1 Subiectul 1

Problema 1 *(a) Să se determine o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. (4p)

(b) Folosind formula de la punctul (a), să se scrie cod MATLAB care calculează

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sin(\pi x)\,\mathrm{d}\,x$$

cu o precizie dată. (Se pot folosi funcţii de la laborator) (2p)

Soluţie.

(a) Efectuând schimbarea de variabilă $x = \frac{t+1}{2}$, integrala din enunţ devine

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^1 \frac{f\left(\frac{t+1}{2}\right)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}\,t.$$

Vom folosi o formulă de tip Gauss cu ponderea $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Formula va fi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$$

cu

$$A_k = \frac{\pi}{n}, x_k = \frac{1+\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{2},$$

iar restul

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^1 T_n^2(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{(2)^{2n}(2n)!} \frac{\pi}{2^{2n+1}} f^{(2n)}(\xi).$$

■

Problema 2 *Se consideră ecuaţia*

$$\tan x + \lambda x = 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

(a) *Arătaţi că în intervalul* $\left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$*, ecuaţia are exact o rădăcină,* α*. (1p)*

(b) *Converge metoda lui Newton către* $\alpha \in \left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$*, dacă aproximaţia iniţială este* $x_0 = \pi$*? Justificaţi răspunsul. (2p)*

Soluţie.

(a) Graficele lui $y = \tan x$ şi $y = -\lambda x$ pentru $x > 0$ se intersectează într-un punct situat între $\frac{1}{2}\pi$ şi π, a cărui abscisă este rădăcina ecuaţiei. Este singura rădăcină în acel interval.

(b) Pentru $f(x) = \tan x + x$, avem, pe $\left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) &= -\infty,\ f(\pi) = \lambda\pi \\ f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} + \lambda > 0, \\ f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \frac{2}{\cos^3 x}\sin x < 0, \end{aligned}$$

deci f este crescătoare şi concavă. Dacă metoda lui Newton se aplică pentru $x_0 = \pi$, atunci şirul aproximantelor este monoton crescător dacă $x_1 > \frac{\pi}{2}$. Dar,

$$x_1 = \pi - \frac{f(\pi)}{f'(\pi)} = \frac{\pi}{1+\lambda} > \frac{\pi}{2},$$

căci $\lambda \in [0, 1]$.

■

2 Subiectul 2

Problema 3 *(a) Să se determine o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}f(x)\mathrm{d}\,x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. (3p)

(b) Folosind formula de la punctul (a) pentru n noduri, să se scrie cod MATLAB care calculează

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\sin(\pi x)\mathrm{d}\,x$$

cu o precizie dată. (Se pot folosi funcţii de la laborator). (2p)

Soluţie.

(a) Efectuând schimbarea de variabilă $x = \frac{t+1}{2}$, integrala din enunţ devine

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}f(x)\mathrm{d}\,x = \frac{1}{4}\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} f\left(\frac{t+1}{2}\right)\mathrm{d}\,t$$

Este o cuadratură Gauss-Cebîşev de speţa a doua. Polinomul ortogonal este

$$\pi_3(x) = t^3 - \frac{1}{2}t$$

cu rădăcinile $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 0, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ($t_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1,3$). Nodurile vor fi t_k, iar coeficienţii

$$A_1 = \frac{\pi}{8}, A_2 = \frac{\pi}{4}, A_3 = \frac{\pi}{8}.$$

Restul

$$R(f) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\left(t^3 - \frac{1}{2}t\right)^2 \mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{92\,160} f^{(6)}(\xi)$$

Revenind la substituţie, avem

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}f(x)\mathrm{d}\,x = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{8} f\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{4} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{8} f\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{92\,160\cdot 2^6} f^{(6)}(\zeta)\right]$$

■

Problema 4 *Dacă $A > 0$, atunci $\alpha = \sqrt{A}$ este rădăcină a ecuaţiilor*

$$x^2 - A = 0, \qquad \frac{A}{x^2} - 1 = 0.$$

(a) Explicaţi de ce metoda lui Newton aplicată primei ecuaţii converge pentru o valoare de pornire arbitrară $x_0 > 0$.(1p)

(b) Explicaţi de ce metoda lui Newton aplicată la a doua ecuaţie produce iterate pozitive (x_n) ce converg la α numai dacă x_0 este situat într-un interval $0 < x_0 < b$. Determinaţi b. (2p)

(c) Descrieţi în fiecare caz algoritmul (iteraţia, criteriul de oprire, valoarea de pornire).(1p)

Soluţie.

(a) În primul caz, $f(x) = x^2 - A$ este convexă pe $\mathbb{R}_+$ şi crescătoare pe $(0, \infty)$. Newton coverge pentru orice $x_0 > 0$. Altfel: dacă $x_0 > \alpha$, atunci (x_n) converge monoton descrescător către α. Dacă $0 < x_0 < \alpha$, atunci $x_1 > \alpha$, şi se raţionează la fel., pentru $n > 1$.

(b) În al doilea caz, $f(x) = \frac{A}{x^2} - 1$ este convexă $\mathbb{R}_+$ şi descrecătoare ($\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty$ to $\lim_{x \to \infty} f(x) = -1$). Dacă $0 < x_0 < \alpha$, atunci (x_n) converge monoton crescător către α. Dacă $x_0 > \alpha$, trebui să ne asigurăm că $x_1 > 0$, ceea ce înseamnă că

$$x_1 = x_0 - \frac{\frac{A}{x_0^2} - 1}{-2\frac{A}{x_0^3}} > 0, \quad x_0 + x_0 \frac{A - x_0^2}{2A} > 0$$

$$x_0 \left(3A - x_0^2\right) > 0, \ x_0 < \sqrt{3A} =: b.$$

(c) Se alege $x_0 \in (0, b)$, iteraţia

$$x_{n+1} = x_n + x_n \frac{A - x_0^2}{2A}$$

criteriul

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

■