Subiectul 7

Problema 1 *Fie $\Delta : a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $n-1$ subintervale. Presupunem că se dau valorile $f_i = f(x_i)$ ale unei funcţii $f(x)$ în punctele $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. În această problemă $s \in \mathbb{S}_2^1(\Delta)$ este un spline pătratic din $C^1[a, b]$ care interpolează f pe Δ, adică, $s(x_i) = f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

(a) *Explicaţi de ce este necesară o condiţie suplimentară pentru a determina pe s unic. (1p)*

(b) *Definim $m_i = s'(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Determinaţi $p_i = s|_{[x_i,x_{i+1}]}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, în funcţie de f_i, f_{i+1} şi m_i. (1p)*

(c) *Presupunem că luăm $m_1 = f'(a)$. (Conform lui (a), aceasta determină s în mod unic.) Arătaţi cum se poate calcula m_2, m_3, ..., m_{n-1}. (1p)*

(d) *Implementaţi metoda de calcul a spline-ului de la (a), (b), (c) în MATLAB. (2p)*

Soluţie.

(a) Sunt $3(n-1)$ parametrii şi $2(n-2)+2$ condiţii de interpolare şi $n-2$ condiţii de continuitate a primei derivate. Rămân $3(n-1)-2(n-2)-2-(n-2) = 1$ grade de libertate. Avem nevoie de o condiţie suplimentară pentru a determina spline-ul unic.

(b) Cu notaţia $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, obţinem tabela de diferenţe divizate

x	f	$\mathcal{D}^1$	$\mathcal{D}^2$
x_i	f_i	m_i	$\frac{m_i - f[x_i,x_{i+1}]}{\Delta x_i}$
x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	
x_{i+1}	f_{i+1}		

Polinoamele p_i sunt

$$p_i(x) = f_i + m_i(x - x_i) + (x - x_i)^2 \frac{m_i - f[x_i, x_{i+1}]}{\Delta x_i}, \quad 1 \le i \le n-1.$$

(c) Impunem $p_i'(x_{i+1}) = m_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Astfel,

$$m_i + 2\Delta x_i \frac{m_i - f[x_i, x_{i+1}]}{\Delta x_i} = m_{i+1} \iff$$
$$m_i + 2f[x_i, x_{i+1}] - 2m_i = m_{i+1},$$

sau

$$\begin{cases} m_1 = f'(a) \\ m_{i+1} = 2f[x_i, x_{i+1}] - m_i \quad i = 1, 2, \ldots, n-2 \end{cases}$$

■

Problema 2 *(a) Fie $w(t)$ o funcţie pondere pară pe $[a, b]$, $a < b$, $a + b = 0$, adică $w(-t) = w(t)$ pe $[a, b]$. Arătaţi că $(-1)^n \pi_n(-t; w) = \pi_n(t, w)$, adică polinomul ortogonal monic de grad n în raport cu ponderea w este par (impar) dacă n este par (impar).*

(b) Arătaţi că formula gaussiană

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(t_\nu) + R_n(f),$$

pentru o pondere w pară este simetrică, i.e.

$$t_{n+1-\nu} = -t_\nu, \qquad A_{n+1-\nu} = A_\nu,\ \nu = 1, \ldots, n.$$

(c) Obţineţi o formulă gaussiană de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f).$$

Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.

Soluţie.

(a) Fie $\overline{\pi}_n(t)(t) = (-1)^n \pi_n(-t)$. Se observă că

$$\begin{aligned}(\overline{\pi}_n, \overline{\pi}_m) &= \int_{-a}^{a} w(t)\overline{\pi}_n(t)\overline{\pi}_m(t) \mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(t)\pi_n(-t)\pi_m(-t) \mathrm{d}\, t \\ &= (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(-u)\pi_n(u)\pi_m(u) \mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(u)\pi_n(u)\pi_m(u) \mathrm{d}\, t = 0\end{aligned}$$

Deci polinoamele $(\overline{\pi}_n)$ sunt ortogonale pe $[-a, a]$ în raport cu ponderea w şi sunt monice, deci $\pi_n = \overline{\pi}_n$.

