SEMINAR DE FIZICA

Fizica este ştiinţa care stabileşte legile fundamentale ce guvernează fenomenele din natură şi se ocupă cu studiul ***materiei***: a particulelor elementare, nucleelor atomice, atomilor, moleculelor, sistemelor formate din atomi şi molecule – aflate în diferite stări de agregare, cum sunt: corpurile solide, lichide şi gazoase, a ***câmpurilor*** (gravitaţional, electric, magnetic, electromagnetic), a ***formelor de mişcare*** în spaţiu şi timp a materiei, descriind ansamblul fenomenelor încadrate şi structurate în următoarele *capitole*: mecanica, termodinamica, fizica moleculară şi căldura, electricitatea, magnetismul, optica, fizica atomică şi nucleară.

Fizica este o ***ştiinţă experimentală***, iar primul pas spre cunoaştere îl constituie *observaţia*. Prin acumularea de observaţii referitoare la un anumit fenomen se poate emite o *ipoteză* care este necesar să fie verificată practic şi explicată, iar ipoteza confirmată de repetate *experimente*, deci adevărată, se încadrează sau devine o *teorie*.

Fizica operează cu ***mărimi fizice***, una dintre clasificări determină împărţirea acestora în *mărimi fizice fundamentale* **–** al căror număr este mic şi a căror alegere serveşte unei descrieri complete a fenomenelor fizice (precum lungimea, timpul, masa etc.), şi *mărimi fizice derivate* **–** toate celelalte (ca de exemplu impulsul, forţa, energia, puterea etc.) şi care sunt legate de mărimile fundamentale prin *legi* ale fizicii.

Pentru măsurarea mărimilor fizice se definesc *unităţile de măsură* şi *etaloanele unităţilor fundamentale*. *A măsura* înseamnă a compara mărimea fizică dată cu mărimea fizică de acelaşi fel care a fost aleasă drept unitate de măsură.

Unităţile de măsură ale mărimilor fizice fundamentale au fost definite riguros şi au devenit *unităţi de măsură fundamentale* iar cu ajutorul lor se exprimă unităţile de măsură ale tuturor celorlalte mărimi fizice, acestea purtând numele de *unităţi de măsură derivate*.

Mărimile fizice fundamentale şi unităţile lor, care determină sistemul de unităţi de măsură, ar putea fi alese arbitrar. S-a convenit, pentru simplitate, folosirea numai a unităţilor de măsură din *Sistemul Internaţional* (S.I.). Acesta defineşte următoarele mărimi fizice şi unităţi de măsură fundamentale:

Mărimi fizice şi unităţi de măsură fundamentale

Mărimea fizică		Unitatea de măsură (S.I.)	
1. lungimea (spaţiul, distanţa)	L (s, d)	metru	m
2. timpul	t	secundă	s
3. masa	m	kilogram	kg
4. temperatura	T	kelvin	K
5. intensitatea curentului electric	I	amper	A
6. intensitatea luminoasă	I_ℓ	candelă	cd
7. cantitatea de substanţă	ν	kilomol	kmol

Pe lângă acestea, mai amintim două mărimi suplimentare, cu unităţile lor de măsură.

Mărimi suplimentare şi unităţile lor de măsură

1. unghiul plan	α	radian	rad
2. unghiul solid	Ω	steradian	sr

Aflarea formulei de definiţie pentru mărimile fizice derivate se face plecând de la mărimile fizice fundamentale menţionate mai sus. Vom defini numeroase mărimi fizice derivate şi vom stabili pentru acestea unităţile de măsură din Sistemul Internaţional.

Vom ţine seama că, întrucât nu se pot aduna sau egala decât mărimi fizice de *aceeaşi* natura, fiecare formulă fizică trebuie să fie *omogenă* din punct de vedere *dimensional*, adică atât ambii membri ai unei egalităţi cât şi fiecare termen al unei sume algebrice trebuie să aibă aceleaşi *dimensiuni fizice* (*principiul omogenităţii dimensionale a formulelor fizice*). Aşadar, într-o formulă oarecare, de tipul $a + b = c$, trebuie ca $[a]_{SI} = [b]_{SI} = [c]_{SI}$.

Pentru multiplii şi submultiplii diferitelor unități se pot utiliza uneori prefixe, iar în afara Sistemului Internațional există şi unități tolerate, care condiționează în aplicații transformările de rigoare.

Prefixe folosite pentru multiplii şi submultiplii diferitelor unități de măsură

Prefixul	Simbolul prefixului	Factorul de multiplicare	Prefixul	Simbolul prefixului	Factorul de multiplicare
deca-	da	10	deci-	d	10^{-1}
hecto-	h	10^2	centi-	c	10^{-2}
kilo-	k	10^3	mili-	m	10^{-3}
mega-	M	10^6	micro-	μ	10^{-6}
giga-	G	10^9	nano-	n	10^{-9}
tera-	T	10^{12}	pico-	p	10^{-12}
peta-	P	10^{15}	femto-	f	10^{-15}
exa-	E	10^{18}	ato-	a	10^{-18}

INTRODUCERE

Tema I.1

Clasificări ale mărimilor fizice. Dați exemple de mărimi fizice fundamentale, derivate, scalare, vectoriale, specificând şi unitățile lor de măsură în S.I.

R:

Una dintre clasificările mărimilor fizice determină împărțirea acestora în *mărimi fizice fundamentale* – al căror număr este mic şi a căror alegere serveşte unei descrieri complete a fenomenelor fizice (precum lungimea, timpul, masa etc.), şi *mărimi fizice derivate* – toate celelalte (de exemplu impulsul, forța, energia etc.) şi care sunt legate de mărimile fundamentale prin legi ale fizicii. *Unitățile de măsură* corespunzătoare, pentru care este indicată utilizarea Sistemului Internațional (S.I.), sunt şi ele fundamentale sau derivate.

Mărimile fizice mai pot fi clasificate în:

a.) ***mărimi fizice scalare*** – caracterizate complet precizându-le valoarea numerică şi unitatea de măsură, mărimi independente de sistemul de referință (*scalari puri*: masa, temperatura, densitatea etc.) sau care depind de orientarea axelor de coordonate (*pseudoscalari*: aria, volumul, unghiul plan);

b.) ***mărimi fizice vectoriale*** – caracterizate complet prin cunoaşterea nu numai a valorii numerice (modul) şi a unității de măsură, dar şi a orientării, care implică precizarea direcției şi sensului lor (de exemplu accelerația, forța, viteza, impulsul etc.). Mărimile fizice vectoriale se pot reprezenta prin intermediul *vectorilor*.

Problema I.2

Să se scrie ce condiție trebuie să îndeplinească mărimile fizice a, b şi c dintr-o formulă de tipul $a + b = c$ şi să se determine unitățile de măsură, în S.I., ale mărimilor notate cu C în următoarele formule:

$$p+\frac{\rho v^2}{2}+\rho gh=C\,;\quad x=Ct^2\,;\quad a=\frac{C}{t^2}\,;\quad C_1=\ln\left(1+\frac{vt}{C_2}\right);\quad C_1=e^{C_2 t}\,.$$

R:

Deoarece nu se pot aduna sau egala decât mărimi fizice de *aceeaşi* natura, fiecare formulă fizică trebuie să fie *omogenă* din punct de vedere *dimensional*, adică atât ambii membri ai unei egalităţi cât şi fiecare termen al unei sume algebrice trebuie să aibă aceleaşi *dimensiuni fizice* (*principiul omogenităţii dimensionale a formulelor fizice*).

