Setul 1

Problema 1 *(a) Determinaţi forma Newton a polinomului de interpolare p ce interpolează f în $x = 0$ şi $x = 1$ şi f' în $x = 0$. Exprimaţi eroarea cu ajutorul unei derivate de ordin corespunzător a lui f (presupusă continuă pe $[0, 1]$). (3p)*

(b) Folosind rezultatul de la (a), deduceţi o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(0) + R(f)$$

Determinaţi a_0, a_1, b_0 şi $R(f)$. (2p)

Soluţie.

(a) (1p) Tabela de diferenţe divizate este

0	$f(0)$	$f'(0)$	$f(1) - f(0) - f'(0)$
0	$f(0)$	$f(1) - f(0)$	
1	$f(1)$		

Gradul polinomului de interpolare este 2. (1p) Expresia polinomului de interpolare este

$$(H_2 f)(t) = f(0) + t f'(0) + t^2 \left[f(1) - f(0) - f'(0)\right],$$

iar restul este (1p)

$$(R_2 f)(t) = \frac{t^2(t-1)}{3!} f'''(\xi).$$

(b) Integrând termen cu termen se obţine (1p)

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1) + \frac{1}{6} f'(0) + R(f)$$

unde (1p)

$$R(f) = \int_0^1 (R_2 f)(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \frac{t^2(t-1)}{3!} f'''(\xi)\,\mathrm{d}\,t = -\frac{1}{72} f'''(\xi).$$

Altfel: direct $(H_2 f)(x) = ax^2 + bx + c$, $(H_2 f)(0) = c = f(0)$, $(H_2 f)(1) = a + b + c = f(1)$, $(H_2 f)'(0) = b = f'(1)$. (2p). ■

Problema 2 *Concepeţi o metodă pentru a calcula $\sqrt[20]{a}$, $a > 0$, bazată pe metoda lui Newton. (2p) De ce o astfel de metodă este lent convergentă? (A se vedea de exemplu $a = 1$ şi $x_0 = \frac{1}{2}$). (1p) Ce se poate face? Gândiţi-vă şi la o altă metodă. (1p)*

Soluţie. $f(x)=x^{20}-a$, $f'(x)=20x^{19}$, $f''(x)=20\cdot 19\cdot x^{18}$,

$$x_{n+1}=\frac{19x_n^{20}+a}{20x_n^{19}}=\frac{19}{20}x_n+\frac{a}{20x_n^{19}}$$

Deoarece pe $(0,\infty)$ $f'>0$, $f''>0$, orice $x_0>0$ este bun ca valoare de pornire. (2p) Ţinând cont că $x_{n+1}\approx\frac{19}{20}x_n$ dacă x_n este mare, pentru $a=1$ şi $x_0=1/2$, se obţine

$$x_1=\frac{19\cdot(0.5)^{20}+1}{20\cdot(0.5)^{19}}=26215,$$

si deoarece la fiecare pas aproximanta este redusă cu un factor $\frac{19}{20}=0.95$ avem nevoie cam de 200 de iteraţii. Odată ce ne apropiem de rădăcină, viteza de convergenţă creşte dramatic (1p).

Folosind criteriul de alegere a valorii de pornire $f(x_0)f''(x_0)>0$ şi folosind inegalitatea mediilor

$$\sqrt[20]{a\cdot 1\cdots 1}\le\frac{a+19}{20}=:x_0.$$

Altă metodă: se poate folosi formula lui Taylor pentru seria binomială

$$(1-x)^{1/20}=1-\frac{1}{20}x-\frac{19}{800}x^2-\frac{247}{16\,000}x^3-\frac{14\,573}{1280\,000}x^4-\frac{1151\,267}{128\,000\,000}x^5+O\left(x^6\right)$$

sau aproximând $\sqrt[20]{a}=\exp\left(\frac{1}{20}\ln a\right)$.(1p) ■

Setul 2

Problema 3 *(a) Determinaţi forma Newton a polinomului de interpolare p ce interpolează f în $x=0$ şi $x=1$ şi f' în $x=1$. Exprimaţi eroarea cu ajutorul unei derivate de ordin corespunzător a lui f (presupusă continuă pe $[0,1]$).*

(b) Folosind rezultatul de la (a), deduceţi o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx=a_0f(0)+a_1f(1)+b_0f'(1)+R(f)$$

Determinaţi a_0, a_1, b_0 şi $R(f)$.

