Culegere de probleme de Analiză numerică

Radu Tiberiu Trîmbiţaş

18 octombrie 2005

Cuprins

Prefaţă

Aici ar veni prefaţa.

Capitolul 1

Formula lui Taylor şi aplicaţii

Fie I un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de n ori în punctul $a \in I$. Polinomul

$$(T_n f)(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

se numeşte *polinomul lui Taylor* de gradul n, ataşat funcţiei f în punctul a.

Cantitatea

$$(R_n f)(x) = f(x) - (T_n f)(x)$$

se numeşte restul de ordinul n al formulei lui Taylor în punctul x.

Formula

$$f(x) = (T_n f)(x) + (R_n f)(x)$$

sau

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (R_n f)(x)$$

se numeşte *formula lui Taylor* de ordinul n pentru funcţia f în vecinătatea punctului a.

Pentru rest avem

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} \omega(x), \text{ cu } \lim_{x \to a} \omega(x) = 0.$$

Dacă $f \in C^{n+1}(I)$, atunci $\exists \theta \in (0,1)$ astfel încât

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}$$

(restul în forma lui Lagrange)

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{n!}$$

(restul în forma lui Cauchy).

Dacă în formula lui Taylor se ia $a = 0$, se obţine formula lui MacLaurin

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + (R_n f)(x),$$

unde

$$(R_n f)(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \qquad \theta \in (0,1).$$

Dăm formulele lui Taylor (MacLaurin) pentru câteva funcţii uzuale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x); \tag{1.1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x); \tag{1.2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x); \tag{1.3}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n+1} + R_{n+1}(x); \tag{1.4}$$

$$(1+x)^k = 1 + \binom{k}{1} x + \binom{k}{2} x^2 + \cdots + \binom{k}{n} x^n + R_n(x), \tag{1.5}$$

unde

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}.$$

Aplicaţii

I. La determinarea punctelor de extrem şi inflexiune ale unor funcţii.

Teorema 1.0.1 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ şi $a \in I$. Dacă f admite derivată de ordinul n pe I, continuă pe I, şi dacă*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ şi } f^{(n)}(a) \neq 0$$

atunci

- *dacă $n = 2k$ şi $f^{(n)}(a) < 0$, atunci a este un punct de maxim relativ;*
- *dacă $n = 2k$ şi $f^{(n)}(a) > 0$, atunci a este un punct de minim relativ;*
- *dacă $n = 2k+1$ şi a este un punct interior, atunci a este un punct de inflexiune.*

II. Calculul aproximatival funcţiilor în unul din următoarele moduri:

(a) Fiind dat un punct $x \in I$, să se determine un număr natural n (cât mai mic posibil) astfel încât

$$|f(x) - (T_n f)(x)| < \varepsilon.$$

(b) Să se determină n astfel încât inegalitatea $|f(x) - (T_n f)(x)| < \varepsilon$ să fie satisfăcută în toate punctele unui interval.

(c) Fiind dat un număr natural n să se determine intervalul în care are loc inegalitatea anterioară.

III. La calculul unor limite.

IV. La deducerea unor metode numerice.

Problema 1.0.2 *Să se scrie formula lui MacLaurin pentru funcţia* $f : [-a, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{a+x}$, $a > 0$.

Soluţie. Scriem $f(x) = \sqrt{a+x} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right)$; se obţine

$$f(x) = \sqrt{a}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{x}{a} + (-1)^1 \frac{1}{2^2}\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + (-1)^2 \frac{1}{2^3}\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{n! 2^n}\left(\frac{x}{a}\right)^n + (R_n f)(x)\right].$$

■

Problema 1.0.3 *Să se scrie formula lui MacLaurin pentru funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x$. *Care este raza de convergenţă?*

Soluţie. Pornim de la

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right).$$

Folosind apoi formula

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x+a}\right) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}},$$

se obţine pentru valoarea derivatei de ordinul $n+1$ în 0

$$(\arctan x)^{(n+1)}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2i}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right]\Bigg|_{x=0} =$$

$$(-1)^{n+1}n!\left[\frac{1}{(-i)^{n+1}}-\frac{1}{(i)^{n+1}}\right]=(-1)^{n+1}n!\sin(n+1)\frac{\pi}{2}.$$

Formula MacLaurin corespunzătoare este

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+(R_{n+1}f)(x).$$

Raza de convergenţă este

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1.$$

■

Problema 1.0.4 *Să se determine punctele de maxim şi de minim ale următoarelor funcţii:*

a) $f:\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^6-x^3+3$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\cos x+x^2$.

Soluţie.

a) $f'(x)=12x^5-3x^2=3x^2(4x^3-1)$ are rădăcinile reale $x_{1,2}=0$ şi $x_{3,4,5}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.
$f''(x)=60x^4-6x$, $f''(0)=0$,
$f'''(x)=240x^3-6=6(40x^3-1)$, $f'''(0)=-6\Rightarrow 0$ punct de inflexiune. Funcţia nu are puncte de extrem pe $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

b) $f'(x)=-2\sin x+x=2(x-\sin x)$, $f'(0)=0$,
$f''(x)=-2\cos x+2=2(1-\cos x)$, $f''(0)=0$
$f'''(x)=2\sin x$, $f'''(0)=0$,
$f^{IV}(x)=2\cos x$, $f^{IV}(0)=2$.
$x=0$ este punct de minim şi $f(0)=2$.

■

Problema 1.0.5 *Să se determine numărul natural n astfel ca pentru $a=0$ şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ T_nf să aproximeze f în $[-1,1]$ cu trei zecimale exacte.*

Soluţie. Impunem condiţia

$$|(R_nf)(x)|=\left|\frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}\right|<10^{-3}.$$

Deoarece $\theta x < 1$, $e^{\theta x} < e < 3$, avem

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\right| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3} \Rightarrow n = 6.$$

În particular, luând $x = 1$, obţinem

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{6!}\right) < \frac{1}{1000}.$$

■

Problema 1.0.6 *Să se aproximeze $\sqrt[3]{999}$ cu 12 zecimale exacte.*

Soluţie. Avem

$$\sqrt[3]{999} = 10\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Folosim formula (1.5) pentru $k = 1/3$, $x = -\frac{1}{1000}$. Într-o serie alternată modulul erorii este mai mic decât modulul primului termen neglijat.

$$|(R_n f)(x)| < \left|\binom{\frac{1}{3}}{n}10^{-3n}\right|.$$

Pentru $n = 4$ avem

$$|(R_n f)(x)| < \frac{10}{243}10^{-12} = \frac{1}{24300000000000}.$$

■

Capitolul 2

Elemente de Analiză funcţională şi teoria aproximării

2.1 Spaţii metrice, spaţii Banach, spaţii Hilbert

Problema 2.1.1 *Spaţiul s al şirurilor numerice în care distanţa dintre $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ şi $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots)$ este dată de*

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

este un spaţiu metric complet.

Soluţie. Pozitivitatea şi simetria se verifică imediat. Inegalitatea triunghiului: funcţia $\varphi(2) = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ este crescătoare pentru $\lambda \geq 0$, de unde

$$\begin{aligned}
\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} &\leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|} \\
d(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - z_k|}{1 + |x_k - z_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|z_k - y_k|}{1 + |z_k - y_k|} \\
&= d(x, z) + d(y, z)
\end{aligned}$$

Completitudinea: Convergenţa în s înseamnă convergenţa pe componente.

$$x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots), \quad x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, \dots)$$

$$x_n \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^{(n)} = x_k^{(0)} \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|}{1+|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|} \le d(x_n, x_0) \to 0 \Rightarrow x_k^{(n)} \to x_k^{(0)}\ \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Din (2.1) rezultă că în

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|}{1+|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|}$$

se poate trece la limită termen cu termen deoarece S este uniform convergentă (este majorată de seria numerică $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$) fiecare termen tinzând la zero rezultă $d(x_n, x_0) \to 0$. Dacă (x_n) este şir Cauchy, atunci fiecare componentă este Cauchy. Fie $x_k^{(0)} = \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}$.

$$x_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}, \ldots), \quad x_n \to x_0.$$

■

Observaţia 2.1.2 *s este un spaţiu vectorial topologic.*

Problema 2.1.3 *Asemănător se arată că $C(K)$ este complet.*

Demonstraţie. Fie (x_n) un şir Cauchy în $C(K)$. $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N_\varepsilon$ a.î. $\forall\, m, n \ge N_\varepsilon$

$$d(x_m, x_n) = \max_{t\in K} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$$

$$\forall\, t \in K \quad |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \tag{2.2}$$

Fixăm $t \in K$ $(x_n(t))$ şir numeric Cauchy $\Rightarrow\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x_0(t)$ $x_0 \in C(K)$? $x_n \to x_0$. Trecând la limită când $m \to \infty$ în (2.2) obţinem

$$|x_0(t) - x_n(t)| \le \varepsilon$$

$x_n \rightrightarrows x_0 \Leftrightarrow x_n \to x_0$ în $C(K) \Rightarrow x_0$ continuă ■

Problema 2.1.4 *Spaţiul $L_c(X, Y) = B(X, Y)$ al aplicaţiilor liniare şi continue definite pe X cu valori în Y, unde X şi Y sunt spaţii liniare normate, este un spaţiu liniar normat. Dacă Y este spaţiu Banach atunci şi $L_c(X, Y)$ este spaţiu Banach.*

Soluţie. Fie $U \in L(X, Y)$.

Propoziţia 2.1.5 *U continuu în $x_0 \in X \;\Leftrightarrow\; U$ continuu pe X. ($\Rightarrow$) Fie (x_n), $x_n \to x \quad (x, x_n \in \Omega)$*

$$x_n = [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0)$$

$$x_0 + x_n - x \to x_0$$

$$Ux_n = U[x_0 + (x_n - x)] + U(x - x_0) \to U(x_0) + U(x - x_0)$$

($\Leftarrow$) evidentă.

Definiţia 2.1.6 *$U \in L(X, Y)$, X, Y spaţii liniare normate. U mărginit dacă există $C \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\forall\, x \in X \quad \|Ux\| \leq C\|x\| \tag{2.3}$$

Teorema 2.1.7 *U continuu $\Leftrightarrow$ U mărginit.*

Demonstraţie. ($\Rightarrow$) $\quad U$ continuu, fie $C_0 = \sup\limits_{\substack{\|x\| \\ x \in X}} \|Ux\| < \infty$ Într-adevăr dacă $C_0 = \infty$, atunci există (x_n) $(x_n \in X,\ \|x_n\| = 1)$ astfel încât $\lambda_n = \|Ux_n\| \to \infty$. Fie (x'_n) $\;x'_n = \frac{x_n}{2n}$ $\;x'_n \to 0 \overset{(cont)}{\Longrightarrow} Ux'_n \to 0$, dar $\|Ux'_n\| = 1$ contradicţie. Fie $x \neq 0$; $x \in X$ şi $x' = \frac{x}{\|x\|} \;\Rightarrow\; \|x'\| = 1$ $\|Ux'\| \leq C_0$; dar $Ux' = \frac{1}{\|x\|}Ux$ $\|Ux\| \leq C_0\|x\|$, deci (2.3) este adevărată pentru $C = C_0$. ($\Leftarrow$) (2.3) $\Rightarrow$ U continuă în 0 $\Rightarrow$ U continuu pe X. $\blacksquare$

În (2.3) luăm $C = C_0 = \|U\|$.

$$\|Ux\| \leq \|U\|\|x\| \tag{2.4}$$

Dacă am stabilit o inegalitate de tipul (2.3) pentru un anumit C, atunci $\|U\| \leq C$.

Să arătăm că $L_c(X, U) \leq L(X, Y)$ şi că este normat. Fie $U_1, U_2 \in L_c(X, Y)$, $U = U_1 + U_2$. Avem $\|Ux\| \leq \|U_1x\| + \|U_2x\| \leq (\|U_1\| + \|U_2\|)$ şi $\|\lambda u\| = |\lambda|\|U\|$.

$\|U\| = 0 \;\Rightarrow\; \|Ux\| = 0\, \forall\, x \in X \;\Rightarrow\; U = 0$

Completitudinea (U_n) Cauchy $\Rightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_\varepsilon :\; \forall\, m, n \in N_\varepsilon$

$$\|U_m - U_n\| < \varepsilon \tag{2.5}$$

$$\forall\, x \in X \quad \|U_m x - U_n x\| < \varepsilon\|x\| \;\Rightarrow\; (U_n x)\; Cauchy \tag{2.6}$$

$\overset{complet.lui\ Y}{\Longrightarrow}$ $\;\exists\, U_x = \lim\limits_{n \to \infty} U_n x \quad (x \in X)$; (2.5) $\Rightarrow\; \|Ux - U_n x\| = \lim\limits_{m \to \infty} \|U_m x - U_n x\| l \leq \varepsilon\|x\| \;\Rightarrow\; V = U - U_n \in B(X, Y) \;\Rightarrow\; U = V + U_n \in B(X, Y)$ (2.6) $\Rightarrow\; \|U - U_n\| \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; U_n \to U$ $\blacksquare$

Corolar 2.1.8 *Dacă* X, Y *s.l.n.* $\Rightarrow$ $L_c(X, Y)$ *s.l.n.;* X *s.l.n.,* Y *Banach* $\Rightarrow$ $L_c(X, Y)$ *Banach*

Observaţia 2.1.9 ***Interpretarea geometrică*** *a lui* $\|U\|$ *- este marginea superioară a coeficientului de dilatare al unui vector prin operatorul* U.

Corolar 2.1.10 X^* *este Banach.*

$$X^* = L_c(X, \mathbb{K})$$

$$f \in X^* \quad \|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} f(x)$$

Observaţia 2.1.11 *Dacă* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *atunci* $(\lambda f)(x) = \overline{\lambda} f(x)$.

Problema 2.1.12 *Fie* $C[a, b]$ *şi* $f : C[a, b] \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k)$$

$t_1, \ldots, t_n \in [a, b]$, $c_k \in \mathbb{R}$. *Să se arate că* f *este liniară şi* $\|f\| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|$.

Soluţie. Liniaritatea este imediată.

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k) \right| \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \sum_{k=1}^{n} |c_k| = \sum_{k=1}^{n} |c_k| \|x\|$$

f continuă şi $\|f\| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k|$

Să construim acum pe $[a, b]$ o funcţie $\widetilde{x}$, liniară pe porţiuni, care ia în t_1, t_2, $\ldots$, t_n valorile

$$\widetilde{x}(t_k) = sign\ c_k, \quad k = \overline{1, n},$$

şi care să fie liniară pe intervalul $[t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ şi constantă în $[a, t_1]$ şi $[t_n, b]$ (vezi figura 2.1)

Evident $|\widetilde{x}(t)| \leq 1$, adică $\|\widetilde{x}\| \leq 1$ şi

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \geq f(\widetilde{x}) = \sum_{k=1}^{n} c_k \widetilde{x}(t_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k n \xi_n c_k = \sum_{k=1}^{n} |c_k|$$

■

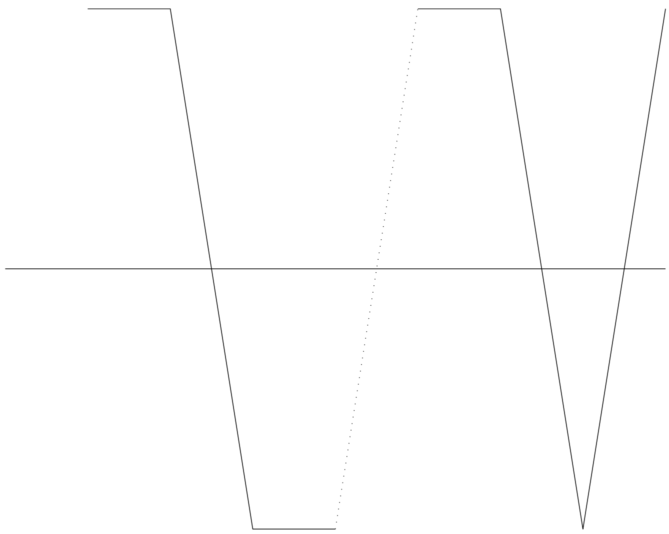


Figura 2.1: Funcţia $\widetilde{x}$ din problema 2.1.12

Problema 2.1.13 *Se consideră următoarele trei norme pe* $\mathbb{R}^2$

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2}, \quad \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

Să se reprezinte grafic mulţimile $B_1(0)$ *în raport cu toate cele 3 norme. Să se determine geometric cele mai mici constante* a, b, c, d *astfel încât*

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1,$$

$$c\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq d\|d\|_\infty.$$

Soluţie. Avem inegalităţile:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \leq 1$$

$$1 \leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} \leq \sqrt{2}$$

Graficele apar în figura 2.2.

■

Problema 2.1.14 *Fie* $C^1[0,1]$ *şi normele*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt, \quad \|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

$$\|f\|' = |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

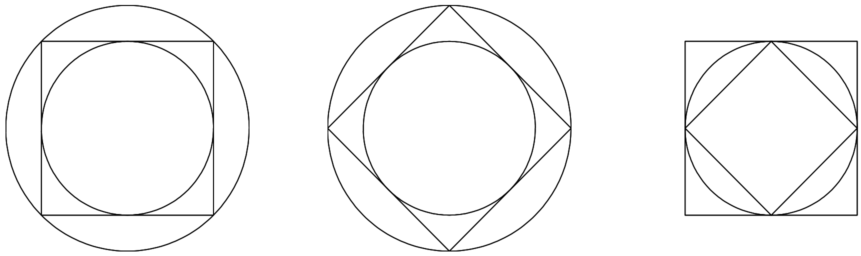


Figura 2.2: Normele $||.||_2, ||.||_1$ şi $||.||_\infty$

(a) Să se verifice că $\|\cdot\|'$ este normă pe $C^1[0,1]$.

(b) Orice şir convergent în norma $\|\cdot\|$ este convergent şi în norma $\|\cdot\|_1$; orice şir convergent în norma $\|\cdot\|'$ este convergent şi în norma $\|\cdot\|$.

(c) Să se studieze convergenţa şirurilor $f_n(t) = t^n$ şi $g_n(t) = n^{-1}\sin nt$. Ce se poate afirma despre cele trei norme?

Soluţie. a) $\|f\|' \geq 0 \quad \|0\|' = 0 \; \|f\|' = 0 \;\Rightarrow\; f(0) = 0, \quad f'(t) = 0 \;\Rightarrow$ $|f(t)| = |f(t) - f(0)| = |tf'(\theta)| = 0 \;\Rightarrow\; f = 0$

$$|\lambda f'\| = |\lambda f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |\lambda f'(t)| = |\lambda|\|f\|'$$

$$\|f+g\|' = |(f+g)(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |(f+g)'(t)| \leq$$

$$\leq |f(0)| + |g(0)| + \sup_{t\in[0,1]} (|f'(t)| + |g'(t)|) \leq \|f\|' + \|g\|'$$

b) $\|f_n - f\| \to 0 \;\Rightarrow\; \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \to 0 \;\Rightarrow\; \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt \to 0$
$f_n \to f$ în $\|\cdot\|' \;\Rightarrow\; \|f_n - f\|' \to 0 \;\Rightarrow\; |f_n(0) - f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f_n'(t) - f'(t)| \to 0 \;\Rightarrow\; \|f_n - f\| \to 0$.

c) $\left.\begin{array}{l} \|f_n\|_1 = \displaystyle\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \\ \|f_n\| = \displaystyle\sup_{t\in[0,1]} t^n = 1 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; f_n \to 0$ în $\|\cdot\|_1$ $f_n \to f$ în $\|\cdot\| \;\Rightarrow$
$f_n \to f$ în $\|\cdot\|_1$, adică $f = 0$, $\|f\| = 1$ $f_n \nrightarrow$ în $\|\cdot\|_1 \;\Rightarrow$ nu converge în $\|\cdot\|$

$$\|g_n\| = \sup_{t\in[0,1]} |n^{-1}\sin nt| \leq n^{-1}\|g_n\|' =$$

$$= |n^{-1}\sin 0| + \sup_{t\in[0,1]} |\cos nt| = 1$$

$g_n \to 0$ în $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|$ dar nu are limită în $\|\cdot\|'$. $\|f\|_1 \leq \|f\| \leq \|f\|'$, dar ele nu sunt echivalente. ■

Problema 2.1.15 *Fie $\mathbb{P}$ spaţiul liniar al polinoamelor cu coeficienţi reali.*

a) $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, atunci $p(P) = |a_0| + \cdots + |a_n|$ este o normă pe $\mathbb{P}$ şi $p(P_1P_2) \leq p(P_1)p(P_2)$.

b) Aplicaţia $\varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, $\varphi(P) = P'$ este o aplicaţie liniară care nu este continuă faţă de norma P.

c) Fie $p_1(P) = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)|$. Să se arate că p_1 este o normă dar p şi p_1 nu sunt echivalente.

Soluţie. a)

$$(PQ)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + \cdots + a_nb_mX^{n+m}$$

$$p(PQ) = \sum_{k=0}^{n+m} \left| \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-1} \right| \leq \sum_{i,j=0}^{n,m} |a_ib_j| = p(P)p(Q)$$

b) $P_n(x) = n^{-1}X^n \quad p(P_n) = n^{-1} \quad P_n \to 0 \quad$ (în p) $p(P_n') = 1 \quad P_n' \nrightarrow 0$

c) Se arată uşor că $p_1(P) \leq p(P)$ Presupunem că există $C \geq 0$ astfel încât $p(P) \leq Cp_1(P)$, $\forall\, p \in P$. Fie $P_n(x) = (n+1)^{-1}(1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^nx^{2n})$ $p(P_n) = 1 \quad P_n(x) = (n+1)^{-1}\dfrac{1 + (-1)^nx^{2n+2}}{1 + x^2}$ $p_1(P_n) = (n+1)^{-1} \;\Rightarrow\; C \geq n+1$

$$P(p) = \frac{2n+1}{n+1}$$

$(P, \|\cdot\|)$ este o algebră normată. ■

2.2 Spaţii Hilbert

2.2.1 Funcţionale liniare în spaţii Hilbert

Problema 2.2.1 *Expresia generală a unei funcţionale liniare într-un spaţiu Hilbert.*

Soluţie. $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ spaţiu Hilbert. Pentru y fixat $\langle x, y\rangle$ este o funcţională liniară, continuă. Fie

$$f(x) = \langle x, y\rangle \tag{2.7}$$

$$|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \;\Rightarrow\; \|f\| \leq \|y\| \tag{2.8}$$

■

Să arătăm că funcţionalele de forma (2.7) sunt singurele din H şi că în (2.8) are loc egalitatea.

Teorema 2.2.2 *(Riesz) Pentru orice funcţională liniară şi continuă, definită pe spaţiul Hilbert H, $\exists!\ y \in H$ astfel încât $\forall\ x \in H$, $f(x) = \langle x, y\rangle$ şi*

$$\|f\| = \|y\|. \tag{2.9}$$

Demonstraţie. Fie $H_0 = \{x \in H :\ f(x) = 0\} = Kerf$, f liniară şi continuă $\Rightarrow\ H_0$ închis Dacă $H_0 = H\ \Rightarrow\ y = 0$. Presupunem că $H_0 \neq H$. Fie $y_0 \notin H_0$. Scriem y_0 sub forma $y_0 = y' + y''\quad (y' \in H_0,\ y'' \perp H_0)$ Evident $y'' \neq 0$ şi $f(y'') \neq 0$. Putem lua $f(y'') = 1$.

Observaţia 2.2.3 $f(y_0) = \underbrace{f(y')}_{0} + f(y'') = f(y'')$

Putem lua $f(y'') = 1$. Să luăm $x \in H$ şi punem $f(x) = \alpha$. Elementul $x' = x - \alpha y'' \in H_0$ căci

$$f(x') = f(x) - \alpha f(y'') = \alpha - \alpha = 0$$

Deci

$$\langle x, y''\rangle = \langle x' + \alpha y'', y''\rangle = \alpha\langle y'', y''\rangle + \langle x', y''\rangle$$

astfel încât

$$f(x) = \alpha = \left\langle x, \frac{y''}{\langle y'', y''\rangle}\right\rangle$$

şi deci putem lua $y = \dfrac{y''}{\langle y'', y''\rangle}$. Unicitatea $\langle x, y\rangle = \langle x, y_1\rangle\ \Rightarrow\ \langle x, y - y_1\rangle = 0$ deci $y - y_1 \perp H$, posibil doar dacă $y = y_1$. Pe de altă parte

$$\|f\| \geq f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{\langle y, y\rangle}{\|y\|} = \|y\|.$$

■

Cazuri particulare.

$$\begin{array}{ll} L^2[a,b] & f(x) = \langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y}(t)dt \\ l^2 & f(x) = \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k \\ \mathbb{R}^n & f(x) = \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k \end{array}$$

Problema 2.2.4 *Să se arate că dualul unui spaţiu Hilbert este tot un spaţiu Hilbert.*

Soluţie. X^* spaţiu Banach. Să arătăm că norma este indusă de un produs scalar. $f, g \in X^* \Rightarrow \exists\, x, y \in X$ astfel încât $f(u) = \langle u, x\rangle$, $g(u) = \langle u, y\rangle$, $\forall\, u \in X$ Fie $\langle f, g\rangle = \langle y, x\rangle$. Să arătăm că aplicaţia astfel definită verifică axiomele produsului scalar.

$$\langle f, f\rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2 \geq 0$$

$$\langle f, g\rangle \stackrel{?}{=} \langle \overline{g, f}\rangle$$

Fie $f'(u) = \langle u, x'\rangle$

$$(f + f')(u) = f(u) + f'(u) = \langle u, x\rangle + \langle u, x'\rangle = \langle u, x + x'\rangle$$

$$\langle f + f', g\rangle = \langle y, x + x'\rangle = \langle y, x\rangle + \langle y, x'\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f', g\rangle$$

$$(\lambda f)(u) = \lambda f(u) = \langle \lambda u, x\rangle = \langle u, \overline{\lambda} x\rangle$$

$$\langle \lambda f, g\rangle = \langle y, \overline{\lambda} x\rangle = \lambda\langle y, x\rangle = \lambda\langle f, g\rangle$$

■

2.3 Serii Fourier

Fie un sistem ortonormal $\{x_k\}$ într-un spaţiu Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ şi $x \in H$. Numerele

$$a_k = \langle x, x_k\rangle, \quad k \in \mathbb{N}$$

se numesc **coeficienţi Fourier** ai elementului x în raport cu sistemul considerat, iar seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

seria Fourier a elementului x.

Considerăm subspaţiul $H_n = \mathcal{L}(\{x_1, \ldots, x_n\})$.

Avem

Teorema 2.3.1 *Suma parţială $s_n = \sum_{k=1}^n a_k x_k$ a seriei Fourier a unui element x este proiecţia acelui element pe subspaţiul H_n.*

Demonstraţie. $x = s_n + (x - s_n)$ şi pentru $s_n \in H_n$ este suficient să arătăm că $x - s_n \perp H_n$. $x - s_n \perp x_k$ $(x \perp E \Rightarrow x \perp \overline{\mathcal{L}}(E)) \Rightarrow x - s_n \perp H_n$. ■

Corolar 2.3.2 *Pentru orice element*

$$z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in H_n$$

avem

$$\|x - s_n\| = d(x, H_n) \leq \|x - z\|$$

Pe de altă parte

$$\|x\|^2 = \|s_n\|^2 + \|x - s_n\|^2 \geq \|s_n\|^2 \tag{2.10}$$

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \tag{2.11}$$

Corolar 2.3.3 (Inegalitatea lui Bessel)

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leq \|x\|^2.$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \|x\|^2 \tag{2.12}$$

Dacă în (2.12) are loc egalitate pentru $x \in X$ spunem că este verificată **egalitatea lui Parseval** sau **ecuaţia de închidere**.

Teorema 2.3.4 *Seria Fourier a oricărui element $x \in H$ converge întotdeauna şi suma sa este proiecţia lui H pe $H_0 = \overline{\mathcal{L}}(\{x_k\})$. Pentru ca suma seriei Fourier să fie egală cu un element dat x, este necesar şi suficient ca ecuaţia de închidere să fie verificată pentru acel element.*

Demonstraţie. (2.12) $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$ convergentă. Pentru sumele parţiale se obţine

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;\Rightarrow\; \text{convergenţa seriei Fourier}$$

Fie $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$. Deoarece $s \in H_0$ şi $x = s + x - s$ putem arăta ca în demonstraţia teoremei 2.3.1 că $x - s \perp H_0$. Ţinând cont de (2.11), (2.10) se rescrie

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \;\Rightarrow\; \text{concluzia.}$$

■

Dacă $\{x_k\}$ este complet, $H_0 = H$ şi $\forall\, x \in H$ proiecţia lui x pe H_0 coincide cu X.

Corolar 2.3.5 *Dacă $\{x_k\}$ este complet $\forall\, x \in H$ seria sa Fourier converge la x.*

Spunem că sistemul ortonormal $\{x_k\}$ este închis dacă ecuaţia de închidere este verificată pentru orice $x \in H$.

Corolar 2.3.6 $\{x_k\}$ *închis* $\Leftrightarrow$ $\{x_k\}$ *complet.*

Demonstraţie. Teorema 2 $\Rightarrow$ ecuaţia de închidere are loc $\forall\ x \in H_0$, deci închiderea este echivalentă cu $H_0 = H$, adică completitudinea. ■

Exemplul 2.3.7 *Să se determine seria Fourier trigonometrică pentru funcţia:*

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

Soluţie. Funcţiile de bază sunt

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \dots, x_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx,\ y_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \dots,$$

iar coeficienţii

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{2\sqrt{\pi}}, \\
a_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\
b_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} x \cos kx = \frac{2}{\sqrt{\pi}k}[(-1)^k - 1], \\
b_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin kx dx = 0.
\end{aligned}$$

$$s_n(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos kx.$$

■

Observaţia 2.3.8 *Seria Fourier trigonometrică pe* $[-l, l]$ *are expresia:*

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum \left(a_k \cos \frac{n\pi x}{l} + b_k \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

iar coeficienţii sunt daţi de formulele

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Problema 2.3.9 *Fie* $f(x) = x^2$*. Se cere seria sa Fourier pe* $[-\pi, \pi]$.

Soluţie.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{x^2 n_k nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x n_k nx dx =$$

$$= -\frac{2}{n}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right] =$$

$$= -\frac{2}{n}\left[-\pi\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n}\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi = \frac{2\pi}{n^2}(-1)^n$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$x^2 = \frac{\pi^3}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

Pentru $x = \pi$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. ■

Problema 2.3.10 *Dezvoltaţi* $f(x) = x$ *pe* $[-\pi, \pi]$ *şi* $[0, 2\pi]$.

Soluţie.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx = \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\Rightarrow\ x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$$

■

2.4 Polinoame ortogonale

2.4.1 Calculul polinoamelor ortogonale

Se poate da o metodă generală de construire a unei familii de polinoame ortogonale în raport cu orice funcţie pondere pe un interval finit $[a, b]$ sau pe o mulţime finită de puncte (în cazul unei mulţimi finite, familia va fi de asemenea finită). Se poate aplica procedeul Gramm-Schmidt mulţimii $\{1, x, x^2, \dots\}$, dar procedeul nu face uz de proprietăţile algebrice ale polinoamelor şi este sensibil la erorile de rotunjire.

Fie $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}\}$ o familie ortonormală de polinoame, astfel încât gradul lui Q_i să fie i şi fie $\overline{Q}_n \perp Q_i$, $i = \overline{0, n-1}$.

Să considerăm polinomul

$$\overline{Q}_n(x) - \alpha x Q_{n-1}(x)$$

Pentru o alegere convenabilă a lui $\alpha \neq 0$, acest polinom are gradul $\leq n-1$, deci

$$\overline{Q}_n - \alpha x Q_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i Q_i$$

Dacă $\langle \overline{Q}_n, Q_i \rangle > 0$ pentru orice $i = \overline{0, n-1}$ trebuie să avem

$$0 = \langle \overline{Q}_n, Q_{n-1} \rangle = \alpha \langle x Q_{n-1}, Q_{n-1} \rangle + \alpha_{n-1} \tag{2.13}$$

$$0 = \langle \overline{Q}_n, Q_{n-2} \rangle = \alpha \langle x Q_{n-1}, Q_{n-2} \rangle + \alpha_{n-2}$$

Putem alege $\alpha = 1$, deoarece înmulţirea cu o constantă nu afectează ortogonalitatea. Deci α_{n-1} şi α_{n-2} se pot obţine din ecuaţiile de mai sus. Aplicând raţionamente similare lui Q_i pentru $i < n-2$ obţinem $\alpha_i = 0$ pentru $i < n-2$. Aceasta sugerează următoarea formulă de recurenţă pentru calculul lui $\overline{Q}_n$:

$$\overline{Q}_n(x) = (x + a_n) Q_{n-1}(x) + b_n Q_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \tag{2.14}$$

$$Q_n = \frac{\overline{Q}_n}{\|Q_n\|}$$

şi

$$a_n = -\langle x Q_{n-1}, Q_{n-1} \rangle \tag{2.15}$$

$$b_n = -\langle x Q_{n-1}, Q_{n-2} \rangle \tag{2.16}$$

Se verifică că pentru a_n şi b_n astfel determinate avem $\langle \overline{Q}_n, Q_i \rangle = 0$, $i = \overline{0, n-2}$ şi că $\overline{Q}_n$ cu a_n şi b_n determinate de (2.15) şi (2.16) este unic determinat.

Deci (2.14) ne dă o formulă de recurenţă pentru calculul polinoamelor ortogonale (ortonormale) în $L_w^2[a, b]$. Vom începe punând $Q_0 = b_0$, unde b_0 este o constantă astfe încât $\|Q_0\| = 1$ şi luăm $\overline{Q}_1 = (x + a_1) Q_0$. Din

$$\langle \overline{Q}_1, Q_0 \rangle = \langle x Q_0, Q_0 \rangle + a_1 = 0$$

se determină

$$a_1 = -\langle x Q_0, Q_0 \rangle$$

şi se continuă.

Exemplul 2.4.1 *Pentru polinoamele Cebîşev I aplicând (2.14)-(2.16) se obţine*

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

2.4.2 Exemple de polinoame ortogonale

I. Polinoamele lui Cebîşev de speţa I

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad t \in [-1, 1]$$

Ele sunt ortogonale pe $[-1, 1]$ în raport cu ponderea $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

Are loc relaţia de recurenţă

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$$

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t$$

II. Polinoamele lui Hermite

$$h_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$a = -\infty, \quad b = \infty, \quad w(t) = e^{-t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} h_m(t) h_n(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n \end{cases}$$

$$h_{n+1}(t) = 2th_n(t) - 2nh_{n-1}(t)$$

$$h_0(t) = 1, \quad h_1(t) = 2t$$

III. Polinoamele lui Laguerre

$$g_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$$

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad w(t) = e^{-t}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t} g_m(t) g_n(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

$$g_{n+1}(t) = \frac{2n+1-t}{n+1} g_n(t) - n g_{n-1}(t)$$

$$g_0(t) = 1, \quad g_1(t) = 1 - t$$

IV. Polinoamele lui Hermite

$$w(t) = e^{-t^2} \quad \text{pe} \quad \mathbb{R} \quad (a = -\infty, \ b = \infty)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} h_n(t) h_n(t) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n \end{cases}$$

$$h_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$h_{n+1}(t) = 2t h_n(t) - 2n h_{n-1}(t)$$

$$h_0(t) = 1, \quad h_1(t) = 2t$$

Proprietăţi ale polinoamelor ortogonale

P1. Rădăcini reale, distincte, situate în (a, b).

P2. Relaţia de recurenţă dată de ecuaţiile (2.14), (2.15) şi (2.16).

P3. $\widetilde{p}_n \perp \mathbb{P}_{n-1}, \quad \|\widetilde{p}_n\| = \min\limits_{p \in \mathbb{P}_n} \|p\|$

P4. Caracterizarea cu ajutorul ecuaţiilor diferenţiale.

Fie $P_n = \{p_0, \ldots, p_n\}$ o mulţime de polinoame ortogonale pe intervalul $[a, b]$ în raport cu ponderea w.

Avem

$$\int_a^b w(t) p_i(t) t^k dt = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 0, \ldots, i-1. \tag{2.17}$$

Se consideră funcţia U_i astfel încât

$$w(t) p_i(t) = U_i^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n}$$

Din (2.17) se obţine

$$\int_a^b U_i^{(i)}(t) t^k dt = 0, \quad k = 0, \ldots, i-1$$

Se integrează de $k+1$ ori prin părţi

$$[U_i^{(i-1)}(t) t^k - k U_i^{(i-2)}(t) t^{k-1} + \cdots + (-1)^k k! U_i^{(i-k-1)}(t)]_c^b = 0$$

pentru $k = 0, 1, \ldots, i-1$ condiţii satisfăcute dacă

$$\begin{cases} U_i^{(i-1)}(a) = U_i^{(i-2)}(a) = \cdots = U_i(a) = 0 \\ U_i^{(i-1)}(b) = U_i^{(i-2)}(b) = \cdots = U_i(b) = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

Întrucât $\frac{1}{w} U_i^{(i)} = p_i \in \mathbb{P}_i$, funcţia U_i poate fi obţinută ca soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}} \left[\frac{1}{w(t)} U_i^{(i)}(t) \right] = 0$$

de ordinul $2i + 1$ cu condiţiile la limită (2.18).

