Miniproiecte - Funcţii elementare şi constante

29 aprilie 2013

1 Funcţii elementare

Implementaţi algoritmii următori şi concepeţi o procedură serioasă de verificare pentru fiecare.

Problema 1 (exponenţiala) (a) Scrieţi o rutină ce calculează e^x însumând n termeni ai seriei Taylor până când al $(n+1)$-lea termen t verifică $|t| < \varepsilon$, ε dat. Utilizaţi $1/e^x$ pentru valori negative ale lui x. Testaţi pentru valorile: 0, +1, -1, 0.5, -0.123, -25.5, -1776, 3.14159. Calculaţi eroarea absolută, eroarea relativă şi n pentru fiecare caz, utilizând funcţia exponenţială din sistem pentru valoarea exactă. Nu însumaţi mai mult de 25 de termeni.

(b) Calculul lui e^x se poate reduce la calculul lui e^u pentru $|u| < (\ln 2)/2$. Acest algoritm înlătură puterile lui 2 şi calculează e^u într-un domeniu în care seria converge foarte repede. Se scrie

$$e^x = 2^m e^u,$$

unde m şi u se calculează prin

$$\begin{array}{ll} z \leftarrow x/\ln 2; & m \leftarrow \mathit{integer}\left(z \pm \frac{1}{2}\right) \\ w \leftarrow z - m; & u \leftarrow w \ln 2 \end{array}$$

Aici semnul minus se utilizează dacă $x < 0$ deoarece $z < 0$. Încorporaţi tehnica de reducere în cod.

(c) Scrieţi o rutină care utilizează reducerea de rang $e^x = 2^m e^u$ şi calculează e^u din partea pară a fracţiei continue gaussiene, adică,

$$e^u = \frac{s+u}{s-u} \text{ unde } s = 2 + u^2 \left(\frac{2520 + 28u^2}{15120 + 420u^2 + u^4} \right).$$

Testaţi pe datele date la punctul (a).

Problema 2 (exponenţială) Un mod de a calcula funcţia exponenţială e^x este de a considera dezvoltarea Taylor trunchiată în jurul lui $x = 0$,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

Din nefericire pentru $|x|$ mare, pentru a atinge o precizie dată este nevoie de un număr mare de termeni. O proprietate specială a exponenţialei este $e^{2x} = (e^x)^2$. Aceasta conduce la o metodă numită scalare şi ridicare la pătrat (scaling and squaring method): se împarte x la 2 repetat până când $|x| < 1/2$, şi se utilizează dezvoltarea Taylor (16 termeni sunt mai mult decât este necesar), şi se ridică la pătrat repetat. Scrieţi o funcţie `expss(x)` care realizează aceşti trei paşi. (Funcţiile `cumprod` şi `polyval` pot ajuta la implementarea dezvoltării Taylor.) Testaţi funcţia dumneavoastră pentru $x = -30, -3, 3, 30$.

Problema 3 (sinus) Scrieţi o rutină ce calculează $\sin x$ pentru x în radiani, după algoritmul următor. Întâi, utilizând proprietăţile funcţie sinus, reduceţi rangul astfel încât $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Apoi, dacă $|x| < 10^{-8}$, punem $\sin x \approx x$; dacă $|x| > \pi/6$, punem $u = x/3$, calculăm $\sin u$ după formula (1) de mai jos şi apoi punem $\sin x \approx \left(3 - 4\sin^2 u\right)\sin u$; dacă $|x| \leq \pi/6$, punem $u = x$ şi calculăm $\sin u$ după cum urmează:

$$\sin u \approx u\left[\frac{-\frac{479249}{11511339840}\,u^6 + \frac{34911}{7613320}\,u^4 - \frac{29593}{207636}\,u^2 + 1}{1 + \frac{1671}{69212}\,u^2 + \frac{97}{351384}\,u^4 + \frac{2623}{1644477120}\,u^6}\right]. \tag{1}$$

Testaţi dacă softul folosit de dumneavoastră utilizează acest algoritm. *Notă*: Aceasta este aproximarea raţională Padé pentru sinus.

