Interpolare spline

Radu T. Trîmbițaș
tradu@math.ubbcluj.ro

23 februarie 2009

1. Introducere

1. Introducere

Home Page
Title Page
Page 2 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

1. Introducere

Fie Δ o diviziune a lui $[a, b]$

1. Introducere

Fie Δ o diviziune a lui $[a, b]$

$$\Delta: \quad a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

Introducere
Interpolarea cu . . .
Interpolare . . .
Spline cubice de . . .
Proprietatea de . . .
Home Page
Title Page
Page 2 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

1. Introducere

Fie Δ o diviziune a lui $[a, b]$

$$\Delta : \quad a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

Vom utiliza un polinom de grad mic pe subintervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n-1}$. Motivul este acela că pe intervale suficient de mici funcţiile pot fi aproximate arbitrar de bine prin polinoame de grad mic, chiar 0 sau 1.

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Go Back
Full Screen
Close
Quit

1. Introducere

Fie Δ o diviziune a lui $[a, b]$

$$\Delta: \ a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

Vom utiliza un polinom de grad mic pe subintervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n-1}$. Motivul este acela că pe intervale suficient de mici funcţiile pot fi aproximate arbitrar de bine prin polinoame de grad mic, chiar 0 sau 1. Am introdus deja spaţiul

$$\mathbb{S}_m^k(\Delta) = \{s : \ s \in C^k[a, b], \ s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, \ i = 1, 2, \ldots, n-1\} \tag{2}$$

1. Introducere

Fie Δ o diviziune a lui $[a,b]$

$$\Delta : \ a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

Vom utiliza un polinom de grad mic pe subintervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n-1}$. Motivul este acela că pe intervale suficient de mici funcţiile pot fi aproximate arbitrar de bine prin polinoame de grad mic, chiar 0 sau 1. Am introdus deja spaţiul

$$\mathbb{S}_m^k(\Delta) = \{s : \ s \in C^k[a,b], \ s|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, \ i = 1,2,\ldots,n-1\} \tag{2}$$

$m \geq 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, numit spaţiul funcţiilor spline polinomiale de grad m şi clasă de netezime k. Dacă $k = m$, atunci funcţiile $s \in \mathbb{S}_m^m(\Delta)$ sunt polinoame.

1. Introducere

Fie Δ o diviziune a lui $[a, b]$

$$\Delta : \; a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

Vom utiliza un polinom de grad mic pe subintervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n-1}$. Motivul este acela că pe intervale suficient de mici funcţiile pot fi aproximate arbitrar de bine prin polinoame de grad mic, chiar 0 sau 1. Am introdus deja spaţiul

$$\mathbb{S}_m^k(\Delta) = \{s : \; s \in C^k[a, b], \; s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, \; i = 1, 2, \ldots, n-1\} \tag{2}$$

$m \geq 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, numit spaţiul funcţiilor spline polinomiale de grad m şi clasă de netezime k. Dacă $k = m$, atunci funcţiile $s \in \mathbb{S}_m^m(\Delta)$ sunt polinoame.

Pentru $m = 1$ şi $k = 0$ se obţin *spline liniare*.

Pentru $m=1$ și $k=0$ se obțin *spline liniare*.
Dorim să găsim $s \in \mathbb{S}_1^0(\Delta)$ astfel încât

Pentru $m = 1$ şi $k = 0$ se obţin *spline liniare*.
Dorim sā gāsim $s \in \mathbb{S}_1^0(\Delta)$ astfel încât

$$s(x_i) = f_i, \text{ unde } f_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pentru $m = 1$ și $k = 0$ se obțin *spline liniare*.
Dorim să găsim $s \in \mathbb{S}_1^0(\Delta)$ astfel încât

$$s(x_i) = f_i, \text{ unde } f_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Soluția este trivială, vezi figura 1.

Home Page

Title Page

Page 3 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Pentru $m = 1$ şi $k = 0$ se obţin *spline liniare*.
Dorim să găsim $s \in \mathbb{S}_1^0(\Delta)$ astfel încât

$$s(x_i) = f_i, \text{ unde } f_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Soluţia este trivială, vezi figura 1. Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$

$$s(f; x) = f_i + (x - x_i) f[x_i, x_{i+1}], \tag{3}$$

Introducere
Interpolarea cu . . .
Interpolare . . .
Spline cubice de . . .
Proprietatea de . . .

Home Page
Title Page
Page 3 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Pentru $m = 1$ și $k = 0$ se obțin *spline liniare*.
Dorim să găsim $s \in \mathbb{S}_1^0(\Delta)$ astfel încât

$$s(x_i) = f_i, \text{ unde } f_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Soluția este trivială, vezi figura 1. Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$

$$s(f; x) = f_i + (x - x_i) f[x_i, x_{i+1}], \tag{3}$$

iar

$$|f(x) - s(f(x))| \leq \frac{(\Delta x_i)^2}{8} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f''(x)|. \tag{4}$$

Pentru $m = 1$ şi $k = 0$ se obţin *spline liniare*.
Dorim să găsim $s \in \mathbb{S}_1^0(\Delta)$ astfel încât

$$s(x_i) = f_i, \text{ unde } f_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Soluţia este trivială, vezi figura 1. Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$

$$s(f; x) = f_i + (x - x_i) f[x_i, x_{i+1}], \tag{3}$$

iar

$$|f(x) - s(f(x))| \leq \frac{(\Delta x_i)^2}{8} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f''(x)|. \tag{4}$$

Rezultă că

$$\|f(\cdot) - s(f, \cdot)\|_\infty \leq \frac{1}{8} |\Delta|^2 \|f''\|_\infty. \tag{5}$$

Introducere

Interpolarea cu . . .

Interpolare . . .

Spline cubice de . . .

Proprietatea de . . .

Home Page

Title Page

Page 3 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Pentru $m = 1$ şi $k = 0$ se obţin *spline liniare*.
Dorim să găsim $s \in \mathbb{S}_1^0(\Delta)$ astfel încât

$$s(x_i) = f_i, \text{ unde } f_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Soluţia este trivială, vezi figura 1. Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$

$$s(f; x) = f_i + (x - x_i) f[x_i, x_{i+1}], \tag{3}$$

iar

$$|f(x) - s(f(x))| \leq \frac{(\Delta x_i)^2}{8} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f''(x)|. \tag{4}$$

Rezultă că

$$\|f(\cdot) - s(f, \cdot)\|_\infty \leq \frac{1}{8} |\Delta|^2 \|f''\|_\infty. \tag{5}$$

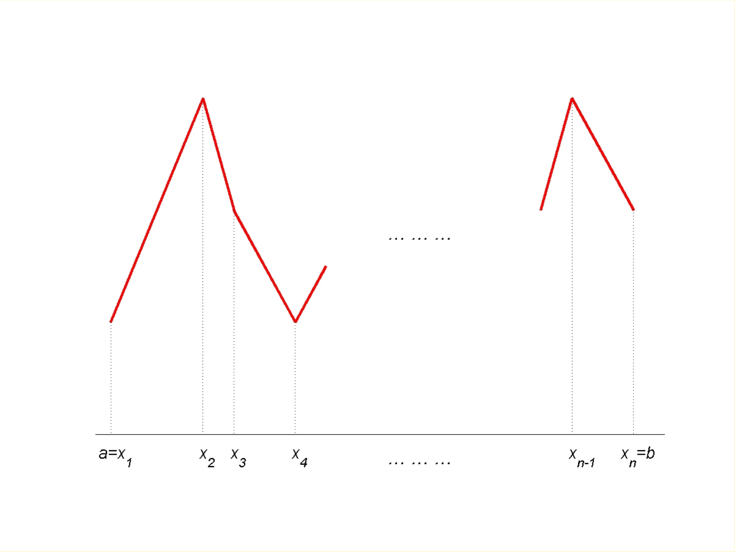

Figura 1: Spline liniare

Dimensiunea lui $\mathbb{S}_1^0(\Delta)$ se calculează astfel: deoarece avem $n-1$ porţiuni şi pe fiecare 2 coeficienţi (2 grade de libertate) şi fiecare condiţie reduce numărul de grade de libertate cu 1, avem în final

Dimensiunea lui $\mathbb{S}_1^0(\Delta)$ se calculează astfel: deoarece avem $n-1$ porţiuni şi pe fiecare 2 coeficienţi (2 grade de libertate) şi fiecare condiţie reduce numărul de grade de libertate cu 1, avem în final

$$\dim \mathbb{S}_1^0(\Delta) = 2n - 2 - (n-2) = n.$$

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Go Back
Full Screen
Close
Quit

Dimensiunea lui $\mathbb{S}_1^0(\Delta)$ se calculează astfel: deoarece avem $n-1$ porţiuni şi pe fiecare 2 coeficienţi (2 grade de libertate) şi fiecare condiţie reduce numărul de grade de libertate cu 1, avem în final

$$\dim \mathbb{S}_1^0(\Delta) = 2n - 2 - (n-2) = n.$$

O bază a spaţiului este dată de aşa-numitele funcţii *B-spline*:

Dimensiunea lui $\mathbb{S}_1^0(\Delta)$ se calculează astfel: deoarece avem $n-1$ porţiuni şi pe fiecare 2 coeficienţi (2 grade de libertate) şi fiecare condiţie reduce numărul de grade de libertate cu 1, avem în final

$$\dim \mathbb{S}_1^0(\Delta) = 2n - 2 - (n-2) = n.$$

O bază a spaţiului este dată de aşa-numitele funcţii *B-spline*: Punem $x_0 = x_1, \; x_{n+1} = x_n$, pentru $i = \overline{1,n}$

Dimensiunea lui $\mathbb{S}_1^0(\Delta)$ se calculează astfel: deoarece avem $n-1$ porţiuni şi pe fiecare 2 coeficienţi (2 grade de libertate) şi fiecare condiţie reduce numărul de grade de libertate cu 1, avem în final

$$\dim \mathbb{S}_1^0(\Delta) = 2n - 2 - (n-2) = n.$$

O bază a spaţiului este dată de aşa-numitele funcţii *B-spline*: Punem $x_0 = x_1,\ x_{n+1} = x_n$, pentru $i = \overline{1, n}$

$$B_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{pentru } x_{i-1} \le x \le x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{pentru } x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \tag{6}$$

Introducere
Interpolarea cu . . .
Interpolare . . .
Spline cubice de . . .
Proprietatea de . . .
Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 5 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Dimensiunea lui $\mathbb{S}_1^0(\Delta)$ se calculează astfel: deoarece avem $n-1$ porţiuni şi pe fiecare 2 coeficienţi (2 grade de libertate) şi fiecare condiţie reduce numărul de grade de libertate cu 1, avem în final

$$\dim \mathbb{S}_1^0(\Delta) = 2n - 2 - (n-2) = n.$$

O bază a spaţiului este dată de aşa-numitele funcţii *B-spline*:
Punem $x_0 = x_1,\ x_{n+1} = x_n$, pentru $i = \overline{1,n}$

$$B_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{pentru } x_{i-1} \le x \le x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{pentru } x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \tag{6}$$

Pentru $i = 1$ prima şi pentru $i = n$ a doua ecuaţie se ignoră.

