Subiectul 9

Problema 1 *(a) Fie* $\mathrm{d}\,\lambda$ *o măsură simetrică pe* $[-a,a]$, $0<a\leq\infty$ *şi*

$$\pi_{2k}(t;\mathrm{d}\,\lambda)=\pi_k^+(t^2).$$

Arătaţi că $\{\pi_k^+\}$ *sunt polinoame ortogonale monice pe* $[0,a^2]$ *în raport cu măsura* $\mathrm{d}\,\lambda^+(t)=t^{-1/2}w(t^{1/2})\mathrm{d}\,t$. *(1p)*

(b) Aplicaţi acest rezultat la calculul polinoamelor ortogonale pe $[0,1]$ *în raport cu ponderea* $w(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$. *(1p)*

(c) Generaţi o formulă de cuadratură de tip Gauss cu două noduri pentru această pondere. (4p)

Soluţie.

(a) Deoarece

$$\begin{aligned}0&=\int_{-a}^{a}w(t)\pi_{2k}(t)\pi_{2j}(t)\mathrm{d}\,t=2\int_{0}^{a}w(t)\pi_k^+(t^2)\pi_j^+(t^2)\mathrm{d}\,t\\&=2\int_0^{a^2}\frac{1}{2}\frac{w\left(\sqrt{u}\right)\pi_k^+(u)\pi_j^-(u)}{\sqrt{u}}du,\end{aligned}$$

rezultă că polinoamele (π_n^+) sunt ortogonale pe $[0,a^2]$ în raport cu ponderea $w^+(t)=t^{-1/2}w(t^{1/2})$.

(b) Polinoamele Legendre (π_n) sunt ortogonale pe $[-1,1]$ în raport cu ponderea $w(t)=1$, deci (π_n^+) vor fi ortogonale pe [0,1] în raport cu $w^+(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$. Conform punctului (a), $\pi_k^+(u)$ se obţine din $\pi_{2k}(t)$ înlocuind $t^2=u$.

$$\pi_k^+(u)=\left.\pi_{2k}(t)\right|_{t^2=u}$$

(c) Calculăm polinomul Legendre de grad 4

$$\pi_4(t)=t^4-\frac{6}{7}t^2+\frac{3}{35}.$$

Polinomul căutat π_2^+ se obţine înlocuint $t^2=u$ în π_4

$$\pi_2^+(u)=u^2-\frac{6}{7}u+\frac{3}{35}.$$

Nodurile sunt rădăcinile lui π_2^+, $u_1=\frac{3}{7}-\frac{2}{35}\sqrt{30}$ şi $u_2=\frac{3}{7}+\frac{2}{35}\sqrt{30}$. Coeficienţii se obţin din condiţiile

$$\begin{aligned}A_1+A_2&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}\,u=2\\A_1u_1+A_2u_2&=\int_0^1\frac{u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}\,u=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Rezolvând sistemul se obţine

$$A_1 = 1 - \frac{1}{18}\sqrt{30}, \quad A_2 = 1 + \frac{1}{18}\sqrt{30}.$$

Restul

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\left(\pi_2^+(u)\right)^2 \mathrm{d}\,u = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\left(u^2 - \frac{6}{7}u + \frac{3}{35}\right)^2 \mathrm{d}\,u$$
$$= \frac{16}{33\,075} f^{(4)}(\xi)$$

■

Problema 2 *Considerăm ecuaţiile echivalente*

$$(A)\ x\ln x - 1 = 0; \quad (B)\ \ln x - \frac{1}{x} = 0.$$

(a) Arătaţi că au exact o rădăcină pozitivă şi determinaţi un interval care o conţine. (1p)

*(b) Atât pentru (A) cât şi pentru (B), determinaţi cel mai mare interval pe care metoda lui Newton converge. (*Indicaţie*: studiaţi convexitatea celor două funcţii care apar în ecuaţii.) (1p)*

(c) Care din cele două iteraţii converge asimptotic mai repede? (1p)

Soluţie.

