Aproximarea funcțiilor

Radu T. Trîmbițaș
tradu@math.ubbcluj.ro

31 martie 2009

1. Introducere

1. Introducere

Funcțiile de aproximat pot să fie definite pe:

•

1. Introducere

Funcțiile de aproximat pot să fie definite pe:

- un continuu (de regulă un interval) – funcții speciale (elementare sau transcendente) pe care dorim să le evaluăm ca parte a unei subrutine;

1. Introducere

Funcţiile de aproximat pot să fie definite pe:

- un continuu (de regulă un interval) – funcţii speciale (elementare sau transcendente) pe care dorim să le evaluăm ca parte a unei subrutine;
- pe o mulţime finită de puncte – situaţie este întâlnită în ştiinţele fizice, când măsurătorile unor cantităţi fizice se fac în funcţie de alte cantităţi (cum ar fi timpul).

Home Page
Title Page
Page 2 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

1. Introducere

Funcţiile de aproximat pot să fie definite pe:

- un continuu (de regulă un interval) – funcţii speciale (elementare sau transcendente) pe care dorim să le evaluăm ca parte a unei subrutine;
- pe o mulţime finită de puncte – situaţie este întâlnită în ştiinţele fizice, când măsurătorile unor cantităţi fizice se fac în funcţie de alte cantităţi (cum ar fi timpul).

Deoarece o astfel de evaluare trebuie să se reducă la un număr finit de operaţii aritmetice, trebuie în ultimă instanţă să aproximăm funcţiile prin intermediul polinoamelor sau funcţiilor raţionale. Dorim să aproximăm o funcţie dată, cât mai bine posibil în termeni de funcţii mai simple.

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .

Home Page
Title Page
Page 2 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

1. Introducere

Funcțiile de aproximat pot să fie definite pe:

- un continuu (de regulă un interval) – funcții speciale (elementare sau transcendente) pe care dorim să le evaluăm ca parte a unei subrutine;
- pe o mulțime finită de puncte – situație este întâlnită în științele fizice, când măsurătorile unor cantități fizice se fac în funcție de alte cantități (cum ar fi timpul).

Deoarece o astfel de evaluare trebuie să se reducă la un număr finit de operații aritmetice, trebuie în ultimă instanță să aproximăm funcțiile prin intermediul polinoamelor sau funcțiilor raționale. Dorim să aproximăm o funcție dată, cât mai bine posibil în termeni de funcții mai simple.

În general o *schemă de aproximare* poate fi descrisă prin:

-

În general o *schemă de aproximare* poate fi descrisă prin:

- o funcţie $f \in X$ ce urmează a fi aproximată;

Home Page
Title Page
Page 3 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

În general o *schemă de aproximare* poate fi descrisă prin:

- o funcție $f \in X$ ce urmează a fi aproximată;
- o clasă Φ de aproximante;

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 3 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

În general o *schemă de aproximare* poate fi descrisă prin:

- o funcție $f \in X$ ce urmează a fi aproximată;
- o clasă Φ de aproximante;
- o normă $\|\cdot\|$ ce măsoară mărimea funcțiilor.

În general o *schemă de aproximare* poate fi descrisă prin:

- o funcție $f \in X$ ce urmează a fi aproximată;
- o clasă Φ de aproximante;
- o normă $\|\cdot\|$ ce măsoară mărimea funcțiilor.

În general o *schemă de aproximare* poate fi descrisă prin:

- o funcție $f \in X$ ce urmează a fi aproximată;
- o clasă Φ de aproximante;
- o normă $\|\cdot\|$ ce măsoară mărimea funcțiilor.

Căutăm o aproximare $\widehat{\varphi} \in \Phi$ a lui f astfel încât

Home Page
Title Page
Page 3 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

În general o *schemă de aproximare* poate fi descrisă prin:

- o funcţie $f \in X$ ce urmează a fi aproximată;
- o clasă Φ de aproximante;
- o normă $\|\cdot\|$ ce măsoară mărimea funcţiilor.

Căutăm o aproximare $\widehat{\varphi} \in \Phi$ a lui f astfel încât

$$\|f - \widehat{\varphi}\| \leq \|f - \varphi\| \text{ pentru orice } \varphi \in \Phi. \tag{1}$$

Home Page

Title Page

Page 3 of 58

Go Back

Full Screen

Close

Quit

În general o *schemă de aproximare* poate fi descrisă prin:

- o funcție $f \in X$ ce urmează a fi aproximată;
- o clasă Φ de aproximante;
- o normă $\|\cdot\|$ ce măsoară mărimea funcțiilor.

Căutăm o aproximare $\widehat{\varphi} \in \Phi$ a lui f astfel încât

$$\|f - \widehat{\varphi}\| \leq \|f - \varphi\| \text{ pentru orice } \varphi \in \Phi. \tag{1}$$

Această problemă se numește *problemă de cea mai bună aproximare* a lui f cu elemente din Φ, iar funcția $\widehat{\varphi}$ se numește *cea mai bună aproximare* a lui f relativ la norma $\|\cdot\|$.

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 3 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

În general o *schemă de aproximare* poate fi descrisă prin:

- o funcție $f \in X$ ce urmează a fi aproximată;
- o clasă Φ de aproximante;
- o normă $\|\cdot\|$ ce măsoară mărimea funcțiilor.

Căutăm o aproximare $\widehat{\varphi} \in \Phi$ a lui f astfel încât

$$\|f - \widehat{\varphi}\| \leq \|f - \varphi\| \text{ pentru orice } \varphi \in \Phi. \tag{1}$$

Această problemă se numește *problemă de cea mai bună aproximare* a lui f cu elemente din Φ, iar funcția $\widehat{\varphi}$ se numește *cea mai bună aproximare* a lui f relativ la norma $\|\cdot\|$.

Home Page
Title Page
Page 4 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Cunoscându-se o bază $\{\pi_j\}_{j=1}^{n}$ a lui Φ putem scrie

Cunoscându-se o bază $\{\pi_j\}_{j=1}^{n}$ a lui Φ putem scrie

$$\Phi = \Phi_n = \left\{ \varphi : \ \varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t), \ c_j \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2}$$

Cunoscându-se o bază $\{\pi_j\}_{j=1}^{n}$ a lui Φ putem scrie

$$\Phi = \Phi_n = \left\{ \varphi: \ \varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t), \ c_j \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2}$$

Φ este un spaţiu liniar finit dimensional sau o submulţime a acestuia.

Home Page
Title Page
Page 4 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Cunoscându-se o bază $\{\pi_j\}_{j=1}^n$ a lui Φ putem scrie

$$\Phi = \Phi_n = \left\{ \varphi : \ \varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t), \ c_j \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2}$$

Φ este un spațiu liniar finit dimensional sau o submulțime a acestuia.

Exemplul 1

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 4 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Cunoscându-se o bază $\{\pi_j\}_{j=1}^{n}$ a lui Φ putem scrie

$$\Phi = \Phi_n = \left\{ \varphi : \ \varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t), \ c_j \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2}$$

Φ este un spațiu liniar finit dimensional sau o submulțime a acestuia.

Exemplul 1 $\Phi = \mathbb{P}_m$ - *mulțimea polinoamelor de grad cel mult* m.

Home Page
Title Page
Page 4 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Cunoscându-se o bază $\{\pi_j\}_{j=1}^{n}$ a lui Φ putem scrie

$$\Phi = \Phi_n = \left\{ \varphi : \ \varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t), \ c_j \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2}$$

Φ este un spaţiu liniar finit dimensional sau o submulţime a acestuia.

Exemplul 1 $\Phi = \mathbb{P}_m$ - *mulţimea polinoamelor de grad cel mult* m. *O bază a sa este* $e_j(t) = t^j$, $j = 0, 1, \ldots, m$. *Deci* $\dim \mathbb{P}_m = m + 1$.

Cunoscându-se o bază $\{\pi_j\}_{j=1}^{n}$ a lui Φ putem scrie

$$\Phi = \Phi_n = \left\{ \varphi : \ \varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t), \ c_j \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2}$$

Φ este un spaţiu liniar finit dimensional sau o submulţime a acestuia.

Exemplul 1 $\Phi = \mathbb{P}_m$ - *mulţimea polinoamelor de grad cel mult* m. *O bază a sa este* $e_j(t) = t^j$, $j = 0, 1, \ldots, m$. *Deci* $\dim \mathbb{P}_m = m + 1$. *Polinoamele sunt cele mai utilizate aproximante pentru funcţii pe domenii mărginite (intervale sau mulţimi finite de funcţii).*

Cunoscându-se o bază $\{\pi_j\}_{j=1}^n$ a lui Φ putem scrie

$$\Phi = \Phi_n = \left\{ \varphi : \ \varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t), \ c_j \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2}$$

Φ este un spațiu liniar finit dimensional sau o submulțime a acestuia.

Exemplul 1 $\Phi = \mathbb{P}_m$ - *mulțimea polinoamelor de grad cel mult* m. *O bază a sa este* $e_j(t) = t^j$, $j = 0, 1, \ldots, m$. *Deci* $\dim \mathbb{P}_m = m + 1$. *Polinoamele sunt cele mai utilizate aproximante pentru funcții pe domenii mărginite (intervale sau mulțimi finite de funcții). Motivul – teorema lui Weierstrass – orice funcție din* $C[a, b]$ *poate fi aproximată oricât de bine printr-un polinom de grad suficient de mare.*

Cunoscându-se o bază $\{\pi_j\}_{j=1}^{n}$ a lui Φ putem scrie

$$\Phi = \Phi_n = \left\{ \varphi : \ \varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t), \ c_j \in \mathbb{R} \right\}. \qquad (2)$$

Φ este un spațiu liniar finit dimensional sau o submulțime a acestuia.

Exemplul 1 $\Phi = \mathbb{P}_m$ - *mulțimea polinoamelor de grad cel mult* m. *O bază a sa este* $e_j(t) = t^j$, $j = 0, 1, \ldots, m$. *Deci* $\dim \mathbb{P}_m = m + 1$. *Polinoamele sunt cele mai utilizate aproximante pentru funcții pe domenii mărginite (intervale sau mulțimi finite de funcții). Motivul – teorema lui Weierstrass – orice funcție din* $C[a, b]$ *poate fi aproximată oricât de bine printr-un polinom de grad suficient de mare.*

Exemplul 2

Exemplul 2 $\Phi = \mathbb{S}_m^k(\Delta)$ *spaţiul funcţiilor spline polinomiale şi cu clasa de netezime k pe subdiviziunea*

Exemplul 2 $\Phi = \mathbb{S}_m^k(\Delta)$ *spaţiul funcţiilor spline polinomiale şi cu clasa de netezime k pe subdiviziunea*

$$\Delta: \quad a = t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

Exemplul 2 $\Phi = \mathbb{S}_m^k(\Delta)$ *spațiul funcțiilor spline polinomiale și cu clasa de netezime k pe subdiviziunea*

$$\Delta : \quad a = t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

a intervalului $[a, b]$. Acestea sunt funcții polinomiale pe porțiuni de grad $\leq m$, legate în $t_1, \ldots, t_{N-1}$, astfel încât toate derivatele până la ordinul k să fie continue.

Home Page
Title Page
Page 5 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 2 $\Phi = \mathbb{S}_m^k(\Delta)$ *spaţiul funcţiilor spline polinomiale şi cu clasa de netezime k pe subdiviziunea*

$$\Delta: \ a = t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

a intervalului $[a, b]$. Acestea sunt funcţii polinomiale pe porţiuni de grad $\leq m$, legate în $t_1, \ldots, t_{N-1}$, astfel încât toate derivatele până la ordinul k să fie continue. Presupunem $0 \leq k < m$. Pentru $k = m$ se obţine $\mathbb{P}_m$. Dacă $k = -1$ permitem discontinuităţi în punctele de joncţiune.

Exemplul 2 $\Phi = \mathbb{S}_m^k(\Delta)$ *spațiul funcțiilor spline polinomiale și cu clasa de netezime k pe subdiviziunea*

$$\Delta: \quad a = t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

a intervalului $[a, b]$. Acestea sunt funcții polinomiale pe porțiuni de grad $\leq m$, legate în $t_1, \ldots, t_{N-1}$, astfel încât toate derivatele până la ordinul k să fie continue. Presupunem $0 \leq k < m$. Pentru $k = m$ se obține $\mathbb{P}_m$. Dacă $k = -1$ permitem discontinuități în punctele de joncțiune.

Exemplul 3 $\Phi = \mathbb{T}_m[0, 2\pi]$ *spațiul polinoamelor trigonometrice de grad cel mult m pe $[0, 2\pi]$. Acestea sunt combinații liniare ale funcțiilor*

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 6 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 3 $\Phi = \mathbb{T}_m[0, 2\pi]$ *spațiul polinoamelor trigonometrice de grad cel mult* m *pe* $[0, 2\pi]$. *Acestea sunt combinații liniare ale funcțiilor*

Home Page
Title Page
Page 6 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 3 $\Phi = \mathbb{T}_m[0, 2\pi]$ *spațiul polinoamelor trigonometrice de grad cel mult* m *pe* $[0, 2\pi]$*. Acestea sunt combinații liniare ale funcțiilor*

$$\pi_k(t) \qquad =$$

Home Page
Title Page
Page 6 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 3 $\Phi = \mathbb{T}_m[0, 2\pi]$ *spaţiul polinoamelor trigonometrice de grad cel mult* m *pe* $[0, 2\pi]$. *Acestea sunt combinaţii liniare ale funcţiilor*

$$\pi_k(t) = \cos(k-1)t \quad k = \overline{1, m+1},$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 6 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 3 $\Phi = \mathbb{T}_m[0, 2\pi]$ *spațiul polinoamelor trigonometrice de grad cel mult* m *pe* $[0, 2\pi]$*. Acestea sunt combinații liniare ale funcțiilor*

$$\begin{aligned} \pi_k(t) &= \cos(k-1)t \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \pi_{m+1-k}(t) &= \end{aligned}$$

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 6 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 3 $\Phi = \mathbb{T}_m[0, 2\pi]$ *spaţiul polinoamelor trigonometrice de grad cel mult m pe $[0, 2\pi]$. Acestea sunt combinaţii liniare ale funcţiilor*

$$\begin{aligned} \pi_k(t) &= \cos(k-1)t \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \pi_{m+1-k}(t) &= \sin kt \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Exemplul 3 $\Phi = \mathbb{T}_m[0, 2\pi]$ *spațiul polinoamelor trigonometrice de grad cel mult m pe $[0, 2\pi]$. Acestea sunt combinații liniare ale funcțiilor*

$$\begin{aligned} \pi_k(t) &= \cos(k-1)t \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \pi_{m+1-k}(t) &= \sin kt \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Dimensiunea spațiului este $n = 2m + 1$. Astfel de aproximante sunt alegeri naturale dacă funcția de aproximat este periodică de perioadă 2π. (Dacă f are perioada p se face schimbarea de variabilă $t \to tp/2\pi$.)

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 6 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 3 $\Phi = \mathbb{T}_m[0, 2\pi]$ *spaţiul polinoamelor trigonometrice de grad cel mult m pe $[0, 2\pi]$. Acestea sunt combinaţii liniare ale funcţiilor*

$$\begin{aligned} \pi_k(t) &= \cos(k-1)t \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \pi_{m+1-k}(t) &= \sin kt \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Dimensiunea spaţiului este $n = 2m + 1$. Astfel de aproximante sunt alegeri naturale dacă funcţia de aproximat este periodică de perioadă 2π. (Dacă f are perioada p se face schimbarea de variabilă $t \to tp/2\pi$.)

Câteva alegeri posibile ale normei, atât pentru funcţii continue, cât şi pentru cele discrete apar în tabelul 1.

Home Page
Title Page
Page 6 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 3 $\Phi = \mathbb{T}_m[0, 2\pi]$ *spațiul polinoamelor trigonometrice de grad cel mult* m *pe* $[0, 2\pi]$. *Acestea sunt combinații liniare ale funcțiilor*

$$\begin{aligned} \pi_k(t) &= \cos(k-1)t \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \pi_{m+1-k}(t) &= \sin kt \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Dimensiunea spațiului este $n = 2m + 1$. *Astfel de aproximante sunt alegeri naturale dacă funcția de aproximat este periodică de perioadă* 2π. *(Dacă* f *are perioada* p *se face schimbarea de variabilă* $t \to tp/2\pi$.*)*

Câteva alegeri posibile ale normei, atât pentru funcții continue, cât și pentru cele discrete apar în tabelul 1.

normă continuă	tip	normă discretă
$\\|u\\|_\infty = \max\limits_{a\le t\le b} \|u(t)\|$	L_∞	$\\|u\\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le N} \|u(t_i)\|$
$\\|u\\|_{1,w} = \int_a^b \|u(t)\|w(t)dt$	L^1_w	$\\|u\\|_{1,w} = \sum_{i=1}^n w_i \|u(t_i)\|$
$\\|u\\|_{2,w} = \left(\int_a^b \|u(t)\|^2 w(t)dt\right)^{1/2}$	L^2_w	$\\|u\\|_{2,w} = \left(\sum_{i=1}^N w_i \|u(t_i)\|^2\right)^{1/2}$

Tabela 1: Tipuri de aproximări și normele asociate

normă continuă	tip	normă discretă
$\\|u\\|_\infty = \max\limits_{a \le t \le b} \|u(t)\|$	L_∞	$\\|u\\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le N} \|u(t_i)\|$
$\\|u\\|_{1,w} = \int_a^b \|u(t)\|w(t)dt$	L_w^1	$\\|u\\|_{1,w} = \sum_{i=1}^n w_i \|u(t_i)\|$
$\\|u\\|_{2,w} = \left(\int_a^b \|u(t)\|^2 w(t)dt\right)^{1/2}$	L_w^2	$\\|u\\|_{2,w} = \left(\sum_{i=1}^N w_i \|u(t_i)\|^2\right)^{1/2}$

Tabela 1: Tipuri de aproximări și normele asociate

normă continuă	tip	normă discretă
$\\|u\\|_\infty = \max\limits_{a\le t\le b} \|u(t)\|$	L_∞	$\\|u\\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le N} \|u(t_i)\|$
$\\|u\\|_{1,w} = \int_a^b \|u(t)\|w(t)dt$	L_w^1	$\\|u\\|_{1,w} = \sum_{i=1}^n w_i\|u(t_i)\|$
$\\|u\\|_{2,w} = \left(\int_a^b \|u(t)\|^2 w(t)dt\right)^{1/2}$	L_w^2	$\\|u\\|_{2,w} = \left(\sum_{i=1}^N w_i\|u(t_i)\|^2\right)^{1/2}$

Tabela 1: Tipuri de aproximări și normele asociate

Cazul continuu presupune un interval $[a, b]$ și o funcție pondere $w(t)$ (posibil și $w(t) \equiv 1$) definită pe intervalul $[a, b]$ și pozitivă, exceptând zerourile izolate.

normă continuă	tip	normă discretă
$\lVert u \rVert_\infty = \max\limits_{a \le t \le b} \lvert u(t) \rvert$	L_∞	$\lVert u \rVert_\infty = \max\limits_{1 \le i \le N} \lvert u(t_i) \rvert$
$\lVert u \rVert_{1,w} = \int_a^b \lvert u(t) \rvert w(t) dt$	L_w^1	$\lVert u \rVert_{1,w} = \sum_{i=1}^n w_i \lvert u(t_i) \rvert$
$\lVert u \rVert_{2,w} = \left(\int_a^b \lvert u(t) \rvert^2 w(t) dt \right)^{1/2}$	L_w^2	$\lVert u \rVert_{2,w} = \left(\sum_{i=1}^N w_i \lvert u(t_i) \rvert^2 \right)^{1/2}$

Tabela 1: Tipuri de aproximări și normele asociate

Cazul continuu presupune un interval $[a, b]$ și o funcție pondere $w(t)$ (posibil și $w(t) \equiv 1$) definită pe intervalul $[a, b]$ și pozitivă, exceptând zerourile izolate. Cazul discret presupune o mulțime de N puncte distincte $t_1, t_2, \ldots, t_N$ împreună cu ponderile $w_1, w_2, \ldots, w_N$ (posibil $w_i = 1$, $i = \overline{1, N}$).

