

## 0.1 Estimation

## 0.2 Chaîne de Markov cachée

## 0.3 Méthode séquentielle - Approche Probabiliste

## 0.4 Filtrage bayésien

Le filtrage bayésien consiste à écrire la récurrence sur les lois de probabilité, pour estimer, en fonction des observations passées et courante  $y_{1:k}$  l'état courant  $x_k$  et de prédire l'état future  $x_{k+1}$ .

Pour simplifier les notations, l'exposant  $^{|k}$  qui conditionne la densité par les observations  $y_{1:N}$ . La densité de l'état est initialisée par la densité a priori de l'état initial  $p_{X_0}$ .

Puis pour tout  $k \geq 0$  les lois de probabilité sont propagées.

L'étape de propagation ou *forecast* loi *a priori* est obtenue grace à la loi des probabilité totales

$$p_{X_{k+1}}^{|k}(x) = \int p_{X_{k+1}|X_k=x'}(x) p_{X_k}^{|k}(x') dx' \quad (1)$$

La loi *a priori* de la  $k + 1$  observations peut être obtenue de nouveau grace à la loi de probabilité totale

$$p_{Y_{k+1}}^{|k}(y) = \int p_{Y_{k+1}|X_{k+1}=x}(y) p_{X_{k+1}}^{|k}(x) dx$$

Après la  $k + 1$  observation  $y_{k+1}$ , l'étape d'*analyse* permet de déterminer la loi *a posteriori* de l'état avec la loi de Bayes appliquées après mesure de  $Y_n$

$$p_{X_{k+1}}^{|k+1}(x) = p_{X_{k+1}|Y_{k+1}=y_{k+1}}^{|k}(x) = \frac{p_{Y_{k+1}|X_{k+1}=x}(y) p_{X_{k+1}}^{|k}(x)}{p_{Y_{k+1}}^{|k}(y)}.$$

la loi de Bayes après mesure de  $Y_n$

### 0.4.1 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman introduit en 1960 [5] est une version du filtre Bayésien appliqué à un modèle linéaire Gaussien. Dans ces conditions, la distribution de l'état a priori de l'état et des observations sont défini par leur deux premiers moment tel que la propagation devient

$$\begin{aligned} \hat{m}_X &= \mathbb{E}[X_{k+1}^{|k}] = M \mathbb{E}[X_k^{|k}], \\ \hat{P}_{k+1} &= \mathbb{V}[X_{k+1}^{|k}] = M \mathbb{E}[X_k^{|k}] M^T + Q, \end{aligned}$$

et le modèle d'observation donne

$$\begin{aligned} m_Y &= \mathbb{E}[Y_{k+1}^{|k}] = H \mathbb{E}[X_{k+1}^{|k}], \\ C_{Y,Y} &= \mathbb{V}[Y_{k+1}^{|k}] = H \mathbb{V}[X_{k+1}^{|k}] H^T + R, \\ C_{X,Y} &= \mathbb{C}[X_{k+1}^{|k}, Y_{k+1}^{|k}] = P_{k+1} H^T, \end{aligned}$$

De telle sorte que la distribution conditionnelle de  $Y_{k+1}$  par  $^{|k}$  et  $Y_{k+1} = y_{k+1}$ , si cette dernière est non-dégénérée (ce qui est le cas si  $R$  n'est pas singulière), est défini par ses deux premiers moments qui sont

$$\begin{aligned} m_X &= \mathbb{E}[X_{k+1}^{|k} | Y_{k+1}^{|k}] = \hat{m}_X + C_{X,Y} C_{Y,Y}^{-1} (y_{k+1} - m_Y), \\ P_{k+1} &= \mathbb{V}[X_{k+1}^{|k} | Y_{k+1}^{|k}] = \hat{P}_{k+1} - C_{X,Y} C_{Y,Y}^{-1} C_{X,Y}^T. \end{aligned}$$

Ainsi la distribution a posteriori est défini comme un produit matriciel où l'estimateur a priori  $\hat{m}_X$  et sa variance  $\hat{P}_{k+1}$  sont mis à jour à partir du *gain de Kalman*  $K = C_{X,Y} C_{Y,Y}^{-1}$  et du *terme d'innovation* ( $y_{k+1} - m_Y$ ) de telle sorte que les précédentes équations s'écrivent

$$\begin{aligned} m_X &= \hat{m}_X + K(y_{k+1} - m_Y), \\ P_{k+1} &= (I - KH)\hat{P}_{k+1} \end{aligned}$$

Finalement, on peut réécr

**Données :** Initialisation de l'état  $m_x$  et de sa covariance  $P$  ;

**pour**  $k \geq 1$  **faire**

```

    Prédiction;
     $\hat{m}_x = M m_x$ ;
     $\hat{P} = M \mathbb{E}[X_{k+1}^k] M^T + Q$ ;
    Observation de  $Y \rightarrow y$  Analyse;
    Calcul du gain de Kalman :  $K = \hat{P} H^T (H \hat{P} H^T + R)^{-1}$  ;
    Calcul de l'analyse;
     $m_x = \hat{m}_x + K(y - H \hat{m}_x)$ ;
    Calcul de la matrice de covariance de l'état;

```

**Algorithme 1 :** Filtre de Kalman

## 0.4.2 Filtre Particulaire

Le filtre particulaire est une implémentation du filtre bayésien qui approxime la PDF à l'aide d'une distribution empirique. Les transformations du filtre, *forecast* et *analysis* sont appliquées sur les membres de cet échantillon. Cette méthode converge vers la distribution exacte lorsque le nombre de particule  $N \rightarrow \infty$ .

