Formula lui Taylor și aplicații

O cărămidă importantă a analizei numerice

Radu T. Trîmbițaș

UBB

Polinomul lui Taylor

- I interval, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de n ori în punctul $a \in I$. Polinomul lui Taylor de gradul n, atașat funcției f în punctul a:

$$(T_n f)(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

- Restul de ordinul n al formulei lui Taylor în punctul x

$$(R_n f)(x) = f(x) - (T_n f)(x)$$

- formula lui Taylor de ordinul n pentru funcția f în vecinătatea punctului a:

$$f(x) = (T_n f)(x) + (R_n f)(x)$$

sau

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (R_n f)(x)$$

Expresii ale restului

- Are loc
$$(R_nf)(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\omega(x), \text{ cu } \lim_{x\to a}\omega(x) = 0.$$
- Dacă $f \in C^{n+1}(I)$, atunci $\exists\theta \in (0,1)$ astfel încât
$$(R_nf)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}$$

  (restul în forma Lagrange)
$$(R_nf)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}$$

  (restul în forma Cauchy)
$$(R_nf)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}\,t$$

(restul în formă integrală)

Formula lui Maclaurin

- Dacă în formula lui Taylor se ia $a = 0$, se obține formula lui MacLaurin

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + (R_n f)(x),$$

unde

$$(R_n f)(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x), \qquad \theta \in (0,1).$$

- Example de dezvoltări uzuale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x); \tag{1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x); \tag{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x); \tag{3}$$

Alte dezvoltari uzuale

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n+1} + R_{n+1}(x); \tag{4}$$

$$(1+x)^k = 1 + \binom{k}{1} x + \binom{k}{2} x^2 + \cdots + \binom{k}{n} x^n + R_n(x), \tag{5}$$

unde

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}.$$

Brook Taylor (1685-1731)

Colin Maclaurin (1698-1768)

Aplicații I

Problemă

Să se scrie formula lui MacLaurin pentru funcția $f:[-a,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{a+x}$, $a>0$.

Soluție. Scriem $f(x)=\sqrt{a+x}=\sqrt{a}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$; se obține

$$f(x)=\sqrt{a}\left[1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}+(-1)^1\frac{1}{2^2}\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+(-1)^2\frac{1}{2^3}\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\dots\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{n!2^n}\left(\frac{x}{a}\right)^n+(R_nf)(x)\right].$$

■

Aplicații II

Problemă

Să se determine numărul natural n astfel ca pentru $a = 0$ și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ $T_n f$ să aproximeze f în $[-1, 1]$ cu trei zecimale exacte.

Soluție. Impunem condiția $|(R_n f)(x)| = \left|\frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{(n+1)!}\right| < 10^{-3}$.Deoarece $\theta x < 1$, $e^{\theta x} < e < 3$, avem

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}\right| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3} \Rightarrow n = 6.$$

În particular, luând $x = 1$, obținem

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{6!}\right) < \frac{1}{1000}.$$

■

Aplicații III

Problemă

Să se aproximeze $\sqrt[3]{999}$ cu 12 zecimale exacte.

Soluție. Avem

$$\sqrt[3]{999} = 10\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Folosim formula (5) pentru $k = 1/3$, $x = -\frac{1}{1000}$. Într-o serie alternată modulul erorii este mai mic decât modulul primului termen neglijat.

$$|(R_n f)(x)| < \left|\binom{\frac{1}{3}}{n} 10^{-3n}\right|.$$

Pentru $n = 4$, avem $|(R_n f)(x)| < \frac{10}{243} 10^{-12} = \frac{1}{24300000000000}$. ■

Formula lui Taylor bidimensională

- Pentru o funcție $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o expresie a formulei lui Taylor este

$$f(a+h, b+k) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(a, b) + R_n(h, k) \tag{6}$$

cu restul

$$R_n(h, k) = \frac{1}{(n+1)!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f\left(a + \theta h, b + \theta k\right), \quad \theta \in (0, 1).$$

Semnificația termenilor diferențiali este

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^0 f(a, b) = f(a, b)$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^1 f(a, b) = \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} \right)(a, b)$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) = \left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)(a, b).$$

Un exemplu

Problemă

Scrieți dezvoltarea Taylor a lui $f(x,y)=\cos xy$*, pentru* $n=1$.

Soluție. Aplicând formula (6) se obține

$$\cos[(a+h)(b+k)] = \cos ab - hb\sin ab - ka\sin ab + R_1(h,k),$$

unde R_1 este suma a trei termeni

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}h^2(b+\theta k)^2\cos\left[(a+\theta h)(b+\theta k)\right] \\
&-hk\left\{(a+\theta h)(b+\theta k)\cos\left[(a+\theta h)(b+\theta k)\right]+\sin\left[(a+\theta h)(b+\theta k)\right]\right\} \\
&-\frac{1}{2}k^2(a+\theta h)^2\cos\left[(a+\theta h)(b+\theta k)\right].
\end{aligned}$$

■