Home Page
Title Page
Page 7 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

normă continuă	tip	normă discretă
$\lVert u\rVert_\infty = \max\limits_{a\le t\le b} \lvert u(t)\rvert$	L_∞	$\lVert u\rVert_\infty = \max\limits_{1\le i\le N} \lvert u(t_i)\rvert$
$\lVert u\rVert_{1,w} = \int_a^b \lvert u(t)\rvert w(t)dt$	L_w^1	$\lVert u\rVert_{1,w} = \sum_{i=1}^n w_i \lvert u(t_i)\rvert$
$\lVert u\rVert_{2,w} = \left(\int_a^b \lvert u(t)\rvert^2 w(t)dt\right)^{1/2}$	L_w^2	$\lVert u\rVert_{2,w} = \left(\sum_{i=1}^N w_i \lvert u(t_i)\rvert^2\right)^{1/2}$

Tabela 1: Tipuri de aproximări și normele asociate

Cazul continuu presupune un interval $[a, b]$ și o funcție pondere $w(t)$ (posibil și $w(t) \equiv 1$) definită pe intervalul $[a, b]$ și pozitivă, exceptând zerourile izolate. Cazul discret presupune o mulțime de N puncte distincte $t_1, t_2, \ldots, t_N$ împreună cu ponderile $w_1, w_2, \ldots, w_N$ (posibil $w_i = 1$, $i = \overline{1, N}$). Intervalul $[a, b]$ poate fi nemărginit, dacă funcția pondere w este astfel încât integrala pe $[a, b]$ care definește norma să aibă sens.

normă continuă	tip	normă discretă
$\|u\|_\infty = \max\limits_{a\le t\le b} \|u(t)\|$	L_∞	$\|u\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le N} \|u(t_i)\|$
$\|u\|_{1,w} = \int_a^b \|u(t)\|w(t)dt$	L_w^1	$\|u\|_{1,w} = \sum_{i=1}^n w_i\|u(t_i)\|$
$\|u\|_{2,w} = \left(\int_a^b \|u(t)\|^2 w(t)dt\right)^{1/2}$	L_w^2	$\|u\|_{2,w} = \left(\sum_{i=1}^N w_i\|u(t_i)\|^2\right)^{1/2}$

Tabela 1: Tipuri de aproximări și normele asociate

Cazul continuu presupune un interval $[a, b]$ și o funcție pondere $w(t)$ (posibil și $w(t) \equiv 1$) definită pe intervalul $[a, b]$ și pozitivă, exceptând zerourile izolate. Cazul discret presupune o mulțime de N puncte distincte $t_1, t_2, \ldots, t_N$ împreună cu ponderile $w_1, w_2, \ldots, w_N$ (posibil $w_i = 1$, $i = \overline{1, N}$). Intervalul $[a, b]$ poate fi nemărginit, dacă funcția pondere w este astfel încât integrala pe $[a, b]$ care definește norma să aibă sens.

Deci combinând normele din tabelă cu spațiile liniare din exemple se obține o problemă de cea mai bună aproximare (1) cu sens.

normă continuă	tip	normă discretă
$\|u\|_\infty = \max\limits_{a\le t\le b} \|u(t)\|$	L_∞	$\|u\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le N} \|u(t_i)\|$
$\|u\|_{1,w} = \int_a^b \|u(t)\|w(t)dt$	L^1_w	$\|u\|_{1,w} = \sum_{i=1}^n w_i\|u(t_i)\|$
$\|u\|_{2,w} = \left(\int_a^b \|u(t)\|^2 w(t)dt\right)^{1/2}$	L^2_w	$\|u\|_{2,w} = \left(\sum_{i=1}^N w_i\|u(t_i)\|^2\right)^{1/2}$

Tabela 1: Tipuri de aproximări și normele asociate

Cazul continuu presupune un interval $[a, b]$ și o funcție pondere $w(t)$ (posibil și $w(t) \equiv 1$) definită pe intervalul $[a, b]$ și pozitivă, exceptând zerourile izolate. Cazul discret presupune o mulțime de N puncte distincte $t_1, t_2, \ldots, t_N$ împreună cu ponderile $w_1, w_2, \ldots, w_N$ (posibil $w_i = 1$, $i = \overline{1, N}$). Intervalul $[a, b]$ poate fi nemărginit, dacă funcția pondere w este astfel încât integrala pe $[a, b]$ care definește norma să aibă sens.

Deci combinând normele din tabelă cu spațiile liniare din exemple se obține o problemă de cea mai bună aproximare (1) cu sens. În cazul continuu, funcția dată f și funcția φ din clasa Φ trebuie definită pe $[a, b]$ și norma $\|f - \varphi\|$ să aibă sens.

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Go Back
Full Screen
Close
Quit

normă continuă	tip	normă discretă
$\\|u\\|_\infty = \max\limits_{a\le t\le b} \|u(t)\|$	L_∞	$\\|u\\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le N} \|u(t_i)\|$
$\\|u\\|_{1,w} = \int_a^b \|u(t)\|w(t)dt$	L_w^1	$\\|u\\|_{1,w} = \sum_{i=1}^n w_i\|u(t_i)\|$
$\\|u\\|_{2,w} = \left(\int_a^b \|u(t)\|^2 w(t)dt\right)^{1/2}$	L_w^2	$\\|u\\|_{2,w} = \left(\sum_{i=1}^N w_i\|u(t_i)\|^2\right)^{1/2}$

Tabela 1: Tipuri de aproximări și normele asociate

Cazul continuu presupune un interval $[a,b]$ și o funcție pondere $w(t)$ (posibil și $w(t)\equiv 1$) definită pe intervalul $[a,b]$ și pozitivă, exceptând zerourile izolate. Cazul discret presupune o mulțime de N puncte distincte $t_1, t_2, \ldots, t_N$ împreună cu ponderile $w_1, w_2, \ldots, w_N$ (posibil $w_i = 1$, $i = \overline{1,N}$). Intervalul $[a,b]$ poate fi nemărginit, dacă funcția pondere w este astfel încât integrala pe $[a,b]$ care definește norma să aibă sens.

Deci combinând normele din tabelă cu spațiile liniare din exemple se obține o problemă de cea mai bună aproximare (1) cu sens. În cazul continuu, funcția dată f și funcția φ din clasa Φ trebuie definită pe $[a,b]$ și norma $\\|f-\varphi\\|$ să aibă sens. La fel, f și φ trebuie definite în punctele t_i în cazul discret.

Introducere
Aproximație ...
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în ...
Exemple de ...
Exemple de ...
Home Page
Title Page
Page 7 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

normă continuă	tip	normă discretă
$\lVert u\rVert_\infty = \max\limits_{a\le t\le b} \lvert u(t)\rvert$	L_∞	$\lVert u\rVert_\infty = \max\limits_{1\le i\le N} \lvert u(t_i)\rvert$
$\lVert u\rVert_{1,w} = \int_a^b \lvert u(t)\rvert w(t)dt$	L_w^1	$\lVert u\rVert_{1,w} = \sum_{i=1}^n w_i \lvert u(t_i)\rvert$
$\lVert u\rVert_{2,w} = \left(\int_a^b \lvert u(t)\rvert^2 w(t)dt\right)^{1/2}$	L_w^2	$\lVert u\rVert_{2,w} = \left(\sum_{i=1}^N w_i \lvert u(t_i)\rvert^2\right)^{1/2}$

Tabela 1: Tipuri de aproximări și normele asociate

Cazul continuu presupune un interval $[a, b]$ și o funcție pondere $w(t)$ (posibil și $w(t) \equiv 1$) definită pe intervalul $[a, b]$ și pozitivă, exceptând zerourile izolate. Cazul discret presupune o mulțime de N puncte distincte $t_1, t_2, \dots, t_N$ împreună cu ponderile $w_1, w_2, \dots, w_N$ (posibil $w_i = 1$, $i = \overline{1, N}$). Intervalul $[a, b]$ poate fi nemărginit, dacă funcția pondere w este astfel încât integrala pe $[a, b]$ care definește norma să aibă sens.

Deci combinând normele din tabelă cu spațiile liniare din exemple se obține o problemă de cea mai bună aproximare (1) cu sens. În cazul continuu, funcția dată f și funcția φ din clasa Φ trebuie definită pe $[a, b]$ și norma $\lVert f - \varphi\rVert$ să aibă sens. La fel, f și φ trebuie definite în punctele t_i în cazul discret.

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 8 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

De notat că dacă cea mai bună aproximantă $\widehat{\varphi}$ în cazul discret este astfel încât $\|f-\widehat{\varphi}\|=0$, atunci $\widehat{\varphi}(t_i)=f(t_i)$, pentru $i=1,2,\ldots,N$, spunem că $\widehat{\varphi}$ interpolează f în punctele t_i și numim această problemă de aproximare *problemă de interpolare* .

Home Page
Title Page
Page 8 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

De notat că dacă cea mai bună aproximantă $\widehat{\varphi}$ în cazul discret este astfel încât $\|f - \widehat{\varphi}\| = 0$, atunci $\widehat{\varphi}(t_i) = f(t_i)$, pentru $i = 1, 2, \ldots, N$, spunem că $\widehat{\varphi}$ interpolează f în punctele t_i și numim această problemă de aproximare *problemă de interpolare* .

Cele mai simple probleme de aproximare sunt problema celor mai mici pătrate și problema de interpolare.

Home Page
Title Page
Page 8 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

De notat că dacă cea mai bună aproximantă $\widehat{\varphi}$ în cazul discret este astfel încât $\|f - \widehat{\varphi}\| = 0$, atunci $\widehat{\varphi}(t_i) = f(t_i)$, pentru $i = 1, 2, \ldots, N$, spunem că $\widehat{\varphi}$ interpolează f în punctele t_i şi numim această problemă de aproximare *problemă de interpolare* .

Cele mai simple probleme de aproximare sunt problema celor mai mici pătrate şi problema de interpolare.

Înainte de a începe cu problema celor mai mici pătrate, introducem un instrument notaţional care ne permite să tratăm cazul continuu şi cel discret simultan. Definim în cazul continuu

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 8 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

De notat că dacă cea mai bună aproximantă $\widehat{\varphi}$ în cazul discret este astfel încât $\|f-\widehat{\varphi}\|=0$, atunci $\widehat{\varphi}(t_i)=f(t_i)$, pentru $i=1,2,\dots,N$, spunem că $\widehat{\varphi}$ interpolează f în punctele t_i şi numim această problemă de aproximare *problemă de interpolare* .

Cele mai simple probleme de aproximare sunt problema celor mai mici pătrate şi problema de interpolare.

Înainte de a începe cu problema celor mai mici pătrate, introducem un instrument notaţional care ne permite să tratăm cazul continuu şi cel discret simultan. Definim în cazul continuu

$$\lambda(t)=\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right. \tag{3}$$

Home Page
Title Page
Page 8 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

De notat că dacă cea mai bună aproximantă $\widehat{\varphi}$ în cazul discret este astfel încât $\|f-\widehat{\varphi}\|=0$, atunci $\widehat{\varphi}(t_i)=f(t_i)$, pentru $i=1,2,\ldots,N$, spunem că $\widehat{\varphi}$ interpolează f în punctele t_i și numim această problemă de aproximare *problemă de interpolare* .

Cele mai simple probleme de aproximare sunt problema celor mai mici pătrate și problema de interpolare.

Înainte de a începe cu problema celor mai mici pătrate, introducem un instrument notațional care ne permite să tratăm cazul continuu și cel discret simultan. Definim în cazul continuu

$$\lambda(t)=\begin{cases} 0, & \\ & \end{cases} \tag{3}$$

De notat că dacă cea mai bună aproximantă $\widehat{\varphi}$ în cazul discret este astfel încât $\|f-\widehat{\varphi}\|=0$, atunci $\widehat{\varphi}(t_i)=f(t_i)$, pentru $i=1,2,\dots,N$, spunem că $\widehat{\varphi}$ interpolează f în punctele t_i și numim această problemă de aproximare *problemă de interpolare* .

Cele mai simple probleme de aproximare sunt problema celor mai mici pătrate și problema de interpolare.

Înainte de a începe cu problema celor mai mici pătrate, introducem un instrument notațional care ne permite să tratăm cazul continuu și cel discret simultan. Definim în cazul continuu

$$\lambda(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă} \\ & \end{cases} \tag{3}$$

Home Page
Title Page
Page 8 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

De notat că dacă cea mai bună aproximantă $\widehat{\varphi}$ în cazul discret este astfel încât $\|f-\widehat{\varphi}\|=0$, atunci $\widehat{\varphi}(t_i)=f(t_i)$, pentru $i=1,2,\ldots,N$, spunem că $\widehat{\varphi}$ interpolează f în punctele t_i și numim această problemă de aproximare *problemă de interpolare* .

Cele mai simple probleme de aproximare sunt problema celor mai mici pătrate și problema de interpolare.

Înainte de a începe cu problema celor mai mici pătrate, introducem un instrument notațional care ne permite să tratăm cazul continuu și cel discret simultan. Definim în cazul continuu

$$\lambda(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } t<a \text{ (când } -\infty<a), \\ & \end{cases} \tag{3}$$

De notat că dacă cea mai bună aproximantă $\widehat{\varphi}$ în cazul discret este astfel încât $\|f-\widehat{\varphi}\| = 0$, atunci $\widehat{\varphi}(t_i) = f(t_i)$, pentru $i = 1, 2, \ldots, N$, spunem că $\widehat{\varphi}$ interpolează f în punctele t_i şi numim această problemă de aproximare *problemă de interpolare* .

Cele mai simple probleme de aproximare sunt problema celor mai mici pătrate şi problema de interpolare.

Înainte de a începe cu problema celor mai mici pătrate, introducem un instrument notaţional care ne permite să tratăm cazul continuu şi cel discret simultan. Definim în cazul continuu

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \; t < a \; \text{(când } -\infty < a), \\ \displaystyle\int_a^t w(\tau)d\tau, & \end{cases} \tag{3}$$

De notat că dacă cea mai bună aproximantă $\widehat{\varphi}$ în cazul discret este astfel încât $\|f - \widehat{\varphi}\| = 0$, atunci $\widehat{\varphi}(t_i) = f(t_i)$, pentru $i = 1, 2, \ldots, N$, spunem că $\widehat{\varphi}$ interpolează f în punctele t_i și numim această problemă de aproximare *problemă de interpolare* .

Cele mai simple probleme de aproximare sunt problema celor mai mici pătrate și problema de interpolare.

Înainte de a începe cu problema celor mai mici pătrate, introducem un instrument notațional care ne permite să tratăm cazul continuu și cel discret simultan. Definim în cazul continuu

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \; t < a \text{ (când } -\infty < a), \\ \displaystyle\int_a^t w(\tau)d\tau, & \text{dacă} \end{cases} \tag{3}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 8 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

De notat că dacă cea mai bună aproximantă $\widehat{\varphi}$ în cazul discret este astfel încât $\|f - \widehat{\varphi}\| = 0$, atunci $\widehat{\varphi}(t_i) = f(t_i)$, pentru $i = 1, 2, \ldots, N$, spunem că $\widehat{\varphi}$ interpolează f în punctele t_i și numim această problemă de aproximare *problemă de interpolare* .

Cele mai simple probleme de aproximare sunt problema celor mai mici pătrate și problema de interpolare.

Înainte de a începe cu problema celor mai mici pătrate, introducem un instrument notațional care ne permite să tratăm cazul continuu și cel discret simultan. Definim în cazul continuu

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad t < a \ (\text{când} \ -\infty < a), \\ \displaystyle\int_a^t w(\tau)d\tau, & \text{dacă} \quad a \leq t \leq b, \end{cases} \tag{3}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 8 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

De notat că dacă cea mai bună aproximantă $\widehat{\varphi}$ în cazul discret este astfel încât $\|f-\widehat{\varphi}\|=0$, atunci $\widehat{\varphi}(t_i)=f(t_i)$, pentru $i=1,2,\ldots,N$, spunem că $\widehat{\varphi}$ interpolează f în punctele t_i și numim această problemă de aproximare *problemă de interpolare* .

Cele mai simple probleme de aproximare sunt problema celor mai mici pătrate și problema de interpolare.

Înainte de a începe cu problema celor mai mici pătrate, introducem un instrument notațional care ne permite să tratăm cazul continuu și cel discret simultan. Definim în cazul continuu

$$\lambda(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad t<a \ (\text{când} \ -\infty<a), \\ \int_a^t w(\tau)d\tau, & \text{dacă} \quad a\le t\le b, \\ \int_a^b w(\tau)d\tau, & \end{cases} \tag{3}$$

De notat că dacă cea mai bună aproximantă $\widehat{\varphi}$ în cazul discret este astfel încât $\|f-\widehat{\varphi}\|=0$, atunci $\widehat{\varphi}(t_i)=f(t_i)$, pentru $i=1,2,\dots,N$, spunem că $\widehat{\varphi}$ interpolează f în punctele t_i și numim această problemă de aproximare *problemă de interpolare* .

Cele mai simple probleme de aproximare sunt problema celor mai mici pătrate și problema de interpolare.

Înainte de a începe cu problema celor mai mici pătrate, introducem un instrument notațional care ne permite să tratăm cazul continuu și cel discret simultan. Definim în cazul continuu

$$\lambda(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad t<a \ (\text{când} \ -\infty<a),\\ \displaystyle\int_a^t w(\tau)d\tau, & \text{dacă} \quad a\le t\le b,\\ \displaystyle\int_a^b w(\tau)d\tau, & \text{dacă} \end{cases} \tag{3}$$

De notat că dacă cea mai bună aproximantă $\widehat{\varphi}$ în cazul discret este astfel încât $\|f - \widehat{\varphi}\| = 0$, atunci $\widehat{\varphi}(t_i) = f(t_i)$, pentru $i = 1, 2, \ldots, N$, spunem că $\widehat{\varphi}$ interpolează f în punctele t_i și numim această problemă de aproximare *problemă de interpolare* .

Cele mai simple probleme de aproximare sunt problema celor mai mici pătrate și problema de interpolare.

Înainte de a începe cu problema celor mai mici pătrate, introducem un instrument notațional care ne permite să tratăm cazul continuu și cel discret simultan. Definim în cazul continuu

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad t < a \ (\text{când} \ -\infty < a), \\ \displaystyle\int_a^t w(\tau) d\tau, & \text{dacă} \quad a \le t \le b, \\ \displaystyle\int_a^b w(\tau) d\tau, & \text{dacă} \quad t > b \ (\text{când} \ b < \infty). \end{cases} \tag{3}$$

De notat că dacă cea mai bună aproximantă $\widehat{\varphi}$ în cazul discret este astfel încât $\|f-\widehat{\varphi}\|=0$, atunci $\widehat{\varphi}(t_i)=f(t_i)$, pentru $i=1,2,\dots,N$, spunem că $\widehat{\varphi}$ interpolează f în punctele t_i și numim această problemă de aproximare *problemă de interpolare* .

Cele mai simple probleme de aproximare sunt problema celor mai mici pătrate și problema de interpolare.

Înainte de a începe cu problema celor mai mici pătrate, introducem un instrument notațional care ne permite să tratăm cazul continuu și cel discret simultan. Definim în cazul continuu

$$\lambda(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad t<a \ (\text{când } -\infty<a), \\ \int_a^t w(\tau)d\tau, & \text{dacă} \quad a\le t\le b, \\ \int_a^b w(\tau)d\tau, & \text{dacă} \quad t>b \ (\text{când } b<\infty). \end{cases} \tag{3}$$

Home Page
Title Page
Page 9 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Astfel putem scrie, pentru orice funcţie continuă u

Home Page
Title Page
Page 9 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Astfel putem scrie, pentru orice funcție continuă u

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)d\lambda(t) = \int_a^b u(t)w(t)dt, \tag{4}$$

Astfel putem scrie, pentru orice funcţie continuă u

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)d\lambda(t) = \int_a^b u(t)w(t)dt, \tag{4}$$

căci $d\lambda(t) \equiv 0$ în afara lui $[a, b]$ şi $d\lambda(t) = w(t)dt$ în interiorul lui.

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 9 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Astfel putem scrie, pentru orice funcție continuă u

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)d\lambda(t) = \int_a^b u(t)w(t)dt, \tag{4}$$

căci $d\lambda(t) \equiv 0$ în afara lui $[a, b]$ și $d\lambda(t) = w(t)dt$ în interiorul lui.

Vom numi $d\lambda$ măsură (pozitivă) continuă.

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 9 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Astfel putem scrie, pentru orice funcție continuă u

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)d\lambda(t) = \int_a^b u(t)w(t)dt, \tag{4}$$

căci $d\lambda(t) \equiv 0$ în afara lui $[a, b]$ și $d\lambda(t) = w(t)dt$ în interiorul lui.

Vom numi $d\lambda$ măsură (pozitivă) continuă. Măsura discretă (numită și ,,măsura Dirac“) asociată mulțimii de puncte $\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$ este o măsură $d\lambda$ care este nenulă numai în punctele t_i și are aici valoarea w_i. Astfel în acest caz

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 9 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Astfel putem scrie, pentru orice funcție continuă u

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)d\lambda(t) = \int_a^b u(t)w(t)dt, \tag{4}$$

căci $d\lambda(t) \equiv 0$ în afara lui $[a, b]$ și $d\lambda(t) = w(t)dt$ în interiorul lui.

Vom numi $d\lambda$ măsură (pozitivă) continuă. Măsura discretă (numită și ,,măsura Dirac“) asociată mulțimii de puncte $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ este o măsură $d\lambda$ care este nenulă numai în punctele t_i și are aici valoarea w_i. Astfel în acest caz

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)d\lambda(t) = \sum_{i=1}^{N} w_i u(t_i). \tag{5}$$

Astfel putem scrie, pentru orice funcție continuă u

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)d\lambda(t) = \int_a^b u(t)w(t)dt, \tag{4}$$

căci $d\lambda(t) \equiv 0$ în afara lui $[a, b]$ și $d\lambda(t) = w(t)dt$ în interiorul lui.

Vom numi $d\lambda$ măsură (pozitivă) continuă. Măsura discretă (numită și ,,măsura Dirac“) asociată mulțimii de puncte $\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$ este o măsură $d\lambda$ care este nenulă numai în punctele t_i și are aici valoarea w_i. Astfel în acest caz

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)d\lambda(t) = \sum_{i=1}^{N} w_i u(t_i). \tag{5}$$

Home Page
Title Page
Page 10 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

O definiție mai precisă se poate da cu ajutorul integralei Stieltjes, dacă definim $\lambda(t)$ ca fiind o funcție în scară cu saltul în t_i egal cu w_i. În particular, definim norma lui L_2 prin

O definiție mai precisă se poate da cu ajutorul integralei Stieltjes, dacă definim $\lambda(t)$ ca fiind o funcție în scară cu saltul în t_i egal cu w_i. În particular, definim norma lui L_2 prin

$$\|u\|_{2,d_\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 10 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

O definiție mai precisă se poate da cu ajutorul integralei Stieltjes, dacă definim $\lambda(t)$ ca fiind o funcție în scară cu saltul în t_i egal cu w_i. În particular, definim norma lui L_2 prin

$$\|u\|_{2,d_\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

și obținem norma continuă sau discretă după cum λ este ca în (3) sau o funcție în scară ca în (5).