Deci U_i se determină până la o constantă multiplicativă:

$$p_i(t) = \frac{A_i}{w(t)} U_i^{(i)}(t)$$

Constanta A_i se poate determina impunând condiţii suplimentare, de exemplu ortonormalitate

$$\int_a^b w(t) p_i^2(t) dt = 1$$

$$p_n(x) = (x - 2n) p_{n-1}(x) - \mu_n p_{n-2}(x)$$

$$\mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|^2}{\|p_{n-2}\|^2}, \quad \lambda_n = \frac{\langle x p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}{\|p_{n-1}\|^2}$$

Problema 2.4.2 *Polinoamele Cebîşev de speţa I*

$$T_n(x) = \cos n \arccos x$$

Stabiliţi proprietăţile următoare:

$$T_{n+1}(x) - 2x T_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \tag{2.19}$$

$$T_n(T_n(x)) = T_{nm}(x) = T_m(T_n(x)) \tag{2.20}$$

$$T_n(2x^2 - 1) = 2 T_n(x)^2 - 1 \tag{2.21}$$

$$T_n(x) T_m(x) = \frac{1}{2}(T_{n+m}(x) + T_{m-n}(x)), \quad \textit{dacă} \quad m \geq n \tag{2.22}$$

$$\int T_n(x) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right), \quad \textit{dacă} \quad n > 1 \tag{2.23}$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(Q_n(x) - Q_{n-2}(x)) \quad \textit{dacă} \quad Q_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}; \tag{2.24}$$

cu $x = \cos\theta$ *(polinom Cebîşev de speţa a II-a)*

$$2^{n-1} x^n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n}{k} T_{n-2k}(x), \quad n \geq 1 \tag{2.25}$$

$$\frac{d}{dx} T_n(x) = n U_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \tag{2.26}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^n T_n(x) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}, \quad \text{pentru} \quad |t| < 1 \quad \textit{(funcţia generatoare)} \tag{2.27}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n U_n(x) = \frac{1}{1 - 2xt + t^2}, \quad \text{pentru} \quad |t| < 1, \quad |x| < 1 \tag{2.28}$$

Soluţie. (2.19)-(2.24) şi (2.26) cu ajutorul formulelor trigonometrice uzuale. (2.25) se obţine dezvoltând $x^n = (\cos\theta)^n = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$ şi făcând să apară $T_{n-2k}(x)$. Funcţiile generatoare se obţin ca pentru polinoamele Legendre (vezi problema 2.4.7). ■

Problema 2.4.3

1. *. Zerourile polinoamelor Cebîşev de speţa I sunt*

$$\xi_j := \xi_j^{(n)} = \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right), \quad j = \overline{1,n}.$$

În [-1,1] există $n+1$ extreme

$$\eta_k := \eta_k^{(n)} := \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = \overline{0,n}$$

unde T_n are un minim sau un maxim local. În aceste puncte

$$T_n(\eta_k) = (-1)^k, \quad k = 1,n$$

şi $\|T_n\|_\infty = 1$ pe $[-1,1]$. Zerourile şi extremele polinoamelor Cebîşev sunt foarte importante ca noduri de interpolare. În raport cu produsul scalar

$$(f,g)_T := \sum_{k=1}^{n+1} f(\xi_k)g(\xi_k)$$

unde $\{\xi_1,\ldots,\xi_{n+1}\}$ este mulţimea zerourilor lui T_{n+1} are loc următoarea proprietate

$$(T_i,T_j)_T = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{n+1}{2}, & i = j \neq 0 \\ n+1, & i = j = 0 \end{cases}.$$

2. *În raport cu produsul scalar*

$$\begin{aligned}(f,g)_U &:= \frac{1}{2}f(\eta_0)g(\eta_0) + f(\eta_1)g(\eta_1) + \cdots + f(\eta_{n-1})g(\eta_{n-1}) + \frac{1}{2}f(\eta_n)g(\eta_n)\\ &= \sum_{k=0}^{n\prime\prime} f(\eta_k)g(\eta_k),\end{aligned}$$

unde $\{\eta_0,\ldots,\eta_n\}$ este mulţimea extremelor lui T_n, are loc o propritate similară

$$(T_i,T_j)_U = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{n}{2}, & i = j \neq 0 \\ n, & i = j = 0 \end{cases}.$$

Soluţie. Avem $\arccos \xi_k = \frac{2k-1}{2n+2}\pi$, $k = \overline{1, n+1}$. Să calculăm acum produsul scalar:

$$\begin{aligned}
(T_i, T_j)_T &= (\cos i \arccos t, \cos j \arccos t)_T = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \cos(i \arccos \xi_k) \cos(j \arccos \xi_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \cos\left(i \frac{2k-1}{2(n+1)}\pi\right) \cos\left(j \frac{2k-1}{2(n+1)}\pi\right) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \left[\cos(i+j)\frac{2k-1}{2(n+1)}\pi + \cos(i-j)\frac{2k-1}{2(n+1)}\pi\right] = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \cos(2k-1)\frac{i+j}{2(n+1)}\pi + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \cos(2k-1)\frac{i-j}{2(n+1)}\pi.
\end{aligned}$$

Notăm $\alpha = \frac{i+j}{2(n+1)}\pi$, $\beta = \frac{i-j}{2(n+1)}\pi$ şi

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \cos(2k-1)\alpha, \\
S_2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \cos(2k-1)\beta.
\end{aligned}$$

Deoarece

$$\begin{aligned}
2 \sin \alpha S_1 &= \sin 2(n+1)\alpha, \\
2 \sin \beta S_2 &= \sin 2(n+1)\beta,
\end{aligned}$$

se obţine $S_1 = 0$ şi $S_2 = 0$. Cealaltă proprietate se demonstrează analog. ∎

Problema 2.4.4 *Polinoame Cebîşev de speţa a II-a.*

Definiţia 2.4.5 $Q_n \in \mathbb{P}_n$ *dat de*

$$Q_n(t) = \frac{\sin[(n+1)\arccos t]}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in [-1, 1]$$

se numeşte polinomul lui Cebîşev de speţa a II-a.

$$Q_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(t), \quad t \in [-1, 1]$$

$$\widetilde{Q}_n = \frac{1}{2^n} Q_n, \quad \widetilde{Q}_n \in \widetilde{\mathbb{P}}_n$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} Q_m(t) Q_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{pentru } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{pentru } m = n \end{cases}$$

Polinoamele Q_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$ sunt ortogonale pe $[-1, 1]$ în raport cu ponderea $w(t) = \sqrt{1-t^2}$.

Are loc relaţia de recurenţă

$$Q_{n+1}(t) = 2tQ_n(t) - Q_{n-1}(t)$$

Ea rezultă imediat din relaţia $\sin(n+2)\theta + \sin n\theta = 2\cos\theta \sin(n+1)\theta$. Dăm primele 4 polinoame ortogonale:

$$\begin{aligned} Q_0(t) &= 1 \\ Q_1(t) &= 2t \\ Q_2(t) &= 4t^2 - 1 \\ Q_3(t) &= 8t^3 - 4t \\ Q_4(t) &= 16t^4 - 12t^2 + 1 \end{aligned}$$

Pentru alte intervale se face schimbarea de variabilă $\widetilde{x} = \frac{1}{2}[(b-a)x + a + b]$.

Polinoame Cebîşev şi economizarea seriilor de puteri

Polinoamele Cebîşev de speţa I pot fi utilizate pentru a reduce gradul unui polinom de aproximare cu o pierdere minimă de precizie. Această tehnică este utilă când se utilizează pentru aproximare polinomul Taylor. Deşi polinoamele Taylor sunt foarte precise în vecinătatea punctului în care se face dezvoltarea, dacă ne îndepărtăm de acel punct precizia se deteriorează rapid. Din acest motiv, pentru a atinge precizia dorită este nevoie de polinoame Taylor de grad mai mare. Deoarece polinoamele Cebîşev de speţa I au cea mai mică normă Cebîşev pe un interval, ele pot fi utilizate pentru a reduce gradul polinomului Taylor fără a depăşi gradul de toleranţă admis.

Exemplul 2.4.6 *$f(x) = e^x$ poate fi aproximată pe $[-1, 1]$ prin polinomul Taylor de grad 4 în jurul lui 0.*

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$R_4(x) = \frac{|f^{(\xi)}(\xi(x))||x^5|}{5!} \leq \frac{e}{120} \approx 0.023, \quad x \in [-1, 1]$$

Să presupunem că eroarea este $\varepsilon = 0.05$ şi că dorim să înlocuim termenul din polinomul Taylor care îl conţine pe x^4 cu un polinom Cebîşev de grad ≤ 4.

Să deducem reprezentarea lui x^k cu ajutorul polinoamelor Cebîşev.

$$T_{n+1} = 2tT_n - T_{n-1}$$

$$T_0(t) = 1$$

$$T_1(t) = t$$

$$T_2(t) = 2t^2 - 1$$

$$T_3(t) = 4t^3 - 3t^2$$

$$T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$$

k	T_k	x^k
0	1	T_0
1	x	T_1
2	$2x^2 - 1$	$\frac{1}{2}T_0 + \frac{1}{2}T_2$
3	$4x^3 - 3x$	$\frac{3}{4}T_1 + \frac{1}{4}T_3$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$	$\frac{3}{8}T_0 + \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{8}T_4$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$	$\frac{5}{8}T_1 + \frac{5}{16}T_3 + \frac{1}{16}T_5$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	$\frac{5}{16}T_0 + \frac{15}{32}T_2 + \frac{3}{16}T_4 + \frac{1}{32}T_6$

Deci

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}\left[\frac{3}{8}T_0(x) + \frac{1}{2}T_2(x) + \frac{1}{8}T_4(x)\right] \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{64}T_0(x) + \frac{1}{48}T_2(x) + \frac{1}{192}T_4(x) \\
&= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{192}T_4(x)
\end{aligned}$$

$$\max_{x\in[-1,1]} |T_4(x)| = 1$$

$$\left|\frac{1}{192}T_4(x)\right| \leq \frac{1}{192} = 0.0053$$

şi

$$|R_4(x)| + \left|\frac{1}{192}T_4(x)\right| \leq 0.023 + 0.0053 = 0.0283 < 0.05$$

Deci termenul de grad 4, $\frac{1}{192}T_4(x)$, poate fi omis fără a afecta precizia dorită. Polinomul de grad 3

$$P_3(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

ne dă precizia dorită pe $[-1,1]$.

Încercăm să eliminăm termenul de grad 3 înlocuind x^3 cu $\frac{3}{4}T_1(x) + \frac{1}{4}T_3(x)$.

$$\begin{aligned}P_3(x) &= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}\left[\frac{3}{4}T_1(x) + \frac{1}{4}T_3(x)\right] \\ &= \frac{191}{192} + \frac{9}{8}x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{24}T_3(x)\end{aligned}$$

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|\frac{1}{24}T_3(x)\right| = 0.0417$$

$$0.0417 + 0.0283 \approx 0.07 > 0.5$$

Deci P_3 de mai sus ne dă polinomul de grad cel mai mic pentru această aproximare.

Problema 2.4.7 *Polinoamele lui Legendre*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \qquad \text{(formula lui Rodrigues)}$$

Arătaţi că

$$L_n \in \mathbb{P}_n \quad \textit{şi} \quad \langle L_n, L_m\rangle_{L^2[-1,1]} = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \tag{2.29}$$

$$nL_n(x) = (2n-1)xL_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x) \tag{2.30}$$

$$L_n(x) = \frac{1(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + \dots \tag{2.31}$$

$$L_n(1) = 1, \quad L_n(-1) = (-1)^n, \tag{2.32}$$

L_n *este par pentru* n *impar şi impar pentru* n *par*

$$L_n'(x) = xL_{n-1}'(x) + nL_{n-1}(x) \tag{2.33}$$

$$L_n'(x) - L_{n-2}'(x) = (2n-1)L_{n-1}(x)$$

$$(x^2-1)L_n'(x) = n(xL_n(x) - L_{n-1}(x))$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \quad \text{pentru} \quad |t| < 1 \tag{2.34}$$

Soluţie. (2.29) Presupunem că $n \geq m$,

$$\langle L_n, L_m\rangle_{L^2} = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} L_m(x)\frac{d}{dx^n}[(x^2-1)^n]dx$$

Integrând succesiv prin părţi de obţine

$$\langle L_n, L_m \rangle = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n} (L_m(x))(x^2-1)^n dx$$

care este nulă pentru $n > m$, iar pentru $n = m$

$$\|L_n\|_{L^2} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx = \frac{2}{2n+1}$$

(2.30), (2.31), (2.32) se verifică simplu. (2.33) se obţine direct din

$$\begin{aligned} L_n'(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [(x^2-1)^n] = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (n \cdot 2x(x^2-1)^{n-1}) \\ &= xL_{n-1}'(x) + nL_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Din formula de recurenţă se obţine

$$nL_n'(x) = (2n-1)L_{n-1}(x) + (2n-1)xL_{n-1}'(x) - (n-1)L_{n-2}'(x),$$

de unde eliminând L_n':

$$xL_{n-1}'(x) - L_{n-2}'(x) = (n-1)L_{n-1}(x)$$

şi prin urmare

$$L_n'(x) - L_{n-2}'(x) = (2n-1)L_{n-1}(x)$$

Eliminând L_{n-2}' se obţine

$$(x^2-1)L_{n-1}'(x) = (n-1)[xL_{n-1}(x) - L_{n-2}(x)]$$

(6) Fie $\mathcal{C}$ un contur închis în $\mathbb{C}$ ce nu conţine în interiorul său ± 1, dar conţine pe z; după formulele lui Cauchy şi Rodrigues

$$L_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{(t^2-1)^n}{2^n (t-z)^{n+1}} dt$$

punând $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{t^2-1}{2(t-z)}$ adică $t = \dfrac{1}{Z}\left(1 - \sqrt{1 - 2zZ + Z^2}\right)$ avem

$$L_n(z) = \int\limits_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2zZ + Z^2}} dZ$$

unde $\mathcal{C}_1$ este imaginea lui $\mathcal{C}$ prin schimbarea $t \to Z$ de unde

$$L_n(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dZ^n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2zZ+Z^2}}\right)\Bigg|_{z=0}$$

şi pentru $|t| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(z) = \frac{1}{\sqrt{1-zt+t^2}}$$

■

Problema 2.4.8 *Să se arate că polinoamele ortogonale în raport cu $w(x) = \sqrt{x}$ (respectiv $1/\sqrt{x}$) pe $(0,1)$ sunt*

$$q_n(x) = L_{2n+1}\left(\sqrt{x}\right)/\sqrt{x}$$

respectiv

$$q_n(x) = L_{2n}\left(\sqrt{x}\right)$$

Soluţie. Rezultatul se obţine prin schimbarea de variabilă $t = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (respectiv $t = \sqrt{x}$) utilizând proprietăţile (1) şi (4) din exerciţiul precedent. ■

Problema 2.4.9 *Polinoamele lui Hermite*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

(1) Arătaţi că

$$H_n \in \mathbb{P}_n \quad \text{şi} \quad \langle H_n, H_m\rangle_{L^2_n(\mathbb{R})} = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{nm}$$

cu $w(x) = e^{-x^2}$.

(2)

$$H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + (2n-2)H_{n-2}(x) = 0$$

(3)

$$H_0 = 1, \quad H_1(x) = 2x$$

$$H_n(x) = 2^n x^n + \ldots$$

H_n este o funcţie pară sau impară după cum n este par sau impar.

$$H_{2k}(0) = (-1)^k\frac{(2k)!}{k!}$$

(4)

$$H'_{n-1}(x) = 2xH_{n-1}(x) - H_n(x), \quad H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

(5)

$$H_n(x) = \sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} (-1)^k \frac{n!}{k!} \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!}$$

(6)

$$2^n x^n = \sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} \frac{n!}{k!(n-2k)!} H_{n-2k}(x)$$

(7)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{2tx-t^2} \qquad |t| < 1 \quad \textit{(funcţie generatoare)}$$

(8)

$$2^{n/2} H_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(x) H_{n-k}(y)$$

Soluţie. Proprietăţile (1), (2), (3), (4), (5), (7) rezultă din definiţia lui H_n procedând ca la problema 2.4.2. Proprietatea (6) se obţine dezvoltând $(2x)^n$ în serie Fourier.

$$(2x)^n = \sum_{k=0}^{n} ((2x)^n, \widetilde{H}_k) \widetilde{H}_k(x)$$

unde $\widetilde{H}_k$ sunt polinoamele ortonormale Hermite, evaluând produsul scalar $(x^n, \widetilde{H}_k)$. Proprietatea (8) se obţine cu ajutorul funcţiei generatoare

$$e^{2tx-t^2} e^{2tx-t^2} = e^{2\ t\sqrt{2}\frac{x+y}{\sqrt{2}}\ -\left(t\sqrt{2}\right)^2}$$

adică pentru $|t| < 1$

$$\left(\sum H_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} H_n(y)\frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\left(t\sqrt{2}\right)^n \frac{1}{n!}$$

şi identificând coeficienţii lui t^n din cei doi membri. ■

Problema 2.4.10 *Polinoamele asociate ale lui Laguerre*

$$l_n^{\alpha}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha} e^{-x}) \quad \text{pentru} \quad \alpha > -1.$$

(1) Arătaţi că

$$l_n^\alpha \in \mathbb{P}_n \quad \textit{şi} \quad \langle l_n^\alpha, l_m^\alpha \rangle = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$$

(în $L_w^2(0,\infty)$ cu $w(x) = x^\alpha e^{-x}$) unde $\Gamma(s)$ este funcţia Γ a lui Euler definită prin

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \quad (s > 0)$$

(2)

$$n l_n^\alpha(x) - (2n - 1 + \alpha - x) l_{n-1}^\alpha(x) + (n - 1 - \alpha) l_{n-2}^\alpha(x) = 0$$

(3)

$$l_n^{\alpha+1}(x) - l_{n-1}^{\alpha+1}(x) = l_n^\alpha(x)$$

(4)

$$\frac{d}{dx} l_n^\alpha(x) = -l_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad x\frac{d}{dx} l_n^\alpha(x) = n l_n^\alpha(x) - (n+\alpha) l_{n-1}^\alpha(x)$$

(5)

$$l_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} x^k / k!$$

(6)

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} l_k^\alpha$$

(7)

$$\sum_{n=0}^\infty t^n l_n^\alpha(x) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} \quad |t| < 1 \quad \textit{(f.gen.)}$$

(8)

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! l_n^{-1/1}(x^2)$$
$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x l_n^{1/2}(x^2)$$

Soluţie. (1)-(7) se deduc utilizând tehnici analoage celor din exerciţiile precedente. (8) se obţine dezvoltând în serie $H_n(x)$ şi $l_n^\alpha(x)$. ■

Problema 2.4.11 (Ecuaţia diferenţială verificată de polinoamele ortogonale) *Fie w o funcţie pozitivă pe $[a, b]$ astfel încât*

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{A_0 + A_1 x}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2} \quad \textit{şi} \quad \lim_{\substack{x \to a_+ \\ (sau\ x \to b_-)}} w(x)(B_0 + B_1 x + B_2 x^2) = 0 \tag{2.35}$$

$$(B_0+B_1x+B_2x^2)p_n''+(A_0+A_1x+B_1+B_2x)p_n'-(A_1n+B_2n(n+1))p_n = 0 \tag{2.36}$$

Aplicaţie. Stabiliţi ecuaţiile diferenţiale corespunzătoare ponderii
$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)\beta, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1, \quad [a,b] = [-1,1]$ (polinoamele Jacobi $p_n(\alpha, \beta)$)

$$(1-x^2)p_n'' - ((\alpha-\beta) + (\alpha+\beta+2)x)p_n' - n(\alpha+\beta+1+n)p_n = 0$$

în particular pentru polinoamele Cebîşev de speţa I

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$$

şi pentru polinoamele lui Legendre L_n

$$(1-x^2)L_n''(x) - 2xL_n'(x) + L_n(x) = 0$$

$w(x) = e^{-x^2}$ pe $\mathbb{R}$, polinoamele lui Hermite H_n

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

$w(x) = x^\alpha e^{-x}$ pe $(0, \infty)$, $\alpha > 1$, polinoamele lui Laguerre l_n^α

$$xp_n''(x) + (\alpha - 1 - x)p_n'(x) + np_n(x) = 0$$

unde $p_n(x) = l_n^\alpha(x)$.

Soluţie. Dacă $v(x) = w(x)(B_0 + B_1 x + B_2 x^2)$ ecuaţia diferenţială (2.36) înmulţită cu $w(x)$, ţinând cont de (2.35) se scrie sub forma Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(v(x)\frac{dp_n(x)}{dx}\right) = (A_{1n} + B_2 n(n+1))p_n(x)w(x)$$

de unde

$$\frac{d}{dx}[r(x)(p_n'(x)p_m(x) - p_m'(x)p_n(x))] =$$
$$= \{A_1(n-m) + B_2[n(n+1) - m(m+1)]\}p_n(x)p_m(x)w(x)\}$$

Integrând pe $[a,b]$ se obţine

$$\int_a^b p_n(x)p_m(x)w(x)dx = 0 \quad \text{pentru} \quad n \neq m$$

şi se verifică existenţa unei soluţii polinomiale a lui (2) de grad n; prin urmare $(p_n)_{n\geq 0}$ constituie sistemul de polinoame ortogonale pe $[a,b]$ relativ la ponderea w. 2. Verificare prin calcul. ∎

Problema 2.4.12 *Fie w o funcţie pondere pozitivă pe $[a,b]$, $E = L_w^2[a,b]$ şi $(\widetilde{p}_n)$ polinoamele ortonormale asociate.*

(1) Arătaţi că $\forall\ f \in E$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(f, \widetilde{p}_n)^2 \leq \|f\|_E^2 \tag{2.37}$$

(inegalitatea lui Bessel) cu egalitate (a lui Parseval) dacă spaţiul vectorial $\mathbb{P}$ *al polinoamelor este dens în* E *în care caz*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f, \widetilde{p}_n\rangle \widetilde{p}_n,$$

este serie convergentă în E.

(2) $\mathbb{P}$ *este dens în* E *dacă* $[a, b]$ *este mărginit.*

(3) Polinomul de cea mai bună aproximare de grad n *a lui* f *în* E *este*

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(f, \widetilde{p}_k)\widetilde{p}_k(x) \quad \text{şi} \quad q_n(x) = f(x)$$

în cel puţin $n + 1$ *puncte din* $[a, b]$.

Soluţie.

(1) Rezultă imediat de la curs.

(2) $\mathbb{P}$ este dens în $C^0[a, b]$ pentru $[a, b]$ mărginit şi

$$\|f\|_E = \|f\|_\infty \left(\int_a^b w(x)dx\right)^{1/2}$$

(3) q_n este caracterizat prin $(f - q_n, \widetilde{p}_k) = 0$ pentru $k = \overline{0, n}$ în particular pentru $k = 0$

$$\int_a^b (f(x) - q_n(x))\widetilde{p}_0(x)w(x)dx = 0$$

deci $f - s_n$ se anulează în cel puţin într-un punct din $[a, b]$. Dacă $f - q_n$ se anulează în mai puţin de $n + 1$ puncte $x_1, \ldots, x_l$ din $[a, b]$ cu $l \leq n$ atunci dacă

$$s(x) = \prod_{i=1}^{l}(x - x_i),$$

$s(x)(f(x) - q_n(x))$ păstrează semn constant şi deci $\langle f - q_n, s\rangle \neq 0$ ceea ce contrazice faptul că $f - q_n \perp \mathbb{P}_n$ în $L_w^2[a, b]$

■

Teorema 2.4.13 *(Cebîşev) Pentru orice* $f \in C[a,b]$ *există* P^*d *şi există* $d+2$ *puncte*

$$a \leq x_0 < \cdots < xd+1 \leq b$$

pentru care

$$(-1)^i[p^*d(x_i) - f(x_i)] = \sigma \left\|P^*d - f\right\|_\infty, \quad i = 0, 1, \ldots, d+1$$

unde $\sigma = sign(P^*d(x_0) - f(x_0))$.

Problema 2.4.14 *Să se determine p.c.b.a. unif. din* $\mathbb{P}_1$ *pentru* $f(x) = \sqrt{x}$ *pe* $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$.

Soluţie.

$$P_1^* = c_0 + c_1 x$$

Eroarea de aproximare este

$$e_1(x) = c_0 + c_1 x - \sqrt{x}$$

$$e_1'(x) = c_1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x_n = \frac{1}{4c_1^2}$$

Conform teoremei lui Cebîşev abaterea maximă se realizează în 3 puncte din $[a,b]$ şi obţinem sistemul neliniar

$$\begin{cases} c_0 + c_1 a - \sqrt{a} = E_1 \\ c_0 + \frac{1}{4c_1} - \frac{2}{c_1} = -E_1 \\ c_0 + c_1 b - \sqrt{3} = E_1 \end{cases},$$

cu soluţiile

$$c_0 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a} - \frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{4}\right]$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$E_1 = c_0 + c_1 a - \sqrt{a}$$

■

Capitolul 3

Teoria erorilor

Definiţia 3.0.15 *Aplicaţia $A : X \to \mathcal{P}(X)$ se numeşte procedeu de aproximare, iar $a \in A(\alpha)$ aproximantă pentru α.*

$F = \{mb^n |\, m, n \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ b > 1\}$ numere practice (fracţii b-adice limitate) F densă.

Regula de rotunjire - rotunjire la cifră pară

Surse de erori

1) Erori ale problemei - erori de formulare; apar datorită simplificării şi idealizării problemei. Erori ale metodei - apar datorită faptului că se lucrează cu aproximări.

2) Erori reziduale - expresiile unor valori din analiza matematică rezultă din procese infinite, iar noi lucrăm cu un număr finit de paşi.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

3) Erori iniţiale - datorate parametrilor de intrare - erori fizice şi de măsurare

4) Erori de rotunjire - datorate sistemelor de numeraţie şi lucrului cu un număr finit de zecimale

$$\frac{1}{3} = 0.333 \quad \Delta \approx 3 \cdot 10^{-4}$$

5) Erori ale operaţiilor - lucrând cu numere aproximative erorile se propagă - erori inerente.

3.1 Erori absolute şi relative. Cifre semnificative corecte

Exemplul 3.1.1 *Să se determine o limită a erorii absolute dacă se lucrează cu 3.14 în loc de* π.

$$3.14 < \pi < 3.15 \quad |a - \pi| < 0.01 \quad \Delta_a = 0.01$$

Exemplul 3.1.2 *Greutatea unui* dm^3 *de apă la* $0°C$ *este* $G = 999.847gf \pm 0.001gf$. *Să se determine o limită a erorii relative.*

$$\Delta a = 0.001 \quad G \geq 999.846$$

$$\delta_a = \frac{0.001}{999.847} \approx 10^{-4}\%$$

Cifre semnificative
$\neq 0$
0 între cifre semnificative sau marcator de poziţie
0 nesemnificativ - când fixează poziţia mărcii zecimale
0 007010   2003 000 000

$$\alpha = \alpha_0 b^k + a_1 b^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} b^{k-n+1} + \alpha_n b^{k-n}$$

Definiţia 3.1.3 *Spunem că* $a \approx \alpha$ *cu* n *cifre semnificative corecte dacă*

$$|\Delta a| \leq \frac{1}{2} b^{k-n+1}$$

Dacă $b = 10$ *şi* $|\Delta a| \leq \frac{1}{2}10^{-m}$ *spunem că* $a \approx \alpha$ *cu* m *zecimale corecte.*

Teorema 3.1.4 *Dacă* a *este obţinut din* α *prin rotunjire la* n *cifre atunci* a *aproximează pe* α *cu* n *cifre semnificative corecte.*

Exemplul 3.1.5 *Rotunjind*

$$\pi = 3.1415926535\ldots$$

la 5, 4, 3 cifre semnificative corecte obţinem aproximaţiile

$$3.1416, \quad 3.142, \quad 3.14$$

$$\frac{1}{2}10^{-4}, \quad \frac{1}{2}10^{-3}, \quad \frac{1}{2}10^{-2}$$

Teorema 3.1.6 *Fie $a, \alpha \in \mathbb{R}_+$. Dacă a aproximează pe α cu m cifre semnificative corecte, unde a_0 este cifra cea mai semnificativă a lui a în baza b, atunci*

$$\delta_a \leq \frac{1}{a_0 b^{n-1}}$$

Exemplul 3.1.7 *Care este o limită a erorii relative dacă lucrăm cu 3.14 în loc de π?*

$$a_0 = 3, \quad n = 3$$
$$\delta_a = \frac{1}{3 \cdot 10^{3-1}} = \frac{1}{300} = \frac{1}{3}\%$$

Exemplul 3.1.8 *Câte cifre trebuie considerate la calculul lui $\sqrt{20}$ astfel încât eroarea să nu depăşească 0.1%?*

$$a_0 = 4, \quad \delta = 0.001$$

$$\frac{1}{4 \cdot 10^{n-1}} \leq 0.001, \quad 10^{n-1} \geq 250 \;\Rightarrow\; n = 4$$

Invers, numărul de cifre corecte

Teorema 3.1.9 *$\alpha \in \mathbb{R}_+$, a aproximează pe α şi*

$$\delta_a \leq \frac{1}{2(\alpha_0 + 1) b^{n-1}},$$

unde α_0 este cifra cea mai semnificativă a lui α atunci a aproximează pe α cu n cifre semnificative corecte.

Exemplul 3.1.10 *$a \approx \alpha$, $a = 24253$, eroarea relativă 1%. Câte cifre semnificative corecte are $\Delta = 24253 : 0.0 \approx 243 = 2.43 \cdot 10^2 \;\Rightarrow$ 2 cifre*

3.2 Propagarea erorilor

$$u = f(x_1, \ldots, x_n)$$
$$\Delta u \approx \sum \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$
$$|\Delta u| \approx \sum \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|$$
$$\delta_n \approx \sum \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f \right| \Delta x_i \approx \sum \left| x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f \right| \delta x_i$$

Exemplul 3.2.1 *Găsiţi o limită a erorii absolute şi relative pentru volumul sferei* $V = \frac{\pi d^3}{6}$ *cu diametrul egal cu* $3.7cm \pm 0.04cm$ *şi* $\pi \approx 3.14$.

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{6}d^3 = 8.44$$

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2}\pi d^2 = 21.5$$

$$\Delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial \pi}\right| |\Delta \pi| + \left|\frac{\partial V}{\partial d}\right| |\Delta d| = 8.44 + 21.5 \cdot 0.05 \approx 1.088 \approx 1.1$$

$$\Delta_V = \frac{1.0888}{274} \approx 4\%$$

Exemplul 3.2.2 *(Se aplică principiul efectelor egale) Un cilindru are raza* $R \approx 2m$, *înălţinea* $H \approx 3m$. *Cu ce erori absolute trebuie determinate* R *şi* H *astfel încât* V *să poată fi calculat cu o eroare* $< 0.1m^3$.

$$V = \pi R^2 H, \quad \Delta V = 0.1m^3$$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 H = 12, \quad \frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R H = 37.7$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2 = 12.6, \quad n = 3$$

$$\Delta \pi \approx \frac{\Delta V}{3\frac{\partial V}{\partial \pi}} = \frac{0.1}{3.12} < 0.003$$

$$\Delta R \approx \frac{0.1}{3 \cdot 37.7} < 0.001$$

$$\Delta H \approx \frac{0.1}{3 \cdot 12.6} < 0.003$$

3.3 Erorile pentru vectori şi operatori

Problema 3.3.1 *Care este eroarea pentru* $\int_c^d f(u)du$ *când funcţia* f *este aproximată prin* $\widehat{f}$.

$$Tf = \int_c^d f(u)du, \quad T : L^2[c,d] \to \mathbb{R}$$

$$\|T\| = \max_{\|\varepsilon(x)\|_\infty = 1} \left| \int_c^d \varepsilon(x)dx \right| = \max_{\{\varepsilon(x) | \max\limits_{[c,d]} |\varepsilon(x)| = 1\}} \left| \int_c^d \varepsilon(x)dx \right| = d - c$$

$$\|\widehat{f}(x) - f(x)\|_{\infty} := \|\varepsilon(x)\| = \max_{x \in [c,d]} |\varepsilon(x)| \leq bf$$

$$\Delta_T \leq (d-c)b_f$$

$$S_x(T) = \frac{\|T\|\|x\|}{\|Tx\|} = \max_{\varepsilon \neq 0} \rho_{x,\varepsilon}$$

Problema 3.3.2 *Să se studieze senzitivitatea operatorului aditiv*

$$U(u,v) = u + v, \quad T : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}, ||)$$

Soluţie. Fie

$$(u,v) = (2,3)$$

$$S_{2,3}(T) = \frac{|2| + |3|}{|2+3|} = 1$$

În general

$$S_x(T) = \frac{|u| + |v|}{|u+v|}$$

Dacă u şi v au acelaşi semn

$$S_x(T) = 1$$

Dacă u şi v au semne opuse $|u+v| < |u| + |v|$ şi $S_x(T) > 1$.

Senzitivitatea poate fi făcută oricât de mare pentru u şi v de semne contrare şi apropiate în modul

$$u = 0.5, \quad v = -0.499999$$

$$\Delta_u, \Delta_v < 10^{-6}$$

$$S_x(T) \approx \frac{0.000002}{0.999999} \approx 2 \cdot 10^{-6}$$

Concluzie. ε rel.ieşire $> 10^6$·eroarea rel. de intrare ■

Morala: evitarea scăderii cantităţilor apropiate

Problema 3.3.3 *Indicaţi o modalitate de a evita anularea pentru*

1) $e^x - 1 \quad |x| \ll 1$

2) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad x \gg 0$

Problema 3.3.4 *Să se determine numărul de condiţionare pentru operatorul* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} x+y \\ x+2y \end{bmatrix}$$

Soluţie.

$$T_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 3 \quad \|A^{-1}\|_\infty = 3$$

$$cond_\infty(T) = 9$$

■

3.4 Aritmetică în virgulă flotantă

Problema 3.4.1 *Să se compare următoarele două metode pentru calculul lui* $x^2 - y^2$:

$$x \otimes x \ominus y \otimes y,$$

$$(x \oplus y) \otimes (x \ominus y).$$

Soluţie. Eroarea relativă pentru $x \ominus y$ este

$$\delta_{x \ominus y} = \delta_1 = [(x \ominus y) - (x - y)]/(x - y)]$$

$$|\delta_1| \leq 2\varepsilon$$

Altfel scris

$$x \ominus y = (x - y)(1 + \delta_1) \quad |\delta_1| \leq 2\varepsilon$$

La fel

$$x \oplus y = (x + y)(1 + \delta_2) \quad |\delta_2| \leq 2\varepsilon$$

Presupunând că înmulţirea se realizează calculând produsul exact şi apoi efectuând rotunjirea, eroarea relativă este cel mult $1/2$ ulp, deci

$$u \otimes v = uv(1 + \delta_3) \quad |\delta_3| \leq \varepsilon \quad \forall\, u, v \in NVF$$

Se ia $u = x \ominus y$, $v = x \oplus y$

$$(x \ominus y) \otimes (x \oplus y) = (x - y)(1 + \delta_1)(x + y)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3)$$

Eroarea relativă este

$$\frac{(x \ominus y) \otimes (x \oplus y) - (x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)} = (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3) - 1 =$$

$$= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_3 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_2\delta_3 < 5\varepsilon + 8\varepsilon^2 \approx 5\varepsilon$$

Pentru cealaltă variantă

$$(x \otimes x) \ominus (y \otimes y) = [x^2(1+\delta_1) - y^2(1+\delta_2)](1+\delta_3) =$$
$$= [(x^2 - y^2)(1+\delta_1) + (\delta_1 - \delta_2)y^2](1+\delta_3)$$

Dacă $x \approx y \ \Rightarrow \ (\delta_1 - \delta_2)y^2 \approx x^2 - y^2$, atunci $(x-y)(x+y)$ este mai precis decât $x^2 - y^2$

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{(x \otimes x) \ominus (y \otimes y) - (x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} \\ &= (1+\delta_1)(1+\delta_3) + \frac{(\delta_1 - \delta_2)(1+\delta_3)y^2}{x^2 - y^2} - 1 \\ &= \delta_1 + \delta_3 + \delta_1\delta_3 + \frac{y^2}{x^2 - y^2}(\delta_1 - \delta_2 + \delta_1\delta_3 - \delta_2\delta_3).\end{aligned}$$

■

Problema 3.4.2 ***(Conversia binar zecimal (scriere şi apoi citire))***
Pentru precizie simplă avem $p = 24$ şi $2^{24} < 10^8$ deci 8 cifre par suficiente pentru a recupera numărul original (totuşi nu este aşa!). Când un număr binar IEEE simplă precizie este convertit la cel mai apropiat număr zecimal de 8 cifre, nu este întotdeauna posibil să recuperăm unic numărul binar din cel zecimal. Dacă se utilizează nouă cifre, totuşi, conversia numărul zecimal în binar va recupera numărul flotant originar.

Demonstraţie. Numerele binare în simplă precizie din intervalul $[10^3, 2^{10}) = [1000, 1024)$ au zece biţi în stânga mărcii zecimale şi 14 la dreapta. Există deci $(2^{10} - 10^3) = 393216$ numere binare diferite în acest interval. Dacă numerele zecimale sunt reprezentate cu 8 cifre avem $(2^{10} - 10^3)10^4 = 240000$ numere zecimale în acest interval. Deci nu există nici o modalitate de a reprezenta prin 240000 de numere zecimale 393216 numere binare diferite. 8 cifre sunt insuficiente!

Pentru a arăta că nouă cifre sunt suficiente trebuie să arătăm că spaţiul dintre numerele binare este întotdeauna mai mare decât cel dintre numerele zecimale. Aceasta ne asigură că, pentru fiecare număr zecimal posibil, intervalul de forma $\left[N - \frac{1}{2}ulp, N + \frac{1}{2}ulp\right]$ conţine cel puţin un număr binar. Astfel, fiecare număr binar se rotunjeşte la un număr zecimal unic, care ne conduce la un număr binar unic.

Pentru a arăta că spaţiul dintre numerele zecimale este întotdeauna mai mic decât spaţiul dintre numerele binare să considerăm intervalul $[10^n, 10^{n+1}]$. Pe acest interval, spaţiul dintre două numere zecimale consecutive este $10^{(n+1)-9}$.

În intervalul $[10^n, 2^m]$ unde m este cel mai mic întreg astfel ca $10^n < 2^m$, spaţiul dintre numerele binare este 2^{m-24}.

Inegalitatea
$$10^{(n+1)-9} < 2^{m-2n}$$
rezultă astfel:
$$10^n < 2^m$$
$$10^{(n+1)-9} = 10^n 10^{-8} < 2^m 10^{-8} < 2^m 2^{-24}$$

■

Observaţia 3.4.3 *Spaţiul dintre 2 numere zecimale este mai mic decât* $10^{-9} \cdot 10^{n+1} = 10^{n+1-9} = 10^{n-8}$*, iar spaţiul dintre 2 numere binare este mai mare decât* $2^m \cdot 2^{-24} = 2^{m-24}$.

Problema 3.4.4 *În multe probleme, cum ar fi integrarea numerică şi rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale, este nevoie să se însumeze mai mulţi termeni. Deoarece fiecare adunare poate introduce o eroare* $\approx 1/2ulp$*, o sumă cu mii de termeni poate introduce o eroare de rotunjire foarte mare. Să se arate că un mod simplu de a micşora eroarea este de a efectua sumarea în dublă precizie şi celelalte calcule în simplă precizie.*

Soluţie. Pentru a da o estimare grosieră a modului în care reprezentarea în dublă precizie îmbunătăţeşte acurateţea fie $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 \oplus x_2, \dots, s_i = s_{i-1} \oplus x_i$. Atunci
$$s_i = (1 + \delta_i)(s_{i-1} + x_i),$$
unde $|\delta_i| \le \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
s_n &= (1 = \delta_n)(s_{n-1} + x_n) = (1 + \delta_n)s_{n-1} + (1 + \delta_n)x_n \\
&= (1 + \delta_n)(1 + \delta_{n-1})(s_{n-2} + x_{n-1}) + (1 + \delta_n)x_n \\
&= (1 + \delta_n)(1 + \delta_{n-1})s_{n-2} + (1 + \delta_n)(1 + \delta_{n-1}x_{n-1} + (1 + \delta_n)x_n = \dots \\
&= (1 + \delta_n)x_n + (1 + \delta_n)(1 + \delta_{n-1})x_{n-1} + \dots + (1 + \delta_n)\dots(1 + \delta_1)x_1 \\
&\approx \sum_{j=1}^{n} x_j \left(1 + \sum_{k=j}^{n} \delta_k)\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{k=j}^{n} \delta_k\right)
\end{aligned}$$

$$\Delta x_1 \approx n_\varepsilon \quad \Delta x_2 \approx (n-1)\varepsilon, \dots, \Delta x_n \approx \varepsilon$$
$$\Delta s_n \le n_\varepsilon \sum |x_j|$$

Dublarea precizie are ca efect ridicarea la pătrat a lui ε. Pentru dublă precizie $1/\varepsilon \approx 10^{16}$ deci $n_\varepsilon \ll 1$ pentru orice valoare rezonabilă a lui n. ■

Concluzie. Dublarea preciziei schimbă perturbaţia din $n\varepsilon$ în $n\varepsilon^2 \ll \varepsilon$.

