DREAPTA ȘI PLANUL ÎN SPAȚIU
I

1 Ecuația planului ce conține un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și este normal unei direcții date (a, b, c)

$$\pi: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

a) Să se determine ecuația planului care conține punctul $M(4, -1, 2)$ și este perpendicular pe direcția $(2, -1, 6)$.

($x_0=4$, $y_0=-1$, $z_0=2$; $a=2$, $b=-1$, $c=6$)

$$\pi: 2(x-4)+(-1)(y+1)+6(z-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$2x-8-y-1+6z-12=0 \Leftrightarrow 2x-y+6z-21=0$$

b) Să se determine ecuația planului care conține punctul $M(3, 0, -2)$ și este normal direcției vectorului $\bar{v}=4\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}$

($x_0=3$, $y_0=0$, $z_0=-2$; $a=4$, $b=-2$, $c=5$)

$$\pi: 4(x-3)+(-2)(y-0)+5(z+2)=0 \Leftrightarrow$$
$$4x-12-2y+5z+10=0 \Leftrightarrow 4x-2y+5z-2=0$$

2 Ecuația planului determinat de trei puncte necoliniare $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{sau} \quad \pi: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Să se determine ecuația planului determinat de punctele $M_1(2, 1, -3)$, $M_2(3, 1, -4)$, $M_3(-2, -1, 5)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0 \overset{\substack{L_1-L_2 \\ L_3-L_2 \\ L_4-L_2}}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 8 & 0 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-1)^{2+4}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 8 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -2(z+3)+4(y-1)-2(x-2)-8(y-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2z-6+4y-4-2x+4-8y+8=0 \Leftrightarrow -2x-4y-2z+2=0$$
$$\overset{:(-2)}{\Leftrightarrow} x+2y+z-1=0$$

Observație: Ecuația planului de mai sus se poate obține pornind direct de la determinantul de ordin 3 din formulele de mai sus

4 Ecuația dreptei determinată de două puncte $A(x_A, y_A, z_A)$ și $B(x_B, y_B, z_B)$

$$d: \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A}, \text{ dacă } x_A \neq x_B, y_A \neq y_B \text{ și } z_A \neq z_B$$

În cazul contrar:

$$d: \begin{cases} x = x_A + \lambda(x_B - x_A) \\ y = y_A + \lambda(y_B - y_A) \\ z = z_A + \lambda(z_B - z_A), \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Să se determine ecuația dreptei determinată de punctele $A(3,-2,4)$, $B(2,1,-3)$

$$d: \frac{x-3}{2-3} = \frac{y+2}{1+2} = \frac{z-4}{-3-4} \Leftrightarrow d: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-7}$$ sau ca ecuațiile parametrice:

$$\frac{x-3}{-1} = \lambda \Rightarrow x-3 = -\lambda \Rightarrow x = 3-\lambda$$
$$\frac{y+2}{3} = \lambda \Rightarrow y+2 = 3\lambda \Rightarrow y = -2+3\lambda$$
$$\frac{z-4}{-7} = \lambda \Rightarrow z-4 = -7\lambda \Rightarrow z = 4-7\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Să se determine ecuația dreptei determinată de punctele $A(4,1,-2)$, $B(2,1,5)$

x_A y_A z_A x_B y_B z_B

$$d: \frac{x-4}{2-4} = \frac{y-1}{1-1} = \frac{z+2}{5+2} \Leftrightarrow d: \frac{x-4}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{7}$$ nu știm de egalități în care a doua fracție nu are sens. De aceea vom folosi ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = 4+\lambda(2-4) \\ y = 1+\lambda(1-1) \\ z = -2+\lambda(5+2), \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4-2\lambda \\ y = 1 \\ z = -2+7\lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

5 Ecuația planului care conține un punct $A(x_0, y_0, z_0)$ și este paralel cu două drepte neparalele:

$$d_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ și } d_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

b) $d: \frac{x-x_0}{e} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$, unde $A(2,-3,4)$ ($x_0\ y_0\ z_0$), $(e,m,n) = (3,4,-1)$

$d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-4}{-1}$ sau folosind ecuațiile parametrice

