Setul 1

Problema 1 *Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ şi diviziunea $\Delta : x_1 = -1 < x_2 = 0 < x_3 = 1$, determinaţi spline-ul natural de interpolare. (5p)*

Soluţie. (3p) Pe porţiuni:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(-1) + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2 + d_1(x+1)^3 \\ p_2(x) &= f(0) + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3 \end{aligned}$$

Condiţii: Condiţii de netezime

$$\begin{aligned} p_1(0) &= p_2(0) \\ p_1'(0) &= p_2'(0) \\ p_1''(0) &= p_2''(0) \end{aligned}$$

Condiţii de spline natural

$$\begin{aligned} p_1''(-1) &= 0 \\ p_2''(1) &= 0 \end{aligned}$$

Interpolare în 1: $p_2(1) = f(1) = 0$.

(1p) Se obţine sistemul

$$\begin{aligned} b_1 + c_1 + d_1 &= 1 \\ b_1 + 2c_1 + 3d_1 &= b_2 \\ 2c_1 + 6d_1 &= 2c_2 \\ 2c_1 &= 0 \\ 6d_2 + 2c_2] &= 0 \\ 1 + b_2 + c_2 + d_2 &= 0 \end{aligned}$$

(1p) Soluţiile: $\left[b_1 = \frac{3}{2}, b_2 = 0, c_1 = 0, c_2 = -\frac{3}{2}, d_1 = -\frac{1}{2}, d_2 = \frac{1}{2}\right]$.

Expresia spline-ului:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1+t) - \frac{1}{2}(t+1)^3, & t \in [-1,0] \\ 1 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3, & t \in (0,1]. \end{cases}$$

■

Soluţie 2. (1p) Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $s(x) = p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3$. Ca la curs notăm $s'(x_i)$ cu m_i. Avem $\Delta x_1 = 1$, $\Delta x_2 = 1$; $f[x_1, x_2] = 1$, $f[x_2, x_3] = -1$.

(2p) Se obţine sistemul

$$\begin{aligned} 2m_1 + m_2 &= 3 \\ m_1 + 4m_2 + m_3 &= 0 \\ m_2 + 2m_3 &= -3 \end{aligned}$$

(1p) Soluţiile: $\left[m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = 0, m_3 = -\frac{3}{2}\right]$.

(1p) Aplicând formulele pentru coeficienţi obţinem

$$\begin{array}{rr} c_{1,0} = 0, & c_{2,0} = 1 \\ c_{1,1} = \frac{3}{2}, & c_{2,1} = 0 \\ c_{1,2} = 0, & c_{2,2} = -\frac{3}{2} \\ c_{1,3} = -\frac{1}{2}, & c_{2,3} = \frac{1}{2} \end{array}$$

■

Problema 2 *Fie $a > 0$. Pornind de la o ecuaţie convenabilă şi folosind metoda lui Newton, deduceţi o metodă pentru aproximarea lui $\frac{1}{\sqrt{a}}$ fără împărţiri. Cum se alege valoarea de pornire? Care este criteriul de oprire? Deduceţi de aici o metodă pentru calculul lui $\sqrt{a}$ fără împărţiri. (4p)*

Soluţie. (1p) Pornim de la ecuaţia $f(x) = \frac{1}{x^2} - a = 0$.

(1p) Se obţine iteraţia

$$\varphi(x) = x - \frac{\frac{1}{x^2} - a}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} - a\right)} = x - \frac{1}{2}x^3\left(a - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}x\left(3 - ax^2\right)$$

sau

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n\left(3 - ax_n^2\right).$$

(0.5p) Criteriul de oprire: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

(1p) Alegerea valorii de pornire: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} - a\right) = -\frac{2}{x^3} < 0$, pentru $x > 0$; $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x^2} - a\right) = \frac{6}{x^4} > 0$, pentru $x > 0$. Deci orice valoare $x_0 > 0$ se poate lua ca valoare de pornire.

