

Alignement des champs de vorticité

Marius Duvillard

2 août 2024

1 Définition du problème

On suppose que les champs de vorticité ont été mal aligné. Pour corriger cette erreur, on souhaite appliquer une correction qui respecte les contraintes d'un écoulement incompressible. Pour cela, on introduit une transformation Φ qui doit corriger l'ébauche. On récrit la loi de Bayes avec cette information

$$p(\omega, \Phi \mid y) \propto p(y \mid \omega, \Phi) p(\omega \mid \Phi) p(\Phi)$$

$$p(\omega, u \mid y) \propto p(y \mid \omega, u) p(\omega \mid u) p(u)$$

Pour les deux premiers termes on retrouve facilement la vraisemblance conditionnée par l'ébauche déformée c'est à dire $\Phi(\omega)$ qui est appliqué sur les coordonnées lagrangienne du champ. Le prior est également défini sur le champ déformé. Enfin il faut définir un prior pour Φ . Ce terme est assez arbitraire. On veut simplement qu'il vérifie la condition d'un écoulement incompressible.

Le champ de vorticité est porté par une discrétisation particulaire $\mathcal{P} = \{(x_p, \Gamma_p)\}$ tel que pour tout $x \in \Omega$

$$\omega(x) = \sum_{p=1}^{n_p} \Gamma_p \phi_\varepsilon(x - x_p)$$

La transformation Φ est une transformation qui s'applique sur la position des particules de la discrétisation, tel que ω_Φ le nouveau champ de vorticité est

$$\omega_\Phi(x) = \sum_{p=1}^{n_p} \Gamma_p \phi_\varepsilon(x - \Phi(x_p)).$$

A partir de ces définitions, la distribution a posteriori peut être r crite :

— La vraisemblance devient alors

$$p(y \mid \omega, \Phi) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \|y - h(\omega_\Phi)\|_{R^{-1}}^2\right),$$

où R la matrice de covariance des observations ;

— Le prior sur les amplitudes d'ébauche devient

$$p(\omega \mid \Phi) \propto \frac{1}{\sqrt{|P(\Phi)|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \|\omega_\Phi - \omega^f\|_{P(\Phi)^{-1}}^2 \right),$$

où $P(\Phi)$ la matrice (ou fonction) de covariance de l'état après transformation.

— finalement le prior sur le déplacement est défini comme

$$p(\Phi) \propto \exp(-L(\Phi)),$$

où L est une fonction à définir.

Nous obtenons une fonctionnelle à minimiser à partir de la log vraisemblance tel que

$$\mathcal{L}(\omega, \Phi) = \frac{1}{2} \|y - h(\omega_\Phi)\|_{R^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \|\omega_\Phi - \omega^f\|_{P(\Phi)^{-1}}^2 + L(\Phi) - \frac{1}{2} \ln(|P(\Phi)|).$$

$$\mathcal{L}(\omega, u) = \frac{1}{2} \|y - h(\omega_{\Phi(u)})\|_{R^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \|\omega_{\Phi(u)} - \omega^f\|_{P_{\Phi(u)}^{-1}}^2 - \frac{1}{2} \ln(|P(\Phi(u))|) + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{P_u^{-1}}^2.$$

En plus de la formule variationnelle habituelle, on observe également le terme lié à la normalisation sur le prior des amplitudes.

Comment dans Ravela 2007, plusieurs méthodes de résolution peuvent être proposées. Une première proposition est de proposer une formulation itérative. L'objectif est de fixer P pour la mise à jour, et d'utiliser ensuite les membres pour mettre à jour cette matrice de covariance. P^- est initialisée à 0 et on définit une nouvelle fonctionnelle

$$\mathcal{L}(\omega, \Phi \mid \Phi^-) = \frac{1}{2} \|y - h(\omega_\Phi)\|_{R^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \|\omega_\Phi - \omega^f\|_{P(\Phi^-)^{-1}}^2 + L(\Phi) - \frac{1}{2} \ln(|P(\Phi^-)|).$$

Celle-ci peut-être minimisée pour (ω, Φ) simultanément. Nous proposons de séparer l'étape d'alignement et de correction des intensités. Pour cela, nous faisons une approximation en utilisant les équations d'Euler-Lagrange.