Aşadar, prima condiţie care trebuie îndeplinită de mărimile fizice a, b şi c într-o formulă oarecare, de tipul $a+b=c$ este ca ele să aibă aceeaşi unitate de măsură

$$[a]_{SI}=[b]_{SI}=[c]_{SI}\,. \tag{1}$$

Mai trebuie amintit faptul că este necesar ca mărimile fizice a, b, c să reprezinte fie scalari, fie vectori, adică vom putea scrie:

$$a+b=c \quad \text{sau} \quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{c}\,. \qquad (2)\ (3)$$

Aflăm unităţile de măsură, în S.I., ale mărimilor notate C din următoarele relaţii:

1.) dacă $p+\frac{\rho v^2}{2}+\rho gh=C$

$$[C]_{SI}=[p]_{SI}=[\rho v^2]_{SI}=[\rho gh]_{SI}=N/m^2\,; \tag{4}$$

2.) dacă $x=Ct^2$

$$[C]_{SI}=\frac{[x]_{SI}}{[t^2]_{SI}}=\frac{[x]_{SI}}{[t]_{SI}^2}=m/s^2\,; \tag{5}$$

3.) dacă $a=\frac{C}{t^2}$

$$[C]_{SI}=[a]_{SI}\cdot[t^2]_{SI}=[a]_{SI}\cdot[t]_{SI}^2=m\,; \tag{6}$$

4.) dacă $C_1=\ln\left(1+\frac{vt}{C_2}\right)$

$$[C_2]_{SI}=[v]_{SI}\cdot[t]_{SI}=m \quad \text{şi} \quad C_1 \text{ mărime adimensională;} \tag{7}$$

5.) dacă $C_1 = e^{C_2 t}$

$$[C_2]_{SI} = \frac{1}{[t]_{SI}} = s^{-1} \quad \text{şi} \quad C_1 \text{ mărime adimensională.} \qquad (8)$$

Tema I.3

Vectori. Clasificarea vectorilor

R:

Mărimile fizice vectoriale se pot reprezenta prin intermediul vectorilor. Un *vector* este un segment de dreaptă orientat, fiind caracterizat prin modul, direcţie şi sens.

Dacă vectorul, notat $\vec{a}$, este un segment orientat al dreptei Γ (numită *dreaptă-suport a vectorului* sau, simplu, *suportul vectorului*), una dintre extremităţile sale va fi *originea* (sau *punctul de aplicaţie*) iar cealaltă *vârful* vectorului.

Elementele ce caracterizează vectorul $\vec{a}$, cu originea în O şi vârful în A – care deci mai poate fi notat şi $\overrightarrow{OA}$, sunt:

- *modulul* (*mărimea* sau *valoarea*), adică lungimea segmentului de dreaptă, $a = |\vec{a}|$ sau $OA = |\overrightarrow{OA}|$;
- *direcţia*, ce coincide cu cea a suportului Γ (pe care se găsesc punctele O şi A) sau este orice paralelă la dreapta-suport;
- *sensul*, indicat de vârful vectorului şi dat de succesiunea O, A.

Prin definiţie, un vector al cărui modul este egal cu unitatea poartă numele de *vector unitate* (*vector unitar*) sau *versor*.

Versorii având orientarea corespunzătoare axelor Ox, Oy, Oz ale unui sistem ortogonal de coordonate $Oxyz$, folosiţi pentru a specifica direcţiile pozitive ale axelor respective, se numesc *versori fundamentali* şi se notează $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (aferent, în ordine, axelor Ox, Oy, Oz), evident cu

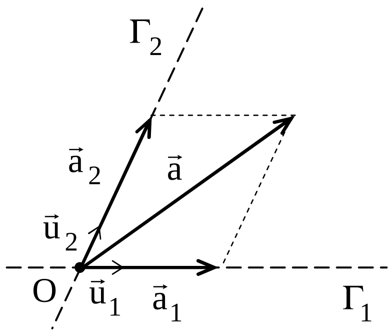
$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Tema I.4

Descompunerea unui vector după două (trei) direcţii şi proiecţia unui vector pe o axă

R:

Descompunerea unui vector după două direcții oarecare [10]. Fie Γ_1 şi Γ_2 două direcții ale căror versori sunt $\vec{u}_1$ şi respectiv $\vec{u}_2$. Componentele vectorului $\vec{a}$ pe direcțiile Γ_1 şi Γ_2 (coplanare cu vectorul dat) se obțin începând prin a duce paralele la fiecare din cele două direcții prin vârful vectorului, adică prin operația cunoscută de descompunere a vectorului (sau proiectând oblic vectorul) pe cele două direcții. Astfel, avem



$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 . \qquad (1)$$

Dacă cele două direcții sunt perpendiculare (axe ortogonale), notate Ox şi Oy (axa Ox se mai numeşte şi *axa absciselor* sau *abscisă*, iar axa Oy, *axa ordonatelor* sau *ordonată*), vom putea scrie:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} , \qquad (2)$$

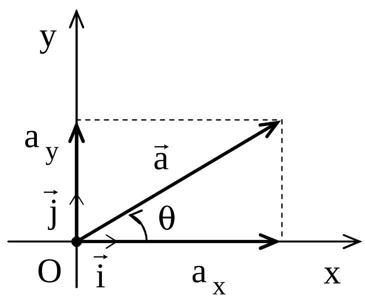
$\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt versorii celor două axe, cu

$$a_x = a \cos\theta , \quad a_y = a \sin\theta \qquad (3)\,(4)$$

şi

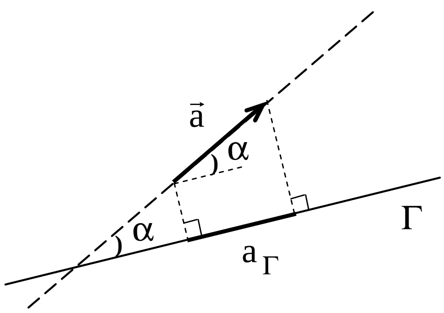
$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{a_y}{a_x} . \qquad (5)$$

Cadranul în care se află unghiul θ este determinat de semnele lui a_x şi a_y.



Operația de descompunere a unui vector reprezintă reciproca operației de compunere a vectorilor.

Proiecția unui vector $\vec{a}$ *pe o axă* Γ, de versor $\vec{u}$ (notată $\mathrm{Pr}_\Gamma\vec{a}$ sau a_Γ) (de fapt, *modulul vectorului proiecție*) este segmentul de dreaptă ce se obține ducând prin extremitățile vectorului perpendiculare (adică proiectând extremitățile vectorului) pe axa Γ,



$$\mathrm{Pr}_\Gamma\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{u} = a \cos\alpha . \qquad (6)$$

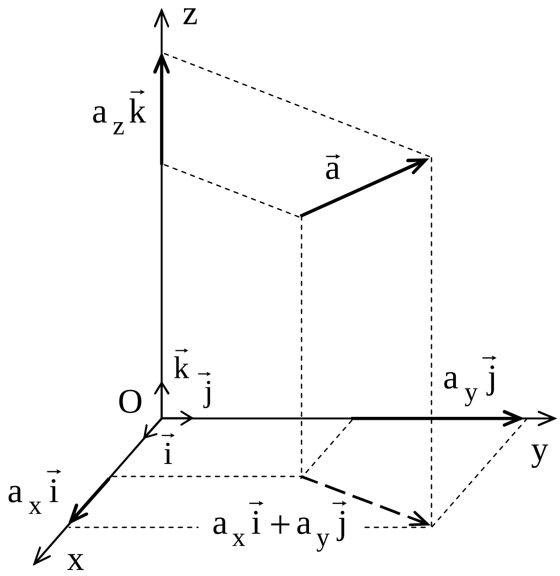
Proprietăți:

$$\mathrm{Pr}_{\Gamma}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{Pr}_{\Gamma}\vec{a} + \mathrm{Pr}_{\Gamma}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{u} + \vec{b}\cdot\vec{u}\,; \qquad (7)$$

$$\mathrm{Pr}_{\Gamma}(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\mathrm{Pr}_{\Gamma}\vec{a} = \lambda\vec{a}\cdot\vec{u}, \text{ cu } \lambda \text{ scalar.} \qquad (8)$$

Fie un vector $\vec{a}$. Într-un sistem de coordonate ortogonale scriem:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \qquad (9)$$



unde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ reprezintă versorii fundamentali ai axelor de coordonate Ox, Oy şi Oz, iar

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Cantitățile $a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$, $a_z\vec{k}$ reprezintă componentele vectorului $\vec{a}$ pe cele trei axe de coordonate (*componentele vectoriale* ale lui $\vec{a}$) iar a_x, a_y, a_z modulele acestora (numite şi *componentele scalare* ale lui $\vec{a}$) sau proiecțiile ortogonale ale vectorului pe axele Ox, Oy şi Oz. Vectorul $\vec{a}$ exprimat prin componente va fi notat: $\vec{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ sau $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Dacă într-un sistem de coordonate un vector $\vec{a}$ este caracterizat prin ansamblul componentelor sale a_x, a_y, a_z, schimbând sistemul de coordonate, se vor schimba şi componentele vectorului, spre deosebire de un scalar a cărui valoare nu depinde de alegerea sistemului de coordonate.

