Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Norme, convergență, condiționare

Radu Trîmbițaș

UBB

Martie 2009

Elemente de analiză matricială

- $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, A^T transpusa lui A, A^* transpusa conjugată a lui A
- polinomul $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ *polinomul caracteristic* al lui A; rădăcinile lui se numesc valori proprii ale lui A
- $Ax = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *valoare proprie*, $x \neq 0$ *vector propriu*
- Valoarea $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ valoare proprie a lui } A\}$ —raza spectrală a matricei A.

Matrice speciale

- O matrice se numește
  - normală, dacă $AA^* = A^*A$
  - unitară, dacă $AA^* = A^*A = I$
  - ortogonală, dacă $AA^T = A^TA = I$, A reală
  - hermitiană, dacă $A^* = A$
  - simetrică, dacă $A^T = A$, A reală
- O normă matricială este o aplicație $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{m\times m} \to \mathbb{R}$, care pentru orice matrice A, B și orice scalar $\alpha \in \mathbb{C}$ verifică

(NM1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
(NM2) $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$
(NM3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
(NM4) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$

Norme matriciale - exemple

- fiind dată o normă vectorială $\|\cdot\|$ pe $\mathbb{C}^n$, aplicația $\|\|: \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{R}$

$$\|A\| = \sup_{\substack{v\in\mathbb{C}^n \\ v\neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v\in\mathbb{C}^n \\ \|v\|\leq 1}} \|Av\| = \sup_{\substack{v\in\mathbb{C}^n \\ \|v\|=1}} \|Av\|$$

  este o normă matricială numita *normă matricială subordonată* (normei matriciale date) sau *normă indusă* (de norma vectorială) sau *normă naturală*.
- Orice normă subordonată verifică $\|I\| = 1$
- Un exemplu important de normă nesubordonată (neindusă) este norma Frobenius

$$\|A\|_F = \left(\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \left(tr\left(A^*A\right)\right)^{1/2}.$$

- $\|I\|_F = \sqrt{n}$, deci norma Frobenius nu este subordonată

Norme induse clasice

Teoremă

Fie $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Atunci

$$\|A\|_1 = \sup_{v\in\mathbb{C}^m\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sup_{v\in\mathbb{C}^m\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A^*\|_2$$

$$\|A\|_\infty = \sup_{v\in\mathbb{C}^m\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Dacă A este normală ($AA^* = A^*A$), atunci $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Un rezultat util

Teoremă

(1) *Fie A o matrice pătratică oarecare și $\|\cdot\|$ o normă matricială oarecare (indusă sau nu). Atunci*

$$\rho(A) \leq \|A\| .$$

(2) *Fiind dată o matrice A și un număr $\varepsilon > 0$, există cel puțin o normă matricială subordonată astfel încât*

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Demonstrație. (1) Fie p un vector propriu dominant, adică $p \neq 0$, $Ap = \lambda p$ și $|\lambda| = \rho(A)$ și q un vector astfel încât $pq^* \neq 0$. Dar

$$\rho(A) \|pq^*\| = \|\lambda pq^*\| = \|Apq^*\| = \|A\| \|pq^*\|,$$

de unde prima parte.
(2) $\exists U$ unitară a.î. $U^{-1}AU$ este triunghiulară superior, și are valorile proprii ale lui A pe diagonală

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1m} \\ & \lambda_2 & t_{23} & \cdots & t_{2m} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda_{m-1} & t_{m-1,m} \\ & & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

Fiecărui scalar $\delta \neq 0$ îi asociem matricea $D_\delta = diag(1, \delta, \delta^2, \ldots, \delta^{m-1})$, ∎

astfel ca

$$\left(UD_d\right)^{-1} A \left(UD_\delta\right) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \delta t_{12} & \delta^2 t_{13} & \cdots & \delta^{m-1} t_{1m} \\ & \lambda_2 & \delta t_{23} & \cdots & \delta^{m-2} t_{2m} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda_{m-1} & \delta t_{m-1,m} \\ & & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

Pentru ε dat, fixăm δ a.î. $\sum_{j=i+1}^{m} \left|\delta^{j-i} t_{ij}\right| \leq \varepsilon$, $i = 1, \ldots m-1$.

