METODE NUMERICE

Mihaela DUMITRACHE *Camelia GHELDIU*

Cuprins

0.1 Cuvânt înainte

Metode numerice face parte din disciplinele fundamentale de pregătire a studenţilor din cadrul facultăţilor de matematică, de inginerie electronică şi calculatoare, având ca scop prezentarea metodelor şi relaţiilor de calcul matematic numeric.

Cartea cuprinde 6 capitole în care aceste metode, se referă în principal, la metode aproximative de rezolvare a ecuaţiilor algebrice şi transcendente, metode exacte şi aproximative de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare, metode de determinare a coeficienţilor polinomului caracteristic, metode de interpolare a funcţiilor şi integrare numerică.

Parcurgerea acestei cărţi presupune cunoştinţe minime de analiză matematică, algebră şi geometrie analitică.

Prin această lucrare, autorii pun la dispoziţia cititorilor toate cunoştinţele necesare în vederea construirii de algoritmi şi proceduri capabile să ia ca argument un obiect matematic şi să returneze un rezultat final.

Autorii

Februarie 2013

Capitolul 1

Rezolvarea ecuaţiilor algebrice şi transcendente

1.1 Ecuaţia de gradul al III-lea

Ecuaţia de gradul al III-lea, deşi aparent simplă, ascunde în sine o mare bogăţie de idei matematice. Să intrăm puţin în lumea acestei ecuaţii. Începem deci cu rezolvarea ei.

Fie o ecuaţie de gradul al III-lea cu coeficienţi complecşi

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0. \tag{1.1}$$

Cu ajutorul substituţiei

$$y = x - \frac{a}{3} \tag{1.2}$$

eliminăm termenul în y^2 şi avem:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2\left(\tfrac{a}{3}\right) + 3x\tfrac{a^2}{9} - \tfrac{a^3}{27} &+ \\ + ax^2 \qquad - 2\tfrac{a^2x}{3} + \tfrac{a^3}{9} &+ \\ + bx - \tfrac{ab}{3} + c &= 0. \end{aligned}$$

Adică ecuaţia devine

$$x^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

şi cu următoarele notaţii

$$p = b - \frac{a^2}{3} \quad \text{şi} \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \tag{1.3}$$

avem ecuaţia

$$x^3 + px + q = 0. \tag{1.4}$$

Definiţia 1.1 Ecuaţia (1.4) poartă numele de **ecuaţia sub formă redusă**.

1.1.1 Metoda HÜDDE

Metoda constă în a scrie soluţia sub forma

$$x = u + v \tag{1.5}$$

şi înlocuind în ecuaţia redusă (1.4) obţinem

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$
$$u^3 + v^3 + q + (p + 3uv)(u + v) = 0.$$

Se vede astfel că u şi v trebuie să verifice condiţia

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$$

care mai poate fi scrisă

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Aşadar, alcătuim ecuaţia de gradul al II-lea pentru u^3 şi v^3

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{1.7}$$

Definiţia 1.2 Ecuaţia (1.7) se numeşte **ecuaţia rezolventă**.

Această ecuaţie are rădăcinile

$$z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \tag{1.8}$$

pe care le scriem astfel

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

De aici găsim soluţiile

$$u = \sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{1.9}$$

Aceste formule ne dau câte trei valori pentru fiecare necunoscută u şi v, pentru că orice număr complex are trei rădăcini care se deduc una din alta înmulţindu-le cu rădăcinile cubice ale unităţii.

$$\begin{array}{ll} u_1 & v_1 \\ u_2 = u_1 \varepsilon & v_2 = v_1 \varepsilon \\ u_3 = u_1 \varepsilon^2 & v_3 = v_1 \varepsilon^2 \end{array} \tag{1.10}$$

Combinând cele trei valori ale lui u, cu cele ale lui v, găsim că sistemul are nouă soluţii şi vom găsi nouă valori pentru soluţia $x = u + v$. Din cele nouă soluţii vom alege valorile care verifică ecuaţia

$$uv = -\frac{p}{3}. \tag{1.11}$$

Din cele trei valori presupunem că una este u_1. Deci vom avea perechile (u_1, v_1), (u_1, v_2) şi (u_1, v_3). Numai una singură va verifica relaţia (1.11). Această rădăcină o vom nota cu (u_1, v_1).

Dar dacă (u_1, v_1) verifică relaţia (1.11), rezultă că celelalte două rădăcini vor fi $(\varepsilon u_1, \varepsilon^2 v_1)$şi $(\varepsilon^2 u_1, \varepsilon v_1)$, deci

$$\begin{array}{l} (\varepsilon u_1)(\varepsilon^2 v_1) = \varepsilon^3 u_1 v_1 = u_1 v_1 = -\frac{p}{3}, \\ (\varepsilon^2 u_1)(\varepsilon v_1) = \varepsilon^3 u_1 v_1 = u_1 v_1 = -\frac{p}{3}. \end{array}$$

Deci rădăcinile ecuaţiei reduse vor fi

$$\begin{array}{l} x_1 = u_1 + v_1 \\ x_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1 \\ x_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1 \end{array}, \tag{1.12}$$

unde ε, ε^2 sunt rădăcinile cubice ale unităţii, adică

$$\begin{array}{l} \varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \\ \varepsilon^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}. \end{array} \tag{1.13}$$

Folosind relaţia (1.11), soluţiile ecuaţiei (1.4) se mai pot scrie sub forma

$$\begin{array}{l} x_1 = u_1 + v_1, \\ x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1), \\ x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1). \end{array} \tag{1.14}$$

O formă condensată a relaţiei (1.14) este

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{1.15}$$

Exemplul 1.3 Să rezolvăm ecuaţia $x^3 - 9x - 28 = 0$.

Soluţie.

Avem o ecuaţie de gradul al trei-lea în care nu avem termenul cu x^2, adică ecuaţia este sub forma ecuaţiei (1.4), adică forma redusă.

