\boldsymbol{Y}_{k+1}|\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) p^{|k}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x})dx$$

Après la $k+1$ observation $\boldsymbol{y}_{k+1}$, l'étape d'*analyse* permet de déterminer la loi *a posteriori* de l'état

$$p^{|k+1}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x}) = p^{|k}_{\boldsymbol{X}_{k+1}|\boldsymbol{Y}_{k+1}=\boldsymbol{y}_{k+1}}(\boldsymbol{x}) = \frac{p^{|k}_{\boldsymbol{Y}_{k+1}}(\boldsymbol{y}) p^{|k}_{\boldsymbol{X}_{k+1}}(\boldsymbol{x})}{p^{|k}_{\boldsymbol{Y}_{k+1}}(\boldsymbol{y})}$$

la loi de Bayes après mesure de $\boldsymbol{Y}_n$

0.1.2 Filtre Particulaire

Le filtre particulaire est une implémentation du filtre bayésien qui approxime la PDF à l'aide d'une distribution empirique. Les transformations du filtre, *forecast* et *analysis* sont appliquées sur les membres de cet échantillon. Cette méthode converge vers la distribution exacte lorsque le nombre de particule $N \to \infty$.

Le prior de l'état $p(\boldsymbol{x})$ à l'instant k est représenté par un ensemble de N réalisations $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots \boldsymbol{x}_N\}$ de tel sorte que

$$p_{\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{x}) \simeq \sum_{i=1}^{N} \omega^i_k \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i_k) \quad \text{with} \sum_{i=1}^{N} \omega^i_k = 1, \omega^i_k > 0.$$

où δ est la masse de Dirac et ω^i_k les poids associés à chaque membre. Initialement, les échantillons sont supposés tirés de manière uniforme de tel sorte que $\omega^i_k = 1/N$.

Lors de l'étape de *propagation*, les particules sont propagés par le modèle de manière déterministe.

Pour s'en convaincre, le loi de probabilité totale 0.1.1 peut être réécrite