I. Dumitrescu *Algebra* 4 oct 2022

Năstăsescu, Niță, Vraciu *Bazele Algebrei*

Băetică, Boboc, Dăscălescu, Mincu *Probleme de algebra*

Mulțimi și funcții

Mulțimea e o colecție de elemente

ex $\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ Exemplu $\emptyset$

$n \to n+1$

Submulțime A

$X \subseteq A$

$(\forall)\ x \in X \Rightarrow x \in A$

Exemplu $A = \{1, 2, 3\}$

$X = \emptyset \subseteq A$

$X = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \ldots, \{1,2,3\} \subseteq A$

$X \subset A \Leftrightarrow X \subseteq A$ și $X \neq A$

Incluziune strictă

Def: $P(A)$ = mulțimea submulțimilor lui A $\hookrightarrow$ părțile mulțimii A

$A = \{1, 2, 3\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

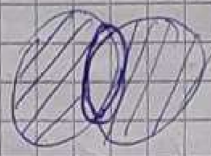
Def: $|A|$ = cardinalul mulțimii A = nr de elemente (A este mulțime finită)

$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ pt $|A| < \infty$

Def: $A = B$ două mult sunt egale dc. au aceleași elemente

$$\boxed{A \subseteq B \text{ și } B \subseteq A}$$

$(\forall)\ x \in A \Rightarrow x \in B$



$\Leftarrow$ (și invers)

"$A = B$" "$x \in A \Leftrightarrow x \in B$"

Operații

- "$\cap$" intersecția

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$ ("și")

~~"$\cup$"~~

OBS În orice mult el sunt menționate o singură dată

$\{1, 1, 2, 3\}$ NU este o mulțime.

- $\boxed{\text{"}\cup\text{" reuniunea}}$

$A \cup B$ = elementele din ambele mult (menționate o singură dată)

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ ("sau")

Diferența $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Complementara $A \subset U$ = universă

$$C_U A = C_A = \overline{A} = \{x \in U / x \notin A\} = U \setminus A$$

Prop (De Morgan)

Fie A, B mulțimi

① $\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$

② $\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$

Dem:

$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin (A \cup B)$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

(sau)

$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$.

$x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

Teoremă (prop ale $\cup, \cap$)

Proprietăți

Fie A, B, C mulțimi atunci

1. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;

   $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$

2. $A \cap B = B \cap A$

   $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow$

   $x \in B \wedge x \in A$ → comutativitate

   și

   $A \cup B = B \cup A$

3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

   $= A \cap B \cap C$

   asociativ

4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

5. $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

6. $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$

Dem 6

$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$

~~$\Leftrightarrow (x \in A)$ sau $(x \in B)$~~

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$

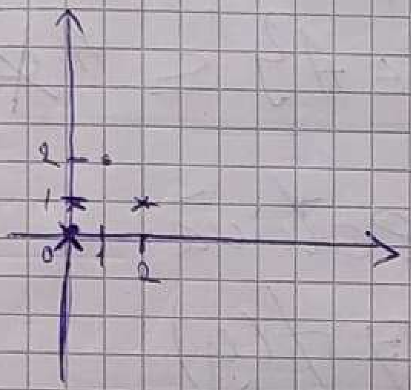
$(\Rightarrow)\ x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

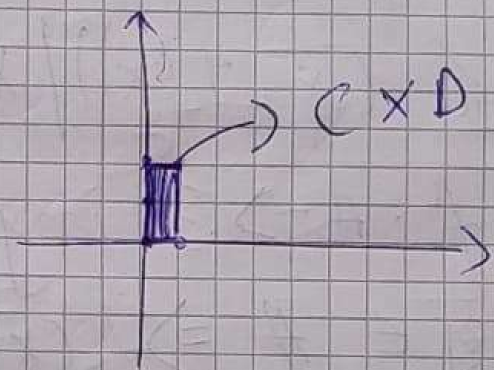
Prod cartezian a două mulțimi: A, B

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ și $b \in B\}$

$A = \{0, 1\}, B = \{0, 2\}$

$A \times B = \{(0,0), (0,2), (1,0)(1,2)\}$





$B \times A = \{(0,0), (0,1), (2,0), (2,1)\}$
$\neq$
$A \times B$

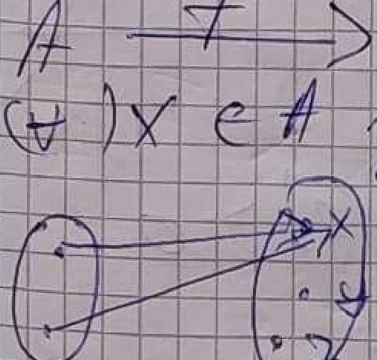
$C = [0,1]$, $D = [0,2]$

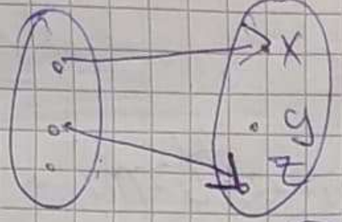
$C \times D = [0,1] \times [0,2]$

Funcții: O funcție este formată din 2 mulțimi A, B (domeniu și respectiv codomeniu) și o anumită relație

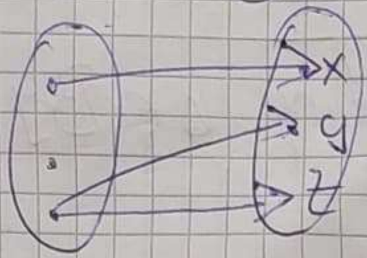
$A \xrightarrow{f} B \quad (f: A \to B)$

$(\forall)\, x \in A \underset{\text{asociem}}{\xrightarrow{f}}$ un unic $f(x) \in B$