Deci $p = -9, \quad q = -28.$

$$u = \sqrt[3]{14 + \sqrt{196 - 27}} = \sqrt[3]{14 + 13} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

Notăm $u_1 = 3$ şi din (1.11)

$$u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$$

adică avem

$$v_1 = \frac{\frac{9}{3}}{3} = 1.$$

Deci soluţiile ecuaţiei sunt

$$x_1 = u_1 + v_1 = 3 + 1 = 4,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{i\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = -2 + i\sqrt{3},$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) = -\frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{i\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = -2 - i\sqrt{3}.$$

1.1.2 Ecuaţii cubice cu coeficienţi reali

Definiţia 1.4 Expresia

$$\Delta = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) \tag{1.16}$$

poartă numele de **discriminantul ecuaţiei reduse.**

Discriminantul ecuaţiei reduse joacă un rol important în stabilirea naturii rădăcinilor ecuaţiei de gradul al trei-lea. Să studiem pe rând situaţiile posibile.

Cazul I $\Delta = 0$.

Dacă $\Delta = 0$ atunci din relaţia (1.16) rezultă

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3. \tag{1.17}$$

Evident, este cel mai simplu caz.
Ştim că $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, care se mai poate scrie

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right)^3 \Big/ \left(\frac{q}{2}\right)^2} = -\frac{q}{2\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right)^2}}, \tag{1.18}$$

dar cu relaţia (1.17), găsim soluţia

$$u = -\frac{q}{2\sqrt[3]{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \Rightarrow$$

$$u = \frac{3q}{2p}. \tag{1.19}$$

Din rezolvarea ecuaţiei, ştim că

$$uv = -\frac{p}{3} \Leftrightarrow v = -\frac{p}{3u},$$

adică

$$v = -\frac{2p^2}{9q} = -\frac{6\left[-\left(\frac{p}{3}\right)^3\right]}{pq} = -\frac{6\left(\frac{q}{2}\right)^2}{pq} \Rightarrow$$

$$v = \frac{3q}{2p}. \tag{1.20}$$

Deci am găsit că

$$u = v. \tag{1.21}$$

Fie $u_1 = v_1$ valoarea reală a rădăcinilor cubice şi cum

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_1 v_1 = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

avem soluţiile

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 2u_1, \\ x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) = -u_1, \\ x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) = -u_1. \end{array}\right. \tag{1.22}$$

Concluzia 1.5 Dacă discriminantul ecuaţiei reduse $\Delta = 0$**,** atunci ecuaţia admite numai rădăcini reale, două fiind egale.

Cazul II $\Delta < 0$.

Dacă $\Delta < 0$**,** atunci din relaţia (1.16) rezultă $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$**.** În formulele lui u şi v avem radical de indice dintr-un număr pozitiv, deci u şi v sunt rădăcini cubice din numere reale.

Un număr real are o rădăcină cubică reală şi două rădăcini complex conjugate.

Fie u_1, v_1 valorile reale ale rădăcinilor cubice.

Observaţia 1.6 Dacă u este o rădăcină reală, din relaţia $uv = -\frac{p}{3}$ rezultă obligatoriu că v este şi ea o rădăcină reală, deci avem

$$\left\{\begin{array}{l} u_1, v_1 \in R, \quad x_1 = u_1 + v_1, \\ x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1), \\ x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1). \end{array}\right. \tag{1.23}$$

Observaţia 1.7 Dacă $u_1, v_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 \neq v_1$, pentru că, în caz contrar, dacă $u_1 = v_1$, am avea $u_1^3 = v_1^3$ şi deci $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ de unde $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$, contrar ipotezei.

Concluzia 1.8 Dacă discriminantul ecuaţiei reduse $\Delta < 0$ avem o rădăcină reală şi două rădăcini complexe.

Cazul III $\Delta > 0$

Dacă $\Delta > 0$**,** atunci din relaţia (1.16) rezultă $-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} > 0$.

Observaţia 1.9 Avem $p < 0$, deoarece în caz contrar, dacă $p > 0$ atunci discriminantul Δ ar fi suma a două numere negative şi n-ar mai putea fi pozitiv.

În formulele lui u_1 şi v_1 avem sub radicalul pătrat un număr real negativ şi deci rădăcinile sunt complexe.
Deci

$$\begin{cases} u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}, \\ v^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}. \end{cases} \tag{1.24}$$

Scriind

$$u^3 = r(\cos\theta + i\sin\theta) = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\,,$$

deci

$$\begin{cases} r\cos\theta = -\frac{q}{2}, \\ r\sin\theta = \sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}. \end{cases} \tag{1.25}$$

Dar $\sin\theta > 0 \Rightarrow 0 < \theta < \pi$, deci ridicând la pătrat şi adunând, avem

$$r^2 = \frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \Rightarrow r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \tag{1.26}$$

iar

$$tg\theta = -\frac{2}{q}\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}. \tag{1.27}$$

Deci

$$u^3 = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{1.28}$$

Cum v^3 este complexul conjugat al lui u^3 avem

$$v^3 = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}(\cos\theta - i\sin\theta). \tag{1.29}$$

Extrăgând rădăcina cubică din (1.28) şi (1.29), avem

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right),$$

adică

$$u = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2. \tag{1.30}$$

Similar obţinem

$$v = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} - i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2. \tag{1.31}$$

Pentru că $uv = -\frac{p}{3}$ este un număr real, trebuie ca u şi v să fie complexe conjugate, deci să corespundă aceleiaşi valori a lui k. Astfel:
Pentru $k = 0$ avem

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right), \\ v_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{\theta}{3}\right), \end{cases}$$

adică

$$x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta}{3}. \tag{1.32}$$

Pentru $k = 1$ avem

$$\begin{cases} u_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right), \\ v_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} - i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right), \end{cases}$$

adică

$$x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta + 2\pi}{3}. \tag{1.33}$$

Pentru $k = 2$ avem

$$\begin{cases} u_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right), \\ v_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3} - i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right), \end{cases}$$

adică

$$x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta + 4\pi}{3}. \tag{1.34}$$

Concluzia 1.10 Dacă discriminantul ecuaţiei reduse $\Delta > 0$, ecuaţia admite trei rădăcini reale şi distincte.

Exemplul 1.11 Să arătăm că ecuaţia $x^3 - 12x + 16 = 0$ are rădăcinile $x_1 = -4$ şi $x_2 = x_3 = 2$.

