Home Page
Title Page
Page 1 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Interpolare

Radu T. Trîmbiţaş

tradu@math.ubbcluj.ro

23 martie 2009

1. Spațiul $H^n[a,b]$

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 2 of 45

Go Back

Full Screen

Close

Quit

1. Spațiul $H^n[a,b]$

1. Spațiul $H^n[a, b]$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim

1. Spațiul $H^n[a,b]$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim

$$H^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \in C^{n-1}[a,b],\ f^{(n-1)} \text{ absolut continuă pe } [a,b]\}. \tag{1}$$

1. Spațiul $H^n[a,b]$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim

$$H^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \in C^{n-1}[a,b], f^{(n-1)} \text{ absolut continuă pe } [a,b]\}. \tag{1}$$

Orice funcție $f \in H^n[a,b]$ admite o reprezentare de tip Taylor cu restul sub formă integrală

Home Page
Title Page
Page 2 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

1. Spațiul $H^n[a,b]$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim

$$H^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \in C^{n-1}[a,b], f^{(n-1)} \text{ absolut continuă pe } [a,b]\}. \tag{1}$$

Orice funcție $f \in H^n[a,b]$ admite o reprezentare de tip Taylor cu restul sub formă integrală

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt. \tag{2}$$

1. Spațiul $H^n[a,b]$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim

$$H^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \in C^{n-1}[a,b], f^{(n-1)} \text{ absolut continuă pe } [a,b]\}. \tag{1}$$

Orice funcție $f \in H^n[a,b]$ admite o reprezentare de tip Taylor cu restul sub formă integrală

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt. \tag{2}$$

$H^n[a,b]$ este un spațiu liniar.

1. Spațiul $H^n[a,b]$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim

$$H^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \in C^{n-1}[a,b], f^{(n-1)} \text{ absolut continuă pe } [a,b]\}. \tag{1}$$

Orice funcție $f \in H^n[a,b]$ admite o reprezentare de tip Taylor cu restul sub formă integrală

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt. \tag{2}$$

$H^n[a,b]$ este un spațiu liniar.

Observația 1

Home Page
Title Page
◄◄ ►►
◄ ►
Page 2 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

1. Spațiul $H^n[a,b]$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim

$$H^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \in C^{n-1}[a,b], f^{(n-1)} \text{ absolut continuă pe } [a,b]\}. \tag{1}$$

Orice funcție $f \in H^n[a,b]$ admite o reprezentare de tip Taylor cu restul sub formă integrală

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt. \tag{2}$$

$H^n[a,b]$ este un spațiu liniar.

Observația 1 *Funcția $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, se numește* absolut continuă *pe I dacă $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ astfel încât oricare ar fi un sistem finit de subintervale disjuncte ale lui I $\{(a_k, b_k)\}_{k=\overline{1,n}}$ cu proprietatea $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ să avem*

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 2 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

1. Spațiul $H^n[a,b]$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim

$$H^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \in C^{n-1}[a,b], f^{(n-1)} \text{ absolut continuă pe } [a,b]\}. \tag{1}$$

Orice funcție $f \in H^n[a,b]$ admite o reprezentare de tip Taylor cu restul sub formă integrală

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt. \tag{2}$$

$H^n[a,b]$ este un spațiu liniar.

Observația 1 *Funcția $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, se numește* absolut continuă *pe I dacă $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ astfel încât oricare ar fi un sistem finit de subintervale disjuncte ale lui I $\{(a_k, b_k)\}_{k=\overline{1,n}}$ cu proprietatea $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ să avem*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

1. Spațiul $H^n[a,b]$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim

$$H^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \in C^{n-1}[a,b], f^{(n-1)} \text{ absolut continuă pe } [a,b]\}. \quad (1)$$

Orice funcție $f \in H^n[a,b]$ admite o reprezentare de tip Taylor cu restul sub formă integrală

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt. \quad (2)$$

$H^n[a,b]$ este un spațiu liniar.

Observația 1 *Funcția $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, se numește absolut continuă pe I dacă $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ astfel încât oricare ar fi un sistem finit de subintervale disjuncte ale lui I $\{(a_k, b_k)\}_{k=\overline{1,n}}$ cu proprietatea $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ să avem*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Teorema următoare, de o importanţă deosebită în analiza numerică, este o teoremă de reprezentare a funcţionalelor liniare reale, definite pe $H^n[a,b]$.

Home Page

Title Page

Page 3 of 45

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Teorema următoare, de o importanţă deosebită în analiza numerică, este o teoremă de reprezentare a funcţionalelor liniare reale, definite pe $H^n[a, b]$.

Teorema 2 (Peano)

Teorema următoare, de o importanță deosebită în analiza numerică, este o teoremă de reprezentare a funcționalelor liniare reale, definite pe $H^n[a,b]$.

Teorema 2 (Peano) *Fie L o funcțională reală, continuă, definită pe $H^n[a,b]$. Dacă $KerL = \mathbb{P}_{n-1}$ atunci*

Home Page
Title Page

Go Back
Full Screen
Close
Quit

Teorema următoare, de o importanţă deosebită în analiza numerică, este o teoremă de reprezentare a funcţionalelor liniare reale, definite pe $H^n[a,b]$.

Teorema 2 (Peano) *Fie L o funcţională reală, continuă, definită pe $H^n[a,b]$. Dacă $KerL = \mathbb{P}_{n-1}$ atunci*

$$Lf = \int_a^b K(t) f^{(n)}(t) dt, \tag{3}$$

unde

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Teorema următoare, de o importanță deosebită în analiza numerică, este o teoremă de reprezentare a funcționalelor liniare reale, definite pe $H^n[a,b]$.

Teorema 2 (Peano) *Fie L o funcțională reală, continuă, definită pe $H^n[a,b]$. Dacă $KerL = \mathbb{P}_{n-1}$ atunci*

$$Lf = \int_a^b K(t) f^{(n)}(t) dt, \tag{3}$$

unde

$$K(t) = \frac{1}{(n-1)!} L[(\cdot - t)_+^{n-1}] \quad \text{(nucleul lui Peano).} \tag{4}$$

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Go Back
Full Screen
Close
Quit

Teorema următoare, de o importanță deosebită în analiza numerică, este o teoremă de reprezentare a funcționalelor liniare reale, definite pe $H^n[a,b]$.

Teorema 2 (Peano) *Fie L o funcțională reală, continuă, definită pe $H^n[a,b]$. Dacă $KerL = \mathbb{P}_{n-1}$ atunci*

$$Lf = \int_a^b K(t) f^{(n)}(t)dt, \tag{3}$$

unde

$$K(t) = \frac{1}{(n-1)!} L[(\cdot - t)_+^{n-1}] \quad \text{(nucleul lui Peano)}. \tag{4}$$

Observația 3 *Funcția*

$$z_+ = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

se numește parte pozitivă, iar z_+^n se numește putere trunchiată.

Spaţiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferenţe . . .
Home Page
Title Page
Page 3 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Teorema următoare, de o importanţă deosebită în analiza numerică, este o teoremă de reprezentare a funcţionalelor liniare reale, definite pe $H^n[a,b]$.

Teorema 2 (Peano) *Fie L o funcţională reală, continuă, definită pe $H^n[a,b]$. Dacă $KerL = \mathbb{P}_{n-1}$ atunci*

$$Lf = \int_a^b K(t) f^{(n)}(t) dt, \tag{3}$$

unde

$$K(t) = \frac{1}{(n-1)!} L[(\cdot - t)_+^{n-1}] \quad \text{(nucleul lui Peano)}. \tag{4}$$

Observaţia 3 *Funcţia*

$$z_+ = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

se numeşte parte pozitivă, iar z_+^n se numeşte putere trunchiată.

Spațiul $H^n[a, b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 4 of 45

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Demonstrație. f admite o reprezentare de tip Taylor, cu restul în formă integrală

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$$

Demonstrație. f admite o reprezentare de tip Taylor, cu restul în formă integrală

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$$

unde

$$R_{n-1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (x-t)_+^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

Demonstrație. f admite o reprezentare de tip Taylor, cu restul în formă integrală

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$$

unde

$$R_{n-1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (x-t)_+^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

Aplicând L obținem

$$Lf = \underbrace{LT_{n-1}}_{0} + LR_{n-1} \Rightarrow Lf = \frac{1}{(n-1)!} L\left(\int_a^b (\cdot - t)_+^{n-1} f^{(n)}(t)dt\right) =$$

Spațiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .
Home Page
Title Page
Page 4 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Demonstrație. f admite o reprezentare de tip Taylor, cu restul în formă integrală

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$$

unde

$$R_{n-1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (x-t)_+^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

Aplicând L obținem

$$Lf = \underbrace{LT_{n-1}}_{0} + LR_{n-1} \Rightarrow Lf = \frac{1}{(n-1)!} L\left(\int_a^b (\cdot - t)_+^{n-1} f^{(n)}(t)dt\right) =$$

$$\overset{cont}{=} \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b L(\cdot - t)_+^{n-1} f^{(n)}(t)dt.$$

■

Demonstrație. f admite o reprezentare de tip Taylor, cu restul în formă integrală

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$$

unde

$$R_{n-1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (x-t)_+^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

Aplicând L obținem

$$Lf = \underbrace{LT_{n-1}}_{0} + LR_{n-1} \Rightarrow Lf = \frac{1}{(n-1)!} L\left(\int_a^b (\cdot - t)_+^{n-1} f^{(n)}(t)dt\right) =$$

$$\overset{cont}{=} \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b L(\cdot - t)_+^{n-1} f^{(n)}(t)dt.$$

■

Observația 4 *Concluzia teoremei rămâne valabilă și dacă f nu este continuă, ci are forma*

$$Lf = \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b f^{(i)}(x) d\mu_i(x), \quad \mu_i \in BV[a,b].$$

Spațiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 5 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Observația 4 *Concluzia teoremei rămâne valabilă și dacă f nu este continuă, ci are forma*

$$Lf = \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b f^{(i)}(x)d\mu_i(x), \quad \mu_i \in BV[a,b].$$

Spaţiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferenţe . . .
Home Page
Title Page
Page 5 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Observaţia 4 *Concluzia teoremei rămâne valabilă şi dacă f nu este continuă, ci are forma*

$$Lf = \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b f^{(i)}(x)d\mu_i(x), \quad \mu_i \in BV[a,b].$$

Corolarul 5 *Dacă K păstrează semn constant pe $[a,b]$ şi $f^{(n)}$ este continuă pe $[a,b]$, atunci există $\xi \in [a,b]$ astfel încât*

$$Lf = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) Le_n, \tag{5}$$

unde $e_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Observația 4 *Concluzia teoremei rămâne valabilă și dacă f nu este continuă, ci are forma*

$$Lf = \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b f^{(i)}(x) d\mu_i(x), \quad \mu_i \in BV[a,b].$$

Corolarul 5 *Dacă K păstrează semn constant pe $[a,b]$ și $f^{(n)}$ este continuă pe $[a,b]$, atunci există $\xi \in [a,b]$ astfel încât*

$$Lf = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) Le_n, \tag{5}$$

unde $e_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Deoarece K păstrează u{a} semn constant putem aplica în (3) teorema de medie

$$Lf = f^{(n)}(\xi) \int_a^b K_n(t)dt, \quad \xi \in [a,b].$$

Concluzia se obține luând $f = e_n$. ■

Observația 4 *Concluzia teoremei rămâne valabilă și dacă f nu este continuă, ci are forma*

$$Lf = \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b f^{(i)}(x)d\mu_i(x), \quad \mu_i \in BV[a,b].$$

Corolarul 5 *Dacă K păstrează semn constant pe $[a,b]$ și $f^{(n)}$ este continuă pe $[a,b]$, atunci există $\xi \in [a,b]$ astfel încât*

$$Lf = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) Le_n, \tag{5}$$

unde $e_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Deoarece K păstrează u{a} semn constant putem aplica în (3) teorema de medie

$$Lf = f^{(n)}(\xi) \int_a^b K_n(t)dt, \quad \xi \in [a,b].$$

Concluzia se obține luând $f = e_n$. ■

Figura 1: Giuseppe Peano (1858-1932)

Home Page
Title Page
Page 8 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

2. Interpolare polinomială — Interpolare Lagrange

2. Interpolare polinomială — Interpolare Lagrange

Fie intervalul închis $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ și o mulțime de $m+1$ puncte distincte $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \subset [a,b]$ și o funție $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Dorim să determinăm un polinom de grad minim care să reproducă valorile funcției f în x_k, $k = \overline{0,m}$.

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 8 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

2. Interpolare polinomială — Interpolare Lagrange

Fie intervalul închis $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi o mulţime de $m+1$ puncte distincte $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \subset [a,b]$ şi o funţie $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Dorim să determinăm un polinom de grad minim care să reproducă valorile funcţiei f în x_k, $k = \overline{0,m}$.

Teorema 6

2. Interpolare polinomială — Interpolare Lagrange

Fie intervalul închis $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ și o mulțime de $m+1$ puncte distincte $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \subset [a,b]$ și o funție $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Dorim să determinăm un polinom de grad minim care să reproducă valorile funcției f în x_k, $k = \overline{0,m}$.

Teorema 6 *Există un polinom și numai unul $L_m f \in \mathbb{P}_m$ astfel încât*

2. Interpolare polinomială — Interpolare Lagrange

Fie intervalul închis $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ și o mulțime de $m+1$ puncte distincte $\{x_0, x_1, \dots, x_m\} \subset [a,b]$ și o funție $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Dorim să determinăm un polinom de grad minim care să reproducă valorile funcției f în x_k, $k = \overline{0,m}$.

Teorema 6 *Există un polinom și numai unul $L_m f \in \mathbb{P}_m$ astfel încât*

$$\forall\ i = 0, 1, \dots, m, \quad (L_m f)(x_i) = f(x_i); \tag{6}$$

2. Interpolare polinomială — Interpolare Lagrange

Fie intervalul închis $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi o mulţime de $m+1$ puncte distincte $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \subset [a,b]$ şi o funţie $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Dorim să determinăm un polinom de grad minim care să reproducă valorile funcţiei f în x_k, $k = \overline{0,m}$.

Teorema 6 *Există un polinom şi numai unul $L_m f \in \mathbb{P}_m$ astfel încât*

$$\forall\ i = 0, 1, \ldots, m, \quad (L_m f)(x_i) = f(x_i); \tag{6}$$

acest polinom se scrie sub forma

Home Page
Title Page
Page 8 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

2. Interpolare polinomială — Interpolare Lagrange

Fie intervalul închis $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi o mulţime de $m+1$ puncte distincte $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \subset [a,b]$ şi o funţie $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Dorim să determinăm un polinom de grad minim care să reproducă valorile funcţiei f în x_k, $k = \overline{0,m}$.

Teorema 6 *Există un polinom şi numai unul $L_m f \in \mathbb{P}_m$ astfel încât*

$$\forall\ i = 0, 1, \ldots, m, \quad (L_m f)(x_i) = f(x_i); \tag{6}$$

acest polinom se scrie sub forma

$$(L_m f)(x) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)\ell_i(x), \tag{7}$$

Home Page
Title Page
Page 8 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

2. Interpolare polinomială — Interpolare Lagrange

Fie intervalul închis $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ și o mulțime de $m+1$ puncte distincte $\{x_0, x_1, \dots, x_m\} \subset [a,b]$ și o funție $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Dorim să determinăm un polinom de grad minim care să reproducă valorile funcției f în x_k, $k = \overline{0,m}$.

Teorema 6 *Există un polinom și numai unul $L_m f \in \mathbb{P}_m$ astfel încât*

$$\forall\ i = 0, 1, \dots, m, \quad (L_m f)(x_i) = f(x_i); \tag{6}$$

acest polinom se scrie sub forma

$$(L_m f)(x) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)\ell_i(x), \tag{7}$$

unde

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{m} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{8}$$

2. Interpolare polinomială — Interpolare Lagrange

Fie intervalul închis $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ și o mulțime de $m+1$ puncte distincte $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \subset [a,b]$ și o funție $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Dorim să determinăm un polinom de grad minim care să reproducă valorile funcției f în x_k, $k = \overline{0,m}$.

