MODELAREA ȘI SIMULAREA PROBLEMELOR NELINIARE

Foarte multe fenomene din natura și procese tehnice (de fapt, majoritatea) nu sunt liniare. Astfel, dependența dintre variabile nu poate fi descrisă cu o exactitate acceptabilă de modele liniare, în forma generală:

$$Y=k1\cdot x1+ k2\cdot x2+ k3\cdot x3+ \dots$$

Caz particular pentru modele cu o singură variabilă: $Y=k1\cdot x1$.

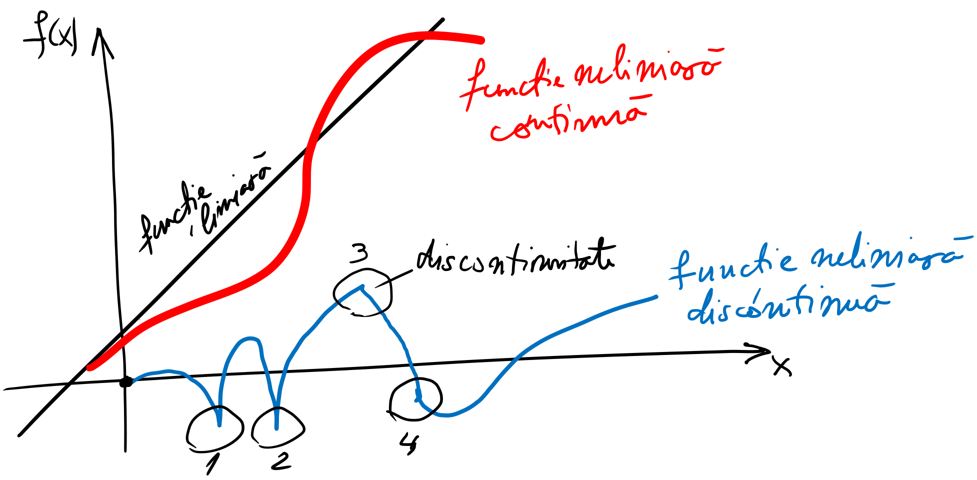
?

A. Neliniaritatea descrisă matematic

Abaterea de la paradigma liniarității se regăsește în practică sub două forme:

- *Discontinuități* - dependența funcțională este în principiu liniară dar discontinuă (local), fiind descris de mai multe funcții liniare.
- *Neliniarități* – dependența este în principiu continuă dar neliniară,
- *Combinația dintre neliniarități și discontinuități* – dependență neliniară cu discontinuități.

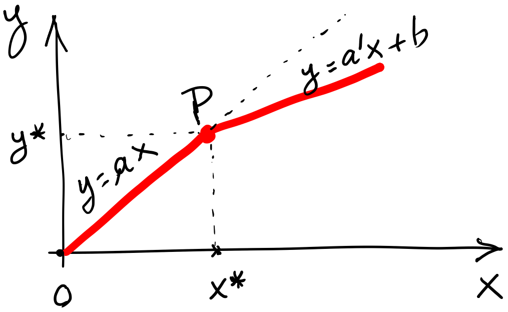
Exemplificare grafică a tipurilor de abatere de la liniaritatea proceselor:



Modele discontinue

Discontinuitatea reprezintă o **întrerupere** locală urmată de o **modificare** a modelului procesului.

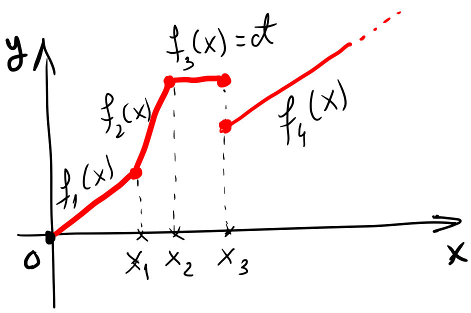
Pentru un model liniar, discontinuitatea produce diverse efecte asupra dependenței funcționale, de exemplu:



- punct de discontinuitate $P(x^*, y^*)$
- Funcție multiformă - se definește pe intervale:

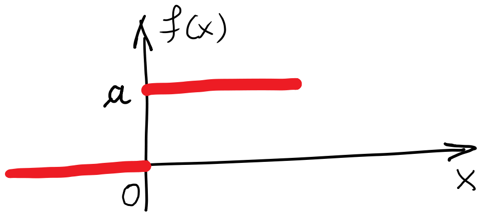
$$y = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq x^* \\ a'x + b, & x > x^* \end{cases}$$

Discontinuități multiple

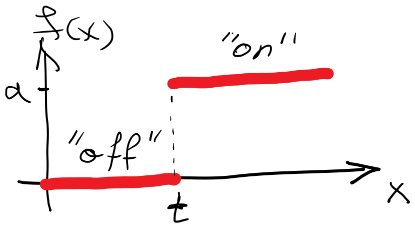


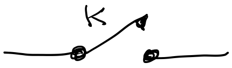
Funcții matematice (consacrate) pentru descrierea discontinuităților:

- Funcția treaptă:



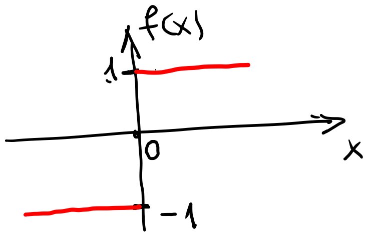
sau



- Modelează un comutator: 

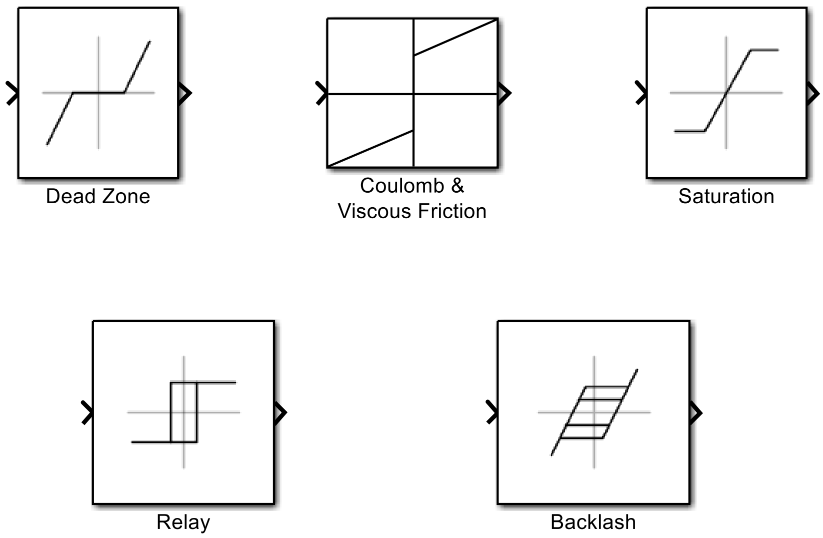
"închis - deschis"

- Funcția semn (signum):



$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Discontinuități consacrate (modele din Simulink):



B. <u>Fenomene/procese neliniare</u>

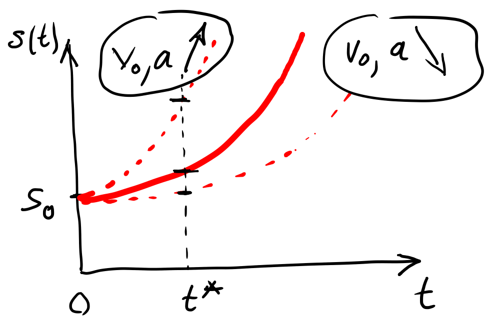
Majoritatea fenomenelor și proceselor se manifestă neliniar. Acestea pot fi modelate cu funcții matematice remarcabile și combinații ale acestora, astfel:

Modele periodice – descrise prin funcții armonice: *sinus*, *cosinus*, etc.

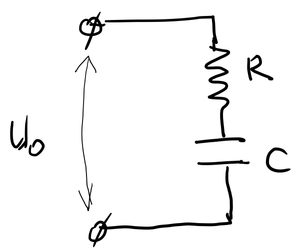
Modele aperiodice – descrieri cu funcții *exponențiale*, *logaritmice*, ***polinomiale***, *funcții putere*, *funcții radical* și combinații ale acestora.