O definiție mai precisă se poate da cu ajutorul integralei Stieltjes, dacă definim $\lambda(t)$ ca fiind o funcție în scară cu saltul în t_i egal cu w_i. În particular, definim norma lui L_2 prin

$$\|u\|_{2,d_\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

și obținem norma continuă sau discretă după cum λ este ca în (3) sau o funcție în scară ca în (5).

Vom numi *suportul* lui $d\lambda$ – notat cu $\mathrm{supp} d\lambda$ – intervalul $[a, b]$ în cazul continuu (presupunem că w este pozitivă pe $[a, b]$ exceptând zerourile izolate) și mulțimea $\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$ în cazul discret.

O definiție mai precisă se poate da cu ajutorul integralei Stieltjes, dacă definim $\lambda(t)$ ca fiind o funcție în scară cu saltul în t_i egal cu w_i. În particular, definim norma lui L_2 prin

$$\|u\|_{2,d_\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

şi obținem norma continuă sau discretă după cum λ este ca în (3) sau o funcție în scară ca în (5).

Vom numi *suportul* lui $d\lambda$ – notat cu $\mathrm{supp} d\lambda$ – intervalul $[a, b]$ în cazul continuu (presupunem că w este pozitivă pe $[a, b]$ exceptând zerourile izolate) şi mulțimea $\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$ în cazul discret. Spunem că mulțimea de funcții π_j din (2) este liniar independentă pe $\mathrm{supp} d\lambda$ dacă

Home Page
Title Page
Page 10 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

O definiţie mai precisă se poate da cu ajutorul integralei Stieltjes, dacă definim $\lambda(t)$ ca fiind o funcţie în scară cu saltul în t_i egal cu w_i. În particular, definim norma lui L_2 prin

$$\|u\|_{2,d_\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

şi obţinem norma continuă sau discretă după cum λ este ca în (3) sau o funcţie în scară ca în (5).

Vom numi *suportul* lui $d\lambda$ – notat cu $\operatorname{supp} d\lambda$ – intervalul $[a, b]$ în cazul continuu (presupunem că w este pozitivă pe $[a, b]$ exceptând zerourile izolate) şi mulţimea $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ în cazul discret. Spunem că mulţimea de funcţii π_j din (2) este liniar independentă pe $\operatorname{supp} d\lambda$ dacă

$$\forall\ t \ \in \operatorname{supp} d\lambda \quad \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t) \equiv 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0 \tag{7}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 10 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

O definiție mai precisă se poate da cu ajutorul integralei Stieltjes, dacă definim $\lambda(t)$ ca fiind o funcție în scară cu saltul în t_i egal cu w_i. În particular, definim norma lui L_2 prin

$$\|u\|_{2,d_\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

și obținem norma continuă sau discretă după cum λ este ca în (3) sau o funcție în scară ca în (5).

Vom numi *suportul* lui $d\lambda$ – notat cu $\mathrm{supp} d\lambda$ – intervalul $[a, b]$ în cazul continuu (presupunem că w este pozitivă pe $[a, b]$ exceptând zerourile izolate) și mulțimea $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ în cazul discret. Spunem că mulțimea de funcții π_j din (2) este liniar independentă pe $\mathrm{supp} d\lambda$ dacă

$$\forall\ t \ \in \mathrm{supp} d\lambda \quad \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t) \equiv 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0 \tag{7}$$

2. Aproximaţie prin metoda celor mai mici pătrate

Home Page
Title Page
Page 11 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

2. Aproximaţie prin metoda celor mai mici pătrate

2. Aproximație prin metoda celor mai mici pătrate

Vom specializa problema (1) luând ca normă norma din L_2

2. Aproximaţie prin metoda celor mai mici pătrate

Vom specializa problema (1) luând ca normă norma din L_2

$$\|u\|_{2,d_\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

Introducere

Aproximaţie . . .

Produse scalare

Ecuaţiile normale

Eroarea în . . .

Exemple de . . .

Exemple de . . .

Home Page

Title Page

Page 11 of 58

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2. Aproximaţie prin metoda celor mai mici pătrate

Vom specializa problema (1) luând ca normă norma din L_2

$$\|u\|_{2,d_\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

unde $d\lambda$ este fie o măsură continuă (conform (3)) sau discretă (conform (5)) şi utilizând aproximanta φ dintr-un spaţiu liniar n-dimensional

2. Aproximaţie prin metoda celor mai mici pătrate

Vom specializa problema (1) luând ca normă norma din L_2

$$\|u\|_{2,d_\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

unde $d\lambda$ este fie o măsură continuă (conform (3)) sau discretă (conform (5)) şi utilizând aproximanta φ dintr-un spaţiu liniar n-dimensional

$$\Phi = \Phi_n = \left\{ \varphi : \ \varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t), \ c_j \in \mathbb{R} \right\}. \tag{9}$$

Home Page
Title Page
Page 11 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

2. Aproximație prin metoda celor mai mici pătrate

Vom specializa problema (1) luând ca normă norma din L_2

$$\|u\|_{2,d_\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

unde $d\lambda$ este fie o măsură continuă (conform (3)) sau discretă (conform (5)) și utilizând aproximanta φ dintr-un spațiu liniar n-dimensional

$$\Phi = \Phi_n = \left\{ \varphi : \ \varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t), \ c_j \in \mathbb{R} \right\}. \tag{9}$$

π_j liniar independente pe $\operatorname{supp} d\lambda$; integrala din (8) are sens pentru $u = \pi_j$, $j = 1, \ldots, n$ și $u = f$.

2. Aproximație prin metoda celor mai mici pătrate

Vom specializa problema (1) luând ca normă norma din L_2

$$\|u\|_{2,d_\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

unde $d\lambda$ este fie o măsură continuă (conform (3)) sau discretă (conform (5)) și utilizând aproximanta φ dintr-un spațiu liniar n-dimensional

$$\Phi = \Phi_n = \left\{ \varphi : \ \varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t), \ c_j \in \mathbb{R} \right\}. \tag{9}$$

π_j liniar independente pe $\operatorname{supp} d\lambda$; integrala din (8) are sens pentru $u = \pi_j$, $j = 1, \ldots, n$ și $u = f$. Problema astfel obținută se numește *problemă de aproximare în sensul celor mai mici pătrate* sau *problemă de aproximare în medie pătratică*.

2. Aproximație prin metoda celor mai mici pătrate

Vom specializa problema (1) luând ca normă norma din L_2

$$\|u\|_{2,d_\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

unde $d\lambda$ este fie o măsură continuă (conform (3)) sau discretă (conform (5)) și utilizând aproximanta φ dintr-un spațiu liniar n-dimensional

$$\Phi = \Phi_n = \left\{ \varphi : \ \varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t), \ c_j \in \mathbb{R} \right\}. \tag{9}$$

π_j liniar independente pe $\operatorname{supp} d\lambda$; integrala din (8) are sens pentru $u = \pi_j$, $j = 1, \ldots, n$ și $u = f$. Problema astfel obținută se numește *problemă de aproximare în sensul celor mai mici pătrate* sau *problemă de aproximare în medie pătratică*.

3. Produse scalare

Home Page
Title Page
Page 12 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

3. Produse scalare

3. Produse scalare

Dându-se o măsură continuă sau discretă şi două funcţii u şi v având norma finită putem defini produsul scalar

3. Produse scalare

Dându-se o măsură continuă sau discretă și două funcții u și v având norma finită putem defini produsul scalar

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u(t)v(t)d\lambda(t). \tag{10}$$

Home Page
Title Page
Page 12 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

3. Produse scalare

Dându-se o măsură continuă sau discretă și două funcții u și v având norma finită putem defini produsul scalar

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u(t)v(t)d\lambda(t). \tag{10}$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz

$$\|(u, v)\| \leq \|u\|_{2,d_\lambda} \|v\|_{2,d_\lambda}$$

3. Produse scalare

Dându-se o măsură continuă sau discretă și două funcții u și v având norma finită putem defini produsul scalar

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u(t)v(t)d\lambda(t). \tag{10}$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz

$$\|(u, v)\| \le \|u\|_{2,d_\lambda} \|v\|_{2,d_\lambda}$$

ne spune că integrala în (10) este bine definită.

3. Produse scalare

Dându-se o măsură continuă sau discretă și două funcții u și v având norma finită putem defini produsul scalar

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u(t)v(t)d\lambda(t). \tag{10}$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz

$$\|(u, v)\| \leq \|u\|_{2,d_\lambda} \|v\|_{2,d_\lambda}$$

ne spune că integrala în (10) este bine definită.

Produsul scalar are următoarele proprietăţi utile:

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 13 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Produsul scalar are următoarele proprietăţi utile:

(i)

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 13 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Produsul scalar are următoarele proprietăţi utile:

(i) simetria $(u, v) = (v, u)$;

Produsul scalar are următoarele proprietăți utile:

(i) simetria $(u, v) = (v, u)$;

(ii)

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 13 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Produsul scalar are următoarele proprietăţi utile:

(i) simetria $(u, v) = (v, u)$;

(ii) omogenitatea $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

Home Page
Title Page
Page 13 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Produsul scalar are următoarele proprietăți utile:

(i) simetria $(u, v) = (v, u)$;

(ii) omogenitatea $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii)

Produsul scalar are următoarele proprietăți utile:

(i) simetria $(u, v) = (v, u)$;

(ii) omogenitatea $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) aditivitatea $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$;

Produsul scalar are următoarele proprietăţi utile:

(i) simetria $(u, v) = (v, u)$;

(ii) omogenitatea $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) aditivitatea $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$;

(iv)

Produsul scalar are următoarele proprietăţi utile:

(i) simetria $(u,v)=(v,u)$;

(ii) omogenitatea $(\alpha u,v)=\alpha(u,v)$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

(iii) aditivitatea $(u+v,w)=(u,w)+(v,w)$;

(iv) pozitiv definirea $(u,u)\geq 0$ și $(u,u)=0 \Leftrightarrow u\equiv 0$ pe $\mathrm{supp}\, d\lambda$.

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 13 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Produsul scalar are următoarele proprietăţi utile:

(i) simetria $(u, v) = (v, u)$;

(ii) omogenitatea $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) aditivitatea $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$;

(iv) pozitiv definirea $(u, u) \geq 0$ și $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$ pe $\mathrm{supp} d\lambda$.

(i)+(ii) $\Rightarrow$ liniaritatea

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1(u_1, v) + \alpha_2(u_2, v) \tag{11}$$

Produsul scalar are următoarele proprietăţi utile:

(i) simetria $(u, v) = (v, u)$;

(ii) omogenitatea $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) aditivitatea $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$;

(iv) pozitiv definirea $(u, u) \geq 0$ și $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$ pe $\mathrm{supp} d\lambda$.

(i)+(ii) $\Rightarrow$ liniaritatea

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1(u_1, v) + \alpha_2(u_2, v) \tag{11}$$

Relaţia se poate extinde la combinaţii liniare finite. De asemenea

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 13 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Produsul scalar are următoarele proprietăți utile:

(i) simetria $(u, v) = (v, u)$;

(ii) omogenitatea $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) aditivitatea $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$;

(iv) pozitiv definirea $(u, u) \geq 0$ și $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$ pe $\mathrm{supp} d\lambda$.

(i)+(ii) $\Rightarrow$ liniaritatea

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1(u_1, v) + \alpha_2(u_2, v) \tag{11}$$

Relația se poate extinde la combinații liniare finite. De asemenea

$$\|u\|^2_{2,d_\lambda} = (u, u). \tag{12}$$

Produsul scalar are următoarele proprietăţi utile:

(i) simetria $(u, v) = (v, u)$;

(ii) omogenitatea $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) aditivitatea $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$;

(iv) pozitiv definirea $(u, u) \geq 0$ şi $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$ pe $\mathrm{supp} d\lambda$.

(i)+(ii) $\Rightarrow$ liniaritatea

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1(u_1, v) + \alpha_2(u_2, v) \tag{11}$$

Relaţia se poate extinde la combinaţii liniare finite. De asemenea

$$\|u\|_{2,d_\lambda}^2 = (u, u). \tag{12}$$

Spunem că u şi v sunt *ortogonale* dacă

$$(u, v) = 0. \tag{13}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 13 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Produsul scalar are următoarele proprietăţi utile:

(i) simetria $(u, v) = (v, u)$;

(ii) omogenitatea $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) aditivitatea $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$;

(iv) pozitiv definirea $(u, u) \geq 0$ și $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$ pe $\operatorname{supp} d\lambda$.

(i)+(ii) $\Rightarrow$ liniaritatea

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1(u_1, v) + \alpha_2(u_2, v) \tag{11}$$

Relația se poate extinde la combinații liniare finite. De asemenea

$$\|u\|^2_{2,d_\lambda} = (u, u). \tag{12}$$

Spunem că u și v sunt *ortogonale* dacă

$$(u, v) = 0. \tag{13}$$

Mai general, putem considera sisteme ortogonale $\{u_k\}_{k=1}^n$:

Produsul scalar are următoarele proprietăţi utile:

(i) simetria $(u,v)=(v,u)$;

(ii) omogenitatea $(\alpha u,v)=\alpha(u,v)$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

(iii) aditivitatea $(u+v,w)=(u,w)+(v,w)$;

(iv) pozitiv definirea $(u,u)\geq 0$ și $(u,u)=0\Leftrightarrow u\equiv 0$ pe $\operatorname{supp} d\lambda$.

(i)+(ii) $\Rightarrow$ liniaritatea

$$(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2,v)=\alpha_1(u_1,v)+\alpha_2(u_2,v) \tag{11}$$

Relaţia se poate extinde la combinaţii liniare finite. De asemenea

$$\|u\|^2_{2,d_\lambda}=(u,u). \tag{12}$$

Spunem că u și v sunt *ortogonale* dacă

$$(u,v)=0. \tag{13}$$

Mai general, putem considera sisteme ortogonale $\{u_k\}_{k=1}^n$:

$$(u_i,u_j)=0 \text{ dacă } i\neq j,\ u_k\neq 0 \text{ pe } \operatorname{supp} d\lambda;\ i,j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,n}. \tag{14}$$

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .

Home Page
Title Page
Page 13 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Produsul scalar are următoarele proprietăţi utile:

(i) simetria $(u, v) = (v, u)$;

(ii) omogenitatea $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) aditivitatea $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$;

(iv) pozitiv definirea $(u, u) \geq 0$ şi $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$ pe $\mathrm{supp} d\lambda$.

(i)+(ii) $\Rightarrow$ liniaritatea

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1(u_1, v) + \alpha_2(u_2, v) \tag{11}$$

Relaţia se poate extinde la combinaţii liniare finite. De asemenea

$$\|u\|^2_{2,d_\lambda} = (u, u). \tag{12}$$

Spunem că u şi v sunt *ortogonale* dacă

$$(u, v) = 0. \tag{13}$$

Mai general, putem considera sisteme ortogonale $\{u_k\}_{k=1}^n$:

$$(u_i, u_j) = 0 \text{ dacă } i \neq j,\ u_k \neq 0 \text{ pe } \mathrm{supp} d\lambda;\ i, j = \overline{1, n},\ k = \overline{1, n}. \tag{14}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .

Home Page
Title Page
Page 14 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Pentru un astfel de sistem are loc teorema generalizată a lui Pitagora

Home Page
Title Page
Page 14 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Pentru un astfel de sistem are loc teorema generalizată a lui Pitagora

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \|u_k\|^2. \tag{15}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 14 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Pentru un astfel de sistem are loc teorema generalizată a lui Pitagora

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \|u_k\|^2. \tag{15}$$

(15) $\Rightarrow$ orice sistem ortogonal este liniar independent pe $\mathrm{supp} d\lambda$. Într-adevăr, dacă membrul stâng al lui (15) se anulează, atunci și membrul drept se anulează și deoarece $\|u_k\|^2 > 0$, din ipoteză rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Home Page
Title Page
Page 14 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Pentru un astfel de sistem are loc teorema generalizată a lui Pitagora

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \|u_k\|^2. \tag{15}$$

(15) $\Rightarrow$ orice sistem ortogonal este liniar independent pe $\operatorname{supp} d\lambda$. Într-adevăr, dacă membrul stâng al lui (15) se anulează, atunci și membrul drept se anulează și deoarece $\|u_k\|^2 > 0$, din ipoteză rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

4. Ecuaţiile normale

4. Ecuaţiile normale

4. Ecuaţiile normale

Putem scrie pătratul erorii din L_2 sub forma

Home Page
Title Page
Page 15 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. Ecuațiile normale

Putem scrie pătratul erorii din L_2 sub forma

$$E^2[\varphi] := \|\varphi - f\|^2 = (\varphi - f, \varphi - f) = (\varphi, \varphi) - 2(\varphi, f) + (f, f).$$

Home Page
Title Page
Page 15 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. Ecuațiile normale

Putem scrie pătratul erorii din L_2 sub forma

$$E^2[\varphi] := \|\varphi - f\|^2 = (\varphi - f, \varphi - f) = (\varphi, \varphi) - 2(\varphi, f) + (f, f).$$

Înlocuind pe φ cu expresia sa se obține

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 15 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. Ecuaţiile normale

Putem scrie pătratul erorii din L_2 sub forma

$$E^2[\varphi] := \|\varphi - f\|^2 = (\varphi - f, \varphi - f) = (\varphi, \varphi) - 2(\varphi, f) + (f, f).$$

Înlocuind pe φ cu expresia sa se obţine

$$E^2[\varphi] \tag{16}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 15 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. Ecuațiile normale

Putem scrie pătratul erorii din L_2 sub forma

$$E^2[\varphi] := \|\varphi - f\|^2 = (\varphi - f, \varphi - f) = (\varphi, \varphi) - 2(\varphi, f) + (f, f).$$

Înlocuind pe φ cu expresia sa se obține

$$E^2[\varphi]=\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t) \right)^2 d\lambda(t) - 2 \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t) \right) f(t) d\lambda(t) + \tag{16}$$

Home Page
Title Page
Page 15 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. Ecuațiile normale

Putem scrie pătratul erorii din L_2 sub forma

$$E^2[\varphi] := \|\varphi - f\|^2 = (\varphi - f, \varphi - f) = (\varphi, \varphi) - 2(\varphi, f) + (f, f).$$

Înlocuind pe φ cu expresia sa se obține

$$E^2[\varphi] = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t) \right)^2 d\lambda(t) - 2 \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t) \right) f(t) d\lambda(t) + \tag{16}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} f^2(t) d\lambda(t).$$

4. Ecuațiile normale

Putem scrie pătratul erorii din L_2 sub forma

$$E^2[\varphi] := \|\varphi - f\|^2 = (\varphi - f, \varphi - f) = (\varphi, \varphi) - 2(\varphi, f) + (f, f).$$

Înlocuind pe φ cu expresia sa se obține

$$E^2[\varphi] = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t) \right)^2 d\lambda(t) - 2 \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t) \right) f(t) d\lambda(t) + \tag{16}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} f^2(t) d\lambda(t).$$

Pătratul erorii din L_2 este o funcţie cuadratică de coeficienţii c_1, $\ldots$, c_n ai lui φ. Problema celei mai bune aproximaţii în L_2 revine la a minimiza această funcţie pătratică; ea se rezolvă anulând derivatele parţiale.

Pătratul erorii din L_2 este o funcţie cuadratică de coeficienţii c_1, $\ldots$, c_n ai lui φ. Problema celei mai bune aproximaţii în L_2 revine la a minimiza această funcţie pătratică; ea se rezolvă anulând derivatele parţiale.

Se obţine

Home Page
Title Page
Page 16 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Pătratul erorii din L_2 este o funcție cuadratică de coeficienții c_1, $\ldots$, c_n ai lui φ. Problema celei mai bune aproximații în L_2 revine la a minimiza această funcție pătratică; ea se rezolvă anulând derivatele parțiale.

Se obține

$$\frac{\partial}{\partial c_i} E^2[\varphi] = 2 \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t) \right) \pi_i(t) d\lambda(t) - 2 \int_{\mathbb{R}} \pi_i(t) f(t) d\lambda(t) = 0$$

Pătratul erorii din L_2 este o funcție cuadratică de coeficienții c_1, ..., c_n ai lui φ. Problema celei mai bune aproximații în L_2 revine la a minimiza această funcție pătratică; ea se rezolvă anulând derivatele parțiale.

Se obține

$$\frac{\partial}{\partial c_i} E^2[\varphi] = 2 \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t) \right) \pi_i(t) d\lambda(t) - 2 \int_{\mathbb{R}} \pi_i(t) f(t) d\lambda(t) = 0$$

adică

Pătratul erorii din L_2 este o funcţie cuadratică de coeficienţii c_1, . . . , c_n ai lui φ. Problema celei mai bune aproximaţii în L_2 revine la a minimiza această funcţie pătratică; ea se rezolvă anulând derivatele parţiale.

Se obţine

$$\frac{\partial}{\partial c_i} E^2[\varphi] = 2\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t) \right) \pi_i(t) d\lambda(t) - 2\int_{\mathbb{R}} \pi_i(t) f(t) d\lambda(t) = 0$$

adică

$$\sum_{j=1}^{n} (\pi_i, \pi_j) c_j = (\pi_i, f), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Introducere
Aproximație...
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în...
Exemple de...
Exemple de...
Home Page
Title Page
Page 16 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Pătratul erorii din L_2 este o funcție cuadratică de coeficienții c_1, ..., c_n ai lui φ. Problema celei mai bune aproximații în L_2 revine la a minimiza această funcție pătratică; ea se rezolvă anulând derivatele parțiale.