$\frac{x-2}{3} = \lambda \Rightarrow x-2 = 3\lambda \Rightarrow x = 2+3\lambda$

$\frac{y+3}{4} = \lambda \Rightarrow y+3 = 4\lambda \Rightarrow y = -3+4\lambda$

$\frac{z-4}{-1} = \lambda \Rightarrow z-4 = -\lambda \Rightarrow z = 4-\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

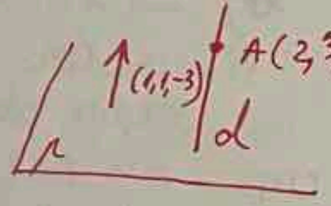
c) $d: \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A}$, unde $A(2,-3,4)$ ($x_A\ y_A\ z_A$), $B(1,1,-2)$ ($x_B\ y_B\ z_B$)

$AB: \frac{x-2}{1-2} = \frac{y+3}{1+3} = \frac{z-4}{-2-4} \Leftrightarrow AB: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-4}{-6}$

8 Se dau planul $\rho: x+y-3z+1=0$ și punctul $A(2,3,-4)$
Arătați că $A \notin \rho$ și scrieți ecuația dreptei ce conține pe A și este perpendiculară pe planul ρ.

Soluție: $A(x_A, y_A, z_A) \in \rho$ dacă coordonatele lui A verifică ecuația planului, adică dacă $x_A + y_A - 3z_A + 1 = 0$.
Înlocuim (x_A, y_A, z_A) cu $(2,3,-4)$ și obținem: $2+3-3\cdot(-4)+1=0$
$\Leftrightarrow 18 = 0$, fals. Deci $A \notin \rho$.
Dreapta d, a cărei ecuație se cere, este perpendiculară pe planul ρ, atunci un vector director al dreptei este chiar vectorul normal planului ρ, anume: $\vec{v} = (1,1,-3)$ ($e\ m\ n$)
(din $\rho: x+y-3z+1=0$); $A(2,3,-4)$ ($x_0 y_0\ z_0$)
Ecuația dreptei: $d: \frac{x-x_0}{e} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow$

$d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-3}$



9 Se dau punctele $A(1,-1,3)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,3,1)$ și dreapta $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = z$

a) Scrieți ecuația planului (ABC) și ecuațiile dreptelor AB și AC
b) Aflați $\measuredangle(AB, AC)$
c) Arătați că $A \notin d$.
d) Fie $\Delta \in d$ punctul cu $x_\Delta = 2$. Scrieți ecuația dreptei $C\Delta$

d) Dacă $\Delta \in d$, atunci coordonatele lui Δ verifică ecuația dreptei: $\frac{x_\Delta}{2} = \frac{y_\Delta}{-1} = z_\Delta \Leftrightarrow \frac{2}{2} = \frac{y_\Delta}{-1} = z_\Delta \Leftrightarrow 1 = \frac{y_\Delta}{-1} = z_\Delta \Rightarrow$

$\Rightarrow y_\Delta = -1, z_\Delta = 1$. Deci $\Delta(2,-1,1)$

Ecuația $C\Delta$: $\frac{x-x_C}{x_\Delta - x_C} = \frac{y-y_C}{y_\Delta - y_C} = \frac{z-z_C}{z_\Delta - z_C} \Leftrightarrow C\Delta: \frac{x-3}{2-3} = \frac{y-3}{-1-3} = \frac{z-1}{1-1}$

$\Leftrightarrow \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-1}{0} = \lambda$ și scriem ecuațiile parametrice:

$$C\Delta: \begin{cases} \frac{x-3}{-1} = \lambda \Rightarrow x = 3-\lambda \\ \frac{y-3}{-4} = \lambda \Rightarrow y = 3-4\lambda \\ \frac{z-1}{0} = \lambda \Rightarrow z = 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

10 Se dă dreapta $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{-1}$. Să se determine x_A, y_A știind că punctul $A(x_A, y_A, 1) \in d$. Apoi scrieți ecuația planului ce conține pe A și este normal dreptei d.

Soluție: $A \in d \Leftrightarrow \frac{x_A+1}{2} = \frac{y_A-2}{4} = \frac{z_A+3}{-1} \Leftrightarrow \frac{x_A+1}{2} = \frac{y_A-2}{4} = \frac{4}{-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_A+1}{2} = -4 \\ \frac{y_A-2}{4} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A+1 = -8 \\ y_A-2 = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -9 \\ y_A = -14 \end{cases}$$. Deci $A(-9,-14,1)$

Cum planul este normal dreptei d atunci un vector normal planului este chiar un vector director al dreptei.