Dacă α, β, γ sunt unghiurile făcute de vectorul $\vec{a}$ cu axele de coordonate Ox, Oy, Oz (un unghi se măsoară totdeauna față de sensul pozitiv al axei), putem scrie

$$a_x = a\cos\alpha, \quad a_y = a\cos\beta, \quad a_z = a\cos\gamma. \qquad (10)$$

Componenta unui vector pe o axă este nulă, dacă vectorul este perpendicular pe acea axă ($\alpha = \pi/2$) şi este $\pm a$ dacă vectorul este paralel cu axa ($\alpha = 0$ sau $\alpha = \pi$).

Modulul vectorului $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, cu $|\vec{a}| = a$, este

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{11}$$

sau pentru $\vec{a} = (a_x, a_y)$,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \,. \tag{12}$$

Versorul vectorului $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ se defineşte astfel:

$$\frac{\vec{a}}{a} = \frac{a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} =$$

$$= \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \vec{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \vec{j} + \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \vec{k}, \tag{13}$$

unde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ sunt versorii canonici din $\mathbf{R}^3$, în timp ce pentru $\vec{a} = (a_x, a_y)$ scriem:

$$\frac{\vec{a}}{a} = \frac{a_x \vec{i} + a_y \vec{j}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \vec{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \vec{j}, \tag{14}$$

cu $\vec{i} = (1, 0)$ şi $\vec{j} = (0, 1)$, versorii canonici din $\mathbf{R}^2$ [32].

Problema I.5

Se consideră vectorii

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ şi $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$.

Să se calculeze:

1° $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ şi $\vec{a} - \vec{b}$; 2° $\lambda\vec{a}$; 3° $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 4° $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{r} \times \vec{a}$ ($\vec{r}$ este vectorul de poziţie);

5° $\vec{a}\,(\vec{b} \cdot \vec{c})$; 6° $\vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c})$; 7° $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$;

8° $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c})$, $[\vec{a}\,(\vec{b} \cdot \vec{c})] \times (\vec{a} \times \vec{c})$.

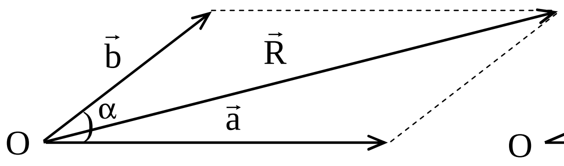
R:

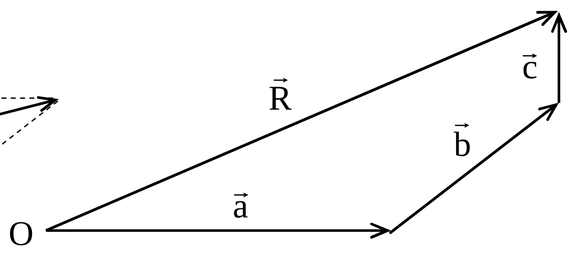
Analizăm şi prezentăm detaliat următoarele operaţii cu vectori:

1° Adunarea (compunerea) vectorilor

Această operație are sens numai dacă vectorii termeni sunt de aceeaşi natură, adică dacă reprezintă mărimi fizice de acelaşi fel.

În principiu, adunarea vectorilor se efectuează după *regula paralelogramului*: dacă $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt doi vectori concurenți, suma lor este vectorul $\vec{R}$, diagonala paralelogramului ce are ca laturi pe $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. *Regula poligonului* este indicată în cazul adunării a trei sau mai mulți vectori coplanari, când suma vectorilor este dată de linia de închidere a conturului poligonal construit cu vectorii componenți. Acelaşi rezultat se obține aplicând succesiv regula paralelogramului. Dacă, compunând mai mulți vectori, conturul poligonal se închide, rezultanta respectivilor vectori este nulă.





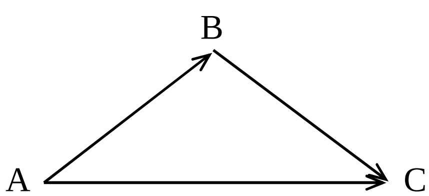
Avem următoarele relații ce provin din aplicarea metodei grafice de adunare a vectorilor:

a.) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (regula triunghiului); (1)

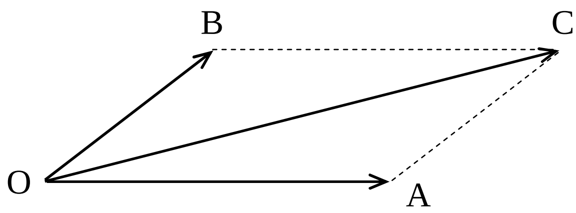
b.) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (regula paralelogramului); (2)

c.) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + ... + \overrightarrow{A_nB} = \overrightarrow{AB}$ (regula poligonului); (3)

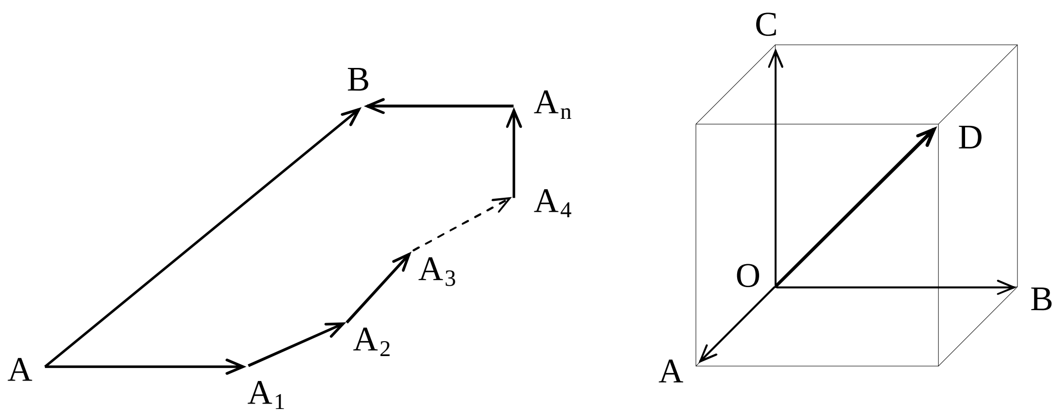
d.) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$ (regula paralelipipedului) [29]. (4)



a.)



b.)



c.) d.)

Operația de compunere a vectorilor este atât comutativă cât şi asociativă:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}\,; \tag{5}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})\,. \tag{6}$$

În continuare, studiem adunarea pe componente a vectorilor. Scriem

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} \tag{7}$$

şi deci

$$\begin{aligned}\vec{R} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\ &= (a_x + b_x)\,\vec{i} + (a_y + b_y)\,\vec{j} + (a_z + b_z)\,\vec{k} = \\ &= R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}\,.\end{aligned} \tag{8}$$

Identificând, obținem *componentele scalare ale vectorului rezultantă*:

$$R_x = a_x + b_x\,, \quad R_y = a_y + b_y\,, \quad R_z = a_z + b_z\,. \tag{9}$$

Aşadar, *componenta pe o axă a rezultantei este egală cu suma componentelor pe acea axă a vectorilor componenți*.

Modulul vectorului rezultantă se va determina utilizând teorema lui Pitagora generalizată

$$R^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha\,, \tag{10}$$

unde α este *unghiul dintre vectorii* $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$ – unghiul inferior lui π format de direcțiile celor doi vectori, şi deci

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}\,. \tag{11}$$

Întrucât modulul rezultantei a doi vectori depinde atât de modulele vectorilor care se compun cât şi de unghiul dintre ei, studiem următoarele cazuri particulare:

a.) dacă $\alpha = 0$; $\cos\alpha = 1$, atunci

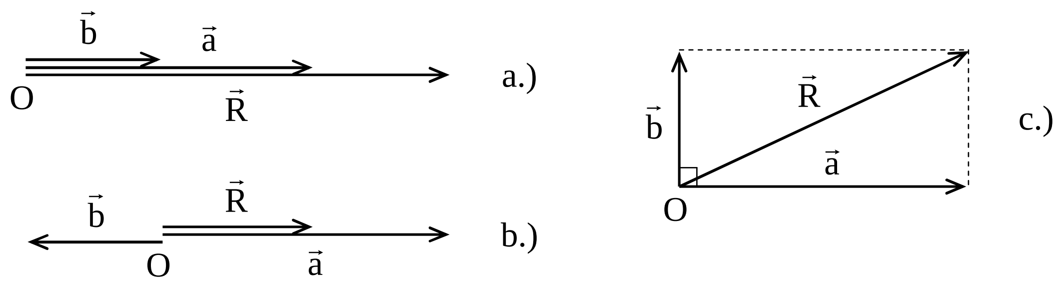
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = \sqrt{(a+b)^2} = a + b; \qquad (12)$$

b.) dacă $\alpha = \pi$; $\cos\alpha = -1$, atunci

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} = \sqrt{(a-b)^2} = a - b; \qquad (13)$$

c.) dacă $\alpha = \pi/2$; $\cos\alpha = 0$, atunci

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \qquad (14)$$



În cazul compunerii a trei vectori, avem

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \qquad (15)$$

şi procedăm analog cazului compunerii a doi vectori.

