Formula lui Taylor

Radu Trîmbiţaş

20 februarie 2015

1 Formula lui Taylor

- I interval, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de n ori în punctul $a \in I$. Polinomul lui Taylor de gradul n, ataşat funcţiei f în punctul a:

$$(T_n f)(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

- *Restul* de ordinul n al formulei lui Taylor în punctul x

$$(R_n f)(x) = f(x) - (T_n f)(x)$$

- *Formula lui Taylor* de ordinul n pentru funcţia f în vecinătatea punctului a:

$$f(x) = (T_n f)(x) + (R_n f)(x)$$

sau

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) &+ \frac{x-a}{1!} f(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \\ &+ (R_n f)(x) \end{aligned}$$

2 Restul

- Are loc

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} \omega(x), \text{ cu } \lim_{x \to a} \omega(x) = 0.$$

- Dacă $f \in C^{n+1}(I)$, atunci $\exists \theta \in (0,1)$ astfel încât

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}\left(a + \theta(x-a)\right)}{(n+1)!}$$

(restul în forma Lagrange)

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}\left(a + \theta(x-a)\right)}{n!}$$

(restul în forma Cauchy)

$$(R_n f)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}\,t$$

(restul în formă integrală)

3 Formula lui Maclaurin

- Dacă în formula lui Taylor se ia $a = 0$, se obţine formula lui MacLaurin

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + (R_n f)(x),$$

unde

$$(R_n f)(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \qquad \theta \in (0,1).$$

- Example de dezvoltări uzuale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x); \tag{1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x); \tag{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x); \tag{3}$$

- Alte dezvoltări uzuale

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n+1} + R_{n+1}(x); \tag{4}$$

$$(1+x)^k = 1 + \binom{k}{1} x + \binom{k}{2} x^2 + \cdots + \binom{k}{n} x^n + R_n(x), \tag{5}$$

unde

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}.$$

4 Aplicaţii

Problema 1. Să se scrie formula lui MacLaurin pentru funcţia $f : [-a, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{a+x}$, $a > 0$.

Soluţie. Scriem $f(x) = \sqrt{a+x} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$; se obţine

$$f(x) = \sqrt{a}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{x}{a} + (-1)^1 \frac{1}{2^2}\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + (-1)^2 \frac{1}{2^3}\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{n! 2^n} \left(\frac{x}{a}\right)^n + (R_n f)(x)\right].$$

■

Problema 2. Să se determine numărul natural n, astfel ca pentru $a = 0$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ $T_n f$ să aproximeze f în $[-1, 1]$ cu trei zecimale exacte.

Soluţie. Impunem condiţia $|(R_n f)(x)| = \left|\frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{(n+1)!}\right| < 10^{-3}$.Deoarece $\theta x < 1$, $e^{\theta x} < e < 3$, avem

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}\right| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3} \Rightarrow n = 6.$$

În particular, luând $x = 1$, obţinem

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{6!}\right) < \frac{1}{1000}.$$

■

Problema 3. Să se aproximeze $\sqrt[3]{999}$ cu 12 zecimale exacte.

Soluţie. Avem

$$\sqrt[3]{999} = 10 \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Folosim formula (5) pentru $k = 1/3$, $x = -\frac{1}{1000}$. Într-o serie alternată modulul erorii este mai mic decât modulul primului termen neglijat.

$$|(R_n f)(x)| < \left|\binom{\frac{1}{3}}{n} 10^{-3n}\right|.$$

Pentru $n = 4$, avem $|(R_n f)(x)| < \frac{10}{243} 10^{-12} = \frac{1}{24300000000000} = 4.1152 \times 10^{-14}$. ■

5 Probleme propuse

Problema 4. Dezvoltaţi funcţia eroare

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}\, t$$

in serie utilizând seria pentru exponenţială şi integrând. Calculaţi seria Taylor a lui $\operatorname{erf}(x)$ în jurul lui zero direct. Sunt cele două serii identice? Evaluaţi $\operatorname{erf}(1)$ adunând patru termeni ai seriei şi comparaţi cu valoarea $\operatorname{erf}(1) \approx 0.8427$, care este dată cu patru zecimale corecte. *Indicaţie*: Din teorema fundamentală a calculului integral rezultă că

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) \mathrm{d}\, t = f(x).$$

Problema 5. Deduceţi seria Taylor pentru $\ln(1+x)$ şi aproximaţi $\ln 2$ folosind primii 8 termeni. Câţi termeni sunt necesari pentru a obţine $\ln 2$ cu 5 zecimale corecte? La fel pentru $\ln \frac{1+x}{1-x}$.

Problema 6. Deduceţi seria Taylor pentru arctangentă. Câţi termeni sunt necesari pentru a obţine $\pi/4$ cu 5 zecimale corecte.

