

0.1 Estimation

0.2 Chaîne de Markov cachée

0.3 Méthode séquentielle - Approche Probabiliste

0.3.1 Filtrage bayésien

Le filtrage bayésien consiste à écrire la récurrence sur les lois de probabilité, pour estimer, en fonction des observations passées et courante $y_{1:k}$ l'état courant x_k et de prédire l'état future x_{k+1} .

Pour simplifier les notations, l'exposant $|^k$ qui conditionne la densité par les observations $y_{1:N}$. La densité de l'état est initialisée par la densité a priori de l'état initial p_{X_0} .

Puis pour tout $k \geq 0$ les lois de probabilité sont propagées.

L'étape de propagation ou *forecast* loi *a priori* est obtenue grace à la loi des probabilité totales

$$p_{X_{k+1}}^{|k}(x) = \int p_{X_{k+1}|X_k=x'}(x) p_{X_k}^{|k}(x') dx' \quad (1)$$

La loi *a priori* de la $k + 1$ observations peut être obtenue de nouveau grace à la loi de probabilité totale

$$p_{Y_{k+1}}^{|k}(y) = \int p_{Y_{k+1}|X_{k+1}=x}(y) p_{X_{k+1}}^{|k}(x) dx$$

Après la $k + 1$ observation y_{k+1} , l'étape d'*analyse* permet de déterminer la loi *a posteriori* de l'état avec la loi de Bayes appliquées après mesure de Y_n

$$p_{X_{k+1}}^{|k+1}(x) = p_{X_{k+1}|Y_{k+1}=y_{k+1}}^{|k}(x) = \frac{p_{Y_{k+1}|X_{k+1}=x}(y) p_{X_{k+1}}^{|k}(x)}{p_{Y_{k+1}}^{|k}(y)}.$$

De ces lois sur les distributions de probabilité peuvent être déduites les estimateurs Bayésiens tels que le MMSE

0.4 Filtre de Kalman

Introduit par Kalman en 1960 [2], le filtre de Kalman est la version linéaire du filtre de bayésien. En supposant les distributions Gaussienne, et le modèle de Chaîne de Markov linéaire 0.2, ...

0.4.1 Filtre Particulaire

Le filtre particulaire est une implémentation du filtre bayésien qui approxime la PDF à l'aide d'une distribution empirique. Les transformations du filtre, *forecast* et *analysis* sont appliquées sur les membres de cet échantillon. Cette méthode converge vers la distribution exacte lorsque le nombre de particule $N \rightarrow \infty$.

Le prior de l'état $p(x)$ à l'instant k est représenté par un ensemble de N réalisations $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ de tel sorte que

$$p_{X_k}(x) \simeq \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(x - x_k^i) \quad \text{with} \quad \sum_{i=1}^N \omega_k^i = 1, \quad \omega_k^i > 0.$$

où δ est la masse de Dirac et ω_k^i les poids associés à chaque membre. Initialement, les échantillons sont supposés tirés de manière uniforme de tel sorte que $\omega_k^i = 1/N$.

Lors de l'étape de *propagation*, les particules sont propagées par le modèle de manière déterministe.

Pour s'en convaincre, le loi de probabilité totale 1 peut être réécrite

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{X}_{k+1}}^{(k)}(\mathbf{x}) &= \int p_{\mathbf{X}_{k+1}|\mathbf{X}_k=\mathbf{x}'}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}_k}^{(k)}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\
&\simeq \int p_{\mathbf{X}_{k+1}|\mathbf{X}_k=\mathbf{x}'}(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_k^i) d\mathbf{x}' \\
&\simeq \sum_{i=1}^N \omega_k^i \int p_{\mathbf{X}_{k+1}|\mathbf{X}_k=\mathbf{x}'}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_k^i) d\mathbf{x}' \\
&\simeq \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(\mathbf{x} - \mathcal{M}_{k,k+1}(\mathbf{x}_k^i) - \boldsymbol{\eta}_{k,k+1}) = \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^i).
\end{aligned}$$

Quant à l'étape d'analyse, elle correspond à une mise à jour du poids de chaque membre, qui correspond à sa vraisemblance conditionnée aux données

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{X}_{k+1}}^{(k+1)}(\mathbf{x}) &\propto p_{\mathbf{Y}_{k+1}|\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{x}}^{(k)}(\mathbf{y}) \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^i) \\
&\propto \sum_{i=1}^N \omega_k^i p_{\mathbf{Y}_{k+1}|\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1}^i}^{(k)}(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^i)
\end{aligned}$$

Leading to

$$\omega_{k+1}^i = \frac{\omega_k^i p_{\mathbf{Y}_{k+1}|\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1}^i}^{(k)}(\mathbf{y}_{k+1})}{\omega_k^j \sum_{j=1}^N p_{\mathbf{Y}_{k+1}|\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1}^j}^{(k)}(\mathbf{y}_{k+1})}$$

Où le dénominateur est simplement un terme de normalisation.

Cependant, lorsque la dimension est grande, le nombre de poids non nulle a tendance à tendre vers 0. Pour éviter cela, des méthodes de rééchantillonnage du *posterior* ont été développées. Le filtre bootstrap [1] consiste à sélectionner les membres de poids les plus élevés, de les cloner de manière proportionnelle à leurs poids. Après échantillonnage, N particules sont rassemblées, dont certaines sont identiques avec des approximatifs égaux. Un exemple d'algorithme suivant

Algorithme 1 : Implémentation du rééchantillonnage par *bootstrap*.

```

1 pour membre  $n$  do faire
2   Tirer  $u$  dans  $\mathcal{U}[0, 1[$ ;
3   Initialiser  $j = 1$ ;
4   Affecter  $S_w = w^1$ ;
5   tant que  $S_w < u$  faire
6      $j = j + 1$ ;
7      $S_w = S_w + w(j)$ 
8   Le membre  $j$  est conservé et remplace le membre  $n$ .

```

Références

- [1] N.J. Gordon. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing)*, 140 :107–113(6), April 1993.
- [2] R. E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1) :35–45, March 1960.