Dimensiunea lui $\mathbb{S}_1^0(\Delta)$ se calculează astfel: deoarece avem $n-1$ porţiuni şi pe fiecare 2 coeficienţi (2 grade de libertate) şi fiecare condiţie reduce numărul de grade de libertate cu 1, avem în final

$$\dim \mathbb{S}_1^0(\Delta) = 2n - 2 - (n-2) = n.$$

O bază a spaţiului este dată de aşa-numitele funcţii *B-spline*: Punem $x_0 = x_1$, $x_{n+1} = x_n$, pentru $i = \overline{1, n}$

$$B_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{pentru } x_{i-1} \le x \le x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{pentru } x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \tag{6}$$

Pentru $i = 1$ prima şi pentru $i = n$ a doua ecuaţie se ignoră.

Funcţia B_i se numeşte *pălărie chinezească.* Graficul funcţiilor B_i apare în figura 2.

Home Page
Title Page
Page 5 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Dimensiunea lui $\mathbb{S}_1^0(\Delta)$ se calculează astfel: deoarece avem $n-1$ porţiuni şi pe fiecare 2 coeficienţi (2 grade de libertate) şi fiecare condiţie reduce numărul de grade de libertate cu 1, avem în final

$$\dim \mathbb{S}_1^0(\Delta) = 2n - 2 - (n-2) = n.$$

O bază a spaţiului este dată de aşa-numitele funcţii *B-spline*:
Punem $x_0 = x_1,\ x_{n+1} = x_n$, pentru $i = \overline{1,n}$

$$B_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{pentru } x_{i-1} \le x \le x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{pentru } x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \tag{6}$$

Pentru $i = 1$ prima şi pentru $i = n$ a doua ecuaţie se ignoră.

Funcţia B_i se numeşte *pălărie chinezească.* Graficul funcţiilor B_i apare în figura 2.

Introducere
Interpolarea cu . . .
Interpolare . . .
Spline cubice de . . .
Proprietatea de . . .
Home Page
Title Page
Page 6 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

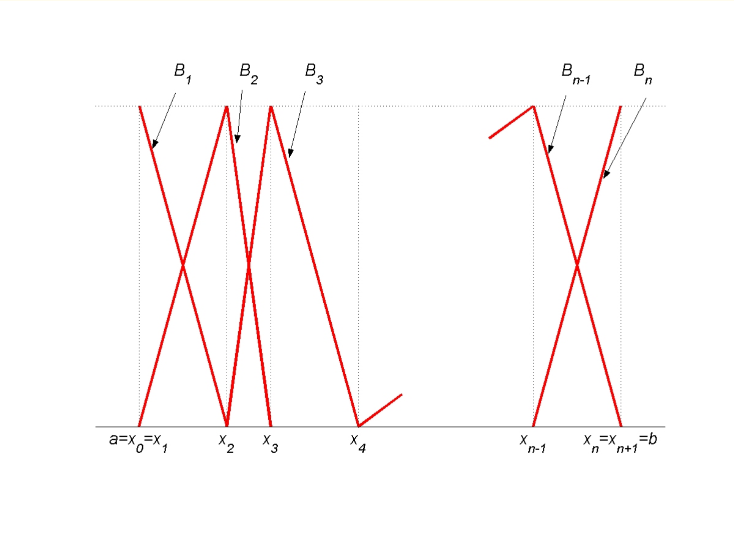

Figura 2: Funcţii B-spline de grad 1

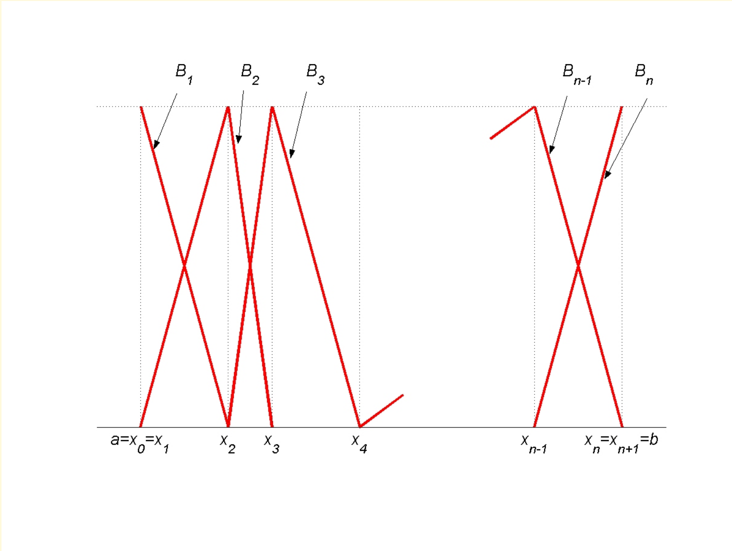

Figura 2: Funcții B-spline de grad 1

Home Page
Title Page

Go Back
Full Screen
Close
Quit

Ele au proprietatea

Ele au proprietatea

$$B_i(x_j) = \delta_{ij},$$

Home Page
Title Page
Page 7 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Ele au proprietatea

$$B_i(x_j) = \delta_{ij},$$

sunt liniar independente, deoarece

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i B_i(x) = 0 \wedge x \neq x_j \Rightarrow c_j = 0.$$

Ele au proprietatea

$$B_i(x_j) = \delta_{ij},$$

sunt liniar independente, deoarece

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i B_i(x) = 0 \wedge x \neq x_j \Rightarrow c_j = 0.$$

şi

$$\langle B_i \rangle_{i=\overline{1,n}} = S_1^0(\Delta),$$

Ele au proprietatea

$$B_i(x_j) = \delta_{ij},$$

sunt liniar independente, deoarece

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i B_i(x) = 0 \wedge x \neq x_j \Rightarrow c_j = 0.$$

şi

$$\langle B_i \rangle_{i=\overline{1,n}} = S_1^0(\Delta),$$

B_i joacă acelaşi rol ca polinoamele fundamentale Lagrange ℓ_i.

Ele au proprietatea

$$B_i(x_j) = \delta_{ij},$$

sunt liniar independente, deoarece

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i B_i(x) = 0 \wedge x \neq x_j \Rightarrow c_j = 0.$$

și

$$\langle B_i \rangle_{i=\overline{1,n}} = S_1^0(\Delta),$$

B_i joacă același rol ca polinoamele fundamentale Lagrange ℓ_i.

Home Page
Title Page
Page 8 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

2. Interpolarea cu spline cubice

2. Interpolarea cu spline cubice

2. Interpolarea cu spline cubice

Funcţiile spline cubice sunt cele mai utilizate.

2. Interpolarea cu spline cubice

Funcţiile spline cubice sunt cele mai utilizate.
Vom discuta întâi problema interpolării pentru $s \in \mathbb{S}_3^1(\Delta)$.

2. Interpolarea cu spline cubice

Funcţiile spline cubice sunt cele mai utilizate.

Vom discuta întâi problema interpolării pentru $s \in \mathbb{S}_3^1(\Delta)$. Continuitatea derivatei de ordinul I pentru $s_3(f;\cdot)$ se poate realiza impunând valorile primei derivate în fiecare punct x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Home Page
Title Page

Go Back
Full Screen
Close
Quit

2. Interpolarea cu spline cubice

Funcţiile spline cubice sunt cele mai utilizate.

Vom discuta întâi problema interpolării pentru $s \in \mathbb{S}_3^1(\Delta)$. Continuitatea derivatei de ordinul I pentru $s_3(f;\cdot)$ se poate realiza impunând valorile primei derivate în fiecare punct x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Astfel fie $m_1, m_2, \ldots, m_n$ numere arbitrare date şi notăm

$$s_3(f;\cdot)|_{[x_i,x_{i+1}]} = p_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{7}$$

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 8 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2. Interpolarea cu spline cubice

Funcţiile spline cubice sunt cele mai utilizate.

Vom discuta întâi problema interpolării pentru $s \in \mathbb{S}_3^1(\Delta)$. Continuitatea derivatei de ordinul I pentru $s_3(f;\cdot)$ se poate realiza impunând valorile primei derivate în fiecare punct x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Astfel fie $m_1, m_2, \ldots, m_n$ numere arbitrare date şi notăm

$$s_3(f;\cdot)|_{[x_i,x_{i+1}]} = p_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{7}$$

Realizăm $s_3'(f; x_i) = m_i$, $i = \overline{1, n}$, luând fiecare bucată ca soluţie unică a problemei de interpolare Hermite, şi anume

2. Interpolarea cu spline cubice

Funcţiile spline cubice sunt cele mai utilizate.

Vom discuta întâi problema interpolării pentru $s \in \mathbb{S}_3^1(\Delta)$. Continuitatea derivatei de ordinul I pentru $s_3(f;\cdot)$ se poate realiza impunând valorile primei derivate în fiecare punct x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Astfel fie $m_1, m_2, \ldots, m_n$ numere arbitrare date şi notăm

$$s_3(f;\cdot)|_{[x_i,x_{i+1}]} = p_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{7}$$

Realizăm $s_3'(f;x_i) = m_i$, $i = \overline{1,n}$, luând fiecare bucată ca soluţie unică a problemei de interpolare Hermite, şi anume

$$\begin{aligned} &p_i(x_i) = f_i, \quad p_i(x_{i+1}) = f_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ &p_i'(x_i) = m_i, \quad p_i'(x_{i+1}) = m_{i+1} \end{aligned} \tag{8}$$

Home Page

Title Page

Page 8 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2. Interpolarea cu spline cubice

Funcțiile spline cubice sunt cele mai utilizate.

