Subiectul 5

Problema 1 *Ecuaţia următoare se foloseşte în inginerie la determinarea vitezelor unghiulare critice pentru axe circulare:*

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \tan x + \tanh x,\ x > 0.$$

(a) *Arătaţi că are o infinitate de rădăcini pozitive, exact câte una,* α_n, *în fiecare interval de forma* $\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, n\pi\right]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *(1p)*

(b) *Determinaţi* $\lim_{n\to\infty}(n\pi - \alpha_n)$. *(1p)*

(c) *Discutaţi convergenţa metodei lui Newton dacă se porneşte cu* $x_0 = n\pi$. *(2p)*

Solution.

(a) Graficele lui $y = \tan x$ şi $y = -\tanh x$ se intersectează de o infinitate de ori pe $\mathbb{R}_+$, exact o dată în fiecare interval $[(n-1/2)\pi, n\pi]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Abscisele respective α_n sunt rădăcinile pozitive ale ecuaţiei (figura 1).

(b) Deoarece $\tanh x \to 1$ când $x \to \infty$, discuţia de la (a) ne arată că $\alpha_n - n\pi \sim \tan^{-1}(-1) = -\tan^{-1}(1)$, deci $n\pi - \alpha_n \to \tan^{-1}(1) = \pi/4 = .785398\ldots$ când $n \to \infty$.

(c) Pe intervalul $I_n = [(n-1/2)\pi, n\pi]$ avem $f\left((n-1/2)\pi\right) = -\infty$, $f(n\pi) = \tanh n\pi > 0$ şi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tan^2 x - \tanh^2 x + 2 \\ f''(x) &= 2\tan x\left(\tan^2 x + 1\right) - 2\tanh x\left(1 - \tanh^2 x\right) \end{aligned}$$

Deci, f este monoton crescătoare şi concavă pe I_n. Metoda lui Newton va converge dacă se porneşte cu capătul din dreapta, $x_0 = n\pi$, dacă $x_1 > (n-1/2)\pi$. Deoarece funcţia $u/(2-u^2)$ este crescătoare pe $[0,1]$ şi ia valori între 0 şi 1, avem

$$x_1 = n\pi - \frac{\tanh n\pi}{2 - \tanh^2 n\pi} > n\pi - 1 > n\pi - \frac{1}{2}\pi.$$

■

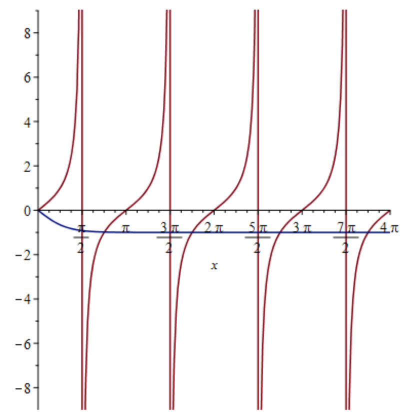

Figure 1: Problema 1

Problema 2 *(a) Stabiliţi o formulă de cuadratură cu două noduri şi cu grad maxim de exactitate*

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

reducând cuadratura la o cuadratură de tip Gauss-Jacobi. (3p)

(b) Folosind ideea de la (a), calculaţi

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cos x \mathrm{d}\, x$$

cu 8 zecimale exacte (2p)

Soluţie.

(a) Efectuăm schimbarea de variabilă $x = \frac{t+1}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cos x \mathrm{d}\, x = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{t+1} \cos \frac{t+1}{2}\, dt$$

Cuadratura este de tip Gauss-Jacobi cu $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$. Polinomul ortogonal este

$$\pi_2(t) = t^2 - \frac{2}{9} t - \frac{17}{63}$$

cu rădăcinile $x_1 = \frac{4}{63}\sqrt{70} + \frac{1}{9}, x_2 = \frac{1}{9} - \frac{4}{63}\sqrt{70}$. Coeficienţii

$$A_1 = \int_{-1}^{1} \frac{t - \left(\frac{1}{9} - \frac{4}{63}\sqrt{70}\right)}{\frac{4}{63}\sqrt{70} + \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{9} - \frac{4}{63}\sqrt{70}\right)} \mathrm{d}\, t = 1 - \frac{1}{40}\sqrt{7}\sqrt{10}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} \frac{t - \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{63}\sqrt{70}\right)}{-\frac{4}{63}\sqrt{70} + \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{63}\sqrt{70}\right)} \mathrm{d}\, t = \frac{1}{40}\sqrt{7}\sqrt{10} + 1$$

