$$\frac{1}{c_n} = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$c_n \in (n, n+1) \Rightarrow n < c_n < n+1$

$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{n} > \frac{1}{c_n}}$ $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c_n} \leq \frac{1}{n}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{c_n} < 0$

$\Rightarrow (x_n)_n$ descresc. $\Rightarrow (1)$.

<u>Mărginirea</u>: Continuați voi ~~tot~~

<u>Curs 2</u>

<u>Serii de numere reale</u>

Def: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ și $s_n = x_p + x_{p+1} + \dots + x_n$

$= \sum_{k=p}^{n} x_k \quad (\forall) n \geq p$

Perechea $((x_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p})$ se numește serie de numere reale.

<u>Notația</u>: perechea $((x_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p})$ se notează $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$ sau $\sum_{n \geq p} x_n$ sau $\sum_n x_n$

<u>Obs</u> În general $p = 0$ sau $p = 1$, cazuri pe care le vom considera de acum înainte în def, teoreme etc.

Fie $\sum_n x_n$ o serie de numere reale

$(s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n \ (\forall) n \in \mathbb{N})$

Def: 1) Elementele șirului $(x_n)_n$ s.n. ter. seriei $\sum_n x_n$

2) Elementele șirului $(s_n)_n$ s.n. sume parțiale ale seriei $\sum_n x_n$

3) Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \overline{\mathbb{R}}$, acest l $= l$

se numește suma seriei $\sum_n x_n$ și vom scrie $\sum_n x_n = l$

4) Spunem că seria $\sum_n x_n$ este conv dc. (s_n) este conv.

5) Spunem că seria $\sum_n x_n$ este divergentă dc. s_n e divergent.

PROP Dacă $\sum_n x_n$ este convergentă atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$\boxed{\text{Corolar}}$ (Criteriul suficient de divergență)

Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n$ nu este 0 atunci $\sum_n x_n$ e divergent

OBS Folosind doar afirmația „$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$" nu putem decide dacă $\sum_n x_n$ este conv sau div.

Exc Determinați sumele seriilor de mai jos și precizați dacă sunt conv sau div.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n, q \in \mathbb{R}$

($0^0 = 1$ prin convenție)

Sol

(a) $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} s_n = ?$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + \dots + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} \right)$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right)$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$

Avem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ deci seria este conv.

(b)

$x_n = q^n$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$

$S_n = x_0 + \dots + x_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

$\lim_{n\to\infty} s_n = ?$

$$s_n = \begin{cases} n+1, & q = 1 \\ \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}, & q \neq 1 \end{cases}$$

Dacă $q = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty \Rightarrow \sum\limits_{0} x_n = +\infty$, seria fiind divergentă

~~Dacă~~ $\cancel{q \neq 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}}$

Fie $q \neq 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = \begin{cases} \nexists, & q \leq -1 \\ 0, & q \in (-1,1) \\ \infty, & q > 1 \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \Rightarrow \begin{cases} \nexists, & q \leq 1 \\ \dfrac{1}{1-q}, & q \in (-1,1) \\ \infty, & q > 1 \end{cases}$$

„seria numai geom"

Dacă $q \leq -1$, atunci seria noastră nu are sumă, fiind clar divergentă

Dacă $q \in (-1,1)$, atunci ~~suma~~ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = \dfrac{1}{1-q}$, seria fiind convergentă

Dacă $q > 1$ atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = \infty$, seria fiind divergentă

□

// **Obs** În aplicații putem folosi (fără justificare) convergențele urm șiruri de nr reale:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} \to \text{conv dacă } q \in (-1,1) \\ \to \text{div dacă } q \in \mathbb{R} \setminus (-1,1) \end{cases}$

(seria geometrică)

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \to \text{conv dacă } \alpha > 1 \\ \to \text{div dacă } \alpha \le 1 \end{cases}$

(seria armonică generalizată)

~~Ex~~ $\cancel{\sum\limits_{n=1} \frac{a^{n+3}}{2}}$

Obs Numerele reale q, α din Obs precedentă nu depind de n.

Prop (operații cu serii convergente)

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $c \in \mathbb{R}$.

Presupunem că $\sum\limits_n x_n$ și $\sum\limits_n y_n$ sunt convergente

atunci $\sum\limits_n (x_n \pm y_n) = \sum\limits_n x_n \pm \sum\limits_n y_n$

$\sum\limits_n c \cdot x_n = c \cdot \sum\limits_n x_n$

Criteriul lui Cauchy pt serii de nr reale:

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie de nr reale

Sunt echivalente:

1) $\sum\limits_n x_n$ este echivalentă

2) $\cancel{\#}$

$(\forall)\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon\ (\forall)\, m$ avem $|x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}| < \varepsilon$

• Criterii de convergență pt serii cu termeni pozitivi

1. criteriul raportului: Fie $\sum_n x_n$, $x_n > 0$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not}{=} l$

1) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ e convergent

2) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n x_n$ e divergent

3) Dacă $l = 1$ criteriul nu decide

2. Criteriul radicalului Fie $\sum_n x_n$, $x_n \geq 0$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists \lim \sqrt[n]{x_n} \overset{not}{=} l$

1) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ e conv

2) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n x_n$ e div

3) Dacă $l = 1$ criteriul nu decide.