Teorema 6 *Există un polinom și numai unul $L_m f \in \mathbb{P}_m$ astfel încât*

$$\forall\ i = 0, 1, \ldots, m, \quad (L_m f)(x_i) = f(x_i); \tag{6}$$

acest polinom se scrie sub forma

$$(L_m f)(x) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)\ell_i(x), \tag{7}$$

unde

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{8}$$

Definiţia 7 *Polinomul $L_m f$ definit astfel se numeşte* polinom de interpolare Lagrange *a lui f relativ la punctele $x_0, x_1, \ldots, x_m$, iar funcţiile $\ell_i(x)$, $i = \overline{0, m}$, se numesc* polinoame de bază (fundamentale) Lagrange *asociate acelor puncte.*

Definiția 7 *Polinomul $L_m f$ definit astfel se numește* polinom de interpolare Lagrange *a lui f relativ la punctele $x_0, x_1, \ldots, x_m$, iar funcțiile $\ell_i(x)$, $i = \overline{0, m}$, se numesc* polinoame de bază (fundamentale) Lagrange *asociate acelor puncte.*

Demonstrație. ■

Definiţia 7 *Polinomul* $L_m f$ *definit astfel se numeşte polinom de interpolare Lagrange a lui* f *relativ la punctele* $x_0, x_1, \ldots, x_m$*, iar funcţiile* $\ell_i(x)$*,* $i = \overline{0, m}$*, se numesc polinoame de bază (fundamentale) Lagrange asociate acelor puncte.*

Demonstraţie. Se verifică imediat că $\ell_i \in \mathbb{P}_i$ şi că $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$ (simbolul lui Krönecker); rezultă că polinomul $L_m f$ definit de (6) este de grad cel mult m şi verifică (7). ■

Definiția 7 *Polinomul $L_m f$ definit astfel se numește polinom de interpolare Lagrange a lui f relativ la punctele $x_0, x_1, \ldots, x_m$, iar funcțiile $\ell_i(x)$, $i = \overline{0,m}$, se numesc polinoame de bază (fundamentale) Lagrange asociate acelor puncte.*

Demonstrație. Se verifică imediat că $\ell_i \in \mathbb{P}_i$ și că $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$ (simbolul lui Krönecker); rezultă că polinomul $L_m f$ definit de (6) este de grad cel mult m și verifică (7). Presupunem că există un alt polinom $p_m^* \in \mathbb{P}_m$ care verifică (7) și punem $q_m = L_m - p_m^*$; ■

Definiția 7 *Polinomul $L_m f$ definit astfel se numește* polinom de interpolare Lagrange *a lui f relativ la punctele $x_0, x_1, \ldots, x_m$, iar funcțiile $\ell_i(x)$, $i = \overline{0, m}$, se numesc* polinoame de bază (fundamentale) Lagrange *asociate acelor puncte.*

Demonstrație. Se verifică imediat că $\ell_i \in \mathbb{P}_i$ și că $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$ (simbolul lui Krönecker); rezultă că polinomul $L_m f$ definit de (6) este de grad cel mult m și verifică (7). Presupunem că există un alt polinom $p_m^* \in \mathbb{P}_m$ care verifică (7) și punem $q_m = L_m - p_m^*$; avem $q_m \in \mathbb{P}_m$ și $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$, $q_m(x_i) = 0$; ■

Home Page
Title Page
Page 9 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Definiția 7 *Polinomul $L_m f$ definit astfel se numește* polinom de interpolare Lagrange *a lui f relativ la punctele $x_0, x_1, \ldots, x_m$, iar funcțiile $\ell_i(x)$, $i = \overline{0, m}$, se numesc* polinoame de bază (fundamentale) Lagrange *asociate acelor puncte.*

Demonstrație. Se verifică imediat că $\ell_i \in \mathbb{P}_i$ și că $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$ (simbolul lui Krönecker); rezultă că polinomul $L_m f$ definit de (6) este de grad cel mult m și verifică (7). Presupunem că există un alt polinom $p_m^* \in \mathbb{P}_m$ care verifică (7) și punem $q_m = L_m - p_m^*$; avem $q_m \in \mathbb{P}_m$ și $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$, $q_m(x_i) = 0$; deci q_m având $(m+1)$ rădăcini distincte este identic nul, de unde unicitatea lui L_m. ■

Definiția 7 *Polinomul $L_m f$ definit astfel se numește* polinom de interpolare Lagrange *a lui f relativ la punctele $x_0, x_1, \ldots, x_m$, iar funcțiile $\ell_i(x)$, $i = \overline{0, m}$, se numesc* polinoame de bază (fundamentale) Lagrange *asociate acelor puncte.*

Demonstrație. Se verifică imediat că $\ell_i \in \mathbb{P}_i$ și că $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$ (simbolul lui Krönecker); rezultă că polinomul $L_m f$ definit de (6) este de grad cel mult m și verifică (7). Presupunem că există un alt polinom $p_m^* \in \mathbb{P}_m$ care verifică (7) și punem $q_m = L_m - p_m^*$; avem $q_m \in \mathbb{P}_m$ și $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$, $q_m(x_i) = 0$; deci q_m având $(m+1)$ rădăcini distincte este identic nul, de unde unicitatea lui L_m. ■

Observația 8

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Go Back
Full Screen
Close
Quit

Definiția 7 *Polinomul $L_m f$ definit astfel se numește* polinom de interpolare Lagrange *a lui f relativ la punctele $x_0, x_1, \ldots, x_m$, iar funcțiile $\ell_i(x)$, $i = \overline{0, m}$, se numesc* polinoame de bază (fundamentale) Lagrange *asociate acelor puncte.*

Demonstrație. Se verifică imediat că $\ell_i \in \mathbb{P}_i$ și că $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$ (simbolul lui Krönecker); rezultă că polinomul $L_m f$ definit de (6) este de grad cel mult m și verifică (7). Presupunem că există un alt polinom $p_m^* \in \mathbb{P}_m$ care verifică (7) și punem $q_m = L_m - p_m^*$; avem $q_m \in \mathbb{P}_m$ și $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$, $q_m(x_i) = 0$; deci q_m având $(m+1)$ rădăcini distincte este identic nul, de unde unicitatea lui L_m. ∎

Observația 8 *Polinomul fundamental ℓ_i este deci unicul polinom care verifică*

Definiția 7 *Polinomul $L_m f$ definit astfel se numește polinom de interpolare Lagrange a lui f relativ la punctele $x_0, x_1, \ldots, x_m$, iar funcțiile $\ell_i(x)$, $i = \overline{0,m}$, se numesc polinoame de bază (fundamentale) Lagrange asociate acelor puncte.*

Demonstrație. Se verifică imediat că $\ell_i \in \mathbb{P}_i$ și că $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$ (simbolul lui Krönecker); rezultă că polinomul $L_m f$ definit de (6) este de grad cel mult m și verifică (7). Presupunem că există un alt polinom $p_m^* \in \mathbb{P}_m$ care verifică (7) și punem $q_m = L_m - p_m^*$; avem $q_m \in \mathbb{P}_m$ și $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$, $q_m(x_i) = 0$; deci q_m având $(m+1)$ rădăcini distincte este identic nul, de unde unicitatea lui L_m. ■

Observația 8 *Polinomul fundamental ℓ_i este deci unicul polinom care verifică*

$$\ell_i \in \mathbb{P}_m \text{ și } \forall\ j = 0, 1, \ldots, m, \quad \ell_i(x_j) = \delta_{ij}$$

Home Page
Title Page
Page 9 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Definiția 7 *Polinomul $L_m f$ definit astfel se numește* polinom de interpolare Lagrange *a lui f relativ la punctele $x_0, x_1, \ldots, x_m$, iar funcțiile $\ell_i(x)$, $i = \overline{0, m}$, se numesc* polinoame de bază (fundamentale) Lagrange *asociate acelor puncte.*

Demonstrație. Se verifică imediat că $\ell_i \in \mathbb{P}_i$ și că $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$ (simbolul lui Krönecker); rezultă că polinomul $L_m f$ definit de (6) este de grad cel mult m și verifică (7). Presupunem că există un alt polinom $p_m^* \in \mathbb{P}_m$ care verifică (7) și punem $q_m = L_m - p_m^*$; avem $q_m \in \mathbb{P}_m$ și $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$, $q_m(x_i) = 0$; deci q_m având $(m+1)$ rădăcini distincte este identic nul, de unde unicitatea lui L_m. ∎

Observația 8 *Polinomul fundamental ℓ_i este deci unicul polinom care verifică*

$$\ell_i \in \mathbb{P}_m \text{ și } \forall\ j = 0, 1, \ldots, m, \quad \ell_i(x_j) = \delta_{ij}$$

Punând

$$u(x) = \prod_{j=0}^{m} (x - x_j)$$

Definiția 7 *Polinomul $L_m f$ definit astfel se numește* polinom de interpolare Lagrange *a lui f relativ la punctele $x_0, x_1, \dots, x_m$, iar funcțiile $\ell_i(x)$, $i = \overline{0,m}$, se numesc* polinoame de bază (fundamentale) Lagrange *asociate acelor puncte.*

Demonstrație. Se verifică imediat că $\ell_i \in \mathbb{P}_i$ și că $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$ (simbolul lui Krönecker); rezultă că polinomul $L_m f$ definit de (6) este de grad cel mult m și verifică (7). Presupunem că există un alt polinom $p_m^* \in \mathbb{P}_m$ care verifică (7) și punem $q_m = L_m - p_m^*$; avem $q_m \in \mathbb{P}_m$ și $\forall\ i = 0, 1, \dots, m$, $q_m(x_i) = 0$; deci q_m având $(m+1)$ rădăcini distincte este identic nul, de unde unicitatea lui L_m. ■

Observația 8 *Polinomul fundamental ℓ_i este deci unicul polinom care verifică*

$$\ell_i \in \mathbb{P}_m \text{ și } \forall\ j = 0, 1, \dots, m, \quad \ell_i(x_j) = \delta_{ij}$$

Punând

$$u(x) = \prod_{j=0}^{m} (x - x_j)$$

din (8) se deduce că $\forall\ x \neq x_i, \quad \ell_i(x) = \frac{u(x)}{(x-x_i)u'(x_i)}$.

Definiția 7 *Polinomul $L_m f$ definit astfel se numește polinom de interpolare Lagrange a lui f relativ la punctele $x_0, x_1, \ldots, x_m$, iar funcțiile $\ell_i(x)$, $i = \overline{0, m}$, se numesc polinoame de bază (fundamentale) Lagrange asociate acelor puncte.*

Demonstrație. Se verifică imediat că $\ell_i \in \mathbb{P}_i$ și că $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$ (simbolul lui Krönecker); rezultă că polinomul $L_m f$ definit de (6) este de grad cel mult m și verifică (7). Presupunem că există un alt polinom $p_m^* \in \mathbb{P}_m$ care verifică (7) și punem $q_m = L_m - p_m^*$; avem $q_m \in \mathbb{P}_m$ și $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$, $q_m(x_i) = 0$; deci q_m având $(m+1)$ rădăcini distincte este identic nul, de unde unicitatea lui L_m. ■

Observația 8 *Polinomul fundamental ℓ_i este deci unicul polinom care verifică*

$$\ell_i \in \mathbb{P}_m \text{ și } \forall\ j = 0, 1, \ldots, m, \quad \ell_i(x_j) = \delta_{ij}$$

Punând

$$u(x) = \prod_{j=0}^{m} (x - x_j)$$

din (8) se deduce că $\forall\ x \neq x_i, \quad \ell_i(x) = \frac{u(x)}{(x-x_i)u'(x_i)}$.

Demonstrând teorema 6 am demonstrat de fapt existenţa şi unicitatea soluţiei problemei generale de interpolare Lagrange:

Demonstrând teorema 6 am demonstrat de fapt existenţa şi unicitatea soluţiei problemei generale de interpolare Lagrange:

Demonstrând teorema 6 am demonstrat de fapt existența și unicitatea soluției problemei generale de interpolare Lagrange:

(PGIL) Fiind date $b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, să se determine

$$p_m \in \mathbb{P}_m \text{ astfel încât } \forall\ i = 0, 1, \dots, n, \quad p_m(x_i) = b_i. \tag{9}$$

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Go Back
Full Screen
Close
Quit

Demonstrând teorema 6 am demonstrat de fapt existența și unicitatea soluției problemei generale de interpolare Lagrange:

(PGIL) Fiind date $b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, să se determine

$$p_m \in \mathbb{P}_m \text{ astfel încât } \forall\ i = 0, 1, \ldots, n, \quad p_m(x_i) = b_i. \tag{9}$$

Problema (9) conduce la un sistem liniar de $(m+1)$ ecuații cu $(m+1)$ necunoscute (coeficienții lui p_m).

Demonstrând teorema 6 am demonstrat de fapt existenţa şi unicitatea soluţiei problemei generale de interpolare Lagrange:

(PGIL) Fiind date $b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, să se determine

$$p_m \in \mathbb{P}_m \text{ astfel încât } \forall\ i = 0, 1, \dots, n, \quad p_m(x_i) = b_i. \tag{9}$$

Problema (9) conduce la un sistem liniar de $(m+1)$ ecuaţii cu $(m+1)$ necunoscute (coeficienţii lui p_m).

Din teoria sistemelor liniare se ştie că

Demonstrând teorema 6 am demonstrat de fapt existența și unicitatea soluției problemei generale de interpolare Lagrange:

(PGIL) Fiind date $b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, să se determine

$$p_m \in \mathbb{P}_m \text{ astfel încât } \forall\, i = 0, 1, \ldots, n, \quad p_m(x_i) = b_i. \tag{9}$$

Problema (9) conduce la un sistem liniar de $(m+1)$ ecuații cu $(m+1)$ necunoscute (coeficienții lui p_m).

Din teoria sistemelor liniare se știe că

$$\{\text{existența unei soluții } \forall\, b_0, b_1, \ldots, b_m\} \Leftrightarrow \{\text{unicitatea soluției}\} \Leftrightarrow$$

Demonstrând teorema 6 am demonstrat de fapt existența și unicitatea soluției problemei generale de interpolare Lagrange:

(PGIL) Fiind date $b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, să se determine

$$p_m \in \mathbb{P}_m \text{ astfel încât } \forall\ i = 0, 1, \dots, n, \quad p_m(x_i) = b_i. \tag{9}$$

Problema (9) conduce la un sistem liniar de $(m+1)$ ecuații cu $(m+1)$ necunoscute (coeficienții lui p_m).

Din teoria sistemelor liniare se știe că

$$\{\text{existența unei soluții } \forall\ b_0, b_1, \dots, b_m\} \Leftrightarrow \{\text{unicitatea soluției}\} \Leftrightarrow$$

$$\{(b_0 = b_1 = \cdots = b_m = 0) \Rightarrow p_m \equiv 0\}$$

Demonstrând teorema 6 am demonstrat de fapt existența și unicitatea soluției problemei generale de interpolare Lagrange:

(PGIL) Fiind date $b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, să se determine

$$p_m \in \mathbb{P}_m \text{ astfel încât } \forall\ i = 0, 1, \ldots, n, \quad p_m(x_i) = b_i. \tag{9}$$

Problema (9) conduce la un sistem liniar de $(m+1)$ ecuații cu $(m+1)$ necunoscute (coeficienții lui p_m).

Din teoria sistemelor liniare se știe că

$$\{\text{existența unei soluții } \forall\ b_0, b_1, \ldots, b_m\} \Leftrightarrow \{\text{unicitatea soluției}\} \Leftrightarrow$$

$$\{(b_0 = b_1 = \cdots = b_m = 0) \Rightarrow p_m \equiv 0\}$$

Punem $p_m = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$

Punem $p_m = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_m)^T, \quad b = (b_0, b_1, \ldots, b_m)^T$$

Spațiul $H^n[a, b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 11 of 45

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Punem $p_m = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_m)^T, \quad b = (b_0, b_1, \ldots, b_m)^T$$

și notăm cu $V = (v_{ij})$ matricea pătratică de ordin $m + 1$ cu elementele $v_{ij} = x_i^j$. Ecuația (9) se scrie sub forma

Home Page
Title Page
Page 11 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Punem $p_m = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_m)^T, \quad b = (b_0, b_1, \ldots, b_m)^T$$

și notăm cu $V = (v_{ij})$ matricea pătratică de ordin $m + 1$ cu elementele $v_{ij} = x_i^j$. Ecuația (9) se scrie sub forma

$$Va = b$$

Punem $p_m = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_m)^T, \quad b = (b_0, b_1, \ldots, b_m)^T$$

şi notăm cu $V = (v_{ij})$ matricea pătratică de ordin $m + 1$ cu elementele $v_{ij} = x_i^j$. Ecuaţia (9) se scrie sub forma

$$Va = b$$

Matricea V este inversabilă (determinantul ei este Vandermonde);

Punem $p_m = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_m)^T, \quad b = (b_0, b_1, \ldots, b_m)^T$$

și notăm cu $V = (v_{ij})$ matricea pătratică de ordin $m+1$ cu elementele $v_{ij} = x_i^j$. Ecuația (9) se scrie sub forma

$$Va = b$$

Matricea V este inversabilă (determinantul ei este Vandermonde); se arată ușor că $V^{-1} = U^T$ unde $U = (u_{ij})$ cu $\ell_i(x) = \sum_{k=0}^{m} u_{ik} x^k$;

Home Page

Title Page

Page 11 of 45

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Punem $p_m = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_m)^T, \quad b = (b_0, b_1, \ldots, b_m)^T$$

şi notăm cu $V = (v_{ij})$ matricea pătratică de ordin $m + 1$ cu elementele $v_{ij} = x_i^j$. Ecuaţia (9) se scrie sub forma

$$Va = b$$

Matricea V este inversabilă (determinantul ei este Vandermonde); se arată uşor că $V^{-1} = U^T$ unde $U = (u_{ij})$ cu $\ell_i(x) = \sum_{k=0}^{m} u_{ik} x^k$; se obţine în acest mod un procedeu puţin costisitor de inversare a matricei Vandermonde şi prin urmare şi de rezolvare a sistemului (9).

