Metode de interpolare bazate pe diferenţe divizate

Radu Trîmbiţaş

4 octombrie 2005

1 Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Algoritmul nostru se bazează pe forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange:

$$(N_m f)(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{m} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i), \tag{1}$$

şi formula iterativă:

$$(N_k f)(x) = (N_{k-1} f)(x) + (x - x_0)...(x - x_{k-1}) f[x_0, ..., x_k], \qquad k = 1, ..., m,$$
$$(N_0 f)(x) = f(x_0).$$

Notaţia $f[x_0, \ldots, x_k]$ înseamnă diferenţa divizată de ordinul k a funcţiei f cu nodurile x_0, …, x_k.

Calculul diferenţelor divizate se poate face în formă tabelară cu algoritmul:

Intrare: x_0, x_1, ..., x_m, $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_m)$, ca primă coloană $Q_{0,0}$, $Q_{1,0}$, ..., $Q_{n,0}$ a tabelei Q.

Ieşire: numerele $Q_{0,0}$, $Q_{1,1}$, ..., $Q_{n,n}$, unde $Q_{i,i} = f[x_0, ..., x_i]$.

P1. for $i = 1, 2, ..., n$ do

for j=1,2,...,n do

$$Q_{i,j} := \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$$

P2. returnează $Q_{0,0}$, $Q_{1,1}$, ..., $Q_{n,n}$.

Exemplul 1. Fie funcţia dată mai jos (tabela 1); dorim să aproximăm $f(1.5)$ utilizând polinomul de interpolare Newton. Diferenţele divizate apar pe prima linie a tabelei. Polinomul Newton corespunzător este

$$
\begin{aligned}
(N_4 f)(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x-1.0) - 0.1087339(x-1.0)(x-1.3)+ \\
0.658784(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)+ \\
0.0018251(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9).
\end{aligned}
$$

Se verifică uşor că $(N_4 f)(1.5) = 0.5118200$.

x_i	$f(x_i)$	$\mathcal{D}^1$	$\mathcal{D}^2$	$\mathcal{D}^3$	$\mathcal{D}^4$
1.0	0.7651977	-0.4837057	-0.1087339	0.6587840	0.0018251
1.3	0.6200860	-0.5489460	-0.0494433	0.0680685	
1.6	0.4554022	-0.5786120	0.0118183		
1.9	0.2818186	-0.5715210			
2.2	0.1103623				

Tabela 1: Date pentru exemplul 1

Într-o implementare practică a algoritmului este convenabil să se sorteze în prealabil nodurile.

Intrare: x_0, x_1, ..., x_m, $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_m)$, x.

Ieşire: Valoarea P_i a polinomului de interpolare Newton.

P1. Sortează x_i crescător după $a_i = |x_i - x|$.

P2. $D_{0,0} := f(x_i); P_0 := D_{0,0}; S_1 := 1;$

P3. for $i = 1, ..., m$ do

P3.1. $D_{i,1} := f(x_i);$

P3.2. for $j = 0, ..., i-1$ do $y_{i,j} := x_i - x_j$

P3.3. for $j = 1, ..., i$ do

$$D_{i,j} := \frac{D_{i,j-1} - D_{i-1,j-1}}{y_{i,i-j+1}}.$$

P3.4. $S_i := S_{i-1} * a_{i-1}$; $P_i := P_{i-1} + S_i * D_{i,1}$;

P3.5. if $|P_i - P_{i-1}| < \varepsilon$ go to P4.

P4. returnează P_i.

2 Interpolare Hermite

Fie $x_k \in [a, b]$, $k = 0, \ldots, m$, $x_i \neq x_j$ pentru $i \neq j$, $r_k \in \mathbb{N}$, $k = 0, \ldots, m$, şi $f : [a, b] \to R$ astfel încât $\exists\ f^{(j)}(x_k)$, $k = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, r_k$. Problema de interpolare Hermite cere determinarea unui polinom P de grad minim, care verifică

$$P^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k), \qquad k = 0, \ldots, m, j = 0, \ldots, r_k.$$

Fie $n + 1 = m + r_0 + ... + r_m = (r_0 + 1) + ... + (r_m + 1)$. Polinomul de interpolare Hermite are expresia:

$$(H_n f)(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{r_k} h_{kj}(x) f^{(j)}(x_k), \tag{2}$$

unde h_{kj} sunt polinoamele fundamentale Hermite date de

$$h_{kj}(x) = \frac{(x - x_k)^j}{j!} u_k(x) \sum_{\nu=0}^{r_k - j} \frac{(x - x_k)^\nu}{\nu!} \left[\frac{1}{u_k(x)} \right]^{(\nu)}_{x = x_k}, \tag{3}$$

şi

$$u(x) = \prod_{k=0}^{m} (x - x_k)^{r_k},$$
$$u_k(x) = \frac{u(x)}{(x - x_k)^{r_k}}.$$

Expresia restului este:

$$(R_n f)(x) = \frac{u(x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi), \qquad \xi \in (\alpha, \beta)$$

unde $\alpha = \min(x, x_0, \ldots, x_m)$, $\beta = \max(x, x_0, \ldots, x_m)$.