Soluţie.

Într-adevăr

$$\Delta = -108\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right] =$$

$$= -108\left[\left(\frac{16}{2}\right)^2 + \left(-\frac{12}{3}\right)^3\right] = -108\,(64-64) = 0,$$

deci suntem în cazul I si ecuaţia are numei rădăcini reale, două fiind egale. Aceste rădăcini le calculăm cu relaţia (1.22), adică

$$x_1 = 2u = \frac{3q}{p} = \frac{3\cdot 16}{-12} = -4$$

$$x_2 = x_3 = -u = -\frac{3q}{2p} = -\frac{3\cdot 16}{-2\cdot 12} = 2.$$

Exemplul 1.12 Să rezolvăm ecuaţia $y^3 - 9y^2 + 24y - 20 = 0$.

Soluţie.

Facem substituţia (1.2) unde $a = -9$ pentru a obţine ecuaţia în formă redusă, astfel $y = x + 3$.

Deci

$$\begin{aligned} & x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \\ & \quad - 9x^2 - 54x - 81 \\ & \qquad + 24x + 72 \\ & \qquad\quad - 20 = \\ & = x^3 - 3x - 2 = 0 \end{aligned}$$

Găsim

$$p = -3 \quad \text{şi} \quad q = -2.$$

Calculăm discriminantul ecuaţiei reduse

$$\Delta = -108\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right] = -108\left[\left(-\frac{2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{3}\right)^3\right] = -108\cdot 0 = 0$$

adică $\Delta = 0$ şi suntem în cazul I, astfel că ecuaţia are numai rădăcini reale, două fiind egale. Avem

$$u_1 = v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = 1.$$

Deci soluţiile cu relaţia (1.22) sunt

$$\begin{aligned} & x_1 = 2u_1 = 2, \\ & x_2 = x_3 = -u_1 = -1. \end{aligned}$$

Exemplul 1.13 Să rezolvăm ecuaţia $x^3 - 6x + 2 = 0$.

Soluţie.

Ecuaţia este sub formă redusă, astfel

$$p = -6 \quad \text{şi} \quad q = 2.$$

Calculăm discriminantul ecuaţiei reduse

$$\Delta = -108\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right] = -108\left(\frac{4}{4} - \frac{216}{27}\right) = -108 \cdot (-7) = 756$$

adică $\Delta > 0$, deci suntem în cazul al treilea, ceea ce înseamnă că ecuaţia are trei rădăcini reale şi distincte.

Avem

$$u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = -1 - i\sqrt{7},$$

$$u^3 = r(\cos\theta + i\sin\theta) = -1 - i\sqrt{7}.$$

De unde

$$r = 2\sqrt{2} tg\theta = -\sqrt{7} = -2.64575 \Rightarrow \theta = 110^0 44'.$$

Cu relaţiile (1.32), (1.33) şi (1.34), soluţiile sunt

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{-\tfrac{p}{3}}\cos 36^0 55' = 2.26, \\ x_2 &= 2\sqrt{-\tfrac{p}{3}}\cos 156^0 55' = -2.6, \\ x_3 &= 2\sqrt{-\tfrac{p}{3}}\cos 276^0 55' = 0.36. \end{aligned}$$

1.2 Rezolvarea ecuaţiei de gradul al IV-lea

Metoda lui Descartes (Cartegius)

Fie ecuaţia de gradul al 4-lea cu coeficienţi complecşi

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0. \tag{1.35}$$

Vom face substituţia

$$y = x - \frac{A}{4} \tag{1.36}$$

şi aducem această ecuaţie la forma

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{1.37}$$

Definiţia 1.14 Ecuaţia (1.37) poartă numele de **forma redusă** a ecuaţia de gradul al IV-lea.

Ne propunem să descompunem membrul stâng într-un produs de două polinoame de gradul al doilea.

$$x^4 + ax^2 + bx + c = \left(x^2 + px + q\right)\left(x^2 + p'x + q'\right)$$

$$x^4 + ax^2 + bx + c =$$

$$= x^4 + (p + p')\, x^3 + (q + q' + pp')\, x^2 + (pq' + qp')\, x + qq' = 0. \tag{1.38}$$

Identificând coeficienţii relaţiei (1.38), avem

$$\begin{cases} p + p' = 0, \\ q + q' + pp' = a, \\ pq' + p'q = b, \\ qq' = c, \end{cases}$$

din prima ecuaţie găsim $p = -p'$ şi înlocuim în celelalte

$$\begin{cases} q + q' = p^2 + a, \\ -q' + q' = \frac{b}{p}, \\ qq' = c. \end{cases}$$

Adunând şi scăzând primele două ecuaţii, avem

$$\begin{cases} 2q = a + p^2 - \frac{b}{p} \\ 2q' = a + p^2 + \frac{b}{p}. \end{cases} \tag{1.39}$$

Înlocuind în ultima relaţie avem

$$\left(p^2 + a\right)^2 - \frac{b^2}{p^2} = 4c \Leftrightarrow p^6 + 2ap^4 + \left(a^2 - 4c\right)p^2 - b^2 = 0. \tag{1.40}$$

În (1.40) notăm $p^2 = z$ şi găsim ecuaţia

$$F(z) = z^3 + 2az^2 + \left(a^2 - 4c\right)z - b^2 = 0. \tag{1.41}$$

Definiţia 1.15 Relaţia (1.41) se numeşte **rezolventa** ecuaţiei de gradul al patrulea.

Rezolventa este o ecuaţie de gradul al treilea. Din ecuaţia rezolventă rezultă coeficientul p, de unde îl obţinem pe p' care este egal cu $-p$. Calculăm apoi q şi q', după care se rezolvă cele două ecuaţii de gradul al doilea şi astfel se determină soluţiile ecuaţiei (1.35).

Exemplul 1.16 Să rezolvăm ecuaţia $y^4 + 4y^3 + 5y^2 + 4y + 4 = 0$.

Soluţie.