Soluţie.

(a) (1p) Tabela de diferenţe divizate este

0	$f(0)$	$f(1)-f(0)$	$f'(1)-f(1)+f(0)$
1	$f(1)$	$f'(1)$	
1	$f(1)$		

Gradul polinomului de interpolare este 2. (1p) Expresia polinomului de interpolare este

$$(H_2f)(t)=f(0)+t\,[f(1)-f(0)]+t(t-1)\,[f'(1)-f(1)+f(0)],$$

iar restul este (1p)

$$(R_2f)(t) = \frac{t(t-1)^2}{3!}f'''(\xi).$$

(b) Integrând termen cu termen se obţine (1p)

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}f(0) + \frac{2}{3}f(1) - \frac{1}{6}f'(0) + R(f)$$

unde (1p)

$$R(f) = \int_0^1 (R_2f)(t)\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \frac{t(t-1)^2}{3!}f'''(\xi)\mathrm{d}\,t = \frac{1}{72}f'''(\xi).$$

Altfel: direct $(H_2 f)(x) = ax^2 + bx + c$, $(H_2f)(0) = c = f(0)$, $(H_2f)(1) = a + b + c = f(1)$, $(H_2f)'(1) = 2a + b = f'(1)$. (2p). ■

Problema 4 *Se consideră ecuaţia* $x = \cos x$.

(a) Arătaţi grafic că are o rădăcină pozitivă unică α. *Indicaţi, aproximativ, unde este situată.*

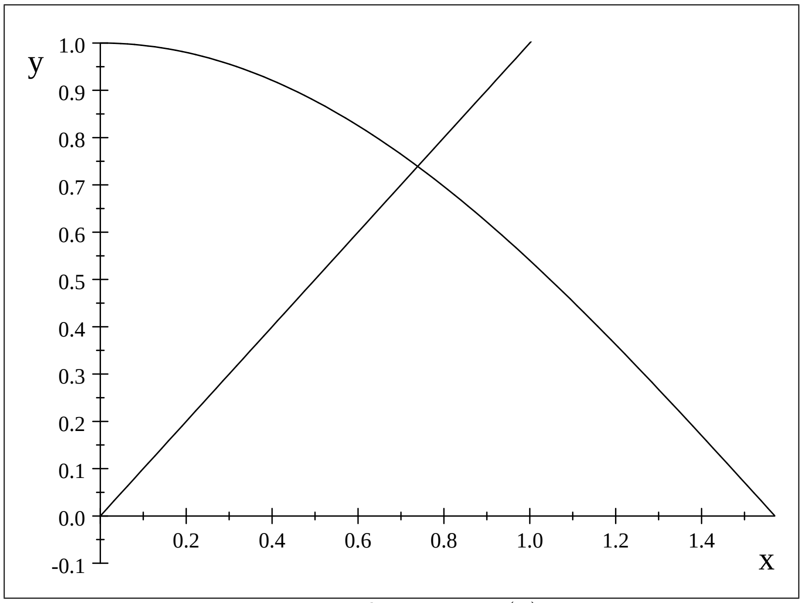
(b) Demonstraţi convergenţa locală a iteraţiei $x_{n+1} = \cos x_n$.

(c) Pentru iteraţia de la (b) demonstraţi că dacă $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *atunci*

$$|x_{n+1} - \alpha| < \sin\frac{\alpha + \pi/2}{2}\,|x_n - \alpha|\,.$$

În particular, are loc convergenţa globală pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(d) Arătaţi că metoda lui Newton aplicată ecuaţiei $f(x) = 0$, $f(x) = x - \cos x$, *converge global pe* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Punctul fix al lui $\cos(x)$

Soluţie.

(a) $x = \cos(x)$, Soluţia $\alpha \approx 0.739\,09$

(b)
$$|\varphi'(x)| = |\sin(x)| < 1$$
pentru $x \in (0, \pi/2)$. $I_\varepsilon = \{x : |x - \alpha| < \varepsilon\}$. Se poate alege $I_\varepsilon \subset [0.6, 0.8]$;

(c)
$$|x_{n+1} - \alpha| = |\cos x_n - \cos \alpha| = \left|2 \sin \frac{x_n + \alpha}{2} \sin \frac{x_n - \alpha}{2}\right| \leq \sin \frac{\alpha + \pi/2}{2} |x_n - \alpha|$$
pentru $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, şi deoarece $\sin \frac{\alpha+\pi/2}{2} < 1$ in acest interval, rezultă convergenţa globală.