(b) Simetria nodurilor rezultă din paritatea/imparitatea polinoamelor ortogonale. Simetria coeficienţilor: deoarece $(-1)^n \pi_n'(-t) = \pi_n'(t)$, avem

$$\begin{aligned}A_{n+1-\nu} &= \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t - t_{n+1-\nu})\, w'(t_{n+1-\nu})} \mathrm{d}\, t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(t)}{(-t - t_{n+1-\nu})\, w'(-t_\nu)} \mathrm{d}\, t \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(-t)}{(-t - t_\nu)\, (-1)^{n+1}\, w'(-t_\nu)} \mathrm{d}\, t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t - t_\nu)\, w'(t_\nu)} \mathrm{d}\, t \\ &= A_\nu.\end{aligned}$$

(c) Din simetria nodurilor şi coeficienţilor rezultă că

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(0) + A_1 f(-x_1) + R(f).$$

Polinomul ortogonal are forma

$$\pi_3(x) = x^3 - \alpha x.$$

El trebuie să fie ortogonal pe $\pi_1(x) = x$, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} x \left(x^3 - \alpha x\right) \mathrm{d}\, x = 48 - 4\alpha = 0,$$

adică $\alpha = 12$. Nodurile sunt $x_1 = -2\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2\sqrt{3}$. Din condiţiile de exactitate avem

$$A_1 + A_2 + A_3 = 2A_1 + A_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 2$$
$$A_1(-2\sqrt{3})^2 + A_2 \cdot 0^2 + A_1(-2\sqrt{3})^2 = 24A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 4$$

adică

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 24A_1 &= 4 \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{5}{3}\right]$. Altfel: rezolvăm sistemul neliniar

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ -A_1 x_1 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1 &= 0 \\ A_1 x_1^2 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1^2 &= 4 \\ A_1 x_1^4 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1^4 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 48 \end{aligned}$$

Sistemul este echivalent cu

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 2A_1 x_1^2 &= 4 \\ 2A_1 x_1^4 &= 48 \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{5}{3}, x_1 = -2\sqrt{3}\right]$, $\left[A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{5}{3}, x_1 = 2\sqrt{3}\right]$
Restul

$$R(f) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \left(x^3 - 12x\right)^2 \mathrm{d}\, x = \frac{6}{5} f^{(6)}(\xi).$$

■

Subiectul 8

Problema 3 *Presupunem că se dă diviziunea* $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$*; fie nodurile*

$$\begin{aligned} \tau_0 &= t_0,\ \tau_{n+1} = t_n \\ \tau_i &= \frac{1}{2}\left(t_i + t_{i-1}\right), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Determinaţi un spline pătratic $Q \in S_2^1(\Delta)$ *care în nodurile date ia nişte valori prescrise:*

$$Q(\tau_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Implementaţi metoda de calcul a spline-ului în MATLAB.

Soluţie. Fie $Q_i = Q|_{[t_i, t_{i+1}]}$ şi $m_i = Q'(t_i)$. Căutăm Q_i sub forma

$$Q_i(x) = y_{i+1} + c_{i,1}(x - \tau_{i+1}) + c_{i,2}(x - \tau_{i+1})^2. \tag{1}$$

Obţinem $c_{i,1}$ şi $c_{i,2}$ din condiţiile $Q_i(\tau_{i+1}) = y_{i+1}$, $Q_i'(t_i) = m_i$ şi $Q_i'(t_{i+1}) = m_{i+1}$. Aceste condiţii ne conduc la

$$Q_i(x) = y_{i+1} + \frac{1}{2}\left(m_i + m_{i+1}\right)\left(x - \tau_{i+1}\right) + \frac{1}{2h_i}(m_{i+1} - m_i)(x - \tau_{i+1})^2, \tag{2}$$

unde $h_i = x_{i+1} - x_i$. Impunând condiţia de continuitate pe nodurile interioare

$$\lim_{x \to t_i^-} Q_{i-1}(x) = \lim_{x \to t_i^+} Q_i(x)$$

se obţine

$$h_{i-1}m_{i-1} + 3(h_{i-1} + h_i)m_i + h_i m_{i+1} = 8(y_{i+1} - y_i), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Trebuie impuse condiţii de interpolare pe capete

$$Q(\tau_0) = y_0, \qquad Q(\tau_{n+1}) = y_{n+1}.$$

Aceste două condiţii ne conduc la ecuaţiile

$$\begin{aligned} 3h_0 m_0 + h_0 m_1 &= 8(y_1 - y_0) \\ h_{n-1}m_{n-1} + 3h_{n-1}m_n &= 8(y_{n+1} - y_n) \end{aligned}$$

Sistemul de ecuaţii pentru vectorul $\mathbf{m} = [m_0, m_1, ..., m_n]^T$ se scrie sub forma

$$\begin{bmatrix} 3h_0 & h_0 & & & & \\ h_0 & 3(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ & h_1 & 3(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-2} & 3(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & h_{n-1} & 3h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix}$$
$$= 8 \begin{bmatrix} y_1 - y_0 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - y_2 \\ \vdots \\ y_n - y_{n-1} \\ y_{n+1} - y_n \end{bmatrix}.$$