Astfel vectorul director al dreptei d: $\bar{v} = (2,4,-1)$ este un vector normal planului a cărui ecuație se cere.

$\alpha: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$, cu $A(-9,-14,1)$ și $(a,b,c) = (2,4,-1)$

$x_0\ y_0\ z_0$

$2(x+9)+4(y+14)+(-1)(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+4y-z+75=0$

TEMĂ

1) a) Să se determine ecuația planului ce conține $A(2,3,0)$ și este normal direcției vectorului $\bar{v} = 3\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}$

b) Să se determine ecuația planului determinat de punctele $A(2,-4,1)$, $B(-1,3,2)$, $C(0,2,-5)$

c) Să se determine ecuația dreptei ce conține $A(5,-1,1)$ și are direcția vectorului $\bar{v} = 4\bar{i}+5\bar{j}$

d) Să se determine ecuația dreptei determinată de $A(2,4,1)$, $B(5,-3,2)$

e) Să se determine ecuația planului ce conține $A(2,4,0)$ și e paralel cu dreptele de la c) și d)

f) Să se determine ecuația planului ce conține $A(-1,2,-3)$ și dreapta de la e)

2) Propuneți și rezolvați câte o problemă după modelul 7, 8, 9, 10

3 Ecuația dreptei determinată de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și o direcție (parametri directori) dată (ℓ, m, n)

$$d: \begin{cases} x = x_0 + \lambda \ell \\ y = y_0 + \lambda m \\ z = z_0 + \lambda n, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$ → ecuațiile parametrice ale dreptei

sau

dacă $\ell \neq 0, m \neq 0, n \neq 0$:

$$d: \frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

a) Să se determine ecuația dreptei d care conține punctul $A(4, 2, -2)$ și are direcția vectorului $\bar{v} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$

($x_0 = 4$, $y_0 = 2$, $z_0 = -2$; $\ell = 3$, $m = -2$, $n = 2$)

$$d: \frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{2}$$

sau cu ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observație: Ecuațiile parametrice se pot obține din ecuația

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{2} = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$\frac{x-4}{3} = \lambda \Rightarrow x - 4 = 3\lambda \Rightarrow x = 4 + 3\lambda$

$\frac{y-2}{-2} = \lambda \Rightarrow y - 2 = -2\lambda \Rightarrow y = 2 - 2\lambda$

$\frac{z+2}{2} = \lambda \Rightarrow z + 2 = 2\lambda \Rightarrow z = -2 + 2\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$

sau (reciproc): din ecuațiile parametrice:

$x = 4 + 3\lambda \Rightarrow x - 4 = 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{x-4}{3}$

$y = 2 - 2\lambda \Rightarrow y - 2 = -2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{y-2}{-2}$

$z = -2 + 2\lambda \Rightarrow z + 2 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{z+2}{2}$

$\Rightarrow \frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{2}$

b) Să se determine ecuația dreptei d care trece prin punctul $A(3, -2, 1)$ și are direcția $(-3, 0, -2)$

($x_0 = 3$, $y_0 = -2$, $z_0 = 1$; $\ell = -3$, $m = 0$, $n = -2$)

Deoarece $m = 0$ **nu** se mai poate aplica: $\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$

Vom folosi doar ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = -2 \\ z = 1 - 2\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Să se determine ecuația planului care conține punctul $A(-2, 0, 5)$ și este paralel cu dreptele:

$d_1: \frac{x+3}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{-1}$ $\quad (l_1, m_1, n_1) = (-2, 3, -1)$

$d_2: \frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{6}$ $\quad (l_2, m_2, n_2) = (3, -2, 6)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x+2 & y & z-5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 18(x+2) + 4(z-5) + 3(y) - 9(z-5) - 2(x+2) + 12y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18x + 36 + 4z - 20 - 3y - 9z + 45 - 2x - 4 + 12y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x + 9y - 5z + 57 = 0$$

6 Ecuația planului determinat de o dreaptă:

$d: \frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$, $l, m, n \neq 0$ și de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ exterior dreptei

$$\pi: \begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ x_0-a & y_0-b & z_0-c \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