Vom discuta întâi problema interpolării pentru $s \in \mathbb{S}_3^1(\Delta)$. Continuitatea derivatei de ordinul I pentru $s_3(f;\cdot)$ se poate realiza impunând valorile primei derivate în fiecare punct x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Astfel fie $m_1, m_2, \ldots, m_n$ numere arbitrare date și notăm

$$s_3(f;\cdot)|_{[x_i,x_{i+1}]} = p_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{7}$$

Realizăm $s_3'(f;x_i) = m_i$, $i = \overline{1,n}$, luând fiecare bucată ca soluție unică a problemei de interpolare Hermite, și anume

$$\begin{aligned} &p_i(x_i) = f_i, \quad p_i(x_{i+1}) = f_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ &p_i'(x_i) = m_i, \quad p_i'(x_{i+1}) = m_{i+1} \end{aligned} \tag{8}$$

Vom rezolva problema folosind interpolarea Newton. Diferențele divizate sunt

Vom rezolva problema folosind interpolarea Newton. Diferențele divizate sunt

$$
\begin{array}{cccll}
x_i & f_i & m_i & \frac{f[x_i,x_{i+1}]-m_i}{\Delta x_i} & \frac{m_{i+1}+m_i-2f[x_i,x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2} \\
x_i & f_i & f[x_i,x_{i+1}] & \frac{m_{i+1}-f[x_i,x_{i+1}]}{\Delta x_i} & \\
x_{i+1} & f_{i+1} & m_{i+1} & & \\
x_{i+1} & f_{i+1} & & &
\end{array}
$$

Vom rezolva problema folosind interpolarea Newton. Diferențele divizate sunt

$$\begin{array}{cccll}
x_i & f_i & m_i & \frac{f[x_i,x_{i+1}]-m_i}{\Delta x_i} & \frac{m_{i+1}+m_i-2f[x_i,x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2} \\
x_i & f_i & f[x_i,x_{i+1}] & \frac{m_{i+1}-f[x_i,x_{i+1}]}{\Delta x_i} & \\
x_{i+1} & f_{i+1} & m_{i+1} & & \\
x_{i+1} & f_{i+1} & & &
\end{array}$$

și deci forma Newton a polinomului de interpolare Hermite este

Home Page
Title Page
Page 9 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Vom rezolva problema folosind interpolarea Newton. Diferențele divizate sunt

$$\begin{array}{cccll}
x_i & f_i & m_i & \frac{f[x_i,x_{i+1}]-m_i}{\Delta x_i} & \frac{m_{i+1}+m_i-2f[x_i,x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2} \\
x_i & f_i & f[x_i,x_{i+1}] & \frac{m_{i+1}-f[x_i,x_{i+1}]}{\Delta x_i} & \\
x_{i+1} & f_{i+1} & m_{i+1} & & \\
x_{i+1} & f_{i+1} & & &
\end{array}$$

și deci forma Newton a polinomului de interpolare Hermite este

$$\begin{aligned}
p_i(x) &= f_i + (x-x_i)m_i + (x-x_i)^2\frac{f[x_i,x_{i+1}]-m_i}{\Delta x_i} \\
&\quad + (x-x_i)^2(x-x_{i+1})\frac{m_{i+1}+m_i-2f[x_i,x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2}.
\end{aligned}$$

Home Page

Title Page

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Vom rezolva problema folosind interpolarea Newton. Diferențele divizate sunt

$$\begin{array}{cccccc}
x_i & f_i & m_i & \frac{f[x_i,x_{i+1}]-m_i}{\Delta x_i} & \frac{m_{i+1}+m_i-2f[x_i,x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2} \\
x_i & f_i & f[x_i,x_{i+1}] & \frac{m_{i+1}-f[x_i,x_{i+1}]}{\Delta x_i} & \\
x_{i+1} & f_{i+1} & m_{i+1} & & \\
x_{i+1} & f_{i+1} & & &
\end{array}$$

și deci forma Newton a polinomului de interpolare Hermite este

$$\begin{aligned}
p_i(x) = f_i + (x - x_i)m_i + (x - x_i)^2 \frac{f[x_i, x_{i+1}] - m_i}{\Delta x_i} \\
+ (x - x_i)^2 (x - x_{i+1}) \frac{m_{i+1} + m_i - 2f[x_i, x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2}.
\end{aligned}$$

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 10 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Home Page
Title Page
Page 10 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ este

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \tag{9}$$

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Go Back
Full Screen
Close
Quit

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \qquad (9)$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \tag{9}$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

(10)

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \tag{9}$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

$$c_{i,0} \tag{10}$$

Introducere
Interpolarea cu . . .
Interpolare . . .
Spline cubice de . . .
Proprietatea de . . .
Home Page
Title Page
Page 10 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \tag{9}$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

$$c_{i,0} = f_i \tag{10}$$

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \tag{9}$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

$$\begin{aligned} c_{i,0} &= f_i \\ c_{i,1} & \end{aligned} \tag{10}$$

Introducere
Interpolarea cu . . .
Interpolare . . .
Spline cubice de . . .
Proprietatea de . . .
Home Page
Title Page
Page 10 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \tag{9}$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

$$\begin{aligned} c_{i,0} &= f_i \\ c_{i,1} &= m_i \end{aligned} \tag{10}$$

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \tag{9}$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

$$\begin{aligned} c_{i,0} &= f_i \\ c_{i,1} &= m_i \\ c_{i,2} & \end{aligned} \tag{10}$$

Introducere
Interpolarea cu . . .
Interpolare . . .
Spline cubice de . . .
Proprietatea de . . .
Home Page
Title Page
Page 10 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \le x \le x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \qquad (9)$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

$$\begin{aligned} c_{i,0} &= f_i \\ c_{i,1} &= m_i \\ c_{i,2} &= \frac{f[x_i, x_{i+1}] - m_i}{\Delta x_i} - c_{i,3}\Delta x_i \end{aligned} \qquad (10)$$

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \tag{9}$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

$$\begin{aligned} c_{i,0} &= f_i \\ c_{i,1} &= m_i \\ c_{i,2} &= \frac{f[x_i, x_{i+1}] - m_i}{\Delta x_i} - c_{i,3}\Delta x_i \\ c_{i,3} & \end{aligned} \tag{10}$$

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \le x \le x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \tag{9}$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

$$\begin{aligned} c_{i,0} &= f_i \\ c_{i,1} &= m_i \\ c_{i,2} &= \frac{f[x_i, x_{i+1}] - m_i}{\Delta x_i} - c_{i,3}\Delta x_i \\ c_{i,3} &= \frac{m_{i+1} + m_i - 2f[x_i, x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2} \end{aligned} \tag{10}$$

Introducere
Interpolarea cu . . .
Interpolare . . .
Spline cubice de . . .
Proprietatea de . . .
Home Page
Title Page
Page 10 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \tag{9}$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

$$\begin{aligned} c_{i,0} &= f_i \\ c_{i,1} &= m_i \\ c_{i,2} &= \frac{f[x_i, x_{i+1}] - m_i}{\Delta x_i} - c_{i,3}\Delta x_i \\ c_{i,3} &= \frac{m_{i+1} + m_i - 2f[x_i, x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2} \end{aligned} \tag{10}$$

Deci, pentru a calcula $s_3(f; x)$ într-un punct care nu este nod, trebuie în prealabil să localizăm intervalul $[x_i, x_{i+1}] \ni x$.

Home Page
Title Page
Page 10 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \le x \le x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \tag{9}$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

$$\begin{aligned} c_{i,0} &= f_i \\ c_{i,1} &= m_i \\ c_{i,2} &= \frac{f[x_i, x_{i+1}] - m_i}{\Delta x_i} - c_{i,3}\Delta x_i \\ c_{i,3} &= \frac{m_{i+1} + m_i - 2f[x_i, x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2} \end{aligned} \tag{10}$$

Deci, pentru a calcula $s_3(f; x)$ într-un punct care nu este nod, trebuie în prealabil să localizăm intervalul $[x_i, x_{i+1}] \ni x$.

Să calculăm coeficienții cu (10) și să evaluăm spline-ul cu (9). Vom discuta câteva alegeri posibile pentru $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Home Page

Title Page

Page 10 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \tag{9}$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

$$\begin{aligned}
c_{i,0} &= f_i \\
c_{i,1} &= m_i \\
c_{i,2} &= \frac{f[x_i, x_{i+1}] - m_i}{\Delta x_i} - c_{i,3}\Delta x_i \\
c_{i,3} &= \frac{m_{i+1} + m_i - 2f[x_i, x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2}
\end{aligned} \tag{10}$$

Deci, pentru a calcula $s_3(f; x)$ într-un punct care nu este nod, trebuie în prealabil să localizăm intervalul $[x_i, x_{i+1}] \ni x$.

Să calculăm coeficienții cu (10) și să evaluăm spline-ul cu (9). Vom discuta câteva alegeri posibile pentru $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

3. Interpolare Hermite cubică pe porţiuni

3. Interpolare Hermite cubică pe porţiuni

3. Interpolare Hermite cubică pe porţiuni

Se alege $m_i = f'(x_i)$ (presupunând că aceste derivate sunt cunoscute).

Home Page
Title Page
Page 11 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

3. Interpolare Hermite cubică pe porţiuni

Se alege $m_i = f'(x_i)$ (presupunând că aceste derivate sunt cunoscute). Se ajunge la o schemă strict locală, în care fiecare bucată poate fi determinată independent de cealaltă.

