- biografie whatsapp 4 oct 2022
- ține cont prezența la curs + seminar !!
- examen 2h (fizic, 2h 30 min online)
- **ne lasă** cu materiale la examen (maxim 2 cărți)

bibliografie (curs + seminar)

- razvan.sfetcu@fmi.unibuc.ro
  razvan.sfetcu@unibuc.ro
  0723032129

între [0,1]

- seminar se acordă puncte (maxim 1 punct pe !! activitate, răspunsuri)
- la seminar se face prezența

Curs 1

Șiruri de numere reale

Def: Fie $A \subset \mathbb{N}$ o mulțime numărabilă (i.e. $\exists g : A \to \mathbb{N}$, g bijectivă) o funcție $f : A \to \mathbb{N}$ s.n. șir de numere reale.

Notații: 1) $f(n) \overset{not}{=} x_n \, (\forall) n \in A$

2) ținând cont de def precedentă și ① obținem șirul de nr reale $(x_n)_{n \in A}$

Obs:

1) Atunci când A se subînțelege vom scrie $(x_n)_n$.

$\frac{1}{n} = x_n \, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

2) În general $A = \mathbb{N}$ sau $A = \mathbb{N}^*$, caz în care vom scrie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sau

$(x_n)_{n \geq 0}$ sau $(x_n)_n$, respectiv

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sau $\left((x_n)_{n \geq 1}\right.$ sau $\left.(x_n)_n\right)$

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

!!! Def: 1) Fie $l \in \mathbb{R}$. Spunem că șirul x_n are limita l și scriem

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$ dacă

!! $(\forall)\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ număr nat a.î.
(n epsilon)
$(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$ avem $\boxed{|x_n - l| < \varepsilon}$ (i.e. $x_n \in$
$(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$)

2) Spunem că $(x_n)_n$ are limita $+\infty$ și scriem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0$,
$\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n > \varepsilon$

3) Spunem că $(x_n)_n$ are limita $-\infty$ și scriem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$ dacă $(\forall)\ \varepsilon >$
$\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$ avem
$x_n < -\varepsilon$

!! Def: 1) Spunem că șirul x_n este convergent dacă $\exists\, l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$

!! 2) Spunem că șirul x_n este divergent dacă x_n nu este convergent

Șirurile de nr reale
- cu limită
  - finită (convergente)
  - $\pm\infty$ (divergente)
- fără limită (divergente)

Spunem că x_n crescător, respectiv descrescător dacă $x_n \le x_{n+1}\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}$, respectiv $x_n \ge x_{n+1}\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}$

Spunem că $(x_n)_n$ este strict crescător, resp st desc dacă $x_n < x_{n+1}$, resp $x_n > x_{n+1}$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$.

3) Spunem că x_n este ~~st~~ monoton, resp st monoton dacă ~~este~~ x_n este crescător sau desc (respectiv st $\nearrow$ sau st $\searrow$)

4) Spunem că x_n este mărginit dacă $\exists\, M > 0$ a.î. $|x_n| < M$

~~Criteriul clestelui~~.

T. Weierstrass

!! Orice șir de nr reale monoton și mărginit e convergent.

Obs Reciproca teoremei precedente este falsă

exc: Fie $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

a) Arătați că x_n nu este monoton.

b) Arătați că (x_n) este convergent.

Sol.:

Fie $k \in \mathbb{N}^*$

$$x_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k}$$

$$x_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}$$

$$x_{2k+2} = \frac{(-1)^{2k+2}}{2k+2} = \frac{1}{2k+2}$$

Avem $x_{2k} > x_{2k+1}$ și $x_{2k+1} < x_{2k+2}$ $\Rightarrow$ x_n nu e monoton.

b) Avem $-\frac{1}{n} \le x_n \le \frac{1}{n}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\cancel{(-1)^n}$

$\downarrow$ 0

Cf. C.C. rezultă $(x_n)_n$ este conv

$(\lim_{n\to\infty} x_n = 0)$

Prop. Orice șir de nr reale convergent m arg.

Teorema Cleștelui

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(z_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ cu prop. că $(\forall)\ n \geq n_0$ avem $x_n \leq y_n \leq z_n$!!

Pp. că $\exists\, l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$

Prop (op cu șiruri convergente)

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$!

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a \cdot x_n) = a \cdot x$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$ (Pp. $y \neq 0$)

Prop. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ atunci

1) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\right) \Leftrightarrow \left(\lim |x_n| = 0\right)$!!

