# 1 Subiectul 1

**Problema 1** *Se consideră sistemul*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Să se studieze convergenţa metodei lui Jacobi.*

2. *De câte iteraţii este nevoie pentru a aproxima soluţia cu eroarea absolută $\varepsilon$ dată, dacă se ia $x^{(0)} = [0,0]^T$.*

**Problema 2** *Să se determine o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(1) + A_2 f(x_1) + R(f)$$

*care să aibă grad maxim de exactitate.*

**Problema 3**

1. *Se consideră ecuaţia în $\mathbb{R}$ $f(x) = 0$ cu rădăcina $\alpha$ şi o metodă cu ordinul de convergenţă $p$ şi eroarea asimptotică $C_p$. Dacă se fac $N_p$ operaţii pe pas şi operaţiile de iniţializare se ignoră, atunci numărul total de operaţii necesar pentru a aproxima soluţia cu precizia $\varepsilon$ este*

$$T_p = \frac{N_p}{\log p} \log \left[ \frac{\frac{\log C_p}{p-1} + \log \varepsilon}{\frac{\log C_p}{p-1} + \log e_0} \right], \tag{**}$$

*unde baza logaritmului este arbitrară, $e_0$ este eroarea iniţială.*

2. *Se consideră calculul lui $\sqrt{a}$, $a > 0$, cu metoda lui Newton, astfel:*

   (a) *Se pune $a = 2^{2m} r$, $1/4 \leq r < 1$.*

   (b) *Se calculează $\sqrt{r}$ cu recurenţa*

   $$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{r}{x_n} \right)$$

   *până se atinge precizia $\varepsilon$.*

   (c) *Rezultatul returnat este $z = 2^m x_N$, unde $x_N$ este rezultatul de la punctul b.*

*Daţi o margine superioară a numărului de iteraţii şi de operaţii de la punctul (2.b) pentru a obţine precizia eps (epsilon-ul maşinii) folosind formula (**).*

Indicaţie: *Fie $e_n = |x_n - \alpha|$ eroarea la pasul $n$. Se pune $e_{n+1} \approx C_p e_n^p$. Din condiţia $e_n \approx \varepsilon$ se scoate $n$. Eroarea asimptotică pentru metoda lui Newton este $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$.*

## 2 Subiectul 2

**Problema 4** *Se consideră sistemul*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Să se studieze convergenţa metodei lui Jacobi.*
2. *De câte iteraţii este nevoie pentru a aproxima soluţia cu eroarea absolută* $\varepsilon$ *dată, dacă se ia* $x^{(0)} = [0, 0]^T$.

**Problema 5** *Să se determine o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(1) + A_2 f(x_1) + R(f)$$

*care să aibă grad maxim de exactitate.*

**Problema 6**

1. *Se consideră ecuaţia în* $\mathbb{R}$ $f(x) = 0$ *cu rădăcina* $\alpha$ *şi o metodă cu ordinul de convergenţă* $p$ *şi eroarea asimptotică* $C_p$*. Dacă se fac* $N_p$ *operaţii pe pas şi operaţiile de iniţializare se ignoră, atunci numărul total de operaţii necesar pentru a aproxima soluţia cu precizia* $\varepsilon$ *este*

$$T_p = \frac{N_p}{\log p} \log \left[ \frac{\frac{\log C_p}{p-1} + \log \varepsilon}{\frac{\log C_p}{p-1} + \log e_0} \right], \tag{**}$$

   *unde baza logaritmului este arbitrară,* $e_0$ *este eroarea iniţială.*

2. *Se consideră calculul lui* $\sqrt[3]{a}$, $a > 0$, *cu metoda lui Newton, astfel:*
   (a) *Se pune* $a = 2^{3m} r$, $1/8 \le r < 1$.
   (b) *Se calculează* $\sqrt{r}$ *cu recurenţa*

   $$x_{n+1} = \frac{2}{3} \left( x_n + \frac{r}{2x_n^2} \right)$$

   *până se atinge precizia* $\varepsilon$.
   (c) *Rezultatul returnat este* $z = 2^m r_N$, *unde* $r_N$ *este rezultatul de la punctul b.*

*Daţi o margine superioară a numărului de iteraţii şi de operaţii de la punctul (2.b) pentru a obţine precizia eps (epsilon-ul maşinii) folosind formula (**).*

Indicaţie*: Fie* $e_n = |x_n - \alpha|$ *eroarea la pasul* $n$*. Se pune* $e_{n+1} \approx C_p e_n^p$*. Din condiţia* $e_n \approx \varepsilon$ *se scoate* $n$*. Eroarea asimptotică pentru metoda lui Newton este* $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$.