Restul:

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_{-1}^{1} \sqrt{t+1} \left(t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{17}{63}\right)^2 \mathrm{d}\, t = \frac{512}{130\,977}\sqrt{2} f^{(4)}(\xi)$$

(b)

■

Subiectul 6

Problema 3 *Ecuaţia $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ are rădăcinile 1 şi 2. Scrisă sub forma de punct fix, $x = \frac{1}{\omega}\left[x^2 - (3-\omega)x + 2\right]$, $\omega \neq 0$, sugerează iteraţia*

$$x_{n+1} = \frac{1}{\omega}\left[x_n^2 - (3-\omega)x_n + 2\right], \quad n = 1, 2, \ldots \ (\omega \neq 0)$$

(a) Determinaţi un interval pentru ω astfel ca pentru orice ω din acest interval procesul iterativ să conveargă către 1 (când $x_0 \neq 1$ este ales adecvat). (1p)

(b) Faceţi acelaşi lucru ca la (a), dar pentru rădăcina 2 (şi $x_0 \neq 2$). (1p)

(c) Pentru ce valori ale lui ω iteraţia converge pătratic către 1? (1p)

(d) Interpretaţi algoritmul de la (c) ca o aplicare a metodei lui Newton pentru o ecuaţie $F(x) = 0$ şi determinaţi F. Pentru ce valori inţiale x_0 metoda este convergentă? (2p)

Soluţie.

(a) Se aplică metoda aproximaţiilor succesive, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, unde $\varphi(x) = \frac{1}{\omega}\left[x^2 - (3-\omega)\,x + 2\right]$. Convergenţa locală către 1 necesită $|\varphi'(1)| < 1$. Deoarece

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\omega}\left[2x - (3-\omega)\right],$$

se obţine

$$|\varphi'(1)| = \left|\frac{\omega - 1}{\omega}\right| < 1 \Longrightarrow \frac{1}{2} < \omega < \infty.$$

(b) Analog,

$$|\varphi'(2)| = \left|\frac{\omega + 1}{\omega}\right| < 1 \Longrightarrow -\infty < \omega < -\frac{1}{2}.$$

(c) Avem convergenţă pătratică către 1 dacă $\varphi'(1) = 0$, adică, $\omega = 1$.

(d) Iteraţia se poate scrie sub forma

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2 = x_n - \left(3x_n - x_n^2 - 2\right) = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)},$$

de unde

$$\frac{F(x)}{F'(x)} = 3x - x^2 - 2 = -\left(x-1\right)\left(x-2\right),$$

sau

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = (\ln F)' = -\frac{1}{(x-1)\,(x-2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}.$$

Rezolvare ec. dif.

$$F(x) = \exp\left(C \log \frac{x-1}{x-2}\right) = C\frac{x-1}{x-2}.$$

Putem alege $C = 1$. Din graficul lui F (F este concavă şi monoton descrescătoare pe $[0, 2)$ şi limita la dreapta în 2 este $-\infty$), rezultă că metoda lui Newton converge către dacă $0 < x_0 < 2$. Pentru $x_0 > 2$ şi $x_0 < 0$ metoda este divergentă către $+\infty$.

■

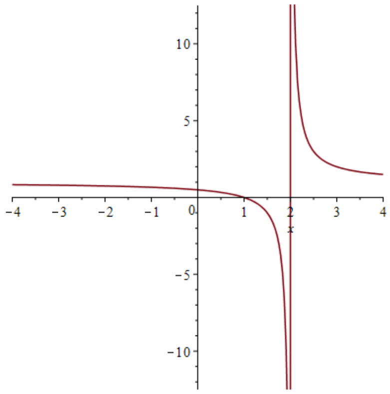

Figure 2: Graficul lui $F(x) = \frac{x-1}{x-2}$

Problema 4 (a) *Stabiliţi o formulă de cuadratură cu două noduri şi cu grad maxim de exactitate*

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

reducând cuadratura la o cuadratură de tip Gauss-Legendre. (2p)

(b) *Folosind ideea de la (a), calculaţi*

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x$$

cu 8 zecimale exacte (2p).

Soluţie.

(a) Cu schimbarea de variabilă $x = t^2$ se obţine

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x = \int_{-1}^1 f(t^2) \mathrm{d}\, t$$

Gauss-Legendre

$$\pi_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$$

Nodurile sunt $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Coeficienţii sunt egali

$$A_1 + A_2 = \int_{-1}^{1} \frac{t + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \mathrm{d}\, t = 1$$

■