Punem $p_m = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_m)^T, \quad b = (b_0, b_1, \ldots, b_m)^T$$

şi notăm cu $V = (v_{ij})$ matricea pătratică de ordin $m+1$ cu elementele $v_{ij} = x_i^j$. Ecuaţia (9) se scrie sub forma

$$Va = b$$

Matricea V este inversabilă (determinantul ei este Vandermonde); se arată uşor că $V^{-1} = U^T$ unde $U = (u_{ij})$ cu $\ell_i(x) = \sum_{k=0}^{m} u_{ik} x^k$; se obţine în acest mod un procedeu puţin costisitor de inversare a matricei Vandermonde şi prin urmare şi de rezolvare a sistemului (9).

Exemplul 9

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 12 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 9 *Polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0 și x_1 este*

Exemplul 9 *Polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0 și x_1 este*

$$(L_1 f)(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$

Home Page
Title Page
Page 12 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 9 *Polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0 și x_1 este*

$$(L_1 f)(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$

adică dreapta care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$ și $(x_1, f(x_1))$.

Exemplul 9 *Polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0 și x_1 este*

$$\left(L_1 f\right)(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$

adică dreapta care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$ și $(x_1, f(x_1))$. Analog, polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0, x_1 și x_2 este

Exemplul 9 *Polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0 și x_1 este*

$$(L_1 f)(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$

adică dreapta care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$ și $(x_1, f(x_1))$. Analog, polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0, x_1 și x_2 este

$$\begin{aligned}(L_2 f)(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) \\ &+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2),\end{aligned}$$

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 12 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 9 *Polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0 și x_1 este*

$$(L_1 f)(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$

adică dreapta care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$ și $(x_1, f(x_1))$. Analog, polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0, x_1 și x_2 este

$$(L_2 f)(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2),$$

adică parabola care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$.

Spațiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .

Home Page
Title Page
Page 12 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 9 *Polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0 și x_1 este*

$$(L_1 f)(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$

adică dreapta care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$ și $(x_1, f(x_1))$. Analog, polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0, x_1 și x_2 este

$$(L_2 f)(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2),$$

adică parabola care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$.

Interpretarea lor geometrică apare în figura 2.

Spaţiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferenţe . . .
Home Page
Title Page
Page 12 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 9 *Polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcţii f şi nodurilor x_0 şi x_1 este*

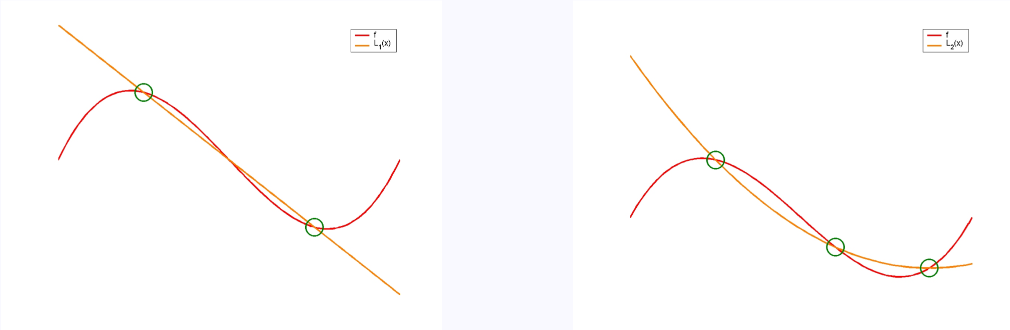
$$(L_1 f)(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$

adică dreapta care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$ şi $(x_1, f(x_1))$. Analog, polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcţii f şi nodurilor x_0, x_1 şi x_2 este

$$(L_2 f)(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2),$$

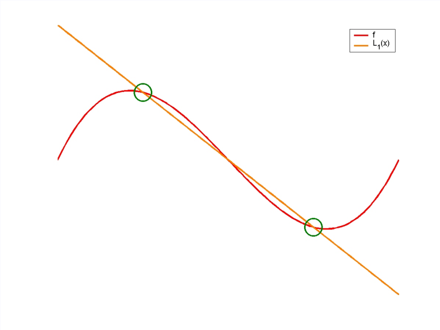
adică parabola care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ şi $(x_2, f(x_2))$.

Interpretarea lor geometrică apare în figura 2.

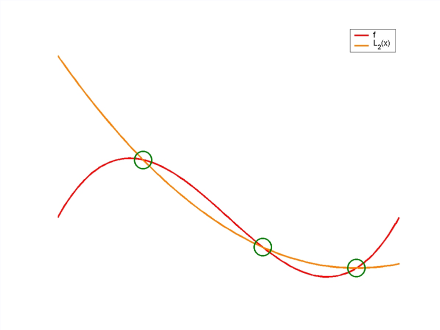


(a) $(L_1 f)$ (b) $(L_2 f)$

Figura 2: Interpretarea geometrică a lui $L_1 f$ (stânga) și $L_2 f$



(a) $(L_1 f)$



(b) $(L_2 f)$

Figura 2: Interpretarea geometrică a lui $L_1 f$ (stânga) şi $L_2 f$

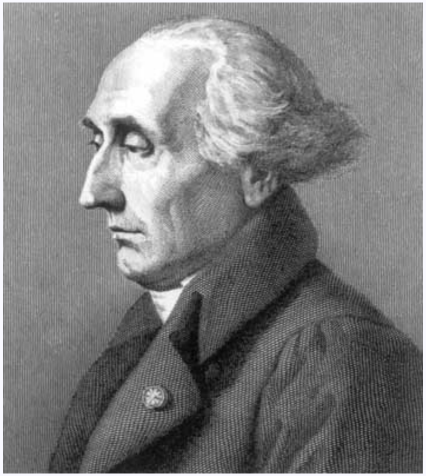


Figura 3: Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

3. Expresia erorii de interpolare

3. Expresia erorii de interpolare

Propoziţia 10 *Operatorul L_m este proiector, adică*

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 16 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

3. Expresia erorii de interpolare

Propoziția 10 *Operatorul L_m este proiector, adică*

-

3. Expresia erorii de interpolare

Propoziţia 10 *Operatorul L_m este proiector, adică*

- *este liniar ($L_m(\alpha f + \beta g) = \alpha L_m f + \beta L_m g$);*

Spațiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

3. Expresia erorii de interpolare

Propoziția 10 *Operatorul L_m este proiector, adică*

- *este liniar* $(L_m(\alpha f + \beta g) = \alpha L_m f + \beta L_m g)$;
- *este idempotent* $(L_m \circ L_m = L_m)$.

3. Expresia erorii de interpolare

Propoziţia 10 *Operatorul L_m este proiector, adică*

- *este liniar $(L_m(\alpha f + \beta g) = \alpha L_m f + \beta L_m g)$;*
- *este idempotent $(L_m \circ L_m = L_m)$.*

Demonstraţie. Liniaritatea rezultă imediat din formula (7). Datorită unicităţii polinomului de interpolare Lagrange $L_m(L_m f) - L_m f$ este identic nul, deci $L_m(L_m f) = L_m f$ şi am arătat idempotenţa. ■

3. Expresia erorii de interpolare

Propoziţia 10 *Operatorul L_m este proiector, adică*

- *este liniar ($L_m(\alpha f + \beta g) = \alpha L_m f + \beta L_m g$);*
- *este idempotent ($L_m \circ L_m = L_m$).*

Demonstraţie. Liniaritatea rezultă imediat din formula (7). Datorită unicităţii polinomului de interpolare Lagrange $L_m(L_m f) - L_m f$ este identic nul, deci $L_m(L_m f) = L_m f$ şi am arătat idempotenţa. ■

Dacă dorim să utilizăm polinomul de interpolare Lagrange pentru a aproxima funcţia f într-un punct $x \in [a, b]$, distinct de nodurile de interpolare $(x_0, \dots, x_m)$, trebuie să estimăm eroarea comisă $(R_m f)(x) = f(x) - (H_m f)(x)$.

Dacă dorim să utilizăm polinomul de interpolare Lagrange pentru a aproxima funcţia f într-un punct $x \in [a,b]$, distinct de nodurile de interpolare $(x_0, \ldots, x_m)$, trebuie să estimăm eroarea comisă $(R_m f)(x) = f(x) - (H_m f)(x)$. Dacă nu posedăm nici o informaţie referitoare la f în afara punctelor x_i, este clar că nu putem spune nimic despre $(R_m f)(x)$; într-adevăr este posibil să schimbăm f în afara punctelor x_i fără a modifica $(H_m f)(x)$.

Dacă dorim să utilizăm polinomul de interpolare Lagrange pentru a aproxima funcția f într-un punct $x \in [a,b]$, distinct de nodurile de interpolare $(x_0,\ldots,x_m)$, trebuie să estimăm eroarea comisă $(R_m f)(x) = f(x) - (H_m f)(x)$. Dacă nu posedăm nici o informație referitoare la f în afara punctelor x_i, este clar că nu putem spune nimic despre $(R_m f)(x)$; într-adevăr este posibil să schimbăm f în afara punctelor x_i fără a modifica $(H_m f)(x)$. Trebuie deci să facem ipoteze suplimentare, care vor fi ipoteze de regularitate asupra lui f.

Home Page
Title Page
Page 17 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Dacă dorim să utilizăm polinomul de interpolare Lagrange pentru a aproxima funcția f într-un punct $x \in [a,b]$, distinct de nodurile de interpolare $(x_0, \ldots, x_m)$, trebuie să estimăm eroarea comisă $(R_m f)(x) = f(x) - (H_m f)(x)$. Dacă nu posedăm nici o informație referitoare la f în afara punctelor x_i, este clar că nu putem spune nimic despre $(R_m f)(x)$; într-adevăr este posibil să schimbăm f în afara punctelor x_i fără a modifica $(H_m f)(x)$. Trebuie deci să facem ipoteze suplimentare, care vor fi ipoteze de regularitate asupra lui f. Să notăm cu $C^m[a,b]$ spațiul funcțiilor reale de m ori continuu diferențiabile pe $[a,b]$.

Home Page
Title Page
Page 17 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Dacă dorim să utilizăm polinomul de interpolare Lagrange pentru a aproxima funcţia f într-un punct $x \in [a,b]$, distinct de nodurile de interpolare $(x_0,\dots,x_m)$, trebuie să estimăm eroarea comisă $(R_m f)(x) = f(x) - (H_m f)(x)$. Dacă nu posedăm nici o informaţie referitoare la f în afara punctelor x_i, este clar că nu putem spune nimic despre $(R_m f)(x)$; într-adevăr este posibil să schimbăm f în afara punctelor x_i fără a modifica $(H_m f)(x)$. Trebuie deci să facem ipoteze suplimentare, care vor fi ipoteze de regularitate asupra lui f. Să notăm cu $C^m[a,b]$ spaţiul funcţiilor reale de m ori continuu diferenţiabile pe $[a,b]$. Avem următoarea teoremă referitoare la estimarea erorii în interpolarea Lagrange.

Dacă dorim să utilizăm polinomul de interpolare Lagrange pentru a aproxima funcția f într-un punct $x \in [a, b]$, distinct de nodurile de interpolare $(x_0, \ldots, x_m)$, trebuie să estimăm eroarea comisă $(R_m f)(x) = f(x) - (H_m f)(x)$. Dacă nu posedăm nici o informație referitoare la f în afara punctelor x_i, este clar că nu putem spune nimic despre $(R_m f)(x)$; într-adevăr este posibil să schimbăm f în afara punctelor x_i fără a modifica $(H_m f)(x)$. Trebuie deci să facem ipoteze suplimentare, care vor fi ipoteze de regularitate asupra lui f. Să notăm cu $C^m[a, b]$ spațiul funcțiilor reale de m ori continuu diferențiabile pe $[a, b]$. Avem următoarea teoremă referitoare la estimarea erorii în interpolarea Lagrange.

Teorema 11

Dacă dorim să utilizăm polinomul de interpolare Lagrange pentru a aproxima funcția f într-un punct $x \in [a,b]$, distinct de nodurile de interpolare $(x_0,\dots,x_m)$, trebuie să estimăm eroarea comisă $(R_m f)(x) = f(x) - (H_m f)(x)$. Dacă nu posedăm nici o informație referitoare la f în afara punctelor x_i, este clar că nu putem spune nimic despre $(R_m f)(x)$; într-adevăr este posibil să schimbăm f în afara punctelor x_i fără a modifica $(H_m f)(x)$. Trebuie deci să facem ipoteze suplimentare, care vor fi ipoteze de regularitate asupra lui f. Să notăm cu $C^m[a,b]$ spațiul funcțiilor reale de m ori continuu diferențiabile pe $[a,b]$. Avem următoarea teoremă referitoare la estimarea erorii în interpolarea Lagrange.

Teorema 11 *Presupunem că* $f \in C^m[\alpha,\beta]$ *și există* $f^{(m+1)}$ *pe* (α,β), *unde* $\alpha = \min\{x, x_0, \dots, x_m\}$ *și* $\beta = \max\{x, x_0, \dots, x_m\}$;

Dacă dorim să utilizăm polinomul de interpolare Lagrange pentru a aproxima funcția f într-un punct $x \in [a,b]$, distinct de nodurile de interpolare $(x_0, \ldots, x_m)$, trebuie să estimăm eroarea comisă $(R_m f)(x) = f(x) - (H_m f)(x)$. Dacă nu posedăm nici o informație referitoare la f în afara punctelor x_i, este clar că nu putem spune nimic despre $(R_m f)(x)$; într-adevăr este posibil să schimbăm f în afara punctelor x_i fără a modifica $(H_m f)(x)$. Trebuie deci să facem ipoteze suplimentare, care vor fi ipoteze de regularitate asupra lui f. Să notăm cu $C^m[a,b]$ spațiul funcțiilor reale de m ori continuu diferențiabile pe $[a,b]$. Avem următoarea teoremă referitoare la estimarea erorii în interpolarea Lagrange.

Teorema 11 *Presupunem că $f \in C^m[\alpha,\beta]$ și există $f^{(m+1)}$ pe (α,β), unde $\alpha = \min\{x, x_0, \ldots, x_m\}$ și $\beta = \max\{x, x_0, \ldots, x_m\}$; atunci, pentru orice $x \in [\alpha,\beta]$, există un $\xi_x \in (\alpha,\beta)$ astfel încât*

Spaţiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferenţe . . .
Home Page
Title Page
Page 17 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Dacă dorim să utilizăm polinomul de interpolare Lagrange pentru a aproxima funcţia f într-un punct $x \in [a,b]$, distinct de nodurile de interpolare $(x_0,\ldots,x_m)$, trebuie să estimăm eroarea comisă $(R_m f)(x) = f(x) - (H_m f)(x)$. Dacă nu posedăm nici o informaţie referitoare la f în afara punctelor x_i, este clar că nu putem spune nimic despre $(R_m f)(x)$; într-adevăr este posibil să schimbăm f în afara punctelor x_i fără a modifica $(H_m f)(x)$. Trebuie deci să facem ipoteze suplimentare, care vor fi ipoteze de regularitate asupra lui f. Să notăm cu $C^m[a,b]$ spaţiul funcţiilor reale de m ori continuu diferenţiabile pe $[a,b]$. Avem următoarea teoremă referitoare la estimarea erorii în interpolarea Lagrange.

Teorema 11 *Presupunem că $f \in C^m[\alpha,\beta]$ şi există $f^{(m+1)}$ pe (α,β), unde $\alpha = \min\{x,x_0,\ldots,x_m\}$ şi $\beta = \max\{x,x_0,\ldots,x_m\}$; atunci, pentru orice $x \in [\alpha,\beta]$, există un $\xi_x \in (\alpha,\beta)$ astfel încât*

$$(R_m f)(x) = \frac{1}{(m+1)!}u_m(x)f^{(n+1)}(\xi_x), \tag{10}$$

Dacă dorim să utilizăm polinomul de interpolare Lagrange pentru a aproxima funcția f într-un punct $x \in [a,b]$, distinct de nodurile de interpolare $(x_0,\ldots,x_m)$, trebuie să estimăm eroarea comisă $(R_m f)(x) = f(x) - (H_m f)(x)$. Dacă nu posedăm nici o informaţie referitoare la f în afara punctelor x_i, este clar că nu putem spune nimic despre $(R_m f)(x)$; într-adevăr este posibil să schimbăm f în afara punctelor x_i fără a modifica $(H_m f)(x)$. Trebuie deci să facem ipoteze suplimentare, care vor fi ipoteze de regularitate asupra lui f. Să notăm cu $C^m[a,b]$ spaţiul funcţiilor reale de m ori continuu diferenţiabile pe $[a,b]$. Avem următoarea teoremă referitoare la estimarea erorii în interpolarea Lagrange.

Teorema 11 *Presupunem că* $f \in C^m[\alpha,\beta]$ *și există* $f^{(m+1)}$ *pe* (α,β), *unde* $\alpha = \min\{x,x_0,\ldots,x_m\}$ *și* $\beta = \max\{x,x_0,\ldots,x_m\}$; *atunci, pentru orice* $x \in [\alpha,\beta]$, *există un* $\xi_x \in (\alpha,\beta)$ *astfel încât*

$$(R_m f)(x) = \frac{1}{(m+1)!} u_m(x) f^{(n+1)}(\xi_x), \tag{10}$$

unde

$$u_m(x) = \prod_{i=0}^{m} (x - x_i).$$

Spațiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .

Home Page
Title Page
Page 17 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Dacă dorim să utilizăm polinomul de interpolare Lagrange pentru a aproxima funcția f într-un punct $x \in [a, b]$, distinct de nodurile de interpolare $(x_0, \ldots, x_m)$, trebuie să estimăm eroarea comisă $(R_m f)(x) = f(x) - (H_m f)(x)$. Dacă nu posedăm nici o informaţie referitoare la f în afara punctelor x_i, este clar că nu putem spune nimic despre $(R_m f)(x)$; într-adevăr este posibil să schimbăm f în afara punctelor x_i fără a modifica $(H_m f)(x)$. Trebuie deci să facem ipoteze suplimentare, care vor fi ipoteze de regularitate asupra lui f. Să notăm cu $C^m[a, b]$ spaţiul funcţiilor reale de m ori continuu diferenţiabile pe $[a, b]$. Avem următoarea teoremă referitoare la estimarea erorii în interpolarea Lagrange.

Teorema 11 *Presupunem că $f \in C^m[\alpha, \beta]$ și există $f^{(m+1)}$ pe (α, β), unde $\alpha = \min\{x, x_0, \ldots, x_m\}$ și $\beta = \max\{x, x_0, \ldots, x_m\}$; atunci, pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$, există un $\xi_x \in (\alpha, \beta)$ astfel încât*

$$(R_m f)(x) = \frac{1}{(m+1)!} u_m(x) f^{(n+1)}(\xi_x), \tag{10}$$

unde

$$u_m(x) = \prod_{i=0}^{m} (x - x_i).$$

Demonstrație. ■

Demonstraţie. Dacă $x = x_i$, $(R_m f)(x) = 0$ şi (10) se verifică trivial. ■

Demonstrație. Dacă $x = x_i$, $(R_m f)(x) = 0$ și (10) se verifică trivial. Presupunem că x este distinct de x_i și considerăm, pentru x fixat, funcția auxiliară ■

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 18 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Demonstraţie. Dacă $x = x_i$, $(R_m f)(x) = 0$ şi (10) se verifică trivial. Presupunem că x este distinct de x_i şi considerăm, pentru x fixat, funcţia auxiliară

$$F(z) = \begin{vmatrix} u_m(z) & (R_m f)(z) \\ u_m(x) & (R_m f)(x) \end{vmatrix}.$$

■

Demonstrație. Dacă $x = x_i$, $(R_m f)(x) = 0$ și (10) se verifică trivial. Presupunem că x este distinct de x_i și considerăm, pentru x fixat, funcția auxiliară

$$F(z) = \begin{vmatrix} u_m(z) & (R_m f)(z) \\ u_m(x) & (R_m f)(x) \end{vmatrix}.$$

Se observă că $F \in C^n[\alpha, \beta]$, $\exists\, F^{(m+1)}$ pe (α, β), $F(x) = 0$ și $F(x_k) = 0$ pentru $k = \overline{0, m}$. ∎

Demonstrație. Dacă $x = x_i$, $(R_m f)(x) = 0$ și (10) se verifică trivial. Presupunem că x este distinct de x_i și considerăm, pentru x fixat, funcția auxiliară

$$F(z) = \begin{vmatrix} u_m(z) & (R_m f)(z) \\ u_m(x) & (R_m f)(x) \end{vmatrix}.$$

Se observă că $F \in C^n[\alpha, \beta]$, $\exists\, F^{(m+1)}$ pe (α, β), $F(x) = 0$ și $F(x_k) = 0$ pentru $k = \overline{0, m}$.Deci, F are $(m + 2)$ zerouri. ■

Spațiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .
Home Page
Title Page
Page 18 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Demonstrație. Dacă $x = x_i$, $(R_m f)(x) = 0$ și (10) se verifică trivial. Presupunem că x este distinct de x_i și considerăm, pentru x fixat, funcția auxiliară

$$F(z) = \begin{vmatrix} u_m(z) & (R_m f)(z) \\ u_m(x) & (R_m f)(x) \end{vmatrix}.$$

Se observă că $F \in C^n[\alpha,\beta]$, $\exists\, F^{(m+1)}$ pe (α,β), $F(x) = 0$ și $F(x_k) = 0$ pentru $k = \overline{0,m}$.Deci, F are $(m+2)$ zerouri. Aplicând succesiv teorema lui Rolle, rezultă că există cel puțin un $\xi \in (\alpha,\beta)$ astfel încât $F^{(m+1)}(\xi) = 0$, adică ■

Home Page
Title Page
Page 18 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Demonstrație. Dacă $x = x_i$, $(R_m f)(x) = 0$ și (10) se verifică trivial. Presupunem că x este distinct de x_i și considerăm, pentru x fixat, funcția auxiliară

$$F(z) = \begin{vmatrix} u_m(z) & (R_m f)(z) \\ u_m(x) & (R_m f)(x) \end{vmatrix}.$$

Se observă că $F \in C^n[\alpha, \beta]$, $\exists\, F^{(m+1)}$ pe (α, β), $F(x) = 0$ și $F(x_k) = 0$ pentru $k = \overline{0, m}$.Deci, F are $(m + 2)$ zerouri. Aplicând succesiv teorema lui Rolle, rezultă că există cel puțin un $\xi \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $F^{(m+1)}(\xi) = 0$, adică

$$F^{(m+1)}(\xi) = \begin{vmatrix} (m+1)! & f^{(m+1)}(\xi) \\ u_m(x) & (R_m f)(x) \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

■

Spaţiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferenţe . . .
Home Page
Title Page
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Demonstraţie. Dacă $x = x_i$, $(R_m f)(x) = 0$ şi (10) se verifică trivial. Presupunem că x este distinct de x_i şi considerăm, pentru x fixat, funcţia auxiliară

$$F(z) = \begin{vmatrix} u_m(z) & (R_m f)(z) \\ u_m(x) & (R_m f)(x) \end{vmatrix}.$$

Se observă că $F \in C^n[\alpha, \beta]$, $\exists\, F^{(m+1)}$ pe (α, β), $F(x) = 0$ şi $F(x_k) = 0$ pentru $k = \overline{0, m}$.Deci, F are $(m + 2)$ zerouri. Aplicând succesiv teorema lui Rolle, rezultă că există cel puţin un $\xi \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $F^{(m+1)}(\xi) = 0$, adică

$$F^{(m+1)}(\xi) = \begin{vmatrix} (m+1)! & f^{(m+1)}(\xi) \\ u_m(x) & (R_m f)(x) \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

unde s-a ţinut cont că $(R_m f)^{(m+1)} = f^{(m+1)} - (H_m f)^{(m+1)} = f^{(m+1)}$.
■

Demonstrație. Dacă $x = x_i$, $(R_m f)(x) = 0$ și (10) se verifică trivial. Presupunem că x este distinct de x_i și considerăm, pentru x fixat, funcția auxiliară

$$F(z) = \begin{vmatrix} u_m(z) & (R_m f)(z) \\ u_m(x) & (R_m f)(x) \end{vmatrix}.$$

Se observă că $F \in C^n[\alpha, \beta]$, $\exists\ F^{(m+1)}$ pe (α, β), $F(x) = 0$ și $F(x_k) = 0$ pentru $k = \overline{0, m}$.Deci, F are $(m+2)$ zerouri. Aplicând succesiv teorema lui Rolle, rezultă că există cel puțin un $\xi \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $F^{(m+1)}(\xi) = 0$, adică

$$F^{(m+1)}(\xi) = \begin{vmatrix} (m+1)! & f^{(m+1)}(\xi) \\ u_m(x) & (R_m f)(x) \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

unde s-a ținut cont că $(R_m f)^{(m+1)} = f^{(m+1)} - (H_m f)^{(m+1)} = f^{(m+1)}$. Exprimând $(R_m f)(x)$ din (11) se obține (10). ■

Home Page
Title Page
Page 18 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Demonstrație. Dacă $x = x_i$, $(R_m f)(x) = 0$ și (10) se verifică trivial. Presupunem că x este distinct de x_i și considerăm, pentru x fixat, funcția auxiliară

$$F(z) = \begin{vmatrix} u_m(z) & (R_m f)(z) \\ u_m(x) & (R_m f)(x) \end{vmatrix}.$$

Se observă că $F \in C^n[\alpha, \beta]$, $\exists\ F^{(m+1)}$ pe (α, β), $F(x) = 0$ și $F(x_k) = 0$ pentru $k = \overline{0, m}$.Deci, F are $(m+2)$ zerouri. Aplicând succesiv teorema lui Rolle, rezultă că există cel puțin un $\xi \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $F^{(m+1)}(\xi) = 0$, adică

$$F^{(m+1)}(\xi) = \begin{vmatrix} (m+1)! & f^{(m+1)}(\xi) \\ u_m(x) & (R_m f)(x) \end{vmatrix} = 0, \qquad (11)$$

unde s-a ținut cont că $(R_m f)^{(m+1)} = f^{(m+1)} - (H_m f)^{(m+1)} = f^{(m+1)}$. Exprimând $(R_m f)(x)$ din (11) se obține (10). ■

Corolarul 12 *Punem* $M_{m+1} = \max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(m+1)}(x)|$*; o margine superioară a erorii de interpolare* $(R_m f)(x) = f(x) - (H_m f)(x)$ *este dată prin*

$$|(R_m f)(x)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} |u_m(x)|.$$

Demonstrație. Dacă $x = x_i$, $(R_m f)(x) = 0$ și (10) se verifică trivial. Presupunem că x este distinct de x_i și considerăm, pentru x fixat, funcția auxiliară

$$F(z) = \begin{vmatrix} u_m(z) & (R_m f)(z) \\ u_m(x) & (R_m f)(x) \end{vmatrix}.$$

Se observă că $F \in C^n[\alpha, \beta]$, $\exists\ F^{(m+1)}$ pe (α, β), $F(x) = 0$ și $F(x_k) = 0$ pentru $k = \overline{0, m}$.Deci, F are $(m + 2)$ zerouri. Aplicând succesiv teorema lui Rolle, rezultă că există cel puțin un $\xi \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $F^{(m+1)}(\xi) = 0$, adică

$$F^{(m+1)}(\xi) = \begin{vmatrix} (m+1)! & f^{(m+1)}(\xi) \\ u_m(x) & (R_m f)(x) \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

unde s-a ținut cont că $(R_m f)^{(m+1)} = f^{(m+1)} - (H_m f)^{(m+1)} = f^{(m+1)}$. Exprimând $(R_m f)(x)$ din (11) se obține (10). ■

Corolarul 12 *Punem $M_{m+1} = \max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(m+1)}(x)|$; o margine superioară a erorii de interpolare $(R_m f)(x) = f(x) - (H_m f)(x)$ este dată prin*

$$|(R_m f)(x)| \le \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} |u_m(x)|.$$

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 19 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Deoarece H_m este proiector, rezultă că R_m este de asemenea proiector; în plus $\mathrm{Ker} R_m = \mathbb{P}_m$, deoarece $R_m f = f - L_m f = f - f = 0$, $\forall f \in \mathbb{P}_m$. Deci, putem aplica lui R_m teorema lui Peano.

Spațiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .
Home Page
Title Page
Page 19 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Deoarece H_m este proiector, rezultă că R_m este de asemenea proiector; în plus $\mathrm{Ker} R_m = \mathbb{P}_m$, deoarece $R_m f = f - L_m f = f - f = 0$, $\forall f \in \mathbb{P}_m$. Deci, putem aplica lui R_m teorema lui Peano.

Teorema 13

Deoarece H_m este proiector, rezultă că R_m este de asemenea proiector; în plus $\mathrm{Ker} R_m = \mathbb{P}_m$, deoarece $R_m f = f - L_m f = f - f = 0$, $\forall f \in \mathbb{P}_m$. Deci, putem aplica lui R_m teorema lui Peano.

Teorema 13 *Dacă* $f \in C^{m+1}[a,b]$, *atunci*

Deoarece H_m este proiector, rezultă că R_m este de asemenea proiector; în plus $\mathrm{Ker} R_m = \mathbb{P}_m$, deoarece $R_m f = f - L_m f = f - f = 0$, $\forall f \in \mathbb{P}_m$. Deci, putem aplica lui R_m teorema lui Peano.

Teorema 13 *Dacă $f \in C^{m+1}[a,b]$, atunci*

$$\left(R_m f\right)(x) = \int_a^b K_m(x;t) f^{(m+1)}(t) dt \tag{12}$$

Deoarece H_m este proiector, rezultă că R_m este de asemenea proiector; în plus $\mathrm{Ker} R_m = \mathbb{P}_m$, deoarece $R_m f = f - L_m f = f - f = 0$, $\forall f \in \mathbb{P}_m$. Deci, putem aplica lui R_m teorema lui Peano.

Teorema 13 *Dacă $f \in C^{m+1}[a,b]$, atunci*

$$(R_m f)(x) = \int_a^b K_m(x;t) f^{(m+1)}(t) dt \tag{12}$$

unde

$$K_m(x;t) = \frac{1}{m!}\left[(x-t)_+^m - \sum_{k=0}^{m} \ell_k(x)(x_k - t)_+^m\right]. \tag{13}$$

Deoarece H_m este proiector, rezultă că R_m este de asemenea proiector; în plus $\mathrm{Ker} R_m = \mathbb{P}_m$, deoarece $R_m f = f - L_m f = f - f = 0$, $\forall f \in \mathbb{P}_m$. Deci, putem aplica lui R_m teorema lui Peano.

Teorema 13 *Dacă $f \in C^{m+1}[a,b]$, atunci*

$$\left(R_m f\right)(x) = \int_a^b K_m(x;t) f^{(m+1)}(t)dt \tag{12}$$

unde

$$K_m(x;t) = \frac{1}{m!}\left[(x-t)_+^m - \sum_{k=0}^{m} \ell_k(x)(x_k - t)_+^m\right]. \tag{13}$$

Demonstrație. ■

Home Page
Title Page
Page 19 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Deoarece H_m este proiector, rezultă că R_m este de asemenea proiector; în plus $\operatorname{Ker} R_m = \mathbb{P}_m$, deoarece $R_m f = f - L_m f = f - f = 0$, $\forall f \in \mathbb{P}_m$. Deci, putem aplica lui R_m teorema lui Peano.

Teorema 13 *Dacă $f \in C^{m+1}[a,b]$, atunci*

$$(R_m f)(x) = \int_a^b K_m(x;t) f^{(m+1)}(t)dt \tag{12}$$

unde

$$K_m(x;t) = \frac{1}{m!}\left[(x-t)_+^m - \sum_{k=0}^{m} \ell_k(x)(x_k - t)_+^m\right]. \tag{13}$$

Demonstrație. Aplicând teorema lui Peano, avem ■

Deoarece H_m este proiector, rezultă că R_m este de asemenea proiector; în plus $\operatorname{Ker} R_m = \mathbb{P}_m$, deoarece $R_m f = f - L_m f = f - f = 0$, $\forall f \in \mathbb{P}_m$. Deci, putem aplica lui R_m teorema lui Peano.

Teorema 13 *Dacă $f \in C^{m+1}[a, b]$, atunci*

$$(R_m f)(x) = \int_a^b K_m(x;t) f^{(m+1)}(t) dt \tag{12}$$

unde

$$K_m(x;t) = \frac{1}{m!}\left[(x-t)_+^m - \sum_{k=0}^m \ell_k(x)(x_k - t)_+^m\right]. \tag{13}$$

Demonstrație. Aplicând teorema lui Peano, avem

$$(R_m f)(x) = \int_a^b K_m(x;t) f^{(m+1)}(t) dt$$

■

Deoarece H_m este proiector, rezultă că R_m este de asemenea proiector; în plus $\mathrm{Ker} R_m = \mathbb{P}_m$, deoarece $R_m f = f - L_m f = f - f = 0$, $\forall f \in \mathbb{P}_m$. Deci, putem aplica lui R_m teorema lui Peano.

Teorema 13 *Dacă $f \in C^{m+1}[a,b]$, atunci*

$$\left(R_m f\right)(x) = \int_a^b K_m(x;t) f^{(m+1)}(t) dt \tag{12}$$

unde

$$K_m(x;t) = \frac{1}{m!}\left[(x-t)_+^m - \sum_{k=0}^{m} \ell_k(x)(x_k - t)_+^m\right]. \tag{13}$$

Demonstrație. Aplicând teorema lui Peano, avem

$$\left(R_m f\right)(x) = \int_a^b K_m(x;t) f^{(m+1)}(t) dt$$

și ținând cont că

$$K_m(x;t) = R_m\left[\frac{(x-t)_+^m}{m!}\right] = \frac{(x-t)_+^m}{m!} - L_m\left[\frac{(x-t)_+^m}{m!}\right],$$

■

Home Page
Title Page
Page 19 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Deoarece H_m este proiector, rezultă că R_m este de asemenea proiector; în plus $\mathrm{Ker} R_m = \mathbb{P}_m$, deoarece $R_m f = f - L_m f = f - f = 0$, $\forall f \in \mathbb{P}_m$. Deci, putem aplica lui R_m teorema lui Peano.