Atunci aplicația $\|\cdot\| : B \in \mathbb{C}^{m\times m} \mapsto \|B\| = \left\| (UD_d)^{-1} A (UD_\delta) \right\|_\infty$ îndeplinește condițiile problemei. Într-adevăr, datorită alegerii lui δ și definiției $\|\cdot\|_\infty$

$$\|A\| < \rho(A) + \varepsilon$$

și este indusă de norma vectorială

$$v \in \mathbb{C}^m \mapsto \left\| (UD_d)^{-1} v \right\|_\infty .$$

Un alt rezultat util

Teoremă

Fie B o matrice pătratică de ordin m. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(1) $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$

(2) $\lim_{k\to\infty} B^k v = 0, \ \forall v \in \mathbb{C}^m$

(3) $\rho(B) < 1$

(4) *Există o normă matricială subordonată* $\|\cdot\|$, *astfel încât* $\|B\| < 1$

Demonstrație. (1) $\Longrightarrow$(2)
$\left\|B^k v\right\| \leq \left\|B^k\right\| \|v\| \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} B^k v = 0$
(2)$\Longrightarrow$(3) Dacă $\rho(B) \geq 1$, putem găsi un p astfel încât $p \neq 0$, $Bp = \lambda p$, $|\lambda| \geq 1$. Deoarece $B^k p = \lambda^k p$, șirul de vectori $\left(B^k p\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ar putea să nu conveargă către 0.
(3)$\Longrightarrow$(4) Din teorema 2 avem $\rho(B) < 1 \Longrightarrow \exists \|\cdot\|$ astfel încât $\|B\| \leq \rho(B) + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, deci $\|B\| < 1$.
(4)$\Longrightarrow$(1) $\left\|B^k\right\| \leq \|B\|^k \to 0$, dacă $\|B\| < 1$. ■

Condiționarea unui sistem liniar 1

- Care este condiționarea problemei: dându-se $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ și $b \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ să se rezolve sistemul $Ax = b$.
- Considerăm exemplul (Wilson)

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

cu soluția $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Condiționarea unui sistem liniar 2

- Perturbăm membrul drept

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \\ x_4 + \Delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{bmatrix}$$

- soluția $\begin{bmatrix} 9.2 & -12.6 & 4.5 & -1.1 \end{bmatrix}^T$.
- o eroare (relativă) de $1/200$ în date $\longrightarrow$ eroare relativă de $10/1$ (amplificare a erorii relative de 2000 de ori)

Condiționarea unui sistem liniar 3

- Perturbăm matricea

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 9.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \\ x_4 + \Delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

- soluția $\begin{bmatrix} -81 & 137 & -34 & 22 \end{bmatrix}^T$.
- Din nou, o variație mică în datele de intrare modifică complet rezultatul
- Matricea are un aspect ,,bun“, ea este simetrică, determinantul ei este 1, iar inversa ei este

$$\begin{bmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Estimarea numărului de condiționare

- Considerăm sistemul parametrizat, cu parametrul t

$$(A+t\Delta A)x(t)=b+t\Delta b, \qquad x(0)=x^*.$$

- A nesingulară $\Longrightarrow$ funcția x este diferențiabilă în $t=0$ și $x'(0)=A^{-1}\left(\Delta b-\Delta A x^*\right)$.
- Dezvoltarea Taylor a lui $x(t)$ este

$$x(t)=x^*+tx'(0)+O(t^2).$$

- Estimarea erorii absolute

$$\begin{aligned}\|\Delta x(t)\| &= \|x(t)-x^*\| \le |t|\left\|x'(0)\right\|+O(t^2)\\ &\le |t|\left\|A^{-1}\right\|\left(\|\Delta b\|+\|\Delta A\|\,\|x^*\|\right)+O(t^2)\end{aligned}$$