Se obține

$$\frac{\partial}{\partial c_i} E^2[\varphi] = 2 \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t) \right) \pi_i(t) d\lambda(t) - 2 \int_{\mathbb{R}} \pi_i(t) f(t) d\lambda(t) = 0$$

adică

$$\sum_{j=1}^{n} (\pi_i, \pi_j) c_j = (\pi_i, f), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Aceste ecuații se numesc *ecuații normale* pentru problema celor mai mici pătrate.

Pătratul erorii din L_2 este o funcţie cuadratică de coeficienţii c_1, $\ldots$, c_n ai lui φ. Problema celei mai bune aproximaţii în L_2 revine la a minimiza această funcţie pătratică; ea se rezolvă anulând derivatele parţiale.

Se obţine

$$\frac{\partial}{\partial c_i} E^2[\varphi] = 2 \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j(t) \right) \pi_i(t) d\lambda(t) - 2 \int_{\mathbb{R}} \pi_i(t) f(t) d\lambda(t) = 0$$

adică

$$\sum_{j=1}^{n} (\pi_i, \pi_j) c_j = (\pi_i, f), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Aceste ecuaţii se numesc *ecuaţii normale* pentru problema celor mai mici pătrate.

Ele formează un sistem de forma

Ele formează un sistem de forma

$$Ac = b \tag{18}$$

Ele formează un sistem de forma

$$Ac = b \tag{18}$$

unde matricea A și vectorul b au elementele

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 17 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Ele formează un sistem de forma

$$Ac = b \tag{18}$$

unde matricea A şi vectorul b au elementele

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = (\pi_i, \pi_j), \quad b = [b_i], \quad b_i = (\pi_i, f). \tag{19}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 17 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Ele formează un sistem de forma

$$Ac = b \tag{18}$$

unde matricea A și vectorul b au elementele

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = (\pi_i, \pi_j), \quad b = [b_i], \quad b_i = (\pi_i, f). \tag{19}$$

Datorită simetriei produsului scalar, A este o matrice simetrică. Mai mult, A este pozitiv definită, adică

Ele formează un sistem de forma

$$Ac = b \tag{18}$$

unde matricea A și vectorul b au elementele

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = (\pi_i, \pi_j), \quad b = [b_i], \quad b_i = (\pi_i, f). \tag{19}$$

Datorită simetriei produsului scalar, A este o matrice simetrică. Mai mult, A este pozitiv definită, adică

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j > 0 \text{ dacă } x \neq [0, 0, \ldots, 0]^T. \tag{20}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 17 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Ele formează un sistem de forma

$$Ac = b \tag{18}$$

unde matricea A și vectorul b au elementele

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = (\pi_i, \pi_j), \quad b = [b_i], \quad b_i = (\pi_i, f). \tag{19}$$

Datorită simetriei produsului scalar, A este o matrice simetrică. Mai mult, A este pozitiv definită, adică

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j > 0 \text{ dacă } x \neq [0, 0, \ldots, 0]^T. \tag{20}$$

Funcția (20) se numește *formă pătratică* (deoarece este omogenă de grad 2). Pozitiv definirea lui A ne spune că forma pătratică ai cărei coeficienți sunt elementele lui A este întotdeauna nenegativă și zero numai dacă variabilele x_i se anulează.

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 17 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Ele formează un sistem de forma

$$Ac = b \tag{18}$$

unde matricea A și vectorul b au elementele

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = (\pi_i, \pi_j), \quad b = [b_i], \quad b_i = (\pi_i, f). \tag{19}$$

Datorită simetriei produsului scalar, A este o matrice simetrică. Mai mult, A este pozitiv definită, adică

$$x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j > 0 \text{ dacă } x \neq [0, 0, \ldots, 0]^T. \tag{20}$$

Funcția (20) se numește *formă pătratică* (deoarece este omogenă de grad 2). Pozitiv definirea lui A ne spune că forma pătratică ai cărei coeficienți sunt elementele lui A este întotdeauna nenegativă și zero numai dacă variabilele x_i se anulează.

Introducere

Aproximație . . .

Produse scalare

Ecuațiile normale

Eroarea în . . .

Exemple de . . .

Exemple de . . .

Home Page

Title Page

Page 18 of 58

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Pentru a demonstra (20) să inserăm definiţia lui a_{ij} şi să utilizăm proprietăţile (i)-(iv) ale produsului scalar

Pentru a demonstra (20) să inserăm definiția lui a_{ij} și să utilizăm proprietățile (i)-(iv) ale produsului scalar

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j (\pi_i, \pi_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i \pi_i, x_j \pi_j) = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \pi_i \right\|^2 .$$

Pentru a demonstra (20) să inserăm definiția lui a_{ij} și să utilizăm proprietățile (i)-(iv) ale produsului scalar

$$x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j (\pi_i, \pi_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i \pi_i, x_j \pi_j) = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \pi_i \right\|^2 .$$

Aceasta este evident nenegativă. Ea este zero numai dacă $\sum_{i=1}^{n} x_i \pi_i \equiv 0$ pe $\mathrm{supp} d\lambda$, care pe baza liniar independenței lui π_i implică $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Pentru a demonstra (20) să inserăm definiţia lui a_{ij} şi să utilizăm proprietăţile (i)-(iv) ale produsului scalar

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j (\pi_i, \pi_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i \pi_i, x_j \pi_j) = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \pi_i \right\|^2 .$$

Aceasta este evident nenegativă. Ea este zero numai dacă $\sum_{i=1}^{n} x_i \pi_i \equiv 0$ pe $\mathrm{supp} d\lambda$, care pe baza liniar independenţei lui π_i implică $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Este un rezultat cunoscut din algebra liniară că o matrice A simetrică pozitiv definită este nesingulară. Într-adevăr, determinantul său, precum şi minorii principali sunt strict pozitivi. Rezultă că sistemul de ecuaţii normale (17) are soluţie unică.

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .

Home Page
Title Page
Page 18 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Pentru a demonstra (20) să inserăm definiția lui a_{ij} și să utilizăm proprietățile (i)-(iv) ale produsului scalar

$$x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j (\pi_i, \pi_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i \pi_i, x_j \pi_j) = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \pi_i \right\|^2 .$$

Aceasta este evident nenegativă. Ea este zero numai dacă $\sum_{i=1}^{n} x_i \pi_i \equiv 0$ pe $\operatorname{supp} d\lambda$, care pe baza liniar independenței lui π_i implică $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Este un rezultat cunoscut din algebra liniară că o matrice A simetrică pozitiv definită este nesingulară. Într-adevăr, determinantul său, precum și minorii principali sunt strict pozitivi. Rezultă că sistemul de ecuații normale (17) are soluție unică. Corespunde această soluție minimului lui $E[\varphi]$ în (16)? Matricea hessiană $H = [\partial^2 E^2 / \partial c_i \partial c_j]$ trebuie să fie pozitiv definită. Dar $H = 2A$, deoarece E^2 este o funcție cuadratică. De aceea, H, ca și A, este într-adevăr pozitiv definită și soluția ecuațiilor normale ne dă minimul dorit.

Pentru a demonstra (20) să inserăm definiția lui a_{ij} și să utilizăm proprietățile (i)-(iv) ale produsului scalar

$$x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j (\pi_i, \pi_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i \pi_i, x_j \pi_j) = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \pi_i \right\|^2.$$

Aceasta este evident nenegativă. Ea este zero numai dacă $\sum_{i=1}^{n} x_i \pi_i \equiv 0$ pe $\operatorname{supp} d\lambda$, care pe baza liniar independenței lui π_i implică $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Este un rezultat cunoscut din algebra liniară că o matrice A simetrică pozitiv definită este nesingulară. Într-adevăr, determinantul său, precum și minorii principali sunt strict pozitivi. Rezultă că sistemul de ecuații normale (17) are soluție unică. Corespunde această soluție minimului lui $E[\varphi]$ în (16)? Matricea hessiană $H = [\partial^2 E^2 / \partial c_i \partial c_j]$ trebuie să fie pozitiv definită. Dar $H = 2A$, deoarece E^2 este o funcție cuadratică. De aceea, H, ca și A, este într-adevăr pozitiv definită și soluția ecuațiilor normale ne dă minimul dorit.

Problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate are o soluție unică, dată de

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 19 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate are o soluție unică, dată de

$$\widehat{\varphi}(t) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_j(t) \tag{21}$$

Problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate are o soluţie unică, dată de

$$\widehat{\varphi}(t)=\sum_{j=1}^{n}\widehat{c}_j\pi_j(t) \tag{21}$$

unde $\widehat{c}=[\widehat{c}_1,\widehat{c}_2,\ldots,\widehat{c}_n]^T$ este vectorul soluţie al ecuaţiilor normale (17).

Problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate are o soluţie unică, dată de

$$\widehat{\varphi}(t) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_j(t) \tag{21}$$

unde $\widehat{c} = [\widehat{c}_1, \widehat{c}_2, \ldots, \widehat{c}_n]^T$ este vectorul soluţie al ecuaţiilor normale (17).

Exemplul 4 *Dându-se punctele*

$$(0,-4),(1,0),(2,4),(3,-2),$$

determinaţi polinomul de gradul I corespunzător acestor date prin metoda celor mai mici pătrate.

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 20 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 4 *Dându-se punctele*

$$(0,-4),(1,0),(2,4),(3,-2),$$

determinați polinomul de gradul I corespunzător acestor date prin metoda celor mai mici pătrate.

Soluție. Aproximanta căutată are forma

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x.$$

Sistemul de ecuații normale se determine din condițiile $f-\varphi \perp 1$ și $f-\varphi \perp x$. Se obține

$$\begin{cases} c_0(1,1) + c_1(x,1) = (f,1) \\ c_0(1,x) + c_1(x,x) = (f,x) \end{cases}$$

Dar, $(1,1) = \sum_{i=1}^{4} 1\cdot 1 = 3$, $(1,x) = (x,1) = \sum_{i=1}^{4} 1\cdot x_i = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 = 6$, $(x,x) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 14$. Pentru membrul drept avem $(f,1) = (y,1) = -2$ și $(f,x) = (y,x) = 2$. Am obținut sistemul

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

cu soluția $c_0 = -2$, $c_1 = 1$. Deci $\varphi(x) = x - 2$. ■

Exemplul 4 *Dându-se punctele*

$$(0,-4),(1,0),(2,4),(3,-2),$$

determinați polinomul de gradul I corespunzător acestor date prin metoda celor mai mici pătrate.

Soluție. Aproximanta căutată are forma

$$\varphi(x)=c_0+c_1x.$$

Sistemul de ecuații normale se determine din condițiile $f-\varphi\perp 1$ și $f-\varphi\perp x$. Se obține

$$\begin{cases} c_0(1,1)+c_1(x,1)=(f,1)\\ c_0(1,x)+c_1(x,x)=(f,x)\end{cases}$$

Dar, $(1,1)=\sum_{i=1}^{4}1\cdot 1=3$, $(1,x)=(x,1)=\sum_{i=1}^{4}1\cdot x_i=1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 3=6$, $(x,x)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2=14$. Pentru membrul drept avem $(f,1)=(y,1)=-2$ și $(f,x)=(y,x)=2$. Am obținut sistemul

$$\begin{bmatrix}4&6\\6&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$$

cu soluția $c_0=-2$, $c_1=1$. Deci $\varphi(x)=x-2$. ■

Ecuaţiile normale rezolvă problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate complet în teorie. Dar în practică?

Referitor la o mulţime generală de funcţii de bază liniar independente, pot apărea următoarele dificultăţi:

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Go Back
Full Screen
Close
Quit

Ecuaţiile normale rezolvă problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate complet în teorie. Dar în practică?

Referitor la o mulţime generală de funcţii de bază liniar independente, pot apărea următoarele dificultăţi:

(1) Sistemul de ecuaţii normale (17) poate fi *prost condiţionat*. Un exemplu simplu este următorul: $\mathrm{supp} d\lambda = [0,1]$, $d\lambda(t) = dt$ pe $[0,1]$ şi $\pi_j(t) = t^{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Atunci

$$(\pi_i, \pi_j) = \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

adică matricea A este matricea Hilbert. Prost condiţionarea ecuaţiilor normale se datorează alegerii neinspirate a funcţiilor de bază. Acestea devin aproape liniar dependente când exponentul creşte. O altă sursă de degradare provine din elementele membrului drept $b_j = \int_0^1 \pi_j(t) f(t) dt$. Când j este mare $\pi_j(t) = t^{j-1}$ se comportă pe $[0,1]$ ca o funcţie discontinuă. Un polinom care oscilează mai rapid pe $[0,1]$ ar fi de preferat, căci ar angaja mai viguros funcţia f.

Introducere

Aproximație . . .

Produse scalare

Ecuațiile normale

Eroarea în . . .

Exemple de . . .

Exemple de . . .

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 21 of 58

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Ecuațiile normale rezolvă problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate complet în teorie. Dar în practică?

Referitor la o mulțime generală de funcții de bază liniar independente, pot apărea următoarele dificultăți:

(1) Sistemul de ecuații normale (17) poate fi *prost condiționat*. Un exemplu simplu este următorul: $\operatorname{supp} d\lambda = [0,1]$, $d\lambda(t) = dt$ pe $[0,1]$ și $\pi_j(t) = t^{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Atunci

$$(\pi_i, \pi_j) = \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

adică matricea A este matricea Hilbert. Prost condiționarea ecuațiilor normale se datorează alegerii neinspirate a funcțiilor de bază. Acestea devin aproape liniar dependente când exponentul crește. O altă sursă de degradare provine din elementele membrului drept $b_j = \int_0^1 \pi_j(t) f(t) dt$. Când j este mare $\pi_j(t) = t^{j-1}$ se comportă pe $[0,1]$ ca o funcție discontinuă. Un polinom care oscilează mai rapid pe $[0,1]$ ar fi de preferat, căci ar angaja mai viguros funcția f.

(2) Al doilea dezavantaj este faptul că toți coeficienții $\widehat{c}_j$ din (21) depind de n, adică $\widehat{c}_j = \widehat{c}_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Mărirea lui n ne dă un nou sistem de ecuații mai mare și cu o soluție complet diferită. Acest fenomen se numește *nepermanența coeficienților* $\widehat{c}_j$.

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .

Home Page

Title Page

Page 21 of 58

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Ecuaţiile normale rezolvă problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate complet în teorie. Dar în practică?

Referitor la o mulţime generală de funcţii de bază liniar independente, pot apărea următoarele dificultăţi:

(1) Sistemul de ecuaţii normale (17) poate fi *prost condiţionat*. Un exemplu simplu este următorul: $\operatorname{supp} d\lambda = [0,1]$, $d\lambda(t) = dt$ pe $[0,1]$ şi $\pi_j(t) = t^{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Atunci

$$(\pi_i, \pi_j) = \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \frac{1}{i+j-1}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n,$$

adică matricea A este matricea Hilbert. Prost condiţionarea ecuaţiilor normale se datorează alegerii neinspirate a funcţiilor de bază. Acestea devin aproape liniar dependente când exponentul creşte. O altă sursă de degradare provine din elementele membrului drept $b_j = \displaystyle\int_0^1 \pi_j(t) f(t) dt$. Când j este mare $\pi_j(t) = t^{j-1}$ se comportă pe $[0,1]$ ca o funcţie discontinuă. Un polinom care oscilează mai rapid pe $[0,1]$ ar fi de preferat, căci ar angaja mai viguros funcţia f.

(2) Al doilea dezavantaj este faptul că toţi coeficienţii $\hat{c}_j$ din (21) depind de n, adică $\hat{c}_j = \hat{c}_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Mărirea lui n ne dă un nou sistem de ecuaţii mai mare şi cu o soluţie complet diferită. Acest fenomen se numeşte *nepermanenţa coeficienţilor* $\hat{c}_j$.

Amândouă neajunsurile (1) și (2) pot fi eliminate (sau măcar atenuate) alegând ca funcții de bază un sistem ortogonal,

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 22 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Amândouă neajunsurile (1) și (2) pot fi eliminate (sau măcar atenuate) alegând ca funcții de bază un sistem ortogonal,

$$(\pi_i, \pi_j) = 0 \text{ dacă } i \neq j \quad (\pi_j, \pi_j) = \|\pi_j\|^2 > 0 \tag{22}$$

Amândouă neajunsurile (1) și (2) pot fi eliminate (sau măcar atenuate) alegând ca funcții de bază un sistem ortogonal,

$$(\pi_i, \pi_j) = 0 \text{ dacă } i \neq j \quad (\pi_j, \pi_j) = \|\pi_j\|^2 > 0 \tag{22}$$

Atunci sistemul de ecuații normale devine diagonal și poate fi rezolvat imediat cu formula

Amândouă neajunsurile (1) și (2) pot fi eliminate (sau măcar atenuate) alegând ca funcții de bază un sistem ortogonal,

$$(\pi_i, \pi_j) = 0 \text{ dacă } i \neq j \quad (\pi_j, \pi_j) = \|\pi_j\|^2 > 0 \tag{22}$$

Atunci sistemul de ecuații normale devine diagonal și poate fi rezolvat imediat cu formula

$$\widehat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{23}$$

Amândouă neajunsurile (1) și (2) pot fi eliminate (sau măcar atenuate) alegând ca funcții de bază un sistem ortogonal,

$$(\pi_i, \pi_j) = 0 \text{ dacă } i \neq j \quad (\pi_j, \pi_j) = \|\pi_j\|^2 > 0 \tag{22}$$

Atunci sistemul de ecuații normale devine diagonal și poate fi rezolvat imediat cu formula

$$\widehat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{23}$$

Evident, acești coeficienți $\widehat{c}_j$ sunt independenți de n și odată calculați rămân la fel pentru orice n mai mare. Avem acum proprietatea de permanență a coeficienților. De asemenea nu trebuie să rezolvăm sistemul de ecuații normale, ci putem aplica direct (23).

Amândouă neajunsurile (1) şi (2) pot fi eliminate (sau măcar atenuate) alegând ca funcţii de bază un sistem ortogonal,

$$(\pi_i, \pi_j) = 0 \text{ dacă } i \neq j \quad (\pi_j, \pi_j) = \|\pi_j\|^2 > 0 \tag{22}$$

Atunci sistemul de ecuaţii normale devine diagonal şi poate fi rezolvat imediat cu formula

$$\widehat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{23}$$

Evident, aceşti coeficienţi $\widehat{c}_j$ sunt independenţi de n şi odată calculaţi rămân la fel pentru orice n mai mare. Avem acum proprietatea de permanenţă a coeficienţilor. De asemenea nu trebuie să rezolvăm sistemul de ecuaţii normale, ci putem aplica direct (23).

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 23 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Orice sistem $\{\widehat{\pi}_j\}$ care este liniar independent pe $\operatorname{supp} d\lambda$ poate fi ortogonalizat (în raport cu măsura $d\lambda$) prin *procedeul Gram-Schmidt*.

Orice sistem $\{\widehat{\pi}_j\}$ care este liniar independent pe $\mathrm{supp} d\lambda$ poate fi ortogonalizat (în raport cu măsura $d\lambda$) prin *procedeul Gram-Schmidt*. Se ia

$$\pi_1 = \widehat{\pi}_1$$

Orice sistem $\{\widehat{\pi}_j\}$ care este liniar independent pe $\mathrm{supp} d\lambda$ poate fi ortogonalizat (în raport cu măsura $d\lambda$) prin *procedeul Gram-Schmidt*. Se ia

$$\pi_1 = \widehat{\pi}_1$$

și apoi, pentru $j = 2, 3, \ldots$ se calculează recursiv

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 23 of 58

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Orice sistem $\{\widehat{\pi}_j\}$ care este liniar independent pe $\operatorname{supp} d\lambda$ poate fi ortogonalizat (în raport cu măsura $d\lambda$) prin *procedeul Gram-Schmidt*. Se ia

$$\pi_1 = \widehat{\pi}_1$$

și apoi, pentru $j = 2, 3, \ldots$ se calculează recursiv

$$\pi_j = \widehat{\pi}_j - \sum_{k=1}^{j-1} c_k \pi_k, \qquad c_k = \frac{(\widehat{\pi}_j, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \qquad k = \overline{1, j-1}.$$

Home Page
Title Page
Page 23 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Orice sistem $\{\widehat{\pi}_j\}$ care este liniar independent pe $\operatorname{supp} d\lambda$ poate fi ortogonalizat (în raport cu măsura $d\lambda$) prin *procedeul Gram-Schmidt*. Se ia

$$\pi_1 = \widehat{\pi}_1$$

și apoi, pentru $j = 2, 3, \ldots$ se calculează recursiv

$$\pi_j = \widehat{\pi}_j - \sum_{k=1}^{j-1} c_k \pi_k, \qquad c_k = \frac{(\widehat{\pi}_j, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \qquad k = \overline{1, j-1}.$$

Atunci fiecare π_j astfel determinat este ortogonal pe toate funcțiile precedente.