(a) Graficele lui $y = \ln x$ şi $y = 1/x$ se intersectează în exact un punct cu abscisa cuprinsă între 1 şi 2 (deoarece $\ln 2 > 1/2$).

(b) Fie $f(x) = x\ln x - 1$. Avem $f'(x) = \ln x + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x}$, deci f este convexă pe $\mathbb{R}_+$. Pentru orice x_0 din intervalul $(0, e^{-1})$, deoarece f este descrescătoare, metoda lui Newton produce un x_1 negativ, inacceptabil. Pe de altă parte, datorită convexităţii lui f, metoda lui Newton converge monoton descrescător (exceptând, eventual, primul pas) pentru orice $x_0 \in (e^{-1}, \infty)$. Fie $g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$. Avem, $g'(x) = x^{-2}(x+1)$, $g''(x) = -x^{-3}(x+2)$, deci g este crescătoare şi ia valori de la $-\infty$ la $+\infty$ ş este concavă pe $\mathbb{R}+$. Pentru orice $x_0 < \alpha$, metoda lui Newton va converge monoton crescător. Dacă $x_0 > \alpha$, trebuie să ne asigurăm că $x_1 > 0$. Deoarece

$$x_1 = x_0 - \frac{\ln x_0 - x_0^{-1}}{x_0^{-2}(x_0+1)} = x_0\frac{x_0 + 2 - x_0\ln x_0}{x_0+1},$$

trebuie să avem $x_0 + 2 - x_0\ln x_0 > 0$, adică, $x_0 < x_*$ unde

$$x_*\ln x_* - x_* - 2 = 0.$$

Aceasta are o soluţie unică între 4 şi 5, care se poate obţine cu metoda lui Newton. Rezultatul este $x = 4.319136566\ldots$.

(c) Constantele asimptotice de eroare sunt

$$c_f = \left.\frac{f''(x)}{2f'(x)}\right|_{x=\alpha} = \left.\frac{1}{2x\,(\ln x + 1)}\right|_{x=\alpha} = \frac{1}{2\,(\alpha+1)}.$$
$$c_g = \left.\frac{g''(x)}{2g'(x)}\right|_{x=\alpha} = -\frac{\alpha+2}{2\alpha(\alpha+1)}$$

Avem

$$\frac{c_f}{|c_g|} = \frac{1}{2\,(\alpha+1)} \cdot \frac{2\alpha(\alpha+1)}{\alpha+2} = \frac{1}{1+\frac{2}{a}}.$$

Deoarecece $1+\frac{2}{a} > 2$, are loc $c_f < 1/2|c_g|$, deci metoda lui Newton pentru (A) converge asimptotic mai repede cu un factor mai mare decât 2.

■

Subiectul 10

Problema 3 *(a) Fie* $\mathrm{d}\,\lambda$ *o măsură simetrică pe* $[-a, a]$, $0 < a \leq \infty$ *şi*

$$\pi_{2k+1}(t; \mathrm{d}\,\lambda) = t\pi_k^-(t^2).$$

Arătaţi că $\{\pi_k^-\}$ *sunt polinoame ortogonale monice pe* $[0, a^2]$ *în raport cu măsura* $\mathrm{d}\,\lambda^-(t) = t^{+1/2}w(t^{1/2})\mathrm{d}\,t$. *(1p)*

(b) Aplicaţi acest rezultat la calculul polinoamelor ortogonale pe $[0,1]$ *în raport cu ponderea* $w(t) = \sqrt{t}$. *(1p)*

(c) Generaţi o formulă de cuadratură de tip Gauss cu două noduri pentru această pondere. (4p)

Soluţie.