Teorema 13 *Dacă* $f \in C^{m+1}[a,b]$, *atunci*

$$(R_m f)(x) = \int_a^b K_m(x;t) f^{(m+1)}(t)dt \tag{12}$$

unde

$$K_m(x;t) = \frac{1}{m!}\left[(x-t)_+^m - \sum_{k=0}^{m} \ell_k(x)(x_k - t)_+^m\right]. \tag{13}$$

Demonstrație. Aplicând teorema lui Peano, avem

$$(R_m f)(x) = \int_a^b K_m(x;t) f^{(m+1)}(t)dt$$

și ținând cont că

$$K_m(x;t) = R_m\left[\frac{(x-t)_+^m}{m!}\right] = \frac{(x-t)_+^m}{m!} - L_m\left[\frac{(x-t)_+^m}{m!}\right],$$

teorema rezultă imediat. ■

Deoarece H_m este proiector, rezultă că R_m este de asemenea proiector; în plus $\operatorname{Ker} R_m = \mathbb{P}_m$, deoarece $R_m f = f - L_m f = f - f = 0$, $\forall f \in \mathbb{P}_m$. Deci, putem aplica lui R_m teorema lui Peano.

Teorema 13 *Dacă $f \in C^{m+1}[a,b]$, atunci*

$$\left(R_m f\right)(x) = \int_a^b K_m(x;t) f^{(m+1)}(t)dt \tag{12}$$

unde

$$K_m(x;t) = \frac{1}{m!}\left[(x-t)_+^m - \sum_{k=0}^{m} \ell_k(x)(x_k - t)_+^m\right]. \tag{13}$$

Demonstrație. Aplicând teorema lui Peano, avem

$$\left(R_m f\right)(x) = \int_a^b K_m(x;t) f^{(m+1)}(t)dt$$

și ținând cont că

$$K_m(x;t) = R_m\left[\frac{(x-t)_+^m}{m!}\right] = \frac{(x-t)_+^m}{m!} - L_m\left[\frac{(x-t)_+^m}{m!}\right],$$

teorema rezultă imediat. ∎

Exemplul 14

Exemplul 14 *Pentru polinoamele de interpolare din exemplul 9 resturile corespunzătoare sunt*

Home Page
Title Page
Page 20 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Exemplul 14 *Pentru polinoamele de interpolare din exemplul 9 resturile corespunzătoare sunt*

$$(R_1 f)(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} f''(\xi)$$

Exemplul 14 *Pentru polinoamele de interpolare din exemplul 9 resturile corespunzătoare sunt*

$$(R_1 f)(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(\xi)$$

și respectiv

$$(R_2 f)(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{6} f'''(\xi).$$

Exemplul 14 *Pentru polinoamele de interpolare din exemplul 9 resturile corespunzātoare sunt*

$$(R_1 f)(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} f''(\xi)$$

şi respectiv

$$(R_2 f)(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6} f'''(\xi).$$

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. Calculul eficient al polinoamelor de interpolare

4.1. Metode de tip Aitken

4. Calculul eficient al polinoamelor de interpolare

4.1. Metode de tip Aitken

În multe situaţii gradul necesar pentru a atinge precizia dorită în interpolarea polinomială este necunoscut. El se poate determina din expresia restului, dar pentru aceasta este necesar să cunoaştem $\|f^{(m+1)}\|_\infty$. Vom nota cu $P_{m_1,m_2,\dots,m_k}$ polinomul de interpolare Lagrange având nodurile $x_{m_1},\dots,x_{m_k}$.

4. Calculul eficient al polinoamelor de interpolare

4.1. Metode de tip Aitken

În multe situații gradul necesar pentru a atinge precizia dorită în interpolarea polinomială este necunoscut. El se poate determina din expresia restului, dar pentru aceasta este necesar să cunoaștem $\|f^{(m+1)}\|_\infty$. Vom nota cu $P_{m_1,m_2,\dots,m_k}$ polinomul de interpolare Lagrange având nodurile $x_{m_1}, \dots, x_{m_k}$.

Propoziția 15 *Dacă f este definită în $x_0, \dots, x_k$, $x_j \neq x_i$, $0 \le i, j \le k$, atunci*

$$P_{0,1,\dots,k} = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\dots,j-1,j+1,\dots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,k}(x)}{x_i - x_j} =$$

$$= \frac{1}{x_i - x_j}\begin{vmatrix} x - x_j & P_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,k}(x) \\ x - x_i & P_{0,1,\dots,j-1,j+1,\dots,k}(x) \end{vmatrix} \qquad (14)$$

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 21 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. Calculul eficient al polinoamelor de interpolare

4.1. Metode de tip Aitken

În multe situații gradul necesar pentru a atinge precizia dorită în interpolarea polinomială este necunoscut. El se poate determina din expresia restului, dar pentru aceasta este necesar să cunoaștem $\|f^{(m+1)}\|_\infty$. Vom nota cu $P_{m_1,m_2,\dots,m_k}$ polinomul de interpolare Lagrange având nodurile $x_{m_1},\dots,x_{m_k}$.

Propoziția 15 *Dacă f este definită în $x_0,\dots,x_k$, $x_j \neq x_i$, $0 \leq i,j \leq k$, atunci*

$$P_{0,1,\dots,k} = \frac{(x-x_j)P_{0,1,\dots,j-1,j+1,\dots,k}(x) - (x-x_i)P_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,k}(x)}{x_i - x_j} =$$

$$= \frac{1}{x_i - x_j}\begin{vmatrix} x-x_j & P_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,k}(x) \\ x-x_i & P_{0,1,\dots,j-1,j+1,\dots,k}(x) \end{vmatrix} \qquad (14)$$

Demonstrație. ■

Demonstrație. $Q = P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}$, $\widehat{Q} = P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,k}$ ■

Demonstrație. $Q = P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}$, $\widehat{Q} = P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,k}$

$$P(x) = \frac{(x - x_j)\widehat{Q}(x) - (x - x_i)Q(x)}{x_i - x_j}$$

■

Demonstrație. $Q = P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}$, $\widehat{Q} = P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,k}$

$$P(x) = \frac{(x - x_j)\widehat{Q}(x) - (x - x_i)Q(x)}{x_i - x_j}$$

$$P(x_r) = \frac{(x_r - x_j)\widehat{Q}(x_r) - (x_r - x_i)Q(x_r)}{x_i - x_j} = \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} f(x_r) = f(x_r)$$

■

Demonstrație. $Q = P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}$, $\widehat{Q} = P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,k}$

$$P(x) = \frac{(x - x_j)\widehat{Q}(x) - (x - x_i)Q(x)}{x_i - x_j}$$

$$P(x_r) = \frac{(x_r - x_j)\widehat{Q}(x_r) - (x_r - x_i)Q(x_r)}{x_i - x_j} = \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} f(x_r) = f(x_r)$$

pentru $r \neq i \wedge r \neq j$, căci $Q(x_r) = \widehat{Q}(x_r) = f(x_r)$. Dar ■

Demonstrație. $Q = P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}$, $\widehat{Q} = P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,k}$

$$P(x) = \frac{(x - x_j)\widehat{Q}(x) - (x - x_i)Q(x)}{x_i - x_j}$$

$$P(x_r) = \frac{(x_r - x_j)\widehat{Q}(x_r) - (x_r - x_i)Q(x_r)}{x_i - x_j} = \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} f(x_r) = f(x_r)$$

pentru $r \neq i \wedge r \neq j$, căci $Q(x_r) = \widehat{Q}(x_r) = f(x_r)$. Dar

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\widehat{Q}(x_i) - (x_i - x_j)Q(x_i)}{x_i - x_j} = f(x_i)$$

■

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 22 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Demonstrație. $Q = P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}$, $\widehat{Q} = P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,k}$

$$P(x) = \frac{(x - x_j)\widehat{Q}(x) - (x - x_i)Q(x)}{x_i - x_j}$$

$$P(x_r) = \frac{(x_r - x_j)\widehat{Q}(x_r) - (x_r - x_i)Q(x_r)}{x_i - x_j} = \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} f(x_r) = f(x_r)$$

pentru $r \neq i \wedge r \neq j$, căci $Q(x_r) = \widehat{Q}(x_r) = f(x_r)$. Dar

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\widehat{Q}(x_i) - (x_i - x_j)Q(x_i)}{x_i - x_j} = f(x_i)$$

și

$$P(x_j) = \frac{(x_j - x_i)\widehat{Q}(x_j) - (x_j - x_i)Q(x_j)}{x_i - x_j} = f(x_j),$$

■

Demonstrație. $Q = P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}$, $\widehat{Q} = P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,k}$

$$P(x) = \frac{(x - x_j)\widehat{Q}(x) - (x - x_i)Q(x)}{x_i - x_j}$$

$$P(x_r) = \frac{(x_r - x_j)\widehat{Q}(x_r) - (x_r - x_i)Q(x_r)}{x_i - x_j} = \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} f(x_r) = f(x_r)$$

pentru $r \neq i \wedge r \neq j$, căci $Q(x_r) = \widehat{Q}(x_r) = f(x_r)$. Dar

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\widehat{Q}(x_i) - (x_i - x_j)Q(x_i)}{x_i - x_j} = f(x_i)$$

și

$$P(x_j) = \frac{(x_j - x_i)\widehat{Q}(x_j) - (x_j - x_i)Q(x_j)}{x_i - x_j} = f(x_j),$$

deci $P = P_{0,1,\ldots,k}$. ■

Home Page
Title Page
Page 22 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Demonstrație. $Q = P_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,k}$, $\widehat{Q} = P_{0,1,\dots,j-1,j+1,k}$

$$P(x) = \frac{(x - x_j)\widehat{Q}(x) - (x - x_i)Q(x)}{x_i - x_j}$$

$$P(x_r) = \frac{(x_r - x_j)\widehat{Q}(x_r) - (x_r - x_i)Q(x_r)}{x_i - x_j} = \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} f(x_r) = f(x_r)$$

pentru $r \neq i \wedge r \neq j$, căci $Q(x_r) = \widehat{Q}(x_r) = f(x_r)$. Dar

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\widehat{Q}(x_i) - (x_i - x_j)Q(x_i)}{x_i - x_j} = f(x_i)$$

și

$$P(x_j) = \frac{(x_j - x_i)\widehat{Q}(x_j) - (x_j - x_i)Q(x_j)}{x_i - x_j} = f(x_j),$$

deci $P = P_{0,1,\dots,k}$. ∎

Home Page
Title Page
Page 23 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

În acest mod am stabilit o relație de recurență între un polinom de interpolare Lagrange de gradul k și două polinoame de interpolare Lagrange de gradul $k-1$.

Spaţiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferenţe . . .

Home Page
Title Page
Page 23 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

În acest mod am stabilit o relaţie de recurenţă între un polinom de interpolare Lagrange de gradul k şi două polinoame de interpolare Lagrange de gradul $k-1$. Calculele pot fi aşezate în formă tabelară

În acest mod am stabilit o relație de recurență între un polinom de interpolare Lagrange de gradul k și două polinoame de interpolare Lagrange de gradul $k - 1$. Calculele pot fi așezate în formă tabelară

x_0	P_0				
x_1	P_1	$P_{0,1}$			
x_2	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$		
x_3	P_3	$P_{2,3}$	$P_{1,2,3}$	$P_{0,1,2,3}$	
x_4	P_4	$P_{3,4}$	$P_{2,3,4}$	$P_{1,2,3,4}$	$P_{0,1,2,3,4}$

În acest mod am stabilit o relație de recurență între un polinom de interpolare Lagrange de gradul k și două polinoame de interpolare Lagrange de gradul $k-1$. Calculele pot fi așezate în formă tabelară

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & P_0 & & & & \\
x_1 & P_1 & P_{0,1} & & & \\
x_2 & P_2 & P_{1,2} & P_{0,1,2} & & \\
x_3 & P_3 & P_{2,3} & P_{1,2,3} & P_{0,1,2,3} & \\
x_4 & P_4 & P_{3,4} & P_{2,3,4} & P_{1,2,3,4} & P_{0,1,2,3,4}
\end{array}$$

Să presupunem că în acest moment $P_{0,1,2,3,4}$ nu ne asigură precizia dorită. Se poate selecta un nou nod și adăuga o nouă linie tabelei

În acest mod am stabilit o relație de recurență între un polinom de interpolare Lagrange de gradul k și două polinoame de interpolare Lagrange de gradul $k-1$. Calculele pot fi așezate în formă tabelară

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & P_0 & & & & \\
x_1 & P_1 & P_{0,1} & & & \\
x_2 & P_2 & P_{1,2} & P_{0,1,2} & & \\
x_3 & P_3 & P_{2,3} & P_{1,2,3} & P_{0,1,2,3} & \\
x_4 & P_4 & P_{3,4} & P_{2,3,4} & P_{1,2,3,4} & P_{0,1,2,3,4}
\end{array}
$$

Să presupunem că în acest moment $P_{0,1,2,3,4}$ nu ne asigură precizia dorită. Se poate selecta un nou nod și adăuga o nouă linie tabelei

$$
\begin{array}{lllllll}
x_5 & P_5 & P_{4,5} & P_{3,4,5} & P_{2,3,4,5} & P_{1,2,3,4,5} & P_{0,1,2,3,4,5}
\end{array}
$$

În acest mod am stabilit o relație de recurență între un polinom de interpolare Lagrange de gradul k și două polinoame de interpolare Lagrange de gradul $k-1$. Calculele pot fi așezate în formă tabelară

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & P_0 & & & & \\
x_1 & P_1 & P_{0,1} & & & \\
x_2 & P_2 & P_{1,2} & P_{0,1,2} & & \\
x_3 & P_3 & P_{2,3} & P_{1,2,3} & P_{0,1,2,3} & \\
x_4 & P_4 & P_{3,4} & P_{2,3,4} & P_{1,2,3,4} & P_{0,1,2,3,4}
\end{array}$$

Să presupunem că în acest moment $P_{0,1,2,3,4}$ nu ne asigură precizia dorită. Se poate selecta un nou nod și adăuga o nouă linie tabelei

$$\begin{array}{lllllll}
x_5 & P_5 & P_{4,5} & P_{3,4,5} & P_{2,3,4,5} & P_{1,2,3,4,5} & P_{0,1,2,3,4,5}
\end{array}$$

iar elementele vecine de pe linie, coloană sau diagonală se pot compara pentru a vedea dacă s-a obținut precizia dorită.

Spațiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .
Home Page
Title Page
Page 23 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

În acest mod am stabilit o relație de recurență între un polinom de interpolare Lagrange de gradul k și două polinoame de interpolare Lagrange de gradul $k-1$. Calculele pot fi așezate în formă tabelară

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & P_0 & & & & \\
x_1 & P_1 & P_{0,1} & & & \\
x_2 & P_2 & P_{1,2} & P_{0,1,2} & & \\
x_3 & P_3 & P_{2,3} & P_{1,2,3} & P_{0,1,2,3} & \\
x_4 & P_4 & P_{3,4} & P_{2,3,4} & P_{1,2,3,4} & P_{0,1,2,3,4}
\end{array}$$

Să presupunem că în acest moment $P_{0,1,2,3,4}$ nu ne asigură precizia dorită. Se poate selecta un nou nod și adăuga o nouă linie tabelei

$$\begin{array}{lllllll}
x_5 & P_5 & P_{4,5} & P_{3,4,5} & P_{2,3,4,5} & P_{1,2,3,4,5} & P_{0,1,2,3,4,5}
\end{array}$$

iar elementele vecine de pe linie, coloană sau diagonală se pot compara pentru a vedea dacă s-a obținut precizia dorită.

Metoda de mai sus se numește *metoda lui Neville* .

În acest mod am stabilit o relaţie de recurenţă între un polinom de interpolare Lagrange de gradul k şi două polinoame de interpolare Lagrange de gradul $k-1$. Calculele pot fi aşezate în formă tabelară

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & P_0 & & & & \\
x_1 & P_1 & P_{0,1} & & & \\
x_2 & P_2 & P_{1,2} & P_{0,1,2} & & \\
x_3 & P_3 & P_{2,3} & P_{1,2,3} & P_{0,1,2,3} & \\
x_4 & P_4 & P_{3,4} & P_{2,3,4} & P_{1,2,3,4} & P_{0,1,2,3,4}
\end{array}$$

Să presupunem că în acest moment $P_{0,1,2,3,4}$ nu ne asigură precizia dorită. Se poate selecta un nou nod şi adăuga o nouă linie tabelei

$$x_5 \quad P_5 \quad P_{4,5} \quad P_{3,4,5} \quad P_{2,3,4,5} \quad P_{1,2,3,4,5} \quad P_{0,1,2,3,4,5}$$

iar elementele vecine de pe linie, coloană sau diagonală se pot compara pentru a vedea dacă s-a obţinut precizia dorită.

Metoda de mai sus se numeşte *metoda lui Neville* .