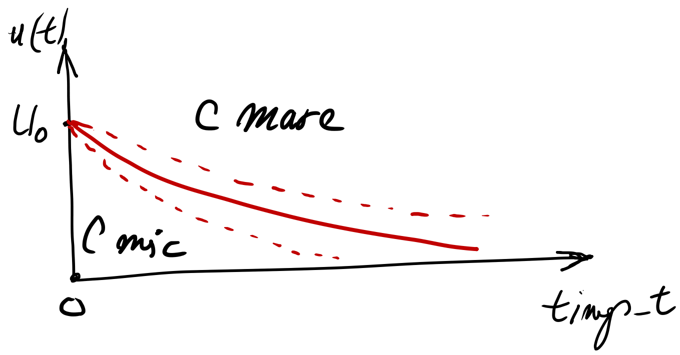
Exemple:

a) Legea cinematică a deplasării uniform accelerate: $s(t)=s_0+v_0t+at^2/2$, unde a=const.



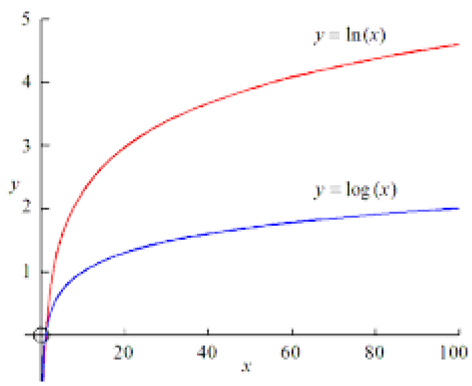
b) Descărcarea unui condensator: $u(t)=U_0\, e^{-t/RC}$

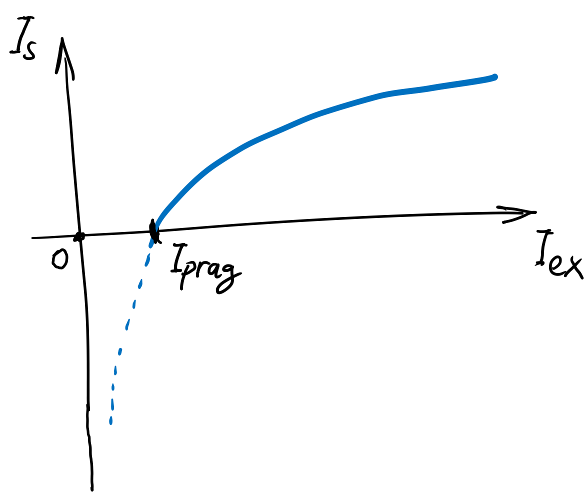




c) Legea senzației sonore: o relație logaritmică care stabilește legătura dintre intensitatea *senzației* (I_S) – Audio Response (I_{AR}) și intensitatea *excitației* acustice (I_{ex}):

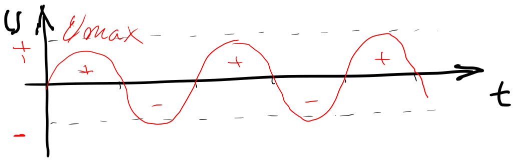
$$I_{AR}=10\lg\frac{I_{ex}}{I_{prag}}$$





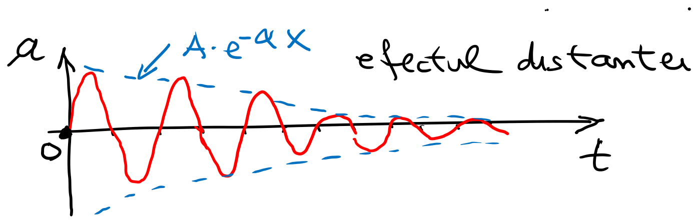
d) Curentul alternativ, oscilațiile(undele) electromagnetice, etc. se modelează cu funcții armonice:

$U = U_{max} \sin(\omega t + \phi)$



e) Un model neliniar combinat care descrie *atenuarea undelor în funcție de distanță (x)*:

