Subiectul 9

Problema 1 *(a) Fie* $\mathrm{d}\,\lambda$ *o măsură simetrică pe* $[-a, a]$, $0 < a \leq \infty$ *şi*

$$\pi_{2k}(t; \mathrm{d}\,\lambda) = \pi_k^+(t^2).$$

Arătaţi că $\{\pi_k^+\}$ *sunt polinoame ortogonale monice pe* $[0, a^2]$ *în raport cu măsura* $\mathrm{d}\,\lambda^+(t) = t^{-1/2} w(t^{1/2}) \mathrm{d}\,t$*. (1p)*

(b) Aplicaţi acest rezultat la calculul polinoamelor ortogonale pe $[0, 1]$ *în raport cu ponderea* $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$*. (1p)*

(c) Generaţi o formulă de cuadratură de tip Gauss cu două noduri pentru această pondere. (4p)

Problema 2 *Considerăm ecuaţiile echivalente*

$$(A)\ x \ln x - 1 = 0; \quad (B)\ \ln x - \frac{1}{x} = 0.$$

(a) Arătaţi că au exact o rădăcină pozitivă şi determinaţi un interval care o conţine. (1p)

*(b) Atât pentru (A) cât şi pentru (B), determinaţi cel mai mare interval pe care metoda lui Newton converge. (*Indicaţie*: studiaţi convexitatea celor două funcţii care apar în ecuaţii.) (1p)*

(c) Care din cele două iteraţii converge asimptotic mai repede? (1p)

Subiectul 10

Problema 3 *(a) Fie* $\mathrm{d}\,\lambda$ *o măsură simetrică pe* $[-a, a]$, $0 < a \leq \infty$ *şi*

$$\pi_{2k+1}(t; \mathrm{d}\,\lambda) = t\pi_k^-(t^2).$$

Arătaţi că $\{\pi_k^-\}$ *sunt polinoame ortogonale monice pe* $[0, a^2]$ *în raport cu măsura* $\mathrm{d}\,\lambda^-(t) = t^{+1/2} w(t^{1/2})\mathrm{d}\,t$. *(1p)*

(b) Aplicaţi acest rezultat la calculul polinoamelor ortogonale pe $[0, 1]$ *în raport cu ponderea* $w(t) = \sqrt{t}$. *(1p)*

(c) Generaţi o formulă de cuadratură de tip Gauss cu două noduri pentru această pondere. (4p)

Problema 4 *Ecuaţia*

$$\cos x \cosh x - 1 = 0$$

are exact două rădăcini $\alpha_n < \beta_n$ *în fiecare interval* $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *(1p) Arătaţi că metoda lui Newton aplicată aceste ecuaţii converge către* α_n *când se ia valoarea de pornire* $x_0 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ *(1p) şi către* β_n *când se ia valoarea de pornire* $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. *(1p)*