Home Page
Title Page
Page 23 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Orice sistem $\{\widehat{\pi}_j\}$ care este liniar independent pe $\mathrm{supp} d\lambda$ poate fi ortogonalizat (în raport cu măsura $d\lambda$) prin *procedeul Gram-Schmidt*. Se ia

$$\pi_1 = \widehat{\pi}_1$$

și apoi, pentru $j = 2, 3, \ldots$ se calculează recursiv

$$\pi_j = \widehat{\pi}_j - \sum_{k=1}^{j-1} c_k \pi_k, \qquad c_k = \frac{(\widehat{\pi}_j, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \qquad k = \overline{1, j-1}.$$

Atunci fiecare π_j astfel determinat este ortogonal pe toate funcțiile precedente.

5. Eroarea în metoda celor mai mici pătrate. Convergența

5. Eroarea în metoda celor mai mici pătrate. Convergenţa

5. Eroarea în metoda celor mai mici pătrate. Convergența

Am văzut că dacă $\Phi = \Phi_n$ constă din n funcții π_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ care sunt liniar independente pe $\operatorname{supp} d\lambda$, atunci problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate pentru această măsură

Home Page
Title Page
Page 24 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

5. Eroarea în metoda celor mai mici pătrate. Convergența

Am văzut că dacă $\Phi = \Phi_n$ constă din n funcții π_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ care sunt liniar independente pe $\operatorname{supp} d\lambda$, atunci problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate pentru această măsură

$$\min_{\varphi \in \phi_n} \|f - \varphi\|_{2,d_\lambda} = \|f - \widehat{\varphi}\|_{2,d_\lambda} \tag{24}$$

5. Eroarea în metoda celor mai mici pătrate. Convergenţa

Am văzut că dacă $\Phi = \Phi_n$ constă din n funcţii π_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ care sunt liniar independente pe $\operatorname{supp} d\lambda$, atunci problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate pentru această măsură

$$\min_{\varphi \in \phi_n} \|f - \varphi\|_{2,d_\lambda} = \|f - \widehat{\varphi}\|_{2,d_\lambda} \tag{24}$$

are o soluţie unică $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_n$, dată de (21).

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 24 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

5. Eroarea în metoda celor mai mici pătrate. Convergenţa

Am văzut că dacă $\Phi = \Phi_n$ constă din n funcţii π_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ care sunt liniar independente pe $\mathrm{supp} d\lambda$, atunci problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate pentru această măsură

$$\min_{\varphi \in \phi_n} \|f - \varphi\|_{2,d_\lambda} = \|f - \widehat{\varphi}\|_{2,d_\lambda} \tag{24}$$

are o soluţie unică $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_n$, dată de (21). Există multe moduri de a selecta baza $\{\pi_j\}$ a lui Φ_n şi de aceea mai multe moduri de a reprezenta soluţia, care conduc totuşi la aceeaşi funcţie.

5. Eroarea în metoda celor mai mici pătrate. Convergența

Am văzut că dacă $\Phi = \Phi_n$ constă din n funcții π_j, $j = 1, 2, \dots, n$ care sunt liniar independente pe $\operatorname{supp} d\lambda$, atunci problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate pentru această măsură

$$\min_{\varphi \in \phi_n} \|f - \varphi\|_{2,d_\lambda} = \|f - \widehat{\varphi}\|_{2,d_\lambda} \tag{24}$$

are o soluție unică $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_n$, dată de (21). Există multe moduri de a selecta baza $\{\pi_j\}$ a lui Φ_n și de aceea mai multe moduri de a reprezenta soluția, care conduc totuși la aceeași funcție. Eroarea în sensul celor mai mici pătrate – cantitatea din dreapta relației (24) – este independentă de alegerea funcțiilor de bază (deși calculul soluției, așa cum s-a menționat anterior, nu este).

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 24 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

5. Eroarea în metoda celor mai mici pătrate. Convergența

Am văzut că dacă $\Phi = \Phi_n$ constă din n funcții π_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ care sunt liniar independente pe $\operatorname{supp} d\lambda$, atunci problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate pentru această măsură

$$\min_{\varphi \in \phi_n} \|f - \varphi\|_{2,d_\lambda} = \|f - \widehat{\varphi}\|_{2,d_\lambda} \tag{24}$$

are o soluție unică $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_n$, dată de (21). Există multe moduri de a selecta baza $\{\pi_j\}$ a lui Φ_n și de aceea mai multe moduri de a reprezenta soluția, care conduc totuși la aceeași funcție. Eroarea în sensul celor mai mici pătrate – cantitatea din dreapta relației (24) – este independentă de alegerea funcțiilor de bază (deși calculul soluției, așa cum s-a menționat anterior, nu este). În studiul acestor erori, putem presupune fără a restrânge generalitatea că baza π_j este un sistem ortogonal (fiecare sistem liniar independent poate fi ortogonalizat prin procedeul Gram-Schmidt).

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 24 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

5. Eroarea în metoda celor mai mici pătrate. Convergența

Am văzut că dacă $\Phi = \Phi_n$ constă din n funcții π_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ care sunt liniar independente pe $\operatorname{supp} d\lambda$, atunci problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate pentru această măsură

$$\min_{\varphi \in \phi_n} \|f - \varphi\|_{2,d_\lambda} = \|f - \widehat{\varphi}\|_{2,d_\lambda} \tag{24}$$

are o soluție unică $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_n$, dată de (21). Există multe moduri de a selecta baza $\{\pi_j\}$ a lui Φ_n și de aceea mai multe moduri de a reprezenta soluția, care conduc totuși la aceeași funcție. Eroarea în sensul celor mai mici pătrate – cantitatea din dreapta relației (24) – este independentă de alegerea funcțiilor de bază (deși calculul soluției, așa cum s-a menționat anterior, nu este). În studiul acestor erori, putem presupune fără a restrânge generalitatea că baza π_j este un sistem ortogonal (fiecare sistem liniar independent poate fi ortogonalizat prin procedeul Gram-Schmidt).

Avem conform (23)

$$\widehat{\varphi}_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_j(t), \qquad \widehat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}. \tag{25}$$

Avem conform (23)

$$\widehat{\varphi}_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_j(t), \quad \widehat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}. \tag{25}$$

Observăm întâi că eroarea $f - \varphi_n$ este ortogonală pe Φ_n, adică

$$(f - \widehat{\varphi_n}, \varphi) = 0, \ \forall \ \varphi \in \Phi_n \tag{26}$$

unde produsul scalar este cel din (10).

Avem conform (23)

$$\widehat{\varphi}_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_j(t), \quad \widehat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}. \tag{25}$$

Observăm întâi că eroarea $f - \varphi_n$ este ortogonală pe Φ_n, adică

$$(f - \widehat{\varphi_n}, \varphi) = 0, \ \forall \ \varphi \in \Phi_n \tag{26}$$

unde produsul scalar este cel din (10).
Deoarece φ este o combinație liniară de π_k, este suficient să arătăm (26) pentru fiecare $\varphi = \pi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Avem conform (23)

$$\widehat{\varphi}_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_j(t), \quad \widehat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}. \tag{25}$$

Observăm întâi că eroarea $f - \varphi_n$ este ortogonală pe Φ_n, adică

$$(f - \widehat{\varphi_n}, \varphi) = 0, \ \forall \ \varphi \in \Phi_n \tag{26}$$

unde produsul scalar este cel din (10).
Deoarece φ este o combinație liniară de π_k, este suficient să arătăm (26) pentru fiecare $\varphi = \pi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Avem conform (23)

$$\widehat{\varphi}_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_j(t), \quad \widehat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}. \tag{25}$$

Observăm întâi că eroarea $f - \varphi_n$ este ortogonală pe Φ_n, adică

$$(f - \widehat{\varphi_n}, \varphi) = 0, \ \forall \ \varphi \in \Phi_n \tag{26}$$

unde produsul scalar este cel din (10).
Deoarece φ este o combinație liniară de π_k, este suficient să arătăm (26) pentru fiecare $\varphi = \pi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Înlocuind φ_n cu expresia sa din (25) în (26), găsim

Avem conform (23)

$$\widehat{\varphi}_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_j(t), \quad \widehat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}. \tag{25}$$

Observām întâi cā eroarea $f - \varphi_n$ este ortogonalā pe Φ_n, adicā

$$(f - \widehat{\varphi_n}, \varphi) = 0, \ \forall \ \varphi \in \Phi_n \tag{26}$$

unde produsul scalar este cel din (10).
Deoarece φ este o combinație liniarā de π_k, este suficient sā arātām (26) pentru fiecare $\varphi = \pi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Înlocuind φ_n cu expresia sa din (25) în (26), gāsim

$$(f - \widehat{\varphi}_n, \pi_k) = \left(f - \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_k, \pi_k \right) = (f, \pi_k) - \widehat{c}_k(\pi_k, \pi_k) = 0,$$

Avem conform (23)

$$\widehat{\varphi}_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_j(t), \quad \widehat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}. \tag{25}$$

Observăm întâi că eroarea $f - \varphi_n$ este ortogonală pe Φ_n, adică

$$(f - \widehat{\varphi}_n, \varphi) = 0, \;\; \forall \;\varphi \in \Phi_n \tag{26}$$

unde produsul scalar este cel din (10).
Deoarece φ este o combinație liniară de π_k, este suficient să arătăm (26) pentru fiecare $\varphi = \pi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Înlocuind φ_n cu expresia sa din (25) în (26), găsim

$$(f - \widehat{\varphi}_n, \pi_k) = \left(f - \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_k, \pi_k \right) = (f, \pi_k) - \widehat{c}_k(\pi_k, \pi_k) = 0,$$

ultima ecuație rezultând din formula pentru $\widehat{c}_k$ din (25). Rezultatul din (26) are o interpretare geometrică simplă. Dacă reprezentăm funcțiile ca vectori și spațiul Φ_n ca un plan, atunci pentru orice funcție f care înțeapă planul Φ_n, aproximanta în sensul celor mai mici pătrate $\widehat{\varphi}_n$ este proiecția ortogonală a lui f pe Φ_n, vezi figura 1.

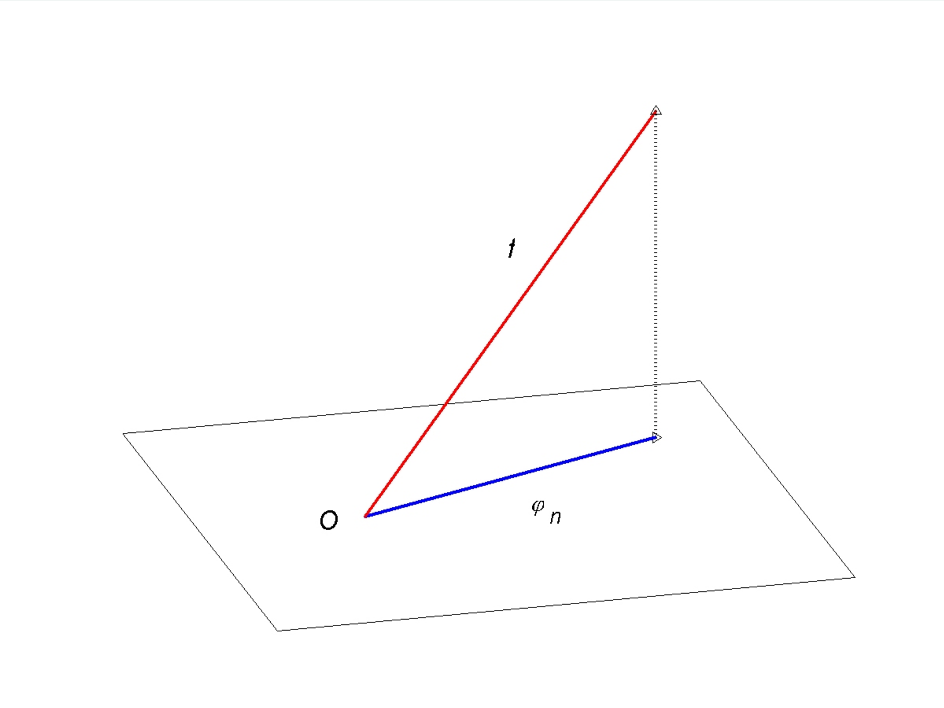

Figura 1: Aproximația în sensul celor mai mici pătrate ca proiecție ortogonală

Home Page
Title Page
Page 28 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

În particular, alegând $\varphi = \widehat{\varphi}_n$ în (26) obținem

Introducere
Aproximație...
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în...
Exemple de...
Exemple de...
Home Page
Title Page
Page 28 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

În particular, alegând $\varphi = \widehat{\varphi}_n$ în (26) obținem

$$(f - \widehat{\varphi}_n, \widehat{\varphi}_n) = 0$$

În particular, alegând $\varphi = \widehat{\varphi}_n$ în (26) obținem

$$(f - \widehat{\varphi}_n, \widehat{\varphi}_n) = 0$$

și de aceea, deoarece $f = (f - \widehat{\varphi}) + \widehat{\varphi}$, conform teoremei lui Pitagora și generalizării sale (15)

În particular, alegând $\varphi = \widehat{\varphi}_n$ în (26) obținem

$$(f - \widehat{\varphi}_n, \widehat{\varphi}_n) = 0$$

și de aceea, deoarece $f = (f - \widehat{\varphi}) + \widehat{\varphi}$, conform teoremei lui Pitagora și generalizării sale (15)

$$\|f\|^2$$

În particular, alegând $\varphi = \widehat{\varphi}_n$ în (26) obținem

$$(f - \widehat{\varphi}_n, \widehat{\varphi}_n) = 0$$

și de aceea, deoarece $f = (f - \widehat{\varphi}) + \widehat{\varphi}$, conform teoremei lui Pitagora și generalizării sale (15)

$$\|f\|^2 = \|f - \widehat{\varphi}\|^2 + \|\widehat{\varphi}\|^2$$

În particular, alegând $\varphi = \widehat{\varphi}_n$ în (26) obținem

$$(f - \widehat{\varphi}_n, \widehat{\varphi}_n) = 0$$

și de aceea, deoarece $f = (f - \widehat{\varphi}) + \widehat{\varphi}$, conform teoremei lui Pitagora și generalizării sale (15)

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \|f - \widehat{\varphi}\|^2 + \|\widehat{\varphi}\|^2 \\ &= \|f - \widehat{\varphi}_n\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_j \right\|^2\end{aligned}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 28 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

În particular, alegând $\varphi = \widehat{\varphi}_n$ în (26) obținem

$$(f - \widehat{\varphi}_n, \widehat{\varphi}_n) = 0$$

și de aceea, deoarece $f = (f - \widehat{\varphi}) + \widehat{\varphi}$, conform teoremei lui Pitagora și generalizării sale (15)

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \|f - \widehat{\varphi}\|^2 + \|\widehat{\varphi}\|^2 \\
&= \|f - \widehat{\varphi}_n\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_j \right\|^2 \\
&= \|f - \widehat{\varphi}_n\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\widehat{c}_j|^2 \|\pi_j\|^2.
\end{aligned}$$

În particular, alegând $\varphi = \widehat{\varphi}_n$ în (26) obținem

$$(f - \widehat{\varphi}_n, \widehat{\varphi}_n) = 0$$

și de aceea, deoarece $f = (f - \widehat{\varphi}) + \widehat{\varphi}$, conform teoremei lui Pitagora și generalizării sale (15)

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \|f - \widehat{\varphi}\|^2 + \|\widehat{\varphi}\|^2 \\ &= \|f - \widehat{\varphi}_n\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_j \right\|^2 \\ &= \|f - \widehat{\varphi}_n\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\widehat{c}_j|^2 \|\pi_j\|^2.\end{aligned}$$

Exprimând primul termen din dreapta obținem

$$\|f - \widehat{\varphi}_n\| = \left\{ \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\widehat{c}_j| \|\pi_j\|^2 \right\}^{1/2}, \quad \widehat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}. \tag{27}$$

De notat că expresia dintre acolade trebuie să fie nenegativă.

În particular, alegând $\varphi = \widehat{\varphi}_n$ în (26) obținem

$$(f - \widehat{\varphi}_n, \widehat{\varphi}_n) = 0$$

și de aceea, deoarece $f = (f - \widehat{\varphi}) + \widehat{\varphi}$, conform teoremei lui Pitagora și generalizării sale (15)

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \|f - \widehat{\varphi}\|^2 + \|\widehat{\varphi}\|^2\\ &= \|f - \widehat{\varphi}_n\|^2 + \left\|\sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j \pi_j\right\|^2\\ &= \|f - \widehat{\varphi}_n\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\widehat{c}_j|^2 \|\pi_j\|^2.\end{aligned}$$

Exprimând primul termen din dreapta obținem

$$\|f - \widehat{\varphi}_n\| = \left\{ \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\widehat{c}_j| \|\pi_j\|^2 \right\}^{1/2}, \quad \widehat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}. \qquad (27)$$

De notat că expresia dintre acolade trebuie să fie nenegativă.

Dacă se dă acum o secvență de spații liniare Φ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, avem evident

Home Page
Title Page
Page 29 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Dacă se dă acum o secvență de spații liniare Φ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ avem evident

$$\|f - \widehat{\varphi}_1\| \geq \|f - \widehat{\varphi}_2\| \geq \|f - \widehat{\varphi}_3\| \geq \ldots,$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 29 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Dacă se dă acum o secvență de spații liniare Φ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, avem evident

$$\|f - \widehat{\varphi}_1\| \geq \|f - \widehat{\varphi}_2\| \geq \|f - \widehat{\varphi}_3\| \geq \ldots,$$

care rezultă nu numai din (27), dar mai direct din faptul că

Dacă se dă acum o secvență de spații liniare Φ_n, $n = 1, 2, 3, \dots$, avem evident

$$\|f - \widehat{\varphi}_1\| \geq \|f - \widehat{\varphi}_2\| \geq \|f - \widehat{\varphi}_3\| \geq \dots,$$

care rezultă nu numai din (27), dar mai direct din faptul că

$$\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Phi_3 \subset \dots.$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 29 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Dacă se dă acum o secvență de spații liniare Φ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, avem evident

$$\|f - \widehat{\varphi}_1\| \geq \|f - \widehat{\varphi}_2\| \geq \|f - \widehat{\varphi}_3\| \geq \ldots,$$

care rezultă nu numai din (27), dar mai direct din faptul că

$$\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Phi_3 \subset \ldots.$$

Deoarece există o infinitate de astfel de spații, atunci secvența de erori din L_2, fiind monoton descrescătoare, trebuie să conveargă la o limită. Este limita 0?

Dacă se dă acum o secvență de spații liniare Φ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, avem evident

$$\|f - \widehat{\varphi}_1\| \geq \|f - \widehat{\varphi}_2\| \geq \|f - \widehat{\varphi}_3\| \geq \ldots,$$

care rezultă nu numai din (27), dar mai direct din faptul că

$$\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Phi_3 \subset \ldots.$$

Deoarece există o infinitate de astfel de spații, atunci secvența de erori din L_2, fiind monoton descrescătoare, trebuie să conveargă la o limită. Este limita 0? Dacă este așa, spunem că aproximarea prin metoda celor mai mici pătrate converge în medie pătratică când $n \to \infty$. Este evident din (27) că o condiție necesară și suficientă pentru aceasta este

Dacă se dă acum o secvență de spații liniare Φ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, avem evident

$$\|f - \widehat{\varphi}_1\| \geq \|f - \widehat{\varphi}_2\| \geq \|f - \widehat{\varphi}_3\| \geq \ldots,$$

care rezultă nu numai din (27), dar mai direct din faptul că

$$\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Phi_3 \subset \ldots.$$

Deoarece există o infinitate de astfel de spații, atunci secvența de erori din L_2, fiind monoton descrescătoare, trebuie să conveargă la o limită. Este limita 0? Dacă este așa, spunem că aproximarea prin metoda celor mai mici pătrate converge în medie pătratică când $n \to \infty$. Este evident din (27) că o condiție necesară și suficientă pentru aceasta este

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{c}_j|^2 \|\pi_j\|^2 = \|f\|^2. \tag{28}$$

Dacă se dă acum o secvență de spații liniare Φ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ avem evident

$$\|f - \widehat{\varphi}_1\| \geq \|f - \widehat{\varphi}_2\| \geq \|f - \widehat{\varphi}_3\| \geq \ldots,$$

care rezultă nu numai din (27), dar mai direct din faptul că

$$\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Phi_3 \subset \ldots.$$

Deoarece există o infinitate de astfel de spații, atunci secvența de erori din L_2, fiind monoton descrescătoare, trebuie să conveargă la o limită. Este limita 0? Dacă este așa, spunem că aproximarea prin metoda celor mai mici pătrate converge în medie pătratică când $n \to \infty$. Este evident din (27) că o condiție necesară și suficientă pentru aceasta este

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{c}_j|^2 \|\pi_j\|^2 = \|f\|^2. \tag{28}$$

Un mod echivalent de a formula convergența este următorul: dându-se f cu $\|f\| < \infty$, adică $\forall\ f \in L_{2,d\lambda}$ și dându-se un $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic, există un întreg $n = n_\varepsilon$ și o funcție $\varphi^* \in \Phi_n$ astfel încât $\|f - \varphi^*\| \leq \varepsilon$. O clasă de spații având această proprietate se numește completă în raport cu norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{2,d\lambda}$. Vom numi relația (28) *relația de completitudine* sau *relația Parseval-Liapunov*.

numi relaţia (28) *relaţia de completitudine* sau *relaţia Parseval-Liapunov*.

(a) Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

(b) Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

Figura 2:

6. Exemple de sisteme ortogonale

6. Exemple de sisteme ortogonale

Unul dintre cele mai utilizate sisteme este sistemul trigonometric cunoscut din analiza Fourier. Un alt sistem larg utilizat este cel al polinoamelor ortogonale.

