Derivare numerica

Contents

Utilizand formula lui Taylor

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \xi \in [x, x+h]$$

se obtine

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

Termenul $-\frac{h}{2}f''(\xi)$ este **eroarea de trunchiere** sau **eroarea de discretizare** la aproximarea lui $f'(x)$ prin $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Eroarea este $O(h)$ si spunem ca precizia este de ordinul I. La derivarea numerica vom presupune ca $x+h$ si x se reprezinta exact, iar erorile se comit doar la evaluarea lui $f(x+h)$ si $f(x)$. Ignorand erorile de rotunjire la scadere si impartire, se calculeaza

$$\frac{f(x+h)(1+\delta_1) - f(x)(1+\delta_2)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{\delta_1 f(x+h) - \delta_2 f(x)}{h}$$

Deoarece $|\delta_1| < eps$ si $|\delta_2| < eps$, eroare de rotunjire este mai mica sau egala cu $2eps|f(x)|/h$, pentru h mic. De notat ca eroarea de trunchiere este proportionala cu h, iar eroarea de rotunjire este proportionala cu $1/h$. Micsorarea lui h micsoreaza eroare de trunchiere, dar creste eroarea de rotunjire.

Exemplu

Luam $f(x) = \sin x$ si $x = \pi/4$. Atunci $f'(x) = \cos x$ si $f''(x) = -\sin x$, deci eroarea de trunchiere este de aproximativ $\sqrt{2}h/4$, iar eroarea de rotunjire este de aproximativ $\sqrt{2}eps/h$

```
x = pi/4;
h = 10.^(-(1:16))';
d = (sin(x+h)-sin(x))./h;
[d, sqrt(2)/2*ones(size(d)), abs(d-cos(x))]
```

```
ans =

    0.6706    0.7071    0.0365
    0.7036    0.7071    0.0035
    0.7068    0.7071    0.0004
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7083    0.7071    0.0012
    0.7105    0.7071    0.0034
    0.7772    0.7071    0.0700
    1.1102    0.7071    0.4031
```

Precizia maxima

se obtine daca cele doua erori sunt aproximativ egale

$$\frac{\sqrt{2}h}{4} = \frac{\sqrt{2}eps}{h} \Rightarrow h = 2\sqrt{eps}$$

Eroarea este de ordinul $\sqrt{eps}$

```
ho = 2*sqrt(eps);
do = (sin(x+ho)-sin(x))./ho;
[ho, do]
```

```
ans =

    0.0000    0.7071
```

Sursa neplacerii

este *algoritmul* nu problema determinarii

$$\frac{d}{dx} \sin x|_{x=\pi/4} = \cos x|_{x=\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

care este bine conditionata

Conditionarea absoluta

$$\kappa(x) = |-\sin x|_{x=\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Conditionarea relativa

$$cond(f)(x) = \left|\frac{x \sin x}{\cos x}\right|_{x=\pi/4} = \frac{\pi}{4}.$$