(d) $f(x) = x - \cos(x)$, $f'(x) = 1 + \sin(x) > 0$, $f''(x) = \cos(x) > 0$ pentru $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Se poate alege orice x_0 din $(0, \pi/2)$.
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)}$$
Pentru $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ şi pentru $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$ avem $f(x_1)f''(x_1) > 0$.

■

Setul 3

Problema 5 *(a) Utilizaţi metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru a construi o formulă de cuadratură de tipul*

$$\int_0^1 f(x)dx = af(0) + bf(1) + cf''(\gamma) + R(f)$$

cu gradul maxim de exactitate d, nedeterminatele fiind a, b, c şi γ.(3p)

(b) Arătaţi că nucleul lui K_d al restului formulei obţinute la (a) are semn constant şi exprimaţi restul sub forma (2p)

$$R(f) = e_{d+1}f^{(d+1)}(\xi), \quad 0 < \xi < 1.$$

Soluţie. Definind

$$R(f) = \int_0^1 f(x)dx - af(0) - bf(1) - cf''(\gamma)$$

şi scriind că formula este exactă pentru $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ se obţine sistemul

$$\begin{aligned} 1 - a - b &= 0 \\ \frac{1}{2} - b &= 0 \\ \frac{1}{3} - b - 2c &= 0 \\ \frac{1}{4} - b - 6c\gamma &= 0 \end{aligned}$$

cu soluţiile

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{12}, \gamma = \frac{1}{2}.$$

Deoarece $R(e_4) \neq 0$, $dex = 3$. Nucleul lui Peano este

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{3!}R\left((x-t)_+^3\right) &= \begin{cases} -\frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{24}t^4 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{24} + \frac{1}{12}t - \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{24}t^4 & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{24}t^3(t-2) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{24}(t+1)(t-1)^3 & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \leq 0 \end{aligned}$$

Aplicând corolarul la teorema lui Peano

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)R(e_4) \\ &= \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\left[\int_0^1 x^4dx - \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}f(1) + \frac{2}{12}\cdot 12\frac{1}{2^2}\right] \\ &= -\frac{1}{480}f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

■

Problema 6 *(a) Să se arate că şirul dat prin relaţia de recurenţă*

$$x_{n+1} = x_n + (2 - e^{x_n}) \frac{x_n - x_{n-1}}{e^{x_n} - e^{x_{n-1}}}, x_0 = 0, x_1 = 1$$

este convergent şi să se determine limita sa. (3p)

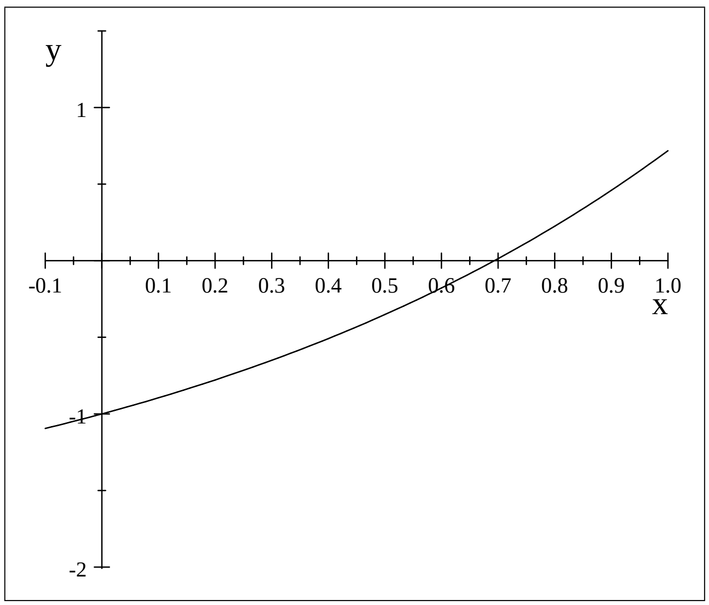
(b) Iteraţia din metoda secantei se poate scrie şi sub forma (1p)

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Din punct de vedere al erorii, care formă este mai bună în programe, forma aceasta sau forma clasică? Justificaţi riguros raspunsul.