$a(t,x) = Ae^{-\alpha x} \sin(\omega t + \phi)$

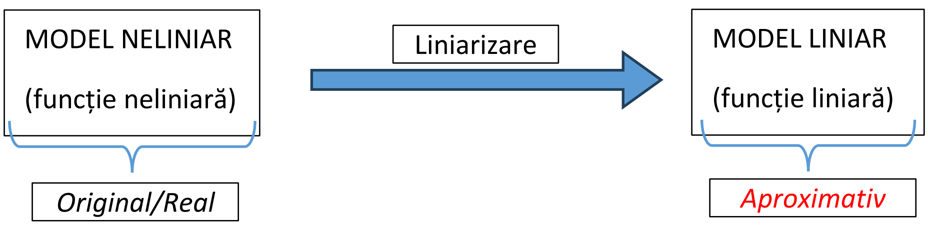


C. Liniarizarea modelelor

Liniarizarea modelelor este de preferat în cazul problemelor complexe urmărind ***o simplificare acceptabilă*** a acestora din considerente de crestere a vitezei de calcul (timp de execuție a programelor).

Un alt avantaj al modelelor liniare este aceea ca ele permit să fie analizate ușor cu instrumente ale algebrei.

Liniarizarea modelelor reprezintă o **aproximare!**



Metode practice de liniarizare

În problemele tehnico-științifice se încearcă *eliminarea neliniarităților* prin adoptarea unor *ipoteze simplificatoare* sau *restricții* asupra modelelor respective. Rezultă modele liniare aproximative ale modelelor neliniare originale.

i) Ipoteze simplificatoare:

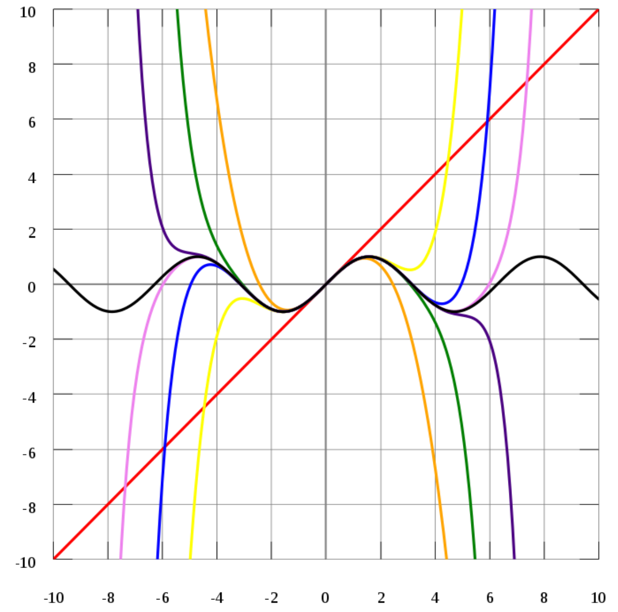
- Neglijarea termenilor (neliniari) pătratici sau la puteri superioare lui 2 pentru domenii subunitare ale variabilei,
- Dezvoltarea funcției neliniare *f(x)* în serie Taylor și reținerea doar a termenului liniar:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

EXEMPLU: funcția originală neliniară (armonică) *f(x)=sin(x)*

Seriile Taylor sunt modele polinomiale care *se apropie din ce în ce mai mult de funcția corectă (funcția armonică de tip sinusoidal), cu cât crește gradul n al polinomului*.

Imaginea alăturată prezintă aproximările Taylor, cu polinom de grad 1, 3, 5, 7, 9, 11 și 13.

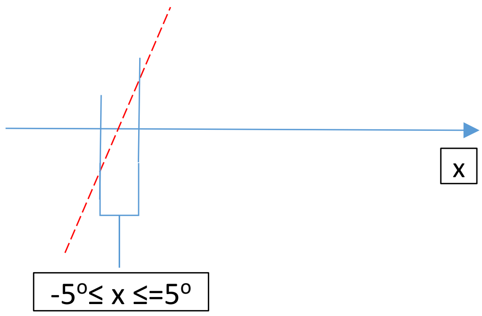


ii) <u>Liniarizarea prin impunerea de *restricții asupra modelelor*</u>:

Restricția domeniului variabilei independente. Se consideră intervale (domenii) suficient de mici astfel încât funcția să poată fi aproximată liniar cu o precizie rezonabilă.

