Aproximare prin metoda celor mai mici pătrate

Radu T. Trîmbiţaş

27 martie 2015

Fie $f \in L_w^2[a,b]$ şi $\Phi \leq L_w^2[a,b]$ de dimensiune $n+1$. Dorim să găsim o aproximantă $\varphi^* \in \Phi$ astfel încât $\|\varphi^* - f\|^2 \leq \|\varphi - f\|^2, \forall \varphi \in \Phi$.

Scriem

$$\varphi^*(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x), \tag{1}$$

unde $\{\varphi_k | k = 0, \ldots, n\}$ este o bază a lui Φ.

Coeficienţii sunt soluţiile ecuaţiilor normale

$$a_0(\varphi_0, \varphi_k) + a_1(\varphi_1, \varphi_k) + \cdots + a_n(\varphi_n, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k = 0, \ldots, n. \tag{2}$$

Dacă sistemul $\{\varphi_k | k = 0, \ldots, n\}$ este ortogonal, coeficienţii se pot obţine cu ajutorul formulelor

$$a_k = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{3}$$

Aproximanta poate fi continuă sau discretă, în funcţie de măsura aleasă în definiţia produsului scalar. În cazul continuu produsul scalar are forma

$$(g, h) = \int_a^b w(x)g(x)h(x)dx,$$

iar in cazul discret

$$(g, h) = \sum_{k=0}^{N} w_k g(x_k) h(x_k).$$

Să consideram relaţia de recurenţă pentru polinoamele ortogonale monice

$$\begin{aligned} \pi_{k+1}(x) &= (x-\alpha_k)\pi_k(x) - \beta_k\pi_{k-1}(x), k = 0, 1, 2, \ldots \\ \pi_0(x) &= 1, \pi_{-1}(x) = 0, \end{aligned}$$

unde

$$\beta_0 = \int_a^b w(x)f(x)dx = \mu_0.$$

Coeficienţii din relaţia de recurenţă (2) au expresia

$$\alpha_k = \frac{(x\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \beta_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1}}.$$

Reamintim câteva dintre polinoamele ortogonale clasice şi coeficienţii din relaţiile lor de recurenţă:

Polinoamele	Notaţia	Pondere	interval	α_k	β_k
Legendre	$P_n(l_n)$	1	[-1,1]	0	2 (k=0) $(4-k^{-2})^{-1}$ (k>0)
Cebîşev #1	T_n	$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$	$[-1,1]$	0	π (k=0) $\frac{1}{2}$ (k=1) $\frac{1}{4}$ (k>0)
Cebîşev #2	$U_n(Q_n)$	$(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$	$[-1,1]$	0	$\frac{1}{2}\pi$ (k=0) $\frac{1}{4}$ (k>0)
Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}$	$(1-t)^\alpha(1-t)^\beta$ $\alpha>-1$, $\beta>-1$	$[-1,1]$		
Laguerre	$L_n^{(\alpha)}$	$t^\alpha e^{-t}$ $\alpha>-1$	$[0,\infty)$	$2k+\alpha+1$	$\Gamma(1+\alpha)$ (k=0) $k(k+\alpha)$ (k>0)
Hermite	H_n	e^{-t^2}	$\mathbb{R}$	0	$\sqrt{\pi}$ (k=0) $\frac{1}{2}k$ (k>0)

Tabela 1: Polinoame ortogonale

Probleme propuse.

1. Să se gasească aproximanta discretă prin metoda celor mai mici pătrate pentru ponderea w(x)=1 şi baza $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

2. Să se gasească aproximanta continuă pe [-1,1], pentru $w(x) = 1$ şi baza formată din polinoamele Legendre.

3. Să se gasească aproximanta continuă pe [-1,1], pentru $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ şi baza formată din polinoamele Cebîşev de speţa I.

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x).$$

4. Un asteroid ce orbitează în jurul Soarelui a putut fi observat timp de câteva zile înainte să dispară. Iată 10 observaţii

$x_{1:5}$	-1.024940	-0.949898	-0.866114	-0.773392	-0.671372
$x_{6:10}$	-0.559524	-0.437067	-0.302909	-0.159493	-0.007464
$y_{1:5}$	-0.389269	-0.322894	-0.265256	-0.216557	-0.177152
$y_{6:10}$	-0.147582	-0.128618	-0.121353	-0.127348	-0.148895

Se doreşte calcularea traiectoriei pe baza acestor observaţii pentru a putea prevedea situaţia când orbita va fi din nou vizibilă. Se presupune un model elipsoidal pentru orbită

$$x^2 = ay^2 + bxy + cx + dy + e.$$

El ne conduce la un sistem supradeterminat, care trebuie rezolvat în sensul celor mai mici pătrate pentru a determina parametrii a, b, c, d, e. Realizaţi o estimare a erorii şi un test de încredere în model. Faceţi acelaşi lucru pentru modelul parabolic

$$x^2 = ay + e.$$

Care este mai probabil?

Probleme suplimentare

1. Să se gasească aproximanta discretă prin metoda celor mai mici pătrate pentru ponderea w(x)=1 şi baza formata din polinoamele Cebîşev de speţa I. Produsul scalar are forma

$$(g, h) = \sum_{k=1}^{n+1} g(\xi_k) h(\xi_k),$$

unde $\xi_k,\ k = 1, \ldots, n+1$ sunt rădăcinile polinomului Cebîşev de speţa I T_{n+1}.

2. Se dă un polinom prin coeficienţii săi relativ la o bază ortogonală $\{\pi_j\}$:

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i \pi_i(t).$$

Să se dea o metodă de evaluare analoagă schemei lui Horner. (*Indicaţie*: se va folosi relaţia de recurenţă şi coeficienţii ei.)