Le prior de l'état  $p(x)$  à l'instant  $k$  est représenté par un ensemble de  $N$  réalisations  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  de tel sorte que

$$p_{X_k}(x) \simeq \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(x - x_k^i) \quad \text{with} \quad \sum_{i=1}^N \omega_k^i = 1, \quad \omega_k^i > 0.$$

où  $\delta$  est la masse de Dirac et  $\omega_k^i$  les poids associés à chaque membre. Initialement, les échantillons sont supposés tirés de manière uniforme de tel sorte que  $\omega_k^i = 1/N$ .

Lors de l'étape de *propagation*, les particules sont propagées par le modèle de manière déterministe.

Pour s'en convaincre, le loi de probabilité totale 1 peut être réécrite

$$\begin{aligned} p_{X_{k+1}}^k(x) &= \int p_{X_{k+1}|X_k=x'}(x) p_{X_k}^k(x') dx' \\ &\simeq \int p_{X_{k+1}|X_k=x'}(x) \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(x' - x_k^i) dx' \\ &\simeq \sum_{i=1}^N \omega_k^i \int p_{X_{k+1}|X_k=x'}(x) \delta(x' - x_k^i) dx' \\ &\simeq \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(x - \mathcal{M}_{k,k+1}(x_k^i) - \eta_{k,k+1}) = \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(x - x_{k+1}^i). \end{aligned}$$

Quant à l'étape d'analyse, elle correspond à une mise à jour du poids de chaque membre, qui correspond à sa vraisemblance conditionnée aux données

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{X}_{k+1}}^{[k+1]}(\mathbf{x}) &\propto p_{\mathbf{Y}_{k+1}|\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{x}}^{[k]}(\mathbf{y}) \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^i) \\
&\propto \sum_{i=1}^N \omega_k^i p_{\mathbf{Y}_{k+1}|\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1}^i}^{[k]}(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^i)
\end{aligned}$$

Leading to

$$\omega_{k+1}^i = \frac{\omega_k^i p_{\mathbf{Y}_{k+1}|\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1}^i}^{[k]}(\mathbf{y}_{k+1})}{\omega_k^j \sum_{j=1}^N p_{\mathbf{Y}_{k+1}|\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1}^j}^{[k]}(\mathbf{y}_{k+1})}$$

Où le dénominateur est simplement un terme de normalisation.

Cependant, lorsque la dimension est grande, le nombre de poids non nulle a tendance à tendre vers 0. Pour éviter cela, des méthodes de rééchantillonnage du *posterior* ont été développées. Le filtre bootstrap [2] consiste à sélectionner les membres de poids les plus élevés, de les cloner de manière proportionnelle à leurs poids. Après échantillonnage,  $N$  particules sont rassemblées, dont certaines sont identiques avec des approximations égales. Un exemple d'algorithme suivant

**pour** membre  $n$  **do faire**

    Tirer  $u$  dans  $\mathcal{U}[0, 1]$ ;

    Initialiser  $j = 1$ ;

    Affecter  $S_w = w^1$ ;

**tant que**  $S_w < u$  **faire**

$j = j + 1$ ;

$S_w = S_w + w(j)$

    Le membre  $j$  est conservé et remplace le membre  $n$ .

**Algorithme 2** : Implémentation du rééchantillonnage par *bootstrap*.

## 0.5 Material Point Method (MPM)

### 0.5.1 Interprétation 1

### 0.5.2 Interprétation 2

### 0.5.3 Schéma classique

La méthode MPM est implémentée généralement en trois phases. Dans un premier temps, les quantités définies sur les particules sont transférées sur les noeuds de la grille  $p2g$ . Le principe fondamental de la dynamique est alors résolu permettant de déterminer une grille déformée. Finalement, les nouvelles quantités nodales permettent de mettre à jour les quantités particulières dans une phase de transfert grille à particule ( $g2p$ ).