<u>Exemplu</u>: *ipoteza micilor oscilații*

Aproximarea liniară a funcției armonice sin(x) pentru valori mici ale argumentului (în jurul lui 0). Practic, pentru -5°≤ x ≤=5° (adică 0,087... radiani) se poate aproxima sin(x)≈x.



If x>=-5 & x<=5
sin(x) =x

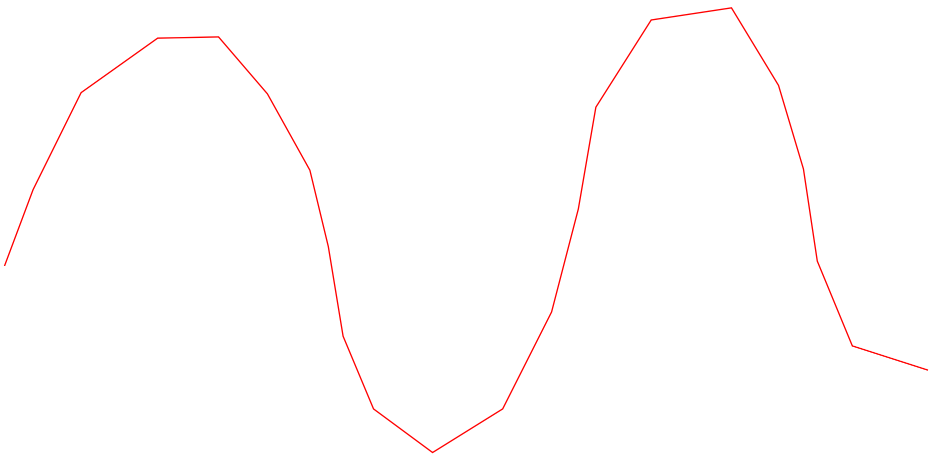
Adică:

y=sin(x) poate fi inlocuită cu *y=x*

Dacă, de exemplu, variabila independentă este *timpul,* atunci se consideră evoluția fenomenului pe intervale scurte de timp (Δt). Astfel, devine posibil ca un model neliniar să poată fi *liniarizat pe intervale* (porțiuni).

Funcția originală	Aproximare prin liniarizare pe intervale
	
	

Un model unic neliniar poate fi descris aproximativ (cu o anumită *precizie*) de o mulțime de modele neliniare. *Nivelul de aproximare* poate fi controlat prin lungimea pasului variabilei independente.



D. **Modele polinomiale**

Reprezintă forma matematică cea mai generală folosită pentru descrierea/modelarea fenomenelor.

Complexitatea formei depinde de gradul polinomului:

$$P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \ldots + \underbrace{a_{n-1}x^2 + \underbrace{a_nx + \overset{\text{Model de ordinul 0: } \textit{constant}}{\downarrow \atop a_{n+1}}}_{\text{Model de ordinul 1: } \textit{liniar}}}_{\text{Model de ordinul 2: } \textit{pătratic}}$$

Modele de ordin superior ... $\leftarrow$ Model de ordinul 3: *cubic*

Definirea unui polinom în sintaxa Matlab: *vector (linie) al coeficienților în ordinea descrescătoare a puterilor.*

$$p = [a_1 \; a_2 \; a_3 \ldots a_{n+1}]$$

Problematica întâlnită în aplicații:

- ✓ evaluarea polinoamelor
- ✓ operații matematice cu polinoame
- ✓ analiza matematică a funcțiilor polinomiale: derivarea polinoamelor, calculul diferențial,...
- ✓ calculul rădăcinilor polinoamelor, generarea polinomului cu rădăcini date
- ✓ probleme de *interpolare* (estimarea/aproximarea funcțiilor polinomiale prin interpolare liniară sau cu polinoame de interpolare)
- ✓ *aproximarea datelor* cu modele polinomiale (problema *regresiei* polinomiale).