3. Interpolare Hermite cubică pe porţiuni

Se alege $m_i = f'(x_i)$ (presupunând că aceste derivate sunt cunoscute). Se ajunge la o schemă strict locală, în care fiecare bucată poate fi determinată independent de cealaltă. Mai mult, eroarea este

3. Interpolare Hermite cubică pe porţiuni

Se alege $m_i = f'(x_i)$ (presupunând că aceste derivate sunt cunoscute). Se ajunge la o schemă strict locală, în care fiecare bucată poate fi determinată independent de cealaltă. Mai mult, eroarea este

$$|f(x) - p_i(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\Delta x_i\right)^4 \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \frac{|f^{(4)}(x)|}{4!}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}. \tag{11}$$

3. Interpolare Hermite cubicǎ pe porţiuni

Se alege $m_i = f'(x_i)$ (presupunând cǎ aceste derivate sunt cunoscute). Se ajunge la o schemǎ strict localǎ, în care fiecare bucatǎ poate fi determinatǎ independent de cealaltǎ. Mai mult, eroarea este

$$|f(x) - p_i(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\Delta x_i\right)^4 \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \frac{|f^{(4)}(x)|}{4!}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}. \tag{11}$$

Deci

$$\|f(\cdot) - s_3(f;\cdot)\|_\infty \leq \frac{1}{384}|\Delta|^4\|f^{(4)}\|_\infty. \tag{12}$$

Home Page
Title Page
Page 11 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

3. Interpolare Hermite cubică pe porţiuni

Se alege $m_i = f'(x_i)$ (presupunând că aceste derivate sunt cunoscute). Se ajunge la o schemă strict locală, în care fiecare bucată poate fi determinată independent de cealaltă. Mai mult, eroarea este

$$|f(x) - p_i(x)| \le \left(\frac{1}{2}\Delta x_i\right)^4 \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \frac{|f^{(4)}(x)|}{4!}, \quad x_i \le x \le x_{i+1}. \tag{11}$$

Deci

$$\|f(\cdot) - s_3(f;\cdot)\|_\infty \le \frac{1}{384}|\Delta|^4\|f^{(4)}\|_\infty. \tag{12}$$

Pentru puncte echidistante

$$|\Delta| = (b-a)/(n-1)$$

3. Interpolare Hermite cubică pe porţiuni

Se alege $m_i = f'(x_i)$ (presupunând că aceste derivate sunt cunoscute). Se ajunge la o schemă strict locală, în care fiecare bucată poate fi determinată independent de cealaltă. Mai mult, eroarea este

$$|f(x) - p_i(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\Delta x_i\right)^4 \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \frac{|f^{(4)}(x)|}{4!}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}. \tag{11}$$

Deci

$$\|f(\cdot) - s_3(f;\cdot)\|_\infty \leq \frac{1}{384}|\Delta|^4\|f^{(4)}\|_\infty. \tag{12}$$

Pentru puncte echidistante

$$|\Delta| = (b-a)/(n-1)$$

şi deci

$$\|f(\cdot) - s_3(f;\cdot)\|_\infty = O(n^{-4}), \quad n \to \infty. \tag{13}$$

3. Interpolare Hermite cubică pe porţiuni

Se alege $m_i = f'(x_i)$ (presupunând că aceste derivate sunt cunoscute). Se ajunge la o schemă strict locală, în care fiecare bucată poate fi determinată independent de cealaltă. Mai mult, eroarea este

$$|f(x) - p_i(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\Delta x_i\right)^4 \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \frac{|f^{(4)}(x)|}{4!}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}. \tag{11}$$

Deci

$$\|f(\cdot) - s_3(f;\cdot)\|_\infty \leq \frac{1}{384}|\Delta|^4\|f^{(4)}\|_\infty. \tag{12}$$

Pentru puncte echidistante

$$|\Delta| = (b-a)/(n-1)$$

şi deci

$$\|f(\cdot) - s_3(f;\cdot)\|_\infty = O(n^{-4}), \quad n \to \infty. \tag{13}$$

4. Spline cubice de clasă C^2

4. Spline cubice de clasă C^2

4. Spline cubice de clasă C^2

Cerem ca $s_3(f;\cdot) \in \mathbb{S}_3^2(\Delta)$, adică continuitatea derivatelor de ordinul al II-lea. Aceasta înseamnă cu notaţia (7)

Home Page

Title Page

Page 12 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

4. Spline cubice de clasă C^2

Cerem ca $s_3(f;\cdot) \in \mathbb{S}_3^2(\Delta)$, adică continuitatea derivatelor de ordinul al II-lea. Aceasta înseamnă cu notația (7)

$$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i), \quad i = \overline{2, n-1}, \tag{14}$$

Home Page

Title Page

Page 12 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

4. Spline cubice de clasă C^2

Cerem ca $s_3(f;\cdot) \in \mathbb{S}_3^2(\Delta)$, adică continuitatea derivatelor de ordinul al II-lea. Aceasta înseamnă cu notația (7)

$$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i), \quad i = \overline{2, n-1}, \tag{14}$$

care convertită în coeficienți Taylor (9) dă

$$2c_{i-1,2} + 6c_{i-1,3}\Delta x_{i-1} = 2c_{i,2}, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Home Page
Title Page
Page 12 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. Spline cubice de clasă C^2

Cerem ca $s_3(f;\cdot) \in \mathbb{S}_3^2(\Delta)$, adică continuitatea derivatelor de ordinul al II-lea. Aceasta înseamnă cu notaţia (7)

$$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i), \quad i = \overline{2, n-1}, \tag{14}$$

care convertită în coeficienţi Taylor (9) dă

$$2c_{i-1,2} + 6c_{i-1,3}\Delta x_{i-1} = 2c_{i,2}, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Înlocuind cu valorile explicite (10) pentru coeficienţi se ajunge la sistemul liniar

Home Page
Title Page
Page 12 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. Spline cubice de clasă C^2

Cerem ca $s_3(f;\cdot) \in \mathbb{S}_3^2(\Delta)$, adică continuitatea derivatelor de ordinul al II-lea. Aceasta înseamnă cu notaţia (7)

$$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i), \quad i = \overline{2, n-1}, \tag{14}$$

care convertită în coeficienţi Taylor (9) dă

$$2c_{i-1,2} + 6c_{i-1,3}\Delta x_{i-1} = 2c_{i,2}, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Înlocuind cu valorile explicite (10) pentru coeficienţi se ajunge la sistemul liniar

$$\Delta x_i m_{i-1} + 2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)m_i + (\Delta x_{i-1})m_{i+1} = b_i, \quad i = \overline{2, n-1} \tag{15}$$

4. Spline cubice de clasă C^2

Cerem ca $s_3(f;\cdot) \in \mathbb{S}_3^2(\Delta)$, adică continuitatea derivatelor de ordinul al II-lea. Aceasta înseamnă cu notaţia (7)

$$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i), \quad i = \overline{2, n-1}, \tag{14}$$

care convertită în coeficienţi Taylor (9) dă

$$2c_{i-1,2} + 6c_{i-1,3}\Delta x_{i-1} = 2c_{i,2}, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Înlocuind cu valorile explicite (10) pentru coeficienţi se ajunge la sistemul liniar

$$\Delta x_i m_{i-1} + 2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)m_i + (\Delta x_{i-1})m_{i+1} = b_i, \quad i = \overline{2, n-1} \tag{15}$$

unde

$$b_i = 3\{\Delta x_i f[x_{i-1}, x_i] + \Delta x_{i-1} f[x_i, x_{i+1}]\} \tag{16}$$

Home Page
Title Page
Page 12 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. Spline cubice de clasă C^2

Cerem ca $s_3(f;\cdot) \in \mathbb{S}_3^2(\Delta)$, adică continuitatea derivatelor de ordinul al II-lea. Aceasta înseamnă cu notația (7)

$$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i), \qquad i = \overline{2, n-1}, \tag{14}$$

care convertită în coeficienți Taylor (9) dă

$$2c_{i-1,2} + 6c_{i-1,3}\Delta x_{i-1} = 2c_{i,2}, \qquad i = \overline{2, n-1}.$$

Înlocuind cu valorile explicite (10) pentru coeficienți se ajunge la sistemul liniar

$$\Delta x_i m_{i-1} + 2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)m_i + (\Delta x_{i-1})m_{i+1} = b_i, \qquad i = \overline{2, n-1} \tag{15}$$

unde

$$b_i = 3\{\Delta x_i f[x_{i-1}, x_i] + \Delta x_{i-1} f[x_i, x_{i+1}]\} \tag{16}$$

Avem un sistem de $n-2$ ecuaţii liniare cu n necunoscute $m_1, m_2, \dots, m_n$. Odată alese m_1 şi m_n, sistemul devine tridiagonal şi se poate rezolva eficient prin eliminare gaussiană, prin factorizare sau cu o metodă iterativă.

Avem un sistem de $n-2$ ecuaţii liniare cu n necunoscute $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Odată alese m_1 şi m_n, sistemul devine tridiagonal şi se poate rezolva eficient prin eliminare gaussiană, prin factorizare sau cu o metodă iterativă.

Se dau în continuare câteva alegeri posibile pentru m_1 şi m_n.

Avem un sistem de $n-2$ ecuaţii liniare cu n necunoscute $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Odată alese m_1 şi m_n, sistemul devine tridiagonal şi se poate rezolva eficient prin eliminare gaussiană, prin factorizare sau cu o metodă iterativă.

Se dau în continuare câteva alegeri posibile pentru m_1 şi m_n.

Spline complete(racordate, limitate).

Spline complete(racordate, limitate). Luăm $m_1 = f'(a)$, $m_n = f'(b)$. Se ştie că pentru acest tip de spline, dacă $f \in C^4[a,b]$

Spline complete(racordate, limitate). Luăm $m_1 = f'(a)$, $m_n = f'(b)$. Se ştie că pentru acest tip de spline, dacă $f \in C^4[a,b]$

$$\|f^{(r)}(\cdot) - s^{(r)}(f;\cdot)\|_\infty \le c_r |\Delta|^{4-r} \|f^{(n)}\|_\infty, \quad r = 0,1,2,3 \tag{17}$$

Spline complete(racordate, limitate). Luăm $m_1 = f'(a)$, $m_n = f'(b)$. Se ştie că pentru acest tip de spline, dacă $f \in C^4[a, b]$

$$\|f^{(r)}(\cdot) - s^{(r)}(f;\cdot)\|_\infty \leq c_r |\Delta|^{4-r} \|f^{(n)}\|_\infty, \quad r = 0, 1, 2, 3 \tag{17}$$

unde $c_0 = \frac{5}{384}$, $c_1 = \frac{1}{24}$, $c_2 = \frac{3}{8}$, iar c_3 depinde de raportul $\frac{|\Delta|}{\min_i \Delta x_i}$.