(a) Deoarece

$$0 = \int_{-a}^{a} w(t)\pi_{2k+1}(t)\pi_{2j+1}(t)\mathrm{d}\,t = 2\int_0^a t^2\pi_k^-(t^2)\pi_j^-\left(t^2\right)\mathrm{d}\,t$$
$$= 2\int_0^{a^2} \frac{1}{2}\sqrt{u}w\left(\sqrt{u}\right)\pi_k^-(u)\pi_j^-(u)\,\mathrm{d}\,u$$

rezultă că polinoamele (π_n^-) sunt ortogonale pe $[0, a^2]$ în raport cu ponderea $w^-(t) = t^{1/2}w(t^{1/2})$.

(b) Luân $a = -1$ şi $w(t) = 1$, polinoamele ortogonale pe $[0,1]$ în raport cu ponderea $w^+(t) = \sqrt{t}$ se obţin din polinoamele Legendre: calculăm $\pi_{2k+1}(t)/t$, înlocuim $t^2 = u$ şi am obţinut astfel $\pi_k^-(u)$

$$\pi_k^-(u) = \left.\frac{\pi_{2k+1}(t)}{t}\right|_{t^2=u}$$

(c) Calculăm polinomul Legendre de grad 5

$$\pi_5(t) = t^5 - \frac{10}{9}t^3 + \frac{5}{21}t$$

Polinomul ortogonal căutat este

$$\pi_2^-(u) = u^2 - \frac{10}{9}u + \frac{5}{21}.$$

Rădacinile lui vor fi nodurile formulei de cuadratura $u_1 = \frac{5}{9} - \frac{2}{63}\sqrt{70}$, $u_2 = \frac{5}{9} + \frac{2}{63}\sqrt{70}$. Coeficienţii se obţin din condiţiile

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 \sqrt{u}\,\mathrm{d}\,u = \frac{2}{3}$$
$$A_1u_1 + A_2u_2 = \int_0^1 u\sqrt{u}\,\mathrm{d}\,u = \frac{2}{5}$$

Rezolvând sistemul se obţine

$$A_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{150}\sqrt{70}, \quad A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{150}\sqrt{70}.$$

Restul

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^1 \sqrt{u}\left(\pi_2^-(u)\right)^2 \mathrm{d}\,u = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^1 \sqrt{u}\left(u^2 - \frac{10}{9}u + \frac{5}{21}\right)^2 \mathrm{d}\,u$$
$$= \frac{16}{130\,977}f^{(4)}(\xi).$$

■

Problema 4 *Ecuaţia*

$$\cos x \cosh x - 1 = 0$$

are exact două rădăcini $\alpha_n < \beta_n$ *în fiecare interval* $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *(1p) Arătaţi că metoda lui Newton aplicată aceste ecuaţii converge către* α_n *când se ia valoarea de pornire* $x_0 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ *(1p) şi către* β_n *când se ia valoarea de pornire* $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. *(1p)*

Soluţie. Avem

$$f(x) = \cos x \cosh x - 1$$
$$f'(x) = \cos x \sinh x - \sin x \cosh x$$
$$f''(x) = -2\sin x \sinh x$$

Observăm că $f''(x) > 0$ pe $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, 2n\pi\right]$ şi $f''(x) < 0$ pe $\left[2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$. Mai mult, $f\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1$ şi $f(2n\pi) = \cosh(2n\pi) > 1$. Deoarece f este convexă pe jumătatea stângă a intervalului $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, metoda lui Newton cu $x_0 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ şi valoarea de pornire x_1 converge monoton descrescător către α_n, dacă x_1 este situată în stânga mijlocului intervalului. Într-adevăr, pentru $x_0 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, avem, pentru $n \geq 1$,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\cosh\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}$$
$$< -\frac{\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\cosh\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = 2n\pi - 1.55283... < 2n\pi.$$

Deoarece f este concavă pe jumătatea dreaptă a intervalului, metoda lui Newton cu valoarea de pornire egală cu capătul drept converge monoton descrescător către β_n. ■