Astfel,

$$\begin{aligned}\vec{R} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) + (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) = \\ &= (a_x + b_x + c_x)\,\vec{i} + (a_y + b_y + c_y)\,\vec{j} + (a_z + b_z + c_z)\,\vec{k} = \\ &= R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} \qquad (16)\end{aligned}$$

iar, identificând, modulele componentelor vectorului rezultantă pe cele trei axe de coordonate vor fi:

$$R_x = a_x + b_x + c_x, \quad R_y = a_y + b_y + c_y, \quad R_z = a_z + b_z + c_z. \qquad (17)$$

Modulul vectorului rezultantă este

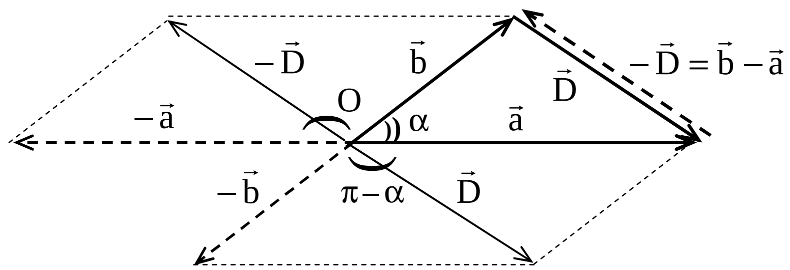
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\,. \qquad (18)$$

Diferența a doi vectori care au acelaşi punct de aplicație – deci operația de scădere vectorială, efectuată având în vedere faptul că ea se poate reduce la operația de adunare a doi vectori, conduce la obținerea vectorului diferență:

$$\vec{D} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}), \tag{19}$$

vârful vectorului diferență este orientat întotdeauna către descăzut, nu către scăzător, adică pentru vectorul $\vec{a} - \vec{b}$, către $\vec{a}$, iar pentru $\vec{b} - \vec{a}$, către $\vec{b}$.

Aşadar, rezultă că a scădea un vector $\vec{b}$ dintr-un vector $\vec{a}$ înseamnă a aduna la vectorul $\vec{a}$ *vectorul opus* $-\vec{b}$.



Componentele vectorului diferență $\vec{D}$ se obțin scriind pe componente vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$,

$$\begin{aligned} \vec{D} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) - (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\ &= (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k} = \\ &= D_x\vec{i} + D_y\vec{j} + D_z\vec{k}, \end{aligned} \tag{20}$$

din care, identificând, rezultă:

$$D_x = a_x - b_x, \quad D_y = a_y - b_y, \quad D_z = a_z - b_z. \tag{21}$$

Modulul vectorului $\vec{D}$ se obține aplicând teorema lui Pitagora generalizată. Astfel,

$$D^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\pi - \alpha) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha, \tag{22}$$

în care $(\pi - \alpha)$ este complementul unghiului α, şi deci

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}. \tag{23}$$

În general, pentru doi vectori $\vec{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ şi $\vec{b}\,(b_x, b_y, b_z)$ putem scrie

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z). \tag{24}$$

2° Produsul unui vector cu un scalar

Produsul unui vector $\vec{a}$ cu un scalar λ este un *vector* $\vec{b}$,

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \tag{25}$$

a cărui direcție coincide cu cea a vectorului $\vec{a}$, iar sensul său depinde de semnul scalarului (sensul va fi acelaşi cu $\vec{a}$, dacă $\lambda > 0$, sau opus lui $\vec{a}$, dacă $\lambda < 0$), vectorul $\vec{b}$ fiind astfel coliniar de acelaşi sens sau de sens opus cu $\vec{a}$. Modulul vectorului $\vec{b}$ este egal cu produsul dintre modulul vectorului $\vec{a}$ şi scalar, adică

$$|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \quad \text{sau} \quad b = \lambda a. \tag{26}$$

Relația $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ ($\vec{a} \neq 0$, $\lambda \in R^*$) reprezintă *criteriul de coliniaritate a doi vectori* $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$.

Dacă $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, aplicând relația (25), atunci

$$\vec{b} = \lambda(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k} =$$
$$= b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \tag{27}$$

şi deci componentele vectorului $\vec{b}$ sunt:

$$b_x = \lambda a_x, \quad b_y = \lambda a_y, \quad b_z = \lambda a_z. \tag{28}$$

Altfel scris, cu $\vec{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ şi $\vec{b}\,(b_x, b_y, b_z)$, avem

$$(b_x, b_y, b_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z). \tag{28′}$$

A împărți un vector $\vec{a}$ la un număr real (scalar) λ ($\lambda \neq 0$) înseamnă a-l înmulți cu numărul $1/\lambda$, adică

$$\frac{\vec{a}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \vec{a}, \tag{29}$$

modulul vectorului dat se împarte la $|\lambda|$, direcția nu se schimbă, iar sensul rămâne acelaşi, dacă $\lambda > 0$, şi se inversează, dacă $\lambda < 0$.

Înmulțirea vectorilor cu scalari este asociativă şi distributivă față de operația de adunare. Dacă λ şi μ sunt scalari, atunci

$$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}\,; \qquad (30)$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \quad \text{şi} \quad \lambda(\vec{a} + \vec{c}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{c}\,. \qquad (31)$$

În cazul în care scalarul este modulul vectorului $\vec{a}$, $|\vec{a}| = a$, vectorul $\vec{a}$ va fi egal cu produsul dintre modulul său a şi vectorul unitate $\vec{u}$, unde $|\vec{u}| = 1$, adică

$$\vec{a} = a\,\vec{u}\,. \qquad (32)$$

În particular, vectorul $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$ este numit *opusul vectorului* $\vec{a}$.

Totodată poate fi definit *vectorul nul*, vectorul care are toate componentele nule, verificându-se imediat şi faptul că suma unui vector cu opusul său dă vectorul nul,

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \equiv 0\,. \qquad (33)$$

Există proprietățile:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}\,; \qquad (34)$$

$$0 \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}, \ \text{cu } \lambda \text{ scalar.} \qquad (35)$$

3° Produsul scalar

Prin definiție, produsul scalar a doi vectori, $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, este un *scalar*, notat S, egal cu produsul modulelor vectorilor înmulțit cu cosinusul unghiului dintre cei doi vectori,

$$S = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\alpha\,, \qquad (36)$$

unde $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$.

Conform figurii, deoarece

$$|\vec{a}|\cos\alpha = \overline{OA} \quad \text{sau} \quad a\cos\alpha = \mathrm{Pr}_{\vec{b}}\,\vec{a}$$

şi respectiv

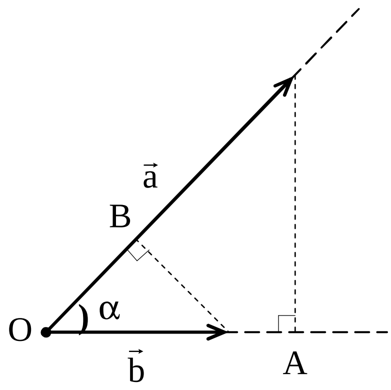
$$|\vec{b}|\cos\alpha = \overline{OB} \quad \text{sau} \quad b\cos\alpha = \mathrm{Pr}_{\vec{a}}\,\vec{b}\,,$$

avem

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \overline{OB} = |\vec{b}| \cdot \overline{OA}\,,$$

scris şi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \mathrm{Pr}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \mathrm{Pr}_{\vec{b}}\,\vec{a}\,.$$



Prin urmare, produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot \mathrm{Pr}_{\vec{a}}\,\vec{b} = b\cdot \mathrm{Pr}_{\vec{b}}\,\vec{a}, \tag{37}$$

este egal deci cu produsul dintre modulul unui vector şi proiecţia celuilalt vector pe direcţia primului (*interpretarea geometrică*).

