

Laboratorul 10: Logică propozițională

În acest laborator vom implementa o colecție de funcții utile pentru lucrul cu logica propozițională în Haskell. Pentru următoarea definiție:

```
type Nume = String
data Prop
  = Var Nume
  | F
  | T
  | Not Prop
  | Prop :|: Prop
  | Prop :&: Prop
  deriving Eq
infixr 2 :|:
infixr 3 :&:
```

- tipul Prop este o reprezentare a formulelor propoziționale
- variabilele propoziționale precum p și q pot fi reprezentate ca Var "p" și Var "q"
- constantele booleene F și T reprezintă false și true
- operatorul unar Not reprezintă negația (\neg).
A nu se confunda cu funcția not :: Bool -> Bool
- operatorii (infix) binari :|: și :&: reprezintă disjuncția (\vee) și conjuncția (\wedge).

Exercițiul 1

Scrieți următoarele formule ca expresii de tip Prop, denumindu-le p1, p2, p3.

1. $(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)$

```
p1 :: Prop
p1 = (Var "P" :|: Var "Q") :&: (Var "P" :&: Var "Q")
```

2. $(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$

```
p2 :: Prop
p2 = undefined
```

3. $(P \wedge (Q \vee R)) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg R))$

```
p3 :: Prop
p3 = undefined
```

Exercițiul 2

Faceți tipul Prop instanță a clasei de tipuri Show, înlocuind conectorii Not, :|: și :&: cu ~, | și & și folosind direct numele variabilelor în loc de construcția Var nume.

```
instance Show Prop where
  show = undefined

test_ShowProp :: Bool
test_ShowProp =
  show (Not (Var "P") :&: Var "Q") == "((~P)&Q)"
```

Evaluarea expresiilor logice

Pentru a putea evalua o expresie logică vom considera un mediu de evaluare care asociază valori Bool variabilelor propoziționale:

```
type Env = [(Nume, Bool)]
```

Tipul Env este o listă de atribuiri de valori de adevăr pentru (numele) variabilelor propoziționale.

Pentru a obține valoarea asociată unui Nume în Env, putem folosi funcția predefinită lookup :: Eq a => a -> [(a,b)] -> Maybe b.

Deși nu foarte elegant, pentru a simplifica exercițiile de mai jos, vom defini o variantă a funcției lookup care generează o eroare dacă valoarea nu este găsită.

```
impureLookup :: Eq a => a -> [(a,b)] -> b
impureLookup a = fromJust . lookup a
```

O soluție mai elegantă ar fi să reprezentăm toate funcțiile ca fiind parțiale (rezultat de tip Maybe) și să controlăm propagarea erorilor (*Extra*: încercați la final să faceți aceste modificări ca exercițiu suplimentar).

Exercițiul 3

Definiți o funcție eval care, dată fiind o expresie logică și un mediu de evaluare, calculează valoarea de adevăr a expresiei.

```
eval :: Prop -> Env -> Bool
eval = undefined

test_eval = eval (Var "P" :|: Var "Q") [("P", True), ("Q", False)] == True
```

Satisfiabilitate

O formulă în logica propozițională este *satisfiabilă* dacă există o atribuire de valori de adevăr pentru variabilele propoziționale din formulă pentru care aceasta se evaluează la True.

Pentru a verifica dacă o formulă este satisfiabilă, vom genera toate atribuirile posibile de valori de adevăr și vom testa dacă formula se evaluează la True pentru vreuna dintre ele.

Exercițiul 4

Definiți o funcție variabile care colectează lista tuturor variabilelor dintr-o formulă. *Hint*: folosiți funcția nub.

```
variabile :: Prop -> [Nume]
variabile = undefined

test_variabile =
    variabile (Not (Var "P") :&: Var "Q") == ["P", "Q"]
```

Exercițiul 5

Data fiind o listă de nume, definiți toate atribuirile de valori de adevăr posibile pentru ea.

```
envs :: [Nume] -> [Env]
envs = undefined

test_envs =
    envs ["P", "Q"]
    ==
    [ [ ("P", False)
      , ("Q", False)
      ]
    , [ ("P", False)
      , ("Q", True)
      ]
    , [ ("P", True)
      , ("Q", False)
      ]
    , [ ("P", True)
      , ("Q", True)
      ]
    ]
```

Exercițiul 6

Definiți o funcție satisfiabila care, dată fiind o propoziție, verifică dacă aceasta este satisfiabilă. *Hint:* puteți folosi rezultatele de la exercițiile 4 și 5.

```
satisfiabila :: Prop -> Bool
satisfiabila = undefined

test_satisfiabila1 = satisfiabila (Not (Var "P") :&: Var "Q") == True
test_satisfiabila2 = satisfiabila (Not (Var "P") :&: Var "P") == False
```

Exercițiul 7

O propoziție este validă dacă se evaluează la True pentru orice interpretare a variabilelor. O formulare echivalentă este aceea că o propoziție este validă dacă negația ei este nesatisfiabilă. Definiți o funcție valida care verifică dacă o propoziție este validă.

```
valida :: Prop -> Bool
valida = undefined

test_valida1 = valida (Not (Var "P") :&: Var "Q") == False
test_valida2 = valida (Not (Var "P") :|: Var "P") == True
```

Implicație și echivalență

Exercițiul 9

Extindeți tipul de date Prop și funcțiile definite până acum pentru a include conectorii logici -> (implicație) și <-> (echivalență), folosind constructorii :->: și <->:.

Exercițiul 10

Două propoziții sunt echivalente dacă au mereu aceeași valoare de adevăr, indiferent de valorile variabilelor propoziționale. Scrieți o funcție care verifică dacă două propoziții sunt echivalente.

```
echivalenta :: Prop -> Prop -> Bool
echivalenta = undefined

test_echivalenta1 =
  True
  ==
  (Var "P" :&: Var "Q") `echivalenta` (Not (Not (Var "P") :|: Not (Var "Q")))
test_echivalenta2 =
  False
  ==
  (Var "P") `echivalenta` (Var "Q")
```

```
test_echivalenta3 =  
  True  
  ==  
  (Var "R" :|: Not (Var "R")) `echivalenta` (Var "Q" :|: Not (Var "Q"))
```