## 3 Subiectul 3

**Problema 7** *Se consideră sistemul*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Să se studieze convergenţa metodei Gauss-Seidel.*
2. *De câte iteraţii este nevoie pentru a aproxima soluţia cu eroarea absolută $\varepsilon$ dată, dacă se ia $x^{(0)} = [0,0]^T$.*

**Problema 8** *Să se determine o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\mathrm{d}\,x = A_1 f(-1) + A_2 f(x_1) + R(f)$$

*care să aibă grad maxim de exactitate.*

**Problema 9**

1. *Se consideră ecuaţia în $\mathbb{R}$ $f(x) = 0$ cu rădăcina $\alpha$ şi o metodă cu ordinul de convergenţă $p$ şi eroarea asimptotică $C_p$. Dacă se fac $N_p$ operaţii pe pas şi operaţiile de iniţializare se ignoră, atunci numărul total de operaţii necesar pentru a aproxima soluţia cu precizia $\varepsilon$ este*

$$T_p = \frac{N_p}{\log p} \log \left[ \frac{\frac{\log C_p}{p-1} + \log \varepsilon}{\frac{\log C_p}{p-1} + \log e_0} \right], \qquad (**)$$

*unde baza logaritmului este arbitrară, $e_0$ este eroarea iniţială.*

2. *Se consideră calculul lui $\frac{1}{a}$, $a > 0$, cu metoda lui Newton, astfel:*
   (a) *Se pune $a = 2^m r$, $1/2 \leq r < 1$.*
   (b) *Se calculează $1/r$ cu recurenţa*

   $$x_{n+1} = x_n (2 - r x_n)$$

   *până se atinge precizia $\varepsilon$.*
   (c) *Rezultatul returnat este $z = 2^{-m} r_N$, unde $r_N$ este rezultatul de la punctul b.*

*Daţi o margine superioară a numărului de iteraţii şi de operaţii de la punctul (2.b) pentru a obţine precizia eps (epsilon-ul maşinii) folosind formula (**).*

Indicaţie*: Fie $e_n = |x_n - \alpha|$ eroarea la pasul $n$. Se pune $e_{n+1} \approx C_p e_n^p$. Din condiţia $e_n \approx \varepsilon$ se scoate $n$. Eroarea asimptotică pentru metoda lui Newton este $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$.*

# 4 Subiectul 4

**Problema 10** *Se consideră sistemul*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Să se studieze convergenţa metodei Gauss-Seidel.*

2. *De câte iteraţii este nevoie pentru a aproxima soluţia cu eroarea absolută* $\varepsilon$ *dată, dacă se ia* $x^{(0)} = [0,0]^T$.

**Problema 11** *Să se determine o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(-1) + A_2 f(x_1) + R(f)$$

*care să aibă grad maxim de exactitate.*

**Problema 12**

1. *Se consideră ecuaţia în* $\mathbb{R}$ $f(x) = 0$ *cu rădăcina* $\alpha$ *şi o metodă cu ordinul de convergenţă* $p$ *şi eroarea asimptotică* $C_p$. *Dacă se fac* $N_p$ *operaţii pe pas şi operaţiile de iniţializare se ignoră, atunci numărul total de operaţii necesar apentru a aproxima soluţia cu precizia* $\varepsilon$ *este*

$$T_p = \frac{N_p}{\log p} \log \left[ \frac{\frac{\log C_p}{p-1} + \log \varepsilon}{\frac{\log C_p}{p-1} + \log e_0} \right], \qquad (**)$$

   *unde baza logaritmului este arbitrară,* $e_0$ *este eroarea iniţială.*

2. *Comparaţi următoarele două metode pentru calculul lui* $\sqrt{r}$ *(numărul de operaţii) folosind formula (**). Când este de preferat una alteia?*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{r}{x_n}\right), \ p = 2$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n\left(y_n^2 + r\right)}{3y_n^2 + r}, \ p = 3$$

Indicaţie: *Fie* $e_n = |x_n - \alpha|$ *eroarea la pasul* $n$. *Se pune* $e_{n+1} \approx C_p e_n^p$. *Din condiţia* $e_n \approx \varepsilon$ *se scoate* $n$. *Eroarea asimptotică pentru metoda lui Newton este* $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$.