Notaţiile pot fi simplificate

Notațiile pot fi simplificate

$$
\begin{aligned}
Q_{i,j} &:= P_{i-j,i-j+1,\dots,i-1,i},\\
Q_{i,j-1} &:= P_{i-j+1,\dots,i-1,i},\\
Q_{i-1,j-1} &:= P_{i-j,i-j+1,\dots,i-1}.
\end{aligned}
$$

Home Page
Title Page
Page 24 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Notaţiile pot fi simplificate

$$
\begin{aligned}
Q_{i,j} &:= P_{i-j,i-j+1,\ldots,i-1,i},\\
Q_{i,j-1} &:= P_{i-j+1,\ldots,i-1,i},\\
Q_{i-1,j-1} &:= P_{i-j,i-j+1,\ldots,i-1}.
\end{aligned}
$$

Din (14) rezultă, pentru $j = 1, 2, 3, \ldots$, $i = j + 1, j + 2, \ldots$,

$$
Q_{i,j} = \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}.
$$

Home Page
Title Page
Page 24 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Notațiile pot fi simplificate

$$
\begin{aligned}
Q_{i,j} &:= P_{i-j,i-j+1,\ldots,i-1,i},\\
Q_{i,j-1} &:= P_{i-j+1,\ldots,i-1,i},\\
Q_{i-1,j-1} &:= P_{i-j,i-j+1,\ldots,i-1}.
\end{aligned}
$$

Din (14) rezultă, pentru $j = 1, 2, 3, \ldots,\ i = j + 1, j + 2, \ldots,$

$$Q_{i,j} = \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}.$$

În plus, $Q_{i,0} = f(x_i)$. Obținem tabelul

$$
\begin{array}{lllll}
x_0 & Q_{0,0} & & & \\
x_1 & Q_{1,0} & Q_{1,1} & & \\
x_2 & Q_{2,0} & Q_{2,1} & Q_{2,2} & \\
x_3 & Q_{3,0} & Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3}
\end{array}
$$

Notațiile pot fi simplificate

$$\begin{aligned} Q_{i,j} &:= P_{i-j,i-j+1,\ldots,i-1,i}, \\ Q_{i,j-1} &:= P_{i-j+1,\ldots,i-1,i}, \\ Q_{i-1,j-1} &:= P_{i-j,i-j+1,\ldots,i-1}. \end{aligned}$$

Din (14) rezultă, pentru $j = 1, 2, 3, \ldots,\ i = j+1, j+2, \ldots,$

$$Q_{i,j} = \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}.$$

În plus, $Q_{i,0} = f(x_i)$. Obținem tabelul

$$\begin{array}{lllll} x_0 & Q_{0,0} & & & \\ x_1 & Q_{1,0} & Q_{1,1} & & \\ x_2 & Q_{2,0} & Q_{2,1} & Q_{2,2} & \\ x_3 & Q_{3,0} & Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} \end{array}$$

Spațiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .
Home Page
Title Page
Page 24 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Home Page
Title Page

Go Back
Full Screen
Close
Quit

Spaţiul $H^n[a, b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferenţe . . .
Home Page
Title Page
Page 25 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Dacă procedeul de interpolare converge, atunci şirul $Q_{i,i}$ converge şi el şi s-ar putea lua drept criteriu de oprire

Dacă procedeul de interpolare converge, atunci şirul $Q_{i,i}$ converge şi el şi s-ar putea lua drept criteriu de oprire

$$|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon.$$

Dacă procedeul de interpolare converge, atunci şirul $Q_{i,i}$ converge şi el şi s-ar putea lua drept criteriu de oprire

$$|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon.$$

Pentru a rapidiza algoritmul nodurile se vor ordona crescător după valorile $|x_i - x|$.

Dacă procedeul de interpolare converge, atunci șirul $Q_{i,i}$ converge și el și s-ar putea lua drept criteriu de oprire

$$|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon.$$

Pentru a rapidiza algoritmul nodurile se vor ordona crescător după valorile $|x_i - x|$.

Metoda lui Aitken este similară cu metoda lui Neville. Ea construiește tabelul

Dacă procedeul de interpolare converge, atunci şirul $Q_{i,i}$ converge şi el şi s-ar putea lua drept criteriu de oprire

$$|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon.$$

Pentru a rapidiza algoritmul nodurile se vor ordona crescător după valorile $|x_i - x|$.

Metoda lui Aitken este similară cu metoda lui Neville. Ea construieşte tabelul

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & P_0 & & & & \\
x_1 & P_1 & P_{0,1} & & & \\
x_2 & P_2 & P_{0,2} & P_{0,1,2} & & \\
x_3 & P_3 & P_{0,3} & P_{0,1,3} & P_{0,1,2,3} & \\
x_4 & P_4 & P_{0,4} & P_{0,1,4} & P_{0,1,2,4} & P_{0,1,2,3,4}
\end{array}$$

Dacă procedeul de interpolare converge, atunci șirul $Q_{i,i}$ converge și el și s-ar putea lua drept criteriu de oprire

$$|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon.$$

Pentru a rapidiza algoritmul nodurile se vor ordona crescător după valorile $|x_i - x|$.

Metoda lui Aitken este similară cu metoda lui Neville. Ea construiește tabelul

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & P_0 & & & & \\
x_1 & P_1 & P_{0,1} & & & \\
x_2 & P_2 & P_{0,2} & P_{0,1,2} & & \\
x_3 & P_3 & P_{0,3} & P_{0,1,3} & P_{0,1,2,3} & \\
x_4 & P_4 & P_{0,4} & P_{0,1,4} & P_{0,1,2,4} & P_{0,1,2,3,4}
\end{array}$$

Pentru a calcula o nouă valoare se utilizează valoarea din vârful coloanei precedente și valoarea din aceeași linie, coloana precedentă.

Spațiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .

Home Page

Title Page

Page 25 of 45

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Dacă procedeul de interpolare converge, atunci șirul $Q_{i,i}$ converge și el și s-ar putea lua drept criteriu de oprire

$$|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon.$$

Pentru a rapidiza algoritmul nodurile se vor ordona crescător după valorile $|x_i - x|$.

Metoda lui Aitken este similară cu metoda lui Neville. Ea construiește tabelul

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & P_0 & & & & \\
x_1 & P_1 & P_{0,1} & & & \\
x_2 & P_2 & P_{0,2} & P_{0,1,2} & & \\
x_3 & P_3 & P_{0,3} & P_{0,1,3} & P_{0,1,2,3} & \\
x_4 & P_4 & P_{0,4} & P_{0,1,4} & P_{0,1,2,4} & P_{0,1,2,3,4}
\end{array}$$

Pentru a calcula o nouă valoare se utilizează valoarea din vârful coloanei precedente și valoarea din aceeași linie, coloana precedentă.

4.2. Metoda diferențelor divizate

4.2. Metoda diferenţelor divizate

4.2. Metoda diferenţelor divizate

Vom nota cu $L_k f$ PIL cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_k$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n$. Vom construi L_m prin recurenţă. Avem

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 26 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4.2. Metoda diferențelor divizate

Vom nota cu $L_k f$ PIL cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_k$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n$. Vom construi L_m prin recurență. Avem

$$(L_0 f)(x) = f(x_0)$$

4.2. Metoda diferențelor divizate

Vom nota cu $L_k f$ PIL cu nodurile $x_0, x_1, \dots, x_k$ pentru $k = 0, 1, \dots, n$. Vom construi L_m prin recurență. Avem

$$(L_0 f)(x) = f(x_0)$$

pentru $k \geq 1$, polinomul $L_k - L_{k-1}$ este de grad k, se anulează în punctele $x_0, x_1, \dots, x_k$ și deci este de forma:

4.2. Metoda diferențelor divizate

Vom nota cu $L_k f$ PIL cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_k$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n$. Vom construi L_m prin recurență. Avem

$$(L_0 f)(x) = f(x_0)$$

pentru $k \geq 1$, polinomul $L_k - L_{k-1}$ este de grad k, se anulează în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_k$ și deci este de forma:

$$(L_k f)(x) = (L_{k-1} f)(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}), \tag{15}$$

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 26 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4.2. Metoda diferențelor divizate

Vom nota cu $L_k f$ PIL cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_k$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n$. Vom construi L_m prin recurență. Avem

$$(L_0 f)(x) = f(x_0)$$

pentru $k \geq 1$, polinomul $L_k - L_{k-1}$ este de grad k, se anulează în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_k$ și deci este de forma:

$$(L_k f)(x) = (L_{k-1} f)(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}), \tag{15}$$

unde $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ desemnează coeficientul lui x^k din $(L_k f)(x)$. Se deduce expresia polinomului de interpolare $L_m f$ cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$

4.2. Metoda diferențelor divizate

Vom nota cu $L_k f$ PIL cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_k$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n$. Vom construi L_m prin recurență. Avem

$$(L_0 f)(x) = f(x_0)$$

pentru $k \geq 1$, polinomul $L_k - L_{k-1}$ este de grad k, se anulează în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_k$ și deci este de forma:

$$(L_k f)(x) = (L_{k-1} f)(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}), \quad (15)$$

unde $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ desemnează coeficientul lui x^k din $(L_k f)(x)$. Se deduce expresia polinomului de interpolare $L_m f$ cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$(L_m f)(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}), \quad (16)$$

Spațiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .

Home Page
Title Page
Page 26 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4.2. Metoda diferențelor divizate

Vom nota cu $L_k f$ PIL cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_k$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n$. Vom construi L_m prin recurență. Avem

$$(L_0 f)(x) = f(x_0)$$

pentru $k \geq 1$, polinomul $L_k - L_{k-1}$ este de grad k, se anulează în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_k$ și deci este de forma:

$$(L_k f)(x) = (L_{k-1} f)(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}), \tag{15}$$

unde $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ desemnează coeficientul lui x^k din $(L_k f)(x)$. Se deduce expresia polinomului de interpolare $L_m f$ cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$(L_m f)(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}), \tag{16}$$

numită *forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange*.

Home Page
Title Page
Page 26 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4.2. Metoda diferenţelor divizate

Vom nota cu $L_k f$ PIL cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_k$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n$. Vom construi L_m prin recurenţă. Avem

$$(L_0 f)(x) = f(x_0)$$

pentru $k \geq 1$, polinomul $L_k - L_{k-1}$ este de grad k, se anulează în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_k$ şi deci este de forma:

$$(L_k f)(x) = (L_{k-1} f)(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}), \tag{15}$$

unde $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ desemnează coeficientul lui x^k din $(L_k f)(x)$. Se deduce expresia polinomului de interpolare $L_m f$ cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$(L_m f)(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}), \tag{16}$$

numită *forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange*.

Formula (16) reduce calculul prin recurenţă al lui $L_m f$ la cel al coeficienţilor $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$, $k = \overline{0, m}$.

Home Page
Title Page
Page 26 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4.2. Metoda diferențelor divizate

Vom nota cu $L_k f$ PIL cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_k$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n$. Vom construi L_m prin recurență. Avem

$$(L_0 f)(x) = f(x_0)$$

pentru $k \geq 1$, polinomul $L_k - L_{k-1}$ este de grad k, se anulează în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_k$ și deci este de forma:

$$(L_k f)(x) = (L_{k-1} f)(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}), \tag{15}$$

unde $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ desemnează coeficientul lui x^k din $(L_k f)(x)$. Se deduce expresia polinomului de interpolare $L_m f$ cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$(L_m f)(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}), \tag{16}$$

numită *forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange*.

Formula (16) reduce calculul prin recurență al lui $L_m f$ la cel al coeficienților $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$, $k = \overline{0, m}$.

Lema 16

Home Page
Title Page
Page 27 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Lema 16

$$\forall\ k \geq 1 \quad f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{17}$$

Lema 16

$$\forall\ k \geq 1 \quad f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{17}$$

și

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Lema 16

$$\forall\ k \geq 1 \quad f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{17}$$

și

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Demonstrație. ■

Lema 16

$$\forall\ k \geq 1 \quad f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{17}$$

și

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Demonstrație. Notăm, pentru $k \geq 1$ cu $L_{k-1}^{*}f$ polinomul de interpolare pentru f de grad $k-1$ și cu nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_k$; coeficientul lui x^{k-1} este $f[x_1, x_2, \ldots, x_k]$. Polinomul q_k de grad k definit prin ■

Lema 16

$$\forall\ k \geq 1 \quad f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{17}$$

și

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Demonstrație. Notăm, pentru $k \geq 1$ cu $L^*_{k-1}f$ polinomul de interpolare pentru f de grad $k-1$ și cu nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_k$; coeficientul lui x^{k-1} este $f[x_1, x_2, \ldots, x_k]$. Polinomul q_k de grad k definit prin

$$q_k(x) = \frac{(x - x_0)(L^*_{k-1}f)(x) - (x - x_k)(L_{k-1}f)(x)}{x_k - x_0}$$

■

Lema 16

$$\forall\ k \geq 1 \quad f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{17}$$

și

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Demonstrație. Notăm, pentru $k \geq 1$ cu $L^*_{k-1}f$ polinomul de interpolare pentru f de grad $k-1$ și cu nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_k$; coeficientul lui x^{k-1} este $f[x_1, x_2, \ldots, x_k]$. Polinomul q_k de grad k definit prin

$$q_k(x) = \frac{(x - x_0)(L^*_{k-1}f)(x) - (x - x_k)(L_{k-1}f)(x)}{x_k - x_0}$$

coincide cu f în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_k$ și deci $q_k(x) \equiv (L_k f)(x)$. Formula (17) se obține identificând coeficientul lui x^k din cei doi membri. ∎

Lema 16

$$\forall\ k \geq 1 \quad f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{17}$$

și

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Demonstrație. Notăm, pentru $k \geq 1$ cu $L^*_{k-1}f$ polinomul de interpolare pentru f de grad $k-1$ și cu nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_k$; coeficientul lui x^{k-1} este $f[x_1, x_2, \ldots, x_k]$. Polinomul q_k de grad k definit prin

$$q_k(x) = \frac{(x - x_0)(L^*_{k-1}f)(x) - (x - x_k)(L_{k-1}f)(x)}{x_k - x_0}$$

coincide cu f în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_k$ și deci $q_k(x) \equiv (L_k f)(x)$. Formula (17) se obține identificând coeficientul lui x^k din cei doi membri. ■

Definiția 17 *Cantitatea* $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ *se numește* ***diferență divizată*** *de ordinul* k *a lui* f *în punctele* $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Home Page

Title Page

Page 28 of 45

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Definiția 17 *Cantitatea* $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ *se numește* diferență divizată *de ordinul* k *a lui* f *în punctele* $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Altă notație utilizată este $[x_0, \ldots, x_k; f]$.

Definiția 17 *Cantitatea* $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ *se numește* diferență divizată *de ordinul* k *a lui* f *în punctele* $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Altă notație utilizată este $[x_0, \ldots, x_k; f]$.

Home Page
Title Page
Page 28 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Definiţia 17 *Cantitatea* $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ *se numeşte* diferenţă divizată *de ordinul* k *a lui* f *în punctele* $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Altă notaţie utilizată este $[x_0, \ldots, x_k; f]$.

Din definiţie rezultă că $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ este independentă de ordinea punctelor x_i şi ea poate fi calculată în funcţie de $f(x_0), \ldots, f(x_m)$.

Definiția 17 *Cantitatea $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ se numește* diferență divizată *de ordinul k a lui f în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_k$.*

Altă notație utilizată este $[x_0, \ldots, x_k; f]$.

Din definiție rezultă că $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ este independentă de ordinea punctelor x_i și ea poate fi calculată în funcție de $f(x_0), \ldots, f(x_m)$. Într-adevăr PIL de grad $\leq m$ relativ la punctele $x_0, \ldots, x_m$ se scrie

Definiţia 17 *Cantitatea $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ se numeşte* diferenţă divizată *de ordinul k a lui f în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_k$.*

Altă notaţie utilizată este $[x_0, \ldots, x_k; f]$.

Din definiţie rezultă că $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ este independentă de ordinea punctelor x_i şi ea poate fi calculată în funcţie de $f(x_0), \ldots, f(x_m)$. Într-adevăr PIL de grad $\leq m$ relativ la punctele $x_0, \ldots, x_m$ se scrie

$$(L_m f)(x) = \sum_{i=0}^{m} \ell_i(x) f(x_i)$$

Definiția 17 *Cantitatea $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ se numește* diferență divizată *de ordinul k a lui f în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_k$.*

Altă notație utilizată este $[x_0, \ldots, x_k; f]$.

Din definiție rezultă că $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ este independentă de ordinea punctelor x_i și ea poate fi calculată în funcție de $f(x_0), \ldots, f(x_m)$. Într-adevăr PIL de grad $\leq m$ relativ la punctele $x_0, \ldots, x_m$ se scrie

$$(L_m f)(x) = \sum_{i=0}^{m} \ell_i(x) f(x_i)$$

și coeficientul lui x^m este

Spațiul $H^n[a, b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .
Home Page
Title Page
Page 28 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Definiția 17 *Cantitatea $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ se numește* diferență divizată *de ordinul k a lui f în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_k$.*

Altă notație utilizată este $[x_0, \ldots, x_k; f]$.