Există o metodă de însumare în simplă precizie a unui număr mare de numere, introdusă de Kahan.

Ea utilizează aceeaşi strategie ca însumarea directă, dar la fiecare operaţie de adunare eroarea de rotunjire este estimată şi compensată cu un termen de corecţie. Principiul de estimare este explicat în figura 3.1, unde semnificanţii termenilor a şi b sunt reprezentaţi prin dreptunghiuri. El poate fi reprezentat prin formula

$$\widehat{e} = ((a \oplus b) \ominus a) \ominus b = (\widehat{s} \ominus a) \ominus b. \tag{3.1}$$

Astfel, într-o aritmetică binară cu rotunjire, pentru $a \geq b$ are loc

$$\widehat{e} = \widehat{s} - (a + b);$$

deci, eroarea de rotunjire este dată exact de (3.1).

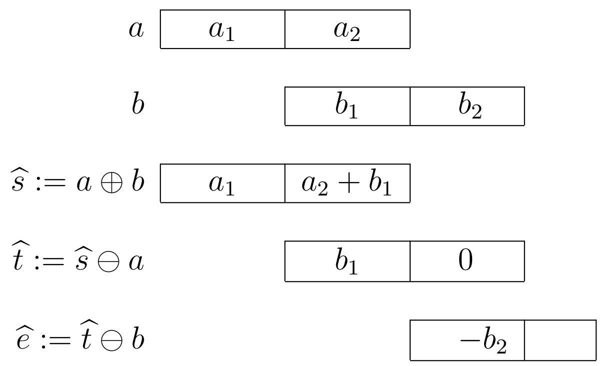


Figura 3.1: Estimarea erorii de rotunjire $\widehat{s} - s = -b_2$

Pentru însumare compensată la fiecare pas eroarea de însumare este estimată în conformitate cu principiul lui Kahan şi utilizată pentru ajustare (algoritmul 1).

Algoritmul 1 Însumare Kahan

$s := x_1;$
$e := 0;$
for $i = 2$ **to** n **do**
  $y := x_i - e;$
  $t := s + y;$
  $e := (t - s) - y;$
  $s := t$
end for

Problema 3.4.5 (Însumare Kahan) *Eroarea de rotunjire pentru algoritmul 1 poate fi estimată prin*

$$|\widehat{s}_n - s_n| \leq \left(2\operatorname{eps} + O\left(n\operatorname{eps}^2\right)\right)\sum_{i=1}^{n}|x_i|. \tag{3.2}$$

Soluţie. Să vedem întâi cum s-a obţinut estimaţia pentru formula $\sum x_i$. Introducen $s_1 = x_1$, $s_i = (1+\delta_i)(s_{i-1}+x_i)$. Atunci suma calculată este s_n, care este o sumă de termeni de forma x_i înmulţit cu o expresie în δ_j-uri. Coeficientul exact al lui x_1 este $(1+\delta_2)(1+\delta_3)\dots(1+\delta_n)$. Deci prin renumerotare, coeficientul lui x_2 este $(1+\delta_3)(1+\delta_4)\dots(1+\delta_n)$ ş.a.m.d. Se procedează la fel ca la problema 3.4.4, doar coeficientul lui x_1 este mai complicat. Avem $s_0 = e_0 = 0$ şi

$$\begin{aligned}
y_k &= x_k \ominus c_{k-1} = (x_k - c_{k-1})(1+\eta_k)\\
s_k &= s_{k-1} \oplus y_k = (s_{k-1}+y_k)(1+\sigma_k)\\
e_k &= (s_k \ominus s_{k-1}) \ominus y_k = [(s_k - s_{k-1})(1+\gamma_k) - y_k](1+\delta_k)
\end{aligned}$$

unde toate literele greceşti sunt mărginite de eps. Este mai uşor să calculăm coeficientul lui x_1 în $s_k - e_k$ şi e_k decât în s_k. Când $k = 1$,

$$\begin{aligned}
e_1 &= (s_1(1+\gamma_1) - \gamma_1)(1+\delta_1) = y_1((1+\sigma_1)(1+\gamma_1) - 1)(1+\delta_1)\\
&= x_1(\sigma_1 + \gamma_1 + \sigma_1\gamma - 1)(1+\delta_1)(1+\eta_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_1 - c_1 &= x_1[(1+\sigma_1) - (\sigma_1 + \gamma_1 + \sigma_1\gamma_1)(1+\delta_1)](1+\eta_1)\\
&= x_1[1 - \gamma_1 - \sigma_1\delta_1 - \sigma_1\gamma_1 - \delta_1\gamma_1 - \sigma_1\gamma_1\delta_1](1+\eta_1).
\end{aligned}$$

Notând coeficienţii lui x_1 în aceste expresii cu E_k şi respectiv S_k, atunci

$$\begin{aligned}
E_1 &= 2\operatorname{eps} + O(\operatorname{eps}^2)\\
S_1 &= 1 + \eta_1 - \gamma_1 + 4\operatorname{eps}^2 + O(\operatorname{eps}^3).
\end{aligned}$$

Pentru a obţine formula generală pentru S_k şi E_k, dezvoltăm definiţiile lui s_k şi e_k, ignorând toţi termenii în x_i cu $i > 1$. Aceasta ne dă

$$\begin{aligned}
s_k &= (s_{k-1} + y_k)(1+\sigma_k) = [s_{k-1} + (x_k - e_{k-1})(1+\eta_k)](1+\sigma_k)\\
&= [(s_{k-1} - e_{k-1}) - \eta_k e_{k-1}](1+\sigma_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_k &= [(s_k - s_{k-1})(1+\gamma_k) - y_k](1+\delta_k)\\
&= \left\{\left[\left((s_{k-1} - e_{k-1}) - \eta_k e_{k-1}\right)(1+\sigma_k) - s_{k-1}\right](1+\gamma_k) + e_{k-1}(1+\eta_k)\right\}\\
&\quad (1+\delta_k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{[(s_{k-1} - e_{k-1})\sigma_k - \eta_k e_{k-1}(1+\sigma_k) - e_{k-1}]\,(1+\gamma_k) + e_{k-1}(1+\eta_k)\} \\
&(1+\delta_k) \\
&= [(s_{k-1} - e_{k-1})\sigma_k(1+\gamma_k) - e_{k-1}\,(\gamma_k + \eta_k(\sigma_k + \gamma_k + \sigma_k\gamma_k))]\,(1+\delta_k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_k - e_k = {} & ((s_{k-1} - e_{k-1}) - \eta_k e_{k-1})\,(1+\sigma_k) - \\
& [(s_{k-1} - e_{k-1})\sigma_k(1+\gamma_k) - e_{k-1}(\gamma_k + \eta_k(\sigma_k + \gamma_k + \sigma_k\gamma_k))]\,(1+\delta_k) \\
& = (s_{k-1} - e_{k-1})\,((1+\sigma_k) - \sigma_k(1+\gamma_k)(1+\delta_k)) + \\
& c_{k-1}\,(-\eta_k(1+\sigma_k) + (\gamma_k + \eta_k(\sigma_k + \gamma_k + \sigma_k\gamma_k))\,(1+\delta_k)) \\
& = (s_{k-1} - e_{k-1})\,(1 - \sigma_k(\sigma_k + \gamma_k + \sigma_k\gamma_k)) + \\
& e_{k-1}\,[-\eta_k + \gamma_k + \eta_k(\gamma_k + \sigma_k\gamma_k) + (\gamma_k + \eta_k(\sigma_k + \gamma_k + \sigma_k\gamma_k))\,\delta_k]
\end{aligned}
$$

Deoarece S_k şi E_k trebuie calculate cu precizia eps^2, ignorând termenii de grad mai mare avem

$$
\begin{aligned}
E_k &= \left(\sigma_k + O(\mathrm{eps}^2)\right) S_{k-1} + \left(-\gamma_k + O(\mathrm{eps}^2)\right) E_{k-1}, \\
S_k &= \left(1 + 2\,\mathrm{eps}^2 + O(\mathrm{eps}^2)\right) S_{k-1} + \left(2\,\mathrm{eps} + O(\mathrm{eps}^2)\right) E_{k-1}.
\end{aligned}
$$

Utilizând aceste formule se obţine

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \sigma_2 + O(\mathrm{eps}^2) \\
S_2 &= 1 + \eta_1 - \gamma_1 + 10\,\mathrm{eps}^2 + O(\mathrm{eps}^3)
\end{aligned}
$$

şi, în general, se verifică uşor prin indicţie că

$$
\begin{aligned}
C_k &= \sigma_k + O(\mathrm{eps}^2) \\
S_k &= 1 + \eta_1 - \gamma_1 + (4k+2)\,\mathrm{eps}^2 + O(\mathrm{eps}^3).
\end{aligned}
$$

În final vom calcula coeficientul lui x_1 din s_k. Pentru a obţine această valoare, fie $x_{n+1} = 0$ şi toate literele greceşti cu indicii $n+1$ egale cu zero şi calculăm s_{n+1}. Atunci $s_{n+1} = s_n - c_n$ şi coeficientul lui x_1 în s_n este mai mic decât coeficientul lui s_{n+1}, care este

$$
S_n = 1 + \eta_1 - \gamma_1 + (4n+2)\,\mathrm{eps}^2 + O(n\,\mathrm{eps}^2).
$$

■

Marginea (3.2) este o îmbunătăţire semnificativă faţă de însumarea obişnuită, cu condiţia ca n să nu fie suficient de mare, dar nu este la fel de bună ca însumarea în dublă precizie.

Un exemplu de expresie care poate fi rescrisă utilizând anularea benignă este $(1+x)^n$, unde $x \ll 1$.

Problema 3.4.6 *Depunând 100\$ pe zi într-un cont cu o rată a dobânzii de 6% calculată zilnic la sfârşitul anului avem* $100[(1 + i/n) - 1]/(i/n)\$$.

Dacă $p = 2$ *şi* $p = 24$ *(ca în IEEE) obţinem 37615.45\$ care comparat cu răspunsul exact, 37614.05\$ dă o discrepanţă de 1.40\$. Explicaţi fenomenul.*

Soluţie. Expresia $1+i/n$ implică adăugarea unui 1 la 0.0001643836, deci biţii de ordin mic ai lui i/n se pierd. Această eroare de rotunjire este amplificată când $(1 + i/n)$ este ridicat la puterea a $n - a$. Expresia $(1 + i/n)^n$ se rescrie sub forma $\exp[n \ln(1 + i/n)]$. Problema este acum calculul lui $\ln(1 + x)$ pentru x mic. O posibilitate ar fi să utilizăm aproximarea $\ln(1 + x) \simeq x$ şi se obţine 37617.26\$ cu o eroare de 3.21\$ deci mai mare decât în situaţia anterioară. Rezultatul de mai jos ne permite să calculăm precis $\ln(1 + x)$(37614.67\$, eroarea 2c). Se presupune că $LN(x)$ aproximează $\ln x$ cu o precizie $\leq 1/2ulp$. Problema care o rezolvă este aceea că atunci când x este mic $LN(1 \oplus x)$ nu este apropiat de $\ln(1+x)$ deoarece $1 \oplus x$ nu este precis. Adică valoarea calculată pentru $\ln(1 + x)$ nu este apropiată de valoarea actuală când $x \leq 1$.

I. Dacă $\ln(1 + x)$ se calculează utilizând formula

$$\ln(1 + x) = \begin{cases} x & \text{dacă} \quad 1 \oplus x = 1 \\ \dfrac{x \ln(1 + x)}{(1 + x) - 1} & \text{dacă} \quad 1 \oplus x \neq 1 \end{cases}$$

eroarea relativă este cel mult 5ε când $0 \leq x < 3/4$ cu condiţia ca scăderea să se realizeze cu o cifră de gardă, $\varepsilon < 0.1$ şi $\ln$ este calculat cu o precizie de $1/2ulp$.

Această formulă este operaţională pentru orice valoare a lui x, dar este interesantă dacă $x \ll 1$, când apare anulare catastrofală în formula naivă pentru calculul lui $\ln(1 + x)$. Deşi formula pare misterioasă ea are o explicaţie simplă.

$$\ln(1 + x) = \frac{x \ln(1 + x)}{x} = x\mu(x)$$

$$\mu(x) = \frac{\ln(1 + x)}{x}$$

va suferi o eroare mare când se adaugă 1 la x. Totuşi μ este aproape constantă deoarece $\ln(1 + x) \simeq x$. Deci dacă x se schimbă puţin eroarea va fi mică. Cu alte cuvinte, dacă $\widetilde{x} \simeq x$, $x\mu(\widetilde{x})$ va fi o aproximare bună pentru $x\mu(x) = \ln(1 + x)$. Există o valoare pentru $\widetilde{x}$ astfel încât $\widetilde{x} + 1$ să poată fi calculat precis? Deci $\widetilde{x} = (1 \oplus x) \ominus 1$, deoarece în acest caz $1 + \widetilde{x} = 1 \oplus x$. ∎

Lema 3.4.7 *Dacă* $\mu(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$*, atunci pentru* $0 \leq x \leq \dfrac{3}{4}$

$$1/2 \leq \mu(x) \leq 1 \quad \textit{şi} \quad |\mu'(x)| \leq 1/2.$$

Demonstraţie. $\mu(x) = 1 - x/2 + x^2/3 - \dots$ este o serie alternată cu termeni descrescători, deci pentru $x \leq 1$,

$$\mu(x) \geq 1 - \frac{x}{2} \geq 1/2 \quad \text{şi} \quad \mu(x) \leq 1.$$

Seria Taylor a lui $\mu'(x)$ este de asemenea alternată şi dacă $x \leq \frac{3}{4}$, termenii sunt descrescători deci

$$-1/2 \leq \mu'(x) \leq -\frac{1}{2} + \frac{2x}{3} \quad \text{sau} \quad -\frac{1}{2} \leq \mu'(x) \leq 0.$$

■

Demonstraţia teoremei.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \text{(Taylor)}$$

alternată şi $0 < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$, δ pentru $\ln(1+x) \approx x < \frac{x}{2}$. Dacă $1 \oplus x = 1$, atunci $|x| < \varepsilon$, deci $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dacă $1 \oplus x \neq 1$, fie $\widehat{x}$ definit prin $1 \oplus x = 1 + \widehat{x}$

$0 \leq x < 1 \;\Rightarrow\; (1 \oplus x) \ominus 1 = \widehat{x}$. Dacă împărţirea şi logaritmul se calculează cu o precizie de $1/2ulp$

$$\frac{\ln(1 \oplus x)}{(1 \oplus x) \ominus 1}(1+\delta_1)(1+\delta_2) = \frac{\ln(1+\widehat{x})}{\widehat{x}}(1+\delta_1)(1+\delta_2) =$$

$$= \mu(\widehat{x})(1+\delta_1)(1+\delta_2); \quad |\delta_1| \leq \varepsilon, \quad |\delta_2| \leq \varepsilon$$

$$\mu(\widehat{x}) - \mu(x) = (\widehat{x} - x)\mu(\xi) \quad \xi \in (x, \widehat{x})$$

Din definiţia lui $\widehat{x}$, $|\widehat{x} - x| \leq \varepsilon$. Aplicăm

$$|\mu(\widehat{x}) - \mu(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sau} \quad \left|\frac{\mu(\widehat{x})}{\mu(x)} - 1\right| \leq \frac{\varepsilon}{2|\mu(x)|} \leq \varepsilon$$

adică

$$\mu(\widehat{x}) = \mu(x)(1+\delta_3), \quad |\delta_3| \leq \varepsilon$$

$$\frac{x\ln(1+x)}{(1+x)-1}(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3)(1+\delta_4), \quad |\delta_i| \leq \varepsilon$$

Dacă $\varepsilon > 0.1$ atunci

$$(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3)(1+\delta_4) = 1 + \delta$$

cu $|\delta| < 5\varepsilon$.

Problema 3.4.8 *Dacă* $b^2 \approx 4ac$*, eroarea de rotunjire poate contamina jumătate din cifrele rădăcinii calculate cu formula* $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$ $(\beta = 2)$.

Soluţie. Dacă eroarea relativă este $n\varepsilon$ atunci numărul de cifre contaminat este $\log_\beta n$.

$$((b \otimes b) \ominus (3a \otimes c) = (b^2(1 + \delta_1) - 4ac(1 + \delta_2))(1 + \delta_3) =$$

$$= (d(1 + \delta_1) - 4ac(\delta_1 - \delta_2)(1 + \delta_3)).$$

Pentru a estima eroarea vom ignora termenii de ordinul doi în δ_i, eroarea fiind

$$d(\delta_1 + \delta_3) - 4ac\delta_n, \quad |\delta_4| = |\delta_1 - \delta_2| \leq 2\varepsilon$$

Deoarece $\delta \ll 4ac$, primul termen $d(\delta_1 + \delta_3)$ poate fi ignorat. Pentru a estima al treilea termen scriem

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

deci $ax_1x_2 = c$

$$b^2 \approx 4ac \;\Rightarrow\; x_1 \approx x_2 \;\Rightarrow\; 4ac\delta_4 \approx 4a^2x_1^2\delta_4$$

Valoarea calculată pentru $\sqrt{d}$ este $\sqrt{d + 4a^2x_1^2\delta_4}$.
Aplicăm inegalitatea

$$p - q \leq \sqrt{p^2 - q^2} \leq \sqrt{p^2 + q^2} \leq p + q, \qquad p \geq q.$$

Obţinem

$$\sqrt{d + 4a^2x_1\delta_4} = \sqrt{d} + E$$

unde

$$|E| \leq \sqrt{4a^2x_1^2|\delta_n|}$$

deci eroarea absolută pentru $\frac{\sqrt{d}}{2a}$ este aproximativ $x_1\sqrt{\delta_n}$.
Deoarece $\delta_4 \approx \beta^{-p}$, $\sqrt{\delta_4} \approx \beta^{-p/2}$ şi deci această eroare absolută contaminează jumătate din biţii rădăcinii $x_1 = x_2$. ∎

3.5 Condiţionarea unei probleme

Exemplul 3.5.1 (Recurenţe) *Calculăm*

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+5} dt \textit{ pentru } n \in \mathbb{N}$$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{t+5} = \ln(t+5)\Big|_0^1 = \ln\frac{6}{5} \tag{3.3}$$

$$\frac{t}{t+5} = 1 - \frac{5}{t+5}$$

$$I_k = -5I_{k-1} + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{3.4}$$

$$y_0 = I_0, \quad y_n = I_n$$

$$y_n = f_n(I_0)$$

$$y_0 \to \boxed{f_n} \to y_n$$

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Ne interesează condiţionarea lui f_n în $y_0 = I_0$. Rezultatul final va fi o aproximare $I_n^* = f_n(I_0^*)$ şi vom avea

$$\left|\frac{I_n^* - I_n}{I_n}\right| = (cond\, f_n)(I_0)\left|\frac{I_0^* - I_0}{I_0}\right|$$

Aplicând (3.4) obţinem

$$y_n = f_n(y_0) = (-5)^n y_0 + p_n,$$

cu p_n independent de y_0.

$$(cond\, f_n)(y_0) = \left|\frac{y_0 f'(y_0)}{y_n}\right| = \left|\frac{y_0(-5)^n}{y_n}\right|.$$

Deoarece I_n este descrescător

$$(cond\, f_n)(I_0) = \frac{I_0 5^n}{I_n} > \frac{I_0 \cdot 5^n}{I_0} = 5^n$$

Spunem că avem de-a face cu o problemă prost condiţionată. Cum putem evita fenomenul?

În loc să înmulţim cu un număr mare, mai bine împărţim cu un număr mare. Scriem (3.4) astfel

$$y_{k-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{k} - y_k\right), \quad k = \nu, \nu-1, \dots, n+1$$

Problema este, desigur, cum să calculăm valoarea de pornire y_ν.

Înainte de a începe cu aceasta să observăm că avem o nouă cutie neagră

$$y_\nu \to \boxed{g_n} \to y_n$$

$$(cond\, g_n)(y_\nu) = \left| \frac{y_\nu \left(-\frac{1}{5}\right)^{-\nu-n}}{y_n} \right|, \quad \nu > n.$$

Pentru $y_\nu = I_\nu$, avem folosind monotonia

$$(cond\, g_n)(I_\nu) < \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n}, \quad \nu > n$$

$$\left| \frac{I_n^* - I_n}{I_n} \right| = (cond\, g_n)(I_\nu) \left| \frac{I_\nu^* - I_\nu}{I_\nu} \right| < \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n} \left| \frac{I_\nu^* - I_\nu}{I_\nu} \right|$$

Dacă luăm $I_\nu^* = 0$, comiţând o eroare de 100% în valoarea de pornire obţinem eroarea relativă

$$\left| \frac{I_n^* - I_n}{I_n} \right| < \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n}, \quad \nu > n$$

Dacă alegem ν suficient de mare, de exemplu

$$\nu > n + \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 5} \tag{3.5}$$

eroarea relativă este $< \varepsilon$. Avem deci următorul algoritm pentru calculul lui I_n: se dă precizia ε, se alege n, cel mai mic întreg care satisface (3.5) şi se calculează

$$\begin{cases} I_n\nu^* = 0 \\ I_{k-1}^* = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{k} - I_k^*\right), \ k = \nu, \nu - 1, \ldots, n + 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

Aceasta va produce o aproximaţie suficient de precisă $I_n^* \approx I_n$ chiar în prezenţa erorilor de rotunjire din (3.6).

Idei similare se pot aplica şi la problema mai importantă a calculării soluţiilor unor recurenţe liniare de ordinul II, cum ar fi cele satisfăcute de funcţiile Bessel şi de multe alte funcţii ale fizicii matematice. Procedura recurenţelor regresive (retrograde) este strâns legată de teoria fracţiilor continue.

Problema 3.5.2 (Condiţionarea ecuaţiilor algebrice) *Fie ecuaţia:*

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0 \tag{3.7}$$

şi ξ o rădăcină simplă a ei:

$$p(\xi) = 0, \quad p'(\xi) \neq 0.$$

Problema este de a se determina ξ, dându-se p. Vectorul de date

$$a = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]^T \in \mathbb{R}^n$$

constă din coeficienţii polinomului p, iar rezultatul este ξ, un număr real sau complex. Astfel avem:

$$\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \xi = \xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

Care este condiţionarea lui ξ?

Soluţie. Definim

$$\gamma_\nu = (cond_\nu \xi)(a) = \left| \frac{a_\nu \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu}}{\xi} \right|, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1 \tag{3.8}$$

Vom alege o normă convenabilă, de exemplu norma

$$\|\gamma\|_1 := \sum_{\nu=0}^{n-1} |\gamma_\nu|$$

a vectorului $\gamma = [\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}]^T$, pentru a defini

$$(cond\xi)(a) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (cond_\nu \xi)(a) \tag{3.9}$$

Pentru a determina derivatele parţiale ale lui ξ în raport cu a_ν, observăm că avem identitatea:

$$[\xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^n + a_{n-1}[\xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^{n-1} + \dots +$$
$$+ a_\nu[\xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^\nu + \dots + a_0 = 0.$$

Derivând în raport cu a_ν obţinem

$$n[\xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^{n-1} \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu} + a_{n-1}(n-1)[\xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^{n-2} \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu} + \dots +$$
$$+ a_\nu \nu [\xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^{\nu-1} \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu} + \dots + a_1 \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu} + [\xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^\nu \equiv 0$$

unde ultimul termen provine din derivarea produsului $a_\nu \xi^\nu$.

Ultima identitate se poate scrie

$$p'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu} + \xi^\nu = 0$$

Deoarece $p'(\xi) \neq 0$, putem obţine $\frac{\partial \xi}{\partial a_\nu}$ şi să înlocuim în (3.8) şi (3.9) pentru a obţine

$$(cond\xi)(a) = \frac{1}{|\xi p'(\xi)|} \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu||\xi|^\nu \tag{3.10}$$

Vom ilustra (3.10) considerând un polinom p de grad n cu rădăcinile $1, 2, \ldots, n$

$$p(x) = \prod_{\nu=1}^{n}(x-\nu) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{3.11}$$

Acesta este un exemplu faimos, datorat lui Wilkinson, care a descoperit proasta condiţionare a anumitor zerouri aproape printr-un accident. Dacă luăm $\xi_\mu = \mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, n$ se poate arăta că

$$\begin{array}{rcl} \min_\mu cond\xi_\mu & = & cond\xi_1 \sim n^2 \text{ când } n \to \infty \\ \max_\mu cond\xi_\mu & \sim & \frac{1}{(2-\sqrt{2})\pi n}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^n \text{ când } n \to \infty. \end{array}$$

Cea mai prost condiţionată rădăcină este $\xi\mu_0$ cu μ_0 întregul cel mai apropiat de $n/\sqrt{2}$ când n este mare. Numărul său de condiţionare creşte ca $(5.828\ldots)^n$, deci exponenţial. De exemplu pentru $n = 20$ $cond\xi_{\mu_0} = 0,540 \times 10^{14}$.

Exemplul ne învaţă că rădăcinile unei ecuaţii algebrice scrise în forma (3.7) pot fi extrem de sensibile la schimbări mici ale coeficienţilor. De aceea este contraindicat să se exprime orice polinom cu ajutorul puterilor ca în (3.7) şi (3.11). Aceasta este în particular adevărat pentru polinoamele caracteristice ale matricelor. Este mult mai bine să lucrăm cu matricele însele şi să le reducem (prin transformări de similaritate) la o formă care să permită obţinerea rapidă a valorilor proprii - rădăcini ale ecuaţiei caracteristice. ■

Problema 3.5.3 *Presupunem că o rutină de bibliotecă pentru funcţia logaritmică ne furnizează $y = \ln x$ pentru orice număr în virgulă flotantă, x, producând un y_A ce satisface $y_A = (1+\varepsilon)\ln x$, $|\varepsilon| \leq 5eps$. Ce putem spune despre condiţionarea algoritmului A?*

Soluţie. Avem evident

$$y_A = \ln x_A \text{ unde } x_A = x^{1+\varepsilon} \quad \text{(unic)}$$

În consecinţă

$$\left|\frac{x_A - x}{x}\right| = \left|\frac{x^{1+\varepsilon} - x}{x}\right| = |x^\varepsilon - 1| \approx |\varepsilon \ln x| \leq 5|\ln x|eps$$

şi deci $(cond\, A)(x) \leq 5|\ln x|$. Algoritmul A este bine condiţionat exceptând vecinătatea dreaptă a lui $x = 0$ şi pentru x foarte mare. În ultimul caz, totuşi, este posibil ca x să dea depăşire înainte ca A să devină prost condiţionat. ■

Problema 3.5.4 *Considerăm problema*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad y = x_1 x_2 \dots x_n$$

Rezolvăm problema prin algoritmul evident

$$p_1 = x_1$$

$$p_k = fl(x_k p_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

$$y_A = p_n$$

Care este condiţionarea algoritmului?

Soluţie. Am presupus că $x \in \mathbb{R}^n(t,s)$. Utilizând legile de bază ale aritmeticii maşinii obţinem

$$p_1 = x_1$$

$$p_k = x_k p_{k-1}(1 + \varepsilon_k), \quad k = 2, 3, \dots, n, \quad |\varepsilon_k| \le eps$$

de unde

$$p_n = x_1 \dots x_n (1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_q) \dots (1 + \varepsilon_n)$$

Aici, putem lua de exemplu (nu se asigură unicitatea)

$$x_A = [x_1, x_2(1 + \varepsilon_2), \dots, x_n(1 + \varepsilon_n)]^T.$$

Aceasta ne dă, utilizând norma $\|\cdot\|_\infty$

$$\frac{\|x_A - x\|_\infty}{\|x\|_\infty eps} = \frac{\|[0, x_2\varepsilon_2, \dots, x_n\varepsilon_n]^T\|_\infty}{\|x\|_\infty eps} \le \frac{\|x\|_\infty eps}{\|x\|_\infty eps} = 1$$

deci $(cond\, A)(x) \le 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n(t,s)$ şi algoritmul este bine condiţionat.
■

Capitolul 4

Rezolvarea numerică a sistemelor algebrice liniare

4.1 Descompunere LU

$$A = LU$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & w^T \\ v & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^T \\ 0 & A' - vw^T/a_{11} \end{pmatrix}$$

Matricea $A' - vw^T/a_{11}$ se numeşte complement Schur al lui a_{11}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & wT \\ 0 & a' - vw^T/a_{11} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^T \\ 0 & L'U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^T \\ 0 & U' \end{pmatrix}$$

Problema 4.1.1 *Calculaţi descompunerea LU a matricei*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{bmatrix}$$

Soluţie.

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 3 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 16 & 9 & 18 \\ 2 & 4 & 9 & 21 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 5 & 15 \\ 15 & 10 & 23 \\ 10 & 11 & 31 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 15 \\ 15 & 20 & 23 \\ 10 & 11 & 31 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 3 & 15 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 16 & 9 & 18 \\ 4 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 3 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 17 \end{array}$$

$$A' - vw^T/a_{11} = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} (2, 4) = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \end{array}$$

$$A' - vw^T/a_{11} = 17 - 7 \cdot 2 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

■

Problema 4.1.2 ***(Sisteme tridiagonale)*** *Daţi algoritmul de descompunere LU pentru o matrice tridiagonală.*

Timp liniar
El. Gaussiană
Factorizare Crout $v_{ii} = 1$
Factorizare Doolittle $l_{ii} = 1$
Exemplu. Crout

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & u_2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = l_{11} \tag{4.1}$$

$$a_{i,i-1} = l_{i,i-1}, \quad i = 2, n \tag{4.2}$$
$$a_{ii} = l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii}, \quad i = 2, n \tag{4.3}$$
$$a_{i,i+1} = l_{ii}u_{i,i+1} \tag{4.4}$$

Ordinea de obţinere este (4.2), (4.4), (4.3) alternativ
Algoritmul:
$P1$ $l_{11} := a_{11}$
$u_{12} := a_{12}/l_{11}$
P2 for $i = 2$ to $n-1$
$l_{i,i-1} := a_{i,i-1}$
$l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}u_{i-1,i}$
$u_{i,i+1} = a_{i,i+1}/l_{ii}$
P3 $l_{n,n-1} = a_{n,n-1}$
$l_{n,n} = a_{nn} - l_{n,n-1}u_{n-1,n}$

4.2 Descompunere LUP

Aici rolul lui a_{11} va fi jucat de a_{k1}.

Efectul QA, Q matrice de permutare

$$QA = \begin{pmatrix} a_{k1} & w^T \\ v & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^T \\ 0 & A' - vw^T/a_{k1} \end{pmatrix}$$

Matricea $A' - vw^T/a_{k1}$ se numeşte complementul Schur al lui a_{k1} şi este nesingulară.

Determinăm mai departe descompunerea LUP a complementului Schur

$$P'(A' - vw^T/a_{k1}) = L'U'.$$

Definim

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} Q$$

care este tot o matrice de permutare.

Avem acum

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^T \\ 0 & A' - vw^T/a_{k1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'v/a_{k1} & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1}w^T & \\ 0 & A' - vw^T/a_{k1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'v/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^T \\ 0 & P'(A' - vw^T/a_{k1}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'v/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k-1} & w^T \\ 0 & L'U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'v/a_{k1} & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^T \\ 0 & U' \end{pmatrix} = LU$$

De notat că în acest raţionament atât vectorul coloană cât şi complementul Schur se înmulţesc cu matricea de permutare P'.

Problema 4.2.1 *Să se calculeze descompunerea LUP a matricei*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0.6 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3.4 & -1 \end{bmatrix}$$

Soluţie.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0.6 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 3.4 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0.6 \\ 4 & -1 & -2 & 3.4 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 0.6 & 0 & 1.6 & -3.2 \\ 1 & 0.4 & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 4 & -0.2 & -1 & 4.2 & -0.6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 0.6 & 0 & 1.6 & -3.2 \\ 1 & 0.4 & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 4 & -0.2 & -1 & 4.2 & -0.6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0.4 & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 2 & 0.6 & 0 & 1.6 & -3.2 \\ 4 & -0.2 & -1 & 4.2 & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0.4 & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 2 & 0.6 & 0 & 1.6 & -3.2 \\ 4 & -0.2 & -0.5 & 4 & -0.5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0.4 & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 2 & 0.6 & 0 & 1.6 & -3.2 \\ 4 & -0.2 & 0.5 & 4 & -0.5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0.4 & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 4 & -0.2 & 0.5 & 4 & -0.5 \\ 2 & 0.6 & 0 & 1.6 & -3.2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0.4 & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 4 & -0.2 & 0.5 & 4 & -0.5 \\ 2 & 0.6 & 0 & 0.4 & -3 \end{array}$$

Verificare.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0.6 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 02 & 3.4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0.4 & 1 & 0 & \\ -0.2 & 0.5 & 1 & \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 2 \\ & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & & 4 & -0.5 \\ & & & -3 \end{pmatrix}$$

■

Definiţia 4.2.2 *Spunem că matricea A $n \times n$ este diagonal dominantă pe linii dacă*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1,n}$$

Problema 4.2.3 *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

folosind descompunerea Cholesky.

Soluţie. Calculând radicalii pivoţilor şi complementele Schur se obţine:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Sistemele echivalente sunt

$$\begin{cases} y_1 & = & 4 \\ 2y_1 + y_2 & = & 10 \\ y_1 + y_2 + y_3 & = & 7 \end{cases}$$

cu soluţia $y = [4, 2, 1]^T$ şi respectiv

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 4 \\ x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_3 & = & 1 \end{cases}$$

cu soluţia $x = [1, 1, 1]^T$. ■

Problema 4.2.4 *Calculaţi descompunerea QR a matricei*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluţie. Reflexia pentru prima coloană este $P = I - 2uu^T$. Vectorul u se determină astfel:

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} x_1 + sign(x_1)\,\|x\|_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix};$$

$$\|\tilde{u}\|_2 = \sqrt{8^2 + 4^2}$$

$$u = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_2} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} / 4\sqrt{5} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}.$$

Matricea de reflexie este

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = Q^T,$$

Se obţine

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$R = P \cdot A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{7}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

■

Problema 4.2.5 *Rezolvaţi sistemul*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

prin descompunere LUP.

Soluţie. Avem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Deci

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistemele triunghiulare corespunzătoare sunt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} y = Pb = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

cu soluţia $y = [8, 0, -1]^T$ şi

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

cu soluţia $x = [1, 1, 1]^T$. ■

Problema 4.2.6 *Arătaţi că orice matrice diagonal dominantă este nesingulară.*

Soluţie. Fie sistemul $Ax = 0$. Presupunem că are soluţie nebanală. Există k astfel încât $0 < |x_k| = \max\limits_{1 \le j \le n} |x_j| = \|x\|_1$

Deoarece

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad \text{pentru} \quad i = k$$

obţinem

$$a_{kk}x_k = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{kj}x_j \;\Rightarrow\; |a_{kk}||x_k| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}||x_j|$$

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

■

Observaţia 4.2.7 *În acest caz EG se face pără permutări.*

Dacă $l_{ii} = 1$ *avem factorizare Doolittle, iar dacă* $v_{ii} = 1$ *avem factorizare Crout.*

4.3 Sisteme de ecuaţii

Problema 4.3.1 *Arătaţi că* m*-norma*

$$\|A\|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

este naturală.

Soluţie. Vom arăta că

$$\|A\|_m = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty$$

Fie $x \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = 1$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |(Ax)_i| = \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \leq$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_{1\leq j\leq n} |x_j| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \|x\|_\infty =$$

$$= \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|Ax\|_\infty \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|,\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty$$

$$\|A\|_m = \max_{\|x\|_\infty=1} \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \tag{4.5}$$

Fie $p\in\mathbb{N}$, $1\le p\le n$ astfel încât

$$\sum_{j=1}^n |a_{pj}| = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Alegem x astfel încât

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad a_{pj}\ge 0 \\ -1 & \text{dacă} \quad a_{pj}< 0 \end{cases}$$

$$\|x\|_\infty = 1, \quad a_{pj}x_j = |a_{pj}|,\ \forall\, j=\overline{1,n}$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \ge \left|\sum_{j=1}^n a_{pj}x_j\right| = \sum_{j=1}^n |a_{pj}| = \max\sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

adică

$$\|A\|_m = \max_{\|x\|_\infty=1}\|Ax\|_\infty \ge \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \tag{4.6}$$

$(4.5),(4.6)\ \Rightarrow\ ''=''.$ ■

Problema 4.3.2 *Să se arate că l-norma*

$$\|A\|_l = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

este naturală.

Soluţie.

$$\|A\|_l := \max_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1 \stackrel{?}{=} \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Fie $x\in\mathbb{R}^n$ astfel încât $\|x\|_1=1$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \le \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n |a_{ij}||x_j| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|x\|_1 \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

adică

$$\|A\|_l \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Fie $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq n$ astfel încât

$$\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ip}|$$

şi $x \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $x_i = \delta_{ip}$. Avem $\|x\|_1 = 1$.

$$\|A\|_l \geq \|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ip}x_p| = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

■

Problema 4.3.3 *Arătaţi că norma euclidiană, l-norma şi m-norma sunt norme matriciale.*

Problema 4.3.4 *Rezolvaţi sistemul*

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$$

utilizând metoda lui Jacobi şi metoda Gauss-Seidel.

De câte iteraţii este nevoie pentru a se putea atinge o precizie dorită ε?

Soluţie.