Facem substituţia dată de (1.36)

$$\begin{cases} y = x - \frac{A}{4} \\ A = 4 \end{cases} \Rightarrow y = x - 1$$

şi obţinem forma redusă

$$x^4 - x^2 + 2x + 2 = 0.$$

Deci relaţia (1.39) devine

$$\begin{cases} 2q = p^2 - \frac{2}{p} - 1 \\ 2q' = p^2 + \frac{2}{p} - 1 \end{cases}.$$

Scriem ecuaţia rezolventă

$$z^3 - 2z^2 - 7z - 4 = 0,$$

iar -1 este o soluţie a rezolventei.

Împărţind prin $z + 1$, găsim ecuaţia de gradul al doilea $z^2 - 3z - 4 = 0$ care are rădăcinile -1, 4.

Fie $z = 4$, adică $p^2 = 4$ şi obţinem

$$p = 2 \Rightarrow p' = -2,$$

şi din (1.39) rezultă

$$q = 1 \Rightarrow q' = 2.$$

Deci avem de rezolvat ecuaţiile de gradul al doilea

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \text{şi} \quad x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Prima ecuaţie are soluţiile

$$x_1 = x_2 = -1.$$

A doua ecuaţie are soluţiile

$$x_3, x_4 = 1 \pm i.$$

Ne întoarcem la y ştiind că $y = x - 1$ şi găsim soluţiile ecuaţiei de gradul al patrulea

$$y_1 = y_2 = -2 \qquad \mathrm{y}_3, y_4 = \pm i\ .$$

Capitolul 2

Rezolvarea ecuaţiilor transcendente

2.1 Generalităţi

Ecuaţiile reprezintă expresii matematice care conţin o variabilă (necunoscută) şi pot fi puse sub forma generală

$$f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, D \neq \emptyset, f(x) \ = \ 0. \tag{2.1}$$

Egalitatea este valabilă numai pentru o mulţime finită şi discretă de valori ale lui x. Expresia $f(x)$ poate conţine valori numerice, operatori aritmetici şi funcţii elementare. Rezolvarea analitică (pe bază de formule) este posibilă numai în anumite cazuri particulare sau pentru ecuaţii polinomiale de grad inferior. Rezolvarea numerică permite rezolvarea tuturor tipurilor de ecuaţii cu aproximaţii oricât de bune. Fenomenul de aproximare nu este un impediment, deoarece, în final, soluţia va fi exprimată cu un număr finit de cifre semnificative. Deci, metodele de rezolvare numerică sunt singurul instrument viabil pentru rezolvarea ecuaţiilor. Trebuie însă menţionat că rezolvarea globală automată, adică pentru tot intervalul de variaţie a variabilei x, este posibilă numai pentru ecuaţii polinomiale. Pentru celelalte tipuri de ecuaţii, de tip transcendent, aplicarea corectă a metodelor numerice este posibilă numai după ce au fost identificate intervalele care conţin valorile soluţiei. În plus, utilizarea metodelor numerice locale trebuie precedată de verificarea condiţiilor în care acestea pot fi aplicate. Acestea, de obicei, se referă la proprietăţile funcţiei $f(x)$, de exemplu continuitatea, sau la cele ale derivatelor funcţiei.

2.2 Separarea rădăcinilor reale în cazul ecuaţiilor neliniare reale

Vom considera ecuaţia sub forma generală dată de relaţia (2.1) şi trebuie să găsim soluţia $\xi \in D$. Prima dată se efectuează separarea rădăcinilor, adică trebuie să determinăm intervalele din domeniul de definiţie D, astfel încât în fiecare interval să fie o singură rădăcină a ecuaţiei.

Prima metodă de acest gen este *şirul lui Rolle*. Vom presupune că $f \in C^1(D)$, adică funcţia f este derivabilă pe D şi are derivata continuă. În aceste condiţii se rezolvă ecuaţia

$$f'(x) = 0, x \in D.$$

Dacă $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt rădăcinile ecuaţiei derivate, atunci se formează şirul lui Rolle cu valorile $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$. Orice schimbare de semn ce apare la doi termeni consecutivi $f(x_i), f(x_{i+1})$ exprimă existenţa unei rădăcini unice în intervalul (x_i, x_{i+1}), conform teoremei lui Rolle.

Exemplul 2.1 Fie ecuaţia $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4,5 = 0$. Să găsim intervalele de separare ale rădăcinilor.

Soluţie. Vom considera funcţia polinomială

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4,5$$

şi ecuaţia neliniară

$$f(x) = 0, x \in \mathbb{R}.$$

În continuare ataşăm ecuaţia $f'(x) = 0$, care este echivalentă cu

$$6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

care are rădăcinile $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Folosind şirul lui Rolle, scriem următorul tabel

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$f(-\infty) = -\infty$	$f(1) = 0,5$	$f(2) = -0,5$	$f(+\infty) = +\infty$

Observăm că semnul valorilor lui $f(x)$ alternează, deci ecuaţia $f(x) = 0$ are trei rădăcini reale în intervalele $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ şi $(2, +\infty)$.

O a doua metodă de separare a soluţiilor ecuaţiei (3.19) este folosind polinomul de interpolare al lui Lagrange sau al lui Newton. Dacă în domeniul de definiţie al funcţiei

$$f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$$

se aleg punctele

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

atunci se construieşte polinomul de interpolare care trece prin punctele

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), ..., (x_n, f(x_n)).$$

Rădăcinile acestui polinom pot fi considerate ca aproximări pentru rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$.