2) ~~Dacă x~~ Dacă $\exists\, x \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

avem $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$

3) Dacă $x_n \to 0$ și y_n mărginit atunci ~~$\lim \frac{x_n}{x_n}$~~ $\lim \left(\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n\right) = 0$

$(0 \cdot \text{mărginit} = 0)$

!! **Lema lui Cesaro** de ~~mreale~~

Din orice șir mărginit V se poate extrage un subșir convergent (i.e $(\forall)(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ mărginit $\exists\ (x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ a.î

x_{n_k} convergent.

!! Șir CAUCHY

Spunem $(x_n)_n$ este șir Cauchy ~~[illegible]~~

$(\forall)\varepsilon > 0,\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î $(\forall) m, n \in \mathbb{N}$

$m \geq n_\varepsilon$ și $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$

$\boxed{\text{Prop}}$ următoarele afirmații sunt echivalente:

$\begin{cases} 1)\ (x_n)_n \text{ șir CAUCHY} \\ 2)\ (x_n)_n \text{ este convergent} \end{cases}$

! Exc Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}^*$

Arătați că $(x_n)_n$ nu e convergent.

Sol. Arătăm că $(x_n)_n$ nu e șir CAUCHY

$(x_n)_n$ este șir CAUCHY $\overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall)\, \varepsilon > 0$!!

$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $m \geq n$ și $n \geq n_\varepsilon$ (**$\mathbb{N}^*$ în loc de $\mathbb{N}$**)

$(\forall)\, m, n,$ ~~$m \geq n$~~ $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$

avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$

x_n nu este șir CAUCHY $\Leftrightarrow$

$\exists\, \varepsilon_0 > 0, (\forall)\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, m_k, n_k \in \mathbb{N}$

$m_k \geq k$, $n_k \geq k$ a.î. $|x_{m_k} - x_{n_k}| > \varepsilon_0$

Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$

$|x_m - x_n| = \left| 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots \frac{1}{m} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m} \geq \varepsilon_0$

Fixam $n \in \mathbb{N}^*$ și alegem $m = 2n$

$|x_m - x_n| = |x_{2n} - x_n| = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termeni}} \geq \frac{1}{2}$

$\geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

Alegem $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ Fix $k \in \mathbb{N}^*$ alegem

$m_k = 2k$ și $n_k = k$ $(m_k \geq k, n_k \geq k)$

și avem $|x_{m_k} - x_{n_k}| = |x_{2k} - x_k| \geq \frac{1}{2}$

deci $(x_n)_n$ nu e șir CAUCHY.

Prin urmare $(x_n)_n$ nu este convergent. $\square$

!! Terminologie: Șirurile CAUCHY se mai numesc șiruri fundamentale.

~~Lr~~

Limitele extreme ale unui șir de nr reale

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

Def: Fie $x \in \overline{\mathbb{R}}$ $(= \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$

Spunem că x este punct limită al șirului $(x_n)_n$ dacă $\exists$ $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_k$ cu prop că $\lim_{k\to\infty} (x_{n_k})_k = x$

Notație $\mathcal{L}((x_n)_n) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} / x$ punct limită al șirului $(x_n)_n\}$

Prop: $\exists$ există un cel mai mic punct limită (finit sau infinit) al șirului $(x_n)_n$ și un cel mai mare punct limită (finit sau infinit) al șirului $(x_n)_n$ ~~de~~

!! Def: 1) Cel mai mic punct limită al șirului x_n se numește limita inferioară a sa și se notează $\liminf_{n\to\infty} x_n$ sau $\boxed{\underline{\lim}\, x_n}$

2) Cel mai mare punct limită al șirului x_n se numește limita superioară a sa și se notează $\limsup_{n\to\infty} x_n$ sau

$$\boxed{\overline{\lim}\, x_n}$$

Prop

① $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$

② Șirul x_n are limită dacă și numai dacă $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$, caz în care avem că $\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}\, x_n$

$= \overline{\lim}\, x_n$

Exc $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Det $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$ și precizați dacă $\exists \lim_{n\to\infty} x_n$

Sol

$$x_{2n} = \frac{1+(-1)^{2n}}{2} + \frac{(-1)^{2n}}{2(2n)+1}$$

$$= 1 + \frac{\cancel{1} + 2n}{4n+1} \longrightarrow 1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{2}.$$

$$x_{2n+1} = \frac{1+(-1)^{2n+1}}{2} + (-1)^{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2(2n+1)\dots}$$

$$= 0 - \frac{2n+1}{4n+3} \Longrightarrow -\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}+1)$$

$$\boxed{L((x_n)_n) = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}}$$

$$\underline{\lim}\, x_n = -\frac{1}{2}$$

$$\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$$

$$\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} x_n$$

[redacted]