Home Page
Title Page
Page 14 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Spline complete(racordate, limitate). Luăm $m_1 = f'(a)$, $m_n = f'(b)$. Se știe că pentru acest tip de spline, dacă $f \in C^4[a,b]$

$$\|f^{(r)}(\cdot) - s^{(r)}(f;\cdot)\|_\infty \le c_r|\Delta|^{4-r}\|f^{(n)}\|_\infty, \quad r = 0,1,2,3 \qquad (17)$$

unde $c_0 = \frac{5}{384}$, $c_1 = \frac{1}{24}$, $c_2 = \frac{3}{8}$, iar c_3 depinde de raportul $\frac{|\Delta|}{\min_i \Delta x_i}$.

Spline care utilizează derivatele secunde.

Spline complete(racordate, limitate). Luăm $m_1 = f'(a)$, $m_n = f'(b)$. Se ştie că pentru acest tip de spline, dacă $f \in C^4[a,b]$

$$\|f^{(r)}(\cdot) - s^{(r)}(f;\cdot)\|_\infty \leq c_r|\Delta|^{4-r}\|f^{(n)}\|_\infty, \quad r = 0,1,2,3 \tag{17}$$

unde $c_0 = \frac{5}{384}$, $c_1 = \frac{1}{24}$, $c_2 = \frac{3}{8}$, iar c_3 depinde de raportul $\frac{|\Delta|}{\min_i \Delta x_i}$.

Spline care utilizează derivatele secunde. Impunem condiţiile $s_3''(f;a) = f''(a)$; $s_3''(f;b) = f''(b)$.

Spline complete(racordate, limitate). Luăm $m_1 = f'(a)$, $m_n = f'(b)$. Se știe că pentru acest tip de spline, dacă $f \in C^4[a,b]$

$$\|f^{(r)}(\cdot) - s^{(r)}(f;\cdot)\|_\infty \leq c_r|\Delta|^{4-r}\|f^{(n)}\|_\infty, \quad r = 0,1,2,3 \tag{17}$$

unde $c_0 = \frac{5}{384}$, $c_1 = \frac{1}{24}$, $c_2 = \frac{3}{8}$, iar c_3 depinde de raportul $\frac{|\Delta|}{\min_i \Delta x_i}$.

Spline care utilizează derivatele secunde. Impunem condițiile $s_3''(f;a) = f''(a)$; $s_3''(f;b) = f''(b)$. Aceste condiții conduc la două ecuații suplimentare

Spline complete(racordate, limitate). Luăm $m_1 = f'(a)$, $m_n = f'(b)$. Se ştie că pentru acest tip de spline, dacă $f \in C^4[a,b]$

$$\|f^{(r)}(\cdot) - s^{(r)}(f;\cdot)\|_\infty \le c_r |\Delta|^{4-r} \|f^{(n)}\|_\infty, \quad r = 0,1,2,3 \tag{17}$$

unde $c_0 = \frac{5}{384}$, $c_1 = \frac{1}{24}$, $c_2 = \frac{3}{8}$, iar c_3 depinde de raportul $\frac{|\Delta|}{\min_i \Delta x_i}$.

Spline care utilizează derivatele secunde. Impunem condiţiile $s_3''(f;a) = f''(a)$; $s_3''(f;b) = f''(b)$. Aceste condiţii conduc la două ecuaţii suplimentare

$$\begin{aligned} 2m_1 + m_2 &= 3f[x_1,x_2] - \tfrac{1}{2} f''(a)\Delta x_1 \\ m_{n-1} + 2m_n &= 3f[x_{n-1},x_n] + \tfrac{1}{2} f''(b)\Delta x_{n-1} \end{aligned} \tag{18}$$

Spline complete(racordate, limitate). Luăm $m_1 = f'(a)$, $m_n = f'(b)$. Se știe că pentru acest tip de spline, dacă $f \in C^4[a,b]$

$$\|f^{(r)}(\cdot) - s^{(r)}(f;\cdot)\|_\infty \leq c_r|\Delta|^{4-r}\|f^{(n)}\|_\infty, \quad r = 0,1,2,3 \tag{17}$$

unde $c_0 = \frac{5}{384}$, $c_1 = \frac{1}{24}$, $c_2 = \frac{3}{8}$, iar c_3 depinde de raportul $\frac{|\Delta|}{\min_i \Delta x_i}$.

Spline care utilizează derivatele secunde. Impunem condițiile $s_3''(f;a) = f''(a)$; $s_3''(f;b) = f''(b)$. Aceste condiții conduc la două ecuații suplimentare

$$\begin{aligned} 2m_1 + m_2 &= 3f[x_1,x_2] - \tfrac{1}{2}f''(a)\Delta x_1 \\ m_{n-1} + 2m_n &= 3f[x_{n-1},x_n] + \tfrac{1}{2}f''(b)\Delta x_{n-1} \end{aligned} \tag{18}$$

Prima ecuație se pune la începutul sistemului (15), iar a doua la sfârșitul lui, păstrându-se astfel structura tridiagonală a sistemului.

Spline complete(racordate, limitate). Luăm $m_1 = f'(a)$, $m_n = f'(b)$. Se știe că pentru acest tip de spline, dacă $f \in C^4[a,b]$

$$\|f^{(r)}(\cdot) - s^{(r)}(f;\cdot)\|_\infty \le c_r|\Delta|^{4-r}\|f^{(n)}\|_\infty, \quad r = 0,1,2,3 \tag{17}$$

unde $c_0 = \frac{5}{384}$, $c_1 = \frac{1}{24}$, $c_2 = \frac{3}{8}$, iar c_3 depinde de raportul $\frac{|\Delta|}{\min_i \Delta x_i}$.

Spline care utilizează derivatele secunde. Impunem condițiile $s_3''(f;a) = f''(a)$; $s_3''(f;b) = f''(b)$. Aceste condiții conduc la două ecuații suplimentare

$$\begin{aligned} 2m_1 + m_2 &= 3f[x_1,x_2] - \tfrac{1}{2}f''(a)\Delta x_1 \\ m_{n-1} + 2m_n &= 3f[x_{n-1},x_n] + \tfrac{1}{2}f''(b)\Delta x_{n-1} \end{aligned} \tag{18}$$

Prima ecuație se pune la începutul sistemului (15), iar a doua la sfârșitul lui, păstrându-se astfel structura tridiagonală a sistemului.

Spline cubice naturale.

Spline cubice naturale. Impunând $s''(f;a) = s''(f;b) = 0$, se obțin două ecuații noi din (18) luând $f''(a) = f''(b) = 0$.

Spline cubice naturale. Impunând $s''(f;a) = s''(f;b) = 0$, se obţin două ecuaţii noi din (18) luând $f''(a) = f''(b) = 0$.

Avantajul –

Spline cubice naturale. Impunând $s''(f;a) = s''(f;b) = 0$, se obţin două ecuaţii noi din (18) luând $f''(a) = f''(b) = 0$.

Avantajul – este nevoie numai de valori ale lui f, nu şi ale derivatelor, dar preţul plătit este degradarea preciziei la $O(|\Delta|^2)$ în vecinătatea capetelor (în afară de cazul când $f''(a) = f''(b) = 0$).

Spline cubice naturale. Impunând $s''(f;a) = s''(f;b) = 0$, se obţin două ecuaţii noi din (18) luând $f''(a) = f''(b) = 0$.

Avantajul – este nevoie numai de valori ale lui f, nu şi ale derivatelor, dar preţul plătit este degradarea preciziei la $O(|\Delta|^2)$ în vecinătatea capetelor (în afară de cazul când $f''(a) = f''(b) = 0$).

"Not-a-knot spline". (C. deBoor).

Home Page
Title Page
Page 16 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

"Not-a-knot spline". (C. deBoor). Cerem ca $p_1(x) \equiv p_2(x)$ şi $p_{n-2}(x) \equiv p_{n-1}(x)$; adică primele două părţi şi respectiv ultimele două trebuie să coincidă.

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 16 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

”Not-a-knot spline”. (C. deBoor). Cerem ca $p_1(x) \equiv p_2(x)$ şi $p_{n-2}(x) \equiv p_{n-1}(x)$; adică primele două părţi şi respectiv ultimele două trebuie să coincidă. Într-adevăr, asta înseamnă că primul punct interior x_2 şi ultimul x_{n-1} sunt ambele inactive.

"Not-a-knot spline". (C. deBoor). Cerem ca $p_1(x) \equiv p_2(x)$ şi $p_{n-2}(x) \equiv p_{n-1}(x)$; adică primele două părţi şi respectiv ultimele două trebuie să coincidă. Într-adevăr, asta înseamnă că primul punct interior x_2 şi ultimul x_{n-1} sunt ambele inactive. Se obţin încă două ecuaţii suplimentare exprimând continuitatea lui $s_3'''(f;x)$ în $x = x_2$ şi $x = x_{n-1}$.

Home Page

Title Page

Page 16 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

”Not-a-knot spline”. (C. deBoor). Cerem ca $p_1(x) \equiv p_2(x)$ şi $p_{n-2}(x) \equiv p_{n-1}(x)$; adică primele două părţi şi respectiv ultimele două trebuie să coincidă. Într-adevăr, asta înseamnă că primul punct interior x_2 şi ultimul x_{n-1} sunt ambele inactive. Se obţin încă două ecuaţii suplimentare exprimând continuitatea lui $s_3'''(f;x)$ în $x = x_2$ şi $x = x_{n-1}$. Condţia de continuitate a lui $s_3(f,.)$ în x_2 şi x_{n-1} revine la egalitatea coeficienţilor dominanţi $c_{1,3} = c_{2,3}$ şi $c_{n-2,3} = c_{n-1,3}$.