Problema 4 (logaritm natural) Scrieţi o rutină pentru lui calculul lui $\ln x$ cu ajutorul algoritmului descris în continuare şi bazat pe ,,raţionale telescopate" şi fracţii continue gaussiene şi testaţi pentru câteva valori ale lui x. Verificaţi dacă $x = 1$ şi returnaţi zero în caz afirmativ. Reduceţi rangul lui x determinând n şi r astfel încât $x = r \times 2^n$ cu $\frac{1}{2} \leq r < 1$. Apoi, puneţi $u = (r - \sqrt{2}/2)/(r + \sqrt{2}/2)$ şi calculaţi $\ln[(1+u)/(1-u)]$ cu aproximarea

$$\ln\frac{1+u}{1-u} \approx u\left(\frac{20790 - 21545.27u^2 + 4223.9187u^4}{10395 - 14237.635u^2 + 4778.8377u^4 - 230.41913u^6}\right)$$

valabilă pentru $|u| < 3 - 2\sqrt{2}$. În final, se pune

$$\ln x \approx \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln 2 + \ln\frac{1+u}{1-u}.$$

Problema 5 (tangentă) Scrieţi o rutină ce calculează tangenta lui x în radiani, utilizând algoritmul de mai jos. Testaţi rutina obţinută pentru mai multe valori ale lui x. Întâi, argumentul x se reduce la $|x| \leq \pi/2$ adăugând sau scăzând multiplii de π. Dacă $0 \leq |x| \leq 1.7 \times 10^{-9}$, punem $\tan x \approx x$. Dacă $|x| > \pi/4$, facem $u = \pi/2 - x$; altfel, setăm $u = x$. Calculăm acum aproximaţia

$$\tan u \approx u\left(\frac{135135 - 17336.106u^2 + 379.23564u^4 - 1.0118625u^6}{135135 - 62381.106u^2 + 3154.9377u^4 + 28.17694u^6}\right)$$

În final, dacă $|x| > \pi/4$, punem $\tan x \approx 1/\tan u$; dacă $|x| \leq \pi/4$, facem $\tan x \approx \tan u$. Notă: Acest algoritm se obţine din ,,raţionale telescopate" şi fracţii continue gaussiene pentru funcţia tangentă.

Problema 6 (Arcsin) Scrieţi o rutină ce calculează $\arcsin x$, bazată pe algoritmul de mai jos, ce utilizează raţionale telescopate pentru arcsinus. Dacă $|x| < 10^{-8}$, setaţi $\arcsin x \approx x$. Altfel, dacă $0 \le x \le \frac{1}{2}$, punem $u = x$, $a = 0$ şi $b = 1$; dacă $\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}\sqrt{3}$ puneţi $u = 2x^2 - 1$, $a = \pi/4$, şi $b = 1/2$; dacă $\frac{1}{2}\sqrt{3} < x \le \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ setaţi $u = 8x^4 - 8x^2 + 1$, $a = 3\pi/8$, şi $b = 1/4$; dacă $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} < x \le 1$, setaţi $u = \sqrt{\frac{1}{2}(1-x)}$, $a = \pi/2$, şi $b = -2$. Apoi calculaţi aproximanta

$$\begin{aligned}\arcsin u \approx u\Bigg(&1.0 + \frac{1}{6}u^2 + 0.075u^4 + 0.04464286u^6 + 0.03038182u^8\\ &+ 0.022375u^{10} + 0.01731276u^{12} + 0.01433124u^{14}\\ &+ 0.009342806u^{16} + 0.01835667u^{18} - 0.01186224u^{20}\\ &+0.03162712u^{22}\Big)\end{aligned}$$

În final, se pune $\arcsin x \approx a + b \arcsin u$. Testaţi rutina pentru divese valori ale lui x.

Problema 7 (arctangentă) Scrieţi o rutină care calculează $\arctan x$ pentru x în radiani după cum urmează. Dacă $0 \le x \le 1.7 \times 10^{-9}$, punem $\arctan x \approx x$. Dacă $1.7 \times 10^{-9} < x \le 2 \times 10^{-2}$, se utilizează seria trunchiată

$$\arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7.$$

Altfel, se pune $y = x$, $a = 0$ şi $b = 1$ dacă $0 \le x \le 1$; se pune $y = 1/x$, $a = \pi/2$ şi $b = -1$ dacă $1 < x$. Apoi punem $c = \pi/16$ şi $d = \tan c$ dacă $0 \le y \le \sqrt{2} - 1$ şi $c = 3\pi/16$ şi $d = \tan c$ dacă $\sqrt{2} - 1 < y \le 1$. Calculăm $u = (y - d)/(1 + dy)$ şi aproximarea

$$\arctan u \approx u\left(\frac{135135 + 171962.46u^2 + 52490.4832u^4 + 2218.1u^6}{135135 + 217007.46u^2 + 97799.3033u^4 + 10721.3745u^6}\right)$$

În final, punem $\arctan x \approx a + b(c + \arctan u)$. Notă: Acest algoritm utilizează ,,raţionale telescopate" şi fracţii continue gaussiene.