Home Page
Title Page
Page 32 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

6. Exemple de sisteme ortogonale

Unul dintre cele mai utilizate sisteme este sistemul trigonometric cunoscut din analiza Fourier. Un alt sistem larg utilizat este cel al polinoamelor ortogonale.

(1) **Sistemul trigonometric** este format din funcţiile:

$$1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \dots, \sin t, \sin 2t, \sin 3t, \dots$$

6. Exemple de sisteme ortogonale

Unul dintre cele mai utilizate sisteme este sistemul trigonometric cunoscut din analiza Fourier. Un alt sistem larg utilizat este cel al polinoamelor ortogonale.

(1) **Sistemul trigonometric** este format din funcțiile:

$$1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \ldots, \sin t, \sin 2t, \sin 3t, \ldots$$

El este ortogonal pe $[0, 2\pi]$ în raport cu măsura

$$d\lambda(t) = \begin{cases} dt & \text{pe } [0, 2\pi] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Home Page
Title Page
Go Back
Full Screen
Close
Quit

6. Exemple de sisteme ortogonale

Unul dintre cele mai utilizate sisteme este sistemul trigonometric cunoscut din analiza Fourier. Un alt sistem larg utilizat este cel al polinoamelor ortogonale.

(1) **Sistemul trigonometric** este format din funcțiile:

$$1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \ldots, \sin t, \sin 2t, \sin 3t, \ldots$$

El este ortogonal pe $[0, 2\pi]$ în raport cu măsura

$$d\lambda(t) = \begin{cases} dt & \text{pe } [0, 2\pi] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Home Page
Title Page
Page 33 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Avem

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \sin lt dt = \begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad k \neq l \\ \pi, & \text{pentru} \quad k = l \end{cases} \qquad k, l = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos lt dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 2\pi, & k = l = 0 \\ \pi, & k = l > 0 \end{cases} \qquad k, l = 0, 1, 2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \cos lt dt = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 33 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Avem

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \sin lt dt = \begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad k \neq l \\ \pi, & \text{pentru} \quad k = l \end{cases} \qquad k, l = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos lt dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 2\pi, & k = l = 0 \\ \pi, & k = l > 0 \end{cases} \qquad k, l = 0, 1, 2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \cos lt dt = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Aproximarea are forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \tag{29}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 33 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Avem

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \sin lt dt = \begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad k \neq l \\ \pi, & \text{pentru} \quad k = l \end{cases} \qquad k, l = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos lt dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 2\pi, & k = l = 0 \\ \pi, & k = l > 0 \end{cases} \qquad k, l = 0, 1, 2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \cos lt dt = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Aproximarea are forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \tag{29}$$

Utilizând (23) obținem

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \qquad k = 1, 2, \ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt, \qquad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{30}$$

Home Page
Title Page
Page 33 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Avem

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \sin lt dt = \begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad k \neq l \\ \pi, & \text{pentru} \quad k = l \end{cases} \qquad k, l = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos lt dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 2\pi, & k = l = 0 \\ \pi, & k = l > 0 \end{cases} \qquad k, l = 0, 1, 2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \cos lt dt = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Aproximarea are forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \tag{29}$$

Utilizând (23) obţinem

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \qquad k = 1, 2, \ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt, \qquad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{30}$$

numiţi *coeficienţi Fourier* ai lui f. Ei sunt coeficienţii (23) pentru

Home Page
Title Page
Page 34 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

sistemul trigonometric. Prin extensie coeficienţii (23) pentru orice sistem ortogonal (π_j) se vor numi coeficienţii Fourier ai lui f relativ la acest sistem. În particular, recunoaştem în seria Fourier trunchiată pentru $k = n$ aproximarea lui f în clasa polinoamelor trigonometrice de grad $\leq n$ relativ la norma

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |u(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 34 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

sistemul trigonometric. Prin extensie coeficienţii (23) pentru orice sistem ortogonal (π_j) se vor numi coeficienţii Fourier ai lui f relativ la acest sistem. În particular, recunoaştem în seria Fourier trunchiată pentru $k = n$ aproximarea lui f în clasa polinoamelor trigonometrice de grad $\leq n$ relativ la norma

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |u(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

(2) **Polinoame ortogonale**.

(2) **Polinoame ortogonale**. Dându-se o măsură $d\lambda$, știm că orice număr finit de puteri $1, t, t^2, \ldots$ sunt liniar independente pe $[a, b]$, dacă $\mathrm{supp} d\lambda = [a, b]$, iar $1, t, \ldots, t^{n-1}$ liniar independente pe $\mathrm{supp} d\lambda = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$.

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 35 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

(2) **Polinoame ortogonale**. Dându-se o măsură $d\lambda$, știm că orice număr finit de puteri $1, t, t^2, \ldots$ sunt liniar independente pe $[a, b]$, dacă $\mathrm{supp} d\lambda = [a, b]$, iar $1, t, \ldots, t^{n-1}$ liniar independente pe $\mathrm{supp} d\lambda = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$. Deoarece o mulțime de vectori liniar independenți a unui spațiu liniar poate fi ortogonalizată prin procedeul Gram-Schmidt, orice măsură $d\lambda$ de tipul considerat generează o mulțime unică de polinoame ortogonale monice $\pi_j(t, d\lambda)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ ce satisfac

(2) **Polinoame ortogonale**. Dându-se o măsură $d\lambda$, știm că orice număr finit de puteri $1, t, t^2, \ldots$ sunt liniar independente pe $[a, b]$, dacă $\mathrm{supp} d\lambda = [a, b]$, iar $1, t, \ldots, t^{n-1}$ liniar independente pe $\mathrm{supp} d\lambda = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$. Deoarece o mulțime de vectori liniar independenți a unui spațiu liniar poate fi ortogonalizată prin procedeul Gram-Schmidt, orice măsură $d\lambda$ de tipul considerat generează o mulțime unică de polinoame ortogonale monice $\pi_j(t, d\lambda)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ ce satisfac

$$\mathrm{grad}\pi_j = j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Home Page
Title Page
Page 35 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

(2) **Polinoame ortogonale**. Dându-se o măsură $d\lambda$, știm că orice număr finit de puteri $1, t, t^2, \ldots$ sunt liniar independente pe $[a,b]$, dacă $\mathrm{supp} d\lambda = [a,b]$, iar $1, t, \ldots, t^{n-1}$ liniar independente pe $\mathrm{supp} d\lambda = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$. Deoarece o mulțime de vectori liniar independenți a unui spațiu liniar poate fi ortogonalizată prin procedeul Gram-Schmidt, orice măsură $d\lambda$ de tipul considerat generează o mulțime unică de polinoame ortogonale monice $\pi_j(t, d\lambda)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ ce satisfac

$$\mathrm{grad} \pi_j = j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_k(t) \pi_l(t) d\lambda(t) = 0, \text{ dacă } k \neq l \tag{31}$$

(2) **Polinoame ortogonale**. Dându-se o măsură $d\lambda$, știm că orice număr finit de puteri $1, t, t^2, \ldots$ sunt liniar independente pe $[a, b]$, dacă $\mathrm{supp} d\lambda = [a, b]$, iar $1, t, \ldots, t^{n-1}$ liniar independente pe $\mathrm{supp} d\lambda = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$. Deoarece o mulțime de vectori liniar independenți a unui spațiu liniar poate fi ortogonalizată prin procedeul Gram-Schmidt, orice măsură $d\lambda$ de tipul considerat generează o mulțime unică de polinoame ortogonale monice $\pi_j(t, d\lambda)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ ce satisfac

$$\mathrm{grad}\pi_j = j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_k(t)\pi_l(t) d\lambda(t) = 0, \text{ dacă } k \neq l \tag{31}$$

Aceste polinoame se numesc polinoame ortogonale relativ la norma $d\lambda$. Vom permite indicilor să meargă de la 0. Mulțimea π_j este infinită dacă $\mathrm{supp} d\lambda = [a, b]$ și constă din exact N polinoame $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{N-1}$ dacă $\mathrm{supp} d\lambda = \{t_1, \ldots, t_N\}$. În ultimul caz polinoamele se numesc polinoame ortogonale discrete.

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 35 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

(2) **Polinoame ortogonale**. Dându-se o măsură $d\lambda$, știm că orice număr finit de puteri $1, t, t^2, \ldots$ sunt liniar independente pe $[a, b]$, dacă $\mathrm{supp} d\lambda = [a, b]$, iar $1, t, \ldots, t^{n-1}$ liniar independente pe $\mathrm{supp} d\lambda = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$. Deoarece o mulțime de vectori liniar independenți a unui spațiu liniar poate fi ortogonalizată prin procedeul Gram-Schmidt, orice măsură $d\lambda$ de tipul considerat generează o mulțime unică de polinoame ortogonale monice $\pi_j(t, d\lambda)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ ce satisfac

$$\mathrm{grad} \pi_j = j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_k(t) \pi_l(t) d\lambda(t) = 0, \text{ dacă } k \neq l \tag{31}$$

Aceste polinoame se numesc polinoame ortogonale relativ la norma $d\lambda$. Vom permite indicilor să meargă de la 0. Mulțimea π_j este infinită dacă $\mathrm{supp} d\lambda = [a, b]$ și constă din exact N polinoame $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{N-1}$ dacă $\mathrm{supp} d\lambda = \{t_1, \ldots, t_N\}$. În ultimul caz polinoamele se numesc polinoame ortogonale discrete.

Între trei polinoame ortogonale monice[1] consecutive există o relaţie liniară.

[1] Un polinom se numeşte *monic* dacă coeficientul său dominant este 1.

Home Page
Title Page
Page 36 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Între trei polinoame ortogonale monice[1] consecutive există o relaţie liniară. Mai exact, există constantele reale $\alpha_k = \alpha_k(d\lambda)$ şi $\beta_k = \beta_k(d\lambda) > 0$ (depinzând de măsura $d\lambda$) astfel încât

[1]Un polinom se numeşte *monic* dacă coeficientul său dominant este 1.

Între trei polinoame ortogonale monice[1] consecutive există o relație liniară. Mai exact, există constantele reale $\alpha_k = \alpha_k(d\lambda)$ și $\beta_k = \beta_k(d\lambda) > 0$ (depinzând de măsura $d\lambda$) astfel încât

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{32}$$

$$\pi_{-1}(t) = 0, \quad \pi_0(t) = 1.$$

[1]Un polinom se numește *monic* dacă coeficientul său dominant este 1.

Home Page
Title Page
Page 36 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Între trei polinoame ortogonale monice[1] consecutive există o relaţie liniară. Mai exact, există constantele reale $\alpha_k = \alpha_k(d\lambda)$ şi $\beta_k = \beta_k(d\lambda) > 0$ (depinzând de măsura $d\lambda$) astfel încât

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{32}$$

$$\pi_{-1}(t) = 0, \quad \pi_0(t) = 1.$$

(Se subînţelege că (32) are loc pentru orice $k \in \mathbb{N}$ dacă $\mathrm{supp} d\lambda = [a, b]$ şi numai pentru $k = \overline{0, N-2}$ dacă $\mathrm{supp} d\lambda = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$).

[1] Un polinom se numeşte *monic* dacă coeficientul său dominant este 1.

Între trei polinoame ortogonale monice[1] consecutive există o relație liniară. Mai exact, există constantele reale $\alpha_k = \alpha_k(d\lambda)$ și $\beta_k = \beta_k(d\lambda) > 0$ (depinzând de măsura $d\lambda$) astfel încât

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{32}$$

$$\pi_{-1}(t) = 0, \quad \pi_0(t) = 1.$$

(Se subînțelege că (32) are loc pentru orice $k \in \mathbb{N}$ dacă $\operatorname{supp} d\lambda = [a, b]$ și numai pentru $k = \overline{0, N-2}$ dacă $\operatorname{supp} d\lambda = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$). Pentru a demonstra (32) și a obține expresiile coeficienților să observăm că $\pi_{k+1}(t) - t\pi_k(t)$ este un polinom de grad $\leq k$, și deci poate fi exprimat ca o combinație liniară a lui $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k$. Scriem această combinație sub forma

[1] Un polinom se numește *monic* dacă coeficientul său dominant este 1.

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 36 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Între trei polinoame ortogonale monice[1] consecutive există o relaţie liniară. Mai exact, există constantele reale $\alpha_k = \alpha_k(d\lambda)$ şi $\beta_k = \beta_k(d\lambda) > 0$ (depinzând de măsura $d\lambda$) astfel încât

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{32}$$

$$\pi_{-1}(t) = 0, \qquad \pi_0(t) = 1.$$

(Se subînţelege că (32) are loc pentru orice $k \in \mathbb{N}$ dacă $\mathrm{supp} d\lambda = [a, b]$ şi numai pentru $k = \overline{0, N-2}$ dacă $\mathrm{supp} d\lambda = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$). Pentru a demonstra (32) şi a obţine expresiile coeficienţilor să observăm că $\pi_{k+1}(t) - t\pi_k(t)$ este un polinom de grad $\leq k$, şi deci poate fi exprimat ca o combinaţie liniară a lui $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k$. Scriem această combinaţie sub forma

$$\pi_{k+1} - t\pi_k(t) = -\alpha_k \pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t) + \sum_{j=0}^{k-2} \gamma_{k,j} \pi_j(t) \tag{33}$$

(sumele vide se consideră nule).

[1]Un polinom se numeşte *monic* dacă coeficientul său dominant este 1.

Între trei polinoame ortogonale monice[1] consecutive există o relaţie liniară. Mai exact, există constantele reale $\alpha_k = \alpha_k(d\lambda)$ şi $\beta_k = \beta_k(d\lambda) > 0$ (depinzând de măsura $d\lambda$) astfel încât

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{32}$$

$$\pi_{-1}(t) = 0, \quad \pi_0(t) = 1.$$

(Se subînţelege că (32) are loc pentru orice $k \in \mathbb{N}$ dacă $\mathrm{supp} d\lambda = [a, b]$ şi numai pentru $k = \overline{0, N-2}$ dacă $\mathrm{supp} d\lambda = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$). Pentru a demonstra (32) şi a obţine expresiile coeficienţilor să observăm că $\pi_{k+1}(t) - t\pi_k(t)$ este un polinom de grad $\leq k$, şi deci poate fi exprimat ca o combinaţie liniară a lui $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k$. Scriem această combinaţie sub forma

$$\pi_{k+1} - t\pi_k(t) = -\alpha_k \pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t) + \sum_{j=0}^{k-2} \gamma_{k,j} \pi_j(t) \tag{33}$$

(sumele vide se consideră nule).

[1] Un polinom se numeşte *monic* dacă coeficientul său dominant este 1.

Înmulțim scalar ambii membri ai relației anterioare cu π_k și obținem

Home Page
Title Page
Page 37 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Înmulțim scalar ambii membri ai relației anterioare cu π_k și obținem

$$(-t\pi_k, \pi_k) = -\alpha_k(\pi_k, \pi_k)$$

Înmulţim scalar ambii membri ai relaţiei anterioare cu π_k şi obţinem

$$(-t\pi_k, \pi_k) = -\alpha_k(\pi_k, \pi_k)$$

adică

$$\alpha_k = \frac{(t\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{34}$$

Înmulțim scalar ambii membri ai relației anterioare cu π_k și obținem

$$(-t\pi_k, \pi_k) = -\alpha_k(\pi_k, \pi_k)$$

adică

$$\alpha_k = \frac{(t\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{34}$$

La fel, înmulțind scalar cu π_{k-1} obținem

$$(-t\pi_k, \pi_{k-1}) = -\beta_k(\pi_{k-1}, \pi_{k-1}).$$

Home Page
Title Page
Page 37 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Înmulțim scalar ambii membri ai relației anterioare cu π_k și obținem

$$(-t\pi_k, \pi_k) = -\alpha_k(\pi_k, \pi_k)$$

adică

$$\alpha_k = \frac{(t\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{34}$$

La fel, înmulțind scalar cu π_{k-1} obținem

$$(-t\pi_k, \pi_{k-1}) = -\beta_k(\pi_{k-1}, \pi_{k-1}).$$

Deoarece $(t\pi_k, \pi_{k-1}) = (\pi_k, t\pi_{k-1})$ și $t\pi_{k-1}$ diferă de π_k printr-un polinom de grad $< k$ se obține prin ortogonalitate $(t\pi_k, \pi_{k-1}) = (\pi_k, \pi_k)$, deci

Home Page
Title Page
Page 37 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Înmulțim scalar ambii membri ai relației anterioare cu π_k și obținem

$$(-t\pi_k, \pi_k) = -\alpha_k(\pi_k, \pi_k)$$

adică

$$\alpha_k = \frac{(t\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{34}$$

La fel, înmulțind scalar cu π_{k-1} obținem

$$(-t\pi_k, \pi_{k-1}) = -\beta_k(\pi_{k-1}, \pi_{k-1}).$$

Deoarece $(t\pi_k, \pi_{k-1}) = (\pi_k, t\pi_{k-1})$ și $t\pi_{k-1}$ diferă de π_k printr-un polinom de grad $< k$ se obține prin ortogonalitate $(t\pi_k, \pi_{k-1}) = (\pi_k, \pi_k)$, deci

$$\beta_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{35}$$

Introducere

Aproximaţie . . .

Produse scalare

Ecuaţiile normale

Eroarea în . . .

Exemple de . . .

Exemple de . . .

Home Page

Title Page

Page 37 of 58

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Înmulţim scalar ambii membri ai relaţiei anterioare cu π_k şi obţinem

$$(-t\pi_k, \pi_k) = -\alpha_k(\pi_k, \pi_k)$$

adică

$$\alpha_k = \frac{(t\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{34}$$

La fel, înmulţind scalar cu π_{k-1} obţinem

$$(-t\pi_k, \pi_{k-1}) = -\beta_k(\pi_{k-1}, \pi_{k-1}).$$

Deoarece $(t\pi_k, \pi_{k-1}) = (\pi_k, t\pi_{k-1})$ şi $t\pi_{k-1}$ diferă de π_k printr-un polinom de grad $< k$ se obţine prin ortogonalitate $(t\pi_k, \pi_{k-1}) = (\pi_k, \pi_k)$, deci

$$\beta_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{35}$$

Înmulţind (33) cu π_l, $l < k - 1$, se obţine

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 37 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Înmulțim scalar ambii membri ai relației anterioare cu π_k și obținem

$$(-t\pi_k, \pi_k) = -\alpha_k(\pi_k, \pi_k)$$

adică

$$\alpha_k = \frac{(t\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{34}$$

La fel, înmulțind scalar cu π_{k-1} obținem

$$(-t\pi_k, \pi_{k-1}) = -\beta_k(\pi_{k-1}, \pi_{k-1}).$$

Deoarece $(t\pi_k, \pi_{k-1}) = (\pi_k, t\pi_{k-1})$ și $t\pi_{k-1}$ diferă de π_k printr-un polinom de grad $< k$ se obține prin ortogonalitate $(t\pi_k, \pi_{k-1}) = (\pi_k, \pi_k)$, deci

$$\beta_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{35}$$

Înmulțind (33) cu π_l, $l < k - 1$, se obține

$$\gamma_{k,l} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, k - 1 \tag{36}$$

Înmulțim scalar ambii membri ai relației anterioare cu π_k și obținem

$$(-t\pi_k, \pi_k) = -\alpha_k(\pi_k, \pi_k)$$

adică

$$\alpha_k = \frac{(t\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{34}$$

La fel, înmulțind scalar cu π_{k-1} obținem

$$(-t\pi_k, \pi_{k-1}) = -\beta_k(\pi_{k-1}, \pi_{k-1}).$$

Deoarece $(t\pi_k, \pi_{k-1}) = (\pi_k, t\pi_{k-1})$ și $t\pi_{k-1}$ diferă de π_k printr-un polinom de grad $< k$ se obține prin ortogonalitate $(t\pi_k, \pi_{k-1}) = (\pi_k, \pi_k)$, deci

$$\beta_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{35}$$

Înmulțind (33) cu π_l, $l < k-1$, se obține

$$\gamma_{k,l} = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{36}$$

Formula de recurență (32) ne dă o modalitate practică de determinare a polinoamelor ortogonale.

Home Page
Title Page

Go Back
Full Screen
Close
Quit

Formula de recurență (32) ne dă o modalitate practică de determinare a polinoamelor ortogonale. Deoarece $\pi_0 = 1$, putem calcula α_0 cu (34) pentru $k = 0$ și apoi π_1, etc.

Formula de recurență (32) ne dă o modalitate practică de determinare a polinoamelor ortogonale. Deoarece $\pi_0 = 1$, putem calcula α_0 cu (34) pentru $k = 0$ și apoi π_1, etc. Procedeul – numit procedura lui Stieltjes – este foarte potrivit pentru polinoame ortogonale discrete, căci în acest caz produsul scalar se exprimă prin sume finite.

Formula de recurență (32) ne dă o modalitate practică de determinare a polinoamelor ortogonale. Deoarece $\pi_0 = 1$, putem calcula α_0 cu (34) pentru $k = 0$ și apoi π_1, etc. Procedeul – numit procedura lui Stieltjes – este foarte potrivit pentru polinoame ortogonale discrete, căci în acest caz produsul scalar se exprimă prin sume finite.

În cazul continuu, calculul produsului scalar necesită calcul de integrale, ceea ce complică lucrurile. Din fericire, pentru multe măsuri speciale importante, coeficienții se cunosc explicit.

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 38 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Formula de recurenţă (32) ne dă o modalitate practică de determinare a polinoamelor ortogonale. Deoarece $\pi_0 = 1$, putem calcula α_0 cu (34) pentru $k = 0$ şi apoi π_1, etc. Procedeul – numit procedura lui Stieltjes – este foarte potrivit pentru polinoame ortogonale discrete, căci în acest caz produsul scalar se exprimă prin sume finite.

