Consecință: Dacă $\exists f: A \to B$ inj $\}$ $\Rightarrow \exists h: A \to B$ bij.
$\exists g: B \to A$ inj $\}$

$A \supseteq g(B) \supseteq g(f(A)) \Rightarrow A \sim g(B)$

$g \circ f: A \to A$ inj. $\Rightarrow A \sim gf(A)$

Grupuri. Teorema Lagrange:

Teoremă

Orice gr. ciclic este izomorf cu $(\mathbb{Z},+)$ sau $(\mathbb{Z}_n,+)$

Grupuri de transformări

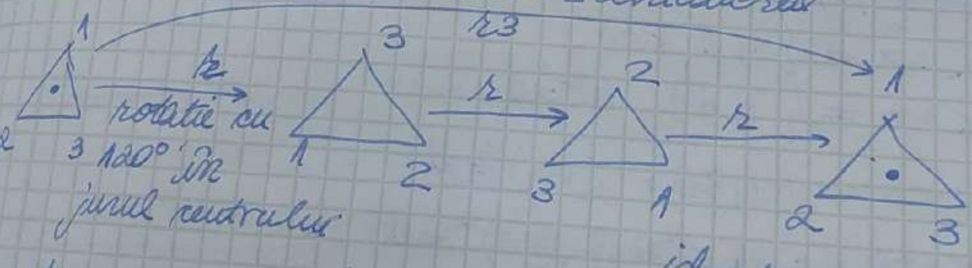
$\Pi = \mathbb{R}^2$, $\underbrace{F}_{\text{figură}} \subset \Pi$

Def. Se num. ordinul grupului $|$

$F = \Delta$ echilateral

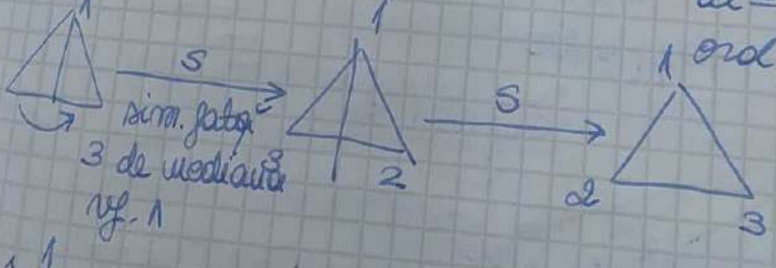
D_n = ordinul diedral = transformă a un poligon regulat cu n laturi

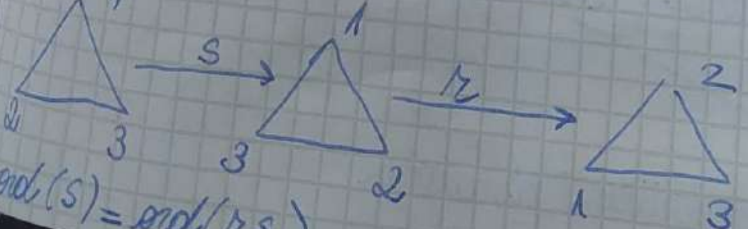
D_3 = grupul simetriilor unui Δ echilateral



id = 1

ord(r) = 3





$rs = s_3$

$r^2 s = s_2$

Temă de verif.

$ord(s) = ord(rs) = ord(r^2 s) = 2$

$D_3 = \{1, r, r^2, s, \underset{sr^2}{\underset{\shortparallel}{rs}}, \underset{sr}{\underset{\shortparallel}{r^2s}}\} = \{(123), (132), (23), (13),$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel\, S_3$