Estimarea numărului de condiționare 2

- din $||b|| \leq ||A||||x^*||$ obținem pentru eroarea relativă

$$\begin{aligned}\frac{\|\Delta x(t)\|}{\|x^*\|} &\leq |t| \, \|A^{-1}\| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x^*\|} + \|\Delta A\| \right) + O(t^2) \\ &\leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \, |t| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right) + O(t^2)\end{aligned}$$

- Introducem notațiile

$$\rho_A(t) = |t| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \quad \rho_b(t) = |t| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

și putem scrie pentru eroarea relativă

$$\frac{\|\Delta x(t)\|}{\|x^*\|} \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \left(\rho_A(t) + \rho_b(t)\right) + O(t^2) \qquad (1)$$

Estimarea numărului de condiționare 3

Definiție

Dacă A este nesingulară, numărul

$$\operatorname{cond}(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \tag{2}$$

se numește număr de condiționare al matricei A. Dacă A este singulară, $cond(A) = \infty$.

Relația (1) se poate scrie sub forma

$$\frac{\|\Delta x(t)\|}{\|x^*\|} \leq \operatorname{cond}(A)\left(\rho_A(t) + \rho_b(t)\right) + O(t^2)$$

Exemple de matrice prost condiționate

- Matricea lui Hilbert $H_m = (h_{ij})$ cu $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, $i,j = 1,\dots,m$. Szegő a demonstrat

$$\mathrm{cond}_2(H_m) = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{4m+4}}{2^{14/4}\sqrt{\pi m}}.$$

m	10	20	40
$\mathrm{cond}_2(H_m)$	$1.6\cdot 10^{13}$	$2.45\cdot 10^{28}$	$7.65\cdot 10^{58}$

- Matricea Vandermonde $V = (v_{ij})$, $v_{ij} = t_j^{i-1}$, $i,j = 1,\dots,m$
    - elemente echidistante în [-1,1]

$$cond_\infty(V_m) \sim \frac{1}{\pi} e^{-\frac{\pi}{4}} e^{m\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2\right)}$$

    - $t_j = 1/j$, $j = 1,\dots m$: $cond_\infty(V_m) > m^{m+1}$.

David Hilbert (1862-1943)

Gábor Szegő (1895-1985)

Introducere

- Pentru A nesingulară, presupunem că putem reduce rezolvarea lui
$$Ax = b \tag{3}$$
la rezolvarea problemei de punct fix
$$x = Tx + c, \tag{4}$$
unde T este o matrice, c este un vector, $I - T$ este inversabilă și punctul fix al lui (4) concide cu soluția x^* a lui (3).
- Definim metoda iterativă prin: se ia un $x^{(0)}$ arbitrar și se definește șirul $\left(x^{(k)}\right)$ prin
$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c. \tag{5}$$

Lemă

Dacă $\rho(X) < 1$, *există* $(I - X)^{-1}$ *și*

$$(I - X)^{-1} = I + X + X^2 + \cdots + X^k + \cdots .$$

Demonstrație. Fie $S_k = I + X + X^2 + \cdots + X^k$. Deoarece

$$(I - X)S_k = I - X^{k+1},$$

avem

$$\lim_{k\to\infty} (I - X)S_k = I \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} S_k = (I - X)^{-1},$$

căci $X^{k+1} \to 0 \Longleftrightarrow \rho(X) < 1$. ∎

Convergența

Teoremă

U.a.s.e.

(1) *metoda (5) este convergentă*

(2) $\rho(T) < 1$

(3) $\|T\| < 1$ *pentru cel puțin o normă matricială*

Demonstrație.

