1 Subiectul 1

Problema 1 (a) *Să se determine o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. (4p)

(b) *Folosind formula de la punctul (a), să se scrie cod MATLAB care calculează*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sin(\pi x)\,\mathrm{d}\,x$$

cu o precizie dată. (Se pot folosi funcţii de la laborator) (2p)

Problema 2 *Se consideră ecuaţia*

$$\tan x + \lambda x = 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

(a) *Arătaţi că în intervalul* $\left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$, *ecuaţia are exact o rădăcină,* α. *(1p)*

(b) *Converge metoda lui Newton către* $\alpha \in \left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$, *dacă aproximaţia iniţială este* $x_0 = \pi$? *Justificaţi răspunsul. (2p)*

2 Subiectul 2

Problema 3 (a) *Să se determine o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x)\,\mathrm{d}\,x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. (3p)

(b) *Folosind formula de la punctul (a) pentru n noduri, să se scrie cod MATLAB care calculează*

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} \sin(\pi x)\,\mathrm{d}\,x$$

cu o precizie dată. (Se pot folosi funcţii de la laborator). (2p)

Problema 4 *Dacă* $A > 0$, *atunci* $\alpha = \sqrt{A}$ *este rădăcină a ecuaţiilor*

$$x^2 - A = 0, \qquad \frac{A}{x^2} - 1 = 0.$$

(a) *Explicaţi de ce metoda lui Newton aplicată primei ecuaţii converge pentru o valoare de pornire arbitrară* $x_0 > 0$. *(1p)*

(b) *Explicaţi de ce metoda lui Newton aplicată la a doua ecuaţie produce iterate pozitive* (x_n) *ce converg la* α *numai dacă* x_0 *este situat într-un interval* $0 < x_0 < b$. *Determinaţi b. (2p)*

(c) *Descrieţi în fiecare caz algoritmul (iteraţia, criteriul de oprire, valoarea de pornire). (1p)*