Din definiție rezultă că $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ este independentă de ordinea punctelor x_i și ea poate fi calculată în funcție de $f(x_0), \ldots, f(x_m)$. Într-adevăr PIL de grad $\leq m$ relativ la punctele $x_0, \ldots, x_m$ se scrie

$$(L_m f)(x) = \sum_{i=0}^{m} \ell_i(x) f(x_i)$$

și coeficientul lui x^m este

$$f[x_0, \ldots, x_m] = \sum_{i=0}^{m} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} (x_i - x_j)}. \tag{18}$$

Spațiul $H^n[a, b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .
Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 28 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Definiția 17 *Cantitatea $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ se numește* diferență divizată *de ordinul k a lui f în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_k$.*

Altă notație utilizată este $[x_0, \ldots, x_k; f]$.

Din definiție rezultă că $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ este independentă de ordinea punctelor x_i și ea poate fi calculată în funcție de $f(x_0), \ldots, f(x_m)$. Într-adevăr PIL de grad $\leq m$ relativ la punctele $x_0, \ldots, x_m$ se scrie

$$(L_m f)(x) = \sum_{i=0}^{m} \ell_i(x) f(x_i)$$

și coeficientul lui x^m este

$$f[x_0, \ldots, x_m] = \sum_{i=0}^{m} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} (x_i - x_j)}. \tag{18}$$

Diferenţele divizate se pot obţine prin algoritmul tabelar următor, bazat pe formula (17), care este mai flexibil şi mai puţin costisitor decât aplicarea formulei (18)

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 29 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Diferențele divizate se pot obține prin algoritmul tabelar următor, bazat pe formula (17), care este mai flexibil și mai puțin costisitor decât aplicarea formulei (18)

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_0 & f[x_0] & \rightarrow & f[x_0,x_1] & \rightarrow & f[x_0,x_1,x_2] & \rightarrow & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
x_1 & f[x_1] & \rightarrow & f[x_1,x_2] & \rightarrow & f[x_1,x_2,x_3] & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_2 & f[x_2] & \rightarrow & f[x_2,x_3] & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & \\
x_3 & f[x_3] & & & & & & \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

Spațiul $H^n[a,b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .
Home Page
Title Page
Page 29 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Diferențele divizate se pot obține prin algoritmul tabelar următor, bazat pe formula (17), care este mai flexibil și mai puțin costisitor decât aplicarea formulei (18)

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_0 & f[x_0] & \rightarrow & f[x_0,x_1] & \rightarrow & f[x_0,x_1,x_2] & \rightarrow & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
x_1 & f[x_1] & \rightarrow & f[x_1,x_2] & \rightarrow & f[x_1,x_2,x_3] & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_2 & f[x_2] & \rightarrow & f[x_2,x_3] & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & \\
x_3 & f[x_3] & & & & & & \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

Prima coloană este formată din valorile funcției f, a doua din diferențele divizate de ordinul I, etc.; se trece la coloana următoare folosind formula (17).

Spațiul $H^n[a, b]$
Interpolare . . .
Expresia erorii . . .
Calculul eficient . . .
Interpolare Hermite
Diferențe . . .
Home Page
Title Page
Page 29 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Diferențele divizate se pot obține prin algoritmul tabelar următor, bazat pe formula (17), care este mai flexibil și mai puțin costisitor decât aplicarea formulei (18)

$$
\begin{array}{llllllll}
x_0 & f[x_0] & \rightarrow & f[x_0, x_1] & \rightarrow & f[x_0, x_1, x_2] & \rightarrow & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
x_1 & f[x_1] & \rightarrow & f[x_1, x_2] & \rightarrow & f[x_1, x_2, x_3] & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_2 & f[x_2] & \rightarrow & f[x_2, x_3] & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & \\
x_3 & f[x_3] & & & & & & \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

Prima coloană este formată din valorile funcției f, a doua din diferențele divizate de ordinul I, etc.; se trece la coloana următoare folosind formula (17).

Exemplul 18 *Să calculăm forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange pentru funcția $f(x) = x^3$ și nodurile $x_k = k$, $k = 0, \dots, 4$. Tabela diferențelor divizate este:*

x	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_0, \dots, x_3]$
0	0	1	3	1
1	1	7	6	0
2	8	19	0	0
3	27	0	0	0

La calculul polinomului de interpolare se folosesc diferențele divizate din prima linie a tabelei.

$$\begin{aligned}(L_3 f)(x) &= f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ &= x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2);\end{aligned}$$

Exemplul 18 *Să calculăm forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange pentru funcția $f(x) = x^3$ și nodurile $x_k = k$, $k = 0, \dots, 4$. Tabela diferențelor divizate este:*

x	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_0, \dots, x_3]$
0	0	1	3	1
1	1	7	6	0
2	8	19	0	0
3	27	0	0	0

La calculul polinomului de interpolare se folosesc diferențele divizate din prima linie a tabelei.

$$\begin{aligned}(L_3 f)(x) &= f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ &= x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2);\end{aligned}$$

Home Page
Title Page
Page 31 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Observaţia 19 *Eroarea de interpolare este dată de*

$$f(x) - (L_m f)(x) = u_m(x) f[x_0, x_1, \ldots, x_m, x]. \tag{19}$$

Observația 19 *Eroarea de interpolare este dată de*

$$f(x) - (L_m f)(x) = u_m(x) f[x_0, x_1, \ldots, x_m, x]. \tag{19}$$

Într-adevăr, este suficient să observăm că

$$(L_m f)(t) + u_m(t) f[x_0, \ldots, x_m; x]$$

este conform lui (16) polinomul de interpolare (în t) al lui f în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_m, x$. Se deduce din teorema referitoare la restul formulei de interpolare Lagrange (10) că există $\xi \in (a, b)$ astfel încât

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] = \frac{1}{m!} f^{(m)}(\xi) \tag{20}$$

(formula de medie pentru diferențe divizate).

Observaţia 19 *Eroarea de interpolare este dată de*

$$f(x) - (L_m f)(x) = u_m(x) f[x_0, x_1, \dots, x_m, x]. \tag{19}$$

Într-adevăr, este suficient să observăm că

$$(L_m f)(t) + u_m(t) f[x_0, \dots, x_m; x]$$

este conform lui (16) polinomul de interpolare (în t) al lui f în punctele $x_0, x_1, \dots, x_m, x$. Se deduce din teorema referitoare la restul formulei de interpolare Lagrange (10) că există $\xi \in (a, b)$ astfel încât

$$f[x_0, x_1, \dots, x_m] = \frac{1}{m!} f^{(m)}(\xi) \tag{20}$$

(formula de medie pentru diferenţe divizate).

Figura 4: Sir Isaac Newton (1643 - 1727)

Diferenţa divizată se poate scrie sub forma unui cât a doi determinanţi.

Diferenţa divizată se poate scrie sub forma unui cât a doi determinanţi.

Teorema 20

Diferenţa divizată se poate scrie sub forma unui cât a doi determinanţi.

Teorema 20 *Are loc*

Diferenţa divizată se poate scrie sub forma unui cât a doi determinanţi.

Teorema 20 *Are loc*

$$f[x_0,\dots,x_m] = \frac{(Wf)(x_0,\dots,x_m)}{V(x_0,\dots,x_m)} \tag{21}$$

Home Page
Title Page
Page 34 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Diferența divizată se poate scrie sub forma unui cât a doi determinanți.

Teorema 20 *Are loc*

$$f[x_0,\ldots,x_m] = \frac{(Wf)(x_0,\ldots,x_m)}{V(x_0,\ldots,x_m)} \tag{21}$$

unde

$$(Wf)(x_0,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{m-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{m-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \ldots & x_m^{m-1} & f(x_m) \end{vmatrix}, \tag{22}$$

Diferența divizată se poate scrie sub forma unui cât a doi determinanți.

Teorema 20 *Are loc*

$$f[x_0,\dots,x_m]=\frac{(Wf)(x_0,\dots,x_m)}{V(x_0,\dots,x_m)} \tag{21}$$

unde

$$(Wf)(x_0,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{m-1} & f(x_0)\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{m-1} & f(x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{m-1} & f(x_m)\end{vmatrix}, \tag{22}$$

iar $V(x_0,\dots,x_m)$ este determinantul Vandermonde.

Diferenţa divizată se poate scrie sub forma unui cât a doi determinanţi.

Teorema 20 *Are loc*

$$f[x_0, \ldots, x_m] = \frac{(Wf)(x_0, \ldots, x_m)}{V(x_0, \ldots, x_m)} \tag{21}$$

unde

$$(Wf)(x_0, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{m-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{m-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \ldots & x_m^{m-1} & f(x_m) \end{vmatrix}, \tag{22}$$

iar $V(x_0, \ldots, x_m)$ este determinantul Vandermonde.

Demonstraţie. ■

Demonstraţie. Se dezvoltă $(Wf)(x_0, \ldots, x_m)$ după elementele ultimei coloane; fiecare complement algebric este un determinant Vandermonde. Se obţine $\blacksquare$

Demonstraţie. Se dezvoltă $(Wf)(x_0,\dots,x_m)$ după elementele ultimei coloane; fiecare complement algebric este un determinant Vandermonde. Se obţine

$$f[x_0,\dots,x_m] = \frac{1}{V(x_0,\dots,x_m)} \sum_{i=0}^{m} V(x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_m) f(x_i) =$$

■

Demonstrație. Se dezvoltă $(Wf)(x_0,\ldots,x_m)$ după elementele ultimei coloane; fiecare complement algebric este un determinant Vandermonde. Se obține

$$f[x_0,\ldots,x_m]=\frac{1}{V(x_0,\ldots,x_m)}\sum_{i=0}^{m}V(x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_m)f(x_i)=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_n-x_i)},$$

■

Demonstrație. Se dezvoltă $(Wf)(x_0, \ldots, x_m)$ după elementele ultimei coloane; fiecare complement algebric este un determinant Vandermonde. Se obține

$$f[x_0, \ldots, x_m] = \frac{1}{V(x_0, \ldots, x_m)} \sum_{i=0}^{m} V(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) f(x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_n - x_i)},$$

din care după schimbarea semnelor ultimilor $m-i$ termeni rezultă (18). ∎

Demonstraţie. Se dezvoltă $(Wf)(x_0, \ldots, x_m)$ după elementele ultimei coloane; fiecare complement algebric este un determinant Vandermonde. Se obţine

$$f[x_0, \ldots, x_m] = \frac{1}{V(x_0, \ldots, x_m)} \sum_{i=0}^{m} V(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) f(x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_n - x_i)},$$

din care după schimbarea semnelor ultimilor $m-i$ termeni rezultă (18). ■

5. Interpolare Hermite

În loc să facem să coincidă f şi polinomul de interpolare în punctele x_i din $[a, b]$, am putea face ca f şi polinomul de interpolare să coincidă împreună cu derivatele lor până la ordinul r_i în punctele x_i. Se obţine:

Home Page
Title Page
Page 36 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

5. Interpolare Hermite

În loc să facem să coincidă f și polinomul de interpolare în punctele x_i din $[a, b]$, am putea face ca f și polinomul de interpolare să coincidă împreună cu derivatele lor până la ordinul r_i în punctele x_i. Se obține:

Teorema 21 *Fiind date $(m+1)$ puncte distincte $x_0, x_1, \ldots, x_m$ din $[a, b]$ și $(m+1)$ numere naturale $r_0, r_1, \ldots, r_m$, punem $n = m + r_0 + r_1 + \cdots + r_m$. Atunci, fiind dată o funcție f, definită pe $[a, b]$ și admițând derivate de ordin r_i în punctele x_i există un singur polinom și numai unul $H_n f$ de grad $\leq n$ astfel încât*

$$\forall\ (i, l),\ 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq l \leq r_i \qquad (H_n f)^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i), \tag{23}$$

unde $f^{(l)}(x_i)$ este derivata de ordinul l a lui f în x_i.

Home Page
Title Page
Page 36 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

5. Interpolare Hermite

În loc să facem să coincidă f și polinomul de interpolare în punctele x_i din $[a,b]$, am putea face ca f și polinomul de interpolare să coincidă împreună cu derivatele lor până la ordinul r_i în punctele x_i. Se obține:

Teorema 21 *Fiind date $(m+1)$ puncte distincte $x_0, x_1, \ldots, x_m$ din $[a,b]$ și $(m+1)$ numere naturale $r_0, r_1, \ldots, r_m$, punem $n = m + r_0 + r_1 + \cdots + r_m$. Atunci, fiind dată o funcție f, definită pe $[a,b]$ și admițând derivate de ordin r_i în punctele x_i există un singur polinom și numai unul $H_n f$ de grad $\leq n$ astfel încât*

$$\forall\ (i,l),\ 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq l \leq r_i \qquad (H_n f)^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i), \tag{23}$$

unde $f^{(l)}(x_i)$ este derivata de ordinul l a lui f în x_i.

Definiția 22 *Polinomul definit în acest mod se numește* polinom de interpolare al lui Hermite *al funcției f relativ la punctele $x_0, x_1, \ldots, x_m$ și la întregii $r_0, r_1, \ldots, r_m$.*

Home Page
Title Page
Page 36 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

5. Interpolare Hermite

În loc să facem să coincidă f şi polinomul de interpolare în punctele x_i din $[a,b]$, am putea face ca f şi polinomul de interpolare să coincidă împreună cu derivatele lor până la ordinul r_i în punctele x_i. Se obţine:

Teorema 21 *Fiind date* $(m+1)$ *puncte distincte* $x_0, x_1, \ldots, x_m$ *din* $[a,b]$ *şi* $(m+1)$ *numere naturale* $r_0, r_1, \ldots, r_m$, *punem* $n = m + r_0 + r_1 + \cdots + r_m$. *Atunci, fiind dată o funcţie* f, *definită pe* $[a,b]$ *şi admiţând derivate de ordin* r_i *în punctele* x_i *există un singur polinom şi numai unul* $H_n f$ *de grad* $\le n$ *astfel încât*

$$\forall\ (i,l),\ 0 \le i \le m,\ 0 \le l \le r_i \qquad (H_n f)^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i), \qquad (23)$$

unde $f^{(l)}(x_i)$ *este derivata de ordinul* l *a lui* f *în* x_i.

Definiţia 22 *Polinomul definit în acest mod se numeşte* polinom de interpolare al lui Hermite *al funcţiei* f *relativ la punctele* $x_0, x_1, \ldots, x_m$ *şi la întregii* $r_0, r_1, \ldots, r_m$.

Demonstraţie. Ecuaţia (23) conduce la un sistem liniar de $(n+1)$ ecuaţii cu $(n+1)$ necunoscute (coeficienţii lui $H_n f$), deci este suficient să arătăm că sistemul omogen corespunzător admite doar soluţia nulă, adică relaţiile

Demonstrație. Ecuația (23) conduce la un sistem liniar de $(n+1)$ ecuații cu $(n+1)$ necunoscute (coeficienții lui $H_n f$), deci este suficient să arătăm că sistemul omogen corespunzător admite doar soluția nulă, adică relațiile

$$H_n f \in \mathbb{P}_n \text{ și } \forall\ (i,l),\ 0 \le i \le k,\ 0 \le l \le r_i,\ (H_n f)^{(l)}(x_i) = 0$$

Demonstrație. Ecuația (23) conduce la un sistem liniar de $(n+1)$ ecuații cu $(n+1)$ necunoscute (coeficienții lui $H_n f$), deci este suficient să arătăm că sistemul omogen corespunzător admite doar soluția nulă, adică relațiile

$$H_n f \in \mathbb{P}_n \text{ și } \forall\ (i,l),\ \ 0 \le i \le k,\ \ 0 \le l \le r_i,\ \ (H_n f)^{(l)}(x_i) = 0$$

ne asigură că pentru orice $i = 0, 1, \dots, m$ x_i este rădăcină de ordinul $r_i + 1$ a lui $H_n f$; prin urmare $H_n f$ are forma

$$(H_n f)(x) = q(x) \prod_{i=0}^{m} (x - x_i)^{r_i+1},$$

Demonstrație. Ecuația (23) conduce la un sistem liniar de $(n+1)$ ecuații cu $(n+1)$ necunoscute (coeficienții lui $H_n f$), deci este suficient să arătăm că sistemul omogen corespunzător admite doar soluția nulă, adică relațiile

$$H_n f \in \mathbb{P}_n \text{ și } \forall\ (i,l),\ 0 \le i \le k,\ 0 \le l \le r_i,\ (H_n f)^{(l)}(x_i) = 0$$

ne asigură că pentru orice $i = 0, 1, \ldots, m$ x_i este rădăcină de ordinul $r_i + 1$ a lui $H_n f$; prin urmare $H_n f$ are forma

$$(H_n f)(x) = q(x) \prod_{i=0}^{m} (x - x_i)^{r_i+1},$$

unde q este un polinom. Cum $\sum_{i=0}^{m}(r_i + 1) = n + 1$, acest lucru nu este compatibil cu apartenența lui H_n la $\mathbb{P}_n$, decât dacă $q \equiv 0$ și deci $H_n \equiv 0$. ■