Home Page
Title Page
Page 16 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

"Not-a-knot spline". (C. deBoor). Cerem ca $p_1(x) \equiv p_2(x)$ și $p_{n-2}(x) \equiv p_{n-1}(x)$; adică primele două părți și respectiv ultimele două trebuie să coincidă. Într-adevăr, asta înseamnă că primul punct interior x_2 și ultimul x_{n-1} sunt ambele inactive. Se obțin încă două ecuații suplimentare exprimând continuitatea lui $s_3'''(f;x)$ în $x = x_2$ și $x = x_{n-1}$. Condția de continuitate a lui $s_3(f,.)$ în x_2 și x_{n-1} revine la egalitatea coeficienților dominanți $c_{1,3} = c_{2,3}$ și $c_{n-2,3} = c_{n-1,3}$. De aici se obțin ecuațiile

"Not-a-knot spline". (C. deBoor). Cerem ca $p_1(x) \equiv p_2(x)$ şi $p_{n-2}(x) \equiv p_{n-1}(x)$; adică primele două părţi şi respectiv ultimele două trebuie să coincidă. Într-adevăr, asta înseamnă că primul punct interior x_2 şi ultimul x_{n-1} sunt ambele inactive. Se obţin încă două ecuaţii suplimentare exprimând continuitatea lui $s_3'''(f;x)$ în $x = x_2$ şi $x = x_{n-1}$. Condţia de continuitate a lui $s_3(f,.)$ în x_2 şi x_{n-1} revine la egalitatea coeficienţilor dominanţi $c_{1,3} = c_{2,3}$ şi $c_{n-2,3} = c_{n-1,3}$. De aici se obţin ecuaţiile

$$\begin{aligned}(\Delta x_2)^2 m_1 + [(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2] m_2 - (\Delta x_1)^2 m_3 &= \beta_1 \\ (\Delta x_2)^2 m_{n-2} + [(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2] m_{n-1} - (\Delta x_1)^2 m_n &= \beta_2,\end{aligned}$$

"Not-a-knot spline". (C. deBoor). Cerem ca $p_1(x) \equiv p_2(x)$ şi $p_{n-2}(x) \equiv p_{n-1}(x)$; adică primele două părţi şi respectiv ultimele două trebuie să coincidă. Într-adevăr, asta înseamnă că primul punct interior x_2 şi ultimul x_{n-1} sunt ambele inactive. Se obţin încă două ecuaţii suplimentare exprimând continuitatea lui $s_3'''(f;x)$ în $x = x_2$ şi $x = x_{n-1}$. Condţia de continuitate a lui $s_3(f,.)$ în x_2 şi x_{n-1} revine la egalitatea coeficienţilor dominanţi $c_{1,3} = c_{2,3}$ şi $c_{n-2,3} = c_{n-1,3}$. De aici se obţin ecuaţiile

$$\begin{aligned}
(\Delta x_2)^2 m_1 + [(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2] m_2 - (\Delta x_1)^2 m_3 &= \beta_1 \\
(\Delta x_2)^2 m_{n-2} + [(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2] m_{n-1} - (\Delta x_1)^2 m_n &= \beta_2,
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 2\{(\Delta x_2)^2 f[x_1, x_2] - (\Delta x_1)^2 f[x_2, x_3]\} \\
\beta_2 &= 2\{(\Delta x_{n-1})^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}] - (\Delta x_{n-2})^2 f[x_{n-1}, x_n]\}.
\end{aligned}$$

"Not-a-knot spline". (C. deBoor). Cerem ca $p_1(x) \equiv p_2(x)$ şi $p_{n-2}(x) \equiv p_{n-1}(x)$; adică primele două părţi şi respectiv ultimele două trebuie să coincidă. Într-adevăr, asta înseamnă că primul punct interior x_2 şi ultimul x_{n-1} sunt ambele inactive. Se obţin încă două ecuaţii suplimentare exprimând continuitatea lui $s_3'''(f;x)$ în $x = x_2$ şi $x = x_{n-1}$. Condţia de continuitate a lui $s_3(f,.)$ în x_2 şi x_{n-1} revine la egalitatea coeficienţilor dominanţi $c_{1,3} = c_{2,3}$ şi $c_{n-2,3} = c_{n-1,3}$. De aici se obţin ecuaţiile

$$\begin{aligned}
(\Delta x_2)^2 m_1 + [(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2] m_2 - (\Delta x_1)^2 m_3 &= \beta_1 \\
(\Delta x_2)^2 m_{n-2} + [(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2] m_{n-1} - (\Delta x_1)^2 m_n &= \beta_2,
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 2\{(\Delta x_2)^2 f[x_1, x_2] - (\Delta x_1)^2 f[x_2, x_3]\} \\
\beta_2 &= 2\{(\Delta x_{n-1})^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}] - (\Delta x_{n-2})^2 f[x_{n-1}, x_n]\}.
\end{aligned}$$

Prima ecuaţie se adaugă pe prima poziţie iar a doua pe ultima poziţie a sistemului format din cele $n-2$ ecuaţii date de (15) şi (16).

"Not-a-knot spline". (C. deBoor). Cerem ca $p_1(x) \equiv p_2(x)$ şi $p_{n-2}(x) \equiv p_{n-1}(x)$; adică primele două părţi şi respectiv ultimele două trebuie să coincidă. Într-adevăr, asta înseamnă că primul punct interior x_2 şi ultimul x_{n-1} sunt ambele inactive. Se obţin încă două ecuaţii suplimentare exprimând continuitatea lui $s_3'''(f;x)$ în $x = x_2$ şi $x = x_{n-1}$. Condţia de continuitate a lui $s_3(f,.)$ în x_2 şi x_{n-1} revine la egalitatea coeficienţilor dominanţi $c_{1,3} = c_{2,3}$ şi $c_{n-2,3} = c_{n-1,3}$. De aici se obţin ecuaţiile

$$\begin{aligned}
(\Delta x_2)^2 m_1 + [(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2] m_2 - (\Delta x_1)^2 m_3 &= \beta_1 \\
(\Delta x_2)^2 m_{n-2} + [(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2] m_{n-1} - (\Delta x_1)^2 m_n &= \beta_2,
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 2\{(\Delta x_2)^2 f[x_1, x_2] - (\Delta x_1)^2 f[x_2, x_3]\} \\
\beta_2 &= 2\{(\Delta x_{n-1})^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}] - (\Delta x_{n-2})^2 f[x_{n-1}, x_n]\}.
\end{aligned}$$

Prima ecuaţie se adaugă pe prima poziţie iar a doua pe ultima poziţie a sistemului format din cele $n-2$ ecuaţii date de (15) şi (16).

Sistemul obţinut nu mai este tridiagonal, dar el se poate transforma în unul tridiagonal combinând ecuaţiile 1 cu 2 şi $n-1$ cu n. După aceste transformări prima şi ultima ecuaţie devin

$$\begin{aligned} \Delta x_2 m_1 + (\Delta x_2 + \Delta x_1) m_2 &= \gamma_1 \qquad (19)\\ (\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n-2}) m_{n-1} + \Delta x_{n-2} m_n &= \gamma_2, \qquad (20) \end{aligned}$$

unde

Sistemul obţinut nu mai este tridiagonal, dar el se poate transforma în unul tridiagonal combinând ecuaţiile 1 cu 2 şi $n-1$ cu n. După aceste transformări prima şi ultima ecuaţie devin

$$\begin{aligned} \Delta x_2 m_1 + (\Delta x_2 + \Delta x_1) m_2 &= \gamma_1 \qquad (19) \\ (\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n-2}) m_{n-1} + \Delta x_{n-2} m_n &= \gamma_2, \qquad (20) \end{aligned}$$

unde

Home Page
Title Page
Page 18 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{\Delta x_2 + \Delta x_1}\left\{ f[x_1, x_2]\Delta x_2[\Delta x_1 + 2(\Delta x_1 + \Delta x_2)] + (\Delta x_1)^2 f[x_2, x_3]\right\} \\
\gamma_2 &= \frac{1}{\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n-2}}\left\{ (\Delta x_{n-1})^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}] + \right. \\
&\quad \left. [2(\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n-2}) + \Delta x_{n-1}]\Delta x_{n-2} f[x_{n-1}, x_n]\right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{\Delta x_2 + \Delta x_1}\left\{ f[x_1, x_2]\Delta x_2[\Delta x_1 + 2(\Delta x_1 + \Delta x_2)] + (\Delta x_1)^2 f[x_2, x_3]\right\} \\
\gamma_2 &= \frac{1}{\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n-2}}\left\{ (\Delta x_{n-1})^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}] + \right. \\
&\quad \left. [2(\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n-2}) + \Delta x_{n-1}]\Delta x_{n-2} f[x_{n-1}, x_n]\right\}.
\end{aligned}
$$

5. Proprietatea de minimalitate a funcţiilor spline cubice

5. Proprietatea de minimalitate a funcţiilor spline cubice

Home Page
Title Page
Page 19 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

5. Proprietatea de minimalitate a funcţiilor spline cubice

Funcţiile spline cubice complete şi naturale au proprietăţi interesante de optimalitate. Pentru a le formula, este convenabil să considerăm nu numai subdiviziunea Δ ci şi

Home Page
Title Page
Page 19 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

5. Proprietatea de minimalitate a funcţiilor spline cubice

Funcţiile spline cubice complete şi naturale au proprietăţi interesante de optimalitate. Pentru a le formula, este convenabil să considerăm nu numai subdiviziunea Δ ci şi

$$\Delta' : \; a = x_0 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = b, \qquad (21)$$

în care capetele sunt noduri duble.

5. Proprietatea de minimalitate a funcţiilor spline cubice

Funcţiile spline cubice complete şi naturale au proprietăţi interesante de optimalitate. Pentru a le formula, este convenabil să considerăm nu numai subdiviziunea Δ ci şi

$$\Delta' : \ a = x_0 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = b, \tag{21}$$

în care capetele sunt noduri duble. Aceasta înseamnă că ori de câte ori interpolăm pe Δ', interpolăm valorile funcţiei pe punctele interioare, iar la capete valorile funcţiei şi ale derivatei.