Produsul scalar a doi vectori perpendiculari ($\alpha = \pi/2$) este nul, iar valoarea maximă se obţine când cei doi vectori concurenţi sunt coliniari şi au acelaşi sens ($\alpha = 0$).

În particular, produsul scalar al unui vector cu el însuşi este egal cu pătratul lungimii lui, adică

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2, \tag{38}$$

cu $\vec{a}^{\,2} \geq 0$, cazul egal se obţine doar pentru $\vec{a} = 0$.

Analog scriem şi

$$\vec{r}^{\,2} = x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \tag{39}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie.

De exemplu, s-a aplicat această proprietate a produsului scalar pentru aflarea modulului vectorului rezultantă a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, efectuând produsul scalar al vectorului $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$ cu el însuşi, adică

$$\vec{R}\cdot\vec{R} = \vec{R}^{\,2} = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} \quad \text{sau} \quad R^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

şi respectiv pentru obţinerea modulului vectorului diferenţă $\vec{D} = \vec{a} - \vec{b}$:

$$\vec{D}\cdot\vec{D} = \vec{D}^{\,2} = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} \quad \text{sau} \quad D^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b},$$

de unde

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} \tag{11$'$}$$

şi respectiv

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}\,. \tag{23$'$}$$

Produsul scalar este comutativ (simetric), având şi proprietatea de distributivitate faţă de operaţia de adunare a vectorilor:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}; \tag{40}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} \quad \text{sau} \quad (\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}\,. \tag{41}$$

De asemenea, există proprietățile:

$\vec{a} = 0$ sau $\vec{b} = 0$ (adică $a = 0$ sau $b = 0$) implică $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; (42)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ şi $a \neq 0, b \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$; (43)

$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$, cu λ scalar; (44)

$(\lambda\vec{a}) \cdot (\mu\vec{b}) = \lambda\mu(\vec{a} \cdot \vec{b})$, cu λ, μ scalari. (45)

Din relația (36), cu $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ şi $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, se poate face calculul unghiului dintre cei doi vectori. Obținem

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{46}$$

Scriem

$$\begin{aligned} S = \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \cdot \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \cdot \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \cdot \vec{j}) + \\ &+ a_y b_z (\vec{j} \cdot \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \cdot \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \cdot \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \cdot \vec{k}) \end{aligned} \tag{47}$$

iar cum

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cos 0 = 1 \quad \text{(sau scris } \vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1\text{)}, \tag{48}$$

respectiv

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 1 \cos(\pi / 2) = 0 \tag{49}$$

rezultă

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{50}$$

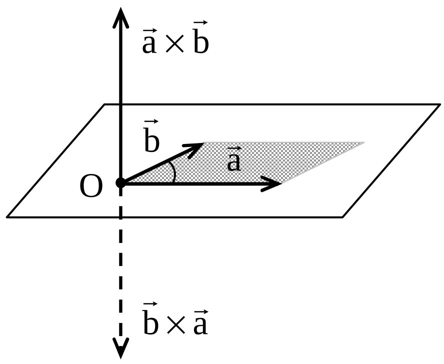
adică este suma produselor componentelor celor doi vectori, $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, în lungul celor trei axe.

Exemplu: Produsul scalar permite calcularea lucrului mecanic efectuat de o forță constantă ($L = \vec{F} \cdot \vec{d}$; cu $[L]_{SI} = J$).

4° Produsul vectorial

Produsul vectorial a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, care fac între ei un unghi α, este un *vector* $\vec{P}$ a cărui direcție este întotdeauna perpendiculară pe planul determinat de cei doi vectori (punctul său de aplicație coincide cu cel al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$), iar sensul său este dat de regula burghiului drept (regula mâinii drepte), astfel încât, urmare a rotirii pe drumul cel mai scurt ($\alpha < \pi$), $\vec{a}$ să se suprapună peste $\vec{b}$,

$$\vec{P} = \vec{a} \times \vec{b}. \qquad (51)$$



Modulul vectorului produs vectorial, cu $|\vec{P}| = P$, este egal cu produsul modulelor vectorilor înmulțit cu sinusul unghiului dintre ei

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \alpha, \qquad (52)$$

unde $\alpha \in (0, \pi)$, fiind egal cu aria paralelogramului construit cu vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ (de exemplu, baza b înmulțită cu înălțimea a sin α) iar acest lucru îl vom demonstra scriind:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha,$$

dar, conform figurii,

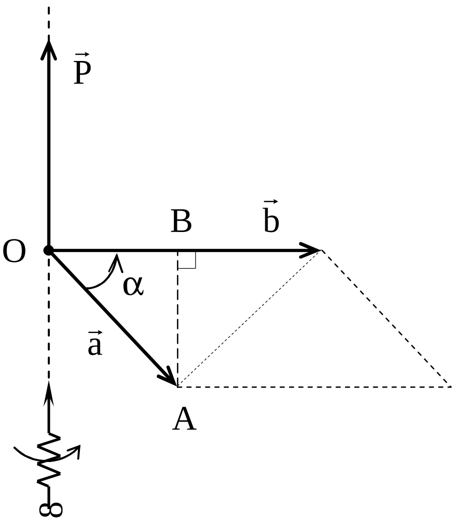
$$\overline{AB} = |\vec{a}| \sin \alpha$$

şi astfel găsim

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \overline{AB} \cdot |\vec{b}|,$$

relație pe care o putem scrie sub forma

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 2 \frac{\overline{AB} \cdot |\vec{b}|}{2}, \qquad (53)$$



subînțelegând că $\frac{\overline{AB} \cdot |\vec{b}|}{2}$ reprezintă aria unuia dintre cele două triunghiuri formate prin trasarea diagonalei care trece prin A a paralelogramului (*interpretarea geometrică*).

Produsul vectorial, în cazul în care cei doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt paraleli ($\alpha = 0$) sau antiparaleli ($\alpha = \pi$), este nul.

În particular, produsul vectorial al unui vector cu el însuşi este nul:

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0. \qquad (54)$$

Produsul vectorial este anticomutativ (antisimetric) şi distributiv față de adunarea vectorilor,

$$\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})\,; \tag{55}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} \quad \text{sau} \quad (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\,. \tag{56}$$

De asemenea, există proprietățile:

$$\vec{a}\times\vec{b} = 0 \text{ şi } a\neq 0, b\neq 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}\,||\,\vec{b}\,; \tag{57}$$

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda\,(\vec{a}\times\vec{b})\,, \text{ cu } \lambda \text{ scalar;} \tag{58}$$

$$(\lambda\vec{a})\times(\mu\vec{b}) = \lambda\mu\,(\vec{a}\times\vec{b})\,, \text{ cu } \lambda,\,\mu \text{ scalari,} \tag{59}$$

precum şi

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\cdot\vec{b}^{\,2} - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2\,. \tag{60}$$

Vectorii $\vec{a}\times\vec{b}$ şi $\vec{a}$, respectiv $\vec{b}$ sunt perpendiculari, adică $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ şi $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$. Prin urmare, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b})$ formează un triedru drept.

Expresia analitică a produsului vectorial într-un sistem de coordonate ortogonale se obține scriind

$$\begin{aligned}\vec{P} = \vec{a}\times\vec{b} &= (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) = \\ &= a_x b_x(\vec{i}\times\vec{i}) + a_x b_y(\vec{i}\times\vec{j}) + a_x b_z(\vec{i}\times\vec{k}) + \\ &+ a_y b_x(\vec{j}\times\vec{i}) + a_y b_y(\vec{j}\times\vec{j}) + a_y b_z(\vec{j}\times\vec{k}) + \\ &+ a_z b_x(\vec{k}\times\vec{i}) + a_z b_y(\vec{k}\times\vec{j}) + a_z b_z(\vec{k}\times\vec{k})\,,\end{aligned} \tag{61}$$

dar produsele vectoriale ale versorilor fundamentali vor fi

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 1\cdot 1\sin 0 = 0\,, \tag{62}$$

respectiv

$$\begin{aligned}&\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}\\ &\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}\\ &\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}\,,\end{aligned} \tag{63}$$

şi găsim

$$\vec{P} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k}\,. \tag{64}$$

Totodată,

$$\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k} \tag{65}$$

iar prin identificare aflăm componentele vectorului produs vectorial:

$$P_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad P_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad P_z = a_x b_y - a_y b_x \tag{66}$$

notate şi

$$(\vec{a}\times\vec{b})_x = a_y b_z - a_z b_y$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})_y = a_z b_x - a_x b_z \qquad (66')$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})_z = a_x b_y - a_y b_x .$$

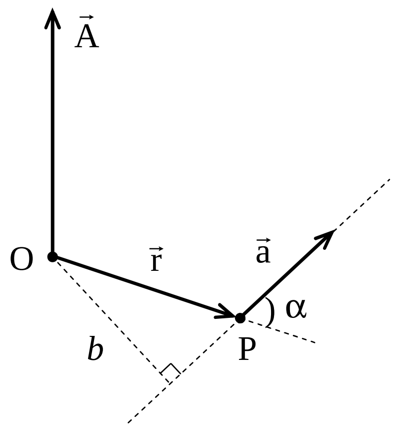
Acelaşi rezultat se obține folosind scrierea produsului vectorial sub formă de determinant:

$$\vec{P} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k}, \qquad (67)$$

determinant de ordinul 3, care se calculează utilizând regula triunghiurilor sau regula lui Sarrus.