Problema 7 (Aproximare cu serii MacLaurin)**.** O funcţia $f \in C^n[a,b]$ se poate aproxima, utilizând seria Maclaurin trunchiată, printr-un polinom de grad n

$$f(x) \approx T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i,$$

unde $c_i = f^{(i)}(0)/i!$.

(a) Reprezentaţi grafic şi comparaţi graficele lui $f(x) = e^x$ şi ale polinoamelor $(T_2 f)(x)$, $(T_3 f)(x)$, $(T_4 f)(x)$, $(T_5 f)(x)$. Aproximează mulţumitor polinoamele $T_n f$ de grad mare funcţia e^x pe un interval din ce in ce mai mare centrat în jurul originii?

(b) Repetaţi pentru $g(x) = \ln(1 + x)$.

Problema 8 (Aproximare Padé raţională)**.** *Aproximarea Padé raţională* este cea mai bună aproximare a unei funcţii printr-o funcţie raţională de ordin (m, n) dat. Se defineşte ca fiind o aproximare raţională de grad (m, n) dat care reproduce valorile funcţiei si derivatelor ei pâna la ordinul $m + k$. Ea dă adesea aproximări mai bune decât seriile Taylor trunchiate şi uneori lucrează chiar şi atunci când seria Taylor nu converge! În loc să utilizăm polinoame de grad mare, putem utiliza câturi de polinoame de grad mic. Aceste aproximări se numesc *aproximări raţionale*. Fie

$$f(x) \approx \frac{p_m(x)}{q_k(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{k} b_j x^j} = R_{m,k}(x),$$

unde $b_0 = 1$. Aici am normalizat prin $b_0 \neq 0$ iar valorile lui m şi k se presupun a fi modeste.Alegem cei k coeficienţi b_j şi cei $m+1$ coeficienţi a_i din $R_{m,k}$ astfel încât $R_{m,k}$ să reproducă valorile lui f şi ale unui număr specificat de derivate ale ei în punctul fixat $x = 0$. Construim întâi seria Maclaurin trunchiată $\sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, unde $c_i = f^{(i)}(0)/i!$ şi $c_i = 0$ pentru $i < 0$. Apoi, egalăm primele $m + k + 1$ derivate ale lui $R_{m,k}$ în raport cu x în $x = 0$ cu primii $m + k + 1$ coeficienţi c_i. Se obţine sistemul:

$$\begin{bmatrix} c_m & c_{m-1} & \cdots & c_{m-(k-2)} & c_{m-(k-1)} \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m-(k-3)} & c_{m-(k-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{m+(k-2)} & c_{m+(k-3)} & \cdots & c_m & c_{m-1} \\ c_{m+(k-1)} & c_{m+(k-2)} & \cdots & c_{m+1} & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{k-1} \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{m+1} \\ -c_{m+2} \\ \vdots \\ -c_{m+(k-1)} \\ -c_{m+k} \end{bmatrix}.$$

Deoarece $b_0 = 1$, rezolvând acest sistem de dimensiune $k \times k$ vom obţine coeficienţii $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Valorile lui $a_0, a_1, \ldots, a_m$ se obţin din

$$a_j = \sum_{\ell=0}^{j} c_{j-\ell} b_\ell \qquad (j = 0, 1, \ldots .m).$$

De notat că $a_j = 0$ pentru $j > m$ şi $b_j = 0$ pentru $j > k$. De asemenea, dacă $k = 0$, atunci $R_{m,0}$ este seria Maclaurin trunchiată a lui f. Mai mult, aproximarea Padé poate avea singularităţi.

(a) Implementaţi aproximarea Padé pentru f, k, m date.

(b) Determinaţi funcţiile raţionale $R_{1,1}(x)$ şi $R_{2,2}(x)$ pentru $f(x) = e^x$. Reprezentaţi grafic şi comparaţi graficele lui $f(x) = e^x$, $R_{1,1}$ şi $R_{2,2}$. Sunt satisfăcătoare aceste aproximaţii raţionale ale lui e^x pe $[-1, 1]$? Cum se comportă comparativ cu seriile Maclaurin trunchiate din problemele precedente?

(b) Repetaţi pentru aproximările $R_{2,2}(x)$ şi $R_{3,1}(x)$ ale funcţiei $g(x) = \ln(1 + x)$.

Problema 9. Calculaţi dezvoltarea MacLaurin a funcţiei Bessel $J_0(2x)$. Determinaţi $R_{2,2}(x)$, $R_{4,3}(x)$ şi $R_{2,4}(x)$ şi comparaţi graficele. Funcţiile Bessel J_n se definesc prin

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\left(x \sin\theta - n\theta\right) d\theta.$$