Home Page
Title Page
Page 19 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

5. Proprietatea de minimalitate a funcţiilor spline cubice

Funcţiile spline cubice complete şi naturale au proprietăţi interesante de optimalitate. Pentru a le formula, este convenabil să considerăm nu numai subdiviziunea Δ ci şi

$$\Delta' : \ a = x_0 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = b, \qquad (21)$$

în care capetele sunt noduri duble. Aceasta înseamnă că ori de câte ori interpolăm pe Δ', interpolăm valorile funcţiei pe punctele interioare, iar la capete valorile funcţiei şi ale derivatei. Prima teoremă se referă la funcţii spline cubice complete $s_{compl}(f;\cdot)$.

5. Proprietatea de minimalitate a funcţiilor spline cubice

Funcţiile spline cubice complete şi naturale au proprietăţi interesante de optimalitate. Pentru a le formula, este convenabil să considerăm nu numai subdiviziunea Δ ci şi

$$\Delta' : \ a = x_0 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = b, \tag{21}$$

în care capetele sunt noduri duble. Aceasta înseamnă că ori de câte ori interpolăm pe Δ', interpolăm valorile funcţiei pe punctele interioare, iar la capete valorile funcţiei şi ale derivatei. Prima teoremă se referă la funcţii spline cubice complete $s_{compl}(f;\cdot)$.

Teorema 1

5. Proprietatea de minimalitate a funcţiilor spline cubice

Funcţiile spline cubice complete şi naturale au proprietăţi interesante de optimalitate. Pentru a le formula, este convenabil să considerăm nu numai subdiviziunea Δ ci şi

$$\Delta': \ a = x_0 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = b, \qquad (21)$$

în care capetele sunt noduri duble. Aceasta înseamnă că ori de câte ori interpolăm pe Δ', interpolăm valorile funcţiei pe punctele interioare, iar la capete valorile funcţiei şi ale derivatei. Prima teoremă se referă la funcţii spline cubice complete $s_{compl}(f;\cdot)$.

Teorema 1 *Pentru orice funcţie $g \in C^2[a,b]$ care interpolează f pe Δ', are loc*

Home Page

Title Page

Page 19 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

5. Proprietatea de minimalitate a funcţiilor spline cubice

Funcţiile spline cubice complete şi naturale au proprietăţi interesante de optimalitate. Pentru a le formula, este convenabil să considerăm nu numai subdiviziunea Δ ci şi

$$\Delta' : \ a = x_0 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = b, \tag{21}$$

în care capetele sunt noduri duble. Aceasta înseamnă că ori de câte ori interpolăm pe Δ', interpolăm valorile funcţiei pe punctele interioare, iar la capete valorile funcţiei şi ale derivatei. Prima teoremă se referă la funcţii spline cubice complete $s_{compl}(f;\cdot)$.

Teorema 1 *Pentru orice funcţie $g \in C^2[a,b]$ care interpolează f pe Δ', are loc*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{compl}(f;x)]^2 dx, \tag{22}$$

Home Page
Title Page
Go Back
Full Screen
Close
Quit

5. Proprietatea de minimalitate a funcţiilor spline cubice

Funcţiile spline cubice complete şi naturale au proprietăţi interesante de optimalitate. Pentru a le formula, este convenabil să considerăm nu numai subdiviziunea Δ ci şi

$$\Delta' : \; a = x_0 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = b, \tag{21}$$

în care capetele sunt noduri duble. Aceasta înseamnă că ori de câte ori interpolăm pe Δ', interpolăm valorile funcţiei pe punctele interioare, iar la capete valorile funcţiei şi ale derivatei. Prima teoremă se referă la funcţii spline cubice complete $s_{compl}(f;\cdot)$.

Teorema 1 *Pentru orice funcţie $g \in C^2[a,b]$ care interpolează f pe Δ', are loc*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{compl}(f;x)]^2 dx, \tag{22}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $g(\cdot) = s_{compl}(f;\cdot)$.

5. Proprietatea de minimalitate a funcţiilor spline cubice

Funcţiile spline cubice complete şi naturale au proprietăţi interesante de optimalitate. Pentru a le formula, este convenabil să considerăm nu numai subdiviziunea Δ ci şi

$$\Delta' : \ a = x_0 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = b, \tag{21}$$

în care capetele sunt noduri duble. Aceasta înseamnă că ori de câte ori interpolăm pe Δ', interpolăm valorile funcţiei pe punctele interioare, iar la capete valorile funcţiei şi ale derivatei. Prima teoremă se referă la funcţii spline cubice complete $s_{compl}(f;\cdot)$.

Teorema 1 *Pentru orice funcţie $g \in C^2[a,b]$ care interpolează f pe Δ', are loc*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{compl}(f;x)]^2 dx, \tag{22}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $g(\cdot) = s_{compl}(f;\cdot)$.

Observația 2 $s_{compl}(f;\cdot)$ *din teorema 1 interpolează* f *pe* Δ' *și dintre toți interpolanții de acest tip, derivata sa de ordinul II are norma minimă.*

Observaţia 2 $s_{compl}(f;\cdot)$ *din teorema 1 interpolează* f *pe* Δ' *şi dintre toţi interpolanţii de acest tip, derivata sa de ordinul II are norma minimă.*

Demonstrație.

Home Page

Title Page

Page 21 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Demonstrație.

Folosim notația prescurtată $s_{compl} = s$.

Home Page
Title Page
Page 21 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Demonstrație.

Folosim notația prescurtată $s_{compl} = s$. Teorema rezultă imediat, dacă arătăm că

Demonstrație.

Folosim notația prescurtată $s_{compl} = s$. Teorema rezultă imediat, dacă arătăm că

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx = \int_a^b [g''(x) - s''(x)]^2 dx + \int_a^b [s''(x)]^2 dx. \tag{23}$$

Demonstrație.

Folosim notația prescurtată $s_{compl} = s$. Teorema rezultă imediat, dacă arătăm că

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx = \int_a^b [g''(x) - s''(x)]^2 dx + \int_a^b [s''(x)]^2 dx. \tag{23}$$

Aceasta implică imediat (22) și faptul că egalitatea în (22) are loc dacă și numai dacă $g''(x) - s''(x) \equiv 0$, din care integrând de două ori de la a la x și utilizând proprietățile de interpolare ale lui s și g în $x = a$ se obține $g(x) = s(x)$.

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 21 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Demonstrație.

Folosim notația prescurtată $s_{compl} = s$. Teorema rezultă imediat, dacă arătăm că

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx = \int_a^b [g''(x) - s''(x)]^2 dx + \int_a^b [s''(x)]^2 dx. \tag{23}$$

Aceasta implică imediat (22) și faptul că egalitatea în (22) are loc dacă și numai dacă $g''(x) - s''(x) \equiv 0$, din care integrând de două ori de la a la x și utilizând proprietățile de interpolare ale lui s și g în $x = a$ se obține $g(x) = s(x)$. Relația (23) este echivalentă cu

$$\int_a^b s''(x)[g''(x) - s''(x)]dx = 0. \tag{24}$$

Introducere
Interpolarea cu . . .
Interpolare . . .
Spline cubice de . . .
Proprietatea de . . .
Home Page
Title Page
Page 21 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Demonstrație.

Folosim notația prescurtată $s_{compl} = s$. Teorema rezultă imediat, dacă arătăm că

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx = \int_a^b [g''(x) - s''(x)]^2 dx + \int_a^b [s''(x)]^2 dx. \tag{23}$$

Aceasta implică imediat (22) și faptul că egalitatea în (22) are loc dacă și numai dacă $g''(x) - s''(x) \equiv 0$, din care integrând de două ori de la a la x și utilizând proprietățile de interpolare ale lui s și g în $x = a$ se obține $g(x) = s(x)$. Relația (23) este echivalentă cu

$$\int_a^b s''(x)[g''(x) - s''(x)]dx = 0. \tag{24}$$

Home Page
Title Page
Page 22 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Integrând prin părţi şi ţinând cont că $s'(b) = g'(b) = f'(b)$ şi $s'(a) = g'(a) = f'(a)$ se obţine

Integrând prin părţi şi ţinând cont că $s'(b) = g'(b) = f'(b)$ şi $s'(a) = g'(a) = f'(a)$ se obţine

(25)

Integrând prin părţi şi ţinând cont că $s'(b) = g'(b) = f'(b)$ şi $s'(a) = g'(a) = f'(a)$ se obţine

$$\int_a^b s''(x)[g''(x) - s''(x)]dx = \tag{25}$$

Integrând prin părți și ținând cont că $s'(b) = g'(b) = f'(b)$ și $s'(a) = g'(a) = f'(a)$ se obține

$$\begin{aligned} &\int_a^b s''(x)[g''(x) - s''(x)]dx = \\ &= s''(x)[g'(x) - s'(x)]\Big|_a^b - \int_a^b s'''(x)[g'(x) - s'(x)]dx = \end{aligned} \tag{25}$$

Integrând prin părţi şi ţinând cont că $s'(b) = g'(b) = f'(b)$ şi $s'(a) = g'(a) = f'(a)$ se obţine

$$\begin{aligned} &\int_a^b s''(x)[g''(x) - s''(x)]dx = \\ &= s''(x)[g'(x) - s'(x)]\Big|_a^b - \int_a^b s'''(x)[g'(x) - s'(x)]dx = \\ &= -\int_a^b s'''(x)[g'(x) - s'(x)]dx. \end{aligned} \tag{25}$$

Integrând prin părţi şi ţinând cont că $s'(b) = g'(b) = f'(b)$ şi $s'(a) = g'(a) = f'(a)$ se obţine

$$\begin{aligned} &\int_a^b s''(x)[g''(x) - s''(x)]dx = \\ &= s''(x)[g'(x) - s'(x)]\Big|_a^b - \int_a^b s'''(x)[g'(x) - s'(x)]dx = \\ &= -\int_a^b s'''(x)[g'(x) - s'(x)]dx. \end{aligned} \tag{25}$$