Prin definiție, *momentul unui vector* $\vec{a}$ *față de un pol* O este produsul vectorial dintre vectorul de poziție $\vec{r}$ al punctului de aplicație al vectorului $\vec{a}$ şi vectorul $\vec{a}$.



Notăm

$$\vec{A} = \vec{r}\times\vec{a}, \qquad (68)$$

unde vectorul de poziție $\vec{r}$ are componentele (scalare) x, y, z, adică $\vec{r} = (x, y, z)$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (69)$$

În general, vectorul de poziție ($\vec{r}$) este un vector ce caracterizează poziția unui alt vector ($\vec{a}$) față de un anumit punct, numit pol (O), având punctul de aplicație în acel punct şi vârful în originea vectorului respectiv (P) [10].

Aşadar, avem

$$\vec{A} = \vec{r}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= (ya_z - za_y)\,\vec{i} + (za_x - xa_z)\,\vec{j} + (xa_y - ya_x)\,\vec{k}, \qquad (70)$$

de unde, scriind

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}, \qquad (71)$$

rezultă componentele vectorului $\vec{A}$:

$$\begin{aligned} A_x &= (\vec{r}\times\vec{a})_x = ya_z - za_y \\ A_y &= (\vec{r}\times\vec{a})_y = za_x - xa_z \\ A_z &= (\vec{r}\times\vec{a})_z = xa_y - ya_x. \end{aligned} \qquad (72)$$

Modulul vectorului moment al vectorului $\vec{a}$ *față de un pol* O este:

$$|\,\vec{A}\,| = |\,\vec{r}\times\vec{a}\,| = ra \sin\alpha = ab, \qquad (73)$$

unde s-a notat cu b distanța de la polul O la dreapta-suport a vectorului $\vec{a}$, iar $b = r \sin \alpha$.

Exemplu: Produsul vectorial şi, în particular, momentul unui vector față de un pol permit calcularea momentului unei forței ($\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$, al cărui modul este $M = Fr \sin(\vec{r}, \vec{F}) = Fb$, unde b este brațul forței – egal cu distanța de la pol la suportul forței; cu $[\vec{M}]_{SI} = N\cdot m$) sau a momentului cinetic ($\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$; cu $[\vec{L}]_{SI} = J\cdot s$).

5° Dublul produs scalar

Avem

$$\vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c}) = \vec{a}\cdot S = \vec{B} \text{ – vector}, \qquad (74)$$

cu

$$S = \vec{b}\cdot\vec{c} = b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z \text{ – scalar}, \qquad (75)$$

şi ținem seama că operația nu este asociativă, ordinea înmulțirii având aici un rol important deoarece, în general, $\vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c}) \neq (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$. Vectorul $\vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c})$ este paralel cu $\vec{a}$.

Scriem

$$\begin{aligned} \vec{B} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z) = \\ &= a_x(b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z)\,\vec{i} + a_y(b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z)\,\vec{j} + \\ &+ a_z(b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z)\,\vec{k}, \end{aligned} \qquad (76)$$

dar totodată

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}. \tag{77}$$

Identificând, obținem componentele vectorului dublu produs scalar

$$\begin{aligned} B_x &= a_x(b_xc_x + b_yc_y + b_zc_z) \\ B_y &= a_y(b_xc_x + b_yc_y + b_zc_z) \\ B_z &= a_z(b_xc_x + b_yc_y + b_zc_z). \end{aligned} \tag{78}$$

În general, efectuând produsul scalar a n vectori, rezultatul va fi un scalar, dacă n este par, sau un vector, dacă n impar.

Proprietăți:

$$(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c}\,\vec{d} = \vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}; \tag{79}$$

$$(\lambda\vec{a})\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}\,(\lambda\vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}\,(\lambda\vec{c}) = \lambda\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c},\ \text{cu } \lambda \text{ scalar.} \tag{80}$$

Există următoarea identitate vectorială:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\cdot\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}). \tag{81}$$

6° Produsul mixt

Scriem

$$\vec{a}\,(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{P} = A \ - \text{scalar,} \tag{82}$$

cu

$$\vec{P} = \vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} - \text{vector.} \tag{83}$$

Înlocuim

$$A = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot\vec{i} & (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot\vec{j} & (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot\vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{84}$$

şi calculăm, având în vedere că $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$ şi $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$, iar în final obținem

$$A = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= a_x (b_y c_z - b_z c_y) + a_y (b_z c_x - b_x c_z) + a_z (b_x c_y - b_y c_x). \qquad (85)$$

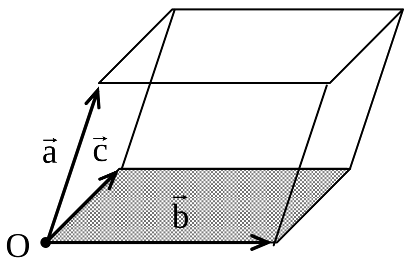
Produsul mixt este simetric la permutări circulare, proprietate scrisă:

$$\vec{a}\,(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\,(\vec{a}\times\vec{b}) =$$

$$= -\,\vec{b}\,(\vec{a}\times\vec{c}) = -\,\vec{a}\,(\vec{c}\times\vec{b}) = -\,\vec{c}\,(\vec{b}\times\vec{a}), \qquad (86)$$

şi deci, ca o consecință a relației de definiție, la o permutare a vectorilor se schimbă cel mult semnul (dacă permutarea este impară) [25].

Produsul mixt, până la semn, este numeric egal cu volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori, dacă cei trei vectori sunt necoplanari, adică dacă paralelipipedul există. Dacă cei trei vectori $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$ sunt coplanari, produsul mixt este nul.



În particular,

$$\vec{a}\,(\vec{a}\times\vec{b}) = 0 \quad \text{şi} \quad \vec{b}\,(\vec{a}\times\vec{b}) = 0, \qquad (87)$$

egalități demonstrate atât din calculul produsului scalar, în care ținem cont că $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ şi $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$, cât şi ca urmare a scrierii sub formă de determinant (el având două linii identice).

7° Dublul produs vectorial

Avem

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{P} = \vec{V} \text{ – vector}, \qquad (88)$$

cu

$$\vec{P} = \vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{ – vector}, \qquad (89)$$

scris

$$\vec{P} = (b_y c_z - b_z c_y)\,\vec{i} + (b_z c_x - b_x c_z)\,\vec{j} + (b_x c_y - b_y c_x)\,\vec{k}\,. \qquad (90)$$

Exprimăm $\vec{V}$ sub formă de determinant astfel:

$$\vec{V} = \vec{a} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{vmatrix} =$$

$$= [a_y (b_x c_y - b_y c_x) - a_z (b_z c_x - b_x c_z)]\,\vec{i} +$$

$$+ [a_z (b_y c_z - b_z c_y) - a_x (b_x c_y - b_y c_x)]\,\vec{j} +$$

$$+ [a_x (b_z c_x - b_x c_z) - a_y (b_y c_z - b_z c_y)]\,\vec{k} \pm$$

$$\pm\, a_x b_x c_x\,\vec{i} \pm a_y b_y c_y\,\vec{j} \pm a_z b_z c_z\,\vec{k} =$$

$$= [(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)\,b_x - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)\,c_x]\,\vec{i} +$$

$$+ [(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)\,b_y - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)\,c_y]\,\vec{j} +$$

$$= [(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)\,b_z - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)\,c_z]\,\vec{k} \qquad (91)$$

de unde, în urma calculelor, se obține deci

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c} = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \qquad (92)$$

relație ce reprezintă *formula de descompunere a dublului produs vectorial*.