2.3 Metoda bipartiţiei

Metoda bipartiţiei sau *metoda înjumătăţirii intervalului* este o metodă simplă şi puţin pretenţioasă din punctul de vedere al proprietăţilor funcţiei $f(x)$. Totuşi este necesar însă, ca funcţia să fie continuă.
Astfel, fie

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \tag{2.2}$$

de clasă $C([a, b])$ şi presupunem că, deja rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ sunt separate, deci intervalul $[a, b]$ conţine o singură rădăcină ξ. Acest lucru se întâmplă dacă

$$f(a) \cdot f(b) < 0. \tag{2.3}$$

Procedura acestei metode constă în împărţirea intervalului, în care se ştie că există o singură soluţie, în două subintervale folosind mijlocul intervalului

$$\frac{a+b}{2}. \tag{2.4}$$

Cele două subintervale obţinute sunt

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{şi} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \tag{2.5}$$

iar soluţia ξ este într-unul dintre ele. Se calculează

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{2.6}$$

şi dacă această valoare este zero atunci

$$\xi = \frac{a+b}{2} \tag{2.7}$$

este soluţie exactă. Altfel, pentru a găsi subintervalul în care se află soluţia vom evalua funcţia la capetele acestor intervale. Deoarece funcţia este continuă, rezultă că subintervalul pe care se face schimbarea de semn conţine soluţia căutată. Se va reţine intervalul cu soluţia, îl vom nota $[a_1, b_1]$ şi în continuare acest interval este impărţit la rândul lui în două parţi egale şi analiza continuă în acelaşi fel.

După un număr n de paşi găsim fie soluţia exactă, fie un şir de segmente cuprinse unele în altele

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n]. \tag{2.8}$$

Astfel subintervalul care conţine soluţia este restrâns pe parcursul aplicării metodei. Algoritmul se opreşte atunci când, pentru eroarea dată ε, la un anumit pas k are loc relaţia

$$|f(x_k)| < \varepsilon \tag{2.9}$$

sau echivalent

$$|b_k - a_k| < \varepsilon. \tag{2.10}$$

În cadrul acestei metode se construiesc două şiruri

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{şi} \quad \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{2.11}$$

în felul următor: se alege

$$\begin{array}{l} a_0 = a, \\ b_0 = b, \end{array} . \tag{2.12}$$

Avem una din următoarele situaţii

$$f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 0 \tag{2.13}$$

sau

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f(b) \leq 0, \tag{2.14}$$

corespunzător cărora se aleg

$$\begin{aligned} a_1 &= a, \\ b_1 &= \tfrac{a+b}{2}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

sau

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{a+b}{2}, \\ b_1 &= b. \end{aligned} \tag{2.16}$$

La pasul n avem intervalul $[a_n, b_n]$ în care se află rădăcina şi prin urmare

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a). \tag{2.17}$$

Observaţia 2.2 Şirul $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton crescător şi mărginit superior de b, iar şirul $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton descrescător şi mărginit inferior de a. Din teorema cleştelui obţinem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi. \tag{2.18}$$

Teorema 2.3 *Fie şirurile* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Limita comună a lor,* $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *este soluţia ecuaţiei* $f(x) = 0$.

Demonstraţie. Ştim că f este o funcţie continuă, că $f(a_n)f(b_n) < 0$ şi că $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ şi $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente. Trecând la limită avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(a_n)f(b_n)\right) \le 0 \Leftrightarrow f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \le 0, \tag{2.19}$$

cu relaţia (2.18) obţinem

$$f(\xi)\, f(\xi) \le 0 \Leftrightarrow f^2(\xi) \le 0 \Rightarrow f(\xi) = 0. \tag{2.20}$$

Adică ξ este soluţie a ecuaţiei (2.2). $\square$

Observaţia 2.4 Metoda este avantajoasă deoarece este uşor programabilă, însă algoritmul converge lent.

Exemplul 2.5 Folosind metoda bipartiţiei să aflăm rădăcina ecuaţiei algebrice transcendente $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$ aflată în intervalul $[0, 1]$, cu o eroare $\varepsilon < 10^{-2}$.

Soluţie. Aplicăm metoda bipartiţiei.
Notăm $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1$ şi $a = 0, b = 1$.
Calculăm valorile lui f la capetele intervalului

$$f(0) = -1,$$

$$f(1) = 1$$

şi observăm că

$$f(0)f(1) < 0,$$

adică soluţia este în intervalul $[a, b] = [0, 1]$.

Calculăm mijlocul intervalului $[a, b] = [0, 1]$ şi găsim

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0,5.$$

Determinăm valoarea lui f în $c = 0,5$, adică

$$f(0,5) \approx 0,06 + 0,25 - 0,5 - 1 \approx -1,19 < 0,$$

deci intervalul ales va fi $[a_1, b_1] = \ [0,5\ ;\ 1]$. Evaluăm eroarea

$$\varepsilon < |b_1 - a_1| = 1 - 0,5 = 0,5 > 10^{-2}.$$

Calculăm mijlocul intervalului $[a_1, b_1] = \ [0,5\ ;\ 1]$ şi găsim

$$c_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{0,5+1}{2} = 0,75.$$

Determinăm valoarea lui f în $c_1 = 0,75$, adică

$$f(0,75) \approx 0,32 + 0,84 - 0,75 - 1 \approx -0,59 < 0,$$

deci intervalul ales va fi $[a_2, b_2] = \ [0,75;\ 1]$. Evaluăm eroarea

$$\varepsilon < |b_2 - a_2| = 1 - 0,75 = 0,25 > 10^{-2}.$$

Calculăm mijlocul intervalului $[a_2, b_2] = \ [0,75;\ 1]$ şi găsim

$$c_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{0,75+1}{2} = 0,875.$$

Determinăm valoarea lui f în $c_2 = 0,875$, adică

$$f(0,875) \approx 0,59 + 1,34 + 0,88 - 1 \approx 0,05 > 0,$$

deci intervalul ales va fi $[a_3, b_3] = \ [0,75;\ 0,875]$. Evaluăm eroarea

$$\varepsilon < |b_3 - a_3| = 0,875 - 0,75 = 0,125 > 10^{-2}.$$

Calculăm mijlocul intervalului $[a_3, b_3] = [0,75;\ 0,875]$ şi găsim

$$c_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{0,75 + 0,875}{2} = 0,8125.$$

Determinăm valoarea lui f în $c_3 = 0,8125$, adică

$$f(0,8125) \approx 0,436 + 1,072 - 0,812 - 1 \approx -0,304 < 0,$$

deci intervalul ales va fi $[a_4, b_4] = [0,8125;\ 0,875]$. Evaluăm eroarea

$$\varepsilon < |b_4 - a_4| = 0,875 - 0,8125 = 0,0625 > 10^{-2}.$$

Calculăm mijlocul intervalului $[a_4, b_4] = [0,8125;\ 0,875]$ şi găsim

$$c_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{0,8125 + 0,875}{2} = 0,8438.$$