Demonstraţie. Ecuaţia (23) conduce la un sistem liniar de $(n+1)$ ecuaţii cu $(n+1)$ necunoscute (coeficienţii lui $H_n f$), deci este suficient să arătăm că sistemul omogen corespunzător admite doar soluţia nulă, adică relaţiile

$$H_n f \in \mathbb{P}_n \text{ şi } \forall\ (i,l),\ 0 \le i \le k,\ 0 \le l \le r_i,\ (H_n f)^{(l)}(x_i) = 0$$

ne asigură că pentru orice $i = 0, 1, \dots, m$ x_i este rădăcină de ordinul $r_i + 1$ a lui $H_n f$; prin urmare $H_n f$ are forma

$$(H_n f)(x) = q(x) \prod_{i=0}^{m} (x - x_i)^{r_i+1},$$

unde q este un polinom. Cum $\sum_{i=0}^{m}(r_i+1) = n+1$, acest lucru nu este compatibil cu apartenenţa lui H_n la $\mathbb{P}_n$, decât dacă $q \equiv 0$ şi deci $H_n \equiv 0$. ■

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 38 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

6. Diferenţe divizate cu noduri multiple

Formula (21) serveşte ca bază pentru introducerea diferenţei divizate cu noduri multiple: dacă $f \in C^m[a,b]$ şi $\alpha \in [a,b]$, atunci

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 38 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

6. Diferenţe divizate cu noduri multiple

Formula (21) serveşte ca bază pentru introducerea diferenţei divizate cu noduri multiple: dacă $f \in C^m[a,b]$ şi $\alpha \in [a,b]$, atunci

$$\lim_{x_0,\dots,x_m \to \alpha} [x_0, \dots, x_m; f] = \lim_{\xi \to \alpha} \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}$$

Home Page
Title Page
Page 38 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

6. Diferenţe divizate cu noduri multiple

Formula (21) serveşte ca bază pentru introducerea diferenţei divizate cu noduri multiple: dacă $f \in C^m[a, b]$ şi $\alpha \in [a, b]$, atunci

$$\lim_{x_0,\dots,x_m\to\alpha}[x_0, \dots, x_m; f] = \lim_{\xi\to\alpha}\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}$$

Aceasta justifică relaţia

$$[\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{m+1}; f] = \frac{1}{m!}f^{(m)}(\alpha).$$

6. Diferenţe divizate cu noduri multiple

Formula (21) serveşte ca bază pentru introducerea diferenţei divizate cu noduri multiple: dacă $f \in C^m[a, b]$ şi $\alpha \in [a, b]$, atunci

$$\lim_{x_0,\dots,x_m\to\alpha}[x_0, \dots, x_m; f] = \lim_{\xi\to\alpha}\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}$$

Aceasta justifică relaţia

$$[\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{m+1}; f] = \frac{1}{m!}f^{(m)}(\alpha).$$

Reprezentând aceasta ca pe un cât de doi determinanţi se obţine

6. Diferenţe divizate cu noduri multiple

Formula (21) serveşte ca bază pentru introducerea diferenţei divizate cu noduri multiple: dacă $f \in C^m[a,b]$ şi $\alpha \in [a,b]$, atunci

$$\lim_{x_0,\dots,x_m \to \alpha} [x_0, \dots, x_m; f] = \lim_{\xi \to \alpha} \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}$$

Aceasta justifică relaţia

$$[\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{m+1}; f] = \frac{1}{m!} f^{(m)}(\alpha).$$

Reprezentând aceasta ca pe un cât de doi determinanţi se obţine

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 39 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

$$(Wf)\left(\underbrace{\alpha,\ldots,\alpha}_{m+1}\right)=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \ldots & \alpha^{m-1} & f(\alpha) \\ 0 & 1 & 2\alpha & \ldots & (m-1)\alpha^{m-2} & f'(\alpha) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)! & f^{(m-1)}(\alpha) \end{vmatrix}$$

Home Page
Title Page
Page 39 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

$$(Wf)\left(\underbrace{\alpha,\ldots,\alpha}_{m+1}\right)=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \ldots & \alpha^{m-1} & f(\alpha) \\ 0 & 1 & 2\alpha & \ldots & (m-1)\alpha^{m-2} & f'(\alpha) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)! & f^{(m-1)}(\alpha) \end{vmatrix}$$

și

$$V\left(\underbrace{\alpha,\ldots,\alpha}_{m+1}\right)=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \ldots & \alpha^{m} \\ 0 & 1 & 2\alpha & \ldots & m\alpha^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & m! \end{vmatrix},$$

Home Page

Title Page

Page 39 of 45

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$(Wf)\left(\underbrace{\alpha,\dots,\alpha}_{m+1}\right)=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{m-1} & f(\alpha)\\ 0 & 1 & 2\alpha & \dots & (m-1)\alpha^{m-2} & f'(\alpha)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & (m-1)! & f^{(m-1)}(\alpha) \end{vmatrix}$$

și

$$V\left(\underbrace{\alpha,\dots,\alpha}_{m+1}\right)=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{m}\\ 0 & 1 & 2\alpha & \dots & m\alpha^{m-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & m! \end{vmatrix},$$

adică cei doi determinanţi sunt constituiţi din linia relativă la nodul α și derivatele succesive ale acesteia până la ordinul m în raport cu α.

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Go Back
Full Screen
Close
Quit

$$(Wf)\left(\underbrace{\alpha,\ldots,\alpha}_{m+1}\right)=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \ldots & \alpha^{m-1} & f(\alpha)\\ 0 & 1 & 2\alpha & \ldots & (m-1)\alpha^{m-2} & f'(\alpha)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)! & f^{(m-1)}(\alpha) \end{vmatrix}$$

și

$$V\left(\underbrace{\alpha,\ldots,\alpha}_{m+1}\right)=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \ldots & \alpha^{m}\\ 0 & 1 & 2\alpha & \ldots & m\alpha^{m-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & m! \end{vmatrix},$$

adică cei doi determinanţi sunt constituiţi din linia relativă la nodul α și derivatele succesive ale acesteia până la ordinul m în raport cu α.

Generalizarea pentru mai multe noduri este următoarea:

Definiția 23 *Fie* $r_k \in \mathbb{N}$, $k = \overline{0, m}$, $n = r_0 + \cdots + r_m$. *Presupunem că există* $f^{(j)}(x_k)$, $k = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, r_k - 1}$. *Mărimea*

Generalizarea pentru mai multe noduri este următoarea:

Definiția 23 *Fie* $r_k \in \mathbb{N}$, $k = \overline{0,m}$, $n = r_0 + \cdots + r_m$. *Presupunem că există* $f^{(j)}(x_k)$, $k = \overline{0,m}$, $j = \overline{0, r_k - 1}$. *Mărimea*

$$[\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{r_0}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{r_1}, \ldots, \underbrace{x_m, \ldots, x_m}_{r_m}; f] = \frac{(Wf)(x_0, \ldots, x_0, \ldots, x_m, \ldots, x_m)}{V(x_0, \ldots, x_0, \ldots, x_m, \ldots, x_m)}$$

Generalizarea pentru mai multe noduri este următoarea:

Definiția 23 *Fie* $r_k \in \mathbb{N}$, $k = \overline{0,m}$, $n = r_0 + \cdots + r_m$. *Presupunem că există* $f^{(j)}(x_k)$, $k = \overline{0,m}$, $j = \overline{0, r_k - 1}$. *Mărimea*

$$[\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{r_0}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{x_m, \dots, x_m}_{r_m}; f] = \frac{(Wf)(x_0, \dots, x_0, \dots, x_m, \dots, x_m)}{V(x_0, \dots, x_0, \dots, x_m, \dots, x_m)}$$

unde

$$(Wf)(x_0, \dots, x_0, \dots, x_m, \dots, x_m) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{r_0-1} & \dots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 0 & 1 & \dots & (r_0-1)x_0^{r_0-2} & \dots & (n-1)x_0^{n-2} & f'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (r_0-1)! & \dots & \prod_{p=1}^{r_0-1}(n-p)x_0^{n-r_0} & f^{(r_0-1)}(x_0) \\ 1 & x_m & \dots & x_m^{r_m-1} & \dots & x_m^{n-1} & f(x_m) \\ 0 & 1 & \dots & (r_m-1)x_m^{r_m-2} & \dots & (n-1)x_m^{n-2} & f'(x_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (r_m-1)! & \dots & \prod_{p=1}^{r_m-1}(n-p)x_m^{n-r_m} & f^{(r_n-1)}(x_n) \end{vmatrix}$$

Home Page
Title Page
Page 40 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Generalizarea pentru mai multe noduri este următoarea:

Definiția 23 *Fie* $r_k \in \mathbb{N}$, $k = \overline{0,m}$, $n = r_0 + \cdots + r_m$. *Presupunem că există* $f^{(j)}(x_k)$, $k = \overline{0,m}$, $j = \overline{0, r_k - 1}$. *Mărimea*

$$[\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{r_0}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{x_m, \dots, x_m}_{r_m}; f] = \frac{(Wf)(x_0, \dots, x_0, \dots, x_m, \dots, x_m)}{V(x_0, \dots, x_0, \dots, x_m, \dots, x_m)}$$

unde

$$(W f)(x_0, \dots, x_0, \dots, x_m, \dots, x_m) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{r_0-1} & \dots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 0 & 1 & \dots & (r_0-1)x_0^{r_0-2} & \dots & (n-1)x_0^{n-2} & f'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (r_0-1)! & \dots & \prod_{p=1}^{r_0-1}(n-p)x_0^{n-r_0} & f^{(r_0-1)}(x_0) \\ 1 & x_m & \dots & x_m^{r_m-1} & \dots & x_m^{n-1} & f(x_m) \\ 0 & 1 & \dots & (r_m-1)x_m^{r_m-2} & \dots & (n-1)x_m^{n-2} & f'(x_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (r_m-1)! & \dots & \prod_{p=1}^{r_m-1}(n-p)x_m^{n-r_m} & f^{(r_n-1)}(x_n) \end{vmatrix}$$

iar $V(x_0, \dots, x_0, \dots, x_m, \dots, x_m)$ *este ca mai sus, exceptând ultima*

coloană care este

$$(x_0^n, nx_0^{n-1}, \ldots, \prod_{p=0}^{r_0-2}(n-p)x_0^{n-r_0+1}, \ldots, x_m^n, nx_m^{n-1}, \ldots, \prod_{p=0}^{r_m-2} x_m^{n-r_m+1})^T$$

se numește diferență divizată cu nodurile multiple x_k, $k = \overline{0,m}$ și ordinele de multiplicitate r_k, $k = \overline{0,m}$.

Home Page
Title Page
Page 41 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

coloană care este

$$(x_0^n, nx_0^{n-1}, \ldots, \prod_{p=0}^{r_0-2}(n-p)x_0^{n-r_0+1}, \ldots, x_m^n, nx_m^{n-1}, \ldots, \prod_{p=0}^{r_m-2} x_m^{n-r_m+1})^T$$

se numește diferență divizată cu nodurile multiple x_k, $k=\overline{0,m}$ *și ordinele de multiplicitate* r_k, $k=\overline{0,m}$.

Home Page
Title Page
Page 42 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Generalizând forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange se obţine o metodă bazată pe diferenţele divizate cu noduri multiple pentru PIH.

Generalizând forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange se obține o metodă bazată pe diferențele divizate cu noduri multiple pentru PIH.

Presupunem că se dau nodurile x_i, $i = \overline{0,m}$ și valorile $f(x_i)$, $f'(x_i)$. Definim secvența de noduri $z_0, z_1, \dots, z_{2m+1}$ prin $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$, $i = \overline{0,m}$. Construim acum tabela diferențelor divizate utilizând nodurile z_i, $i = \overline{0, 2m+1}$. Deoarece $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ pentru orice i, $f[x_{2i}, x_{2i+1}]$ este o diferență divizată cu nod dublu și este egală cu $f'(x_i)$, deci vom utiliza $f'(x_0), f'(x_1), \dots, f'(x_m)$ în locul diferențelor divizate de ordinul I

$$f[z_0, z_1], f[z_2, z_3], \dots, f[z_{2m}, z_{2m+1}].$$

Restul diferențelor se obțin în manieră obișnuită, așa cum se arată în tabelul 1. Ideea poate fi extinsă și pentru alte interpolări Hermite. Se pare că metoda este datorată lui Powell.

Generalizând forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange se obţine o metodă bazată pe diferenţele divizate cu noduri multiple pentru PIH.

Presupunem că se dau nodurile x_i, $i = \overline{0, m}$ şi valorile $f(x_i)$, $f'(x_i)$. Definim secvenţa de noduri $z_0, z_1, \dots, z_{2m+1}$ prin $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$, $i = \overline{0, m}$. Construim acum tabela diferenţelor divizate utilizând nodurile z_i, $i = \overline{0, 2m+1}$. Deoarece $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ pentru orice i, $f[x_{2i}, x_{2i+1}]$ este o diferenţă divizată cu nod dublu şi este egală cu $f'(x_i)$, deci vom utiliza $f'(x_0), f'(x_1), \dots, f'(x_m)$ în locul diferenţelor divizate de ordinul I

$$f[z_0, z_1], f[z_2, z_3], \dots, f[z_{2m}, z_{2m+1}].$$

Restul diferenţelor se obţin în manieră obişnuită, aşa cum se arată în tabelul 1. Ideea poate fi extinsă şi pentru alte interpolări Hermite. Se pare că metoda este datorată lui Powell.

$$
\begin{array}{llll}
z_0 = x_0 & f[z_0] & f[z_0,z_1] = f'(x_0) & f[z_0,z_1,z_2] = \frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0} \\
z_1 = x_0 & f[z_1] & f[z_1,z_2] = \frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1} & f[z_1,z_2,z_3] = \frac{f[z_3,z_2]-f[z_2,z_1]}{z_3-z_1} \\
z_2 = x_1 & f[z_2] & f[z_2,z_3] = f'(x_1) & f[z_2,z_3,z_4] = \frac{f[z_4,z_3]-f[z_3,z_2]}{z_4-z_2} \\
z_3 = x_1 & f[z_3] & f[z_3,z_4] = \frac{f(z_4)-f(z_3)}{z_4-z_3} & \\
z_4 = x_2 & f[z_4] & f[z_4,z_5] = f'(x_2) & \\
z_5 = x_2 & f[z_5] & &
\end{array}
$$

Tabela 1: Tabelă de diferențe divizate pentru noduri duble

Folosind teorema de medie pentru diferențe divizate obținem următoarea expresie a erorii pentru interpolarea Hermite:

Propoziția 24 *Dacă $f \in C^{n+1}[a,b]$ există $\xi \in [a,b]$ astfel încât*

$$(R_n f)(x) = \frac{u(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \tag{24}$$

unde

$$u(x) = (x - x_0)^{r_0+1} \ldots (x - x_m)^{r_m+1} = \prod_{k=0}^{m} (x - x_k)^{r_k+1}.$$

Home Page
Title Page
Page 43 of 45
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Folosind teorema de medie pentru diferențe divizate obținem următoarea expresie a erorii pentru interpolarea Hermite:

Propoziția 24 *Dacă $f \in C^{n+1}[a, b]$ există $\xi \in [a, b]$ astfel încât*

$$(R_n f)(x) = \frac{u(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \tag{24}$$

unde

$$u(x) = (x - x_0)^{r_0+1} \ldots (x - x_m)^{r_m+1} = \prod_{k=0}^{m} (x - x_k)^{r_k+1}.$$

Exemplul 25 *Pentru $f \in C^4[a,b]$, să se calculeze polinomul de interpolare cu nodurile duble $x_0 = a$ și $x_1 = b$ și sa se dea expresia erorii de interpolare.*

Soluție. Avem $x_0 = a$, $r_0 = 1$, $x_1 = b$, $r_1 = 1$ și $m = 1$. Gradul polinomului va fi $n = 1 + r_0 + r_1 = 3$.

Tabela diferențelor divizate este:

	D^0	D^1	D^2	D^3
$z_0 = a$	$f(a)$	$f'(a)$	$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{(b-a)^2}$	$\frac{(b-a)(f'(b)+f'(a))-2(f(b)-f(a))}{(b-a)^3}$
$z_1 = a$	$f(a)$	$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	$\frac{(b-a)f'(b)-f(b)+f(a)}{(b-a)^2}$	
$z_2 = b$	$f(b)$	$f'(b)$		
$z_3 = b$	$f(b)$			

Polinomul de interpolare va fi

$$
\begin{aligned}
(H_3 f)(x) &= f[z_0] + (x - z_0)f[z_0, z_1] + (x - z_0)(x - z_1)f[z_0, z_1, z_2] + \\
&\quad (x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)f[z_0, z_1, z_2, z_3] \\
&= f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)^2 \frac{f(b) - f(a) - (b - a)f'(a)}{(b - a)^2} + \\
&\quad (x - a)^2(x - b)\frac{(b - a)(f'(b) + f'(a)) - 2(f(b) - f(a))}{(b - a)^3}.
\end{aligned}
$$

Restul

$$(R_3 f)(x) = \frac{(x - a)^2(x - b)^2}{4!} f^{(}4)(\xi).$$

■