Componentele vectorului dublu produs vectorial pot fi notate:

$$[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_x = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,b_x - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,c_x$$

$$[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_y = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,b_y - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,c_y \qquad (93)$$

$$[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_z = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,b_z - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,c_z\,.$$

De asemenea, avem

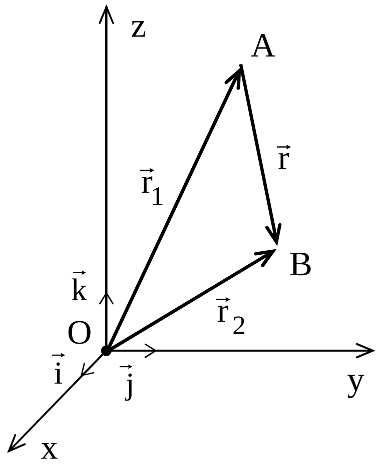
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}\,(\vec{b} \cdot \vec{c})\,. \qquad (94)$$

Există următoarea identitate vectorială:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = 0\,. \qquad (95)$$

Problema I.2

Două particule au la un moment dat pozițiile determinate de vectorii de poziție $\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$. a.) Să se exprime poziția $\vec{r}$ a celei de-a doua particule față de prima. b.) Să se calculeze modulele vectorilor $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ şi $\vec{r}$. c.) Să se găsească unghiurile formate de cei trei vectori.



R:

a.) Cunoscând că $\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$, vom scrie

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}. \tag{1) (2}$$

Vectorul poziție relativă a celei de-a doua particule față de prima este

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{3}$$

Utilizând scrierea pe componente a celor doi vectori de poziție,

$$\vec{r} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) =$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \tag{4}$$

şi totodată cu

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{5}$$

prin identificare, obținem componentele vectorului $\vec{r}$:

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1 \quad \text{şi} \quad z = z_2 - z_1. \tag{6}$$

b.) Conform teoremei lui Pitagora, avem

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{7}$$

de unde

$$|\vec{r}_1| = r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \tag{8}$$

$$|\vec{r}_2| = r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \tag{9}$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{10}$$

c.) Folosind teoria produsului scalar şi notând unghiurile formate de perechile de vectori $\alpha_1 = (\vec{r}, \vec{r}_1)$, $\alpha_2 = (\vec{r}, \vec{r}_2)$ şi $\alpha = (\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, scriem

$$\vec{r} \cdot \vec{r}_1 = r r_1 \cos\alpha_1 \quad \text{şi} \quad \vec{r} \cdot \vec{r}_1 = x x_1 + y y_1 + z z_1, \qquad (11)\ (12)$$

din care găsim

$$\cos\alpha_1 = \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r r_1} = \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}. \qquad (13)$$

Procedând analog pentru celelalte două cazuri,

$$\vec{r} \cdot \vec{r}_2 = r r_2 \cos\alpha_2 \quad \text{şi} \quad \vec{r} \cdot \vec{r}_2 = x x_2 + y y_2 + z z_2, \qquad (14)\ (15)$$

obținem

$$\cos\alpha_2 = \frac{x x_2 + y y_2 + z z_2}{r r_2} = \frac{x x_2 + y y_2 + z z_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (16)$$

iar în continuare

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = r_1 r_2 \cos\alpha \quad \text{şi} \quad \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \qquad (17)\ (18)$$

de unde rezultă

$$\cos\alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (19)$$

Problema I.3

a.) Dacă vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, cu a = 2 şi b = 3, formează un unghi $\alpha = 30°$, să se calculeze suma, respectiv diferența celor doi vectori, precum şi proiecția vectorului $\vec{a}$ pe direcția vectorului $\vec{b}$, ca şi cea a vectorului $\vec{b}$ pe direcția lui $\vec{a}$.

R:

Vectorul sumă este

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \qquad (1)$$

iar modulul său, conform teoremei cosinusului, are expresia

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Cu a = 2, b = 3 şi cum $\alpha = 30°$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, obținem

$$c = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6\sqrt{3}} = 4{,}83. \qquad (3)$$

Modulul vectorului diferență, scris

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}, \qquad (4)$$

este

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \qquad (5)$$

iar utilizând datele problemei rezultă

$$d = \sqrt{2^2 + 3^2 - 6\sqrt{3}} = 1{,}61. \qquad (6)$$

Proiecția vectorului $\vec{a}$ pe direcția lui $\vec{b}$ este:

$$\Pr_{\vec{b}}\vec{a} \equiv a_b = a\cos\alpha \qquad (7)$$

şi cea a vectorului $\vec{b}$ pe direcția lui $\vec{a}$

$$\Pr_{\vec{a}}\vec{b} \equiv b_a = b\cos\alpha, \qquad (8)$$

astfel

$$a_b = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}73 \quad \text{şi} \quad b_a = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}59. \qquad (9)\ (10)$$

b.) Să se calculeze modulul vectorului diferență a vectorilor $\vec{a}$ ($a = 4$) şi $\vec{b}$ ($b = 7$), dacă modulul vectorului sumă a celor doi vectori $\vec{c}$ este $c = 7$.

R:

Cei doi vectori sumă, respectiv diferență sunt:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{şi} \quad \vec{d} = \vec{a} - \vec{b}. \qquad (1)\ (2)$$

Conform teoremei lui Pitagora generalizată, avem

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} \qquad (3)$$

din care obținem

$$2\vec{a}\cdot\vec{b} = c^2 - (a^2 + b^2) \qquad (4)$$

iar înlocuind în relația

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} \qquad (5)$$

rezultă

$$d^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2, \qquad (6)$$

de unde

$$d = \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}\,. \qquad (7)$$

Cu a = 4, b = 7 şi c = 7, aflăm

$$d = \sqrt{2(4^2 + 7^2) - 7^2} = \sqrt{81} = 9\,, \qquad (8)$$

deci modulul vectorului diferență este d = 9.

c.) Dacă modulul vectorului sumă $\vec{c}$, respectiv cel al vectorului diferență $\vec{d}$ a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, de module egale, este egal cu modulele vectorilor componenți, să se calculeze unghiurile formate în ambele cazuri de cei doi vectori.

R:

Potrivit teoremei cosinusului, modulul vectorului sumă şi cel al vectorului diferență sunt:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} \quad \text{şi} \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta}\,, \qquad (1)\,(2)$$

dar conform enunțului problemei avem $a = b = c$, respectiv $a = b = d$, deci

$$c^2 = c^2 + c^2 + 2c^2\cos\alpha = 2c^2(1 + \cos\alpha) \qquad (3)$$

sau

$$d^2 = d^2 + d^2 - 2d^2\cos\beta = 2d^2(1 - \cos\beta) \qquad (4)$$

din care, calculând

$$\frac{1}{2} = 1 + \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{1}{2} \qquad (5)$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{1}{2}\,, \qquad (6)$$

rezultă

$$\alpha = 120° \quad \text{şi} \quad \beta = 60°\,. \qquad (7)\,(8)$$

d.) Să se calculeze următoarele produse scalare sau vectoriale: $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, respectiv $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{c}$, $\vec{b}\times\vec{c}$, ca şi modulele produselor vectoriale şi ariile paralelogramelor construite cu vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, $\vec{a}$ şi $\vec{c}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$, dacă: $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

R:

Calculăm

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\vec{i} - 3\vec{j})\cdot(\vec{i} + 4\vec{j}) = 2\,\vec{i}\cdot\vec{i} - 12\,\vec{j}\cdot\vec{j} = -10\,; \qquad (1)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = (2\vec{i} - 3\vec{j})\cdot(3\vec{i} + 2\vec{j}) = 6\,\vec{i}\cdot\vec{i} - 6\,\vec{j}\cdot\vec{j} = 0\,; \qquad (2)$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = (\vec{i} + 4\vec{j})\cdot(3\vec{i} + 2\vec{j}) = 3\vec{i}\cdot\vec{i} + 8\,\vec{j}\cdot\vec{j} = 11, \qquad (3)$$

respectiv

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 11\vec{k} \quad \text{şi} \quad |\vec{a}\times\vec{b}| = 11\,; \qquad (4)\,(5)$$

$$\vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 13\vec{k} \quad \text{şi} \quad |\vec{a}\times\vec{c}| = 13\,; \qquad (6)\,(7)$$

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -10\,\vec{k} \quad \text{şi} \quad |\vec{b}\times\vec{c}| = 10\,. \qquad (8)\,(9)$$

Totodată, modulele produselor vectoriale reprezintă ariile paralelogramelor construite cu vectorii daţi: $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, $\vec{a}$ şi $\vec{c}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$:

$$\text{Aria } (\vec{a}\times\vec{b}) = |\vec{a}\times\vec{b}| = 11 \qquad (10)$$

$$\text{Aria } (\vec{a}\times\vec{c}) = |\vec{a}\times\vec{c}| = 13 \qquad (11)$$

$$\text{Aria } (\vec{b}\times\vec{c}) = |\vec{b}\times\vec{c}| = 10\,. \qquad (12)$$

e.) Să se demonstreze că vectorii $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ sunt perpendiculari. Să se dea exemple şi de alţi vectori perpendiculari.