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} \right) \tag{4.7}$$

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} \right) \tag{4.8}$$

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$$

$$x^{(1)} = \left(\frac{7}{5}, \frac{7}{5}, \frac{7}{5} \right)$$

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{5}(7 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)})$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{5}(7 - x_1^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{5}(7 - x_1^{(k-1)} - x_2^{(k-1)}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{5}\left(7 - \frac{7}{5} - \frac{7}{5}\right) = \frac{21}{25}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5}\left(7 - \frac{7}{5} - \frac{7}{5}\right) = \frac{21}{25}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{21}{25}$$

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{5}(7 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)})$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{5}(7 - x_1^{(k)} - x_3^{(k-1)})$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{5}(7 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}$$

$$x_1^{(1)} = \frac{7}{5}, \quad x_2^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{7}{5} = 0$$

$$x_3^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{7}{25} = \frac{21}{25}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{7}{5} - \frac{21}{125} = \frac{175 - 21}{125} = \frac{154}{125}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{7}{5} - \frac{154}{625} - \frac{21}{125}, \quad x_3^{(3)} = \frac{7}{5} - \frac{154}{125} - x_2^{(2)}$$

Pentru a rezolva a doua parte a problemei vom scrie sistemul sub forma

$$x = Tx + c \;\Rightarrow\; \|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Pentru Jacobi

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(7 - x_2 - x_3) \\ x_2 = \frac{1}{5}(7 - x_1 - x_3) \\ x_3 = \frac{1}{5}(7 - x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

$$\|T_J\|_m = \frac{2}{5} = \|T_J\|_l$$

$$\frac{\|T_J\|^k}{1 - \|T_J\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| < \varepsilon$$

$$x^{(0)} = 0, \quad x^{(1)} = \left(\frac{7}{5}, \frac{7}{5}, \frac{7}{5}\right)^T, \quad \|x_1\| = \frac{7}{5}$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^k}{\frac{3}{5}} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2^k}{5^{k-1}} \cdot 3 \cdot \frac{7}{5} < \varepsilon$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^k \cdot 21 < \varepsilon, \quad k(\ln 2 - \ln 5) + \ln 21 > \ln \varepsilon$$

Pentru Gauss-Seidel $x^{(0)} = 0$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{5}(7) = \frac{7}{5}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(7 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_2^{(0)}) = \frac{7}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{5} = 7\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25}\right) = \frac{28}{25}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(7 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}) = \frac{7}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{5} - \frac{28}{25} = \frac{35 - 7 - 28}{25} = 0$$

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \left\|\frac{7}{5}, \frac{28}{25}, 0\right\| = \frac{7}{5}$$

$$x^{(k)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k-1)} + (D - L)^{-1}b$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k)} = -a_{12}x_2^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1 \\ a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} = -a_{23}x_3^{(k)} - \cdots + b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(k)} = b_n \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = D - L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det E = 125, \quad E^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

■

$$\Gamma_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25, \quad \Gamma_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Gamma_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Gamma_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Gamma_{22} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25, \quad \Gamma_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Gamma_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad \Gamma_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Gamma_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{25} & -\frac{1}{25} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$T_{GS} = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{25} & -\frac{1}{25} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{25} & -\frac{4}{25} \\ 0 & \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \end{pmatrix}$$

$$\|T_{GS}\|_n = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^k}{\frac{3}{5}} \cdot \frac{7}{5} < \varepsilon$$

Problema 4.3.5 *Arătaţi că pentru* $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$

$$\|A\|_2 = [\rho(A^t A)]^{1/2}$$

Capitolul 5

Calculul cu diferenţe

Să considerăm mulţimea

$$M = \{a_k |\ a_k = a + kh,\ k = \overline{0, m},\ a, h \in \mathbb{R}\}$$

Definiţia 5.0.6 *Pentru $f : M \to \mathbb{R}$, cantitatea*

$$\Delta_h f(a_i) = f(a_i + h) - f(a_i), \quad i < m$$

se numeşte diferenţa finită de ordinul I cu pasul h a funcţiei f în punctul a_i.

Diferenţa finită de ordinul k se defineşte recursiv prin

$$\Delta_h^k f(a_i) = \Delta_n(\Delta_h^{k-1} f(a_i))$$

Au loc relaţiile

$$\Delta_h^m f(a) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} f[a + (m - i)h]$$

$$\Delta_h^m f(a) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{n}{i} f(a + ih)$$

$$f(a_k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta_h^i f(a)$$

$$\Delta_h^m (fg)a = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \Delta_h^i f(a) \Delta_h^{m-i} g(a + ih)$$

Valorile $[\Delta_1^m x^r]_{x=0} = \Delta^m 0^r$ se numesc diferenţele lui 0.

$$\Delta^m 0^r = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} i^r$$

Problema 5.0.7 ***Aplicaţie.*** *Vom stabili o formulă explicită pentru calculul sumei*

$$S_{m,r} = 1^r + 2^r + 3^r + \cdots + m^r$$

cu ajutorul diferenţelor lui 0.

$$S_{m,r} = \sum_{i=1}^{r} \binom{m+1}{i+1} \Delta^i 0^r$$
$$f(a_p) = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{k} \Delta_h^k f(a)$$
$$\Delta_h^m f(a) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f(a+ih)$$
$$f(x) = x^r$$
$$p^r = f(p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \Delta^k 0^r, \quad p = 1, 2, \ldots, m$$
$$1^r = \binom{1}{0} \Delta^0 0^r + \binom{1}{1} \Delta^1 0^r$$
$$2^r = \binom{2}{0} \Delta^0 0^r + \binom{2}{1} \Delta^1 0^r + \binom{2}{2} \Delta^2 0^r$$
$$\ldots$$
$$m^r = \binom{m}{0} \Delta^0 0^r + \binom{m}{1} \Delta^1 0^r + \cdots + \binom{m}{m} \Delta^m 0^r$$
$$S_{m,r} = \sum_{j=1}^{m} \left[\binom{j}{j} + \binom{j+1}{j} + \cdots + \binom{m}{j} \right] \Delta^j 0^r = \sum_{j=1}^{r} \binom{m+1}{j+1} \Delta^j 0^r$$

Deoarece dacă $m > r$, $\Delta^o 0^r = 0$ pentru $j = \overline{r+1, m}$ iar pentru $m < r$, $\binom{m+1}{j+1} = 0$, pentru $j = m+1, m+2, \ldots, r$.

Cazuri particulare

$$S_{m,1} = \binom{m+1}{2} \Delta 0 = \binom{m+1}{2} = \frac{m(m+1)}{2}, \quad \Delta 0 = 1$$
$$S_{m,2} = \binom{m+1}{2} \frac{\Delta 0^2}{1} + \binom{m+1}{3} \frac{\Delta^2 0^2}{2} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$
$$S_{m,3} = \binom{m+1}{2} \frac{\Delta 0^3}{1} + \binom{m+1}{3} \frac{\Delta^2 0^3}{6} + \binom{m+1}{4} \frac{\Delta^3 0^3}{6} = \left[\frac{m(m+1)}{2} \right]^2$$

Problema 5.0.8 *Să se demonstreze formula*

$$\Delta_h^m \frac{1}{x} = \frac{(-1)^m m! h^m}{x(x+h)\ldots(x+mh)}$$

(prin inducţie).

Definiţia 5.0.9 *Prederivata de ordinul m cu pasul h a funcţiei f în a este*

$$D_h^m f(a) = \frac{\Delta_h^m f(a)}{h^m}$$

$$D_n^0 f(a) = f(a)$$

Problema 5.0.10 *Dacă f are derivată de ordinul m continuă pe $(a, a+mh)$ are loc*

$$D_h^m f(a) = f^{(m)}(a + \theta_m h), \quad \theta \in (0,1)$$

Demonstraţie. Prin inducţie.

$$D_h f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(\xi_1), \quad \xi_1 \in (a, a+h)$$

$$D_h^{m-1} f(a) = f^{(m-1)}(\xi_{m-1}) | D_h, \quad \xi_{m-1} \in (a, a-(m-1)h)$$

$$D_h^m f(a) = \frac{1}{h}[f^{(m-1)}(\xi_{m-1} + h) - f^{(m-1)}(\xi_{m-1)}] = f^{(m)}(\xi_m)$$

$$\xi_m \in (a, a+mh) \Rightarrow \xi_m = a + \theta_m h, \quad \theta \in (0,1)$$

■

Corolar 5.0.11 *$f^{(m)}$ continuă în a $\Rightarrow$ $\lim\limits_{h \to 0} D_h^m(a) = f^{(m)}(a)$.*

Problema 5.0.12 *Să se demonstreze formulele*

$$\Delta_h^m \cos(ax+b) = \left(2 \sin \frac{ah}{2}\right)^m \cos\left(ax + b + m\frac{ah+\pi}{2}\right)$$

$$\Delta_h^m \sin(ax+b) = \left(2 \sin \frac{ah}{2}\right)^m \sin\left(ax + b + m\frac{ah+\pi}{2}\right)$$

Să se deducă de aici expresiile prederivatelor de ordinul m ale funcţiilor $\cos x$, $\sin x$ şi să se calculeze limitele lor când $h \to 0$.

Soluţie.

$$\Delta_h \cos(ax+b) = \cos[a(x+h)+b] - \cos(ax+h) =$$

$$= 02 \sin \frac{ah}{2} \sin\left(ax + b + \frac{ah}{2}\right) =$$

$$= 2 \sin \frac{ah}{2} \cos\left(ax + b + \frac{\pi + ah}{2}\right) \Big| \Delta_h \text{ de } n-1 \text{ ori}$$

$$\Delta_h^m \sin(ax+b) = \Delta_h^m \cos\left(ax+b-\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^m \cos\left(ax+b+m\frac{ah+\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^m \sin\left(ax+b+m\frac{ah+\pi}{2}\right)$$

Făcând $a=1,\ b=0$ şi împărţind cu h^m se obţine

$$D_h^m \cos x = \left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^m \cos\left(x+m\frac{h+\pi}{2}\right)$$

$$D_h^m \sin x = \left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^m \sin\left(x+m\frac{h+\pi}{2}\right)$$

■

Problema 5.0.13 *Să se calculeze* $\Delta_h^m \frac{1}{x^2}$.

Soluţie.

$$\Delta_h^m \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+h}+\cdots+\frac{1}{x+mh}\right)\Delta_h^2\frac{1}{x} =$$
$$= (-1)^m m!\frac{U_m'(x)}{U_m^2(x)}h^m$$
$$u_m(x) = \prod_{k=0}^m (x+kh)$$
$$\Delta_h^m(fg)(a) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i}\Delta_h^i f(a)\Delta_h^{m-i} g(a+ih)$$

■

Problema 5.0.14 *Să se demonstreze formula*

$$\delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f\left[x+\left(\frac{m}{2}-k\right)h\right]$$

Soluţie.

$$\delta^m = (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} E^{\frac{n}{2}-k}$$

■

Problema 5.0.15 *Să se stabilească generalizarea formulei lui Leibniz prin calcul simbolic.*

Soluţie. $\overline{E}_h$ operator de translaţie ce are efect numai asupra lui u
$\overline{\overline{E}}_h$ operator de translaţie ce are efect numai asupra lui v

$$\Delta_h u(x)v(x) = u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) =$$

$$= (\overline{E}_h \overline{\overline{E}}_h - I)u(x)v(x)$$

$$\Delta_h = \overline{E}\overline{\overline{E}} - I$$

$\overline{\Delta}_h$ operator de diferenţă ce are efect asupra lui u
$\overline{\overline{\Delta}}_h$ operator de diferenţă ce are efect asupra lui v

$$E_n = I + \overline{\Delta}_h \quad \overline{\overline{\Delta}}_h = \overline{\overline{E}}_h - I$$

$$\Delta_h = \overline{\Delta}_h \overline{\overline{E}}_h + \overline{\overline{\Delta}}_h$$

$$\Delta_h^m = (\overline{\Delta}_h \overline{\overline{E}}_h + \overline{\overline{\Delta}}_h)^m = \sum_{j=0}^{m} \overline{\Delta}_h^j \overline{\overline{\Delta}}_h^{m-j} \overline{\overline{E}}_h^j$$

$$\Delta_h^m u(x)v(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \Delta_h^j u(x) \Delta_h^{m-j} v(x+jh)$$

$$(a+b)^{[m,j]} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^{[m-j,h]} b^{[j,h]}$$

$$[a, a+h, \ldots, a+nh; f] = \frac{1}{n! h^n} \Delta_h^m f(a)$$

$$\Delta_h^m (fg)(a) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \Delta_h^i f(a) \Delta_h^{m-i} g(a+ih)$$

■

Problema 5.0.16 *Să se demonstreze formula de sumare prin părţi.*

$$\sum_{x=a(h)}^{a+mh} u(x)\Delta_h v(x) = u(x)v(x)\Big|_a^{a+(m+1)h} - \sum_{x=a}^{a+mh} v(x+h)\Delta_h u(x)$$

Să se calculeze

$$\sum_{x=0}^{m} x b^x \quad (b > 0,\ b \neq 1), \quad \sum_{x=0}^{m} v(x+h)\Delta_h h(x)$$

Soluţie. Dacă F este o soluţie a ecuaţiei cu diferenţe

$$\Delta_h F(x) = f(x)$$

are loc formula de sumare

$$\sum_{j=0}^{m} f(a+jh) = F[a+(m+1)h] - F(a)$$

$$\Delta_h F(x) = F(x+h) - F(x) = x, \quad x = a, a+h, \dots, a+mh$$

$$\Delta_h F(x) = f(x), \quad F(x) = u(x)v(x)$$

$$\Delta_h u(x)v(x) = u(x)\Delta_h v(x) + \Delta_h u(x)v(x+h)$$

$$\sum_{x=a(h)}^{a+mh} u(x)\Delta_h v(x) + \sum_{x=a(h)}^{a+mh} v(x+h)\Delta_h u(x) = u(x)v(x)\Big|_a^{a+(m+1)h}$$

$$u(x) = x, \quad \Delta v(x) = b^x \Rightarrow v(x) = \frac{b^x}{b-1}$$

$$\sum_{x=0}^{m} xb^x = x\frac{b^x}{b-1}\Big|_0^{m+1} - \sum_{x=0}^{m} \frac{b^x}{b-1} =$$

$$= (m+1)\frac{b^{m+1}}{b-1} - \frac{1}{b-1}(b+b^2+\cdots+b^{m+1}) = (m+1)\frac{b^{m+1}}{b-1} - \frac{b^{m+2}-b}{(b-1)^2}$$

$$u(x) = x, \quad \Delta v(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = \frac{-\cos\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}$$

$$\sum_{x=a}^{a+mh} x\sin x = -x\frac{\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}\Bigg|_a^{a+(m+1)h} + \sum_{x=a}^{a+mh} \frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}$$

Deoarece $\Delta_h F(x) = \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ este satisfăcută pentru $F(x) = \dfrac{\sin x}{2\sin\frac{h}{2}}$ rezultă că avem

$$\sum_{x=a}^{a+mh} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \frac{\sin x}{2\sin\frac{h}{2}}\Bigg|_a^{a+(m+1)h}$$

■

Problema 5.0.17 *Să se calculeze* $\Delta_h^m \frac{1}{x^2}$.

Soluţie.

$$\Delta_h^m \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+h} + \cdots + \frac{1}{x+mh}\right) \Delta_h^m \frac{1}{x} =$$

$$= (-1)^m m! \frac{u_m'(x)}{u_m^2(x)} h^m$$

unde

$$u_m(x) = \prod_{k=0}^{m} (x+kh).$$

■

Problema 5.0.18 *Să se demonstreze*

$$\left[a_0, a_1, \ldots, a_m; \frac{1}{t}\right] = \frac{(-1)^m}{a_0 a_1 \ldots a_m}$$

Soluţie. (prin inducţie sau ca şi cât de doi determinanţi). ■

Problema 5.0.19 *Se consideră* $p+1$ *puncte distincte* $a_0, a_1, \ldots, a_p$. *Să se demonstreze formula*

$$[a_0, a_1, \ldots, a_p; t^p] = \sum_{r_0+r_1+\cdots+r_p=n-p} a_0^{r_0} a_1^{r_1} \ldots a_p^{r_p}.$$

Problema 5.0.20 *Să se demonstreze formula*

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_m; f] = \frac{a_k - a_0}{a_m - a_0}[a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}; f] + \frac{a_m - a_n}{a_m - a_0}[a_1, a_2, \ldots, a_m; f]$$

Soluţie.

$$a_k, a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_{m-1}, a_m$$

$$[a_0, a_1, \ldots, a_m; f] = \frac{[a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_m; f] - [a_0, \ldots, a_{n-1}; f]}{a_m - a_k}, \quad (5.1)$$

$$[a_0, a_1, \ldots, a_m; f] = \frac{[a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_m; f] - [a_1, \ldots, a_m; f]}{a_0 - a_k} \quad (5.2)$$

Egalând cele două relaţii rezultă relaţia dorită. ■

Problema 5.0.21 *Dacă $f, g : X \to \mathbb{R}$, atunci*

$$[x_0, \ldots, x_m; fg] = \sum_{k=0}^{m} [x_0, \ldots, x_k][x_k, \ldots, x_m; g]$$

Demonstraţie. Prin inducţie după m
$m = 1$

$$[x_0, x_1; fg] = f(x_0)[x_0, x_1; g] + [x_0, x_1; f]g(x_1) =$$

$$= f(x_0)\frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} g(x_1) =$$

$$= \frac{f(x_1)g(x_1) - f(x_0)g(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Presupunem relaţia adevărată pentru $m - 1$, adică

$$[x_0, \ldots, x_{m-1}; fg] = \sum_{k=0}^{m-1} [x_0, \ldots, x_k; f][x_k, \ldots, x_{m-1}; g]$$

$$[x_0, \ldots, x_n; fg] \stackrel{def}{=} \frac{1}{x_m - x_0}([x_1, \ldots, x_m; fg] - [x_0, \ldots, x_{m-1}; fg]) =$$

$$= \frac{1}{x_m - x_0} \sum_{k=0}^{m-1} ([x_1, \ldots, x_{k+1}; f][x_{k+1}, \ldots, x_n; g] - [x_0, \ldots, x_k; f][x_k, \ldots, x_{n-1}; g])$$

Adunând şi scăzând sub simbolul de însumare $[x_0, \ldots, x_k; f][x_{k+1}, \ldots, x_m; g]$ şi grupând convenabil se obţine

$$[x_0, \ldots, x_m; fg] = \frac{1}{x_m - x_0} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} [x_0, \ldots, x_k; f]([x_{k+1}, \ldots, x_m; g] - [x_k, \ldots, x_{m-1}; g]) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{m-1} [x_{k+1}, \ldots, x_n; g]([x_1, \ldots, x_{k+1}; f] - [x_0, \ldots, x_k f]) \right\} =$$

$$= \frac{1}{x_n - x_0} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} (x_m - x_k)[x_0, \ldots, x_k; f][x_k, \ldots, x_m; g] + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_0)[x_0, \ldots, x_n; f][x_k, \ldots, x_n; g] \right\} =$$

$$= \frac{1}{x_n - x_0} \left\{ (x_m - x_0)[x_0; f][x_0, \ldots, x_n; g] + \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}(x_m - x_0)[x_0, \ldots, x_k; f][x_k, \ldots, x_m; g]+$$

$$\left.+(x_m - x_0)[x_0, \ldots, x_m; f][x_m; g]\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}[x_0, \ldots,_k; f][x_k, \ldots, x_m; g]$$

■

Observaţia 5.0.22 *Diferenţa divizată se poate introduce ca şi coeficient dominant în PIL.*

Problema 5.0.23 *(Aplicaţie) O modalitate rapidă de a calcula valorile unui polinom de grad 3 în puncte echidistante folosind diferenţe divizate.*

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\Delta P(x) = P(x+h) - P(x) \;\Rightarrow\; P(x+h) = P(x) + \Delta P(x)$$

$$\Delta^2 P(x) = \Delta P(x+h) - \Delta P(x)$$

$$\Delta P(x+h) = \Delta P(x) + \Delta^2 P(x)$$

$$\Delta^3 P(x) = \Delta^2 P(x+h) - \Delta^2 P(x)$$

$$\Delta^2 P(x+h) = \Delta^2 P(x) + \Delta^3 P(x)$$

$$\Delta^3 P(x) = 6ah^3$$

$$\Delta P(0) = ah^3 + bh^2 + ch = h(h(ah+b)+c)$$

$$\Delta^2 P(0) = P(2h) - 2P(h) + P(0) =$$

$$= 8ah^3 + 4bh^2 + 2ch + d - 2ah^3 - 2bh^2 - 2ch - 2d + d =$$

$$= 6ah^3 + 2bh^2 = 2h^2(3ah + b)$$

$\Delta^3 P(0)$

$$\Delta_{k,i+1} = \Delta_{k-1,i} + \Delta_{k-1,i+1}$$

Problema 5.0.24 *Dacă $f, g : M \to \mathbb{R}$ are loc*

$$(\Delta_h^m fg)(a) = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(\Delta_h^i f)(a)(\Delta_h^{m-i} g)(a+ih)$$

Demonstraţie. Inducţie după m

$m = 1$

$$(\Delta_h fg)(a) = f(a)(\Delta_h g)(a) + g(a+h)(\Delta_h f)a \tag{5.3}$$

căci

$$(\Delta_h fg)(a) = f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)| \pm f(a)g(c+h)$$

$$(\Delta_h fg)(a) = f(a)[g(a+h) - g(a)] + g(a+h)[f(a+h) - f(a)]$$

Presupunem relaţia adevărată pentru $m-1$

$$(\Delta_h^{m-1} fg)(a) = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} (\Delta_h^o f)(a)(\Delta_h^{m-i-1} g)(a+ih)$$

$$(5.3) \Rightarrow (\Delta_h^m fg)(a) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m-1}{i} [(\Delta_h^i f)(a)(\Delta_h^{m-i} g(a+ih)+$$

$$+(\Delta_h^{i+1} f)(a)(\Delta_h^{m-i-1} g(a+(i+1)h)]$$

$$(\Delta_h^m fg)(a) = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} (\Delta_h^i f)(a)(\Delta_h^{m-i} g)(a+ih)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} (\Delta_h^k f)(a)(\Delta_h^{m-k} g)(a+kh) =$$

$$= f(a)(\Delta_h^m g)(a) + \sum \left[\binom{m-1}{i} + \binom{m-1}{i-1} \right] (\Delta_h^{m-i} g)(a+ih)+$$

$$+(\Delta_h^m f)(a)g(a+mh).$$

■

Problema 5.0.25 *(Formula lui Vandermonde)*

$$(a+b)^{[m,h]} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^{[m-j,h]} b^{[j,h]}.$$

Demonstraţie. Inducţie după m

$m = 1$

$$(a+b)^{[1,h]} = a+b$$

$$\binom{1}{0} a^{[1,h]} b^{[0,h]} + \binom{1}{1} a^{[0,h]} b^{[1,h]} = a+b$$

Presupunem că

$$(a+b)^{[m-1,h]} = \sum \binom{m-1}{j} a^{[m-1-j,h]} b^{[j,h]} / (a+b-(m-1)h)$$

$$\begin{aligned} a^{[m-1-j,h]} b^{[j,h]} [a+b-(m-1)h] &= a^{[m-1-j,h]} [a-(m-1-h] b^{[j,h]} + a^{[m-1-j,h]} b^{[j,h]} (b-jh) \\ &= a^{[m-j,h]} b^{[j,h]} + a^{[m-1-j]} b^{[j+1,h]}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^{[mh]} &= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} a^{[m-j,h]} b^{[j,h]} + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} a^{[m-1-j,h]} b^{[j+1,h]} \\ &= \binom{m-1}{0} a^{[m,h]} b^{[0,h]} + \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1} \right] a^{[m-j,h]} b^{[j,h]} \\ &+ \binom{m-1}{m-1} a^{[0,h]} b^{[m,h]} \\ &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^{[m-j,h]} b^{[j,h]}. \end{aligned}$$

■

Capitolul 6

Interpolare

6.1 Interpolare polinomială

Fie nodurile $x_i \in [a,b],\ i=\overline{0,m},\ i \neq j \ \Rightarrow\ x_i \neq x_j$.

Are loc formula de interpolare Lagrange

$$f = L_m f + R_m f$$

unde

$$(L_m f)(x) = \sum_{k=0}^{m} l_k(x) f(x_k)$$

şi

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_m)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_m)} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m}(x_k-x_j)} = \frac{u(x)}{(x-x_k)u'(x_k)}$$

unde $u(x) = (x-x_0)\dots(x-x_m)$.

Dacă $\alpha = \min\{x, x_0, \dots, x_m\}$, $\beta = \max\{x, x_0, \dots, x_m\}$, $f \in C^m[\alpha,\beta]$, $f^{(m)}$ derivabilă pe (α,β) $\exists\, \xi \in (\alpha,\beta)$ astfel încât

$$(R_m f)(x) = \frac{u(x)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)$$

Dacă $f \in C^{m+1}[a,b]$ atunci

$$(R_m f)(x) = \int_a^b \varphi_m(x,s) f^{(m+1)}(s)ds$$

cu

$$\varphi_m(x;s) = \frac{1}{m!}\left[(x-s)_+^m - \sum_{k=0}^{m} l_k(x)(x_k - s)_+^m\right]$$

Dacă $l_m(x,\cdot)$ păstrează semn constant pe $[a,b]$ atunci

$$(R_m f)(x) = \frac{1}{(m+1)!}\left[x^{m+1} - \sum_{k=0}^{m} l_k(x) x_k^{m+1}\right] f^{(m+1)}(\xi)$$

$$\xi \in [a,b]$$

$$(N_m f)(x) = f(x_0) + \sum_{i=0}^{m}(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})[x_0,\dots,x_i;f]$$

$$f = N_m f + R_m f \quad \text{formula de int.Newton}$$

$$(R_m f)(x) = u(x)[x,x_0,\dots,x_m;f] \quad x \in [a,b]$$

Pentru noduri echidistante

$$x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{0,m}$$

$$(L_m f)(x_0 + th) = \frac{t^{[m+1]}}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\frac{1}{t-i} f(x_i)$$

$$(R_m f)(x_0 + th) = \frac{h^{m+1} t^{[m+1]}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)$$

$$(N_m f)(x_0 + th) = (N_m f)(t) = \sum_{k=0}^{m}\binom{t}{k}\Delta_h^k f(x_0)$$

(Formula Gregory-Newton, formula lui Newton cu diferenţe progresive)

$$(N_m f)(x) = (N_m f)(x_0 + th) = f(x_n) + \sum_{k=1}^{m}\binom{t+k-1}{k}\nabla_h^k f(x_m) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{-t}{k}\nabla_h^k(x_m)$$

(Formula lui Newton cu diferenţe regresive)

$$S_{2n+1}(x_0+th) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{t+k-1}{2k-1} \frac{\Delta^{2k-1} f_{1-k} + \Delta^{2k-1} f_{-k}}{2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{t}{2k} \binom{t+k-1}{2k-1} \Delta^{2k} f_{-k}$$

$$S_{2n+2}(x_0+th) = S_{2n+1}(x_0+th) + \binom{t+n}{2n+1} \frac{\Delta^{2n+1} f_{-n} + \Delta^{2n+1}}{2}$$

(Formula lui Stirling)

$$x_k \in [a,b],\ k = \overline{0,m},\ x_i \neq x_j\ (i \neq j)$$

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}\ \exists\ f^{(j)}(x_k),\ k = \overline{0,m},\ j = \overline{0,r_k}$$

$$n+1 = m + r_0 + \cdots + r_m = (r_0+1) + \cdots + (r_m+1)$$

$$(H_n f)(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{r_k} h_{kj} f^{(j)}(x_k)$$

$$h_{kj}(x) = \frac{(x-x_k)^j}{j!} u_k(x) \sum_{\nu=0}^{r_k-j} \frac{(x-x_k)^\nu}{\nu!} \left[\frac{1}{n_k(x)}\right]^{(\nu)}_{x=x_k}$$

$$f = H_n f + R_n f \quad \text{(formula de interpolare a lui Hermite)}$$

$$u(x) = \prod_{k=0}^{m} (x-x_k)^{r_k+1}$$

$$u_k(x) = \frac{u(x)}{(x-x_k)^{r_k+1}}$$

Dacă $f \in C^n[\alpha,\beta]\ \exists\ f^{(n+1)}$ pe $[\alpha,\beta]$ atunci

$$(R_n f)(x) = \frac{u(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \xi \in [a,b]$$

Dacă $f \in C^{n+1}[\alpha,\beta]$ atunci

$$(R_m f)(x) = \int_a^b \varphi_n(x;s) f^{(n+1)}(s) ds$$

unde

$$\varphi_n(x;s) = \frac{1}{n!} \left\{ (x-s)_+^n - \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{r_k} h_{kj}(x) [(x_k-s)_+^n]^{(j)} \right\}$$

Cazuri particulare
1) $r_k = 0,\ k = \overline{0,n}$ Lagrange
2) $n = 0,\ r_0 = n$ Taylor
3) $r_0 = \cdots = r_n = 1$ formula lui Hermite cu noduri duble

$$f = H_{2m+1}f + R_{2m+1}f$$

$$(H_{2m+1}f)(x) = \sum_{k=0}^{m} h_{k_0}(x)f(x_k) + \sum_{k=0}^{m} h_{k_1}(x)f'(x_k)$$

$$h_{x_0}(x) = \frac{u_k(x)}{u_k(x_k)}\left[1 - (x - x_k)\frac{u_k'(x_k)}{u_k(x_k)}\right]$$

$$h_{k_1}(x) = (x - x_k)\frac{u_k(x)}{u_k(x_k)}$$

4) Dacă $m = 1,\ x_0 = a,\ x_1 = b$

$$r_0 = m, \quad r_1 = n$$

$$(H_{m+n+1}f)(x) = \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{n+1} \sum_{i=0}^{m} \frac{(x-a)^i}{i!}\left[\sum_{\nu=0}^{m-i}\binom{n+\nu}{\nu}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\nu}\right] f^{(i)}(a) +$$

$$+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{m+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-b)^j}{j!}\left[\sum_{\mu=0}^{n-j}\binom{m+\mu}{\mu}\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{\mu}\right] f^{(j)}(b)$$

$x_k \in [a,b],\ k = \overline{0,m},\ x_i \neq x_k\ (i \neq j)$
$r_k \in \mathbb{N},\ I_k \subseteq \{0,1,\ldots,r_k\},\ k = \overline{0,m}$
$f : [a,b] \to \mathbb{R}\ \exists\ f^{(j)}(x_k)\ k = \overline{0,m},\ j \in I_n$
$n = |I_0| + \cdots + |I_m| - 1$

$$(B_nf)(x) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j\in I_k} b_{kj}(x)f^{(j)}(x_k)$$

$$f = B_nf + R_nf \quad \text{(formula de interpolare a lui Birkhoff)}$$

Dacă $f \in C^{n+1}[a,b]$ atunci

$$(R_nf) = \int_a^b \varphi_n(x,s)f^{(n+1)}(s)ds$$

unde

$$\varphi_n(x;s) = \frac{1}{n!}\left\{(x-s)_+^n - \sum_{k=0}^{m}\sum_{j\in I_k} b_{kj}(x)[(x_k - s)_+^n]^{(j)}\right\}$$

Dacă $f \in C^{n+1}[a,b]$ şi φ_n are semn constant pe $[a,b]$

$$(R_n f)(x) = E(x) f^{(n+1)}(\xi) \quad \xi \in [a,b]$$

$$E(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^{m} \sum_{j \in I_k} \frac{1}{(n-j+1)!} x_k^{n-j+1} b_{kj}(x)$$

6.2 Interpolare Lagrange

Problema 6.2.1 *Să se scrie formula de interpolare a lui Lagrange în cazurile speciale $m = 1$ şi $m = 2$. Interpretare geometrică.*

Soluţie. Polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcţii f şi nodurilor x_0 şi x_1 este

$$\left(L_1 f\right)(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$

adică dreapta care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$ şi $(x_1, f(x_1))$. Analog, polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcţii f şi nodurilor x_0, x_1 şi x_2 este

$$\begin{aligned}\left(L_2 f\right)(x) = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \\ & \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2),\end{aligned}$$

adică parabola care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ şi $(x_2, f(x_2))$. Interpretarea lor geometrică apare în figura 6.1.

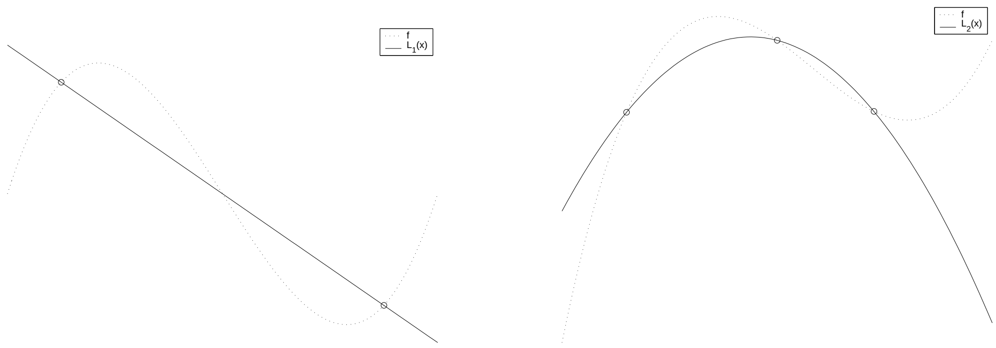
■

Problema 6.2.2 *Construiţi polinomul de interpolare Lagrange pentru funcţia* $y = \sin \pi x$ *alegând* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Soluţie.

$$\begin{aligned}(L_2 y)(x) &= \frac{7}{2} x - 3x^2, \\ (R_2 y)(x) &= \frac{x\left(x - \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{3!} \pi \cos \pi\xi, \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

■



(a) $(L_1 f)$ (b) $(L_2 f)$

Figura 6.1: Interpretarea geometrică a lui $L_1 f$ (stânga) şi $L_2 f$

Problema 6.2.3 *Cu ce eroare se poate calcula $\sqrt{115}$ cu ajutorul formulei de interpolare a lui Lagrange, considerând funcţia $f(x) = \sqrt{x}$ şi nodurile $x_0 = 100,\ x_1 = 121,\ x_2 = 144$?*

$$(R_2 f)(x) = \frac{(x-100)(x-121)(x-144)}{6} f'''(\xi)$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$|(R_1 f)(115)| \leq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{100^5}} \cdot \frac{1}{6} |(115-100)(115-121)(115-144)| =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot 10^{-5} \cdot 15 \cdot 6 \cdot 29 \approx 1 \cdot 6 \cdot 10^{-3}$$

Problema 6.2.4 *În tabelele cu 5 zecimale corecte se dau logaritmii zecimali ai numerelor de la $x = 1000$ la $x = 10000$ cu eroarea absolută maximă egală cu $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$. Este posibil ca interpolarea liniară să conducă la o aceeaşi precizie?*

Soluţie.

$$f(x) = \lg x \quad f'(x) = \frac{M}{x} \quad f''(x) = -\frac{M}{x^2}$$

$$M = \lg e \approx 0.4343$$

$$|(R_1 f)(x)| \leq \frac{(x-a)(x-b)}{2} M_2 f$$

$$M_2(f) = \max |f''(x)| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$$

$$a < x < a+1$$

$$b = a + 1$$

$$x - a = q$$

$$|(R_1f)(x)| < \frac{1}{2}|\underbrace{q(q-1)}_{\leq \frac{1}{4}}|M_2(f)$$

$$|R_1f| \leq \frac{1}{16} \cdot 10^{-6} < 10^{-7}$$

deci precizia nu este alterată. ■

Problema 6.2.5 *Relativ la funcţia sin se alcătuieşte următoarea tabelă cu diferenţe*

x	$\Delta^0 = y$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
$39°$	0.6293204	267386	-7992	-318	13
$41°$	0.6560590	259354	-8310	-305	10
$43°$	0.6819984	251084	-8615	-295	10
$45°$	0.7071068	242469	-8910	-285	
$47°$	0.7313597	233559	-9195		
$49°$	0.7547096	224364			
$51°$	0.7771460				

Să se aproximeze $\sin 40°$, $\sin 50°$, $\sin 44°$ *cu formula Gregory-Newton pentru* $m = 4$.

$$(N_mf)(t) = \sum_{i=0}^{m} \binom{t}{k} \Delta_h^k f(x_0)$$

$$(R_mf)(x_0 + th) = \frac{h^{m+1}t^{[m+1]}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)$$

$$f(x) \approx f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{6}\Delta^3 f_0 +$$

$$+\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{24}\Delta^4 f_0 + R_4$$

$$\sin 40° \approx 0.6293204 + \frac{1}{2} \cdot 0.0267386 - \frac{1}{8}(-0.0007992) +$$

$$+\frac{1}{16}(-0.0000318) - \frac{5}{64} \cdot 0.0000013 = 0.6427876$$

$$|(R_4f)(t)| \leq h^5 t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) f^{(5)}(\xi) < 0.0000000028$$

$\sin 50°$ se poate aproxima cu formula lui Newton cu diferenţe regresive.
$\sin 44°$ se poate aproxima cu formula lui Stirling.

Problema 6.2.6 *Să se determine un polinom de interpolare de grad 3 pe intervalul* $[-1, 1]$ *astfel încât restul să fie minim.*

Soluţie. Restul este minim dacă nodurile de interpolare sunt rădăcinile polinomului Cebâşev de speţa I.

$$T_m(t) = \cos(\arccos t)$$

$$\|R_m f\|_\infty \leq \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!2^{2m+1}} \|f^{(m+1)}\|_\infty$$

$$T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$$

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$$

$$T_0 = 1, \quad T_1 = t$$

$$t_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi \quad k = \overline{1, n}$$

■

6.3 Interpolare Hermite

Problema 6.3.1 *Să se determine polinomul de interpolare Hermite cu nodurile* $x_0 = -1$ *multiplu de ordinul 3,* $x_1 = 0$ *simplu şi* $x_2 = 1$ *multiplu de ordinul 3.*

Soluţie.

$$m = 2, \quad r = 0 = 2, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 2$$

$$H_n f)(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{r_k} h_{kj}(x) f^{(j)}(x_k)$$

$$u_k(x) = \frac{u(x)}{(x - x_k)^{r_k+1}}$$

$$h_{kj}(x) = \frac{(x-x_k)^j}{j!} u_k(x) \sum_{\nu=0}^{r_k-j} \frac{(x-x_k)^\nu}{\nu!} \left[\frac{1}{u_k(x)}\right]^{(\nu)}_{x=x_k}$$

$$n + 1 = 3 + 1 + 3 = 7 \Rightarrow n = 6$$

$$h_{00}(x) = x(x-1)^3 \left[\frac{1}{8} + \frac{5(x+1)}{16} + \frac{(x+1)^2}{2}\right]$$

$$h_{01}(x) = x(x-1)^3(x+1) \left[\frac{1}{8} + \frac{5(x+1)}{16}\right]$$

$$h_{02}(x) = \frac{x(x-1)^3(x+1)^2}{16}$$
$$h_{10}(x) = (1-x^2)^3$$
$$h_{20}(x) = x(x+1)^3\left[\frac{1}{8} - \frac{5(x-1)}{16} + \frac{(x+1)^2}{2}\right]$$
$$h_{21}(x) = x(x+1)^3(x-1)\left[\frac{1}{8} - \frac{3(x-1)}{16}\right]$$
$$h_{22}(x) = \frac{x(x+1)^3(x-1)^2}{16}$$

■

Problema 6.3.2 *Aceeaşi problemă, pentru aceleaşi noduri ca mai sus, dar duble.*

Soluţie.

$$r_0 = r_1 = r_2 = 1, \quad m = 2, \quad n = 5, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$
$$(H_{2m+1}f)(x) = \sum_{k=0}^{m} h_{k_0}(x)f(x_k) + \sum_{k=0}^{m} h_{k_1}(x)f'(x_k)$$
$$h_{k_0}(x) = \frac{u_k(x)}{u_k(x_k)}\left[1 - (x-x_k)\frac{u_k'(x_k)}{u_k(x_k)}\right]$$
$$h_{n_1}(x) = (x-x_n)\frac{u_k(x)}{u_k(x_k)} \quad u_0(x) = x^2(x-1)^2$$
$$u_0(-1) = 4 \quad u_0'(x) = 2x(x-1)(x-1+x) = 2x(x-1)(2x-1)$$
$$h_{00}(x) = \frac{x^2(x-1)^2}{4}\left[1 - \frac{12}{4}(x+1)\right] = \frac{x^2(x-1)^2}{4}(-3x-2)$$
$$h_{01}(x) = \frac{(x+1)x^2(x-1)^2}{4}$$
$$u_1(x) = (x+1)^2(x-1)^2$$
$$u_1'(x) = 2(x+1)(x-1)^2 + 2(x+1)^2(x-1) =$$
$$= 2(x+1)(x-1)(x-1+x+1) = 4x(x-1)(x+1)$$
$$h_{10}(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)^2}{1}[1 - x \cdot 0] = (x+1)^2(x-1)^2$$
$$h_{11}(x) = (x+1)^2(x-1)^2x$$
$$u_2(x) = (x+1)^2x^2 \quad u_2(1) = 4$$

$$u_2'(x) = 2(x+1)x^2 + 2(x+1)^2x = 2(x+1)x(2x+1)$$

$$u_2'(1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 12$$

$$h_{20}(x) = \frac{(x+1)^2x^2}{4}\left[1-(x-1)\frac{12}{4}\right] = \frac{(x+1)^2x^2}{4}[-3x+4]$$

$$h_{21}(x) = \frac{(x-1)(x+1)^2x^2}{4}$$

■

Problema 6.3.3 *Să se arate că pentru PIH cu noduri duble avem*

$$h_{k0}(x) = \left[1 - 2(x-x_k)l_k'(x_k)\right] l_k^2(x)$$

$$h_{k1}(x) = (x-x_k)l_k^2(x)$$

unde l_k sunt polinoamele fundamentale Lagrange.