(0.5p) Pentru calculul lui $\sqrt{a}$ fără împărţiri: $\sqrt{a} = a\frac{1}{\sqrt{a}}$. ■

Setul 2

Problema 3 *Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$ şi diviziunea $\Delta : x_1 = -1 < x_2 = 0 < x_3 = 1$, determinaţi spline-ul complet de interpolare. (5p)*

Soluţie. (3p) Pe porţiuni:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(-1) + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2 + d_1(x+1)^3 \\ p_2(x) &= f(0) + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3 \end{aligned}$$

Conditii :Condiţii de netezime

$$\begin{aligned} p_1(0) &= p_2(0) \\ p_1'(0) &= p_2'(0) \\ p_1''(0) &= p_2''(0) \end{aligned}$$

Condiţii de spline complet

$$p_1'(-1) = f'(-1)$$
$$p_2'(1) = f'(1)$$

Interpolare în 1: $p_2(1) = f(1) = 1$.

(1p) Se obţine sistemul

$$\begin{aligned} -1 + b_1 + c_1 + d_1 &= 0 \\ b_1 + 2c_1 + 3d_1 &= b_2 \\ 2c_1 + 6d_1 &= 2c_2 \\ b_1 &= 0 \\ 3d_2 + 2c_2 + b_2 &= 0 \\ b_2 + c_2 + d_2 &= 1 \end{aligned}$$

(1p) Soluţiile: $\left[b_1 = 0, b_2 = \frac{3}{2}, c_1 = \frac{3}{2}, c_2 = 0, d_1 = -\frac{1}{2}, d_2 = -\frac{1}{2}\right]$. Expresia spline-ului:

$$s(x) = \begin{cases} -1 + \frac{3}{2}(t+1)^2 - \frac{1}{2}(t+1)^3, & t \in [-1, 0] \\ \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t^3, & t \in (0, 1]. \end{cases}$$

■

Soluţie 2. (1p) Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $s(x) = p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3$. Ca la curs notăm $s'(x_i)$ cu m_i. Avem $\Delta x_1 = 1$, $\Delta x_2 = 1$; $f[x_1, x_2] = 1$, $f[x_2, x_3] = 1$.

(2p) Se obţine sistemul

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_1 + 4m_2 + m_3 &= 6 \\ m_3 &= 0 \end{aligned}$$

(1p) Soluţiile: $\left[m_1 = 0, m_2 = \frac{3}{2}, m_3 = 0\right]$. (1p) Aplicând formulele pentru coeficienţi obţinem

$$\begin{array}{ll} c_{1,0} = -1, & c_{2,0} = 0 \\ c_{1,1} = 0, & c_{2,1} = \frac{3}{2} \\ c_{1,2} = \frac{3}{2}, & c_{2,2} = 0 \\ c_{1,3} = -\frac{1}{2}, & c_{2,3} = -\frac{1}{2} \end{array}$$

■

Problema 4 *Fie $a > 0$. Pornind de la o ecuaţie convenabilă şi folosind metoda lui Newton, deduceţi o metodă pentru aproximarea lui $\frac{1}{a}$ fără împărţiri. Cum se alege valoarea de pornire? Care este criteriul de oprire? Cum veţi proceda pentru o implementare eficientă în virgulă flotantă? (4p)*

Soluţie. (1p) Pornim de la ecuaţia $f(x) = \frac{1}{x} - a = 0$.

(1p) Iteraţia

$$\varphi(x) := x - \frac{\frac{1}{x} - a}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} - a\right)} = x - x^2\left(a - \frac{1}{x}\right) = x\,(2 - ax)$$

sau $x_{n+1} = x_n\,(2 - a x_n)$.

(0.5p) Criteriul de oprire: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. (1p) Alegerea valorii de pornire:

$$|x_n - 1/a| < a\left(\frac{1}{a} - x_{n-1}\right)^2 < \cdots < \frac{1}{a^{2^n-1}}\left(\frac{1}{a} - x_0\right)^{2^n}$$

(x_n) covergent $\Longleftrightarrow 0 < a x_0 < 2$.