On peut en déduire deux fonctions coût à minimiser

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi) &= \frac{1}{2} \|y - h(\omega_\Phi)\|_{R^{-1}}^2 + L(\Phi) \\ \mathcal{L}(\omega) &= \frac{1}{2} \|y - h(\omega_\Phi)\|_{R^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \|\omega_\Phi - \omega^f\|_{P(\Phi)^{-1}}^2 \end{aligned}$$

2 Correction dans le span des champs de vitesse des membres

On cherche une transformation définie par l'intégration de la position d'un jeu de particule $\mathcal{P} = \{(x_p, \Gamma_p)\}$ par un champs de vitesse u tel que

$$\begin{aligned} x_p(t; u) &= x_p^0 + \int_0^t u(x_p(t')) dt' \\ \Phi(x_p^0, u) &= x_p(t = 1; u). \end{aligned}$$

$$\Phi(x_p, u) = x_p + \int_0^1 u(x_p(t)) dt$$

On souhaite identifier ce champ de vitesse tel que

$$u = \arg \min_{u \in \mathcal{V}} \|u^{obs} - h_u(\{(x_p, \Gamma_p)\}; x_{obs}, u)\|_{R^{-1}}^2.$$

où u^{obs} sont les vitesse observées en x_{obs} , h_u l'opérateur d'observation après application du champ de vitesse u pour déplacer les particules.

Le champ u est défini dans un espace vectoriel \mathcal{V} dans lequel il admet une décomposition.

Dans un premier temps on choisi $\mathcal{V} = \text{Span}(u_m)$ où u_m est le champ de vitesse du m -ème membre.

Ce choix est cohérent car par CL, il permet de définir une transformation à divergence nulle. De plus, il est cohérent avec la philosophie du filtre de Kalman d'utiliser la distribution des membres.

Ainsi le champ u se réécrit comme $u = \sum_m a_m u_m$.

On peut réécrire la fonction objectif en fonction du vecteur $a \in \mathbb{R}^N$

$$\mathcal{L}_a = \|u^{obs} - h_a(\{(x_p, \Gamma_p)\}; x_{obs}, a)\|_{R^{-1}}^2.$$

Il convient de définir l'opérateur h comme l'observation du champ de vitesse aux coordonnées x_{obs} après déplacement des particules selon u

$$h_a(\{(x_p, \Gamma_p)\}; x_{obs}, a) = h(\{(\tilde{x}_p, \Gamma_p)\}; x_{obs}) = U_{obs}(\tilde{x}_p, \Gamma_p).$$

Du fait de la non-linéarité du problème (non linéarité de $x(t; a)$ par rapport à a), le problème n'est pas convexe. On se propose de résoudre le problème à l'aide d'un algorithme de minimisation NL. Pour cela on souhaite évaluer le gradient de \mathcal{L}_a .

Dans un premier temps, ce vecteur est évalué par approximation de la dérivée directionnelle

$$\frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial a_i}(a) = D_{u_i} \mathcal{L}_a(a) \approx \frac{\mathcal{L}_a(a + \delta a_i e_i) - \mathcal{L}_a(a)}{\delta a_i}$$

Connaissant \mathcal{L}_a et son gradient, on peut appliquer des algorithmes de minimisation NL.

3 Calcul de la dérivée

Le calcul de la dérivée par différence finie nécessite de réaliser M forward supplémentaire, ce qui peut être coûteux. Une alternative consiste à déterminer une faiseau principal et de déterminer M perturbation autour de cette trajectoire. Supposons que nous souhaitons calculer $\nabla_a h$. Pour cela nous perturbons le champ d'alignement $v(a)$ selon les direction e_i tel que $a' = a + \varepsilon e_i$. Cette perturbation va entraîner une déviation autour de la trajectoire en a que l'on note x_a tel que $x_{a'}(t) = x_a(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t), \dots$. La dérivée particulière donne

$$\frac{d}{dt}(x_a + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2, \dots) = \sum_j a_j u_j(x_a + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2, \dots) + \varepsilon a_i u_i(x_a + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2, \dots)$$

Par développement en série de Taylor on obtient pour les différents champs de vitesse u_j

$$u_j(x_a + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2, \dots) = u_j(x_a) + (\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2, \dots) \nabla_x u_j(x_a) + o(\varepsilon)$$

En substituant dans la première expression, on obtient les deux premiers ordres du développement

$$\begin{aligned} \frac{dx_a}{dt} &= \sum_j a_j u_j(x_a) \\ \frac{dx_1}{dt} &= \sum_j a_j x_1 \nabla_x u_j(x_a) + a_i u_i(x_a). \end{aligned}$$

Ainsi, la position finale des particules $x_{a'}(t=1) = x_a(t=1) + \varepsilon x_1(t=1)$.