Problema 6.3.4 *Să se determine PIH pentru $x_0 = a,\ x_1 = b,\ m = 1,\ r_0 = r_1 = 1$.*

Soluţie. Se poate aplica formula cu noduri duble sau generalizarea formulei lui Taylor.

$$u_0 = (x-b)^2 \quad u_1 = (x-a)^2$$

$$\begin{aligned} h_{00}(x) &= \frac{(x-b)^2}{(a-b)^2}\left[1-(x-a)\frac{2(a-b)}{(a-b)^2}\right] \\ &= \frac{(x-b)^2}{(a-b)^2}\left[\frac{a-b-2x+2a}{a-b}\right] = \frac{(x-b)^2}{(a-b)^3}[3a-b-2x] \end{aligned}$$

$$h_{01}(x) = (x-a)\frac{(x-b)^2}{(a-b)^2}$$

$$h_{10}(x) = \frac{(x-a)^2}{(b-a)^3}[3b-a-2x]$$

$$h_{11}(x) = (x-b)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2$$

$$(H_3f)(x) = h_{00}(x)f(a) + h_{01}(x)f'(a) + h_{10}(x)f(b) + h_{11}(x)f'(b)$$

■

Problema 6.3.5 *Se consideră $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Se notează cu $F_{2n+1}f$ polinomul Hermite cu noduri duble determinat de condiţiile*

$$\begin{array}{l}(F_{2m+1}f)(x_k) = f(x_k), \quad k = \overline{0, m} \\ (F_{2m+1}f)'(x_k) = 0.\end{array}$$

Să se arate că dacă $x_0, x_1, \ldots, x_m$ sunt rădăcinile polinomului lui Cebâşev de speţa I avem:

$$(F_{2m+1}f)(x) = \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{k=0}^{m} (1 - x_k x) \left(\frac{T_{m+1}(x)}{x - x_k} \right)^2 f(x_k).$$

Soluţie.

$$h_{k_0}(x) = \frac{u_k(x)}{u_k(x_k)} \left[1 - (x - x_k) \frac{u'(x_k)}{u_k(x_k)} \right]$$

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_m)$$

$$u_k(x) = \frac{w^2(x)}{(x - x_k)^2} = \left(\frac{1}{2^m} \frac{T_{m+1}(x)}{x - x_k} \right)^2$$

$$1 - (x - x_k) \frac{u_k'(x_k)}{u_k(x_k)} = (x - x_k) \left[\frac{1}{x - x_k} + \frac{1}{x_0 - x_k} + \cdots + \frac{1}{x_n - x_k} \right]$$

$$u_k(x_k) = w'^2(x_k)$$

$$u_k'(x_k) = w'(x_k) w''(x_k)$$

$$w'(x_k) = \frac{m+1}{2^m} \frac{(-1)^k}{\sqrt{1 - x_k^2}}$$

$$w''(x) = \frac{m+1}{2^m} \Big(x \sin[(m+1) \arccos x] -$$

-

$$(m+1)\sqrt{1 - x^2} \cos[(m+1) \arccos x] \Big) / \left(\sqrt{1 - x^2} \right)^3$$

$$w''(x_k) = \frac{m+1}{2^m} \frac{(-1)^k x_k}{\left(\sqrt{1 - x_k^2} \right)^3}$$

$$h_{k_0}(x) = \left(\frac{1}{2^m} \frac{T_{m+1}(x)}{x - x_k} \right)^2 \frac{1}{w'^2(x_k)}$$

$$\left[1 - (x - x_k) \frac{w'(x_k) w''(x_k)}{w'^2(x_k)} \right] =$$

$$= \left(\frac{T_{m+1}(x)}{x-x_k}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^m}\frac{2^{2m}(1-x_k)^2}{(m+1)^2}\left(\frac{1-(x-x_k)\dfrac{x_k(m+1)^2}{2^{2m}(1-x_k)^2}}{\dfrac{(m+1)^2}{2^{2m}}-\dfrac{1}{x-x_k}}\right) =$$

$$= \frac{1}{(m+1)^2}\left(\frac{T_{m+1}(x)}{x-x_k}\right)^2(1-x_kx)$$

■

Problema 6.3.6 (Relaţia lui Cauchy) *Arătaţi că* $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x)(x_i-x)^j = \begin{cases} 1 & \textit{dacă} \quad j=0 \\ 0 & \textit{dacă} \quad j=1,\ldots,n \end{cases}$$

Soluţie. Pentru $t \in \mathbb{R}$ şi $j \in \{0,1,\ldots,n\}$ fixat, funcţia $x \to (x-t)^j \in \mathbb{P}_n$ şi coincide cu polinomul său de interpolare în $x_0,\ldots,x_n$; formula cerută nu este altceva decât polinomul de interpolare Lagrange pentru $t=x$. ■

Problema 6.3.7 ***(Nucleul lui Peano pentru operatorul de interpolare Lagrange)*** *a) Arătaţi că pentru* $f \in C_b^{n+1}[a,b]$ *avem* $\forall\ x \in [a,b]$

$$(R_nf)(x) = f(x) - p_n(x) = \int_a^b K_n(x,t)f^{(n+1)}(t)dt$$

cu

$$K_n(x,t) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}[(x-t)_+^n - (x_i-t)_+^n]l_i(x)$$

Deduceţi că

$$(R_nf)(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n!}\left[\int_{x_i}^{x}(x_i-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right]l_i(x)$$

b) Ce devine $K_1(x,t)$ *dacă* $x \in (x_0,x_1)$*? Deduceţi existenţa unui* $\xi_x \in (x_0,x_1)$ *astfel încât*

$$E_1(x) = f''(\xi_x)(x-x_0)(x-x_1)/2.$$

c) Arătaţi că soluţia unică a problemei la limită: "fiind dat $g \in C[x_0,x_1]$ *găsiţi* $u \in C^2[x_0,x_1]$ *astfel încât* $u''(x) = g(x)$ *pentru* $x \in]x_0,x_1[,\ u(x_0)=u(x_1)=0$*" este dată de*

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} K_1(x,t)g(t)dt.$$

Soluţie. a)

$$E_n = (R - nf)(x) = \int_a^b K_n(x,t) f^{(n+1)}(t)dt$$

unde

$$K_n(x,t) = \frac{1}{n!}\left[(x-t)_+^n - \sum_{i=0}^{n} l_i(x)(x_i - t)_+^n\right] = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}[(x-t)_+^n - (x_i - t)_+^n l_i(x)$$

Pe de altă parte

$$\int_a^b [(x-t)_+^n - (x_i-t)_+^n] f^{(n+1)}(t)dt =$$

$$= \int_c^x [(x-t)^n - (x_i - t)^n] f^{(n+1)}(t)dt + \int_{x_i}^x (x_i - t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

dar

$$\sum_{i=0}^{n}[(x-t)^n - (x_i-t)^n] l_i(x) = 0$$

conform relaţiei lui Cauchy.

b)

$$K_1(x,t) = 0 \quad \text{dacă} \quad t \notin (x_0, x_1)$$

căci

$$K_1(t) = (x-t)_+ - (x_0 - t)_+ l_0(x) + (x_1 - t)_+ l_1(x)$$

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$K_1(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_1)(t-x_0)}{x_1 - x_0} & t \in [x_0, x] \\ \dfrac{(t-x_1)(x-x_0)}{x_1-x_0} & t \in [x, x_1] \end{cases}$$

$$K_1(x,t) \le 0 \overset{t.medie}{\Rightarrow} E_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} f''(x)$$

c) Scriind că $p_1 = 0$ este polinomul de interpolare al lui u cu nodurile x_0 şi x_1 obţinem

$$u(x) - p_1(x) = \int_{x_0}^{x_1} k_1(x,t) u''(t)dt = \int_{x_0}^{x_1} k_1(x,t) g(t)dt$$

$$p_1(x_0) = u(x_0) = 0 = p_1(x_1) = u(x_1)$$

Se verifică uşor că problema la limită admite efectiv o soluţie. K_1 se numeşte funcţia lui Green a problemei la limită. ■

6.4 Interpolare Birkhoff

Problema 6.4.1 *Dându-se* $f \in C^2[0,h],\ h > 0$ *să se determine un polinom de grad minim* B *astfel încât*

$$\begin{cases} B(0) = f(0) \\ B'(h) = f'(h). \end{cases} \tag{6.1}$$

Să se dea expresia restului.

Soluţie. $m = 1,\ r_0 = 0,\ r_1 = 1,\ I_0 = \{0\},\ I_1 = \{1\},\ n = 1$
Soluţia există şi este unică.

$$(6.1) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$(B_1 f)(x) = b_{00}(x)f(0) + b_{11}(x)f'(h)$$

$$(B_1 f)(x) = f(0) + xf'(h)$$

$$\begin{array}{ll} b_{00}(x) = Ax + b & b_{11}(x) = Cx + D \\ b_{00}(x) = 1 & b_{11}(x) = x \end{array}$$

Pentru rest se aplică teorema lui Peano.

$$(R_1 f)(x) = \int_0^h \varphi_1(x;s) f''(s) ds$$

$$\varphi_1(x;s) = (x-s)_+ - x = \begin{cases} -x & x \leq s \\ -s & x > s \end{cases}$$

$$\varphi_1(x;s) \leq 0,\ \forall\, x, s \in [0,h]$$

$$(R_1 f)(x) = E(x) f''(\xi), \quad \xi \in [0,h]$$

$$E(x) = \frac{x^2}{2} - hx \quad \|R_1 f\|_\infty \leq \frac{h}{2}\|f''\|_\infty$$

■

Problema 6.4.2 *Pentru* $f \in C^3[0,h],\ h \in \mathbb{R}_+,\ m = 2,\ r_0 = 1,\ r_1 = 0,\ r_2 = 1,\ I_0 = I = \{1\},\ I_1 = \{0\}$ *să se construiască formula de interpolare Birkhoff corespunzătoare.*

Soluţie.

$$P(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

$$\begin{cases} P'(0) = & a_1 = f'(0) \\ P\left(\frac{h}{2}\right) = & \frac{h^2}{4}a_0 + \frac{h}{2}a_1 + a_2 = f\left(\frac{h}{2}\right) \\ P'(h) = & 2ha_0 + a_1 = f'(h) \end{cases}$$

Rezolvând sistemul se obţine

$$(B_2f)(x) = \frac{(2x-h)(3h-2x)}{8h}f'(0) + f\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{4x^2-h^2}{8h}f'(h)$$

$$(B_2f)(x) = b_{01}(x)f'(0) + b_{10}(x)f\left(\frac{h}{2}\right) + b_{21}(x)f'(h)$$

$$b_{01}(x) = \frac{(2x-h)(3h-2x)}{8h^2}, \quad b_{10}(x) = 1, \quad b_{21}(x) = \frac{4x^2-h^2}{8h}$$

$$(R_2f)(x) = \int_0^h \varphi_2(x;s)f'''(s)ds$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x;s) &= \frac{1}{2}\{(x-s)^2 - b_{01}(x)[(0-s)_+^2] + b_{10}(x)\left(\frac{h}{2}-s\right)_+^2 - S_{21}[(h-s)_+^2]' \\ &= \frac{1}{2}\left[(x-s)_+^2 - \left(\frac{h}{2}-s\right)_+^2 - \frac{4x^2-h^2}{4h}(h-s)\right].\end{aligned}$$

$$\varphi_2(x;s) \geq 0 \quad \text{dacă} \quad x \in \left[0, \frac{h}{2}\right], \quad s \in [0,h]$$

$$\varphi_2(x;s] \leq 0 \quad \text{pentru} \quad x \in \left[\frac{h}{2}, h\right], \quad s \in [0,h]$$

Pentru $x \in [0,h]$, $\varphi_2(x,\cdot)$ are semn constant pe $[0,h]$

$$(R_2f)(x) = f'''(\xi)\int_a^b (x;s)ds = \frac{(2x-h)(2x^2-2hx-h^2)}{24}f'''(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq h$$

■

Problema 6.4.3 *Să se determine un polinom de grad minim care verifică*

$$P(0) = f(0), \quad P'(h) = f'(h), \quad P''(2h) = f''(2h),$$

unde $f \in C^3[0,2h]$ *(Problema Abel-Goncearov cu două noduri). Daţi expresia restului.*

Soluţie. Din condiţiile de interpolare se obţine

$$P(x) = \frac{f''(2h)}{2}x^2 + [f'(h) - hf''(2h)]x + f(0)$$

Tratând problema ca pe o PIB cu $m = 2,\ I_0 = \{0\},\ I_1 = \{1\},\ I_2 = \{2\}$ obţinem

$$b_{00}(x) = 1 \quad b_{11}(x) = x \quad b_{22}(x) = \frac{x^2}{2} - hx$$

$$(R_3 f)(x) = \int_0^{2h} \varphi_2(x; s) f'''(s) ds$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x; s) &= \frac{1}{2!}\{(x-s)^2 - b_{00}(x)(0-s)_+^2 - b_{11}(x)[(h-s)_+^2]' - b_{22}(x)[(2h-s)_+^2]''\} \\
&= \frac{1}{2}[(x-s)_+^2 - 2x(h-s)_+ - (x^2 - 2hx)(2h-s)_+^0] \\
&= \frac{1}{2}\begin{cases} s^2 & x \geq s \quad s < h \\ s^2 + 2x(h-x) & x \geq s \quad s > h \\ x(2s-x) & x < s \quad s < h \\ -x(x-2h) & x < s \quad s > h \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\varphi_2(x; s) \geq 0$$

Putem aplica corolarul la teorema lui Peano

$$\exists\, \xi \in [0, 2h] \text{ a.î. } (R_3 f)(x) = E(x) f'''(\xi),$$

unde

$$\begin{aligned}
E(x) &= \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}h^2 b_{11}(x) - 24 b_{22}(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{h^2 x}{2} - 2h\left(\frac{x^2}{2} - hx\right) \\
&= \frac{x^3}{6} - \frac{h^2 x}{2} - hx^2 + 2h^2 x = \frac{x^3}{6} - hx^2 + \frac{3h^2}{2}x
\end{aligned}$$

■

6.5 Interpolare raţională

Problema 6.5.1 *Să se determine o aproximare Padé de grad 5 cu $n = 2,\ n = 3$ pentru $f(x) = e^x$.*

Soluţie.

$$r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}, \quad p \in \mathbb{P}_n, \quad q \in \mathbb{P}_m$$

$$f^{(k)}(0) - r^{(k)}(0) = 0, \quad k = \overline{0, N}, \quad N = n + m = 5$$

$$f(x) - r(x) = f(x) - \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)q(x) - p(x)}{q(x)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum_{i=0}^{n} p_i x^i}{q(x)}$$

$f - r$ are o rădăcină multiplă de ordin N. Pentru coeficientul lui x^k de la numărător avem

$$\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-1} - p_k = 0, \quad k = \overline{0, N}$$

Luăm $q_0 = 1$ şi $p_{n+1} = p_{n+2} = \cdots = p_N = 0$ şi $q_{m+1} = q_{m+2} = \cdots = q_N = 0$

$$x^5 : \frac{1}{2} q_3 + \frac{1}{6} q_2 + \frac{1}{24} q_1 = -\frac{1}{120}$$

$$x^4 : q_3 + \frac{1}{2} q_2 + \frac{1}{6} q_1 + \frac{1}{24} = 0$$

$$x^3 : q_3 + q_2 + \frac{1}{2} q_1 + \frac{1}{6} = 0$$

$$x^2 : q_2 + q_1 - p_2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$x^1 : q_1 - p_1 + 1 = 0$$

$$x^0 : p + 0 = 1$$

$$p_0 = 1, \ p_1 = \frac{3}{5}, \ p_2 = \frac{2}{20}, \ q_1 = -\frac{2}{5} q_2 = \frac{3}{20}, \ q_3 = -\frac{1}{60}$$

$$r(x) = \frac{1 + \frac{3}{5}x + \frac{1}{20}x^2}{1 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}$$

■

Problema 6.5.2 *Determinaţi aproximarea Padé de grad 6 pentru* $f(x) = \sin x$ *şi* $n = m = 3$.

Soluţie.

$$\sum_{i=0}^{k} a_k q_{k-i} - p_k = 0, \quad k = \overline{0, 6}$$

$$p_4 = p_5 = p_6 = 0 \quad q_0 = 1$$

$$q_n = q_5 = q_6 = 0 \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$a_3 = -\frac{1}{6} \quad a_4 = 0 \quad a_5 = \frac{1}{120} \quad a_6 = 0$$

Se obţin următorii coeficienţi:
$x^7: \ a_0q_6 + a_1q_5 + a_2q_4 + a_3q_3 + a_4a_2 + a_5q_1 + a_6q_0 - p_6 = 0$
$x^6: \ q_5 - \frac{1}{6}q_3 + \frac{1}{120}q_1 = 0$
$x^5: \ a_1q_4 + a_3q_2 + a_5q_0 - p_5 = q_4 - \frac{1}{6}q_2 + \frac{1}{120} = 0$
$x^4: \ a_1q_3 + a_3q_1 - p_4 = q_3 - \frac{1}{6}q_1 = 0$
$x^3: \ a_1q_2 + a_3q_0 - p_3 = q_2 - \frac{1}{6} - p_3 = 0$
$x^2: \ a_1q_1 - p_2 = q_1 - p_2 = 0$
$x^1: \ a_0q_1 + a_1q_0 - p_1 = 1 - p_1 = 0$
$x^0: \ a_0q_0 - p_0 = 0$
$p_0 = 0 \quad p_1 = 1 \quad q_1 = p_2 = 0$
$q_3 = 0 \quad q_2 = \frac{1}{20} \quad p_3 = q_2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{20} - \frac{1}{6} = -\frac{7}{60}$

$$r(x) = \frac{x - \frac{7}{60}x^3}{1 + \frac{1}{20}x^2}$$

■

Problema 6.5.3 *Dându-se* $f(0) = 1, \ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, \ f(1) = \frac{1}{2}$, *determinaţi o funcţie* F *de interpolare raţională pentru* f.

Soluţie.

$$F = \frac{P_r}{P_s} \quad m = r + s$$

$$f(x_i) = f(x_i) \quad i = \overline{0, m}$$

$$f_m(x) = f(x_0) + \cfrac{x - x_0}{v_1(x_1) + \cfrac{x - x_1}{v_2(x_2) + \cfrac{x - v_2}{v_3(x_3) + \ddots + \cfrac{x - x_{m-1}}{v_m(x_m)}}}}$$

$v_i(x_i)$ - diferenţele divizate inverse
$M = \{x_i | \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{0, m}\}, \ x_i \neq x_j \ (i \neq j)$
$f : M \to \mathbb{R}$

$$[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k; f]^- = \frac{x_k x_{k-1}}{[x_0, \ldots, x_{k-2}, x_k; f]^- - [x_0, \ldots, x_{k-1}; f]^-}$$

$$[x_0, x_1; f]^- = [x_0, x_1; f]^{-1}$$

$$G_0 = 1 \quad G_1(x) = f(x_0)$$
$$H_0 = 0 \quad H_1(x) = 1$$
$$G_{k+1}(x) = r_k(x_k)G_k(x) + (x - x_{k-1})G_{k-1}(x)$$

Pentru calculul diferenţelor divizate inverse se construieşte tabelul

$$\begin{array}{cccccccc}
x_0 & v_{00} & & & & & & \\
x_1 & v_{10} & v_{11} & & & & & \\
x_2 & v_{20} & v_{21} & v_{22} & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & & \\
x_i & v_{i0} & v_{i1} & v_{i2} & \dots & v_{ii} & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\
x_n & v_{m0} & v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mi} & \dots & v_{mm}
\end{array}$$

$$v_{i0} = f(x_i) \quad v_{ik} = \frac{x_i - x_{k-1}}{v_{i,k-1} - v_{k-1,k-1}} \quad k = \overline{1,i} \quad i = \overline{1,m}$$

În cazul nostru

$$\begin{array}{cccc}
0 & 1 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} & 1 \\
1 & \frac{1}{2} & -2 & -1
\end{array}$$

$$v_{1,1} = \frac{x_1 - x_0}{v_{1,0} - v_{0,0}} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{2}{3} - 1} = -\frac{3}{2}$$

$$v_{2,1} = \frac{x_2 - x_1}{v_{2,1} - v_{1,1}} = -2, \quad v_{2,2} = \frac{x_2 - x_1}{v_{2,1} - v_{1,1}} = -1$$

$$F_2(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{v_{11} + \frac{x - x_1}{v_{22}}} = 1 + \frac{x}{-\frac{3}{2} + \frac{x - \frac{1}{2}}{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

Restul are expresia

$$(R_m f)(x) = \frac{(-1)^m u(x)}{H_{m+1}(x)[v_{m+1}(x)H_{m+1}(x) + (x - x_m)H_m(x)]}.$$

■

6.6 Interpolare spline

Problema 6.6.1 *Arătaţi că orice funcţie* $f \in C^m[a,b]$ *poate fi aproximată uniform, împreună cu derivatele ei până la ordinul* m *printr-o funcţie spline de gradul* m*, derivatele ei respectiv prin derivatele funcţiei spline până la ordinul* m.

Demonstraţie. $f \in C^m[a,b] \;\Rightarrow\; f^{(m)} \in [a,b] \;\Rightarrow\; f^{(m)}$ poate fi aproximată uniform pe $[a,b]$ printr-o funcţie în scară, continuă la dreapta şi discontinuă în $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$, notată cu h_m.

Fie problema diferenţială

$$s^{(m)}(x) = h_m(x), \quad x \in [a,b]$$

$$s^{(r)}(a) = f^{(r)}(a), \quad r = \overline{0, m-1}$$

Soluţia acestei probleme pe $[a,b]$ este

$$s(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} h_m(t)dt \tag{6.2}$$

s este o funcţie spline de grad m căci

$$s|_{(x_i, x_{i+1})} \in P_{m-1}, \quad s \in C^{m-1}[a,b]$$

$$f \in C^m[a,b] \;\Rightarrow$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(t)dt \tag{6.3}$$

(6.2), (6.3) $\Rightarrow$ $f^{(r)}(x) - s^{(r)}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{m-r-1}}{(m-r-1)!}[f^{(m)}(t) - h_m(t)]dt, \quad r = \overline{0, m-1}$

$$\|f^{(r)} - s^{(r)}\|_\infty \le \frac{(b-a)^{m-r}}{(m-r)!} \| \underbrace{f^{(m)} - h_m}_{<\varepsilon} \|_\infty, \quad r = \overline{0, m-1}$$

■

Problema 6.6.2 *Fie* $a, b \in \mathbb{R},\ a < 0,\ b > 1,\ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ştiind că* $f \in C^1[a,b]$ *şi cunoscând* $f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)$ *să se scrie expresia funcţiei spline cubice de interpolare cu nodurile* $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1$ *şi a restului.*

Soluţie.

$$s(x) = s_1(x)f(x_1) + s_2(x)f(x_2) + s_3(x)f(x_3)$$

unde

$$s_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, 3}$$

$$s_i(x) = a_0 + a_1 x + b_1 x^3 + b_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + b_3(x-1)_+^3$$

$$\sum_{i=1}^{3} b_i x_i^r = 0, \quad r = \overline{0, m-1}, \quad m = 2$$

$$s_i''(x) = 6b_1 x_+ + 6b_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)_+ + 6b_3 (x-1)_+$$

$$s_i''(0) = s_i''(1) = 0$$

$$s_i'''(x) = 6(b_1 + b_2 + b_3) = 0 \;\Rightarrow\; b_1 + b_2 + b_3 = 0 \quad (x \geq 1)$$

$$s_i''(0) = 0$$

$$s_i''(1) = 6b_1 + 3b_2 = 0$$

$$b_2 = -2b_1$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0 \;\Rightarrow\; b_3 = b_1$$

$$s_i(x) = a_0 + a_1 x + b\left[x_+^3 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + (x-1)_+^3\right]$$

$$s_1(0) = a_0 = 1$$

$$s_1\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{a_1}{2} + b \cdot \frac{1}{8} = 0$$

$$s_1(1) = 1 + a_1 + b\left[1 - \frac{1}{4}\right] = 0$$

$$s_1(x) = 1 - \frac{5}{2}x + 2\left[x_+^3 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)_+^3 + (x-1)_+^3\right]$$

$$s_2(0) = a_0 = 0$$

$$s_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a_1}{2} + \frac{b}{8} = 1$$

$$s_2(1) = a_1 + b\left[1 - \frac{1}{4}\right] = 0$$

$$s_2(x) = 3x - 4\left[x_+^3 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)_+^3 + (x-1)_+^3\right]$$

$$s_3(0) = a_0 = 0$$

$$s_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a_1}{2} + \frac{b}{8} = 0$$

$$s_3(1) = a_1 + \frac{3b}{4} = 1$$

$$s_3(x) = -\frac{1}{2}x + 2\left[x_+^3 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + (x-1)_+^3\right]$$

Pentru rest folosim teorema lui Peano

$$(Rf)(x) = \int_a^b \varphi(x;t) f^{(m)}(t)dt$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{(m-1)!}\left\{(x-t)_+^{m-1} - \sum_{i=1}^{3} s_i(x)(x_i - t)_+\right\} =$$

$$= (x-t)_+ - \sum_{i=1}^{3} s_i(x)(x_i - t)_+ =$$

$$= (x-t)_+ - s_1(x)(-t)_+ - s_2(x)\left(\frac{1}{2} - t\right)_+ - s_3(1-t)_+$$

■

Problema 6.6.3 *Fie funcţia* $f(x) = \sin \pi x$ *şi nodurile* $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{6},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1.$

Să se determine o funcţie spline naturală şi o funcţie spline limitată (racordată) care aproximează pe f.

Soluţie. Vom rezolva un sistem liniar de forma $Ax = b$.

Pentru funcţia spline naturală avem:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-1}+h_{n+1}) & h_{n-1} & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_n - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pentru funcţia spline limitată:

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1-a_0) - 3f'(a) \\ \frac{3}{h_1}(a_2-a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1-a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n-a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1}-a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n-a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1}-a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$$

$$d_j = \frac{c_{j+1}-c_j}{3h_j}, \quad n = 3$$

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0$$

$$h_0 = \frac{1}{6}, \quad h_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \quad h_2 = \frac{1}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{3}{\frac{1}{2}}(-1) - \frac{3}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{9}{2} \\ -\frac{15}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \pi \cos \pi x \quad f'(0) = \pi \quad f'(1) = -\pi$$

$$b = \begin{bmatrix} 3(3-3\pi) \\ -\frac{9}{2} \\ 3(2-\pi) \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{40}(a_1 - a_0) - 3f'(0) = \frac{3}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{2} - 3\pi = 3(3-3\pi)$$

$$-3\pi - \frac{3}{\frac{1}{2}}(-1) = 6 - 3\pi = 3(2-\pi)$$

■

Problema 6.6.4 *Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \in C^1[a,b],\ a < 0,\ b > 1$. *Să se scrie o funcţie spline naturală de interpolare care verifică* $s(0) = f(0),\ s'(0) = f'(0),\ s(1) = f(1),\ s'(1) = f'(1)$.

Soluţie. Funcţia căutată este de forma

$$s(x) = p_{m-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{r_i} c_{ij}(x - x_i)_+^{2m-1-j}$$

$$s(x) = a_0 + a_1 x + c_{10}x^3 + c_{11}x^2 + c_{20}(x-1)^3 + c_{21}(x-1)_+^2$$

Avem 6 necunoscute şi 4 condiţii

$$s'(x) = a_1 + 3c_{10}x_+^2 + 2c_{11}x_+ + 3c_{20}(x-1)_+^2 + 2c_{21}(x-1)_+$$

$$s(0) = a_0 = f(0)$$

$$s'(0) = a_1 = f'(0)$$

$$s(1) = f(0) + f'(0) + c_{10} + c_{11} = f(1)$$

$$s'(1) = f'(0) + 3c_{10} + 2c_{11} = f'(1)$$

$$s''(1) = 0$$

$$s''(x) = 6c_{10}x_+ + 2c_{11}x_+^0 + 6c_{20}(x-1)_+ + 2c_{21}(x-1)_+^0$$

$$3c_{10} + c_{11} + c_{21} = 0$$

$$s'''(x) = 6c_{10}x_+^0 + 6c_{20}(x-1)_+^0$$

$$s'''(1) = c_{10} + c_{20} = 0 \quad c_{20} = -c_{10}$$

$$\begin{cases} c_{10} + c_{11} = f(1) - f(0) - f'(0) \\ 3c_{10} + 2c_{11} = f'(1) - f'(0) \end{cases}$$

$$c_{10} = 2f(0) + f'(0) - 2f(1) + f'(1)$$

$$c_{11} = f(1) - f(0) - f'(0) - 2f(0) - 2f'(0) + 2f(1) - f'(1) =$$
$$= 3f(1) - 3f(0) - 3f'(0) - f'(1)$$
$$c_{21} = -3c_{10} - c_{11} = -6f(0) - 3f'(0) + 6f(1) - 3f'(1) - 3f(1) + 3f(0) + 3f'(0) + f'(1) =$$
$$= -3f(0) + 3f(1) - 2f'(1)$$

Altfel. Pe $[0, 1]$, $s(x)$ coincide cu polinomul de interpolare Hermite cu nodurile duble 0 şi 1, $H_3 f$, iar pe $[a, 0) \cup (1, b]$ este un polinom de grad 1 tangent la $H_3 f$

$$s(x) = \begin{cases} f'(0)x + f(0) & x \in [a, 0) \\ (H_3 f)(x) & x \in [0, 1] \\ f'(1)x + f(1) - f'(1) & x \in (1, b] \end{cases}$$

■

Capitolul 7

Aproximări în medie pătratică

Se pune problema să se aproximeze o mulţime de date $(x_i, y_i),\ i = \overline{1,m},\ y_i = f(x_i)$ printr-o funcţie F care se exprimă ca o combinaţie liniară a unor funcţii $g_1, \ldots, g_n$ liniar independente astfel încât

$$\left(\int_a^b w(x)[f(x) - F(x)]^2 dx\right)^{1/2} \to \min,$$

în cazul continuu sau

$$\left(\sum_{i=0}^{m} w(x)[f(x_i) - F(x_i)]^2\right)^{1/2} \to \min$$

în cazul discret (principiul celor mai mici pătrate).

Dacă $f(x_i) - F(x_i) = 0,\ i = \overline{0,m}$ ajungem la interpolarea clasică.

P.c.m.m.p. constă în determinarea unui e.c.m.b.a în $L^2w[a,b]$ adică $g^* \in A \subset L^2w[a,b]$ astfel încât

$$\|f - g^*\| = \min_{g\in A} \|f - g\|$$

Dacă A este spaţiu liniar

$$\langle f - g^*, g\rangle = 0,\ \forall\, g \in A. \tag{7.1}$$

Punând $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i,\ g^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* g_i$

(7.1) $\Leftrightarrow\ \langle f - g^*, g_k\rangle = 0,\ k = \overline{1,n}\ \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle g_i, g_k\rangle = \langle f, g_k\rangle, \quad k = \overline{1,n}. \tag{7.2}$$

Ecuaţiile lui (7.2) se numesc ecuaţii normale. Determinantul lui (7.2) este determinantul Gram al vectorilor $g_1, \dots, g_n,\ G(g_1, \dots, g_n) \neq 0$, căci $g_1, \dots, g_n$ sunt liniar independente.

Deci g^* există şi este unic.

În cazul discret putem lucra analog cu

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^{m} w(x_i) f(x_i) g(x_i).$$

Problema poate fi tratată şi astfel:

Fie

$$G(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^{m} w(x_i) \left[f(x_i) - \sum_{k=1}^{n} a_k g_k(x) \right]$$

Pentru a determina minimul lui G vom rezolva sistemul

$$\frac{\partial G}{\partial a_j}(a_1, \dots, a_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Observaţia 7.0.5 *Dacă funcţiile $g_k,\ k = \overline{1, n}$ formează un sistem ortogonal coeficienţii λ_k^* sau a_k^* se pot obţine astfel*

$$a_k^* = \frac{\langle f, g_k\rangle}{\langle g_k, g_k\rangle}.$$

Problema 7.0.6 *Dându-se punctele*

$$(0, -4), (1, 0), (2, 4), (3, -2),$$

determinaţi polinomul de gradul I corespunzător acestor date prin metoda celor mai mici pătrate.

$$g_j(x_i) = g_j^i$$

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^{m} \left[y_i - \sum_{j=1}^{n} a_j g_j(x_i) \right]^2$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=0}^{m} \left[y_i - \sum_{j=1}^{n} a_j g_j(x_i) \right] g_k(x_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_j g_j(x_i) g_k(x_i) = \sum_{i=0}^{m} y_i g_k(x_i), \quad k = \overline{1, n}$$

matricial

$$G\widehat{a} = d$$

$$G_{jk} = \sum_{i=0}^{m} g_j(x_i) g_k(x_i)$$

$$d_k = \sum_{i=0}^{m} y_i g_k(x_i)$$

$n = 1,\ g_1(x) = 1,\ g_2(x) = x,\ m = 3$

$$G_{11} = \sum_{i=0}^{3} g_1(x_i) g_1(x_i) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$$

$$G_{12} = \sum_{i=0}^{3} g_1(x_i) g_2(x_i) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 6$$

$$G_{22} = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$d_1 = -4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = -2$$

$$d_2 = -4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = -2,\ a_2 = 1$$

$$F(x) = x - 2$$

Problema 7.0.7 *Să se găsească aproximarea continuă de gradul 2 prin metoda celor mai mici pătrate pentru* $f(x) = \sin \pi x$ *pe intervalul* $[0, 1]$.