În cazul continuu, calculul produsului scalar necesită calcul de integrale, ceea ce complică lucrurile. Din fericire, pentru multe măsuri speciale importante, coeficienţii se cunosc explicit. Cazul special când măsura este simetrică (adică $d\lambda(t) = w(t)$ cu $w(-t) = w(t)$ şi $\operatorname{supp} d\lambda$ simetrică faţă de origine) merită o atenţie specială deoarece în acest caz $\alpha_k = 0$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, conform lui (29) căci

Formula de recurenţă (32) ne dă o modalitate practică de determinare a polinoamelor ortogonale. Deoarece $\pi_0 = 1$, putem calcula α_0 cu (34) pentru $k = 0$ şi apoi π_1, etc. Procedeul – numit procedura lui Stieltjes – este foarte potrivit pentru polinoame ortogonale discrete, căci în acest caz produsul scalar se exprimă prin sume finite.

În cazul continuu, calculul produsului scalar necesită calcul de integrale, ceea ce complică lucrurile. Din fericire, pentru multe măsuri speciale importante, coeficienţii se cunosc explicit. Cazul special când măsura este simetrică (adică $d\lambda(t) = w(t)$ cu $w(-t) = w(t)$ şi $\operatorname{supp} d\lambda$ simetrică faţă de origine) merită o atenţie specială deoarece în acest caz $\alpha_k = 0$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, conform lui (29) căci

$$(t\pi_k, \pi_k) = \int_{\mathbb{R}} w(t) t\pi_k^2(t) dt = \int_a^b w(t) t\pi_k^2(t) dt = 0,$$

Formula de recurență (32) ne dă o modalitate practică de determinare a polinoamelor ortogonale. Deoarece $\pi_0 = 1$, putem calcula α_0 cu (34) pentru $k = 0$ și apoi π_1, etc. Procedeul – numit procedura lui Stieltjes – este foarte potrivit pentru polinoame ortogonale discrete, căci în acest caz produsul scalar se exprimă prin sume finite.

În cazul continuu, calculul produsului scalar necesită calcul de integrale, ceea ce complică lucrurile. Din fericire, pentru multe măsuri speciale importante, coeficienții se cunosc explicit. Cazul special când măsura este simetrică (adică $d\lambda(t) = w(t)$ cu $w(-t) = w(t)$ și $\operatorname{supp} d\lambda$ simetrică față de origine) merită o atenție specială deoarece în acest caz $\alpha_k = 0$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, conform lui (29) căci

$$(t\pi_k, \pi_k) = \int_{\mathbb{R}} w(t) t \pi_k^2(t) dt = \int_a^b w(t) t \pi_k^2(t) dt = 0,$$

deoarece avem o integrală dintr-o funcție impară pe un domeniu simetric.

Formula de recurență (32) ne dă o modalitate practică de determinare a polinoamelor ortogonale. Deoarece $\pi_0 = 1$, putem calcula α_0 cu (34) pentru $k = 0$ și apoi π_1, etc. Procedeul – numit procedura lui Stieltjes – este foarte potrivit pentru polinoame ortogonale discrete, căci în acest caz produsul scalar se exprimă prin sume finite.

În cazul continuu, calculul produsului scalar necesită calcul de integrale, ceea ce complică lucrurile. Din fericire, pentru multe măsuri speciale importante, coeficienții se cunosc explicit. Cazul special când măsura este simetrică (adică $d\lambda(t) = w(t)$ cu $w(-t) = w(t)$ și $\operatorname{supp} d\lambda$ simetrică față de origine) merită o atenție specială deoarece în acest caz $\alpha_k = 0$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, conform lui (29) căci

$$(t\pi_k, \pi_k) = \int_{\mathbb{R}} w(t) t \pi_k^2(t) dt = \int_a^b w(t) t \pi_k^2(t) dt = 0,$$

deoarece avem o integrală dintr-o funcție impară pe un domeniu simetric.

Figura 3: Thomas Jan Stieltjes (1856-1894)

Figura 3: Thomas Jan Stieltjes (1856-1894)

Home Page
Title Page
Page 40 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

7. Exemple de polinoame ortogonale

7. Exemple de polinoame ortogonale

7.1. Polinoamele lui Legendre

7. Exemple de polinoame ortogonale

7.1. Polinoamele lui Legendre

7. Exemple de polinoame ortogonale

7.1. Polinoamele lui Legendre

Se definesc prin așa-numita formulă a lui Rodrigues

7. Exemple de polinoame ortogonale

7.1. Polinoamele lui Legendre

Se definesc prin așa-numita formulă a lui Rodrigues

$$\pi_k(t) = \frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k. \tag{37}$$

7. Exemple de polinoame ortogonale

7.1. Polinoamele lui Legendre

Se definesc prin așa-numita formulă a lui Rodrigues

$$\pi_k(t) = \frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k. \tag{37}$$

Verificăm întâi ortogonalitatea pe $[-1,1]$ în raport cu măsura $d\lambda(t) = dt$. Pentru orice $0 \leq l < k$, prin integrare repetată prin părți se obține:

7. Exemple de polinoame ortogonale

7.1. Polinoamele lui Legendre

Se definesc prin așa-numita formulă a lui Rodrigues

$$\pi_k(t) = \frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k. \tag{37}$$

Verificăm întâi ortogonalitatea pe $[-1,1]$ în raport cu măsura $d\lambda(t) = dt$. Pentru orice $0 \le l < k$, prin integrare repetată prin părți se obține:

$$\int_{-1}^{1}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k = \sum_{m=0}^{l} l(l-1)\dots(l-m+1)t^{l-m}\frac{d^{k-m-1}}{dt^{k-m-1}}(t^2-1)^k\bigg|_{-1}^{1} = 0, \tag{38}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 40 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

7. Exemple de polinoame ortogonale

7.1. Polinoamele lui Legendre

Se definesc prin așa-numita formulă a lui Rodrigues

$$\pi_k(t) = \frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k. \tag{37}$$

Verificăm întâi ortogonalitatea pe $[-1,1]$ în raport cu măsura $d\lambda(t) = dt$. Pentru orice $0 \le l < k$, prin integrare repetată prin părți se obține:

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k = \sum_{m=0}^{l} l(l-1)\dots(l-m+1)t^{l-m}\frac{d^{k-m-1}}{dt^{k-m-1}}(t^2-1)^k\Big|_{-1}^{1} = 0, \tag{38}$$

ultima relaţie având loc deoarece $0 \le k-m-1 < k$. Deci,

$$(\pi_k, p) = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{P}_{k-1},$$

demonstrându-se astfel ortogonalitatea.

Home Page
Title Page
Page 41 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

ultima relație având loc deoarece $0 \le k-m-1 < k$. Deci,

$$(\pi_k, p) = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{P}_{k-1},$$

demonstrându-se astfel ortogonalitatea. Datorită simetriei, putem scrie

$$\pi_k(t) = t^k + \mu_k t^{k-2} + \ldots, \quad k \ge 2$$

ultima relație având loc deoarece $0 \le k - m - 1 < k$. Deci,

$$(\pi_k, p) = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{P}_{k-1},$$

demonstrându-se astfel ortogonalitatea. Datorită simetriei, putem scrie

$$\pi_k(t) = t^k + \mu_k t^{k-2} + \ldots, \quad k \ge 2$$

și observând (din nou datorită simetriei) că relația de recurență are forma

ultima relaţie având loc deoarece $0 \leq k - m - 1 < k$. Deci,

$$(\pi_k, p) = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{P}_{k-1},$$

demonstrându-se astfel ortogonalitatea. Datorită simetriei, putem scrie

$$\pi_k(t) = t^k + \mu_k t^{k-2} + \ldots, \quad k \geq 2$$

şi observând (din nou datorită simetriei) că relaţia de recurenţă are forma

$$\pi_{k+1}(t) = t\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t),$$

Home Page

Title Page

Page 41 of 58

Go Back

Full Screen

Close

Quit

ultima relaţie având loc deoarece $0 \le k-m-1 < k$. Deci,

$$(\pi_k, p) = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{P}_{k-1},$$

demonstrându-se astfel ortogonalitatea. Datorită simetriei, putem scrie

$$\pi_k(t) = t^k + \mu_k t^{k-2} + \ldots, \quad k \ge 2$$

şi observând (din nou datorită simetriei) că relaţia de recurenţă are forma

$$\pi_{k+1}(t) = t\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t),$$

obţinem

$$\beta_k = \frac{t\pi_k(t) - \pi_{k+1}(t)}{\pi_{k-1}(t)},$$

care este valabilă pentru orice t.

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 41 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

ultima relație având loc deoarece $0 \le k - m - 1 < k$. Deci,

$$(\pi_k, p) = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{P}_{k-1},$$

demonstrându-se astfel ortogonalitatea. Datorită simetriei, putem scrie

$$\pi_k(t) = t^k + \mu_k t^{k-2} + \ldots, \quad k \ge 2$$

și observând (din nou datorită simetriei) că relația de recurență are forma

$$\pi_{k+1}(t) = t\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t),$$

obținem

$$\beta_k = \frac{t\pi_k(t) - \pi_{k+1}(t)}{\pi_{k-1}(t)},$$

care este valabilă pentru orice t. Făcând $t \to \infty$,

$$\beta_k = \lim_{t\to\infty} \frac{t\pi_k(t) - \pi_{k+1}(t)}{\pi_{k-1}(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\mu_k - \mu_{k+1})t^{k-1} + \ldots}{t^{k-1} + \ldots} = \mu_k - \mu_{k+1}.$$

ultima relaţie având loc deoarece $0 \leq k-m-1 < k$. Deci,

$$(\pi_k, p) = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{P}_{k-1},$$

demonstrându-se astfel ortogonalitatea. Datorită simetriei, putem scrie

$$\pi_k(t) = t^k + \mu_k t^{k-2} + \ldots, \quad k \geq 2$$

şi observând (din nou datorită simetriei) că relaţia de recurenţă are forma

$$\pi_{k+1}(t) = t\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t),$$

obţinem

$$\beta_k = \frac{t\pi_k(t) - \pi_{k+1}(t)}{\pi_{k-1}(t)},$$

care este valabilă pentru orice t. Făcând $t \to \infty$,

$$\beta_k = \lim_{t\to\infty} \frac{t\pi_k(t) - \pi_{k+1}(t)}{\pi_{k-1}(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\mu_k - \mu_{k+1})t^{k-1} + \ldots}{t^{k-1} + \ldots} = \mu_k - \mu_{k+1}.$$

(Dacă $k = 1$, punem $\mu_1 = 0$.) Din formula lui Rodrigues rezultă

(Dacă $k = 1$, punem $\mu_1 = 0$.) Din formula lui Rodrigues rezultă

$$\begin{aligned}\pi_k(t) &= \frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}\left(t^{2k} - kt^{2k-2} + \dots\right)\\ &= \frac{k!}{(2k)!}\left(2k(2k-1)\dots(k+1)t^k - k(2k-2)(2k-3)\dots(k-1)t^{k-1} + \dots\right)\\ &= t^k - \frac{k(k-1)}{2(2k-1)}t^{k-2} + \dots,\end{aligned}$$

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 42 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

(Dacă $k = 1$, punem $\mu_1 = 0$.) Din formula lui Rodrigues rezultă

$$\begin{aligned}\pi_k(t) &= \frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}\left(t^{2k} - kt^{2k-2} + \dots\right)\\ &= \frac{k!}{(2k)!}\left(2k(2k-1)\dots(k+1)t^k - k(2k-2)(2k-3)\dots(k-1)t^{k-1} + \dots\right)\\ &= t^k - \frac{k(k-1)}{2(2k-1)}t^{k-2} + \dots,\end{aligned}$$

așa că

$$\mu_k = \frac{k(k-1)}{2(2k-1)}, \qquad k \geq 2.$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 42 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

(Dacă $k = 1$, punem $\mu_1 = 0$.) Din formula lui Rodrigues rezultă

$$\pi_k(t) = \frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}\left(t^{2k} - kt^{2k-2} + \dots\right)$$

$$= \frac{k!}{(2k)!}\left(2k(2k-1)\dots(k+1)t^k - k(2k-2)(2k-3)\dots(k-1)t^{k-1} + \dots\right)$$

$$= t^k - \frac{k(k-1)}{2(2k-1)}t^{k-2} + \dots,$$

așa că

$$\mu_k = \frac{k(k-1)}{2(2k-1)}, \qquad k \geq 2.$$

Deci,

$$\beta_k = \mu_k - \mu_{k+1} = \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

(Dacă $k=1$, punem $\mu_1=0$.) Din formula lui Rodrigues rezultă

$$\pi_k(t) = \frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}\left(t^{2k} - kt^{2k-2} + \dots\right)$$
$$= \frac{k!}{(2k)!}\left(2k(2k-1)\dots(k+1)t^k - k(2k-2)(2k-3)\dots(k-1)t^{k-1} + \dots\right)$$
$$= t^k - \frac{k(k-1)}{2(2k-1)}t^{k-2} + \dots,$$

așa că

$$\mu_k = \frac{k(k-1)}{2(2k-1)}, \qquad k \geq 2.$$

Deci,

$$\beta_k = \mu_k - \mu_{k+1} = \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

și deoarece $\mu_1 = 0$,

$$\beta_k = \frac{1}{4-k^{-2}}, \qquad k \geq 1. \tag{39}$$

(Dacă $k = 1$, punem $\mu_1 = 0$.) Din formula lui Rodrigues rezultă

$$\pi_k(t) = \frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}\left(t^{2k} - kt^{2k-2} + \dots\right)$$
$$= \frac{k!}{(2k)!}\left(2k(2k-1)\dots(k+1)t^k - k(2k-2)(2k-3)\dots(k-1)t^{k-1} + \dots\right)$$
$$= t^k - \frac{k(k-1)}{2(2k-1)}t^{k-2} + \dots,$$

așa că

$$\mu_k = \frac{k(k-1)}{2(2k-1)}, \qquad k \geq 2.$$

Deci,

$$\beta_k = \mu_k - \mu_{k+1} = \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

și deoarece $\mu_1 = 0$,

$$\beta_k = \frac{1}{4 - k^{-2}}, \qquad k \geq 1. \tag{39}$$

Figura 4: Pafnuti Levovici Cebîșev (1821-1894)

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .

Home Page

Title Page

Page 44 of 58

Go Back

Full Screen

Close

Quit

7.2. Polinoamele Cebîşev de speţa I

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 44 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

7.2. Polinoamele Cebîşev de speţa I

7.2. Polinoamele Cebîşev de speţa I

Ele se pot defini prin relaţia

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{40}$$

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 44 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Introducere

Aproximație . . .

Produse scalare

Ecuațiile normale

Eroarea în . . .

Exemple de . . .

Exemple de . . .

Home Page

Title Page

Page 44 of 58

Go Back

Full Screen

Close

Quit

7.2. Polinoamele Cebîșev de speța I

Ele se pot defini prin relația

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{40}$$

Din identitatea trigonometrică

$$\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2\cos\theta\cos k\theta$$

Introducere

Aproximaţie . . .

Produse scalare

Ecuaţiile normale

Eroarea în . . .

Exemple de . . .

Exemple de . . .

Home Page

Title Page

Page 44 of 58

Go Back

Full Screen

Close

Quit

7.2. Polinoamele Cebîşev de speţa I

Ele se pot defini prin relaţia

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{40}$$

Din identitatea trigonometrică

$$\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2\cos\theta\cos k\theta$$

şi din (40), punând $\theta = \arccos x$ se obţine

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad k = 1, 2, 3, \ldots \\ T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x. \end{aligned} \tag{41}$$

Home Page
Title Page
Page 44 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

7.2. Polinoamele Cebîșev de speța I

Ele se pot defini prin relația

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{40}$$

Din identitatea trigonometrică

$$\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2\cos\theta\cos k\theta$$

și din (40), punând $\theta = \arccos x$ se obține

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x. \end{aligned} \tag{41}$$

De exemplu,

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

ș.a.m.d.

7.2. Polinoamele Cebîșev de speța I

Ele se pot defini prin relația

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{40}$$

Din identitatea trigonometrică

$$\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2\cos\theta\cos k\theta$$

și din (40), punând $\theta = \arccos x$ se obține

$$\begin{array}{l} T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad k = 1, 2, 3, \ldots \\ T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \end{array} \tag{41}$$

De exemplu,

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

ș.a.m.d.

Din relaţia (41) se obţine pentru coeficientul dominant al lui T_n valoarea 2^{n-1} (dacă $n \geq 1$), deci polinomul Cebîşev de speţa I monic este

$$\overset{\circ}{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x), \quad n \geq 0, \quad \overset{\circ}{T}_0 = T_0. \tag{42}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 45 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Din relația (41) se obține pentru coeficientul dominant al lui T_n valoarea 2^{n-1} (dacă $n \geq 1$), deci polinomul Cebîșev de speța I monic este

$$\mathring{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x), \quad n \geq 0, \quad \mathring{T}_0 = T_0. \tag{42}$$

Din (40) se pot obține rădăcinile lui T_n

$$x_k^{(n)} = \cos \theta_k^{(n)}, \quad \theta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = \overline{1,n}. \tag{43}$$

Home Page
Title Page
Page 45 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Din relația (41) se obține pentru coeficientul dominant al lui T_n valoarea 2^{n-1} (dacă $n \geq 1$), deci polinomul Cebîșev de speța I monic este

$$\mathring{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x), \quad n \geq 0, \quad \mathring{T}_0 = T_0. \tag{42}$$

Din (40) se pot obține rădăcinile lui T_n

$$x_k^{(n)} = \cos \theta_k^{(n)}, \quad \theta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = \overline{1, n}. \tag{43}$$

Ele sunt proiecțiile pe axa reală ale punctelor de pe cercul unitate de argument $\theta_k^{(n)}$; figura 5 ilustrează acest lucru pentru n=4.

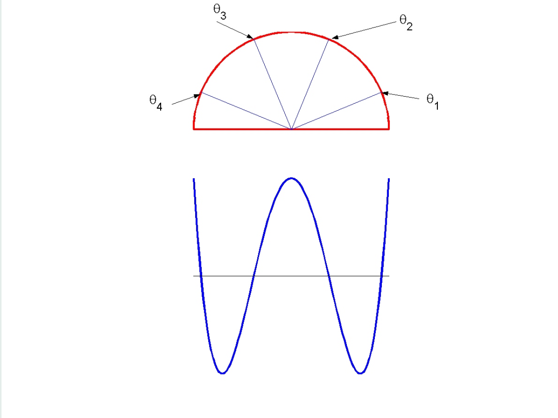

Figura 5: Polinomul Cebîșev T_4 și rădăcinile sale

Pe intervalul $[-1, 1]$ T_n oscilează de la +1 la -1, atingând aceste valori extreme în punctele

$$y_k^{(n)} = \cos \eta_k^{(n)}, \qquad \eta_k^{(n)} = \frac{k\pi}{n}, \qquad k = \overline{0, n}.$$

În figura 6 apar graficele unor polinoame Cebîșev de speța I.

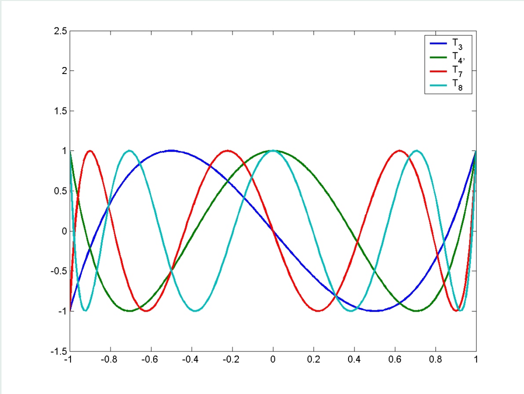

Figura 6: Polinoamele Cebîșev T_3, T_4, T_7, T_8 pe [-1,1]

Polinoamele Cebîșev de speța I sunt ortogonale în raport cu măsura

$$d\lambda(x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \text{pe } [-1, 1].$$

Pe intervalul $[-1,1]$ T_n oscilează de la +1 la -1, atingând aceste valori extreme în punctele

$$y_k^{(n)} = \cos \eta_k^{(n)}, \qquad \eta_k^{(n)} = \frac{k\pi}{n}, \qquad k = \overline{0,n}.$$

În figura 6 apar graficele unor polinoame Cebîșev de speța I.

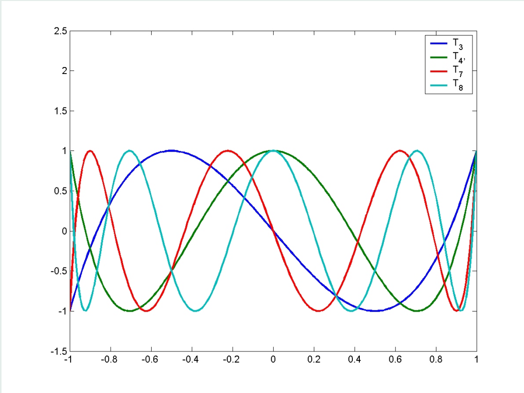

Figura 6: Polinoamele Cebîșev T_3, T_4, T_7, T_8 pe [-1,1]

Polinoamele Cebîșev de speța I sunt ortogonale în raport cu măsura

$$d\lambda(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{pe } [-1,1].$$

Se verifică ușor din (40) că

Introducere

Aproximație . . .

Produse scalare

Ecuațiile normale

Eroarea în . . .

Exemple de . . .

Exemple de . . .