Să se determine ecuația planului care conține punctul $M_0(-2, -3, 0)$ și dreapta $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{5}$

$M_0 \notin d$ deoarece: $\frac{-2+1}{3} \neq \frac{-3-1}{-2} \neq \frac{0}{5}$ $\quad (l, m, n) = (3, 2, 5)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ -2+1 & -3-1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ -1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -20(x+1) - 2z + 12z + 5(y-1) = 0 \Leftrightarrow -20x - 20 + 10z + 5y - 5 = 0$$

$$\Rightarrow -20x + 5y + 10z - 25 = 0 \mid :(-5) \Leftrightarrow 4x - y - 2z + 5 = 0$$

7 În raport cu reperul ortonormat $Oxyz$ se consideră punctele $A(2, -3, 4)$, $B(1, 1, -2)$ și vectorul $\bar{v} = 3\bar{i} + 4\bar{j} - \bar{k}$

a) Scrieți ecuația planului ce conține pe A și este normal vectorului $\bar{v}$

b) Ecuația dreptei ce conține pe A și are direcția lui $\bar{v}$

c) Ecuația dreptei AB.

Soluție: a) $\pi: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$, unde $A(2, -3, 4)$ i.e. (x_0, y_0, z_0) și $(a, b, c) = (3, 4, -1)$ (din $\bar{v} = 3\bar{i} + 4\bar{j} - \bar{k}$)

$$3(x-2) + 4(y+3) - 1(z-4) = 0 \Rightarrow 3x - 6 + 4y + 12 - z + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 4y - z + 10 = 0$$

Soluție a) Ecuația planului determinat de trei puncte

$A(1,1,3)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,3,1)$
$x_1\ y_1\ z_1$, $x_2\ y_2\ z_2$, $x_3\ y_3\ z_3$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } \pi: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 1-1 & 2+1 & -1-3 \\ 3-1 & 3+1 & 1-3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -6(x-1) - 8(y+1) - 6(z-3) + 16(x-1) = 0 \Leftrightarrow -6x+6-8y-8-6z+18+16x-16 = 0 \Leftrightarrow 10x-8y-6z=0 \mid :2 \Rightarrow$

$(ABC): 5x-4y-3z=0$

Ecuația lui AB: În general $AB: \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A}$

Deoarece $x_B - x_A = 1-1=0$, nu vom folosi această formulă. Scriem ecuațiile parametrice ale dreptei AB: care practic le obținem formal din șirul: $\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-4} = \lambda$,

$$\begin{cases} x-1 = 0\cdot\lambda \Rightarrow x = 1 \\ y+1 = 3\lambda \Rightarrow y = -1+3\lambda \\ z-3 = -4\lambda \Rightarrow z = 3-4\lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ecuația dreptei AC: $\frac{x-x_A}{x_C-x_A} = \frac{y-y_A}{y_C-y_A} = \frac{z-z_A}{z_C-z_A} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC: \frac{x-1}{3-1} = \frac{y+1}{3+1} = \frac{z-3}{1-3} \Leftrightarrow AC: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-2}$

b) $\measuredangle(AB, AC)$

Un vector director al dreptei AB este $\overline{AB}(0,3,-4)$, iar un vector director al dreptei AC este $\overline{AC}(2,4,-2)$

$$\cos\measuredangle(AB,AC) = \cos\measuredangle(\overline{AB},\overline{AC}) = \frac{\langle \overline{AB}, \overline{AC} \rangle}{\|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{AC}\|} = \frac{\langle (0,3,-4),(2,4,-2) \rangle}{\|(0,3,-4)\| \cdot \|(2,4,-2)\|} =$$

$$= \frac{0\cdot 2 + 3\cdot 4 + (-4)\cdot(-2)}{\sqrt{0^2+3^2+(-4)^2} \cdot \sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}} = \frac{20}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{24}} = \frac{20}{5\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\Rightarrow \measuredangle(AB,AC) = \arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

c) Dacă punctul $A \in d$, atunci coordonatele lui A verifică ecuația dreptei $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = z$, adică $\frac{x_A}{2} = \frac{y_A}{-1} = z_A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{-1}{-1} = 3$, fals, deci $A \notin d$.