Soluţie.

(a) Şirul se obţine aplicând metoda secantei funcţiei $f(x) = e^x - 2$ (1p)



cu rădăcina $\alpha = \ln 2$ şi valorile de pornire menţionate. Convergenţa: f convexă, crescătoare

$$M(\varepsilon) = \max_{s,t} \frac{f''(s)}{2f'(t)} = \max_{s,t} \frac{e^s}{e^t} = \max_{s,t} e^{s-t} = e$$

Luând $\varepsilon < 1/e = 0.367\,88$, se obţine $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$, deci convergenţa. (2p)

(b) În forma din enunţ, avem anulări flotante. Justificarea anulărilor flotante-1p

■

Setul 4

Problema 7 *(a) Construiţi o formulă Newton-Cotes cu ponderi*

$$\int_0^1 f(x)x^\alpha dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + R(f),\ \alpha > -1.$$

Explicaţi de ce formula are sens.

(b) Deduceţi o expresie a erorii $R(f)$ în funcţie de o derivată adecvată a lui f.

Soluţie. Definind

$$R(f) = \int_0^1 f(x)x^\alpha dx - a_0 f(0) - a_1 f(1)$$

şi scriind că formula este exactă pentru 1 şi x obţinem sistemul

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha+1} - a_0 - a_1 &= 0 \\ \frac{1}{\alpha+2} - a_1 &= 0 \end{aligned}$$

cu soluţiile

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha^2+3\alpha+2} \\ a_1 &= \frac{1}{\alpha+2} \end{aligned}$$

Deoarece $R(e_2) \neq 0$, $dex = 1$. Pentru rest folosim teorema lui Peano

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{1!} R\left[(x-t)_+\right] \\ &= \begin{cases} \frac{t^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} & x < t \\ \frac{t^{\alpha+2}-t}{(\alpha+1)(\alpha+2)} & x \geq t \end{cases} \geq 0 \end{aligned}$$

Folosind corolarul la TP

$$R(f) = \frac{1}{2!} f''(\xi) R(e_2) = \frac{-1}{2\,(\alpha+2)\,(\alpha+3)} f''(\xi).$$

■

Problema 8 *Se consideră iteraţia*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f\left(x_k + f(x_k)\right) - f(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

pentru rezolvarea ecuaţiei $f(x) = 0$. Explicaţi legătura cu iteraţia Newton şi arătaţi că (x_k) converge pătratic dacă x_0 este suficient de apropiată de soluţie. (2p - legatura cu Newton+ covergenta, 2p ordinul de convergenta).

Soluţie. Iteraţia se scrie sub forma

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f\left(x_k + f(x_k)\right) - f(x_k)} f(x_k),$$

iar dacă este convergentă x_k este apropiat de rădăcină, $f(x_k) \approx 0$,

$$\frac{f(x_k)}{f\left(x_k + f(x_k)\right) - f(x_k)} \approx \frac{1}{f'(x_k)}$$

iar limita va fi rădăcina căutată α. (2p) Scriem iteraţia sub forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}, \quad g(x_n) = \frac{f\left(x_n + f(x_n)\right) - f(x_n)}{f(x_n)}$$

Pentru a arăta convergenţa pătratică punem $\beta_n = f(x_n)$ şi dezvoltăm $g(x_n)$ cu Taylor

$$g(x_n) = f'(x_n)\left[1 - \frac{1}{2} h_n f''(x_n) + O\left(\beta_n^2\right)\right]$$

unde $h_n = -f(x_n)/f'(x_n)$.Deci

$$x_{n+1} = x_n + h_n\left[1 + \frac{1}{2} h_n f''(x_n) + O\left(\beta_n^2\right)\right]$$

Utilizând expresia erorii pentru Newton obţinem

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} \to \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\left[1 + f'(\alpha)\right].$$

(2p)

Altfel. Punem

$$\varphi(x) = x - \frac{f^2(x)}{f(x + f(x)) - f(x)}$$

şi arătăm că $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\varphi'(\alpha) = 0$, $\varphi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\left[1 + f'(\alpha)\right] \neq 0$. ■