Setul 1

Problema 1 *(a) Fie o formulă de cuadratură de tip Gauss de forma*

$$\int_{-a}^{a} w(t)f(t)\mathrm{d}\,t = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + R(f),$$

unde w este o funcţie pară (adică $w(-t) = w(t)$, $\forall t \in [-a, a]$). Arătaţi că $t_1 = -t_2$ şi $A_1 = A_2$.

(b) Deduceţi o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} f(t)\mathrm{d}\,t = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + R(f),$$

care să aibă grad maxim de exactitate. Simplificaţi cât mai mult calculele folosind punctul (a).

Problema 2 *Fie $a > 0$. Pornind de la o ecuaţie convenabilă şi folosind metoda lui Newton, deduceţi o metodă pentru aproximarea lui $\frac{1}{\sqrt{a}}$ fără împărţiri. Cum se alege valoarea de pornire? Care este criteriul de oprire? Deduceţi de aici o metodă pentru calculul lui $\sqrt{a}$ fără împărţiri.*

Setul 2

Problema 3 *(a) Fie o formulă de cuadratură de tip Gauss de forma*

$$\int_{-a}^{a} w(t)f(t)\mathrm{d}\,t = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + R(f),$$

unde w este o funcţie pară (adică $w(-t) = w(t)$, $\forall t \in [-a, a]$). Arătaţi că $t_1 = -t_2$ şi $A_1 = A_2$.

(b) Deduceţi o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{|t|} f(t)\mathrm{d}\,t = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + R(f),$$

care să aibă grad maxim de exactitate. Simplificaţi cât mai mult calculele folosind punctul (a).

Problema 4 *Fie $a > 0$. Pornind de la o ecuaţie convenabilă şi folosind metoda lui Newton, deduceţi o metodă pentru aproximarea lui $\frac{1}{a}$ fără împărţiri. Cum se alege valoarea de pornire? Care este criteriul de oprire? Cum veţi proceda pentru o implementare eficientă în virgulă flotantă?*