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 48 of 58

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Se verifică ușor din (40) că

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)T_l(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{44}$$

Home Page
Title Page
Page 48 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Se verifică ușor din (40) că

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)T_l(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} T_k(\cos\theta)T_l(\cos\theta)d\theta \tag{44}$$

Se verifică uşor din (40) că

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)T_l(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} T_k(\cos\theta)T_l(\cos\theta)d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \cos k\theta \cos l\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad k \neq l \\ \pi & \text{dacă} \quad k = l = 0 \\ \pi/2 & \text{dacă} \quad k = l \neq 0 \end{cases} \tag{44}$$

Home Page
Title Page
Page 48 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Se verifică ușor din (40) că

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)T_l(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} T_k(\cos\theta)T_l(\cos\theta)d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \cos k\theta \cos l\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad k \neq l \\ \pi & \text{dacă} \quad k = l = 0 \\ \pi/2 & \text{dacă} \quad k = l \neq 0 \end{cases} \tag{44}$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 49 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Dezvoltarea în serie Fourier de polinoame Cebîşev este dată de

Dezvoltarea în serie Fourier de polinoame Cebîșev este dată de

$$f(x) = {\sum_{j=0}^{\infty}}' c_j T_j(x) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(x), \tag{45}$$

Dezvoltarea în serie Fourier de polinoame Cebîșev este dată de

$$f(x) = {\sum_{j=0}^{\infty}}' c_j T_j(x) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(x), \tag{45}$$

unde

$$c_j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) T_j(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Dezvoltarea în serie Fourier de polinoame Cebîşev este dată de

$$f(x) = {\sum_{j=0}^{\infty}}' c_j T_j(x) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(x), \tag{45}$$

unde

$$c_j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) T_j(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Păstrând în (45) numai termenii de grad cel mult n se obţine o aproximare polinomială utilă de grad n

Dezvoltarea în serie Fourier de polinoame Cebîșev este dată de

$$f(x) = {\sum_{j=0}^{\infty}}' c_j T_j(x) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(x), \tag{45}$$

unde

$$c_j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) T_j(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Păstrând în (45) numai termenii de grad cel mult n se obține o aproximare polinomială utilă de grad n

$$\tau_n(x) = {\sum_{j=0}^{n}}' c_j T_j(x), \tag{46}$$

Home Page
Title Page
Page 49 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Dezvoltarea în serie Fourier de polinoame Cebîșev este dată de

$$f(x) = {\sum_{j=0}^{\infty}}' c_j T_j(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(x), \tag{45}$$

unde

$$c_j = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)T_j(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Păstrând în (45) numai termenii de grad cel mult n se obține o aproximare polinomială utilă de grad n

$$\tau_n(x) = {\sum_{j=0}^{n}}' c_j T_j(x), \tag{46}$$

având eroarea

$$f(x) - \tau_n(x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j T_j(x) \approx c_{n+1}T_{n+1}(x). \tag{47}$$

Home Page
Title Page
Page 49 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Dezvoltarea în serie Fourier de polinoame Cebîșev este dată de

$$f(x) = {\sum_{j=0}^{\infty}}' c_j T_j(x) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(x), \tag{45}$$

unde

$$c_j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) T_j(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Păstrând în (45) numai termenii de grad cel mult n se obține o aproximare polinomială utilă de grad n

$$\tau_n(x) = {\sum_{j=0}^{n}}' c_j T_j(x), \tag{46}$$

având eroarea

$$f(x) - \tau_n(x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j T_j(x) \approx c_{n+1} T_{n+1}(x). \tag{47}$$

Introducere

Aproximație . . .

Produse scalare

Ecuațiile normale

Eroarea în . . .

Exemple de . . .

Exemple de . . .

Home Page

Title Page

Page 50 of 58

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Home Page
Title Page
Page 50 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Aproximanta din (46) este cu atât mai bună cu cât coeficienții din extremitatea dreaptă tind mai repede către zero. Eroarea (47) oscilează în esență între $+c_{n+1}$ și $-c_{n+1}$ și este deci de mărime ,,uniformă“.

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .

Home Page
Title Page
Page 50 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Aproximanta din (46) este cu atât mai bună cu cât coeficienţii din extremitatea dreaptă tind mai repede către zero. Eroarea (47) oscilează în esenţă între $+c_{n+1}$ şi $-c_{n+1}$ şi este deci de mărime ,,uniformă". Acest lucru contrastează puternic cu dezvoltarea Taylor în jurul lui $x = 0$, unde polinomul de grad n are eroarea proporţtională cu x^{n+1} pe $[-1, 1]$.

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 50 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Aproximanta din (46) este cu atât mai bună cu cât coeficienţii din extremitatea dreaptă tind mai repede către zero. Eroarea (47) oscilează în esenţă între $+c_{n+1}$ şi $-c_{n+1}$ şi este deci de mărime ,,uniformă“. Acest lucru contrastează puternic cu dezvoltarea Taylor în jurul lui $x = 0$, unde polinomul de grad n are eroarea proporţtională cu x^{n+1} pe $[-1, 1]$.

Dintre toate polinoamele monice de grad n, $\mathring{T}_n$ are norma uniformă cea mai mică.

Aproximanta din (46) este cu atât mai bună cu cât coeficienţii din extremitatea dreaptă tind mai repede către zero. Eroarea (47) oscilează în esenţă între $+c_{n+1}$ şi $-c_{n+1}$ şi este deci de mărime ,,uniformă“. Acest lucru contrastează puternic cu dezvoltarea Taylor în jurul lui $x = 0$, unde polinomul de grad n are eroarea proporţtională cu x^{n+1} pe $[-1, 1]$.

Dintre toate polinoamele monice de grad n, $\overset{\circ}{T}_n$ are norma uniformă cea mai mică.

Teorema 5 *Pentru orice polinom monic $\overset{\circ}{p}_n$ de grad n are loc*

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\overset{\circ}{p}_n(x)\right| \ge \max_{-1\le x\le 1}\left|\overset{\circ}{T}_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \ge 1, \tag{48}$$

unde $\overset{\circ}{T}_n(x)$ este dat de (42).

Aproximanta din (46) este cu atât mai bună cu cât coeficienţii din extremitatea dreaptă tind mai repede către zero. Eroarea (47) oscilează în esenţă între $+c_{n+1}$ şi $-c_{n+1}$ şi este deci de mărime ,,uniformă“. Acest lucru contrastează puternic cu dezvoltarea Taylor în jurul lui $x = 0$, unde polinomul de grad n are eroarea proporţtională cu x^{n+1} pe $[-1, 1]$.

Dintre toate polinoamele monice de grad n, $\mathring{T}_n$ are norma uniformă cea mai mică.

Teorema 5 *Pentru orice polinom monic $\mathring{p}_n$ de grad n are loc*

$$\max_{-1\leq x\leq 1}\left|\mathring{p}_n(x)\right| \geq \max_{-1\leq x\leq 1}\left|\mathring{T}_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \geq 1, \tag{48}$$

unde $\mathring{T}_n(x)$ este dat de (42).

Demonstraţie. ■

Demonstrație. Se face prin reducere la absurd. ■

Demonstrație. Se face prin reducere la absurd. Presupunem că

$$\max_{-1\leq x\leq 1}\left|\mathring{p}_n(x)\right| < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{49}$$

■

Demonstrație. Se face prin reducere la absurd. Presupunem că

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\overset{\circ}{p}_n(x)\right| < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{49}$$

Atunci polinomul $d_n(x) = \overset{\circ}{T}_n(x) - \overset{\circ}{p}_n(x)$ (de grad $\le n-1$) satisface

■

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 51 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Demonstrație. Se face prin reducere la absurd. Presupunem că

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\mathring{p}_n(x)\right| < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{49}$$

Atunci polinomul $d_n(x)=\mathring{T}_n(x)-\mathring{p}_n(x)$ (de grad $\le n-1$) satisface

$$d_n\left(y_0^{(n)}\right)>0,\ d_n\left(y_1^{(n)}\right)<0,\ d_n\left(y_2^{(n)}\right)>0,\dots,(-1)^n d_n\left(y_n^{(n)}\right)>0. \tag{50}$$

■

Demonstrație. Se face prin reducere la absurd. Presupunem că

$$\max_{-1\leq x\leq 1}\left|\mathring{p}_n(x)\right| < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{49}$$

Atunci polinomul $d_n(x) = \mathring{T}_n(x) - \mathring{p}_n(x)$ (de grad $\leq n-1$) satisface

$$d_n\left(y_0^{(n)}\right) > 0,\ d_n\left(y_1^{(n)}\right) < 0,\ d_n\left(y_2^{(n)}\right) > 0, \dots, (-1)^n d_n\left(y_n^{(n)}\right) > 0. \tag{50}$$

Deoarece d_n are n schimbări de semn, el este identic nul; aceasta contrazice (50) și astfel (49) nu poate fi adevărată. ■

Demonstrație. Se face prin reducere la absurd. Presupunem că

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\mathring{p}_n(x)\right| < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{49}$$

Atunci polinomul $d_n(x) = \mathring{T}_n(x) - \mathring{p}_n(x)$ (de grad $\le n-1$) satisface

$$d_n\left(y_0^{(n)}\right) > 0,\ d_n\left(y_1^{(n)}\right) < 0,\ d_n\left(y_2^{(n)}\right) > 0, \dots, (-1)^n d_n\left(y_n^{(n)}\right) > 0. \tag{50}$$

Deoarece d_n are n schimbări de semn, el este identic nul; aceasta contrazice (50) și astfel (49) nu poate fi adevărată. ■

Rezultatul (48) se poate interpreta în modul următor: cea mai bună aproximare uniformă din $\mathbb{P}_{n-1}$ pe $[-1,1]$ a lui $f(x) = x^n$ este dată de $x^n - \mathring{T}_n(x)$, adică, de agregarea termenilor până la gradul $n-1$ din $\mathring{T}_n$ luați cu semnul minus. Din teoria aproximațiilor uniforme se știe că cea mai bună aproximare polinomială uniformă este unică. Deci, egalitatea în (48) poate avea loc numai dacă $\mathring{p}_n(x) = \mathring{T}_n(x)$.

Home Page
Title Page
Page 51 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Demonstraţie. Se face prin reducere la absurd. Presupunem că

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\mathring{p}_n(x)\right| < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{49}$$

Atunci polinomul $d_n(x) = \mathring{T}_n(x) - \mathring{p}_n(x)$ (de grad $\le n-1$) satisface

$$d_n\left(y_0^{(n)}\right) > 0,\ d_n\left(y_1^{(n)}\right) < 0,\ d_n\left(y_2^{(n)}\right) > 0, \dots, (-1)^n d_n\left(y_n^{(n)}\right) > 0. \tag{50}$$

Deoarece d_n are n schimbări de semn, el este identic nul; aceasta contrazice (50) şi astfel (49) nu poate fi adevărată. ■

Rezultatul (48) se poate interpreta în modul următor: cea mai bună aproximare uniformă din $\mathbb{P}_{n-1}$ pe $[-1,1]$ a lui $f(x) = x^n$ este dată de $x^n - \mathring{T}_n(x)$, adică, de agregarea termenilor până la gradul $n-1$ din $\mathring{T}_n$ luaţi cu semnul minus. Din teoria aproximaţiilor uniforme se ştie că cea mai bună aproximare polinomială uniformă este unică. Deci, egalitatea în (48) poate avea loc numai dacă $\mathring{p}_n(x) = \mathring{T}_n(x)$.

7.3. Polinoamele Cebîșev de speța a II-a

7.3. Polinoamele Cebîșev de speța a II-a

Se definesc prin

$$Q_n(t) = \frac{\sin[(n+1)\arccos t]}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad t \in [-1, 1]$$

Home Page
Title Page
Page 52 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

7.3. Polinoamele Cebîșev de speța a II-a

Se definesc prin

$$Q_n(t) = \frac{\sin[(n+1)\arccos t]}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in [-1,1]$$

Ele sunt ortogonale pe $[-1,1]$ în raport cu măsura $d\lambda(t) = w(t)dt$, $w(t) = \sqrt{1-t^2}$.

7.3. Polinoamele Cebîșev de speța a II-a

Se definesc prin

$$Q_n(t) = \frac{\sin[(n+1)\arccos t]}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in [-1,1]$$

Ele sunt ortogonale pe $[-1,1]$ în raport cu măsura $d\lambda(t) = w(t)dt$, $w(t) = \sqrt{1-t^2}$.

Relația de recurență este

$$Q_{n+1}(t) = 2tQ_n(t) - Q_{n-1}(t), \quad Q_0(t) = 1, \quad Q_1(t) = 2t.$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 52 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

7.3. Polinoamele Cebîșev de speța a II-a

Se definesc prin

$$Q_n(t) = \frac{\sin[(n+1)\arccos t]}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in [-1, 1]$$

Ele sunt ortogonale pe $[-1, 1]$ în raport cu măsura $d\lambda(t) = w(t)dt$, $w(t) = \sqrt{1-t^2}$.

Relația de recurență este

$$Q_{n+1}(t) = 2tQ_n(t) - Q_{n-1}(t), \quad Q_0(t) = 1, \quad Q_1(t) = 2t.$$

Figura 7: Edmond Laguerre (1834-1886)

7.4. Polinoamele lui Laguerre

7.4. Polinoamele lui Laguerre

7.4. Polinoamele lui Laguerre

Sunt ortogonale pe $[0, \infty)$ în raport cu ponderea $w(t) = t^\alpha e^{-t}$. Se definesc prin

Home Page
Title Page
Page 54 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

7.4. Polinoamele lui Laguerre

Sunt ortogonale pe $[0,\infty)$ în raport cu ponderea $w(t) = t^{\alpha}e^{-t}$. Se definesc prin

$$l_n^{\alpha}(t) = \frac{e^t t^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^{n+\alpha}e^{-t}) \text{ pentru } \alpha > 1$$

7.4. Polinoamele lui Laguerre

Sunt ortogonale pe $[0,\infty)$ în raport cu ponderea $w(t) = t^{\alpha}e^{-t}$. Se definesc prin

$$l_n^{\alpha}(t) = \frac{e^t t^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^{n+\alpha}e^{-t}) \text{ pentru } \alpha > 1$$

Relația de recurență este

$$nl_n^{\alpha}(t) - (2n-1+\alpha-t)l_{n-1}^{\alpha}(t) + (n-1-\alpha)l_{n-2}^{\alpha}(t) = 0.$$

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 54 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

7.4. Polinoamele lui Laguerre

Sunt ortogonale pe $[0, \infty)$ în raport cu ponderea $w(t) = t^\alpha e^{-t}$. Se definesc prin

$$l_n^\alpha(t) = \frac{e^t t^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^{n+\alpha} e^{-t}) \text{ pentru } \alpha > 1$$

Relația de recurență este

$$n l_n^\alpha(t) - (2n - 1 + \alpha - t) l_{n-1}^\alpha(t) + (n - 1 - \alpha) l_{n-2}^\alpha(t) = 0.$$

7.5. Polinoamele lui Hermite

7.5. Polinoamele lui Hermite

Home Page
Title Page
Page 55 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

7.5. Polinoamele lui Hermite

Se definesc prin

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}).$$

7.5. Polinoamele lui Hermite

Se definesc prin

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}).$$

Ele sunt ortogonale pe $(-\infty, \infty)$ în raport cu ponderea $w(t) = e^{-t^2}$ și verifică relația de recurență

Home Page
Title Page
Page 55 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

7.5. Polinoamele lui Hermite

Se definesc prin

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}).$$

Ele sunt ortogonale pe $(-\infty, \infty)$ în raport cu ponderea $w(t) = e^{-t^2}$ și verifică relația de recurență

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t)$$

7.5. Polinoamele lui Hermite

Se definesc prin

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}).$$

Ele sunt ortogonale pe $(-\infty, \infty)$ în raport cu ponderea $w(t) = e^{-t^2}$ şi verifică relaţia de recurenţă

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t)$$

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t$$

7.5. Polinoamele lui Hermite

Se definesc prin

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}).$$

Ele sunt ortogonale pe $(-\infty, \infty)$ în raport cu ponderea $w(t) = e^{-t^2}$ și verifică relația de recurență

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t)$$

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t$$

7.6. Polinoamele lui Jacobi

Home Page
Title Page
Page 55 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

7.5. Polinoamele lui Hermite

Se definesc prin

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}).$$

Ele sunt ortogonale pe $(-\infty, \infty)$ în raport cu ponderea $w(t) = e^{-t^2}$ și verifică relația de recurență

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t)$$

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t$$

7.6. Polinoamele lui Jacobi

Sunt ortogonale pe $[-1, 1]$ în raport cu ponderea

$$w(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta.$$

Introducere
Aproximație ...
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în ...
Exemple de ...
Exemple de ...
Home Page
Title Page
Page 55 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

7.5. Polinoamele lui Hermite

Se definesc prin

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}).$$

Ele sunt ortogonale pe $(-\infty, \infty)$ în raport cu ponderea $w(t) = e^{-t^2}$ și verifică relația de recurență

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t)$$

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t$$

7.6. Polinoamele lui Jacobi

Sunt ortogonale pe $[-1, 1]$ în raport cu ponderea

$$w(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}.$$

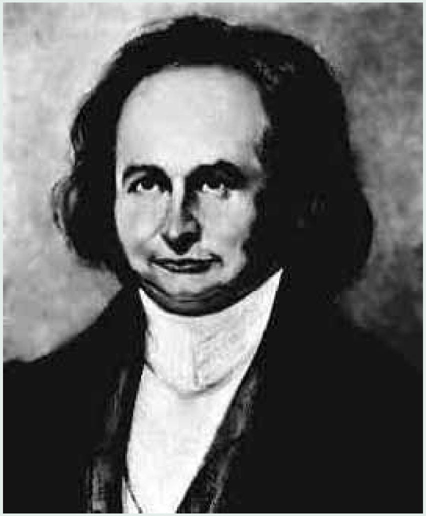

Figura 8: Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

Introducere
Aproximaţie . . .
Produse scalare
Ecuaţiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .

Home Page

Title Page

Page 57 of 58

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Exemplul 6 *Pentru funcţia* $f(t) = \arccos t$, $t \in [-1, 1]$, *obţineţi aproximanta în sensul celor mai mici pătrate,* $\widehat{\varphi} \in P_n$ *of* f *relativ la funcţia pondere* $w(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{sqrt1-t^2}$ *adică, găsiţi soluţia* $\varphi = \widehat{\varphi}$ *a problemei*

$$\min\left\{\int_{-1}^{1}[f(t)-\varphi(t)]^2\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} : \ \varphi \in P_n\right\}.$$

Exprimaţi φ *cu ajutorul polinoamelor Cebîşev* $\pi_j(t) = T_j(t)$.

Soluţie. $\widehat{\varphi}(t) = \dfrac{c_0}{2} + c_1T_1(x) + \cdots + c_nT_n(x)$

$$c_k = \frac{(f,T_k)}{(T_k,T_k)} = \frac{2}{\pi}(f,T_k) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}\cos(k\arccos t)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u\cos ku du = \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{u\sin ku}{k}\right|_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin ku du\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{1}{k}\frac{\cos ku}{k}\right|_0^\pi\right] = -\frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]$$

k par $c_k = 0$

k impar $c_k = -\dfrac{2}{\pi k^3}(-2) = \dfrac{4}{\pi k^2}$ ■

Introducere
Aproximație . . .
Produse scalare
Ecuațiile normale
Eroarea în . . .
Exemple de . . .
Exemple de . . .
Home Page
Title Page
Page 57 of 58
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 6 *Pentru funcția* $f(t) = \arccos t$, $t \in [-1, 1]$, *obțineți aproximanta în sensul celor mai mici pătrate,* $\widehat{\varphi} \in P_n$ *of* f *relativ la funcția pondere* $w(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{sqrt 1-t^2}$ *adică, găsiți soluția* $\varphi = \widehat{\varphi}$ *a problemei*

$$\min\left\{\int_{-1}^{1}[f(t)-\varphi(t)]^2\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}:\ \varphi \in P_n\right\}.$$

Exprimați φ *cu ajutorul polinoamelor Cebîșev* $\pi_j(t) = T_j(t)$.

Soluție. $\widehat{\varphi}(t) = \dfrac{c_0}{2} + c_1T_1(x) + \cdots + c_nT_n(x)$

$$c_k = \frac{(f,T_k)}{(T_k,T_k)} = \frac{2}{\pi}(f,T_k) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}\cos(k\arccos t)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u\cos ku du = \frac{2}{\pi}\left[\frac{u\sin ku}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin ku du\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k}\frac{\cos ku}{k}\Big|_0^{\pi}\right] = -\frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]$$

k par $c_k = 0$

k impar $c_k = -\dfrac{2}{\pi k^3}(-2) = \dfrac{4}{\pi k^2}$ ■

Bibliografie

[1] Å. Björk, *Numerical Methods for Least Squares Problem*, SIAM, Philadelphia, 1996.

[2] E. Blum, *Numerical Computing: Theory and Practice*, Addison-Wesley, 1972.

[3] P. G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, Milan, Barcelone, Mexico, 1990.

[4] Gheorghe Coman, *Analiză numerică*, Editura Libris, Cluj-Napoca, 1995.

[5] W. Gautschi, *Numerical Analysis. An Introduction*, Birkhäuser, Basel, 1997.

[6] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sidney, 1996, disponibila prin www, http://www.nr.com/.

[7] D. D. Stancu, *Analiză numerică – Curs şi culegere de probleme*, Lito UBB, Cluj-Napoca, 1977.

[8] J. Stoer, R. Burlisch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., Springer Verlag, 1992.