Determinăm valoarea lui f în $c_4 = 0,8438$, adică

$$f(0,8438) \approx 0,0507 + 1,202 - 0,844 - 1 \approx -0,135 < 0,$$

deci intervalul ales va fi $[a_5, b_5] = [0,8438;\ 0,875]$. Evaluăm eroarea

$$\varepsilon < |b_5 - a_5| = 0,875 - 0,8438 = 0,0312 > 10^{-2}.$$

Calculăm mijlocul intervalului $[a_5, b_5] = [0,8438;\ 0,875]$ şi găsim

$$c_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} = \frac{0,8438 + 0,875}{2} = 0,8594.$$

Determinăm valoarea lui f în $c_5 = 0,8594$, adică

$$f(0,8594) \approx 0,546 + 1,270 - 0,859 - 1 \approx -0,043 < 0,$$

deci intervalul ales va fi $[a_6, b_6] = [0,8594;\ 0,875]$. Evaluăm eroarea

$$\varepsilon < |b_6 - a_6| = 0,875 - 0,8594 = 0,0156 > 10^{-2}.$$

Calculăm mijlocul intervalului $[a_6, b_6] = [0,8594;\ 0,875]$ şi găsim

$$c_6 = \frac{a_6 + b_6}{2} = \frac{0,8594 + 0,875}{2} = 0,8672.$$

Determinăm valoarea lui f în $c_5 = 0,8672$, adică

$$f(0,8672) \approx 0,5655 + 1,3043 - 0,8672 - 1 \approx -0,0063 < 0,$$

deci intervalul ales va fi $[a_6, b_6] = \ [0,8672;\ 0,875]$. Evaluăm eroarea

$$\varepsilon < |b_7 - a_7| = 0,875 - 0,8672 = 0,0007 < 10^{-2}.$$

Astfel că, după şapte paşi, găsim soluţia

$$\xi = \frac{1}{2}\left(0,875\ +\ 0,8672\right) \approx 0,8711$$

cu o eroare mai mică de 10^{-2}.

Exemplul 2.6 Să rezolvăm ecuaţia $x^3\ +\ x - 1 = 0$, cu o eroare $\varepsilon < 0,01$.
Soluţie. Deoarece

$$f'\left(x\right)\ \ =\ \ 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

rezultă că $f\left(x\right)$ este strict crescătoare.
Cum

$$\lim_{x \to -\infty} f\left(x\right) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f\left(x\right) = +\infty$$

rezultă că $f\left(x\right)$ are o singură rădăcina reală.

Calculăm valorile lui f la capetele intervalului

$$f(0) = -1,$$

$$f(1) = 1$$

şi observăm că

$$f(0)f(1) < 0,$$

adică soluţia este în intervalul $[a, b] = [0, 1]$. Vom aplica metoda bipartiţiei intervalului $(0, 1)$.

Calculăm mijlocul intervalului $(0, 1)$ şi găsim

$$c_1\ \ =\ \ 0,5.$$

În acest punct,

$$f\left(0,5\right) = -0,375.$$

Cum
$$f\,(0,5)\cdot f\,(1)<0$$
rădăcina ξ se găseşte în intervalul $(0,5;\ 1)$.

Calculăm mijlocul intervalului $(0,5;\ 1)$ şi găsim
$$c_2 = 0,75.$$
În acest punct,
$$f\,(0,75) = 0,1719.$$
Cum
$$f\,(0,5)\cdot f\,(0,75)<0$$
rădăcina ξ se găseşte în intervalul $(0,5;\ 0,75)$.
Se continuă procedeul iterativ, obţinându-se după a şaptea iteraţie
$$c_7 = 0,6797,$$
$$f\,(0,6797)\approx 0,0063$$
deci rădăcina se găseşte în intervalul $(0,6797;\ 0,6875)$.

Cum $0,6875-0,6797=0,0078<0,01$, valoarea rădăcinii obţinute cu precizia cerută este $\xi = 0,6836$.

2.4 Metoda tangentei

Fie ξ o rădăcină a ecuaţiei $f(x)=0$, unde
$$f:[a,b]\to\mathbb{R}, f\in C^2[a,b]. \tag{2.21}$$
Metoda tangentei sau *metoda lui Newton* cere satisfacerea următoarelor condiţii referitoare la modul de variaţie a functiei $f\,(x)$ pe intervalul unde se va aplica metoda: soluţia ξ să fie separată pe intervalul $[a,b]$, iar primele două derivate ale funcţiei $f\,(x)$ să fie continue şi să aibă semn constant pe intervalul $[a,b]$.

Metoda tangentei se aplică în acel capăt al intervalului $[a,b]$ în care f şi f'' au acelaşi semn. Ţinând cont de aceste aspecte deosebim patru cazuri pe care le prezentăm în continuare.

Cazul I
$$f'(x)>0,\ f''(x)>0$$

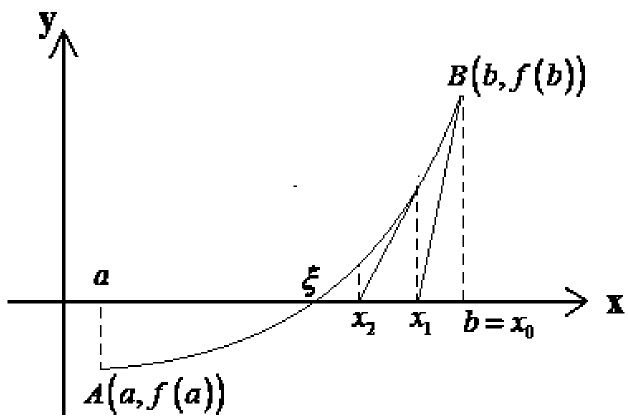

Figura 1.

Se obţine un şir de iteraţii descrescător şi mărginit inferior de a. Prin urmare şirul iteraţiilor este un şir convergent.