Sistemul are $n+1$ ecuaţii, $n+1$ necunoscute, este tridiagonal, simetric şi diagonal dominant. După obţinerea vectorului $\mathbf{m}$, valorile lui $Q(x)$ se pot calcula folosind formula (2). ■

Problema 4 *(a) Fie $w(t)$ o funcţie pondere pară pe $[a,b]$, $a < b$, $a+b=0$, adică $w(-t) = w(t)$ pe $[a,b]$. Arătaţi că $(-1)^n \pi_n(-t; w) = \pi_n(t, w)$, adică polinomul ortogonal monic de grad n în raport cu ponderea w este par (impar) dacă n este par (impar).*

(b) Arătaţi că formula gaussiană

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(t_\nu) + R_n(f),$$

pentru o pondere w pară este simetrică, i.e.

$$t_{n+1-\nu} = -t_\nu, \qquad A_{n+1-\nu} = A_\nu, \ \nu = 1, \ldots, n.$$

(c) Obţineţi o formulă gaussiană de forma

$$\int_{-1}^{1} |x|\, f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f).$$

Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.

Soluţie.

(a) Fie $\overline{\pi}_n(t)(t) = (-1)^n \pi_n(-t)$. Se observă că

$$(\overline{\pi}_n, \overline{\pi}_m) = \int_{-a}^{a} w(t)\overline{\pi}_n(t)\overline{\pi}_m(t) \mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(t)\pi_n(-t)\pi_m(-t) \mathrm{d}\, t$$
$$= (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(-u)\pi_n(u)\pi_m(u) \mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(u)\pi_n(u)\pi_m(u) \mathrm{d}\, t = 0$$

Deci polinoamele $(\overline{\pi}_n)$ sunt ortogonale pe $[-a,a]$ în raport cu ponderea w şi sunt monice, deci $\pi_n = \overline{\pi}_n$.

(b) Simetria nodurilor rezultă din paritatea/imparitatea polinoamelor ortogonale. Simetria coeficienţilor: deoarece $(-1)^n \pi_n'(-t) = \pi_n'(t)$, avem

$$\begin{aligned}
A_{n+1-\nu} &= \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t-t_{n+1-\nu})\,w'(t_{n+1-\nu})}\mathrm{d}\,t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(t)}{(-t-t_{n+1-\nu})\,w'(-t_\nu)}\mathrm{d}\,t \\
&= (-1)^{n+1}\int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(-t)}{(-t-t_\nu)\,(-1)^{n+1}\,w'(-t_\nu)}\mathrm{d}\,t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t-t_\nu)\,w'(t_\nu)}\mathrm{d}\,t \\
&= A_\nu.
\end{aligned}$$

(c) Din simetria nodurilor şi coeficienţilor rezultă că

$$\int_{-1}^{1} |x|\, f(x)\mathrm{d}\,x = A_1 f(x_1) + A_2 f(0) + A_1 f(-x_1) + R(f).$$

Polinomul ortogonal are forma

$$\pi_3(x) = x^3 - \alpha x.$$

El trebuie să fie ortogonal pe $\pi_1(x) = x$, adică

$$\int_{-1}^{1} |x|\, x\left(x^3 - \alpha x\right)\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\alpha = 0,$$

adică $\alpha = \frac{2}{3}$. Nodurile sunt $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Din condiţiile de exactitate avem

$$A_1 + A_2 + A_3 = 2A_1 + A_2 = \int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}\,x = 2$$

$$A_1\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + A_2\cdot 0^2 + A_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}A_1 = \int_{-1}^{1} x^2\,|x|\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}$$

adică

$$\begin{aligned}
2A_1 + A_2 &= 2 \\
\frac{4}{3}A_1 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}\right]$. Altfel: rezolvăm sistemul neliniar

$$\begin{aligned}
2A_1 + A_2 &= 2 \\
-A_1x_1 + A_2\cdot 0 + A_1x_1 &= 0 \\
A_1x_1^2 + A_2\cdot 0 + A_1x_1^2 &= \frac{1}{2} \\
A_1x_1^4 + A_2\cdot 0 + A_1x_1^4 &= \int_{-1}^{1} x^4\,|x|\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Sistemul este echivalent cu

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 2A_1 x_1^2 &= \frac{1}{2} \\ 2A_1 x_1^4 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}, x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}\right], \left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}, x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}\right]$

Restul

$$R(f) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \int_{-1}^{1} |x| \left(x^3 - \frac{2}{3}x\right)^2 \mathrm{d}\, x = \frac{1}{25\,920} f^{(6)}(\xi).$$

■