(0.5p) $x_0 = \frac{3}{2}$, maxim 5 iteraţii, $(2^e f)^{-1} = 2^{-e}(1/f)$ ■

Setul 3

Problema 5 *Se consideră ecuaţia $f(x) = xe^x - 1 = 0$. Dorim să o rezolvăm aplicând metoda aproximaţiilor succesive, rezolvând problema de punct fix $x = F(x)$ în două moduri*

(a) $F(x) = e^{-x}$

(b) $F(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

Arătaţi că în ambele cazuri iteraţiile $x_k = F(x_k)$ sunt convergente, determinaţi ordinul de convergenţă şi numărul de iteraţii necesare pentru a obţine precizia $\varepsilon = 10^{-10}$. (6p)

Soluţie.

(a) (2p) $x = e^{-x}$, Solutia: $\{[\alpha = 0.567\,14]\}$. $F'(x) = |\exp(-x)| < 1$, pentru $x > 0$. Deoarece $F'(\alpha) \neq 0$, $ordF = 1$.

(0.5 p) Numărul de iteraţii: din teorema de punct fix a lui Banach

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{c^n}{1-c}|x_1 - x_0| < \varepsilon$$

unde $c = \max\{|F'(x)|, x \in I_\varepsilon\}$. Se obţine

$$n = \left[\frac{\ln(\varepsilon) + \ln(1-c) - \ln|x_1 - x_0|}{\ln c}\right] + 1.$$

De exemplu, pentru $x_0 = 0.2$ şi $\varepsilon = 10^{-10}$ sunt necesare 122 de iteraţii.

(b) (3p) $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1+e^x}\right) = -\frac{xe^x-1}{(e^x+1)^2}$; $F'(\alpha) = 0$ căci $f(\alpha) = 0$. $F''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1+x}{1+e^x}\right) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^3}\,(x + e^x - xe^x + 3) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^3}\,(x + e^x - xe^x + 3)$. Dar, $F''(\alpha) = -\frac{e^\alpha}{(e^\alpha+1)^3}(\alpha + e^\alpha + 2) \neq 0$, deoarece $\alpha\exp(\alpha) = 1$. $ordF = 2$.

Altfel: Newton aplicată ecuaţiei $f(x) = x - e^{-x} = 0$.

(0.5p) Numărul de iteraţii: Deoarece ordinul de convergenţă este 2 pornim de la relaţia de recurenţă

$$e_{n+1} \approx c e_n^2.$$

Se obţine

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &\approx c e_n^2 = c^{1+2} e_{n-1}^{2^2} = c^{1+2+\cdots+2^{n-1}} e_0^{2^n} = c^{2^n-1} e_0^{2^n} \\
&= \frac{1}{c}\left(c e_0\right)^{2^n} < \varepsilon \Longrightarrow \left(c e_0\right)^{2^n} < c\varepsilon
\end{aligned}
$$

n se obţine prin logaritmare

$$
n = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\ln c + \ln \varepsilon}{\ln c + \ln |e_0|}.
$$

De exemplu, pentru $x_0 = 0.4$, avem $e_0 \approx 0.18$ şi avem nevoie cam de 3 iteraţii.

■

Problema 6 *Fie $f \in C^4[-1,1]$. Determinaţi un polinom de interpolare P de grad minim care verifică condiţiile*

$$
P(-1) = f(-1),\ P'(-1) = f'(-1),\ P(0) = f(0),\ P(1) = f(1)
$$

şi determinaţi expresia restului.(3p)

Soluţie. (1.5p) Folosim metoda diferenţelor divizate: $x_0 := -1$, $r_0 = 1$, $x_1 = 0$, $r_0 = 0$, $x_2 = 1$, $r_2 = 0$. Gradul polinomului este $n = \sum(r_i + 1) - 1 = 3$. Tabela diferenţelor divizate

	D^0	D^1	D^2	D^3
-1	$f(-1)$	$f'(-1)$	$f(0) - f(-1) - f'(-1)$	$\frac{f(1)-4f(0)+3f(-1)+2f'(-1)}{4}$
-1	$f(-1)$	$f(0) - f(-1)$	$\frac{f(1)-2f(0)+f(-1)}{2}$	
0	$f(0)$	$f(1) - f(0)$		
1	$f(1)$			

(0.5p) Polinomul de interpolare

$$
\begin{aligned}
\left(H_3 f\right)(x) &= f(-1) + (t+1)f'(-1) + (t+1)^2\left[f(0) - f(-1) - f'(-1)\right] \\
&\quad + (t+1)^2 t \left[\frac{f(1) - 4f(0) + 3f(-1) + 2f'(-1)}{4}\right]
\end{aligned}
$$