Nu e o funcție



Nu e o funcție

<u>Def</u>: Graficul unei funcții $f: A \to B$

$$G_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \} \subseteq A \times B$$

<u>Def</u>: $f: A \to B$ injectivă

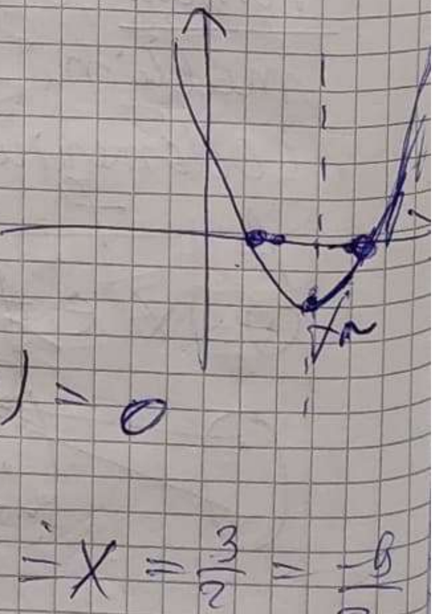
$(\forall)\, x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$(P \to Q \Leftrightarrow \overline{Q} \to \overline{P})$

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$

<u>Def</u> surj: $f: A \to B$ injectivă $\Leftrightarrow (\forall)\, y \in B$

$\exists\, x \in A$ a.î. $f(x) = y$



<u>Exemplu</u>: Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 - 3x + 2$

Este inj, surj?

- Nu este inj $f(1) = f(2) = 0$

minim $= \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(9-8)}{4} = \frac{-1}{4}$, $x = \frac{3}{2} = \frac{-b}{2a}$

~~$f(x) = -1$~~

~~$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$~~

$f(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$

$\Rightarrow f$ nu e surjectivă $\Big| \Rightarrow x \in \mathbb{C}$

NU e surjectivă.

$f: [3/2, +\infty) \to [-1/4, +\infty)$

$f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 - 3x_1 + \cancel{2} = x_2^2 - 3x_2 + \cancel{2}$

$\Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 - 3(x_1 - x_2) = 0$

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 3) = 0$

I $x_1 = x_2$

II $x_1 + x_2 = 3$

$x_1, x_2 \geq 3/2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

Deci $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(f este injectivă)

$(\forall)$ f surj

$(\forall)\ y \geq -\frac{1}{4}\ (\exists)!\ x \in [3/2, +\infty)$ a.î $f(x) = y$

$x^2 - 3x + 2 = y \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 - y = 0$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2-y)}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{1 + 4y}}{2}$$

$y \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow 4y \geq -1$

$\Rightarrow 1 + 4y \geq 0$

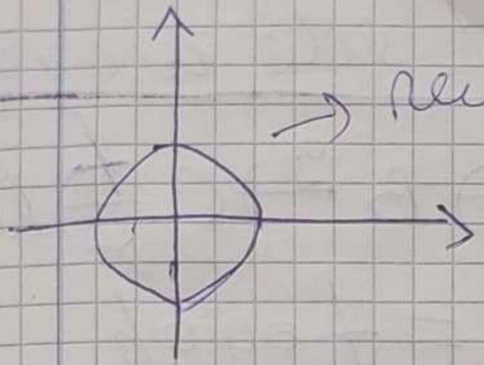
$\Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{1+4y}}{2} \in [\frac{3}{2}, \infty) \Rightarrow f$ surjectivă

Def: f s.n bijectivă $\Leftrightarrow$ este atât inj și surj.

$A \xrightarrow{f} B$ bij $\Leftrightarrow (\forall)\ y \in B\ \exists!\ x \in A$ a.î $f(x) = y$.

!! OBS: NU orice curbă din $\mathbb{R}^2$ este graficul unei funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$



→ reuniunea Gf a două fct

$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$

$f_2(x) = \sqrt{1-x^2}$

$x=0 \Rightarrow 0^2+y^2=1 \Rightarrow y \in \{\pm 1\}$

$0 \to 1$

$\ \ \searrow -1$

$\boxed{\text{Compunerea funcțiilor:}}$

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$g \circ f \quad A \to C$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$x \in A$

!! **Obs** Compunerea nu e comutativă.

Ex: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$f(x) = \sin x$

$g(z) = z^2$

$\cancel{f \circ g}\ f \circ g \neq g \circ f$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sin x^2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = \sin^2 x$

Ptr $x = \pi$

$\sin(\pi^2) \neq 0 = \sin^2(\pi)$

PROP: compunerea fct este asociativă

f, g, h funcții $A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} D$

$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$

Dem:

$(f \circ g) \circ h\,(x) = (f \circ g)(h(x))$
$x \in A$

$= f(g(h(x)))$

$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x))$

$= f(g(h(x)))$

Teorema Fie $A \xrightarrow[f']{f} B \xrightarrow[g']{g} C$ $(g \circ f = g f)$

Atunci

1. f, g inj $\Rightarrow g \circ f$ injectivă
2. f, g surj $\Rightarrow g \circ f$ surjectivă
3. f, g bij $\Rightarrow g \circ f$ bijectivă
4. $g \circ f$ injectivă $\Rightarrow f$ injectivă
5. $g \circ f$ surj $\Rightarrow g$ surjectivă

~~5~~

Def: $h : X \to Y$

$h' : X \to Y'$

$$h = h' \Leftrightarrow \begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \\ h(x) = h'(x)\ (\forall)\, x \in X = X' \end{cases} \square$$

6 g inj $\Rightarrow$ ~~$g \circ f = g \circ f'$~~

$g \circ f = g \circ f'$ $\Rightarrow f = f'$

7 f surj

$g \circ f = g' \circ f$ $\Rightarrow g = g'$