Subiectul 5

Problema 1 *Ecuaţia următoare se foloseşte în inginerie la determinarea vitezelor unghiulare critice pentru axe circulare:*

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \tan x + \tanh x,\ x > 0.$$

(a) *Arătaţi că are o infinitate de rădăcini pozitive, exact câte una, α_n, în fiecare interval de forma $\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, n\pi\right]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (1p)*

(b) *Determinaţi $\lim_{n\to\infty}(n\pi - \alpha_n)$. (1p)*

(c) *Discutaţi convergenţa metodei lui Newton dacă se porneşte cu $x_0 = n\pi$. (2p)*

Problema 2 (a) *Stabiliţi o formulă de cuadratură cu două noduri şi cu grad maxim de exactitate*

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

reducând cuadratura la o cuadratură de tip Gauss-Jacobi. (3p)

(b) *Folosind ideea de la (a), calculaţi*

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cos x \mathrm{d}\, x$$

cu 8 zecimale exacte (2p)

Subiectul 6

Problema 3 *Ecuaţia* $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ *are rădăcinile 1 şi 2. Scrisă sub forma de punct fix,* $x = \frac{1}{\omega}\left[x^2 - (3-\omega)\,x + 2\right]$, $\omega \neq 0$, *sugerează iteraţia*

$$x_{n+1} = \frac{1}{\omega}\left[x_n^2 - (3-\omega)\,x_n + 2\right], \quad n = 1, 2, \ldots \ (\omega \neq 0)$$

(a) *Determinaţi un interval pentru* ω *astfel ca pentru orice* ω *din acest interval procesul iterativ să conveargă către 1 (când* $x_0 \neq 1$ *este ales adecvat). (1p)*

(b) *Faceţi acelaşi lucru ca la (a), dar pentru rădăcina 2 (şi* $x_0 \neq 2$*). (1p)*

(c) *Pentru ce valori ale lui* ω *iteraţia converge pătratic către 1? (1p)*

(d) *Interpretaţi algoritmul de la (c) ca o aplicare a metodei lui Newton pentru o ecuaţie* $F(x) = 0$ *şi determinaţi* F*. Pentru ce valori inţiale* x_0 *metoda este convergentă? (2p)*

Problema 4 (a) *Stabiliţi o formulă de cuadratură cu două noduri şi cu grad maxim de exactitate*

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

reducând cuadratura la o cuadratură de tip Gauss-Legendre. (2p)

(b) *Folosind ideea de la (a), calculaţi*

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$$

cu 8 zecimale exacte (2p).

Subiectul 7

Problema 5 *Fie $\Delta : a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $n-1$ subintervale. Presupunem că se dau valorile $f_i = f(x_i)$ ale unei funcţii $f(x)$ în punctele $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. În această problemă $s \in \mathbb{S}_2^1(\Delta)$ este un spline pătratic din $C^1[a, b]$ care interpolează f pe Δ, adică, $s(x_i) = f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

(a) *Explicaţi de ce este necesară o condiţie suplimentară pentru a determina pe s unic. (1p)*

(b) *Definim $m_i = s'(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Determinaţi $p_i = s|_{[x_i,x_{i+1}]}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, în funcţie de f_i, f_{i+1} şi m_i. (1p)*

(c) *Presupunem că luăm $m_1 = f'(a)$. (Conform lui (a), aceasta determină s în mod unic.) Arătaţi cum se poate calcula m_2, m_3, $\ldots$, m_{n-1}. (1p)*

(d) *Implementaţi metoda de calcul a spline-ului de la (a), (b), (c) în MATLAB. (2p)*

Problema 6 (a) *Fie $w(t)$ o funcţie pondere pară pe $[a, b]$, $a < b$, $a+b = 0$, adică $w(-t) = w(t)$ pe $[a, b]$. Arătaţi că $(-1)^n \pi_n(-t; w) = \pi_n(t, w)$, adică polinomul ortogonal monic de grad n în raport cu ponderea w este par (impar) dacă n este par (impar).*

(b) *Arătaţi că formula gaussiană*

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(t_\nu) + R_n(f),$$

pentru o pondere w pară este simetrică, i.e.

$$t_{n+1-\nu} = -t_\nu, \qquad A_{n+1-\nu} = A_\nu, \ \nu = 1, \ldots, n.$$

(c) *Obţineţi o formulă gaussiană de forma*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f).$$

Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.

Subiectul 8

Problema 7 *Presupunem că se dă diviziunea* $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$*; fie nodurile*

$$\begin{aligned} &\tau_0 = t_0,\ \tau_{n+1} = t_n \\ &\tau_i = \frac{1}{2}\left(t_i + t_{i-1}\right), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Determinaţi un spline pătratic $Q \in S_2^1(\Delta)$ *care în nodurile date ia nişte valori prescrise:*

$$Q(\tau_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Implementaţi metoda de calcul a spline-ului în MATLAB.

Problema 8 *(a) Fie* $w(t)$ *o funcţie pondere pară pe* $[a, b]$*,* $a < b$*,* $a+b = 0$*, adică* $w(-t) = w(t)$ *pe* $[a, b]$*. Arătaţi că* $(-1)^n \pi_n(-t; w) = \pi_n(t, w)$*, adică polinomul ortogonal monic de grad* n *în raport cu ponderea* w *este par (impar) dacă* n *este par (impar).*

(b) Arătaţi că formula gaussiană

$$\int_a^b f(t) w(t) dt = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(t_\nu) + R_n(f),$$

pentru o pondere w *pară este simetrică, i.e.*

$$t_{n+1-\nu} = -t_\nu, \qquad A_{n+1-\nu} = A_\nu,\ \nu = 1, \ldots, n.$$

(c) Obţineţi o formulă gaussiană de forma

$$\int_{-1}^{1} |x|\, f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f).$$

Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.