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_1 x^2$$

$$G(a_0, a_1, a_2) = \int_a^b [f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2]^2 dx$$

$$G(a_0, \ldots, a_n) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)^2 dx$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j} \left[\int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^k f(x) dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) \right)^2 dx \right] =$$

$$= -2 \int_a^b x^j f(x) dx + 2 \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k} dx = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) dx, \quad j = \overline{0, n}$$

$$a_0 \int_0^1 dx + a_1 \int_0^1 x dx + a_2 \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \sin \pi x dx$$

$$a_0 \int_0^1 x dx + a_1 \int_0^1 x^2 dx + a_2 \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 x \sin \pi x dx$$

$$a_0 \int_0^1 x^2 dx + a_1 \int_0^1 x^3 dx + a_2 \int_0^1 x^4 dx = \int_0^1 x^2 \sin \pi x dx$$

Calculând integralele se obţine

$$\begin{cases} a_0 + \dfrac{1}{2} a_1 + \dfrac{1}{3} a_2 = \dfrac{2}{\pi} \\[2ex] \dfrac{1}{2} a_0 + \dfrac{1}{3} a_1 + \dfrac{1}{4} a_2 = \dfrac{1}{\pi} \\[2ex] \dfrac{1}{3} a_0 + \dfrac{1}{4} a_1 + \dfrac{1}{5} a_2 = \dfrac{\pi^2 - 4}{\pi^3} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \quad a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3}$$

Problema 7.0.8 *Să se calculeze aproximarea Fourier discretă pentru* $m = 2^p = 2$ *direct şi aplicând algoritmul FFT.*

$$\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}, \quad m = 2^p = 2, \quad x_j = -\pi + \frac{j\pi}{m} = \pi\left(\frac{j}{m} - 1\right)$$

$$x_0 = -\pi, \quad x_1 = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$x_2 = -\pi + \pi = 0 \quad x_3 = -\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+0+y_1+y_2+y_3 \\ y_0+iy_1-y_2-iy_3 \\ y_0-y_1+y_2-y_3 \\ y_0-iy_1-y_2+iy_3 \end{bmatrix}$$

$$F(x) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{2m-1} c_k e^{ikx} = \frac{1}{m}\sum c_k(\cos kx + i\sin kx) =$$

$$= \frac{1}{2}[c_0 + c_1(\cos x + i\sin x) + c_2(\cos 2x + i\sin 2x) + c_3(\cos 3x + i\sin 3x)]$$

$$\frac{1}{m}c_k e^{-\pi ik} = a_k + ib_k$$

Algoritmul FFT simplificat
Intrare: $a = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}^T,\ n = 2^k,\ k$ dat
Ieşire: $F(a) = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}]^T$

$$b_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j\omega^{ij}, \quad i = \overline{0, n-1}$$

Metoda
P1. Pentru $i = 0, \ldots, 2^k - 1$ execută $R[i] := a_i$
P2. Pentru $l = 0, \ldots, k-1$ execută P3-P4
P3. Pentru $i = 0, \ldots, 2^{k-1}$ execută $S[i] := R[i]$
Fie $[d_0 d_1 \ldots d_{k-1}]$ reprezentarea binară a lui i

$$R[[d_0, \ldots d_{k-1}]] \leftarrow S[[d_0 \ldots d_{l-1} 0 d_{l+1} \ldots d_{n-1}]] +$$

$$+\omega^{[dldl_1 \ldots d_0 0 \ldots 0]} S[[d_0 \ldots d_{l-1} 1 d_{l+1} \ldots d_{k-1}]]$$

P5. Pentru $i = 0, \ldots, 2^k - 1$ execută

$$b[[d_0, \ldots, d_{k-1}]] \leftarrow R[[d_{k-1}, \ldots, d_0]]$$

Avem $n = 4,\ k = 2,\ a_i = y_i$
Et.1. $R[d_0, d_1] = S[0, d_1] + \omega^{[d_0 0]} S[1 d_1]$
Et.2. $R[d_0, d_1] = S[d_0, 0] + \omega^{[d_0 d_1]} S[d_0 1]$
1. $R = [y_0, y_1, y_2, y_3]$
2. $l = 0$
3. $S = [y_0, y_1, y_2, y_3]$

$$R[d_0, d_1] = S[0, d_1] + \omega^{[d_0, 0]} S[1, d_1]$$

$i = 0$

$$i = [d_0 d_1] = [0, 0]$$

$$R[0,0]=S[0,d_1]+\omega^{[d_0,0]}S[1,d_1]=S[0,0]+\omega^{[0,0]}S[1,0]=y_0+y_2$$

$i=1$
$$i=[d_0,d_1]=[0,1]$$
$$R[0,1]=S[0,1]+\omega^{[0,0]}S[1,1]=y_1+y_3$$

$i=2$
$$i=[d_0,d_1]=[1,0]$$
$$R[1,0]=S[0,0]+\omega^{[1,0]}S[1,0]=S[0,0]+\omega^2S[1,0]=y_0+\omega^2y_2=y_0-y_2$$

$i=3$
$$i=[d_0,d_1]=[1,1]$$
$$R[1,1]=S[0,1]+\omega^{[1,0]}S[1,1]=S[0,1]+\omega^2S[1,1]=y_1+\omega^2y_3=y_1-y_3$$

$l=1$
$$S=[y_0+y_2,y_1+y_3,y_0+\omega^2y_2,y_1+\omega^2y_3]$$
$$R[d_0d_1]=S[d_0,0]+\omega^{[d_0d_1]}S[d_0,1]$$

$i=0$
$$i=[d_0,d_1]=[0,0]$$
$$R[0,0]=S[0,0]+\omega^{[0,0]}S[0,1]=S[0,0]+S[0,1]=y_0+y_1+y_2+y_3$$

$i=1=[d_0,d_1]=[0,1]$
$$r[0,1]=S[0,0]+\omega^{[0,1]}S[0,1]=S[0,0]+\omega S[0,1]=y_0+y_2+i(y_1+y_3)$$

$i=2$
$$[d_0d_1]=[1,0]$$
$$R[1,0]=S[1,0]+\omega^2S[1,1]=y_0+\omega^2y_2+\omega^2(y+1+\omega^2y_3)$$

$i=3$
$$[d_0d_1]=[1,1]$$
$$R[1,1]=S[1,0]+\omega^{[1,1]}S[1,1]=y_0+\omega^2y_2+\omega^3(y+1+\omega^2y_3)$$

5.
$$c[0,0]=R[0,0]=y_0+y_1+y_2+y_3$$
$$c[0,1]=R[1,0]=y_0-y_2+i(y_1-y_3)$$
$$c[1,0]=R[0,1]=y_0+y_2-\omega^2(y_1+\omega^2y_3)=y_0+y_2-y_1-y_3$$
$$c[1,1]=R[1,1]=y_0-y_2-i(y_1-y_3)$$
$$a_0=\frac{c_0}{m}=\frac{y_0+y_1+y_2+y_3}{2}$$

$$a_m = a_2 = Re(e^{2-\pi i}c_2/2) = \frac{y_0 - y_2 + y_1 - y_3}{2}$$

$$a_1 = Re(e^{-\pi i}c_1/m) = \frac{1}{2}Re\{(-1)(y_0 - y_i + i(y_1 - y_2)] = y_2 - y_0$$

$$b_1 = Im(e^{-\pi i}c_1/m) = \frac{y_3 - y_1}{2}$$

Capitolul 8

Operatori liniari şi pozitivi

8.1 Operatorul lui Bernstein

Problema 8.1.1 *Să se afle expresia polinomului Bernstein $(B_m f)(x; a, b)$ corespunzător unui interval compact $[a, b]$ şi unei funcţii f definite pe acest interval.*

Soluţie. Se face schimbarea de variabilă

$$x = \frac{y-a}{b-a}$$

$$(B_m f)(y; a, b) = \frac{1}{(b-a)^m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (y-a)^k (b-y)^{m-k} f\left[a + (b-a)\frac{k}{m}\right]$$

■

Problema 8.1.2 *Determinaţi $(B_m f)(x; a, b)$ în cazul când $f(x) = e^{Ax}$.*

Soluţie.

$$(B_m f)(x; a, b) = \frac{1}{(b-a)^m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x-a)^k (b-x)^{m-k}$$

$$e^{A\left[a+(b-a)\frac{k}{m}\right]} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-k} e^{Ab\frac{k}{m}} e^{\frac{Aa(m-k)}{m}} =$$

$$= \left(\frac{b-x}{b-a} e^{\frac{Aa}{m}} + \frac{x-a}{b-a} e^{\frac{Ab}{m}}\right)^m$$

■

Problema 8.1.3 *Să se arate că pentru* $f(t) = \cos t$ *avem*

$$(B_m f)\left(x, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2m} + i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2m}\right)^m +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2m} - i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2m}\right)^m$$

Soluţie. Se foloseşte identitatea

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

■

Problema 8.1.4 *Să se arate că dacă* f *este convexă pe* $[0,1]$ *atunci are loc inegalitatea*

$$f(x) \le (B_m f)(x) \quad \textit{pe} \quad [0,1]$$

Soluţie.

$$f \text{ convexă} \overset{Jensen}{\Rightarrow} f\left(\sum_{k=0}^{m} \alpha_k x_k\right) \le \sum_{k=0}^{m} \alpha_k f(x_k)$$

$$\alpha_k \in [0,1], \quad \sum_{k=0}^{m} \alpha_k = 1$$

$$f\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{m} p_{mk}(x)\frac{k}{m}\right)}_{x} \le \sum_{k=0}^{m} p_{m,k}(x) f\left(\frac{k}{m}\right)$$

■

Problema 8.1.5 *Dacă* $f \in C^r[0,1]$ *atunci*

$$\lim_{m\to\infty} (B_m f)^{(r)} = f^{(r)} \quad \textit{uniform pe} \quad [0,1]$$

Soluţie. Se arată întâi că

$$(B_m f)^{(r)}(x) = m^{[r]} \sum_{n=0}^{m-r} p_{m-r,k}(x) \Delta^r_{\frac{1}{m}} f\left(\frac{k}{m}\right), \tag{8.1}$$

de exemplu prin inducţie.

$$(B_m f)^{(r)}(x) = \frac{m^{[r]}}{m^r} \sum_{n=0}^{m-r} p_{m-r,k}(x) f^{(r)}(x_k)$$

$$x_k = \frac{k + \theta_k r}{m} \quad 0 < \theta_k < 1$$

$$x_k \in \left(\frac{k}{m}, \frac{k+r}{m} \right)$$

(am aplicat formula de medie)

Notăm

$$C(m,r) = \frac{m^{[r]}}{m^r} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{m}\right)$$

$$f^{(r)}(x) - (B_m f)^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{m-r} p_{m-r,k}(x)(f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x_k)) +$$

$$+[1 - c(m,r)] \sum_{k=0}^{m-r} p_{m-r,k}(x) f^{(r)}(x_k)$$

$$\sum_{k=0}^{m-r} p_{m-r,k}(x) |f^{(r)}(x_k)| \leq M_r(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f^{(r)}(x)|$$

$$(1 - a_1) \dots (1 - a_{r-1}) \geq 1 - (a_1 + \dots + a_{r-1})$$

dacă $a_1, \dots, a_{r-1} \leq 1$ de acelaşi semn

$$C(m,r) \geq 1 - \frac{1 + 2 + \dots + (r-1)}{m} = 1 - \frac{r(r-1)}{m}$$

Putem scrie

$$|f^{(r)}(x) - (B_m f)^{(r)}(x)| \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{m-r} p_{m-r,k}(x) |f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x_k)|}_{S} + \frac{r(r-1)}{2m} M_r(f)$$

Fie

$$F_m = \{k | \; |x - x_k| \leq \delta\}$$

$$J_m = \{k | \; |x - x_k| > \delta\}$$

$$S \le \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\sum_{k\in I_m} p_{m-r,k}(x)}_{\le 1} + 2M_r(f) \underbrace{\sum_{n\in J_m} p_{m-r,k}(x) \le}_{S_2}$$

$$\le \frac{1}{\delta^n} \sum_{n=0}^{m-r} (x-x_k)^2 p_{m-r,k}(x)$$

$$|x-x_k| < \left| x - \frac{k}{m-r} \right| + \frac{r}{m}$$

$$S_2 \le \left(1+\frac{2r}{m}\right) \frac{1}{4(m-r)} + \frac{r^2}{m^2}$$

$$|f^{(r)}(x) - (B_m f)^{(r)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \left(1+\frac{2r}{m}\right) \frac{M_r(f)}{2(m-r)\delta^2} +$$

$$+ \frac{2r^2 M_r(f)}{m^2\delta^2} + \frac{r(r-1)}{2m} M_r(f)$$

r fix, $m \to \infty$

$$|f^{(r)}(x) - (B_m f)^{(r)}(x)| < \varepsilon$$

$m > N_\varepsilon$, $\forall\, x \in [0,1]$

Să demonstrăm acum (8.1)

$p'_{m,k}(x) = k\binom{m}{k} x^{k-1}(1-x)^{m-k} - (m-k)\binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k-1} =$

$= m\binom{m-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{m-k} - m\binom{m-1}{k} x^k (1-x)^{m-k-1} =$

$= m[p_{m-1,k-1}(x) - p_{m-1,k}(x)]$

Presupunem relaţia adevărată pentru r.

Pentru $r+1$ avem

$$\begin{aligned}
(B_m f)^{(r+1)} &= m^{[r]} \sum_{k=0}^{m-r} p'_{m-k,k}(x) \Delta^r_{\frac{1}{m}} f\left(\frac{k}{m}\right) \\
&= m^{[r]}(m-r) \left(\sum_{k=0}^{m-r} p_{m-r-1,k}(x) \left[\Delta^r_{\frac{1}{m}} f\left(\frac{k+1}{m}\right) - \Delta^r_{\frac{1}{m}} f\left(\frac{k}{m}\right) \right] \right) \\
&= m^{[r+1]} \sum_{k=0}^{m-r} p_{m-r-1,k}(x) \Delta^r_{\frac{1}{m}} f\left(\frac{k}{m}\right).
\end{aligned}$$

■

8.2 B-spline

$\Delta: \ t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_k \le a \le \cdots \le b \le t_n \le \cdots \le t_{n+k}$
multiplicitatea $r_i + 1 \le k+1$
Foarte frecvent avem
$t_0 = t_1 = \cdots = t_k = a < t_{k+1} \le \cdots \le t_{n-1} < b = t_m = \cdots = t_{n+k}$

$$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & \text{în caz contrar} \end{cases} \tag{8.2}$$

$$\omega_{i,k}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} & \text{dacă } t_i < t_{i+k} \\ 0 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

$$B_{i,k}(x) = \omega_{i,k}(x) B_{i,k-1}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(x)) B_{i+1,k-1}(x) \tag{8.3}$$

$$B_{i,k}(x) = (t_{i+k+1} - t_i)[t_i, \ldots, t_{i+k+1}, (\cdot - x)_+^k]$$

Problema 8.2.1 *Să se scrie expresia funcţiilor B-spline de grad 3 cu nodurile* $\{t_i = i | i \in \mathbb{Z}\}$

Soluţie. Avem

$$B_{i,k}(x) = B_{j+l,k}(x+l),$$

şi deci este suficient să determinăm un singur spline.

$$\begin{aligned} B_{j,k}(x) &= \omega_{i,k}(x) B_{i,k-1}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(x)) B_{i+1,k-1}(x) = \\ &= \frac{x-i}{i+k-i} B_{i,k-1}(x) + \left(1 - \frac{x-i-1}{i+1+k-i-1}\right) B_{i+1,k-1}(x) = \\ &= \frac{x-i}{k} B_{i,k-1}(x) + \frac{k+i+1-x}{k} B_{i+1,k-1}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{j+l,k}(x+l) &= \frac{x+l-j-l}{i+l+k-i-l} B_{i+l,k-1}(x+l) + \left(1 - \frac{x+l-i-l-1}{i+l+1+k-i-l-1}\right) B_{i+l+1,k-1} = \\ &= \frac{x-i}{k} B_{i+l,k-1}(x+l) - \frac{k-i-1-x}{k} B_{i+l+1,k-1}(x+l) \end{aligned}$$

$$B_{0,3}(x) = \omega_{0,3}(x) B_{0,2}(x) + (1 - \omega_{1,3}(x)) B_{1,2}(x)) = \frac{1}{3}[x B_{0,2}(x) + (4-x) B_{1,2}(x)]$$

$$B_{0,2}(x) = \omega_{0,2}(x) B_{0,1}(x) + (1 - \omega_{1,2}(x)) B_{1,1}(x) = \frac{1}{2}[x B_{0,1}(x) + (3-x) B_{1,1}(x)]$$

$$B_{1,2}(x) = \omega_{1,2}(x)B_{1,1}(x) + (1-\omega_{2,2}(x))B_{2,1}(x) = \frac{1}{2}[(x-1)B_{1,1}(x) + (4-x)B_{2,1}(x)]$$

$$\begin{aligned} B_{0,1}(x) &= xB_{0,0}(x) + (2-x)B_{0,1}(x) \\ B_{1,1}(x) &= (x-1)B_{1,0}(x) + (3-x)B_{2,0}(x) \\ B_{2,1}(x) &= (x-2)B_{2,0}(x) + (4-x)B_{3,0}(x) \end{aligned}$$

$$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$
$$B_{0,0}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [t_0, t_1) = [0,1) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$
$$B_{0,1}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1,2] \\ 0 & \end{cases}$$
$$B_{3,3}(x) = B_{0,3}(x-3)$$

$$B_{0,3}(x) = \begin{cases} \frac{t^3}{6} & x \in [0,1) \\ \frac{1}{6}(-3t^3 + 12t^2 - 12t + 4) & x \in [1,2) \\ \frac{1}{6}(3t^3 - 24t^2 + 60t - 44) & 2 \le t < 3 \\ \frac{1}{6}(4-t)^3 & 3 \le t < 4 \end{cases}.$$

■

Problema 8.2.2 *Fie acum nodurile*

Să se determine B-splinele $B_{i,k}$ pentru $k = 2$ şi $S_\Delta f$ şi pentru $f \in C^2[0,3]$, $R_\Delta f$.

Soluţie. $n + k = 7, \quad n = 5$

$$(S_\Delta f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,k}(x) f(\xi_i)$$

$$\xi_i = \frac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+k}}{k}$$

$B_{i,2} \quad i = \overline{0, n-1} \quad i = 0,4$

$$\omega_{i,k}(x) = \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} & \text{dacă } t_i < t_{i+k} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

$$B_{i,k}(x)=\omega_{i,k}(x)B_{i,k-1}(x)+[1-\omega_{i+1,k}(x)]B_{i+1,k-1}(x)$$

$$\omega_{0,2}(x)=\frac{x-t_0}{t_2-t_0}=0,\quad \omega_{0,1}(x)=0,\quad \omega_{1,2}(x)=x,\quad \omega_{1,1}(x)=0$$

$$\omega_{2,2}(x)=\frac{x}{2},\quad \omega_{2,1}(x)=x,\quad \omega_{3,2}(x)=\frac{x-1}{2},\quad \omega_{3,1}(x)=x-1$$

$$\omega_{4,2}(x)=x-2,\quad \omega_{4,1}(x)=x-2,\quad \omega_{5,2}(x)=0,\quad \omega_{5,1}(x)=0,\quad \omega_{6,1}(x)=0$$

$$B_{0,2}(x)=(1-x)B_{1,1},\quad B_{1,1}(x)=(1-x)B_{2,0}$$

$$B_{0,2}(x)=(1-x)^2B_{2,0}(x)=\begin{cases}(1-x)^2 & x\in[0,1)\\ 0 & \text{în rest}\end{cases}$$

$$B_{1,2}(x)=\omega_{1,2}B_{1,1}+(1-\omega_{2,2})B_{2,1}=xB_{1,1}+\frac{2-x}{2}B_{2,1}$$

$$B_{2,1}(x)=\omega_{2,1}B_{0,2}+(1-\omega_{3,1})B_{0,3}=xB_{2,0}+(2-x)B_{3,0}$$

$$B_{1,2}(x)=x(1-x)B_{2,0}+\frac{2-x}{2}xB_{2,0}+\frac{(2-x)^2}{2}B_{3,0}$$

$$=\begin{cases}x\left(2-\frac{3}{2}x\right) & x\in[0,1)\\ \frac{(x-2)^2}{2} & x\in[1,2)\\ 0 & \text{în rest}\end{cases}.$$

$$B_{2,2}(x)=\omega_{2,2}B_{2,1}+(1-\omega_{3,2})B_{3,1}=\frac{x}{2}B_{2,1}+\frac{3-x}{2}B_{3,1}$$

$$B_{3,1}(x)=\omega_{3,1}B_{3,0}+(1-\omega_{4,1})B_{4,0}=(x-1)B_{3,0}+(3-x)B_{4,0}$$

$$B_{2,2}=\frac{x}{2}xB_{2,0}+\frac{x(2-x)}{2}B_{3,0}+\frac{3-x}{2}(x-1)B_{3,0}+\frac{(3-x)^2}{2}B_{4,0}=$$

$$=\begin{cases}\frac{x^2}{2} & x\in[0,1)\\ \frac{x(2-x)}{2}+\frac{(3-x)(x-1)}{2} & x\in[1,2)\\ \frac{(3-x)^2}{2} & x\in[2,3)\end{cases}$$

$$B_{3,2}(x)=\omega_{3,2}B_{3,1}+(1-\omega_{4,2});B_{4,1}=\frac{x-1}{2}B_{3,1}+(3-x)B_{4,1}$$

$$B_{4,1}(x)=\omega_{4,1}B_{4,0}+(1-\omega_{5,1});B_{5,0}=(x-2)B_{4,0}$$

$$B_{3,2}(x)=\frac{x-1}{2}(x-1)B_{3,0}+\frac{x-1}{2}(3-x)B_{4,0}+(3-x)(x-2)B_{4,0}=$$

$$=\begin{cases}\frac{(x-1)^2}{2} & x\in[1,2)\\ (3-x)\left(\frac{x-1+2x-4}{2}\right) & x\in[2,3)\\ 0 & \text{în rest}\end{cases}$$

■

Problema 8.2.3 *Pentru orice $k \geq 0$ şi orice $x \in \mathbb{R}$, $B_{i,k}$ este derivabilă la dreapta şi avem*

$$B'_{i,k}(x) = k\left[\frac{B_{i,k-1}(x)}{t_{i+k}-t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k-1}-t_{i+1}}\right]$$

cu convenţia că o expresie cu numitorul nul se înlocuieşte cu 0.

Demonstraţie. Prin recurenţă după k, cazul $k = 0$

$$B_{i,k}(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i}B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}B_{i+1,k-1}(x)$$

în care derivând şi aplicând ipoteza inducţiei

$$B'_{i,k} = \frac{B_{i,k-1}}{t_{i+k}-t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}}{t_{i+k+1}-t_i} + (k-1)\left\{\frac{x-t_i}{t_{i_k}-t_i}\left[\frac{B_{i,k-2}}{t_{i+k-1}-t_i} - \frac{B_{i+1,k-2}}{t_{i+k}-t_{i+1}}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\left[\frac{B_{i+1,k-2}}{t_{i+k}-t_{i+1}} - \frac{B_{i+2,k-1}}{t_{i+k+1}-t_{i+2}}\right]\right\} =$$

$$= \frac{B_{i,k-1}}{t_{i+k}-t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} + \frac{k-1}{t_{i+k}-t_i}\left[\frac{x-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}B_{i,k-2} + \frac{t_{i_k}-x}{t_{i+k}-t_{i+1}}B_{i+1,k-2}\right] -$$

$$- \frac{k-1}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\left[\frac{x-t_{i+1}}{t_{i+k}-t_{i+1}}B_{i+1,k-2} + \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+2}}B_{i+2,k-2}\right]$$

din care aplicând definiţia lui $B_{i,k-1}$ şi $B_{i+1,k-1}$ se obţine rezultatul dorit. ■

Problema 8.2.4

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_{i,k}(x)dx = \frac{1}{k+1}(t_{i+k+1}-t_i)$$

Demonstraţie. Presupunem că $supp\, B_{i,k} \in [a,b]$

$B_{i,k} > 0$ pentru $x \in [t_i, t_{i+k+1})$

Fie diviziunea Δ' obţinută din diviziunea iniţială adăugând nodurile $t_{-1} = t_0$ şi $t_{n+k+1} = t_{n+k}$

Considerăm primitiva lui $B_{i,k}$

$$B(x) = \int_{-\infty}^{x} B_{i,k}(t)dt$$

Pe porţiuni este polinomială, deci ea va fi combinaţie liniară de B-spline.

$$\int_{-\infty}^{x} B_{i,k}(t)dt = \sum_{j=-1}^{n-1} c_j B_{j,k+1}(x)$$

pentru $x \in [a,b]$. Derivăm

$$B_{i,k}(x) = \sum_{j=-1}^{n-1} c_j k \left[\frac{B_{j,k}(x)}{t_{j+k+1} - t_j} - \frac{B_{j+1,k}(x)}{t_{j+k+1} - t_{j+1}} \right]$$

Deoarece $B_{i,k}$ formează o bază avem sistemul

$$\begin{cases} (k+1)(c_2 - c_1) = 0 \\ (k+1)(c_3 - c_2) = 0 \\ \dots \\ k(c_i - c_{i-1}) = 0 \\ \dots \\ k(c_{i+1} - c_i)\frac{1}{t_{i+k+1} - t_i} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = \dots = c_{i-1} = 0 \\ c_i = \dots = c_{n-1} = \frac{t_{i+k+1} - t_i}{k+1} \end{cases}$$

Deci

$$\int_{-\infty}^{x} B_{i,k}(x)dx = \frac{t_{i+k+1} - t_i}{k+1} \left(\sum_{j \geq i} B_{j,k+1}(x) \right)$$

pentru $x \in [a,b]$ şi deci pentru $t_{i+k+1} \leq x \leq b$

$$\int_{-\infty}^{x} B_{i,k}(x)dx = \frac{t_{i+k+1} - t_i}{k+1}.$$

■

Problema 8.2.5 *Op spline cu variaţie diminuată????*

Soluţie.

$$\xi_2 = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\xi_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$
$$\xi_4 = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$
$$\xi_5 = \frac{x_3 + x_4}{2} = 3$$

$$(S_\Delta f)(x) = B_{1,3}(x)f(0) + B_{2,3}(x)f\left(\frac{1}{2}\right) + B_{3,3}(x)f\left(\frac{3}{2}\right) + B_{4,3}(x)f\left(\frac{5}{2}\right) + B_{5,3}(x)f(3) =$$

$$= \begin{cases} B_{1,3}(x)f(0) + B_{2,3}(x)f\left(\frac{1}{2}\right) + B_{3,3}(x)f\left(\frac{3}{2}\right) & x \in [0,1) \\ B_{2,3}(x)f\left(\frac{1}{2}\right) + B_{3,3}(x)f\left(\frac{3}{2}\right) + B_{4,3}(x)f\left(\frac{5}{2}\right) & x \in [1,2) \\ B_{3,3}(x)f\left(\frac{3}{2}\right) + B_{4,3}(x)f\left(\frac{5}{2}\right) + B_{5,3}(x)f(3) & x \in [2,3] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{(1-x)^2}{2}f(0) + \frac{1+2x-x^2}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{x^2}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) & x \in [0,1) \\ \frac{1+2x-x^2}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{x^2}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{(x-1)^2}{2}f\left(\frac{5}{2}\right) & x \in [1,2) \\ \frac{(3-x)^2}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{10x-2x^2-11}{2}f\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{(x-2)^2}{2}f(3) & x \in [2,3] \end{cases}$$

■

8.3 Alţi operatori liniari şi pozitivi

Problema 8.3.1 (operatorul lui Fejer) *Se obţine din polinomul de interpolare Hermite cu noduri duble rădăcini ale polinomului Cebâşev de speţa I,* T_{m+1}.

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2(m+1)}\pi \quad k = \overline{0,m}$$

$$(H_{2m+1})(x) = \sum_{k=0}^{m} h_{k0}(x)f(x) + \sum_{k=0}^{m} h_{k1}(x)f'(x)$$

omiţând a doua sumă sau considerând echivalent $f'(x_k) = 0$*,* $k = \overline{0,n}$

$$(F_{2m+1})(x) = \sum_{k=0}^{m} h_k(x)f(x_k)$$

$$h_k(x) = h_{k0}(x) = (1 - x_k x)\left[\frac{T_{m+1}(x)}{(m+1)(x-x_k)}\right]^2$$

$$F_{2m+1}f \rightrightarrows f \quad pe \quad [-1,1]$$

$$F_{2m+1}(1;x) = 1 \quad x \in [-1,1]$$

Soluţie.

$$F_{2m+1}((t-x)^2;x) = \sum_{n=0}^{m}(1 - x_k x)\left[\frac{T_{m+1}(x)}{(m+1)(x-x_k)}\right]^2 (x_k - x)^2 =$$

$$= \frac{1}{(m+1)^2}T_{m+1}^2(x)\sum_{k=0}^{m}(1 - x_k x) = \frac{1}{m+1}T_{m+1}^2(x) \leq \frac{1}{m+1}$$

căci $\sum_{k=0}^{m} x_k = 0$.

Deci,

$$\lim_{m\to\infty} F_{2m+1}((t-x)^2;x) = 0 \quad \text{uniform pe} \quad [-1,1]$$

■

Problema 8.3.2 (Operatorul lui Meyer-König şi Zeller) *Fie* $B[0,1)$ *spaţiul liniar al funcţiilor reale definite şi mărginite pe* $[0,1)$.

Se defineşte operatorul lui Meyer-König şi Zeller $M_m : B[0,1) \to C[0,1)$ *pentru orice* $x \in [0,1]$ *prin egalitatea*

$$(M_m f)(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+k}{k} x^k (1-x)^{m+1} f\left(\frac{k}{m+k}\right)$$

cu $(M_m f)(1) = f(1)$.

Să se arate că pentru orice $f \in [0,1]$ *avem* $\lim\limits_{m\to\infty} M_m f = f$ *uniform pe orice interval de forma* $[0,a)$, $0 < a < 1$.

Soluţie. M_m liniar şi pozitiv

$$(1-v)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+k-1}{k} v^k \quad (|v|<1)$$

Punând $\alpha = m+1$ şi $v = x$ găsim

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} x^k (1-x)^{m+1} = M_m(1;x) = 1$$

Apoi

$$M_m(t;x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m+k}{k} \frac{k}{m+k} x^k (1-x)^{m+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m+k-1}{k-1} x^k (1-x)^{m+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+j}{j} x^j (1-x)^{m+1} = x$$

$$x^2 \le M_m(t^2;x) \le x^2 + \frac{x(1-x)}{m+1}$$

T.B.P.K. $\Rightarrow$ conv. uniformă ■

Problema 8.3.3 (Operatorul lui Baskakov) *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mărginită şi operatorul*

$$(L_m f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{m+k}} f\left(\frac{k}{m}\right)$$

Să se arate că dacă $f \in C[0,1]$ *avem* $\lim_{m\to\infty} L_m f = f$ *uniform pe* $[0,a]$, $0 < a < \infty$.

Soluţie. Lucrând cu seria binomială în care se ia $\alpha = n$, $v = \frac{x}{1+x}$ se obţine

$$L_m(1;x) = 1 \quad L_m(t;x) = x$$

$$L_m(t^2;x) = x^2 + \frac{x(x+1)}{m}$$

T.B.P.K. $\Rightarrow$ conv. uniformă. ■

Problema 8.3.4 (Operatorul Favard-Szasz) *Fie* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ *şi* $a > 0$ *fixat. Să se arate că dacă* $f \in C[0, a]$ *operatorii Favard-Szasz definiţi prin*

$$(L_m f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx)^k}{k!} e^{-mx} f\left(\frac{k}{m}\right)$$

are proprietatea

$$\lim_{m\to\infty} L_m f = f$$

uniform pe $[0, a]$.

Soluţie. Pentru funcţiile de probă $1, t, t^2$ avem

$$L_m(1; x) = 1$$

$$L_m(t; x) = x$$

$$L_m(t^2; x) = x^2 + \frac{x(x+1)}{m}$$

T.B.P.K. $\Rightarrow$ concluzia. ■

Capitolul 9

Aproximarea funcţionalelor liniare

X spaţiu liniar, $F_1, \ldots, F_m \in X^{\#}$, $F \in X^{\#}$

$F, F_1, \ldots, F_m$ liniar independenţi

Formula

$$F(f) = \sum_{i=1}^{m} A_i F_i(f) + R(f) \quad f \in X \tag{9.1}$$

se numeşte formulă de aproximare a funcţionalei F în raport cu funcţionalele $F_1, \ldots, F_m$.

$R(f)$ - termen rest

Dacă $\mathbb{P}_r \subset X$, $\max\{r | KerR = \mathbb{P}_r\}$ se numeşte grad de exactitate al formulei (9.1).

9.1 Derivare numerică

Formula de forma

$$f^{(k)}(\alpha) = \sum_{j=0}^{m} A_j F_j(f) + R(f)$$

se numeşte formulă de derivare numerică.

Problema 9.1.1 *Stabiliţi formule de derivare numerică de tip interpolator cu 3,4 şi 5 puncte în cazul nodurilor echidistante.*

Soluţie.

$$\frac{x - x_0}{h} = q$$

$$(L_m f)(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^{m-2}}{i!(m-i)!} \frac{q^{[m+1]}}{q-i} f(x_i)$$

$$(R_m f)(x) = \frac{h^{m+1} q^{[m+1]}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi) \quad \xi \in (a,b)$$

$$f'(x) \approx (L_m f)'(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^{m-i}}{i!(m-i)!} f(x_i) \frac{d}{dq} \left[\frac{q^{[m+1]}}{q-i} \right]$$

$$(R_m f)'(x) = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi) \frac{d}{dq} q^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} q^{[m+1]} \frac{d}{dq} f^{(m+1)}(\xi)$$

$$(R_m f)'(x_i) = (-1)^{m-i} h^m \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi_i)$$

$m = 2$ (3 puncte)

$$(L_2 f)(x) = \frac{1}{2} f(x_0)(q-1)(q-2) - f(x_1) q(q-2) + \frac{1}{2} f(x_2) q(q-1)$$

$$(L_2 f)'(x) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} f(x_0)(2q-3) - (2q-1) f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2)(2q-1) \right]$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{1}{3} h^2 f'''(\xi_0)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi_1)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{1}{3} h^2 f'''(\xi_2)$$

$m = 3$ 4 puncte

$$(L_3 f)'(x) = \frac{1}{h} \Bigg\{ -\frac{1}{6} f(x_0)[(q-1)(q-2)(q-3)]' +$$

$$+\frac{1}{2} f(x_1)[q(q-2)(q-3)]' - \frac{1}{2} f(x_2)[q(q-1)(q-3)]' +$$

$$+\frac{1}{6} f(x_2)[q(q-1)(q-2)'] \Bigg\}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{64}[-11f(x_0) + 18f(x_1) - 9f(x_2) + 2f(x_3)] - \frac{h^3}{4} f^{(4)}(\xi_0)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{6h}[-2f(x_0) - 3f(x_1) + 6f(x_2) - f(x_3)] + \frac{h^3}{12} f^{(4)}(\xi_1)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{6h}[f(x_0) - 6f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3)] - \frac{h^3}{12} f^{(4)}(\xi_2)$$

$$f'(x_3) = \frac{1}{6h}[-2f(x_0) + 9f(x_1) - 18f(x_2) + 11f(x_3)] + \frac{h^3}{4} f^{(4)}(\xi_3)$$

$m = 4$ (5 puncte)

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_1) - 36f(x_2) + 16f(x_3) - 3f(x_4)] + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi_0)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{12h}[-3f(x_0) - 10f(x_1) + 18f(x_2) - 6f(x_3) + f(x_4)] - \frac{h^4}{20} f^{(5)}(\xi_1)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h}[f(x_0) - 8f(x_1) + 8f(x_3) - f(x_4)] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi_2)$$

$$f(x_3) = \frac{1}{12h}[-f(x_0) + 6f(x_1) - 18f(x_2) + 10f(x_3) + 3f(x_4)] - \frac{h^4}{20}f^{(5)}(\xi_3)$$
$$f(x_4) = \frac{1}{124}[3f(x_0) - 16f(x_1) + 36f(x_2) - 48f(x_3) + 25f(x_4)] + \frac{h^4}{4}f^{(5)}(\xi_4)$$

■

Problema 9.1.2 *Să se construiască o formulă de forma*

$$f'(\alpha) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + (Rf)(\alpha)$$

cu gradul de exactitate $r = 2$.

Soluţie.

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 0 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 1 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = 2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_1 = -A_0 = \frac{1}{2(\alpha - x_0)}$$

$$x_1 = 2\alpha - x_0$$

Restul cu Peano $x_0 < x_1$

$$(Rf)(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} K_2(s) f'''(s) ds$$

$$K_1(s) = (\alpha - s)_+ - \frac{(x_1 - s)^2}{4(\alpha - x_0)} =$$

$$= -\frac{1}{4(\alpha - x_0)} \begin{cases} (s - x_0)^2 & s \leq \alpha \\ (x_1 - s)^2 & s > \alpha \end{cases} \leq 0$$

$$K_2(s) \leq 0, \quad s \in [x_0, x_1], \quad \alpha > x_0,\ f \in C^3(x_0, x_1)$$

$$(Rf)(\alpha) = f'''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} K_2(s) ds = -\frac{(\alpha - x_0)^2}{6} f'''(\xi')$$

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{2(\alpha - 2)}[2f(2\alpha - 2) - f(2)] - \frac{(\alpha - 2)^2}{6} f'''(\xi)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq \alpha, \quad \alpha = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

S-a obţinut o familie de formule de derivare numerică. ■

Problema 9.1.3 *Arătaţi că*

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

unde $f \in C^4[x_0 - h, x_0 + h]$, $\xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$

Soluţie. Se aplică formula lui Taylor

$$f(x_0+h) = f(x_0) + 4f'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) + \frac{1}{6}f'''(x_0) + \frac{1}{24}h^4 f^{(4)}(\xi_1)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) - \frac{1}{6}f'''(x_0) + \frac{1}{24}h^4 f^{(4)}(\xi_2)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{1}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)]$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2)$$

■

Problema 9.1.4 *Stabiliţi formula*

$$f'(x_0) = \frac{1}{24}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in (x_0-h, x_0+h)$$

Soluţie. Cu Taylor ■

Problema 9.1.5 (Aplicarea extrapolării Richardson) *Pornind de la formula*

$$f'(x_0) = \frac{1}{24}[f(x_0+h) - f(x_0-2h)] - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(\xi)$$

obţineţi o formulă $O(h^4)$ folosind extrapolarea Richardson.

Soluţie. Să stabilim întâi formula de pornire

$$f(x) = f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 +$$

$$+\frac{1}{6}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)(x-x_0)^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi)(x-x_0)^5$$

Scăzând dezvoltările lui $f(x_0+h)$ şi $f(x_0-h)$ obţinem

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f(5)(\widetilde{\xi_1}), \qquad (9.2)$$

$$\widetilde{\xi} \in (x_0-h, x_0+h)$$

Făcând în (9.2) $h = 2h$ avem

$$f'(x_0) = \frac{1}{4h}[f(x_0+2h) - f(x_0-2h)] - \frac{4h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{16h^4}{120}f^{(5)}(\widehat{\xi}) \qquad (9.3)$$

$$\widehat{\xi} \in (x_0 - 2h, x_0 + 2h)$$

$4 \cdot (9.2) - (9.3) \;\Rightarrow$

$$3f'(x_0) = \frac{2}{h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] -$$

$$-\frac{1}{4h}[f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h)] - \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\widetilde{\xi}) + \frac{2h^4}{15} f^{(5)}(\widehat{\xi})$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0 - 2h) - 8f(x_) - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + h)] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)$$

(am obţinut o formulă cu 5 puncte). ■

Problema 9.1.6 *Pornind de la formula*

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_0 + h) - f(x_0)] - \frac{h}{2} f''(x_0) - \frac{h^2}{6} f'''(x_0) + O(h^3)$$

deduceţi o formulă $O(h^3)$ folosind extrapolarea.

Soluţie.

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0 + 4h) - 18f(x_0 + 2h) + 32f(x_0 + h) - 21f(x_0)] + O(h^3)$$

■

Problema 9.1.7 *Să presupunem că avem tabela de extrapolare*

$$\begin{array}{lll} N_1(h) & & \\ N_1\left(\frac{h}{2}\right) & N_2(h) & \\ N_1\left(\frac{h}{4}\right) & N_2\left(\frac{h}{2}\right) & N_3(h) \end{array}$$

construită pentru a aproxima M cu formula

$$M = N_1(h) + K_1 h^2 + K_2 h^4 + K_3 h^6$$

a) Arătaţi că polinomul liniar de interpolare $P_{0,1}(h)$ ce trece prin punctele $(h^2, N_1(h))$ şi $(h^2/4, N_1(h/2))$ satisface $P_{0,1}(0) = N_2(h)$.

La fel $P_{1,2}(0) = N_2\left(\frac{h}{2}\right)$,

b) Arătaţi că polinomul $P_{0,2}(h)$ ce trece prin $(h^4, N_2(h))$ şi $\left(\frac{h^4}{16}, N_2\left(\frac{h}{2}\right)\right)$ satisface $P_{0,2}(0) = N_3(h)$.

Generalizare.

9.2 Formule de integrare numerică de tip Newton-Cotes

9.2.1 Formule Newton-Cotes închise

Sunt formule care se obţin integrând termen cu termen formula de interpolare a lui Lagrange. Nodurile au forma

$$x_k = a + kh, \quad k = \overline{0,m}, \quad h = \frac{b-a}{m}.$$

Coeficienţii au expresia

$$A_k = (-1)^{m-k} \frac{h}{k!(m-k)!} \int_0^m \frac{t^{[m+1]}}{t-k} dt$$

Problema 9.2.1 *Arătaţi că o formulă de cuadratură cu $m+1$ noduri este de tip interpolator dacă şi numai dacă are gradul de exactitate cel puţin m.*

Demonstraţie. ($\Rightarrow$) imediată din expresia restului
($\Leftarrow$) $x_j,\ j = \overline{0,m}$, $r \geq m$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{m} A_j = b - a \\ \sum\limits_{j=0}^{m} A_j x_j = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \\ \dots \\ \sum\limits_{j=0}^{m} A_j x_j^m = \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1}) \end{cases} \tag{9.4}$$

$\Delta \neq 0$ (Vandermonde) dacă $x_i \neq x_j$ deci (9.4) are soluţie unică.