<u>Obs</u>: Pt. $x \neq e$, $x \in G$, $ord(x) = n$, $x^n = e$

Atunci $\{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ sunt distincte

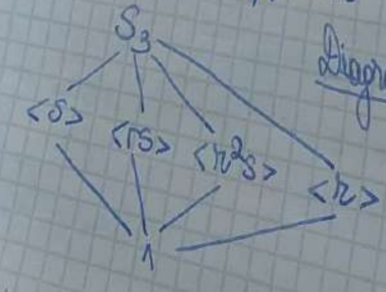
$\langle r \rangle = \{1, r, r^2\}$

$\langle s \rangle = \{1, s\}$, $s^2 = d$

$\langle rs \rangle = \{1, rs\}$ $(rs)^2 = d$

$\langle r^2s \rangle = \{1, r^2s\}$, $(r^2s)^2 = d$

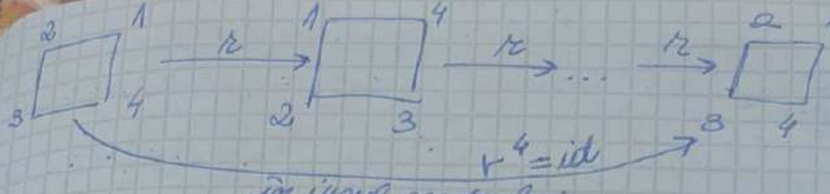
- $D_4 \leq S_4$, $|D_4| = 2n$



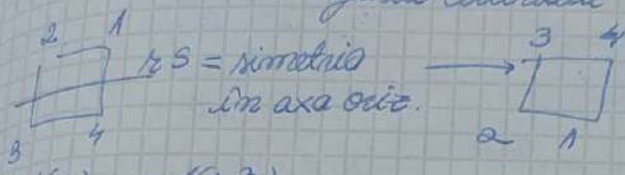
<u>Diagrama Hasse</u>

D_4 = grupul simetriilor pătratului

$\ldots s, r^2 s\} = \{(123), (132), (23), (13),$
S_3
$r^2 sr$



în jurul centrului



$ord(r) = ord(r^3) = 4$

$ord(r^2) = 2$

$(r^2)^2 = r^4 = id$

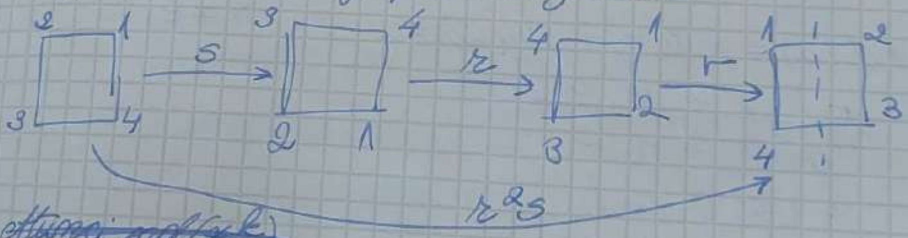
$ord(s) = 2.$

Obs: Fie $n = ord(x)$, $x \in G$ gr.
Atunci $ord(x^k) = \frac{n}{(n,k)}$

$r^2 s$ = simetria față de axa verticală

rs, $r^3 s$ – simetrii față de diagonale

$\ldots, x^n = e$
$\ldots$t distincte



~~Atunci ord(x^k)~~

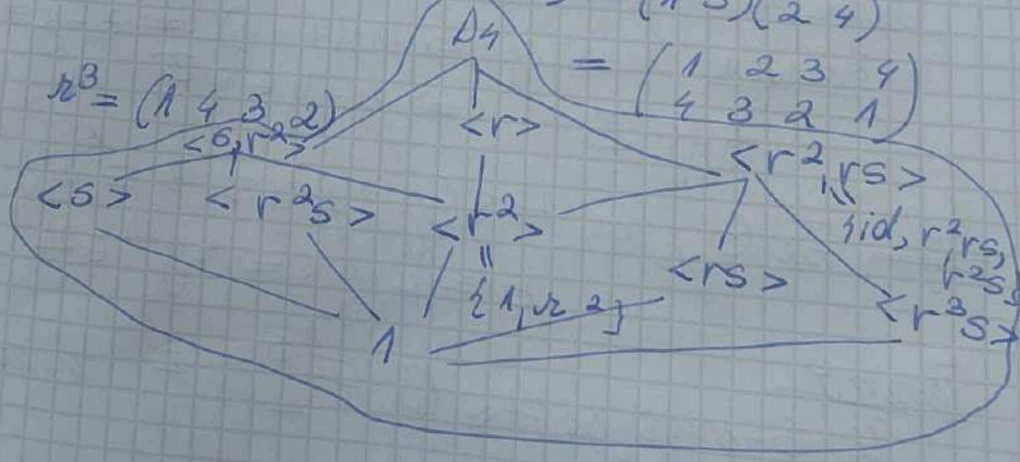
$r = (1\ 2\ 3\ 4)$

$r^2 = (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 3)(2\ 4)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$r^3 = (1\ 4\ 3\ 2)$

D_4



Produse directe de grupuri

G_1, G_2 - gr. formăm $G_1 \times G_2 = \{(x,y) \mid x \in G_1, y \in G_2\}$

$(G_1 \times G_2, \cdot)$ $\quad (x_1, y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$

$x \mapsto (x, e_2) \in G_1 \times G_2$

$G_2 \ni y \mapsto (x_1, y)$

Obs: Elem. din G_1 și G_2 văzute ca elemente în $G_1 \times G_2$ comută!