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= Tx^{(k-1)} + c = T(Tx^{(k-2)} + c) + c \\ &= T^{(k)}x^{(0)} + (I + T + \cdots + T^{k-1})c \end{aligned}$$

(5) convergentă $\iff$ $(I - T)$ inversabilă $\iff$ $\rho(T) < 1 \iff$ $\exists \|\cdot\|$ a.î. $\|T\| < 1$ (teorema 3). ■

Delimitarea erorii

Aplicând teorema de punct fix a lui Banach obținem

Teoremă

Dacă există $\|\cdot\|$ *a.î.* $\|T\| < 1$, *șirul* $\left(x^{(k)}\right)$ *definit de (5) este convergent pentru orice* $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ *și au loc delimitările*

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \leq \|T\|^k \left\|x^{(0)} - x^*\right\|$$

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|.$$

Criteriul de oprire

Criteriul de oprire

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| \leq \frac{1 - \|T\|}{\|T\|}\varepsilon. \tag{6}$$

Propoziție

Dacă x^* este soluția sistemului (3) și $\|T\| < 1$, atunci

$$\left\| x^* - x^{(k)} \right\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| \tag{7}$$

Demonstrația criteriului

Demonstrație. $\forall p \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\left\| x^{(k+p)} - x^{(k)} \right\| \leq \left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| + \cdots + \left\| x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)} \right\| \tag{8}$$

Din (5) rezultă

$$\left\| x^{(m+1)} - x^{(m)} \right\| \leq \| T \| \left\| x^{(m)} - x^{(m-1)} \right\|$$

sau pentru $k < m$

$$\left\| x^{(m+1)} - x^{(m)} \right\| \leq \| T \|^{m-k-1} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| .$$

Aplicând aceste inegalități, pentru $m = k, \ldots, k+p-1$, relația (8) devine ■

Demonstrația criteriului - continuare

$$\left\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\right\| \leq (\|T\| + \cdots + \|T\|^p) \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$$
$$(\|T\| + \cdots + \|T\|^p + \cdots) \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$$

de unde, deoarece $\|T\| < 1$

$$\left\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\right\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|,$$

din care prin trecere la limită în raport cu p se obține (7).■
Dacă $\|T\| \leq \frac{1}{2}$, inegalitatea (7) devine

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \leq \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|,$$

iar criteriul de oprire

$$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| < \varepsilon.$$

Rafinarea iterativă

- Dacă metoda de rezolvare pentru $Ax = b$ este nestabilă, atunci $A\overline{x}_1 = b$, unde $\overline{x}_1$ este valoarea calculată. Vom calcula corecția Δx_1 astfel încât

$$A(\overline{x} + \Delta x_1) = b \Longrightarrow A\Delta x_1 = b - A\overline{x}$$

- Se rezolvă sistemul și se obține un nou $\overline{x}$, $\overline{x}_2 = \overline{x}_1 + \Delta x_1$. Dacă din nou $A\overline{x}_2 \neq b$, se calculează o nouă corecție până când

$$\|\Delta x_i - \Delta x_{i-1}\| < \varepsilon \text{ sau } \|b - A\overline{x}_i\| < \varepsilon$$

- Calculul vectorului $r_i = b - A\overline{x}_i$, numit *reziduu*, se va efectua în dublă precizie.

Metode concrete

- Fie sistemul $Ax = b$, A inversabilă.
- Scriem A sub forma $A = M - N$, unde M este ușor de inversat (diagonală, triunghiulară, etc.)

$$Ax = b \iff Mx = Nx + b \iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

- Ultima ecuație are forma $x = Tx + c$, unde $T = M^{-1}N$ și $c = M^{-1}b$.
- Obținem iterațiile

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \text{arbitrar} \\ x^{(k+1)} &= M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b. \end{aligned}$$

Metoda lui Jacobi

- Considerăm descompunerea $A = D - L - U$, unde $D = diag(A)$, $L = -tril(A)$, $U = -triu(A)$.
- Se ia $M = D$, $N = L - U$.
- Se obține $T = T_J = D^{-1}(L+U)$, $c = c_J = D^{-1}b$.
- Metoda se numește *metoda lui Jacobi*
- Pe componente

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right), \quad i = 1, \dots m, \; k = 1, 2, \dots$$