**p2g** La grille de positions de noeuds  $x_I$  est initialisée avec des valeurs nulles.

La masse  $m_p$ , la quantité de mouvement  $m_p \mathbf{v}_p$  et les forces  $\mathbf{f}_p$  sont transférées à la grille à l'aide des fonctions de forme  $\phi_I$  associées à chaque noeuds

$$\begin{aligned}
m_I &= \sum_p \varphi_{Ip} m_p, \\
m_I \mathbf{v}_I &= \sum_p \varphi_{Ip} m_p \mathbf{v}_p, \\
\mathbf{f}_I &= \sum_p \varphi_{Ip} \mathbf{f}_p.
\end{aligned}$$

Des transferts plus complexes capable de préserver les moments angulaires ont été développés comme APIC [4], Poly-PIC [1], et MLS-MPM [3].

**Mise à jour sur la grille** La grille à chaque étape est initialisée dans un état non déformée. A l'aide du principe fondamentale de la dynamique, la vitesse sur la grille est mise à jour de manière explicite tel que

$$\begin{aligned} m_I \mathbf{a}_I &= \mathbf{f}_I + \mathbf{f}_g, \\ m_I \mathbf{v}^{n+1} &= \mathbf{v}^n + \Delta t (\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_g)/m_I, \\ \mathbf{x}_I^{n+1} &= \mathbf{x}_I^n + \Delta t \mathbf{v}^{n+1}. \end{aligned}$$

C'est durant cette étape que les conditions limites ou les collisions avec un objet peuvent être prise en compte.

**g2p** Les particules vont suivre la déformation de la grille. Cela aura deux conséquence : La mise à jour de la matrice de déformation  $\mathbf{F}_p$  et de leurs positions  $\mathbf{x}_p$  et leur vitesses  $\mathbf{v}_p$ .

La mise à jour de  $\mathbf{F}_p$  est réalisé avec la déformée de la grille  $\mathbf{x}_I^{n+1}$  de manière implicite en utilisant  $\mathbf{v}^{n+1}$  de telle sorte que

$$\mathbf{F}_p^{n+1} = \left( \mathbf{I} + \Delta t \sum_I \mathbf{v}_I^{n+1} (\nabla \varphi_{Ip}^T) \right) \mathbf{F}_p^n.$$

En ce qui concerne l'étape d'advection des particules, le schéma PIC suggérerait l'interpolation des vitesses tel que

$$\mathbf{v}_{PIC}^{n+1} = \sum_I \varphi_{Ip} \mathbf{v}_I^{n+1}$$

Si ce schéma est stable, il est toutefois dissipatif. Inversement la mise à jour FLIP propose de mettre à jour la vitesse  $\mathbf{v}_{PIC}^n$  en interpolant l'accélération tel que

$$\mathbf{v}_{FLIP}^{n+1} = \mathbf{v}_p^n \sum_I \varphi_{Ip} (\mathbf{v}_I^{n+1} - \mathbf{v}_I^n)$$

Dans ce cas, le transfert est conservatif mais instable. Ainsi, il est recommandé d'utiliser pour mettre à jour la vitesse  $\mathbf{v}^{n+1}$  une combinaison linéaire des deux formulations tel que

$$\mathbf{v}_p^{n+1} = \alpha \left( \mathbf{v}_p^n \sum_I \varphi_{Ip} (\mathbf{v}_I^{n+1} - \mathbf{v}_I^n) \right) + (1 - \alpha) \sum_I \varphi_{Ip} \mathbf{v}_I^{n+1}$$

avec  $\alpha \in [0, 1]$ .

Les schémas de type APIC, PolyPIC ou MLS-MPM, utilisant de plus un transfert du gradient de  $\mathbf{v}$ , utilise une mise à jour PIC tout en restant conservatif.

La position est elle mise jour en interpolant la déformation de la grille de telle sorte que

$$\mathbf{x}_p^{n+1} = \mathbf{x}_p^n + \sum_I \varphi_{Ip} \mathbf{x}_I^{n+1}$$

Finalement, la grille de calcul peut être effacée et réinitialisée.

La force interne de la particule  $\mathbf{f}_p$  dépend de la loi de comportement qui lui est associée.

Elle dépend généralement de la contrainte  $\sigma_p$  qui peut être mise à jour au début ou à la fin du schéma donnant deux formulations différence USF (*Update Stress First*) et USL (*Update Stress Last*).

## Références

- [1] Chuyuan Fu, Qi Guo, Theodore Gast, Chenfanfu Jiang, and Joseph Teran. A polynomial particle-in-cell method. *ACM Transactions on Graphics*, 36(6) :1–12, November 2017.
- [2] N.J. Gordon. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing)*, 140 :107–113(6), April 1993.
- [3] Yuanming Hu, Yu Fang, Ziheng Ge, Ziyin Qu, Yixin Zhu, Andre Pradhana, and Chenfanfu Jiang. A moving least squares material point method with displacement discontinuity and two-way rigid body coupling. *ACM Transactions on Graphics*, 37(4) :1–14, August 2018.
- [4] Chenfanfu Jiang, Craig Schroeder, Andrew Selle, Joseph Teran, and Alexey Stomakhin. The affine particle-in-cell method. *ACM Transactions on Graphics*, 34(4) :1–10, July 2015.
- [5] R. E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1) :35–45, March 1960.