$(x, e_2)\cdot(e_1, y) = (x e_1, e_2 y)$
$= (e_1 x, y \cdot e_2) = (e_1, y)\cdot(x, e_2)$

Exemplu: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ - grup Klein

$\{(\hat 0, \hat 0), \underbrace{(\hat 1, \hat 0)}_{a}, \underbrace{(\hat 0, \hat 1)}_{b}, \underbrace{(\hat 1, \hat 1)}_{c}\}$

$ord(a) = ord(b) = ord(c) = 2$

+	e	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Obs: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \not\cong \mathbb{Z}_4$

$ord(x) = 2$, $x \neq e$ $\qquad ord(\hat 1) = 4$

Clase de congruență modulo un subgrup

Exemplu: $x \equiv_n y \Leftrightarrow n \mid (x-y) \Leftrightarrow x - y = nk$

$x, y \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$

Def. Fie G_{gp} și $H \leq G$. Definim $x \equiv^{s}_{H} y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H$

$x \equiv^{d}_{H} y \Leftrightarrow x y^{-1} \in H$

Teoremă

Fie G-grup și $H \leq G$, $\equiv^{s}_{H}$, $\equiv^{d}_{H}$ sunt relații de echivalență

... de grupuri

$= \{(x,y) \mid x\in G_1, y\in G_2\}$

$(x_2,y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$

... elem. din G_1 și G_2 văzute ... elemente în $G_1\times G_2$ ... comută!

$(e_1,y) = (xe_1, e_2y)$

$e_2) = (e_1,y)\cdot(x,e_2)$

Obs: $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \not\cong \mathbb{Z}_4$

$(x) = \quad ord(1)$

$\neq e$

...up

$-y = mk$

$y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$

...t relație

Dem: Pt. $\equiv^s_H$: $1\in H \Leftrightarrow x^{-1}x = 1\in H$
$\Leftrightarrow x \equiv^s_H x$

$x \equiv^s_H y \Leftrightarrow x^{-1}y\in H$
$\Leftrightarrow (x^{-1}y)^{-1}\in H \Leftrightarrow y^{-1}(x^{-1})^{-1}$
$= y^{-1}x\in H$
$\Leftrightarrow y\equiv^s_H x$

$x\equiv^s_H y$ și $y\equiv^s_H z$

$x^{-1}y\in H \quad y^{-1}z\in H \Rightarrow (x^{-1}y)(y^{-1}z)\in H$

$\quad = x^{-1}z\in H$

$\quad \Updownarrow$

$\quad x\equiv^s_H z$

Similar $\equiv^d_H$ este rel. de echivalență

Notație

$[a]^s_H = \{y\in G \mid a\equiv^s_H y\} = aH$

↳ clasa de echivalență relativă la $\equiv^s_H$

$a\equiv^s_H y \Rightarrow a^{-1}y\in H \Leftrightarrow y\in aH$

$G = \bigsqcup_{a\in G} aH$

Exemplu:

$S_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

Fie $\langle(12)\rangle = H = \{id, (12)\}$, $(12) = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$

$\equiv^s_H$: $id_H = \{id,(12)\}$

$(12)H = \{(12)id, (12)(12)\} = \{(12), id\}$
$= H.$

$(13)H = \{(13)id, (13)(12)\} = \{(13), (123)\}$

$(123)H = \{(123)id, (123)(12)\} = \{(123), (13)\}$

$(23)H = \{(23)id, (23)(12)\} = (132)H = \{(132), (23)\}$.