- substituția simultană

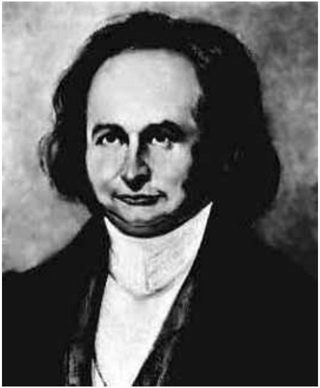

Figure: Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

Metoda Gauss-Seidel

- În descompunerea $A = D - L - U$, se ia $M = D - L$, $N = U$
- Se obține $T = T_{GS} = (D-L)^{-1}U$, $c_{GS} = (D-L)^{-1}b$.
- *Metoda Gauss-Seidel*
- pe componente

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right),$$

$$i = 1, \ldots m, \;\; k = 1, 2, \ldots$$

Metoda Gauss-Seidel

- Pornim de la iterațiile Jacobi

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right), \quad i = 1, \ldots m, \ k = 1, 2, \ldots$$

- deoarece $x_j^{(k-1)}, j < i$ au fost deja actualizate le folosim în iterație

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right),$$

$$i = 1, \ldots m, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Metoda relaxării

- Putem îmbunătăți metoda Gauss-Seidel introducând un parametru ω și alegând
$$M = \frac{1}{\omega} D - L$$
- Avem
$$A = \left(\frac{1}{\omega} D - L\right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + U\right)$$
- Se obține
$$\begin{aligned} T = T_\omega &= \left(\frac{1}{\omega} D - L\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + U\right) \\ &= (D - \omega L)^{-1} \left((1-\omega) D + \omega U\right) \\ c = c_\omega &= (D - \omega L)^{-1} \omega b \end{aligned}$$
- variante: subrelaxare $\omega < 1$, suprarelaxare $\omega > 1$, Gauss-Seidel $\omega = 1$

Convergența metodei relaxării

Teoremă (Kahan)

Dacă $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, $\rho(T_\omega) < |\omega - 1|$. *De aici rezultă că* $\rho(T_\omega) < 1 \Longrightarrow 0 < \omega < 2$ *(condiție necesară).*

Teoremă (Ostrowski-Reich)

Dacă A este o matrice pozitiv definită și $0 < \omega < 2$, *atunci SOR converge pentru orice alegere a aproximației inițiale* $x^{(0)}$.

Valoarea optimă a parametrului relaxării este

$$\omega_O = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\rho(T_J))^2}}.$$

Convergența metodelor Jacobi și Gauss-Seidel

- Condiția necesară și suficientă de convergență pentru o metodă iterativă staționară este

$$\rho(T) < 1$$

- O condiție suficientă este: există $\|\cdot\|$ astfel încât $\|T\| < 1$
- Pentru metoda lui Jacobi (și Gauss-Seidel) avem următoarele două condiții suficiente de convergență

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |a_{ij}|$$

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |a_{ji}|$$

(diagonal dominanță pe linii și respectiv pe coloane)

Bibliografie I

- Octavian Agratini, Ioana Chiorean, Gheorghe Coman, Trîmbițaș Radu, *Analiză numerică și teoria aproximării*, vol. III, Presa Universitară Clujeană, 2002, coordonatori D. D. Stancu și Gh. Coman.
- R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, H. van der Vorst, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, 2nd ed., SIAM, Philadelphia, PA, 1994, disponibila prin www, `http://www.netlib.org/templates`.
- James Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

Bibliografie II

- H. H. Goldstine, J. von Neumann, *Numerical inverting of matrices of high order*, Amer. Math. Soc. Bull. **53** (1947), 1021–1099.
- Gene H. Golub, Charles van Loan, *Matrix Computations*, 3rd ed., John Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.
- C. G. J. Jacobi, *Über eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Gleichungen*, Astronomische Nachrichten **22** (1845), 9–12, Issue no. 523.
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sidney, 1996, disponibila prin www, `http://www.nr.com/`.

Bibliografie III

- Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS Publishing, Boston, 1996, disponibilă via www la adresa `http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html`.
- Lloyd N. Trefethen, David Bau III, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1996.