Deoarece s''' este constantă pe porţiuni

Deoarece s''' este constantă pe porțiuni

$$\int_a^b s'''(x)[g'(x) - s'(x)]dx = \sum_{\nu-1}^{n-1} s'''(x_\nu + 0) \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} [g'(x) - s'(x)]dx =$$

Deoarece s''' este constantă pe porţiuni

$$\int_a^b s'''(x)[g'(x)-s'(x)]dx = \sum_{\nu-1}^{n-1} s'''(x_\nu+0)\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}[g'(x)-s'(x)]dx =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} s'''(x_{\nu+0})[g(x_{\nu+1})-s(x_{\nu+1})-(g(x_\nu)-s(x_\nu))] = 0$$

Home Page
Title Page
Page 23 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Deoarece s''' este constantă pe porţiuni

$$\int_a^b s'''(x)[g'(x)-s'(x)]dx = \sum_{\nu-1}^{n-1} s'''(x_\nu+0)\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}[g'(x)-s'(x)]dx =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} s'''(x_{\nu+0})[g(x_{\nu+1})-s(x_{\nu+1})-(g(x_\nu)-s(x_\nu))] = 0$$

căci atât s cât şi g interpolează f pe Δ. Aceasta demonstrează (24) şi deci şi teorema. ■

Deoarece s''' este constantă pe porţiuni

$$\int_a^b s'''(x)[g'(x) - s'(x)]dx = \sum_{\nu-1}^{n-1} s'''(x_\nu + 0) \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} [g'(x) - s'(x)]dx =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} s'''(x_{\nu+0})[g(x_{\nu+1}) - s(x_{\nu+1}) - (g(x_\nu) - s(x_\nu))] = 0$$

căci atât s cât şi g interpolează f pe Δ. Aceasta demonstrează (24) şi deci şi teorema. ■

Pentru interpolarea pe Δ, calitatea de a fi optimal revine funcţiilor spline naturale de interpolare $s_{nat}(f; \cdot)$.

Pentru interpolarea pe Δ, calitatea de a fi optimal revine funcţiilor spline naturale de interpolare $s_{nat}(f; \cdot)$.

Teorema 3

Pentru interpolarea pe Δ, calitatea de a fi optimal revine funcţiilor spline naturale de interpolare $s_{nat}(f;\cdot)$.

Teorema 3 *Pentru orice funcţie $g \in C^2[a,b]$ ce interpolează f pe Δ, are loc*

Pentru interpolarea pe Δ, calitatea de a fi optimal revine funcţiilor spline naturale de interpolare $s_{nat}(f;\cdot)$.

Teorema 3 *Pentru orice funcţie $g \in C^2[a,b]$ ce interpolează f pe Δ, are loc*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f;x)]^2 dx \tag{26}$$

Home Page
Title Page
Page 24 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Pentru interpolarea pe Δ, calitatea de a fi optimal revine funcţiilor spline naturale de interpolare $s_{nat}(f;\cdot)$.

Teorema 3 *Pentru orice funcţie $g \in C^2[a,b]$ ce interpolează f pe Δ, are loc*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f;x)]^2 dx \tag{26}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $g(\cdot) = s_{nat}(f;\cdot)$.

Pentru interpolarea pe Δ, calitatea de a fi optimal revine funcţiilor spline naturale de interpolare $s_{nat}(f;\cdot)$.

Teorema 3 *Pentru orice funcţie $g \in C^2[a,b]$ ce interpolează f pe Δ, are loc*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f;x)]^2 dx \tag{26}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $g(\cdot) = s_{nat}(f;\cdot)$.

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 24 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Pentru interpolarea pe Δ, calitatea de a fi optimal revine funcţiilor spline naturale de interpolare $s_{nat}(f;\cdot)$.

Teorema 3 *Pentru orice funcţie $g \in C^2[a,b]$ ce interpolează f pe Δ, are loc*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f;x)]^2 dx \tag{26}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $g(\cdot) = s_{nat}(f;\cdot)$.

Demonstraţia este analoagă cu a teoremei 1, deoarece (23) are loc din nou căci $s''(b) = s''(a) = 0$.

Pentru interpolarea pe Δ, calitatea de a fi optimal revine funcţiilor spline naturale de interpolare $s_{nat}(f;\cdot)$.

Teorema 3 *Pentru orice funcţie $g \in C^2[a,b]$ ce interpolează f pe Δ, are loc*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f;x)]^2 dx \tag{26}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $g(\cdot) = s_{nat}(f;\cdot)$.

Demonstraţia este analoagă cu a teoremei 1, deoarece (23) are loc din nou căci $s''(b) = s''(a) = 0$.

Punând $g(\cdot) = s_{compl}(f;\cdot)$ în teorema 3 se obţine

Pentru interpolarea pe Δ, calitatea de a fi optimal revine funcţiilor spline naturale de interpolare $s_{nat}(f;\cdot)$.

Teorema 3 *Pentru orice funcţie $g \in C^2[a,b]$ ce interpolează f pe Δ, are loc*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f;x)]^2 dx \tag{26}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $g(\cdot) = s_{nat}(f;\cdot)$.

Demonstraţia este analoagă cu a teoremei 1, deoarece (23) are loc din nou căci $s''(b) = s''(a) = 0$.

Punând $g(\cdot) = s_{compl}(f;\cdot)$ în teorema 3 se obţine

$$\int_a^b [s''_{compl}(f;x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f;x)]^2 dx. \tag{27}$$

Pentru interpolarea pe Δ, calitatea de a fi optimal revine funcţiilor spline naturale de interpolare $s_{nat}(f;\cdot)$.

Teorema 3 *Pentru orice funcţie $g \in C^2[a,b]$ ce interpolează f pe Δ, are loc*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f;x)]^2 dx \tag{26}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $g(\cdot) = s_{nat}(f;\cdot)$.

Demonstraţia este analoagă cu a teoremei 1, deoarece (23) are loc din nou căci $s''(b) = s''(a) = 0$.

Punând $g(\cdot) = s_{compl}(f;\cdot)$ în teorema 3 se obţine

$$\int_a^b [s''_{compl}(f;x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f;x)]^2 dx. \tag{27}$$

Deci, într-un anumit sens, spline-ul cubic natural este cel mai neted interpolant.

Pentru interpolarea pe Δ, calitatea de a fi optimal revine funcţiilor spline naturale de interpolare $s_{nat}(f;\cdot)$.

Teorema 3 *Pentru orice funcţie $g \in C^2[a,b]$ ce interpolează f pe Δ, are loc*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f;x)]^2 dx \tag{26}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $g(\cdot) = s_{nat}(f;\cdot)$.

Demonstraţia este analoagă cu a teoremei 1, deoarece (23) are loc din nou căci $s''(b) = s''(a) = 0$.

Punând $g(\cdot) = s_{compl}(f;\cdot)$ în teorema 3 se obţine

$$\int_a^b [s''_{compl}(f;x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f;x)]^2 dx. \tag{27}$$

Deci, într-un anumit sens, spline-ul cubic natural este cel mai neted interpolant.

Home Page
Title Page
Page 25 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Proprietatea exprimată în teorema 3 stă la originea numelui de spline.

Proprietatea exprimată în teorema 3 stă la originea numelui de spline. Un spline este o vergea flexibilă folosită pentru a desena curbe. Dacă forma sa este dată de ecuaţia $y = g(x)$, $x \in [a, b]$ şi dacă spline-ul trebuie să treacă prin punctele (x_i, g_i), atunci se presupune că spline-ul are o formă ce minimizează energia potenţială

Proprietatea exprimată în teorema 3 stă la originea numelui de spline. Un spline este o vergea flexibilă folosită pentru a desena curbe. Dacă forma sa este dată de ecuaţia $y = g(x)$, $x \in [a, b]$ şi dacă spline-ul trebuie să treacă prin punctele (x_i, g_i), atunci se presupune că spline-ul are o formă ce minimizează energia potenţială

$$\int_a^b \frac{[g''(x)]^2 dx}{(1 + [g'(x)]^2)^3},$$

pentru toate funcţiile g supuse aceloraşi restricţii.

Proprietatea exprimată în teorema 3 stă la originea numelui de spline. Un spline este o vergea flexibilă folosită pentru a desena curbe. Dacă forma sa este dată de ecuaţia $y = g(x)$, $x \in [a, b]$ şi dacă spline-ul trebuie să treacă prin punctele (x_i, g_i), atunci se presupune că spline-ul are o formă ce minimizează energia potenţială

$$\int_a^b \frac{[g''(x)]^2 dx}{(1 + [g'(x)]^2)^3},$$

pentru toate funcţiile g supuse aceloraşi restricţii. Pentru variaţii lente ale lui g ($\|g'\|_\infty \ll 1$) aceasta aproximează bine proprietatea de minim din teorema 3.

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 25 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Proprietatea exprimată în teorema 3 stă la originea numelui de spline. Un spline este o vergea flexibilă folosită pentru a desena curbe. Dacă forma sa este dată de ecuaţia $y = g(x)$, $x \in [a, b]$ şi dacă spline-ul trebuie să treacă prin punctele (x_i, g_i), atunci se presupune că spline-ul are o formă ce minimizează energia potenţială

$$\int_a^b \frac{[g''(x)]^2 dx}{(1 + [g'(x)]^2)^3},$$

pentru toate funcţiile g supuse aceloraşi restricţii. Pentru variaţii lente ale lui g ($\|g'\|_\infty \ll 1$) aceasta aproximează bine proprietatea de minim din teorema 3.

Bibliografie

[1] E. Blum, *Numerical Computing: Theory and Practice*, Addison-Wesley, 1972.

[2] P. G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, Milan, Barcelone, Mexico, 1990.

[3] Gheorghe Coman, *Analiză numerică*, Editura Libris, Cluj-Napoca, 1995.

[4] W. Gautschi, *Numerical Analysis. An Introduction*, Birkhäuser, Basel, 1997.

[5] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sidney, 1996, disponibila prin www, http://www.nr.com/.

[6] D. D. Stancu, *Analiză numerică – Curs şi culegere de probleme*, Lito UBB, Cluj-Napoca, 1977.

[7] J. Stoer, R. Burlisch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., Springer Verlag, 1992.