$S_3 = H \sqcup (13)H \sqcup (23)H$

$$S_3 = \underbrace{\begin{matrix} id \\ (12) \end{matrix}}_{H} \Bigg| \underbrace{\begin{matrix} (13) \\ (123) \end{matrix}}_{(13)H} \Bigg| \underbrace{\begin{matrix} (23) \\ (132) \end{matrix}}_{(23)H} \quad (G/H)_s$$

$$H \Bigg| \underbrace{\begin{matrix} (13) \\ (132) \end{matrix}}_{H(13)} \Bigg| \underbrace{\begin{matrix} (23) \\ (123) \end{matrix}}_{H(23)} = (G/H)_d$$

Temă: Realiz. partiția lui S_3 ce rezultă din $\equiv^d_H$

$H = \langle (12) \rangle$

• Partițiile sunt distincte!

Teoremă: Fie G-grup g.p.f și H un subgrup al său, atunci $(G/H)_s$ și $(G/H)_d$ sunt echipotente.

Nr. comun se ~~numește~~ notează $[G:H]$ și se numește indicele lui H în G.

Def. $(G/H)_s$ și resp. $(G/H)_d$ sunt mulțimile claselor de echivalență date de $\equiv^s_H$ și resp. $\equiv^d_H$.

Dem: $(G/H)_s \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} (G/H)_d$

$\alpha(aH) = Ha^{-1}$.

$\beta(Ha) = a^{-1}H$.

$\beta\alpha(aH) = \beta(Ha^{-1}) = (a^{-1})^{-1}H = aH$

$\Rightarrow \beta\alpha = id_{(G/H)_s}$.

3),(123)}
{(123),(13)}
)H = {(132),(23)}
(13)H ⊔ (23)H

u, atunci

cunoaște

lor de

$\alpha\beta = id_{(G/H)_d}$ curs

α, β - bij.

Exemplu: $[\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}] = n = |\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}|$

- $[\mathbb{Z} : 0] = \infty$
- $[G : G] = 1 \to$ o sg. clasă de echivalență

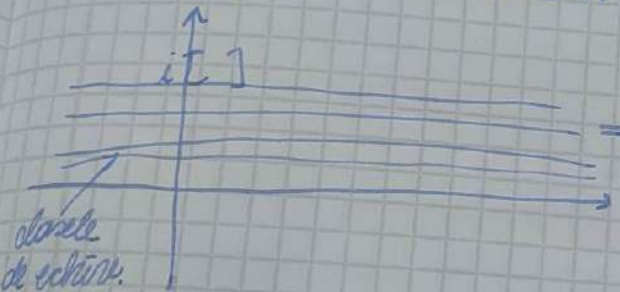
$[(\mathbb{C}^*, \cdot) : \mathbb{R}^*] = \infty$

subgrup comutativ în grupul.

$[(\mathbb{C}, +) : \mathbb{R}]$

$z \equiv_{\mathbb{R}} w \iff z - w \in \mathbb{R} \iff z - w = \alpha \in \mathbb{R}$

$x + iy - (u + iv) = \alpha$



$\Rightarrow \begin{cases} x - u = \alpha \\ y - v = 0 \iff y = v \end{cases}$

Teorema lui Lagrange

Fie G un grup, $|G| < \infty$ și $H \le G$.

Atunci $|G| = |H| \cdot [G : H]$. În particular $|H| \mid |G|$.

Dem.: Fie $a_1, \dots, a_n$ reprezentanți pt. clasele de congruență $\equiv^{s}_{H}$.

$G = a_1H \sqcup a_2H \sqcup \dots \sqcup a_nH;\ n = [G, H]$

$H \xrightarrow[\text{injectiv}]{\theta_i} a_iH = \{a_ih \mid h \in H\} \Rightarrow |H| = |a_iH|$

$\forall i = \overline{1, n}$

$\theta_i(h) = a_ih \Rightarrow \theta_i$ - surjectivă

$\theta_i(h_1)=\theta_i(h_2) \Leftrightarrow \; = a_i h_2 \Leftrightarrow a_i^{-1} a_i h_1$
$= a_i^{-1} a_i h_2 \Leftrightarrow h_1 = h_2.$

<u>Corolar</u> Fie G-finită, $\forall x \in G$, $ord(x) \mid |G|$

Dem. $H = \langle x \rangle = \{\underbrace{1, x, \dots, x^{r-1}}_{dist}\}$, $r = ord(x)$