(1p) Restul

$$
\left(R_3 f\right)(x) = \frac{(t+1)^2 t(t-1)}{4!} f^{(4)}(\xi).
$$

■

Setul 4

Problema 7 *(6p) Pentru a rezolva ecuaţia $f(x) = 0$ se aplică metoda lui Newton funcţiei $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$.*

(a) *Scrieţi formula iterativă care se obţine şi determinaţi ordinul de convergenţă.*

(b) *Aplicaţi metoda de la punctul (a) pentru a aproxima $\sqrt{a}$, $a > 0$.*

Soluţie.

(a) (2p)

$$\varphi(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{\frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}}{\left(\frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}\right)'}$$

$$= x - \frac{f(x)}{f'(x) - \frac{1}{2}\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)}} = x - \frac{f(x)}{f'(x)\left[1 - \frac{f(x)f''(x)}{2f'^2(x)}\right]}.$$

adică,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{1}{2}\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)}} \tag{1}$$

(2p) Ordinul de convergenţă: Fie α rădăcina lui $f(x) = 0$. Se observă că $\varphi(\alpha) = \alpha$ şi că

$$\varphi'(\alpha) = -\frac{f^2(\alpha)\left[2\,f'''(\alpha)\,f'(\alpha) - 3\,(f''(\alpha))^2\right]}{\left[2\,f'(\alpha)^2 - f(\alpha)\,f''(\alpha)\right]^2} = 0$$

$$\varphi''(\alpha) = -2\,\frac{f(\alpha)\,G(x)}{\left[2\,(f'(\alpha))^2 - f(\alpha)\,f''(\alpha)\right]^3} = 0$$

$$\varphi'''(\alpha) = \frac{-2\,f'''(\alpha)\,f'(\alpha) + 3\,(f''(\alpha))^2}{3f'^2(\alpha)} \neq 0,$$

deci dacă rădăcina este simplă ordinul de convergenţă este $p = 3$, dar putem avea $p > 3$ dacă

$$\frac{-2\,f'''(\alpha)\,f'(\alpha) + 3\,(f''(\alpha))^2}{3f'^2(\alpha)} = 0$$

(b) (2p) Alegând $f(x) = x^2 - a$, din (1) se obţine

$$x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n^2 + 3a\right)}{3x_n^2 + a}.$$

■

Problema 8 *Fie $f \in C^4[-1,1]$. Determinaţi un polinom de interpolare P de grad minim care verifică condiţiile*

$$P(-1) = f(-1), \quad P(0) = f(0), \; P(1) = f(1), P'(1) = f'(1).$$

şi determinaţi expresia restului. (3p)

Soluţie. (1.5p) Folosim metoda diferenţelor divizate: $x_0 := -1$, $r_0 = 0$, $x_1 = 0$, $r_0 = 0$, $x_2 = 1$, $r_2 = 1$. Gradul polinomului este $n = \sum(r_i + 1) - 1 = 3$. Tabela diferenţelor divizate

	D^0	D^1	D^2	D^3
-1	$f(-1)$	$f(0) - f(-1)$	$\frac{f(1)-2f(0)+f(-1)}{2}$	$\frac{2f'(1)-3f(1)+4f(0)-f(-1)}{4}$
0	$f(0)$	$f(1) - f(0)$	$f'(1) - f(1) + f(0)$	
1	$f(1)$	$f'(1)$		
1	$f(1)$			

(0.5p) Polinomul de interpolare

$$
\begin{aligned}
(H_3 f)(x) = {} & f(-1) + (t+1)\left[f(0) - f(-1)\right] + (t+1)t\left[\frac{f(1) - 2f(0) + f(-1)}{2}\right] \\
& + (t+1)t(t-1)\left[\frac{2f'(1) - 3f(1) + 4f(0) - f(-1)}{4}\right].
\end{aligned}
$$

(1p) Restul

$$
(R_3 f)(x) = \frac{(t+1)t(t-1)^2}{4!} f^{(4)}(\xi).
$$

■