Dar (9.4) este satisfăcută pentru $A_j = \int_a^b l_j(x)dx$ şi exactă pentru $1, x, \dots, x^m$. Unicitatea $\Rightarrow$ $A_j = \int_a^b l_j(x)dx$. ■

Problema 9.2.2 *Să se aproximeze volumul butoiului cu diametrele D şi d şi înălţimea h.*

Soluţie. Vom aproxima conturul butoiului prin arce de parabolă.

$$y(x) = -2\frac{D-d}{h^2}\left(x - \frac{h}{2}\right)\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{d}{2}, \qquad x \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right].$$

Volumul obţinut prin rotaţia arcului y în jurul axei Ox este

$$V = \pi \int_{-h/2}^{h/2} y^2(x)dx.$$

Valoarea exactă a integralei de mai sus este

$$V = \frac{\pi h}{60}(8D^2 + 4Dd + 3d^2).$$

În practică V se aproximează cu formula lui Simpson şi se obţine:

$$V \approx \frac{\pi h}{12}\left(d^2 + 2D^2\right).$$

■

Problema 9.2.3 *Deduceţi restul formulei lui Simpson*

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(\xi)$$

Soluţie. Gradul de exactitate fiind $r = 3$ avem

$$R_2(f) = \int_a^b K_2(t) f^{IV}(t)dt$$

unde

$$K_2(t) = \frac{1}{3!}\left\{\frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{6}\left[(a-t)_+^3 + 4\left(\frac{a+b}{2} - t\right)_+^3 + (b-t)_+^3\right]\right\}$$

$$K_2(t) = \frac{1}{6}\begin{cases} \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{6}\left[4\left(\frac{a+b}{2} - t\right)^3 + (b-t)^3\right] & t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ \frac{9b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{6}(b-t)^3 & t \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

Se verifică că pentru $t \in [a,b]$, $K_2(t) \leq 0$

$$R_2(f) = \tfrac{1}{4!} f^{IV}(\xi) R(e_4) = \frac{1}{24} f^{IV}(\xi)\left\{\frac{b^5 - a^5}{5} - \frac{b-a}{6}\left[a^4 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 + b^4\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{24} f^{IV}(\xi)(b-a)\left[\frac{b^4 + b^3 a + b^2 a^2 + ba^3 + b^4}{5} - \right.$$

$$\left. = -\frac{4a^4 + a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4b^4}{24}\right] =$$

$$= \frac{f^{IV}(\xi)}{24}(b-a)\frac{-a^4 + 4a^3 b - 6a^2 b^2 + 4ab^3 - b^4}{120} = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(\xi) \;\blacksquare$$

Problema 9.2.4 *Deduceţi formula lui Newton şi restul ei*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right] + R_3(f)$$

$$R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{648}f^{(4)}(\xi)$$

Soluţie. Este o formulă Newton-Cotes închisă pentru $m = 3$.

$$A_k = (-1)^{m-k}\frac{h}{k!(m-k)!}\int_0^m \frac{t^{[m+1]}}{t-k}dt$$

$$A_0 = A_3 = (-1)^3\frac{b-a}{3}\frac{1!}{0!3!}\int_0^3 (t-1)(t-2)(t-3)dt = \frac{b-a}{8}$$

$$A_1 = A_2 = (-1)^2\frac{b-a}{3}\frac{1!}{1!2!}\int_0^3 t(t-2)(t-3)dt = \frac{3(b-a)}{8}$$

$$R_3(f) = \int_a^b K_3(t)f^{(4)}(t)dt$$

$$K_3(t) = \frac{1}{3!}\left\{\frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{8}\left[\frac{(a-t)_+^3}{0} + 3\left(\frac{2a+b}{3} - t\right)_+^3 + \right.\right.$$

$$\left.\left. +3\left(\frac{a+2b}{3} - t\right)_+^3 + (b-t)_+^3\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{3!}\begin{cases} \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{8}(b-t)^3 & t \in \left[a, \frac{2a+b}{3}\right) \\ \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{8}\left[(b-t)^3 + 3\left(\frac{2a+b}{3} - t\right)^3\right] & t \in \left(\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}\right] \\ \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{8}\left[(b-t)^3 + 3\left(\frac{2a+b}{3} - t\right)^3 + \right. & \left. +3\left(\frac{a+2b}{3} - t\right)^3\right] \\ \left. \qquad +3\left(\frac{a+2b}{3} - t\right)^3\right] & t \in \left(\frac{a+b}{3}, b\right] \end{cases}$$

$$K_3(t) \le 0$$

$$R_3(f) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)R(e_4) = \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)R(e_4)$$

$$R(e_4) = \int_a^b x^4 dx - \frac{b-a}{8}\left[a^4 + 3\left(\frac{2a+b}{3}\right)^4 + 3\left(\frac{a+2b}{3}\right)^4 + b^4\right] =$$

$$= \frac{b^5 - a^5}{5} - \frac{b-a}{8}\left[a^4 + \frac{(2a+b)^4}{27} + \frac{(a+2b)^4}{27} + b^4\right] =$$

$$= (b-a)\left[\frac{b^4 + ab^3 + a^2b^2 + ab^3 + a^4}{5} - \frac{1}{8}a^4 - \frac{1}{8}b^4 - \right.$$

$$\left. -\frac{(2a+b)^4}{8\cdot 27} - \frac{(a+2b)^4}{8\cdot 27}\right] = \frac{b-a}{8\cdot 27\cdot 5}\cdot 40(b-a)^4 \ \blacksquare$$

9.2.2 Formule Newton-Cotes deschise

La aceste formule nodurile sunt echidistante
$x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{0,m},\ h = \frac{b-a}{m+2}$
$x_0 = a_h,\ x_m = b - h$
$x_{-1} = a,\ x_{m+1} = b$
Coeficienţii au expresia

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx = (-1)^{m-i}\frac{h}{i!(m-i)!}\int_{-1}^{m+1}\frac{t^{[m+1]}}{t-i}dt$$

Problema 9.2.5 *Deduceţi formula Newton-Cotes deschisă pentru* $m = 1$.

Soluţie.

$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + R_1(f)$$

$$A_0 = A_1 = -h\int_{-1}^{2}\frac{t(t-1)}{t}dt = \frac{3h}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$R_1(f) = \int_a^b K_1(t)f''(t)dt$$

$$K_1(t) = \begin{cases} \frac{(a-t)^2}{2} \\ \frac{(a-t)^2}{2} + \frac{b-a}{2}\left(\frac{2a+b}{3} - t\right) \\ \frac{(b-t)^2}{2} \end{cases}$$

căci

$$\frac{b-a}{2}\left[\left(\frac{2a+b}{3} - t\right) + \left(\frac{a+2b}{3} - t\right)\right] = \int_a^b (x-t)dx$$

Se verifică că pentru orice $t \in [a,b]$, $K_1(t) \geq 0$.
Aplicând corolarul la teorema lui Peano obţinem

$$R_1(f) = \frac{1}{2!}f''(\xi)R(e_2) =$$

$$= \frac{1}{2}f''(\xi)\left\{\int_a^b x^3dx - \frac{b-a}{2}\left[\left(\frac{2a+b}{3}\right)^2 + \left(\frac{a+2b}{3}\right)^2\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}f''(\xi)\frac{b-a}{3}\left[b^2 + ab + a^2 - \frac{5a^2 + 8ab + 5b^2}{6}\right] =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{36}f''(\xi) = \frac{3h^3}{4}f''(\xi).$$

■

Problema 9.2.6 *Aceeaşi problemă pentru* $m = 2$.

Soluţie. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R_2(f)$

$$A_0 = A_2 = \frac{h}{2}\int_{-1}^{3} \frac{t(t-1)(t-2)}{t}dt = \frac{8h}{3} = \frac{8}{3}\cdot\frac{b-a}{4} = \frac{2(b-a)}{3}$$

$$A_1 = -h\int_{-1}^{3} \frac{t(t-1)(t-2)}{t-1}dt = -\frac{4h}{3} = -\frac{b-a}{3}$$

$$R_2(f) = \int_a^b K_2(t) f^{(4)}(t)dt$$

$$K_2(t) = \frac{1}{3!}\left\{\frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{3}\left[2\left(\frac{3a+b}{4}-t\right)_+^3 - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\left(\frac{2a+2b}{4}-t\right)_+^3 + 2\left(\frac{a+3b}{4}-t\right)_+^3\right]\right\}$$

$$K_2(t) = \frac{1}{6}\begin{cases} \frac{(a-t)^4}{4} & t \in \left[a, \frac{3a+b}{4}\right] \\ \frac{(a-t)^4}{4} - \frac{2(b-a)}{3}\left(\frac{3a+b}{4}-t\right)^3 & t \in \left(\frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2}\right] \\ \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{2(b-a)}{3}\left(\frac{a+3b}{4}-t\right)^3 & t \in \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{4}\right] \\ \frac{(b-t)^4}{4} & t \in \left(\frac{a+3b}{4}, b\right] \end{cases}$$

Se verifică că $K_2(t) \geq 0,\ t \in [a,b]$ şi aplicând corolarul la teorema lui Peano se obţine

$$R_2(f) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)R(e_4)$$

$$R(e_4) = \int_a^b x^4 dx - \frac{b-a}{3}\left[2\left(\frac{3a+b}{4}\right)^4 - \left(\frac{2a+2b}{4}\right)^4 + 2\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4\right] =$$

$$= (b-a)\left[\frac{b^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4}{5} - \frac{148a^4+176a^3b+120a^2b^2+176ab^3+148b^4}{768}\right] =$$

$$= \frac{b-a}{5\cdot 768}\cdot 28(b-a)^4 = \frac{7\cdot 4}{15\cdot 4\cdot 64}(b-a)^5$$

$$R_2(f) = \frac{14h^5}{45}f^{(4)}(\xi) = \frac{14}{45}\left(\frac{b-a}{4}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$$

■

9.3 Alte formule de tip interpolator

Problema 9.3.1 *Obţineţi o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_a^b f(x)dx = A_{00}f(a) + A_{10}f(b) + A_{01}f'(a) + A_{11}f'(b) + R(f)$$

Soluţie. $A_{00} = \int_a^b h_{00}(x)dx = \int_a^b \frac{(x-b)^2}{(a-b)^3}[3a-b-2x]dx$

$A_{10} = \int_a^b h_{10}(x)dx = \int_a^b \frac{(x-a)^2}{(b-a)^3}[3b-a-2x]dx$

$A_{00} = A_{10} = \frac{b-a}{2}$

$A_{01} = -A_{10} = \int_a^b (x-a)\frac{(x-b)^2}{(a-b)^2}dx = \frac{(b-a)^2}{12}$

$R(f) = \int_a^b K_3(t)f^{(4)}(t)dt$

$K_3(t) = \frac{1}{3!}\Bigg\{\frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{2}(a-t)_+^3 - \frac{b-a}{2}(b-t)_+^3 -$

$-\frac{(b-a)^2}{12}\cdot\frac{3(a-t)_+^2}{0} + \frac{(b-a)^2}{122}3(b-t)_+^2\Bigg\} =$

$= \frac{1}{3!}\left[\frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{2}(b-t)^3 + \frac{(b-a)^2}{4}(b-t)^2\right] =$

$= \frac{(b-t)^2}{4!}[b^2 - 2bt + t^2 - 2(b-a)(b-t) + (b-a)^2] =$

$= \frac{(b-t)^2}{4!}[b^2 - 2bt + t^2 - 2b^2 + 2bt + 2ab - 2at + b^2 - 2ab + a^2] = \frac{(b-t)^2(a-t)^2}{4!}$

$R_3(f) = \left(\frac{2!}{4!}\right)\frac{(b-a)^5}{5}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]$ ■

Problema 9.3.2 *Generalizare pentru* $m = 1$ *şi* $r_0 = r_1 = s-1$.

Soluţie.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{s-1}[A_{0j}f^{(j)}(a) + A_{1j}f^{(j)}(b)] + R_{2s-1}(f)$$

$$A_{0j} = \int_a^b h_{0j}(x)dx = \int_a^b \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^s \frac{(x-a)^j}{j!}\sum_{\nu=0}^{n-j}\binom{n+\nu}{\nu}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)dx =$$

$$= \frac{s(s-1)\dots(s-j)}{2s(2s-1)\dots(2s-j)} \cdot \frac{(b-a)^{j+1}}{(j+1)!}$$

$$A_{1j} = \int_a^b h_{1j}(x)dx = \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s \frac{(x-b)^j}{j!} \sum_{\nu=0}^{n-j} \binom{n+\nu}{\nu} \left(\frac{x-b}{a-b}\right) dx = (-1)^j A_{0j}$$

$$f \in C^{2s}[a,b] \ \Rightarrow \ R_{2s-1}(f) = \left(\frac{s!}{(2s)!}\right)^2 \frac{(b-a)^{2s+1}}{2s+1} f^{(2s)}(\xi)$$

$$K_{2s-1} = \frac{(b-t)^{2s}}{(2s)!} - \sum_{j=0}^{s-1} A_{1j} \frac{(b-t)^{2s-j-1}}{(2s-j-1)!} =$$

$$= \frac{1}{(2s)!}(b-t)^s(s-t)^s$$

$K_{2s-1}(t)$ are semn constant pe $[a,b]$, iar $f^{(2s)}$ este continuă şi se poate aplica formula de medie sau corolarul la teorema lui Peano. ■

Problema 9.3.3 *Stabiliţi o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_a^b f(x)dx = Af'(a) + Bf(b) + R_1(f)$$

Soluţie. Pornim de la formula de interpolare de tip Birkhoff

$$f(x) = (x-b)f'(a) + f(b) + (R_1 f)(x)$$

Integrând se obţine

$$int_a^b f(x)dx = (b-a)\left[\frac{a-b}{2}f'(a) + f(b)\right] + R_1(f)$$

Pentru rest se aplică teorema lui Peano şi se ajunge în final la

$$R_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{3} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b].$$

■

Problema 9.3.4 *Deduceţi o formulă de cuadratură integrând formula de aproximare a lui Bernstein.*

Soluţie.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} p_{m,k}(x) f\left(\frac{k}{m}\right) + R_n(f)$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=0}^{m} \int_0^1 p_{m,k}(x)dx f\left(\frac{k}{m}\right) - \int_0^1 \frac{x(1-x)}{2m} f''(\xi)dx$$

$$\int_0^1 p_{m,k}(x)dx = \binom{m}{k} \int_0^1 x^k(1-x)^{m-k}dx =$$

$$= \binom{m}{k} B(k+1, m-k+1) = \frac{k!(m-k)!}{(m+1)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{1}{m+1}$$

$$R(f) = -\frac{f''(\xi)}{2m} \int_0^1 x(1-x)dx = -\frac{f''(\xi)}{2m} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{12m} f''(\xi)$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right) - \frac{1}{12m} f''(\xi)$$

■

Observaţia 9.3.5 *Se pot folosi funcţiile lui Euler B şi Γ:*

$$B_{\rho,\nu} = \int_0^1 x^{\rho-1}(1-x)^{\nu-1}dx$$

$$B(\rho,\nu) = \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho+\nu)}$$

Observaţia 9.3.6 *Formule repetate*

Problema 9.3.7 *Calculaţi $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ cu precizia $\varepsilon = 10^{-3}$.*

Soluţie. Folosim formula Simpson repetată

$\max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| = 24$

$|R_n(f)| \leq \frac{24}{2880n^4} = \frac{1}{120n^4} \leq 10^{-3}$

$n = \left[\sqrt[3]{\frac{10^3}{120}}\right] + 1 = 2$

$$I \approx \ln 2 = \frac{1}{12}\left\{f(0) + f(1) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{12}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+4\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{7}\right)\right].$$

■

Problema 9.3.8 *Deduceţi formula repetată a lui Newton.*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8n}\Bigg[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+$$

$$+3\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{2x_i+x_{i+1}}{3}\right)+3\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+2x_{i+1}}{3}\right)\Bigg]-\frac{(b-a)^5}{648n^4}f^{(4)}(\xi)$$

Problema 9.3.9 ***(Semnul nucleului lui Peano în FNC închise)***

Fie $f \in C^{n+2}[-1,1]$ *şi* $\tau_j = -1+\frac{2j}{n}$, $j=\overline{0,n}$ $\quad n+1$ *puncte echidistante pe* $[-1,1]$ *cu pasul* $h=\frac{2}{n}$.

1° *Arătaţi că*

a) pentru $j=\overline{0,n}$, $\lim\limits_{\substack{x\to\tau_j\\ x\neq\tau_j}}[\tau_0,\dots,\tau_n,x;f]$ *există*

b) pentru orice $x\in[-1,1]$, $\frac{d}{dx}[\tau_0,\dots,\tau_n,x;f]$ *are sens şi că există* $\xi_x \in [-1,1]$ *astfel încât*

$$\frac{d}{dx}[\tau_0,\dots,\tau_n,x;f]=\frac{f^{(n+2)}(\xi_x)}{(n+2)!}$$

2° *Arătaţi că eroarea de integrare numerică a funcţiei f prin FNCî în punctele* $\tau_0,\tau_1,\dots,\tau_n$ *este dată de*

$$R_n(f)=\int_{-1}^{1}\prod_{j=0}^{n}(x-\tau_j)[\tau_0,\tau_1,\dots,\tau_n,x;f]dx$$

3° *Punem* $w(x)=\int_{-1}^{x}\prod_{j=0}^{n}(t-t_j)dt$ *şi* $I_k = w(\tau_{k+1})-w(\tau_k)$ *pentru* $k=\overline{0,n-1}$

a) Presupunem n *par* ($n=2m$)*; arătaţi că* I_k *este un şir alternant, descrescător în valoare absolută; deduceţi că* $w(x)$ *păstrează un semn constant pe* $[-1,1]$ *cu* $w(1)=w(-1)=0$. *Arătaţi că există* $\eta\in[-1,1]$ *astfel încât*

$$R_n(f)=\frac{h^{n+3}}{(n+2)!}f^{(n+2)}(\eta)\int_{-m}^{m}s^2(s^2-1)\dots(s^2-m^2)ds$$

b) Presupunem n impar $(n = 2m+1)$. Reluând demonstraţia precedentă şi descompunând $[-1,1]$ în două subintervale $[-1,\tau_{n-1}]$ şi $[\tau_{n-1},\tau_n]$ deduceţi că

$$R_n(f) = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) \int_{-m}^{m+1} s(s^2-1^2)(s^2-2^2)\dots(s^2-m^2)(s-m-1)ds$$

cu $\eta \in [-1,1]$.

Soluţie. 1° este imediată din definiţia diferenţei divizate cu noduri multiple şi formula de medie pentru diferenţe divizate.

2°

$$R_n(f) = \int_{-1}^{1} [f(x) - L_n(x)]dx = \int_{-1}^{1} \prod_{i=0}^{n} (x-\tau_i)[\tau_0,\dots,\tau_n,x;f]dx$$

3° a) $n = 2m$. Prin simetrie $w(-1) = w(1)$. Avem

$$I_k = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} u_n(t)dt$$

şi deci $(-1)^k I_k > 0$.

Cum $|u_n(t+h)| = |u_n(t)| \left| \dfrac{t+1+h}{t-1} \right| < u_n(t)$ dacă $t \in [\tau_0, \tau_0 - 1)$ avem $|I_k| > |I_{k+1}|$ pentru $k \le m-1$ deci $w(\tau_k) = I_0 + I_1 + \dots + I_{k-1}$ are semnul lui I_0 pentru $k = 0,\dots,m$ şi prin simetrie şi pentru alte valori $k \le 2m$; dacă $x \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$

$$w(\tau_k) < w(x) < w(\tau_{k+1})$$

căci $w'(x) = u_n(x)$ păstrează semn constant, deci pentru orice $x \in [-1,1]$, $w(x) \ge 0$ (semnul lui I_0).

Integrând prin părţi

$$R_n(f) = \int_{-1}^{1} u_n[\tau_0,\dots,\tau_n,x;f]dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1} w(x)[\tau_0,\dots,\tau_n,x;f]dx$$

după formula de medie

$$R_n(f) = -[\tau_0,\tau_1,\dots,\tau_n,\eta,\eta] \int_{-1}^{1} w(x)dx$$

cum

$$\int_{-1}^{1} w(x)dx = \int_{-1}^{1} (1-t)u_n(t)dt = -\int_{-1}^{1} t u_n(t)dt =$$

$$= -h^{n+3}\int_{-m}^{m} t^2(t^2-1)\dots(t^2-m^2),$$

deci nucleul are semn constant.

b) $n = 2m+1$

$$w(x) = \int_{-1}^{x} u_{2m}(t)dt$$

analog ca la a).

$w(-1) = w(\tau_{2m}) = 0$ şi $w(x) \geq 0$ pe $[-1, \tau_{2m}]$

Avem

$$[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, x; f] = [\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, x; f](x-1)u_{2m}(x) =$$
$$= ([\tau_0, \dots, \tau_{n-1}, x] - [\tau_0, \dots, \tau_{n-1}, \tau_n; f])u_{2m}(x)$$

se deduce

$$\int_{-1}^{\tau_{2m}} (f(x) - p_n(x))dx = \int_{-1}^{\tau_{2m}} [\tau_0, \dots, \tau_{n-1}, x; f]dx =$$
$$= -f[\tau_0, \dots, \tau_{n-1}, \eta, \eta] \int_{-1}^{\tau_{2m}} w(x)dx$$

La fel u_n fiind negativ pe $[\tau_{2m}, 1]$,

$$\int_{\tau_{2m}}^{1} (f(x) - o_n(x)) = -[\tau_0, \dots, \tau_n, \eta'; f]\left|\int_{\tau_{2m}}^{1} w(x)dx\right|$$

Utilizând teorema de medie pentru integrale şi formula de medie pentru diferenţe divizate se obţine că

$$R_n(f) = c_n f^{(n+1)}(\xi)$$

Luând $f = u_n$ se obţine

$$\int_{-1}^{1} u_n(x)dx = R_n(u_n) = c_n(n+1)!$$

■

Problema 9.3.10 *Arătaţi că pentru $f \in C^{m+2}[a,b]$ restul în formula de cuadratură Newton-Cotes închisă este dat de*

$$R_m(f) = \frac{h^{m+3} f^{(m+2)}(\xi)}{(m+2)!} \int_0^m t t^{[m+1]} dt, \quad \xi \in (a,b)$$

pentru m par şi

$$R_m(f) = \frac{h^{m+2} f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \int_0^m t^{[m+1]} dt, \quad \xi \in (a,b)$$

pentru m impar.

Soluţie. $a = x_0,\ x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{0,m},\ x_m = b$

$$\varphi_{m+1}(x) = \prod_{i=0}^{m}(x - x_i)$$

$$x = x_0 + th$$

$$\varphi_{m+1}(x) = h^{m+1}\prod_{i=0}^{m}(t-i) = h^{m+1}\psi_{m+1}(t) = h^{m+1}t^{[m+1]}$$

Lema 9.3.11 *a)* $\varphi_{m+1}(x_{m/2} + \sigma) = (-1)^{m+1}\varphi_{m+1}(x_{m/2} - \sigma)$ *unde* $x_{\frac{m}{2}} = x_0 + \frac{m}{2}h$.

b) De asemenea pentru $a < \sigma + h < x_{\frac{m}{2}}$ *şi* $\sigma \neq x_i$

$$|\varphi_{m+1}(\sigma + h)| < |\varphi_{m+1}(\sigma)|$$

şi pentru $x_{\frac{m}{2}} < \sigma < b$, $\sigma \neq x_i$,

$$|\varphi_{m+1}(\sigma)| < |\varphi_{m+1}(\sigma + h)|$$

Demonstraţie.

$$\psi_{m+1}(t) = t^{[m+1]}$$

$$\psi_{m+1}\left(\frac{m}{2} - s\right) = \psi_{m+1}\left(\frac{m}{2} + s\right) \text{ pentru } m \text{ impar}$$

$$\psi_{m+1}\left(\frac{m}{2} - s\right) = -\psi_{m+1}\left(\frac{m}{2} + s\right) \text{ pentru } m \text{ par}$$

$$\psi_{m+1}\left(\frac{m}{2} - s\right) = \left(\frac{m}{2} - s\right)\left(\frac{m}{2} - s - 1\right)\dots\left(\frac{m}{2} - s - m\right) \tag{9.5}$$

$$\begin{aligned}\psi_{m+1}\left(\frac{m}{2} + s\right) &= \left(\frac{m}{2} + s\right)\left(\frac{m}{2} + s - 1\right)\dots\left(\frac{m}{2} + s - m\right) = \\ &= \frac{(2s+m)(2s+m-2)\dots(2s-m)}{2^m}\end{aligned}$$

$$(9.5) \Rightarrow \frac{(2s-m)(2s-m+2)\dots(2s+m)}{2^m}(-1)^{m+1}$$

$$\varphi_{m+1}(x_{\frac{m}{2}} + \sigma) = h^{m+1}\psi\left(\frac{m}{2} + \sigma\right) = (-1)^{m+1}h^{m+1}\psi\left(\frac{m}{2} - \sigma\right)$$

b) $0 < t + 1 < \frac{m}{2}, \quad t + 1 \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\psi_{m+1}(t+1)}{\psi(t)} = \left|\frac{(t+1)t(t-1)\dots(t-m+1)}{t(t-1)\dots(t-m+1)(t-m)}\right| =$$

$$= \frac{|t+1|}{|t-m|} = \frac{t+1}{(m+1)-(t+1)} \leq \frac{\frac{m}{2}}{(m+1)-\frac{m}{2}} < 1$$

$$\frac{m}{2} < t+1 < m \quad \frac{\psi_{m+1}(t)}{\psi(t)} > 1$$

■

Definim

$$\phi_{m+1}(x) = \int_a^x \varphi_{m+1}(\sigma)d\sigma = \int_a^x h^{m+1}\sigma^{[m+1]}d\sigma$$

Lema 9.3.12 *Dacă m este par $\phi_{m+1}(a) = \phi_{m+1}(b) = 0$ şi $\phi_{m+1}(x) > 0$ pentru $a < x < b$.*

Demonstraţie. Pentru m par ϕ_{m+1} este o funcţie impară în raport cu $x_{\frac{m}{2}}$ conform părţii L1 $\Rightarrow$ $\phi_{m+1}(b) = 0$

$\varphi_{m+1}(x) < 0$ pentru $x < a$ căci $m+1$ este par,

$\varphi_{m+1}(x) > 0$ pentru $a < x < x_1 \Rightarrow \phi_{m+1}(x) > 0$ pentru $a < x \leq x_1$.

În $[x_1, x_2]$, $|\varphi_{m+1}(x)| < |\varphi_{m+1}(x-h)|$ în $[x_0, x_1]$. Schimbând variabila de integrare se observă că

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \varphi_{m+1}(x)dx\right| < \left|\int_{x_0}^{x_1} \varphi_{m+1}(x)dx\right|$$

Astfel $\phi_{m+1}(x) > 0$ pentru $a < x < x_2$ şi prin acelaşi raţionament $\phi_{m+1}(x) > 0$ pentru $a < x < x_{\frac{m}{2}}$. Se utilizează apoi antisimetria lui φ_{n+1} în raport cu $x_{\frac{m}{2}}$. ■

$$R_m(f) = \int_a^b [f(x) - (L_m f)(x)] = \int_a^b \varphi_{m+1}(x)[x_0, \ldots, x_m, x; f]dx$$

Integrăm prin părţi

$$R_m(f) = \int_a^b \frac{d}{dx}\phi_{m+1}(x)[x_0, \ldots, x_m, x; f]dx =$$

$$= \phi_{m+1}(x)[x_0, \ldots, x_m, x; f]\Big|_a^b$$

$$- \int_c^b \phi_{m+1}(x)\frac{d}{dx}[x_0, \ldots, x_m, x; f]dx =$$

$$= -\int_a^b \phi_{m+1}(x)\frac{d}{dx}[x_0, \ldots, x_m, x; f]dx =$$

$$= -\int_a^b \phi_{m+1}(x)\frac{f^{(m+2)}(\xi_x)}{(m+2)!}dx =$$

$$= \frac{-f^{(m+2)}(\alpha)}{(m+2)!}\int_a^b \phi_{m+1}(x)dx \quad a < \alpha < b$$

Integrând din nou prin părţi se obţine

$$\int_a^b \phi_{m+1}(x)dx = -\int_a^b x\varphi_{n+1}(x)dx > 0$$

Luând $x = x_0 + sh$ şi utilizând lema 2

$$R_m(f) = \frac{f^{(m+2)}(\xi)}{(m+2)!}h^{m+3}\int_0^m s\psi_{m+1}(s)ds < 0$$

Deoarece $f^{(m+2)}(\xi) = 0$ când $f \in P_{m+1} \Rightarrow r = m+1$ pentru m par.
Cazul m impar

$$R_m(f) = \int_a^{b-h} \varphi_{m+1}(x)[x_0, \dots, x_m, x; f]dx+$$

$$+\int_{b-h}^b \varphi_{m+1}(x)[x_0, \dots, x_m, x; f]dx$$

$$\varphi_{m+1}(x) = \varphi_m(x)(x - x_m)$$

Deci

$$\int_a^{b-h} \varphi_{m+1}(x)[x_0, \dots, x_m, x; f]dx =$$

$$= \int_a^{b-h} \frac{d\phi_m}{dx}([x_0, \dots, x_{m-1}, x; f] - [x_0, \dots, x_m; f])dx$$

m impar $\Rightarrow \phi_m(b-h) = 0$. Integrând prin părţi se obţine

$$\int_a^{b-h} \phi_{m+1}(x)[x_0, \dots, x_m, x; f]dx =$$

$$= -\frac{f^{(m+1)}(\xi')}{(m+1)!}\int_a^{b-h} \phi_m(x)dx = Kf^{(m+1)}(\xi')$$

$$a < \xi' < b - h$$

Aplicăm Teorema 1 de medie

$$-\frac{f^{(m+1)}(\xi'')}{(m+1)!}\int_{b-h}^b \varphi_{m+1}(x)dx = Lf^{(m+1)}(\xi'')$$

Astfel

$$Rf = Kf^{(m+1)}(\xi') + Lf^{(m+1)}(\xi'')$$

Deoarece $K < 0$ şi $L < 0$, $Rf = (K+L)f^{(n+1)}(\xi)$ pentru $\xi \in (\xi', \xi'')$. Deoarece

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{d}{dx}\phi_n(x)(x-b)$$

integrarea prin părţi ne dă

$$K + L = I_n.$$

■

9.4 Cuadraturi repetate. Metoda lui Romberg

Se vor utiliza formulele

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h_{k-1}\right)\right], \quad k = \overline{2,n}$$

$$R_{k,j} = \frac{4^{j-1}R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1}-1}, \quad k = \overline{2,n}$$

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$h_k = \frac{h_{k-1}}{2} = \frac{b-a}{2^{k-1}}$$

Problema 9.4.1 *Aproximaţi* $\int_0^\pi \sin x dx$ *prin metoda lui Romberg,* $\varepsilon = 10^{-2}$.

Soluţie.

$$I = \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2}(0+0) = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left(R_{1,1} + \pi\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1.571$$

$$R_{2,2} = 1.571 + (1,571 - 0)/3 = 2.094$$

$$(R_{2,2} - R_{1,1}) > 0.01$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[R_{2,1} + \frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 1.895$$

$$R_{3,2} = 1,895 + \frac{1.895 - 1.571}{3} = 2.004$$
$$R_{3,3} = 2.004 + (2.004 - 2.094)/15 = 1.999$$
$$|R_{3,3} - R_{2,2}| < 0.1$$

Pentru trapez cu acelaşi număr de argumente $I \approx 1,895$
Pentru Simpson cu 4 noduri $I \approx 2.005$ ■

9.5 Formule de cuadratură de tip Gauss

Vom considera formule de cuadratură de forma

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} A_k f(x_k) + R_m(f)$$

Coeficienţii A_k şi nodurile x_k se determină din sistemul neliniar

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \ldots + A_m & = & \mu_0 \\ A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_mx_m & = & \mu_1 \\ \ldots & & \\ A_1x_1^{m-1} + A_2x_2^{m-1} + \cdots + A_mx_m^{m-1} & = & \mu_{m-1} \\ \ldots & & \\ A_1x_1^{2m-1} + A_2x_2^{2m-1} + \cdots + A_mx_m^{2m-1} & = & \mu_{2m-1} \end{cases}$$

unde $\mu_k = \displaystyle\int_a^b w(x)x^k dx$ sunt momentele funcţiei pondere w.

Nodurile $x_k,\ k = \overline{1,m}$ vor fi rădăcinile polinomului u de grad m, ortogonal pe $\mathbb{P}_{m-1}$ relativ la ponderea w şi intervalul $[a, b]$.

Pentru coeficienţi avem expresia

$$A_k = \frac{1}{[k'(x_k)]^2} \int_a^b w(x)v_k^2(x)dx, \quad k = \overline{1,m}$$

unde $v_k(x) = \dfrac{u(x)}{x - x_k}$, iar pentru rest

$$R_m(f) = \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \int_a^b w(x)u^2(x)dx, \quad \xi \in [a, b]$$

Dacă $w(x) \equiv 1$, atunci u este polinomul Legendre de grad m

$$u(x) = \frac{m!}{(2m)!} \frac{d^m}{dx^m}[(x - a)^m(x - b)^m]$$

iar coeficienţii şi restul au expresiile

$$A_k = \frac{(m!)^4(b-a)^{2m+1}}{[(2m)!]^2(x_k-a)(b-x_k)[k'(x_k)]^2}, \quad k=\overline{1,m}$$

şi respectiv

$$R_m(f) = \frac{(m!)^4}{[(2m)!]^3}\frac{(b-a)^{2m+1}}{2m+1}f^{(2m)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

Problema 9.5.1 *Stabiliţi o formulă de cuadratură de tip Gauss în cazul* $w(x) \equiv 1$ *şi* $m = 3$.

Soluţie. Polinomul Legendre de grad 3 corespunzând intervalului $[-1,1]$ este

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3-3t)$$

cu rădăcinile

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Coeficienţii sunt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}A_3 = 0 \\ \frac{3}{5}A_1 + \frac{3}{5}A_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$A_1 = A_3 = \frac{5}{9} \quad A_2 = \frac{8}{9}$$

Pentru rest se obţine

$$R_3(f) = \frac{(3!)^4}{(6!)^3}\frac{(b-a)^7}{7}f^{(6)}(\xi)$$

Trecerea de la $[-1,1]$ la $[a,b]$ se poate face prin schimbarea de variabilă

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^m A_i f(x_i)$$

unde $x_i = \dfrac{b+a}{2} + \dfrac{b-a}{2}t_2$, t_i fiind rădăcinile polinomului Legendre corespunzător intervalului $[-1,1]$. ■

Problema 9.5.2 *Aproximaţi* $\ln 2$ *cu două zecimale exacte folosind o formulă gaussiană repetată.*

Soluţie.

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

Vom folosi formula repetată a dreptunghiului

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i) + \frac{(b-a)^3}{3} f''(\xi)$$

$$M_2 f = 2 \quad \xi \in (a,b)$$

$$|R_n(f)| \le \frac{1}{24n^2} M_2 f = \frac{1}{12n^2} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-2} \Rightarrow 6n^2 \ge 100$$

$n = 5$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{10}} + \frac{1}{1+\frac{3}{10}} + \frac{1}{1+\frac{5}{10}} + \frac{1}{1+\frac{7}{10}} + \frac{1}{1+\frac{9}{10}}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{10}{11} + \frac{10}{13} + \frac{10}{15} + \frac{10}{17} + \frac{10}{19}\right] =$$

$$= 2\left[\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right]$$

■

Problema 9.5.3 *Determinaţi o formulă cu grad de exactitate cel puţin doi pentru a aproxima*

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx$$

în ipoteza că integrala improprie există.

Soluţie. Polinoamele ortogonale pe $[0,\infty)$ relativ la ponderea $w(t) = e^{-t}$ sunt polinoamele lui Laguerre

$$g_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$$

$$g_2(t) = t^2 - 4t + 2$$

cu rădăcinile $t_1 = 2 - \sqrt{2}$, $t_2 = 2 + \sqrt{2}$.

Momentele funcţiei pondere sunt

$$\mu_0 = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1 \quad \mu_1 = 1 \quad \mu_2 = 2$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ A_1x_1 + A_2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \quad A_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$R_2(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b w(x)u^2(x)dx$$

$$\int_a^b w(x)u^2(x) = \int_0^\infty (x^2-4x+2)^2e^{-x}dx =$$

$$= \int_0^\infty (x^4+16x^2+4-8x^3+4x^2-16x)e^{-x}dx = 4+32+4-24+8-16 = 8$$

■

Problema 9.5.4 *Aceeaşi problemă pentru gradul de exactitate $r = 3$ şi*

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}f(x)dx$$

Soluţie. Nodurile formulei gaussiene căutate vor fi rădăcinile polinoamelor Hermite ortogonale pe $(-\infty, \infty)$ relativ la ponderea $w(t) = e^{-t^2}$.

$h_n(t) = (-1)^n e^{t^2}\dfrac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}) \quad t \in \mathbb{R}$
$h_0(t) = 1, \quad h_1(t) = 2t$
$h_{n+1}(t) = 2th_n(t) - 2nh_{n-1}(t)$
$h_2(t) = 2(2t^2-1) = 2th_1(t) - 2 = 4t^2 - 2$
$h_3(t) = 2th_2(t) - 2h_1(t) = 2t(4t^2-2) - 8t = 4t(2t^2-3)$
$t_1 = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$
$\mu_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$
$\mu_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty te^{-t^2}dt = 0$
$\mu_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty t^2e^{-t^2}dt = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty (2t)(2t)e^{-t^2}dt = \frac{1}{4}2^2\cdot 2!\sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi}$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = \sqrt{\pi} \\ -A_1 + A_3 = 0 \\ A_1 + A_3 = \dfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{\pi} = \dfrac{4}{3}\sqrt{\pi} \end{cases}$$

$$A_1 = A_3 = \frac{2}{3}\sqrt{\pi}$$

$$A_2 = \frac{1}{3}\sqrt{\pi}$$

$$R_3(f) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\frac{h_3^2(t)}{8^2}dt =$$

$$= 8\cdot 3!\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{8^2}\cdot\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 8}f^{(6)}(\xi)$$

■

Problema 9.5.5 *Fie formula de cuadratură de forma*

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R_n(f), \qquad f \in C^{2n}[-1,1].$$

1° Arătaţi că coeficienţii A_i şi nodurile x_i sunt date de

$$A_i = \int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}(x-x_i)T_n'(x_i)}dx,$$
$$x_i = \cos\theta_i, \quad \theta_i = \frac{(2i-1)}{2n}\frac{\pi}{2}, \quad i = \overline{1,n},$$

unde T_n este polinomul Cebîşev de speţa I de grad n.

2° Punând pentru $1 \le i \le n$,

$$\delta_j = \int_0^{\pi}\frac{\cos j\theta - \cos j\theta_i}{\cos\theta - \cos\theta_i}d\theta, \quad j = 1,2,\dots$$

arătaţi că $\delta_{j+1} - 2\cos\theta_i\delta_j + \delta_{j-1} = 0$, pentru $j = 2,3,\dots$şi calculaţi δ_{k+1}. Deduceţi că $A_i = \frac{\pi}{n}$, $i = \overline{1,n}$.

3° Arătaţi că

$$R_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}}\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}, \qquad \xi \in (-1,1).$$

Soluţie.

1° Ţinând cont că nodurile formulei vor fi rădăcinile polinomului lui Cebâşev de speţa I, iar coeficienţii se obţin integrând polinoamele fundamentale, formulele de la punctul 1° sunt imediate.

