Interpolare Lagrange

Radu T. Trîmbiţaş

4 aprilie 2016

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x_i \in [a, b]$, $i = 0, \ldots, m$. Dacă $x_i \neq x_j$, pentru $i \neq j$, atunci există un polinom unic de gradul m (numit polinomul de interpolare Lagrange), astfel încât:

$$(L_m f)(x_i) = f(x_i), i = 0, \ldots, m.$$

Formula de interpolare Lagrange este

$$f = L_m f + R_m f,$$

unde L_m este polinomul de interpolare Lagrange:

$$\left(L_m f\right)(x) = \sum_{k=0}^{m} \ell_k(x) f(x_k), \tag{1}$$

ℓ_k sunt polinoamele fundamentale de interpolare Lagrange

$$\ell_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m} (x_k - x_j)}, \tag{2}$$

iar R_m este termenul rest:

$$\left(R_m f\right)(x) = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_m)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x). \tag{3}$$

Dacă valorile funcţiei sunt tabelate, evaluarea lui ℓ_k necesită $2(n-1)$ înmulţiri, o împărţire şi $2n$ scăderi. Întreaga evaluare necesită $2n(n+1)$ *|/ şi $n(2n+3)$ +|-. Anumite trucuri simple ne permit să reducem volumul de calcul

$$\left(L_m f\right)(x)=\frac{\left(L_m f\right)(x)}{1}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{m} f(x_j)\ell_j(x)}{\sum\limits_{j=0}^{m}\ell_j(x)}. \tag{4}$$

Împărţind numărătorul şi numitorul cu

$$u(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \tag{5}$$

şi punând

$$w_j=\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{m}(x_j-x_i)}, \tag{6}$$

se obţine

$$\left(L_m f\right)(x)=\frac{\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{f(x_j)w_j}{x-x_j}}{\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{w_j}{x-x_j}}, \tag{7}$$

numită forma baricentrică a interpolării Lagrange. Deoarece evaluarea lui w_j necesită n *|/, avem un total de $(n+2)(n+1)+1$ *|/, jumătate din cât este necesar pentru metoda clasică. Mai mult, dacă dorim să facem evaluarea în mai multe puncte, w_j-urile trebuie calculate o singură dată, fiecare evaluare necesitând $2(n+1)+1$ *|/.

Remark 1 *Procedura nu este aplicabilă pentru $x=x_i$, $i=0,\ldots m$.*

Algoritmul lui Aitken

Uneori gradul este necunoscut sau precizia dorită poate fi atinsă utilizând un număr mai mic de noduri. Să introducem notaţiile:

$$\begin{aligned} \left(L_{m-1}f\right)_{1,m}(x) &= \sum_{k=1}^{m} \ell_k(x) f(x_k), \\ \left(L_{m-1}f\right)_{0,m-1}(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \ell_k(x) f(x_k), \\ \left(L_{m}f\right)_{0,m}(x) &= \sum_{k=0}^{m} \ell_k(x) f(x_k). \end{aligned} \tag{8}$$

Algoritmul lui Aitken se bazează pe relaţia

$$\left(L_{m}f\right)_{0,m}(x) = \frac{\begin{vmatrix} \left(L_{m-1}f\right)_{1,m}(x) & x_0 - x \\ \left(L_{m-1}f\right)_{0,m-1}(x) & x_m - x \end{vmatrix}}{x_m - x_0}.$$

Metoda generează tabela următoare:

$$\begin{array}{cccccccc} x_0 & f_{0,0} & & & & & & \\ x_1 & f_{1,0} & f_{1,1} & & & & & \\ x_2 & f_{2,0} & f_{2,1} & f_{22} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ x_i & f_{i,0} & f_{i,1} & f_{i,2} & \dots & f_{i,i} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ x_n & f_{n,0} & f_{n,1} & f_{n,2} & \dots & f_{n,i} & \dots & f_{n,n} \end{array}$$

unde $f_{i,0} = f(x_i), \quad i = 0, ..., m$, şi

$$f_{i,j+1} = \frac{1}{x_i - x_j} \begin{vmatrix} f_{j,j} & x_j - x \\ f_{i,j} & x_i - x \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Se verifică uşor că $(L_i f)(x) = f_{i+1,i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$, datorită ecuaţiei (6). Dacă interpolarea Lagrange converge, atunci $\left(f_{i,i}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ converge către $f(x)$ şi $|f_{i,i} - f_{i-1,i-1}| \to 0$ când $i \to \infty$, deci relaţia $|f_{i,i}$ - $f_{i-1,i-1}| \le \varepsilon$ ar putea fi utilizată drept criteriu de oprire.

Algoritmul poate fi accelerat dacă sortăm nodurile crescător după distanţa lor la x, i.e. $|x_i - x| \leq |x_j - x|$, dacă $i < j$.

Intrare: $m \in N$, x, x_i, $f_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, m$, $\varepsilon > 0$.
*Ie*şire: $f_{i,i}$.

P1. Sortează x_i crescător după $a_i = |x - x_i|$.
P2. For $i = 0, ..., m$ set $f_{i,1} := f(x_i)$.
P3. For $i = 1, ..., m$ do
  P3.1. For $j = 0, ..., i - 1$ do
    $y_{i,j} := x_i - x_j$;
    $f_{i,j+1} := ((x - x_i) * f_{jj} - (x - x_j) * f_{ij})/y_{ij}$;
  P3.2. If $|f_{i,i} - f_{i-1,i-1}| \leq \varepsilon$ go to P4.
P4. Extrage $f_{i,i}$.

Probleme

1. Implementaţi o rutină pentru calculul valorilor polinomului de interpolare Lagrange când se dau punctele, nodurile şi valorile funcţiei în noduri.

2. Reprezentaţi grafic polinoamele fundamentale când se dau gradul şi nodurile.

3. Reprezentaţi pe acelaşi grafic f şi $L_m f$.

4. Dându-se x, f, m şi nodurile, aproximaţi $f(x)$ utilizând interpolarea Lagrange.

5. Implementaţi metoda baricentrică.

Probleme practice

1. Datele de mai jos dau populaţia SUA în perioada 1900 – 2000 (în mii de locuitori)

t	y
1900	75.995
1910	91.972
1920	105.711
1930	123.203
1940	131.669
1950	150.697
1960	179.323
1970	203.212
1980	226.505
1990	249.633
2000	281.422

Approximaţi populaţia din 1975 şi 2010.

2. Fie
$$f(x) = e^{x^2-1}.$$
Aproximaţi $f(1.25)$ utilizând valorile lui f în 1, 1.1, 1.2, 1.3 şi 1.4 şi daţi o delimitare a erori.

3. Aproximaţi $\sqrt{115}$ cu 3 zecimale exacte prin interpolare Lagrange.

4. Daţi contraexemple pentru convergenţa interpolării Lagrange şi studiaţi-le grafic.