Problema 8 (Arctan) Un algoritm rapid pentru calculul $\arctan x$ cu o precizie de n biţi pentru $x \in (0, 1]$ este următorul: punem $a = 2^{-n/2}$, $b = x/(1 + \sqrt{1 + x^2})$, $c = 1$, şi $d = 1$. Apoi actualizăm repetat următoarele variabile, date de formulele de mai jos (ordinea este de la stânga la dreapta şi de sus în jos):

$$\begin{array}{lll} c \leftarrow \frac{2c}{1+a}; & d \leftarrow \frac{2ab}{1+b^2}; & d \leftarrow \frac{d}{1+\sqrt{1-d^2}} \\ d \leftarrow \frac{b+d}{1-bd}; & b \leftarrow \frac{d}{1+\sqrt{1+d^2}}; & a \leftarrow \frac{2\sqrt{a}}{1+a}. \end{array}$$

La fiecare pas, afişaţi $f = c \ln[(1 + b)/(1 - b)]$. Opriţi când $1 - a \le 2^{-n}$. Scrieţi o rutină pentru implementarea acestui algoritm în dublă precizie şi testaţi pentru diverse valori ale lui x. Comparaţi rezultatele cu cele obţinute cu funcţia arctangentă din softul utilizat. Notă: acest algoritm cu precizie multiplă este legat de teoria integralelor eliptice, şi utilizează media aritmetico-geometrică şi transformarea Landen ascendentă.

2 Calculul lui π

Problema 9 Lungimea semicercului unitate este π. Putem aproxima π utilizând triunghiuri şi matematică elementară. Considerăm semicercul cu arcul înjumătăţit ca în figura 1(a). Ipotenuza triunghiului dreptunghic este $\sqrt{2}$. Deci, o aproximare grosieră a lui π este $2\sqrt{2} \approx 2.8284$. În figura 1(b), considerăm un unghi θ care este $1/k$ din semicerc. Coarda din figură are lungimea $2\sin(\theta/2)$, deci $2k\sin(\theta/2)$ este o aproximare a lui π. Folosind formule trigonometrice obţinem

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \frac{1-\sqrt{1-\sin^2\theta}}{2} = \frac{\sin^2\theta}{2+2\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

Fie θ_n unghiul rezultat din divizarea arcului semicircular în 2^{n-1} părţi. Fie

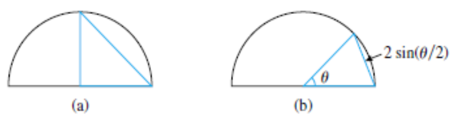

Figura 1: Calculul lui π

$S_n = \sin^2\theta_n$ şi $P_n = 2^n\sqrt{S_{n+1}}$. Arătaţi că $S_{n+1} = S_n/(2+2\sqrt{1-S_n})$ şi P_n este o aproximare a lui π. Pornind cu $S_2 = 1$ şi $P_1 = 2$, calculaţi S_{n+1} ş P_n recursiv pentru $2 \le n \le 20$.

Problema 10 Numărul iraţional π poate fi calculat aproximând aria cercului unitate ca limită a şirului $p_1, p_2, \ldots$ dat în continuare. Împărţim cercul unitate în 2^n sectoare. (Figura 2 ilustrează cazul $n = 3$.) Aproximaţi aria sectorului prin aria triunghiului isoscel. Unghiul θ_n este $2\pi/2^n$. Aria triunghiului este $1/2\sin\theta_n$. (Verificaţi.) Cea de-a n-a aproximare a lui π este $p_n = 2^{n-1}\sin\theta_n$. Arătaţi că

$$\sin\theta_n = \frac{\sin\theta_{n-1}}{\left[2\left(1+\sqrt{1-\sin^2\theta_{n-1}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

folosind formule trigonometrice cunoscute. Utilizaţi aceste relaţii de recurenţă pentru a genera şirurile $\sin\theta_n$ şi p_n ($3 \le n \le 20$) începând cu $\sin\theta_2 = 1$. Comparaţi cu calculul lui $4.0\arctan(1.0)$.