R:

Pentru a demonstra că vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt perpendiculari este necesar să se arate că produsul lor scalar este nul, întrucât scriind

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha = 0\,, \qquad (1)$$

implică $\cos\alpha = 0$, adică $\alpha = \dfrac{\pi}{2}\,\text{rad}$.

Prin urmare,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (6\vec{i} + 3\vec{j})\cdot(2\vec{i} - 4\vec{j}) = 6\cdot 2 - 3\cdot 4 = 0\,, \qquad (2)$$

deci cei doi vectori sunt perpendiculari.

Pot fi date alte câteva exemple de vectori perpendiculari:

$\vec{a} = 12\,\vec{i} - 6\vec{j}$ şi $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j}$ şi $\vec{b} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$;

$\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{b} = -3\vec{i} + 12\,\vec{j}$; $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\,\vec{j}$ şi $\vec{b} = -4\vec{i} - \vec{j}$ etc.

pentru care demonstrația se face imediat.

f.) Să se găsească ce condiție trebuie să satisfacă vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ pentru ca vectorul sumă $\vec{c}$ să fie perpendicular pe vectorul diferență $\vec{d}$.

R:

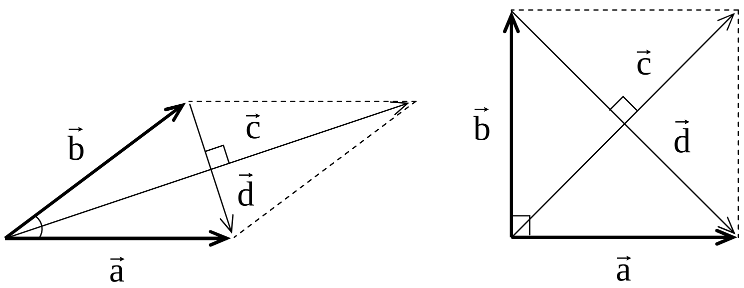
Pentru ca vectorii $\vec{c}$ şi $\vec{d}$, cu $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ şi $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, să fie perpendiculari este necesar ca produsul scalar al celor doi vectori să fie nul, adică

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0\,, \tag{1}$$

de unde rezultă că trebuie să fie îndeplinită egalitatea:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|, \tag{2}$$

situație reprezentată de cele două desene din figura alăturată.



g.) Să se afle unghiurile formate de vectorii $(\vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{a}, \vec{c})$ şi $(\vec{b}, \vec{c})$, în cazul în care $\vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{j}$.

R:

Calculăm modulele vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$a = 2, \quad b = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{şi} \quad c = 3. \tag{1}$$

Scriem expresiile produselor scalare:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\vec{i} \cdot (3\vec{i} - 4\vec{j}) = 6\,; \tag{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2\vec{i} \cdot 3\vec{j} = 0\,; \tag{3}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (3\vec{i} - 4\vec{j}) \cdot 3\vec{j} = -12\,, \tag{4}$$

după care obținem

$$\cos\,(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{6}{2\cdot 5} = 0{,}6 \quad \text{rezultă} \quad (\vec{a},\vec{b}) = \arccos\ 0{,}6\,; \tag{5}$$

$$\cos\,(\vec{a},\vec{c}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{ac} = 0\,, \quad \text{deci} \quad \vec{a}\perp\vec{c}\ \text{(unghi drept)}; \tag{6}$$

$$\cos\,(\vec{b},\vec{c}) = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{bc} = \frac{-12}{5\cdot 3} = -0{,}8 \quad \text{rezultă} \quad (\vec{b},\vec{c}) = \arccos\ (-0{,}8)\,. \tag{7}$$

h.) Să se găsească valorile unghiurilor formate de vectorul $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ cu direcțiile axelor ortogonale Ox şi Oy.

R:

Notăm unghiurile formate de vectorul $\vec{a}$ cu direcțiile axelor Ox şi Oy cu $\alpha = (\vec{a}, Ox)$, respectiv $\beta = (\vec{a}, Oy)$, unde $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ reprezintă versorii celor două axe, iar $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$.

Scriind $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$, identificăm cu expresia $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ şi aflăm

$$a_x = 3 \quad \text{şi} \quad a_y = 4\,. \tag{1) (2}$$

Modulul vectorului $\vec{a}$ este

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\,. \tag{3}$$

Utilizând expresia produsului scalar, avem

$$\vec{a}\cdot\vec{i} = |\vec{a}|\cdot|\vec{i}|\cos\,\alpha = a\cos\,\alpha\,, \tag{4}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{i} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j})\cdot\vec{i} = a_x\,\vec{i}\cdot\vec{i} = a_x \tag{5}$$

şi de asemenea

$$\vec{a}\cdot\vec{j} = |\vec{a}|\cdot|\vec{j}|\cos\,\beta = a\cos\,\beta\,, \tag{6}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{j} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j})\cdot\vec{j} = a_y\,\vec{j}\cdot\vec{j} = a_y\,. \tag{7}$$

Egalând perechile de relații (4), (5) şi (6), (7), obținem

$$\cos\,\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \quad \text{şi} \quad \cos\,\beta = \frac{a_y}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \tag{8) (9}$$

astfel

$$\alpha = \arccos\ 0{,}6 \quad \text{şi} \quad \beta = \arccos\ 0{,}8\,. \tag{10) (11}$$

i.) Dacă $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, să se găsească expresiile versorilor $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ şi $\vec{u}_3$ ai celor trei vectori (în funcție de versorii fundamentali).

R:

În cazul sistemelor de coordonate ortogonale se utilizează obişnuit notațiile $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ pentru versorii axelor Ox, Oy, Oz, în timp ce versorul unei alte direcții va fi notat, de exemplu, $\vec{u}$.

Efectuând produsul unui vector cu un scalar, când scalarul este chiar modulul vectorului, avem

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{u}_1 = a \cdot \vec{u}_1, \quad \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \vec{u}_2 = b \cdot \vec{u}_2, \quad \vec{c} = |\vec{c}| \cdot \vec{u}_3 = c \cdot \vec{u}_3, \qquad (1)$$

cu $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = |\vec{u}_3| = 1$.

De aici obținem

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{a}}{a}, \quad \vec{u}_2 = \frac{\vec{b}}{b}, \quad \vec{u}_3 = \frac{\vec{c}}{c}. \qquad (2)$$

Calculăm modulele vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$, cu $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, astfel

$$a = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, \quad b = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}, \quad c = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \qquad (3)$$

şi rezultă expresiile celor trei versori:

$$\vec{u}_1 = \frac{2\vec{i} - 3\vec{j}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j} \qquad (4)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{j} \qquad (5)$$

$$\vec{u}_3 = \frac{3\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}, \qquad (6)$$

deci $\vec{u}_1 = \vec{u}_1(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u}_2 = \vec{u}_2(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u}_3 = \vec{u}_3(\vec{i}, \vec{j})$.

j.) Să se demonstreze că următorii vectori sunt coliniari:

a.) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ şi $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$;

b.) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{k}$ şi $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{k}$.

R:

Pentru a arăta că cei doi vectori sunt coliniari este necesar să demonstrăm că produsul lor vectorial este nul. Scriem sub formă de determinant

a.) pentru $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ şi $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0; \qquad (1)$$

b.) pentru $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{k}$ şi $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{k}$,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

şi deci se confirmă faptul că vectorii sunt coliniari.