Problema 1 *Un mod de a calcula funcţia exponenţială* e^x *este de a considera dezvoltarea Taylor trunchiată în jurul lui* $x = 0$*,*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

Din nefericire pentru $|x|$ *mare, pentru a atinge o precizie dată este nevoie de un număr mare de termeni. O proprietate specială a exponenţialei este* $e^{2x} = (e^x)^2$*. Aceasta conduce la o metodă numită scalare şi ridicare la pătrat (scaling and squaring method): se împarte* x *la 2 repetat până când* $|x| < 1/2$*, şi se utilizează dezvoltarea Taylor (16 termeni sunt mai mult decât este necesar), şi se ridică la pătrat repetat. Scrieţi o funcţie* `expss(x)` *care realizează aceşti trei paşi. (Funcţiile* `cumprod` *şi* `polyval` *pot ajuta la implementarea dezvoltării Taylor.) Testaţi funcţia dumneavoastră pentru* $x = -30, -3, 3, 30$*.*

Problema 2 *(a) Scrieţi o rutină care calculează* e^x *prin însumarea a* n *termeni din seria Taylor până când al* $(n+1)$*-lea termen* t *verifică* $|t| < \varepsilon$*. Utilizaţi inversul lui* e^x *pentru valori negative a lui* x*. Testaţi pentru următoarele valori: 0, +1, -1, 0.5, -0.123, -25.5, -1776, 3.14159. Calculaţi eroarea relativă, eroarea absolută şi n pentru fiecare caz, utilizând funcţia exponenţială din MATLAB pentru valoarea exactă. Nu însumaţi mai mult de 25 de termeni.*

(b) Calculul lui e^x *poate fi redus la calculul lui* e^u *pentru* $|u| < (\ln 2)/2$*. Acest algoritm elimină puterile lui 2 şi calculează* e^u *într-un domeniu în care seria converge foarte rapid. El este dat de* $e^x = 2^m e^u$*, unde* m *şi* u *sunt calculaţi prin următorii paşi*

$$\begin{aligned} z &\leftarrow \frac{x}{\ln 2}, \qquad & m &\leftarrow \text{integer}\left(z \pm \frac{1}{2}\right) \\ w &\leftarrow z - m, \qquad & u &\leftarrow w \ln 2 \end{aligned}$$

Aici semnul minus se utilizează dacă $x < 0$*, deoarece* $z < 0$*. Incorporaţi această reducere de mai sus în codul de la punctul anterior.*

Observaţia 3 *Putem scrie suma parţială sub forma*

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \\ &= 1 + \frac{x}{1}\left(1 + \frac{x}{2}\left(1 + \left(\dots + \frac{x}{n-1}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)\right)\right), \end{aligned}$$

iar eroarea se poate obţine din restul formulei lui Taylor.

Problema 4 *Implementaţi o rutină robustă pentru calculul normei euclidiene a unui vector*

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}.$$