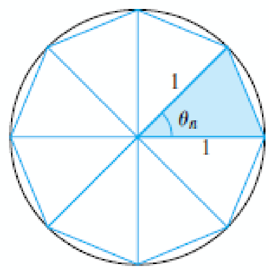

Figura 2: Calculul lui π

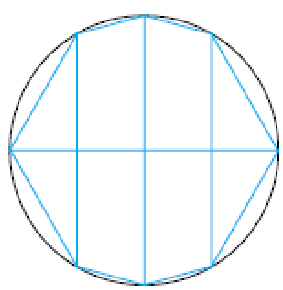
Figura 3: Calculul lui π prin arii de trapeze

Problema 11 Calculaţi π cu o metodă similară celei din problema precedentă, aproximând de această dată aria cercului unitate printr-un şir de arii de trapeze, aşa cum se arată în figura 3.

Problema 12 Scrieţi o rutină în precizie dublă sau extinsă pentru a implementa algoritmul 1 pentru calculul lui π. Cine converge mai repede, f ori g? Cât de precise sunt valorile finale? Comparaţi cu calculul în precizie dublă sau extinsă al lui $4.0 \arctan(1.0)$. *Indicaţie*: Valoare lui π cu 36 de cifre corecte

Algorithm 1 Calculul lui π

integer k; **real** a, b, c, d, e, f, g;
$a \leftarrow 0$;
$b \leftarrow 1$;
$c \leftarrow 1/\sqrt{2}$;
$d \leftarrow 0.25$;
$e \leftarrow 1$;
for $k = 1$ **to** 5 **do**
  $a \leftarrow b$;
  $b \leftarrow (b + c)/2$;
  $c \leftarrow \sqrt{ca}$;
  $d \leftarrow d - e(b - a)^2$;
  $e \leftarrow 2e$;
  $f \leftarrow b^2/d$;
  $g \leftarrow (b + c)^2/(4d)$;
  output $k, f, |f - \pi|, g, |g - \pi|$;
end for

este

$$3.141592653589793238462643383279502888$$

Notă: La începutul anilor 70 s-a descoprerit o nouă formulă pentru calculul lui π. Acest algoritm se bazează pe acea formulă, care este o consecinţă directă a metodei dezvoltate de Gauss pentru calculul integralelor eliptice şi a relaţiei integrale eliptice a lui Legendre, ambele cunoscute de peste 150 de ani! Analiza erorilor ne arată că apare o convergenţă rapidă la calculul lui π şi că numărul de cifre semnificative se dublează la fiecare pas. (Cititorul interesat poate consulta [3], [2] şi [4].)

Problema 13 O altă schemă cu convergenţă pătratică pentru calculul lui π, descoperită de Borwein şi Borwein în 1984 [1], este dată în algoritmul 2

Verificaţi numeric că $|x - \pi| \leq 10^{-2k}$. *Notă*: Ludolf van Ceulen (1540–1610) a calculat π cu 36 de cifre. Pachetele matematice moderne ca Matlab, Maple şi Mathematica pot calcula π cu zeci de mii de cifre în câteva secunde!

Algorithm 2 Computing π

```
integer k; real a, b, t, x;
a ← √2;
b ← 0;
x ← 2 + √2;
for k = 1 to 5 do
    t ← √a;
    b ← t(1 + b)/(a + b);
    a ← (1/2)(t + 1/t);
    x ← xb(1 + a)/(1 + b);
    output k, x, |x − π|;
end for
```

Bibliografie

[1] J. M. Borwein, P. B. Borwein, The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions, *SIAM Review*, **26**, 351–366, 1984

[2] J. M. Borwein, P. B. Borwein, *Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, Wiley, New York, 1987

[3] R. P. Brent, Fast multiple precision evaluation of elementary functions, *JACM* **23**, 242–251, 1976

[4] E. Salamin, Computation of π using arithmetic-geometric mean, *Mathematics of computation* **30**, 565–570, 1976