Vom da o metodă de calcul a polinomului de interpolare Hermite cu noduri duble dedusă din polinomul de interpolare Newton. Dându-se x_i şi $f(x_i)$, $f'(x_i)$, $i = 0, \ldots, m$, definim secvenţa z_0, z_1, $\ldots$, z_{2m+1}

$$z_{2i} = z_{2i+1} = x_i, \qquad i = 0, \ldots, m.$$

Construim acum tabela de diferenţe divizate a lui f pentru nodurile z_i, $i = 0, \ldots, 2m+1$. Deoarece $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ pentru $i = 0, \ldots, m$, $f[z_{2i}, z_{2i+1}]$ este o diferenţă divizată cu noduri duble şi este egală cu $f'(x_i)$, deci în locul diferenţelor divizate de ordinul I $f[z_0, z_1]$, $f[z_2, z_3]$, ..., $f[z_{2m}, z]$ vom utiliza derivatele $f'(x_0)$, $f'(x_1)$,..., $f'(x_n)$. Celelalte diferenţe divizate se obţin în mod obşnuit, aşa cum arată tabela de mai jos. Acest algoritm se poate extinde şi la alte tipuri de interpolare Hermite. Se pare că metoda este datorată lui Powell.

z	$\mathcal{D}^0$	$\mathcal{D}^1$	$\mathcal{D}^2$
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$	$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	$f[z_0, z_1, z_2]$
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$	$f[z_1, z_2]$	$f[z_1, z_2, z_3]$
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$	$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	$f[z_2, z_3, z_4]$
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$	$f[z_3, z_4]$	$f[z_3, z_4, z_5]$
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$	$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

Algoritmul de interpolare Hermite. Calculează coeficienţii polinomului de interpolare Hermite (diferenţele divizate) a lui f cu nodurile duble $x_k \in [a, b]$, $k = 0, ..., m$.

Intrare. $x_0, ..., x_m, f(x_0), ..., f(x_m), f'(x_0), ..., f'(x_m)$.

Ieşire. Numerele $Q_{0,0}$, $Q_{1,1}$, ..., $Q_{2m+1,2m+1}$ (diferenţele divizate de pe prima linie a tabelei), unde

$$(H_{2m+1}f)(x) = Q_{0,0} + Q_{1,1}(x - x_0) + Q_{2,2}(x - x_0)^2 + Q_{33}(x - x_0)^2(x - x_1) + Q_{44}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 + \cdots + Q_{2m+1,2m+1}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \ldots (x-x_{m-1})^2(x-x_m).$$

P1. for $i = 0, ..., m$ do paşii P2 şi P3.

P2. $z_{2i} := x_i; z_{2i+1} := x_i$; $Q_{2i,0} := f(x_i)$; $Q_{2i+1,0} := f(x_i)$; $Q_{2i+1,1} := f'(x_i)$;

P3. if $i \neq 0$ then $Q_{2i,1} = \frac{Q_{2i,0} - Q_{2i-1,0}}{z_{2i} - z_{2i-1}}$.

P4. for $i = 2, 3, ..., 2m + 1$ do

for j=2,3,..., i do $Q_{i,j} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{z_i - z_{i-j}}$

P5. Extrage $Q_{0,0}$, $Q_{1,1}$, ..., $Q_{2m+1,2m+1}$. Stop.

Exemplu. Fie datele de intrare

k	x	$f(x)$	$F\prime(x)$
0	1.3	0.6200860	-0.5220232
1	1.6	0.4554022	-0.5698959
2	1.9	0.2818186	-0.5811571

Utilizând diferenţele divizate se obţine(datele de intrare sunt subliniate):

$$H_5(1.5) = 0.6200860 + (1.5-1.3)(-0.5220232) + (1.5-1.3)^2(-0.897427)+$$
$$(1.5-1.3)^2(1.5-1.6)(0.0663657)+$$
$$(1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2(1.5-1.9)(-0.0027738)$$
$$= 0.5118277$$

1.3	<u>0.6200860</u>	<u>-0.5220232</u>	-0.0897427	0.0663657	0.0026663	-.0027738
1.3	<u>0.6200860</u>	-0.5489460	-0.0698330	0.0679655	0.0010020	
1.6	<u>0.4554022</u>	<u>-0.5698959</u>	-0.0290937	0.0685667		
1.6	<u>0.4554022</u>	-0.5786120	-0.0084837			
1.9	<u>0.2818186</u>	<u>-0.5811571</u>				
1.9	<u>0.2818186</u>					

3 Probleme

1. Implementaţi o rutină pentru calculul valorilor polinomului de interpolare Hermite, dându-se punctele în care se face evaluarea, nodurile, valorile funcţiei şi ale derivatei în noduri.

2. Reprezentaţi pe acelaşi grafic f şi polinomul său de interpolare Hermite.

3. Scrieţi o rutină care reprezintă grafic o cubică parametrică Hermite (o curbă care trece prin două puncte date şi are în acele puncte tangente date).

4 Probleme practice

1. Pentru $f(x) = e^x$ şi nodurile de interpolare 0, 1, 2, aproximaţi $f(0.25)$ prin interpolare Hermite şi comparaţi rezultatul cu cel obţinut prin interpolare Lagrange. Daţi o delimitare a erorii. Comparaţi cu rezultatul furnizat de software-ul utilizat.

2. Utilizaţi valorile date mai jos pentru a aproxima $\sin 0.34$ utilizând interpolarea Hermite.

x	$\sin x$	$(\sin x)' = \cos x$
0.30	0.29552	0.95534
0.32	0.31457	0.94924
0.35	0.34290	0.93937

Daţi o delimitare a erorii şi comparaţi-o cu eroarea exactă. Adăugaţi datele pentru nodul $x = 0.33$ şi refaceţi calculele.

3. Un automobil care se deplasează pe un drum drept este cronometrată în mai multe puncte. Datele de observaţie se dau în tabela de mai jos. Utilizaţi interpolarea Hermite pentru a prevedea poziţia şi viteza automobilului la momentul $t = 10$.

Timpul	0	3	5	8	13
Distanţa	0	225	383	623	993
Viteza	75	77	80	74	72