2° Punând $x = \cos\theta$ avem

$$A_i = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_i} \frac{1}{T_n'(x_i)} = \frac{\delta_n}{T_n'(x_i)},$$

căci $\cos n\theta_i = 0$, $i = \overline{1,n}$. Din relaţia

$$\cos(j+1)\theta + \cos(j-1)\theta = 2\cos\theta\cos j\theta$$

rezultă pentru $j \geq 2$ că

$$\begin{aligned} \delta_{j+1} + \delta_{j-1} &= 2\int_0^\pi \frac{\cos\theta\cos j\theta - \cos\theta_i\cos j\theta_i}{\cos\theta - \cos\theta_i} d\theta \\ &= 2\int_0^\pi \cos j\theta d\theta + 2\cos\theta_i\delta_j \end{aligned}$$

şi $\delta_0 = 0$ şi $\delta_1 = \pi$. Relaţia de recurenţă $\delta_{j+1} - 2\cos\theta_i\delta_j + \delta_{j-1} = 0$ are soluţia generală $\delta_j = A\cos j\theta_i + B\sin j\theta_i$; se obţine

$$\delta_n = \frac{\pi\sin n\theta_i}{\sin\theta_i}$$

şi cum

$$T_n'(x_i) = \frac{n\sin n\theta_i}{\sin\theta_i}$$

se deduce că $A_i = \frac{\pi}{n}$, $i = \overline{1,n}$.

3° Din expresia restului se obţine

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x)}{2^{2n-2}\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}.$$

■

Problema 9.5.6 *Deduceţi o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R_3(f)$$

Soluţie. Formula va fi de tip Gauss; polinoamele ortogonale care dau nodurile vor fi polinoamele Cebâşev de speţa a II-a.

$$Q_n(t) = \frac{\sin[(n+1)\arccos t]}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in [-1,1]$$

Ele au rădăcinile $t_k = \cos \dfrac{k\pi}{n+1}$, $k = \overline{1,n}$

În cazul nostru avem

$$Q_3(t) = 8t^3 - 4t \quad \widetilde{Q}_3(t) = \frac{1}{8}(8t^3 - 4t)$$

Rădăcinile vor fi

$$t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad t_0 = 0, \quad t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pentru coeficienţi, ţinând cont că formula are gradul de exactitate $2m - 1 = 5$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A)3 = \mu_0 \\ A_1 t_1 + A_2 t_2 + A_3 t_3 = \mu_1 \\ A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 + A_3 t_3^2 = \mu_2 \end{cases}$$

unde

$$\mu_k = \int_{-1}^{1} t^k \sqrt{1-t^2}dt$$

$$\mu_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \mu_1 = \int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}dt = 0$$

$$\mu_2 = \int_{-1}^{1} t^2\sqrt{1-t^2}dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(2t)(2t)\sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{8}$$

Se observă că $\mu_{2k+1} = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^{2k+1}\sqrt{1-t^2}dt = 0$, deoarece funcţia de integrat este impară.

Sistemul are soluţiile

$$A_1 = A_3 = \frac{\pi}{8}, \quad A_2 = \frac{\pi}{4}$$

Restul va fi

$$R_m(f) = \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!}\int_{-1}^{1} w(x)u^2(x)dx =$$
$$= \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^{m+1}(2m)!}f^{(2m)}(\xi)$$

Am obţinut formula

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{\pi}{8}\left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2f(0) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] + \frac{\pi}{2^4 6!}f^{(6)}(\xi)$$

■

Problema 9.5.7 *Deduceţi o formulă de tip Cebâşev pe* $[-1,1]$ *cu* $w(x)=1$ *şi cu 3 noduri.*

Soluţie.

$$A=\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} t_1+t_2+t_3=0\\ t_1^2+t_2^2+t_3^2=1\\ t_1^3+t_2^3+t_3^3=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}C_1&=t_1+t_2+t_3\\ C_2&=t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3\\ C_3&=t_1t_2t_3\end{aligned}$$

$$C_1=0$$

$$C_2=\frac{1}{2}[(t_1+t_2+t_3)^2-(t_1^2+t_2^2+t_3^2)]=-\frac{1}{2}$$

$$C_3=\frac{1}{6}[(t_1+t_2+t_3)^3-3(t_1+t_2+t_3)(t_1^2+t_2^2+t_3^2)+2(t_1^3+t_2^3+t_3^3)]=\frac{1}{6}(0-0+0)=0$$

$$t^3-C_1t^2+C_2t-C_3=0$$

$$t^3-\frac{1}{2}t=0,\quad t_1=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad t_2=0,\quad t_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{-1}^{1}f(t)dt=\frac{2}{3}\left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]+R_3(f)$$

$$R_3(f)=\int_{-1}^{1}K_3(f)f^{(4)}(t)dt$$

$$K_3(t)=\frac{1}{6}\left[\frac{(1-t)^4}{4}-\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}(t_i-t)_+^3\right]$$

$$K_3(t)=\frac{1}{6}$$

Deoarece

$$\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}(t_i-t)^3=\int_{-1}^{1}(x-t)^3dx=\frac{(1-t)^4}{4}-\frac{(1+t)^4}{4}$$

obţinem

$$K_3(t) = \frac{1}{6}\begin{cases} \frac{(1+t)^4}{4} & t \in \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ \frac{(1+t)^4}{4} - \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + t\right)^3 & t \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right] \\ \frac{(1-t)^4}{4} - \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - t\right)^3 & t \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ \frac{(1-t)^4}{4} & t \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \end{cases}$$

K_3 pară, $K_3 \geq 0$. Pentru rest avem

$$R_3(f) = f^{(4)}(\xi)\int_{-1}^{1} K_3(t)dt = \frac{1}{360}f^{(4)}(\xi),$$

sau cu corolarul teoremei lui Peano

$$R_3(f) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)R(e_4) = \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)\left\{\int_{-1}^{1} x^4dx - \frac{2}{3}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{24}\left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right]f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{360}f^{(4)}(\xi).$$

■

Capitolul 10

Ecuaţii neliniare

10.1 Ecuaţii în $\mathbb{R}$

Metoda coardei (a falsei poziţii sau a părţilor proporţionale)

Fie ecuaţia $f(x) = 0$ şi intervalul $[a, b]$ astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Presupunem că $f(a) < 0$ şi $f(b) > 0$.

În loc să înjumătăţim intervalul ca la metoda intervalului îl împărţim în raportul $-\dfrac{f(a)}{f(b)}$. Se obţine pentru rădăcină aproximanta

$$x_1 = a + h_1 \tag{10.1}$$

unde

$$h_1 = \frac{-f(a)}{-f(a) + f(b)}(b - a) = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \tag{10.2}$$

Procedând analog pentru intervalul $[a, x_1]$ sau $[x_1, b]$, la capătul căruia funcţia f are semne opuse, obţinem o a doua aproximare x_2, ş.a.m.d.

Interpretare geometrică. Metoda părţilor proporţionale este echivalentă cu înlocuirea lui $y = f(x)$ cu coarda ce trece prin punctele $A[a, f(a)]$ şi $B[b, f(b)]$ (vezi figura 10.1).

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Făcând $y = 0$ se obţine

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \tag{10.3}$$

$(10.3) \;\Leftrightarrow\; (10.1) \wedge (10.2)$

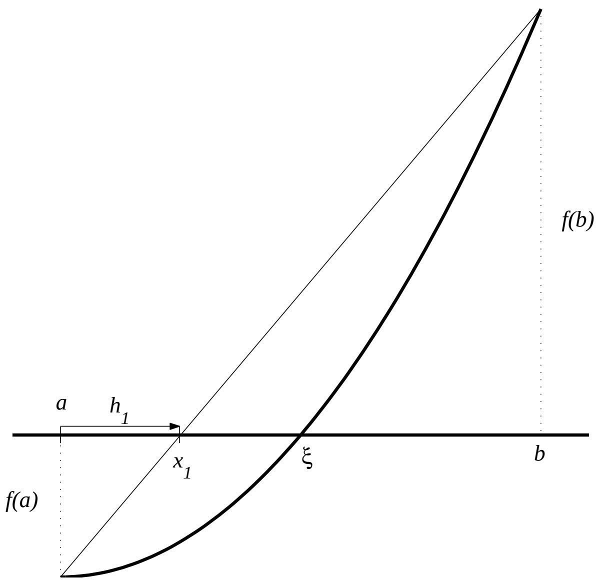


Figura 10.1: Metoda falsei poziţii

Convergenţa metodei. Presupunem că rădăcina este izolată şi că f'' are semn constant pe $[a, b]$.

Presupunem că $f''(x) > 0$ pe $[a, b]$ (cazul $f''(x) < 0$ se reduce la precedentul scriind $-f(x) = 0$. Curba $y = f(x)$ este convexă şi putem avea două situaţii: $f(a) > 0$ şi $f(b) > 0$ (figura 10.2).

În primul caz capătul este fix iar aproximaţiile succesive se obţin astfel

$$x_0 = b$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.4}$$

şirul obţinut fiind monoton descrescător şi mărginit.

$$a < \xi < \cdots < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < x_0$$

Pentru celălalt caz b este fix şi $x_0 = a$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_n)$$

Şirul obţinut este crescător şi mărginit

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < \xi < b$$

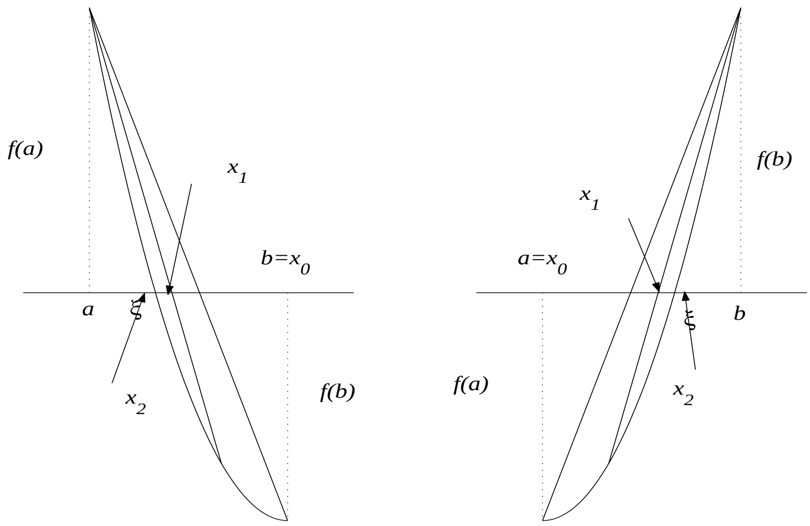


Figura 10.2: Convergenţa metodei falsei poziţii

Pentru a arăta că limita este rădăcină a ecuaţiei iniţiale se trece la limită în relaţia de recurenţă. Pentru delimitarea erorii folosim formula

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}$$

unde $|f'(x)| \leq m_1$ pentru $x \in [a, b]$

$$f(x_n) - f(\xi) = (x_n - \xi) f'(c), \quad c \in (x_n, \xi)$$

$$|f(x_n) - f(\xi)| = |f(x_n)| \geq m_1 |x_n - \xi|$$

Vom da o delimitare mai bună dacă f este continuă pe $[a, b]$, $[a, b]$ conţine toate aproximantele şi f' îşi păstrează semnul.

$$0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1 < \infty$$

Pentru primul caz avem

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(a)}(x_{n-1} - a)$$

$$f(\xi) - f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1}) - f(a)}{x_{n-1} - a}(x_n - x_{n-1})$$

Utilizând teorema lui Lagrange avem

$$(\xi - x_{n-1}) f'(\xi_{n-1}) = (x - x_{n-1}) f'(\overline{x}_{n-1})$$

$x_{n-1} \in (x_{n-1}, \xi)$, $\overline{x}_{n-1} \in (a, x_{n-1})$. Deci

$$|\xi - x_n| = \frac{|f'(x_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})|}{f'(\xi_{n-1})|}|x_n - x_{n-1}|$$

Deoarece f' are semn constant pe $[a, b]$ şi $\overline{x}_{n-1}, \xi_{n-1} \in [a, b]$ obţinem

$$|f'(\overline{x}_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})| \leq M_1 - m_1$$

Deci

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}|$$

Dacă $M_1 \leq 2m_1$ (lucru care se poate întâmpla dacă $[a, b]$ este mic)

$$|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|$$

Deci dacă programăm această metodă, putem folosi drept criteriu de oprire

$$\frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

sau

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

Problema 10.1.1 *Determinaţi o rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$f(x) = x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2$$

cu precizia 0.002.

Soluţie.

$$f(1) = -0.6 < 0, \quad f(2) = 5.6 > 0$$

$$\xi \in (1, 2), \quad f(1.5) = 1.425, \quad \xi \in (1, 1.5)$$

$$x_1 = 1 + \frac{0.6}{1.425 + 0.6}(1.5 - 1) = 1 + 0.15 = 1.15$$

$$f(x_1) = -0.173$$

$$x_2 = 1.15 + \frac{0.173}{1.425 + 0.173}(1.5 - 1.15) = 1.15 + 0.040 = 1.150$$

$$f(x_2) = -0.036$$

$$x_3 = 1.150 + \frac{0.036}{1.425 + 0.036}(1.5 - 1.15) = 1.190$$

$$f(x_3) = -0.0072$$

$$f'(x) = 2x^2 - 0.4x - 0.2, \quad x_3 < x < 1.5$$
$$f'(x) \geq 3.1198^2 - 0.4 \cdot 1.5 - 0.2 = 3 \cdot 1.43 - 0.8 = 3.49$$
$$0 < \xi - x_3 < \frac{0.0072}{3.49} \approx 0.002$$
$$\xi = 1.198 + 0.002\theta, \quad \theta \in (0, 1]$$

■

Problema 10.1.2 *Utilizând metoda lui Newton, calculaţi o rădăcină negativă a ecuaţiei*

$$f(x) \equiv x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$$

cu 5 zecimale exacte.

Soluţie.

$$f(0) = -10000, \quad f(-10) = -1050$$
$$f(-100) = 1 - 8$$
$$f(-11) = 3453, \quad f'(x) < 0, \quad f''(x) > 0$$
$$f(-11) > 0, \quad f''(-11) > 0$$

Luăm $x_0 = -11$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x_1 = -11 - \frac{3453}{-5183} = -10.3$$
$$x_2 = -10.3 - \frac{134.3}{-4234} = -10.3 + 0.03 = -10.27$$
$$x_3 = -10.27 - \frac{37.8}{-4196} = -10.27 + 0.009 = -10.261$$
$$|x_2 - x_3| = |0.09|, \quad \text{ş.a.m.d.}$$

■

Problema 10.1.3 *Fie ecuaţia*

$$f(x) = 0 \tag{10.5}$$

şi f'' este continuă şi îşi păstrează semnul pe $(-\infty, \infty)$.

Arătaţi că:

a) Ecuaţia are cel mult două rădăcini.

b) Să presupunem că

$$f(x_0)f'(x_0) < 0, \quad f(x_0)f''(x) < 0$$

atunci (1) are o rădăcină unică în (x_0, x_1). *Cum poate fi calculată cu Newton pornind cu* x_0.

c) Dacă $f'(x_0) = 0$, $f(x_0)f''(x) < 0$, *ecuaţia are două rădăcini care pot fi calculate cu Newton şi cu aproximantele iniţiale*

$$x_1 = x_0 - \sqrt{-\frac{2f(x_0)}{f''(x_0)}}$$

$$x_1' = x_0 + \sqrt{-\frac{2f(x_0)}{f''(x_0)}}$$

a) Rezultă din teorema lui Rolle.

b) ξ are o soluţie unică în (x_0, x_1) (vezi figura 10.3)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

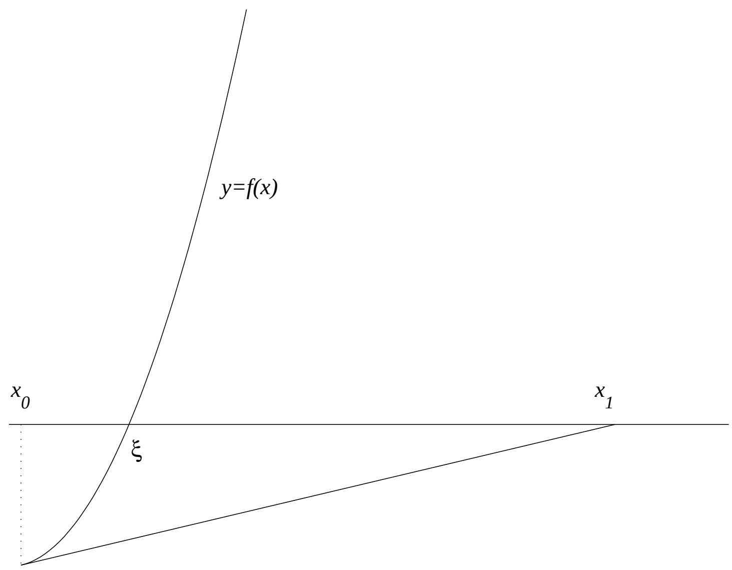


Figura 10.3: Cazul b) al problemei 10.1.3

c) $f'(x_0) = 0$, $f(x_0)f''(x) < 0$

Ecuaţia (10.5) are două rădăcini ξ şi ξ' în $(-\infty, \infty)$ (figura 10.4, stânga).

Aproximăm f cu Taylor

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 = 0.$$

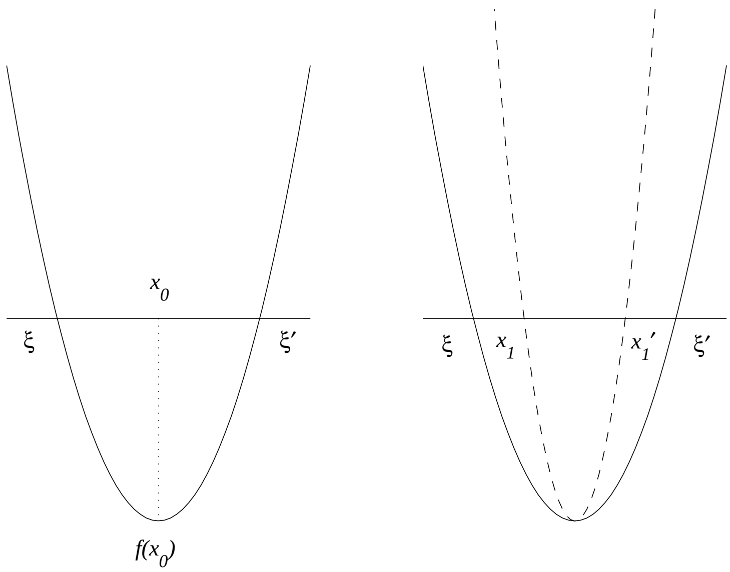


Figura 10.4: Cazul c) al problemei 10.1.3

Ecuaţia

$$f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

are două rădăcini

$$x_1 = x_0 - \sqrt{-\frac{2f(x_0)}{f''(x_0)}}$$

$$x_1' = x_0 + \sqrt{-\frac{2f(x_0)}{f''(x_0)}}$$

care sunt abscisele punctelor de intersecţie cu axa Ox ale parabolei (figura 10.4, dreapta)

$$Y = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Observaţia 10.1.4 *Avem de fapt două cazuri de interes date de I şi II.*

Problema 10.1.5 *Determinaţi o rădăcină a ecuaţiei*

$$x^3 - x - 1 = 0$$

folosind metoda aproximaţiilor succesive.

Soluţie.

$$f(1) = -1 < 0, \quad f(2) = 5 > 0$$

$$x - x^3 - 1$$

$$f(x) = x^3 - 1, \quad \varphi'(x) = 3x^2$$

$$\varphi''(x) \geq 3 \text{ pentru } x \in [1, 2]$$

dar nu se poate aplica m.a.s.

$$x = \sqrt[3]{x+1}$$

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$0 < \varphi'(x) < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < \frac{1}{4} = 2 \text{ pentru } a \leq x \leq 2$$

metoda aproximaţiilor succesive are o convergenţă rapidă

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \sqrt[3]{2}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{2}}, \quad x_3 = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{2}}}$$

■

Problema 10.1.6 *Concepeţi o metodă cu un pas şi una cu doi paşi pentru a aproxima* $\sqrt{a}$, $a > 0$.

Soluţie. Folosim metoda lui Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

(Metoda lui Heron)

$$f(x) = x^2 - a$$

$$f'(x) = 2x > 0 \text{ pentru } x > 0$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

$$f'(x) \neq 0 \text{ pe } [a, b] \subset (0, \infty)$$

$$f''(x) > 0 \text{ pe } [a, b]$$

Orice valoare pozitivă poate fi utilizată ca valoare de pornire. ■

Observaţia 10.1.7 *Numărul de zecimale corecte se dublează la fiecare pas, comparativ cu numărul original de zecimale corecte.*

$$x_0 = \sqrt{a}(1+\delta)$$
$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a}(1+\delta) + \sqrt{a}(1+\delta)^{-1}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{a}(1+\delta+1-\delta+\delta^2) = \sqrt{x}\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)$$

b) Folosim metoda secantei

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$
$$= x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})(x_n^2 - a)}{x_n^2 - x_{n-1}^2} =$$
$$= x_n - \frac{x_n^2 - a}{x_n + x_{n-1}} = \frac{x_n^2 + x_n x_{n-1} - x_n^2 + a}{x_n + x_{n-1}}$$
$$x_0 > 0$$

Problema 10.1.8 *La fel pentru rădăcina cubică $\sqrt[3]{x}$.*

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2y_n + \frac{x}{y_n^2}\right)$$
$$y_0 > 0$$

Problema 10.1.9 *Strict aplicabilitatea metodei lui Newton pentru rădăcini multiple.*

Soluţie. Fie x^* o rădăcină multiplă de ordinul m.
Dorim convergenţă de ordinul 2.

$$g(x) = x - m(f'(x))^{-1}f(x)$$

$$g(x^*) = x^*$$

Presupunem că $f(x^*) = f'(x^*) = \cdots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$

$$f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

$$f(x^*+h)=\frac{f^{(n)}(x^*)h^m}{m!}(1+O(h))$$

$$f'(x^*+h)=\frac{f^m(x^*)h^{m-1}}{(m-1)!}(1+O(h))$$

$$\frac{f(x^*+h)}{f'(x^*+h)}=\frac{h}{m}(1+O(h))=\frac{h}{m}+O(h^2)$$

şi pentru $f'(x^*+h)\neq 0$,

$$g(x^*+h)=x^*+h-m\left(\frac{h}{m}+O(h^2)\right)$$

$$g'(x^*)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x^*+h)-g(x^*)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h-h+mO(h^2)}{h}<1 \text{ convergentă}$$

■

Problema 10.1.10 *Deduceţi formula*

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}-\frac{1}{2}\left[\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right]^2\frac{f''(x_i)}{f(x_i)}$$

Soluţie. Folosim interpolarea Taylor inversă:

$$F_m^T(x_i)=x_i+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^l}{k!}[f(x_i)]^k g^{(k)}(f(x_i))$$

■

Problema 10.1.11 *Stabiliţi următoarea metodă de aproximare a unei rădăcini reale a ecuaţiei* $f(x)=0$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{[x_{k-1},x_k;f]}-\frac{[x_{k-2},x_{k-1},x_k;f]f(x_{k-1})f(x_k)}{[x_{k-2},x_{k-1};f][x_{k-2},x_k;f][x_{k-1},x_k;f]}$$

$$k=3,4,\ldots$$

Soluţie. Folosim polinomul de interpolare inversă a lui Newton.

$$g(y)\approx g(y_0)+(y-y_0)[y_0,y_1;g]+(y-y_0)(y-y_1)[y_0,y_1,y_i;f]$$

$$g(0)\approx g(y_0)-y_0[y_0,y_1;g]+y_0y_1[y_0,y_1,y_2;g]=$$

$$= x_0 - f(x_0)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} + f(x_0)f(x_1)\frac{[y_1, y_2; g] - [y_0, y_1; g]}{y_2 - y_0} =$$

$$= x_0 - \frac{f(x_0)}{[x_0, x_1; f]} + f(x_0)f(x_1)\frac{\dfrac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} - \dfrac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}}{f(x_2) - f(x_0)} =$$

$$= x_0 - \frac{f(x_0)}{[x_0, x_1; f]} - f(x_0)f(x_1)\frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \cdot$$

$$\cdot \frac{x_2 - x_0}{f(x_2) - f(x_0)} \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} =$$

$$= x_0 - \frac{f(x_0)}{[x_0, x_1; f]} - \frac{[x_0, x_1, x_2; f]f(x_1)f(x_2)}{[x_1, x_2; f][x_0, x_2; f][x_0, x_1; f]}$$

■

10.2 Sisteme neliniare

Problema 10.2.1 *Utilizaţi metoda aproximaţiilor succesive pentru a aproxima soluţia sistemului*

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^3 - x_2 = 0 \end{cases} \tag{10.6}$$

Soluţie. Interpretarea geometrică apare în figura 10.5.

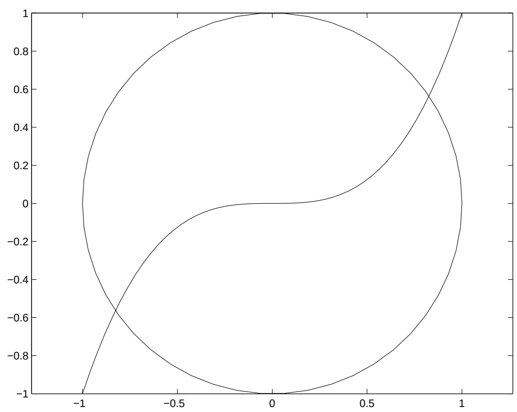


Figura 10.5: Interpretarea geometrică a sistemului (10.6)

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} \quad f'(x^0) = \begin{bmatrix} 1.8 & 1 \\ 2.43 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det f'(x^0) \neq 0 = -4.23$$

$$[f'(x^0)]^{-1} = -\frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2.43 & 1.8 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = -[f'(x^0)]^{-1} = \frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2.43 & 1.8 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(x) = x + \Lambda f(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.43 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} - \frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.43 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9^2 + 0.5^2 - 1 \\ 0.9^3 - 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8317 \\ 0.5630 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.8317 \\ 0.5630 \end{bmatrix} - \frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.43 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8317^2 + 0.5630^2 - 1 \\ 0.8317^2 - 0.5630 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8265 \\ 0.5633 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.8261 \\ 0.5361 \end{bmatrix}, \qquad x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.8261 \\ 0.5636 \end{bmatrix}$$

$$\|x^{(4)} - x^{(3)}\| < 10^{-4}.$$

■

Observaţia 10.2.2 *În locul procesului Picard-Banach pentru sisteme neliniare este uneori convenabil să se utilizeze un proces Seidel.*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n) \\ x_{n+2} = \varphi_2(x_{n+1}, y_n) \end{cases}.$$

Problema 10.2.3 *Aproximaţi soluţia sistemului*

$$\begin{cases} F(x,y) = 2x^3 - y^2 - 1 = 0 \\ G(x,y) = xy^3 - y - 4 = 0 \end{cases}$$

folosind metoda lui Newton.

Soluţie.

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases} \quad F, g \in C^1$$

$$x = x_n + h_n$$

$$y = y_n + k_n$$

$$\begin{cases} F(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0 \\ G(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0 \end{cases}$$

Utilizând formula lui Taylor se obţine

$$\begin{cases} F(x_n, y_n) + h_n F'_x(x_n, y_n) + k_n F'(x_n, y_n) = 0 \\ G(x_n, y_n) + h_n G'_x(x_n, y_n) + k_n G'(x_n, y_n) = 0 \end{cases}$$

Dacă jacobianul

$$J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

obţinem

$$h_n = -\frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

$$k_n = -\frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

$$x_0 = 1.2, \quad y_0 = 1.7$$

$$F(x_0, y_0) = -0.434$$

$$G(x_0, y_0) = 0.1956$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8.64 & -3.40 \\ 4.91 & 5.40 \end{vmatrix} = 57.91$$

$$h_0 = 0.6349$$

$$k_0 = -0.0390$$

■

Capitolul 11

Rezolvarea numerică ecuaţiilor diferenţiale

Problema 11.0.4 *Aproximaţi soluţia problemei Cauchy*

$$y' = -y + x - 1, \quad x \in [0,1], \quad y(0) = 1$$

pentru $N = 10$, $h = 0.1$, $x_i = 0.1i$ *folosind metoda lui Euler.*

Soluţie.

$$y' = -y + x + 1, \quad x \in [0,1], \quad y(0) = 1$$

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$\tau = \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

Soluţia exactă este

$$y(x) = x + e^{-x}$$

$$y_0 = 1$$

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + h(-y_{i-1} + x_{i-1} + 1) = \\ &= y_{i-1} + 0 \cdot 1(-y_{i-1} + 0.1(i-1) + 1) = \\ &= 0.9y_{i-1} + 0.01(i-1) + 0.1 = 0.9y_{i-1} + 0.01i + 0.09 \end{aligned}$$

Calculele sunt date în următorul tabel

x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y_i - y(x_i)\rvert$
0.0	1.000000	1.000000	0
0.1	1.000000	1.004837	0.004837
0.2	1.01	1.018731	0.008731
0.3	1.029	1.040818	0.011818
0.4	1.0561	1.070320	0.014220

Să aplicăm acum pentru aceeaşi problemă metoda Runge-Kutta de ordinul IV.
$y_0 = \alpha = y(a)$
$k_1 = hf(x_i, y_i)$
$k_2 = kf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$
$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$
$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3), \quad \tau \in O(h^4)$
$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

x_i	val.exactă	y_i	eu
0	1.0	1.0	0
0.1	1.0048374180	1.0048375000	$8.1 \cdot 15^{-8}$
0.2	1.0187307531	1.0187309014	$1.483 \cdot 10^{-7}$
0.3	1.0408		

■

Problema 11.0.5 *Aproximaţi soluţia ecuaţiei*

$$y' = -y + 1$$

$$y(0) = 0$$

folosind:
a) metoda Euler cu $h = 0.025$*;*
b) metoda Euler modificată cu $h = 0.05$*;*
c) metoda Runge-Kutta cu $h = 0.1$.
Comparaţi rezultatele celor 3 metode în punctele 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 între ele şi cu valoarea exactă.

Soluţie. $y_0 = \alpha$
$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))]$

x	Euler	Euler mod.	RK4	val.exactă
0.1	0.096312	0.095123	0.0951620	0.095162582
0.2	0.183348	0.181198	0.18126910	0.181269247
0.3	0.262001	0.259085	0.25918158	0.259181779
0.4	0.333079	0.329563	0.32967971	0.329679954
0.5	0.397312	0.393337	0.39346906	0.393469340

■

Problema 11.0.6 *Deduceţi metode predictor corector de tip Adams de ordinul 2,3,4.*

Soluţie. Predictorul cu m paşi se generează astfel:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx = \sum_{k=0}^{m-1} \nabla^k f(x_i, y(x_i))h(-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds +$$

$$+\frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1)\dots(s+m-1)f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))ds$$

k	0	1	2	3	4	5
$(-1)^k \int_0^1 \binom{s}{k} ds$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\Big[f(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{2}\nabla f(x_i, y(x_i) +$$

$$+\frac{5}{12}\nabla^2 f(x_i, y(x_i)) + \frac{3}{8}\nabla^3 f(x_i, y(x_i)) + \dots\Big] +$$

$$+h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i))(-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds$$

Pentru $m = 2$ obţinem

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h\left[f(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{2}\nabla f(x_i, y(x_i))\right] =$$

$$= y(x_i) + h\left[f(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{2}(f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1})))\right] =$$

$$= y(x_i) + \frac{h}{2}[3f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))]$$

$$y_0 = \alpha, \quad y_1 = \alpha_1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

$$h^3 f''(\mu_i, y(\mu_i))(-1)^2 \int_0^1 \binom{-s}{2} ds = \frac{5}{12} h^3 f''(\mu_i, y(\mu_i))$$

$$f''(\mu_i, y(\mu_i)) = y^{(3)}(\mu_i)$$

$$\tau_{i+1} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \frac{1}{2}[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{5}{12}h^3 f''(\mu_i, y(\mu_i))\right] = \frac{5}{12}h^2 y'''(\mu_i, y(\mu_i))$$

Pentru $m = 3$ avem

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h\left[f(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{2}\nabla f(x_i, y(x_i)) + \frac{5}{12}\nabla^2 f(x_i, y(x_i))\right] =$$

$$= y(x_i) + h\{f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}[f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))] +$$

$$+\frac{5}{12}[f(x_i, y(x_i)) - 2f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + f(x_{i-2}, y(x_{i-2}))]\} =$$

$$= y(x_i) + \frac{4}{12}[23f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2})]$$

$$y_0 = \alpha, \quad y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}[23f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2})]$$

$$h^4 f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))(-1)^3 \int_0^1 \binom{-s}{3} ds = \frac{3h^4}{8} f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))$$

$$f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i)) = y^{(4)}(\mu_i)$$

$$\tau_{i+1} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{4} - \frac{1}{12}[23f(x_i, y(x_i)) - hf(x_{i-1}, y(x_{i-1})) +$$

$$+5f(x_{i-2}, y(x_{i-2}))] = \frac{1}{4}\left[\frac{3h^4}{8} f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))\right] = \frac{3h^3}{8} y^{(4)}(\mu_i)$$

Pentru $m = 4$ obţinem

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\Bigg[f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}\nabla f(x_i, y(x_i)) +$$

$$+\frac{5}{12}\nabla^2 f(x_i, y(x_i)) + \frac{3}{8}\nabla^3 f(x_i, y(x_i))\Bigg] +$$

$$+h^5 f^{(4)}(\mu_i, y(\mu_i))(-1)^4 \int_0^1 \binom{-s}{4} ds$$

$$y_{i+1} = y_i + h\Bigg\{f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}[f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] +$$

$$+\frac{5}{12}[f(x_i, y_i) - 2f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})] +$$

$$+\frac{3}{8}[f(x_i, y_i) - 3f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 3f(x_{i-2}, y_{i-2}) - f(x_{i-3}, y_{i-3})] =$$

$$= y_i + \frac{h}{24}[55f(x_i, y_i) - 55f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})]$$

$$h^5 f^{(4)}(\mu_i, y(\mu_i))(-1)^4 \int_0^1 \binom{-s}{4} ds = \frac{251}{720} f^{(4)}(\mu_i, y(\mu_i))$$

$$\tau_{i+1} = \frac{251}{720} f^{(4)} y^{(5)}(\mu_i)$$

■

Observaţia 11.0.7 *Am integrat polinomul lui Newton cu diferenţe regresive cu nodurile*

$$(x_i, y(x_i)), (x_{i-1}, y(x_{i-1})), \ldots, (x_{i+1-n}, y(x_{i+1-m}))$$

pentru m paşi.

Pentru corectorul cu m paşi vom folosi formula lui Newton cu diferenţe regresive

$$(x_{i+1}, f(x_{i+1})), (x_i, f(x_i)), \ldots, (x_{i-m+1}, f(x_{i-m+1}))$$

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{s+k-2}{k} \nabla^k f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{k=0}^{m} d_k \nabla^k f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$d_k = \int_0^1 \binom{s+k-2}{k} ds = (-1)^k \int_0^1 \binom{-s+1}{k} ds$$

$$d_0 = 1, \quad d_1 = -\frac{1}{2}, \quad d_2 = -\frac{1}{12}$$

$$d_3 = -\frac{1}{24}, \quad d_4 = -\frac{19}{720}$$

$$s = \frac{x - x_i}{4}$$

$$x = x_i + sh - m \leq s \leq 0$$

$$x_{i+1} = x_i + h - m + 1 \leq s \leq 1$$

$$m = 2$$

$$y_{i+1} = y_i + h \left[f(x_{i+1}, y_{i+1} - \frac{1}{2} \nabla f(x_{i+1}, y_{i+1}) - \frac{1}{12} \nabla^2 f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right] =$$

$$= y_i + 4 \left\{ f(x_{i+1}, y_{i+1}) - \frac{1}{2}[f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)] - \right.$$

$$-\frac{1}{12}[f(x_{i+1},y_{i+1})-2f(x_i,y_i)+f(x_{i-1},y_{i-1})]\Bigg\}=$$

$$=y_i+\frac{4}{12}[5f(x_{i+1},y_{i+1})+8f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1})]$$

$$\tau_{i+1}=\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}-\frac{1}{12}[5f(x_{i+1},y_{i+1})+8f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1})]=$$

$$=\frac{h^4}{3!}\frac{f^{(3)}(\mu_i,y(\mu_i))}{3!}(-1)^3\int_0^1(-s+1)(-s)(-s-1)ds=-\frac{1}{24}h^4y^{(IV)}(\mu_i)$$

$$m=4$$

$$y_{i+1}=y_i+h\Bigg[f(x_{i+1},y_{i+1})-\frac{1}{2}\nabla f(x_{i+1},y_{i+1})-$$

$$-\frac{1}{12}\nabla^2 f(x_{i+1},y_{i+1})-\frac{1}{24}\nabla^3 f(x_{i+1},y_{i+1})\Bigg]=$$

$$=y_i+h\Bigg\{f(x_{i+1},y_{i+1})-\frac{1}{2}[f(x_{i+1},y_{i+1})-f(x_i,y_i)]-$$

$$-\frac{1}{12}[f(x_{i+1},y_{i+1})-2f(x_i,y_i)+f(x_{i-1},y_{i-1})]-$$

$$-\frac{1}{24}[f(x_{i+1},y_{i+1})-3f(x_i,y_i)+3f(x_{i-1},y_{i-1})-f(x_{i-2},y_{i-2})]\Bigg\}=$$

$$=y_i+\frac{h}{24}[9f(x_{i+1},y_{i+1})+19f(x_i,y_i)-5f(x_{i-1},y_{i-1})+f(x_{i-2},y_{i-2})]$$

$$\tau_{i+1}=-\frac{19}{720}y^{(5)}(\mu_i)h^4$$

Problema 11.0.8 *Deduceţi următoarea formulă predictor-corector*

$$y_{i+1}^{(0)}=y_{i-3}+\frac{4h}{3}[2f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1})+2f(x_{i-2},y_{i-2})]$$

$$\tau_{i+1}=\frac{14}{45}h^4y^{(5)}(\xi_i),\quad \xi_i\in(t_{i-1},t_{i+1})\quad \textit{(Milne)}$$

$$y_{i+1}^{(c)}=y_{i-1}+\frac{h}{3}[f(x_{i+1},y_{i+1}^{(p)})+4f(x_i,y_i)+f(x_{i-1},y_{i-1})]$$

$$\tau_{i+1}=-\frac{h^4}{90}y^{(5)}(\xi_i),\quad \xi_i\in(t_{i-1},t_{i+1})\quad \textit{(Simpson)}$$

Soluţie. Corectorul

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(t, y(t))dt \simeq$$

$$\simeq \frac{h}{3}[f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

$$\tau_{i+1} = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(IV)}(\xi_i, y(\xi_i)) = -\frac{32h^5}{2880} y^5(\xi_i) = -\frac{h^5}{90} y^{(5)}(\xi_i)$$

Predictorul

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-3}) = \int_{x_{i-3}}^{x_{i+1}} f(t, y(t))dt =$$

$$= \frac{h}{3}\frac{x_{i+1} - x_{i-3}}{4}[2f(x_{i-2}, y_{i-2}) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 2f(x_{i-2}, y_{i-2})] =$$

$$= \frac{4h}{3}[2f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 4f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 2f(x_{i-2}, y_{i-2})]$$

$$\tau_{i+1} = \frac{14h^5}{45} y^{(5)}(\xi_i)$$

■

Observaţia 11.0.9 *Pentru predictor s-a folosit formula Newton-Cotes deschisă de ordinul II, iar pentru corector formula Newton-Cotes închisă de ordinul II (Simpson).*