3. criteriul Raabe-Duhamel (RD)

Fie $\sum_n x_n$, $x_n > 0$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l$

1) Dacă $l < 1$ atunci $\sum_n x_n$ e div

2) Dacă $l > 1$ atunci $\sum x_n$ e div

3) Dacă $l = 1$ nu decide.

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ $\quad \sum_{n=500}^{\infty} x_n$ au ac convergentă

4. Criteriul Compensării

Fie seria $\sum_n x_n$, $x_n \ge 0$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$, x_n descr.

atunci seria $\sum_n x_n$ ~~are aceeași~~ $\sim \sum_n 2^n \cdot x_{2^n}$

(i.e. $\sum_n x_n$ și $\sum_n 2^n \cdot x_{2^n}$ sunt ambele convergente sau ~~de~~ divergente)

5. Criteriul de comparație cu inegalități

Fie seriile $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$, $x_n \ge 0$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$ și $y_n \ge 0$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$

Pp că $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $n \ge n_0$ avem $x_n \le y_n$

1) Dacă $\sum_n y_n$ e convergent atunci $\sum_n y_n$ e conv.

2) Dacă $\sum_n y_n$ e div atunci $\sum_n y_n$ e div

6. Criteriul de comparație cu limită

Fie seriile $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$

$x_n \geq 0$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$, $y_n > 0$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$

Pp că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \overset{not}{=} l \in [0,\infty]$

1) Dacă $l \in (0,\infty)$ atunci cele 2 serii au ac convergență.

2) Dacă $l = 0$ și $\sum_n y_n$ e conv, atunci $\sum_n x_n$ e conv

3) Dacă $l = \infty$ și $\sum_n y_n$ e conv atunci $\sum_n x_n$ e div

Criterii de conv pt serii cu termeni oarecare

Fie $\sum_n x_n$ o serie de nr reale

Def: spunem că seria $\sum_n x_n$ este absolut convergentă dacă $\sum_n |x_n|$ convergent.

Prop Orice serie de nr reale absolut convergentă este convergent.

Obs Reciproca ~~afi~~ afirmației de mai sus nu e, în general, adevărată.

1. Criteriile Abel-Dirichlet

I Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î.

1) x_n este descrescător și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

2) $\exists M > 0$, a.î. $(\forall) n \in \mathbb{N}$

$|y_0 + y_1 + \ldots + y_n| \leq M$

Atunci $\sum_n x_n \cdot y_n$ este convergentă.

II Fie $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î.

1) x_n este monoton și marg

2) $\sum_n y_n$ convergentă

Atunci $\sum_n x_n \cdot y_n$ este convergentă.

2. Criteriul lui Leibniz

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î.

$(x_n)_n$ desc și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Atunci $\sum_n \cancel{x_n} (-1)^n \cdot x_n$ e conv

Exc

Fie $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Arat că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e conv

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ e divergentă

Sol.

a) Fie $x_n = \frac{1}{n}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$

(x_n) desc, $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ $\overset{\text{crit Leibniz}}{\Longrightarrow}$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ e convergent i.e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentă (pt că e seria armonică generalizată cu $\alpha = 1$)

Exc Studiați conv (natura) seriilor de mai jos:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n^2}$

Sol

$x_n = \frac{\sqrt{n-1}}{n^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Fie

$\frac{\sqrt{n-1}}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{n^{1/2}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$x_n < y_n (\forall) n \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ e conv (seria armonică generalizată cu $\alpha = \frac{3}{2}$)

cc de comparație cu inegalități

$\Rightarrow \sum x_n$ e convergentă

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (3n)} \cdot \frac{1}{2^n}$

Sol.

Fie $x_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 3n} (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$x_n > 0 (\forall) n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\cancel{1 \cdot 4} \cdot \ldots \cdot \cancel{(3n-2)} \cdot (3(n+1)-2)}{\cancel{3 \cdot 6} \cdot \ldots \cdot \cancel{3n} \cdot 3(n+1)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$

$\cdot \frac{\cancel{3 \cdot 6} \cdot \ldots \cdot \cancel{3n}}{\cancel{1 \cdot 4} \cdot \ldots \cdot \cancel{(3n-2)}} \cdot \frac{2^n}{1} = \lim_{n \to \infty} \frac{3n+1}{3n+3} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x_n$ convergent. $\left(\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow CC \text{ raport} \Rightarrow \sum_n x_n \text{ e conv} \right)$

Seminar 2