Pour ce faire, on pourra résoudre le problème joint

$$\begin{cases} \frac{dx_a}{dt} &= \sum_j a_j u_j(x_a), \\ x_a(t=0) &= x_a^0, \\ i = 1, \dots, M : \\ \frac{d\hat{x}_i}{dt} &= \hat{x}_i (\sum_j a_j \nabla_x u_j(x_a)) + a_i u_i(x_a), \\ \hat{x}_i(t=0) &= 0. \end{cases}$$

4 Ajout du prior

On souhaite tenir compte de notre prior dans la fonction coût. En effet, la fonction de coût de la posterior est la suivante

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2} \|u^{obs} - h_a(\{(x_p, \Gamma_p)\}; x_{obs}, a)\|_{R^{-1}}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{P^+}^2.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u(u) &= \frac{1}{2} \|u^{obs} - h(\omega_{\Phi(u)})\|_{R^{-1}}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{P_u^{-1}}^2 \\ \mathcal{L}_\omega(\omega) &= \frac{1}{2} \|u^{obs} - h(\omega)\|_{R^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \left\| \omega - \omega_{\Phi}^f \right\|_{P_{\Phi}^{-1}}^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_a(a) = \frac{1}{2} \|u^{obs} - h(\omega_a)\|_{R^{-1}}^2 + \frac{\lambda}{2} \|a\|_2^2$$

On a besoin d'introduire un paramètre λ car l'intégration est réalisée sur un interval de temps fictif.

Avec la norme sur u qui est

$$\|u\|_{P^+}^2 = \int_{\omega^2} u(x) P^+(x, x') u(x') dx dx'$$

On peut également écrire la norme différemment. On constate que la fonction coût est infinie si $u \in \text{Ker}(P)$. Ainsi, on peut écrire une décomposition de u comme

$$u = Pv$$

où $v \in L(\Omega)$. P n'étant pas de rang plein, il existe une infinité de vecteur a qui vérifie cette propriété. Nous choisissons de les décomposer comme $v = v^* \oplus v^\perp$ avec $v^\perp \in \text{Ker}(P)$. On défini alors le pseudo inverse P^+ tel que

$$P^+u = v^*$$

Ainsi on peut la norme en fonction de v^*

$$\|u\|_{P^+}^2 = \langle u, P^+u \rangle = \langle v^*, Pv^* \rangle = \langle v, Pv \rangle$$

Or, Pv peut être défini dans une décomposition sur la famille des membres en effet

$$P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \otimes u_i$$

Ce qui implique que

$$Pv = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle u_i, v \rangle u_i$$

On note le vecteur $a \in \mathbb{R}^N$ une décomposition de Pv dans la famille des membres qui vérifie cette projection. On obtient finalement une nouvelle expression pour la norme

$$\|u\|_{P^+}^2 = \langle v, Pv \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \langle u_i, v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i^2 = \frac{1}{N} \|a\|_2^2 \quad (1)$$

5 Méthode de gradient à l'origine

On part de la fonction coût suivante

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2} \|u^{obs} - h_a(\{(x_p, \Gamma_p)\}; x_{obs}, a)\|_{R^{-1}}^2$$

Mais cette fois le champ d'alignement est paramétré différemment avec a . Ici, on cherche à déterminer la meilleure direction de champ de vitesse pour minimiser la fonction coût en appliquant une vitesse telle que

$$\frac{dx}{dt} = \sum_i a_i(t) u_i(x).$$

On cherche à faire diminuer au cours du temps t la fonction coût \mathcal{L}_a ce qui revient à minimiser La fonction de coût est donc paramétrée par deux variables a et t

$$\mathcal{L}_a(a; t) = \frac{1}{2} \|u^{obs} - h(x(t, a(t)); x_{obs})\|_{R^{-1}}^2$$

On souhaite appliquer la vitesse qui va maximiser la variation négative de L_a à $t = t_0$.

Cela revient à résoudre pour a

$$\min_{a \in \mathbb{R}^M, \|a\|^2=1} \frac{\partial L_a}{\partial t}(a; t) = \frac{1}{2} \|u^{obs} - h(x(t, a(t)); x_{obs})\|_{R^{-1}}^2$$

Cela est vrai pour deux le deux points $a_1 = \nabla_x hU / \|\nabla_x hU\|$ et $a_2 = -\nabla_x hU / \|\nabla_x hU\|$

$$\min_{a \in \mathbb{R}^M, \|a\|^2=1} \frac{d\mathcal{L}_a}{dt} = \sum_i (\nabla_x \mathcal{L}_a \cdot u_i) a_i$$

A partir des nouvelles valeurs de a on applique le champ de vitesse sur un petit incrément $x^{n+1} = x^n + (\sum_i a_i u_i) dt$.

On procède de même au pas de temps suivant.

On a donc un problème linéaire avec contrainte quadratique (LPQC) à résoudre.

Le calcul du terme $\nabla_x \mathcal{L}_a \cdot u_i$ est en fait la dérivée directionnelle $D_{u_i} \mathcal{L}_a(a)$, où ici a_i sont les composantes de la dérivée de vitesse à appliqué à l'instant t .