Cazul II

$$f'(x) < 0, \; f''(x) > 0$$

Se obţine un şir de iteraţii crescător şi mărginit superior de b. Prin urmare

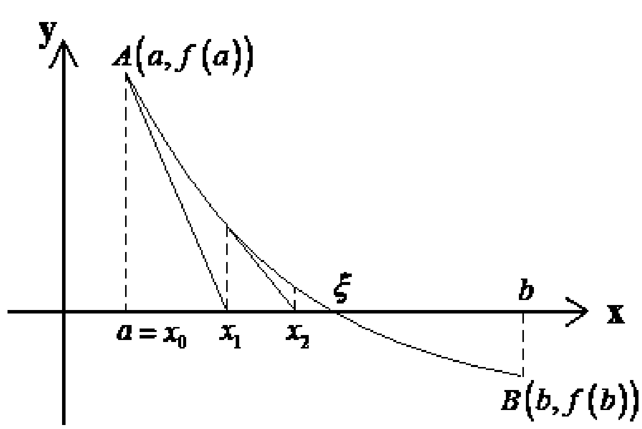

Figura 2.

şirul iteraţiilor este un şir convergent.

Cazul III

$$f'(x) > 0, \ f''(x) < 0$$

Se obţine un şir de iteraţii crescător şi mărginit superior de b. Prin urmare

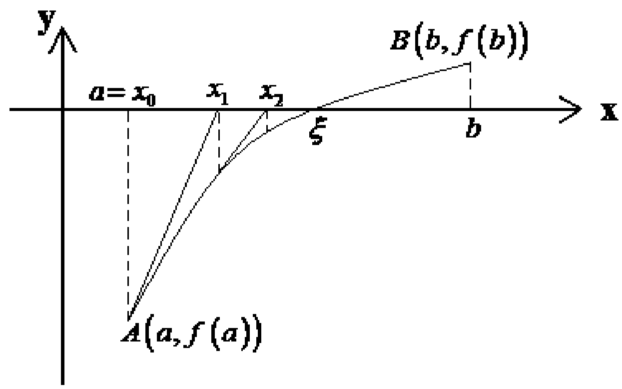

Figura 3.

şirul iteraţiilor este un şir convergent.

Cazul IV

$$f'(x) < 0, \ f''(x) < 0$$

Se obţine un şir de iteraţii descrescător şi mărginit inferior de a. Prin urmare

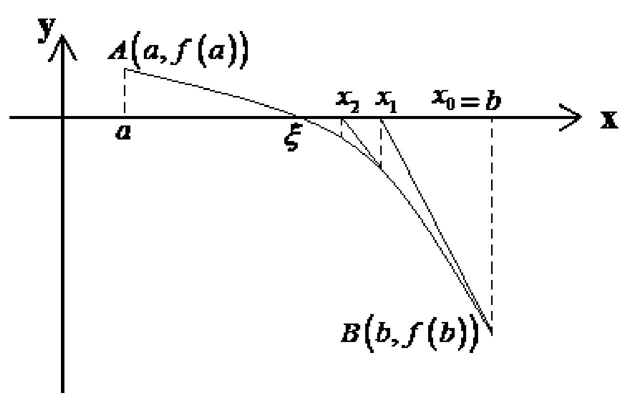

Figura 4.

şirul iteraţiilor este un şir convergent.

Fie x_n o valoare aproximativă a rădăcinii ξ, astfel

$$\xi = x_n + h_n, \tag{2.22}$$

unde h_n este foarte mic.

Dezvoltarea în serie Taylor trunchiată la numai doi termeni ne oferă relaţia:

$$f(\xi) = 0 = f(x_n + h_n) \approx f(x_n) + h_n f'(x_n), \tag{2.23}$$

din care obţinem formula

$$h_n \approx -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.24}$$

pe care o introducem în relaţia (2.22) şi găsim

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, ... \tag{2.25}$$

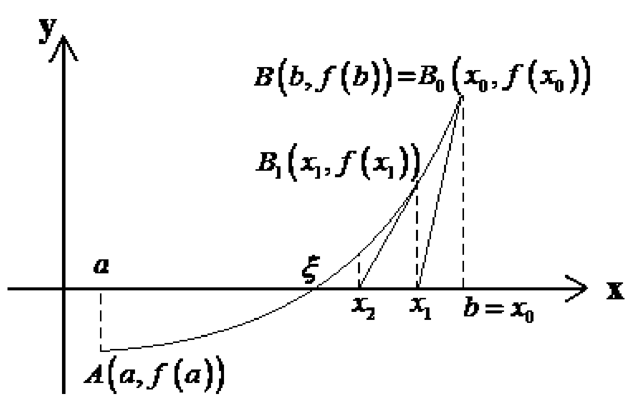

Figura 5.

După Figura 5 se poate urmări construcţia şirului iterativ $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Se alege ca punct de la care pornim iteraţia capătul $b = x_0$ al intervalului şi în punctul $B_0(x_0, f(x_0))$ se duce o tangentă la graficul funcţiei f care taie axa Ox în punctul x_1, după care ducem tangenta în punctul $B_1(x_1, f(x_1))$ intersectează din nou axa Ox în punctul x_2, şi aşa mai departe. Şirul $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ astfel construit converge către ξ. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $B_n(x_n, f(x_n))$ este

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n). \tag{2.26}$$

Intersecţia tangentei cu axa Ox ne dă punctul de coordonate $(x_{n+1}, 0)$ adică

$$-f(x_n) = f'(x_n)\,(x_{n+1} - x_n) \tag{2.27}$$

de unde rezultă

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.28}$$

Astfel, presupunând că $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$, se obţine funcţia iterativă

$$\phi : [a, b] \to \mathbb{R}, \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{2.29}$$

care generează şirul iterativ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $x_{n+1} = \phi(x_n)$.

Teorema 2.7 *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \in C^2[a, b]$ şi $x_0 \in [a, b]$. Vom presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii*

1. $$f'(x) \neq 0,$$
2. *intervalul* $I_0 = [x_0, x_0 + 2h_0] \in [a, b]$, *unde* $h_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$,
3. $2|h_0|M_2 \leq |f'(x_0)|$, *unde* $M_2 = \max\limits_{x\in I_0} |f''(x)|$.

Atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţie unică $\xi \in I_0$, iar şirul $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dat de metoda tangentei este bine definit şi converge la ξ.

Demonstraţie. Aplicând formula creşterilor finite funcţiei f' în punctele x_0, x_1 găsim

$$|f'(x_1) - f'(x_0)| = |x_1 - x_0| \cdot |f''(\xi)|,$$

unde $\xi \in (x_0, x_1)$. Cu condiţia a treia din teoremă, avem $|f'(x_1) - f'(x_0)| \leq |x_1 - x_0| \cdot M_2 \overset{(2.25)}{=} \left|x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - x_0\right| \cdot M_2 = \left|-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \cdot M_2 \overset{(2.24)}{=} |h_0| \cdot M_2 \leq \frac{|f'(x_0)|}{2}$ şi folosind inegalitatea triunghiului obţinem

$$|f'(x_1)| \geq |f'(x_0)| - |f'(x_1) - f'(x_0)| \geq |f'(x_0)| - \frac{|f'(x_0)|}{2} = \frac{|f'(x_0)|}{2}$$

adică

$$|f'(x_1)| \geq \frac{|f'(x_0)|}{2}. \tag{2.30}$$

Din prima condiţie a teoremei şi din relaţia (2.30) rezultă că şi $f'(x_1) \neq 0$, deci x_2 este bine definit.
Calculăm integrala

$$I = \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x) f''(x) \, dx \tag{2.31}$$

în două moduri.
Mai întâi integrăm prin părţi şi avem

$$\begin{aligned}
I &= \textstyle\int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x) f''(x) \, dx = (x_1 - x) f'(x) \big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} (-1) f'(x) \, dx = \\
&= - (x_1 - x_0) f'(x_0) + \textstyle\int_{x_0}^{x_1} f'(x) \, dx = \\
&= - \left(x_0 - \tfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} - x_0 \right) f'(x_0) + f(x) \big|_{x_0}^{x_1} = \tfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} f'(x_0) + f(x_1) - f(x_0) = \\
&= f(x_1)
\end{aligned}$$

şi cu schimbarea de variabilă $x = x_0 + h_0 t$, integrala I, va fi

$$\begin{aligned}
I &= \textstyle\int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x) f''(x) \, dx = \int_0^1 (x_1 - x_0 - h_0 t) f''(x_0 + h_0 t) h_0 dt = \\
&= \textstyle\int_0^1 (x_0 + h_0 - x_0 - h_0 t) f''(x_0 + h_0 t) h_0 dt = h_0^2 \int_0^1 (1 - t) f''(x_0 + h_0 t) \, dt.
\end{aligned}$$

De aici rezultă

$$\begin{aligned}
&|I| = |f(x_1)| = h_0^2 \left| \textstyle\int_0^1 (1 - t) f''(x_0 + h_0 t) \, dt \right| \leq \\
&\leq h_0^2 \textstyle\int_0^1 |1 - t| \cdot |f''(x_0 + h_0 t)| \, dt \leq h_0^2 \int_0^1 |1 - t| \cdot M dt = \\
&= h_0^2 M \textstyle\int_0^1 (1 - t) \, dt = \tfrac{h_0^2 M}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(x_1)| \leq \frac{h_0^2 M}{2}. \tag{2.32}$$

Deoarece

$$f'(x_1) \neq 0 \Rightarrow \exists h_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

şi avem

$$|h_1| = \left| -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| = \frac{|f(x_1)|}{|f'(x_1)|} \leq \frac{\frac{h_0^2 M}{2}}{\frac{|f'(x_0)|}{2}} = \frac{h_0^2 M}{|f'(x_0)|}.$$

Prin urmare

$$\frac{2|h_1| M}{|f'(x_1)|} = 2M |h_1| \frac{1}{|f'(x_1)|} \leq 2M \frac{h_0^2 M}{|f'(x_0)|} \frac{1}{\frac{|f'(x_0)|}{2}} = \left(\frac{2|h_0| M}{|f'(x_0)|} \right)^2. \tag{2.33}$$

Din relaţia (2.33) şi condiţia a treia, rezultă

$$\frac{2\left|h_1\right|M}{\left|f'\left(x_1\right)\right|}\leq 1^2\Rightarrow 2\left|h_1\right|M\leq\left|f'\left(x_1\right)\right| \tag{2.34}$$

adică condiţia a treia scrisă pentru x_1. Verificăm a doua condiţie, procedăm ca în cazul punctului x_1, folosind inegalitatea $|h_1|\leq\frac{|h_0|}{2}$, deoarece conform celei de-a treia condiţii avem

$$\frac{2\left|h_0\right|M}{\left|f'\left(x_0\right)\right|}\leq 1. \tag{2.35}$$

Intervalul $I_1=[x_1,x_1+2h_1]$ se construieşte la fel cum am construit intervalul I_0 şi $I_1\subset I_0$. Într-adevăr $x_1=x_0+h_0$ este chiar mijlocul intervalului $I_0=[x_0,x_0+2h_0]\in[a,b]$ şi condiţia $|h_1|\leq\frac{|h_0|}{2}$ ne asigură că $x_1+2h_1\in I_0$. Prin recurenţă, obţinem relaţiile

$$\frac{2\left|h_0\right|M_2}{\left|f'\left(x_0\right)\right|}\leq 1\neq 0,\left|h_k\right|\leq\frac{\left|h_{k-1}\right|}{2},2\left|h_k\right|M_2\leq\left|f'\left(x_0\right)\right|,I_k\subset I_{k-1}, \tag{2.36}$$

unde

$$h_k\approx-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},I_k=[x_k,x_k+2h_k],\forall k\in\mathbb{N}.$$

De aici rezultă că şirul $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ este definit.

Arătăm acum că este un şir Cauchy sau fundamental.

Pentru $\forall\varepsilon>0,\exists k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $2\left|h_k\right|\leq\varepsilon$, deoarece

$$\left|h_k\right|\leq\frac{\left|h_{k-1}\right|}{2}\leq\frac{\left|h_{k-2}\right|}{2^2}\leq\cdots\leq\frac{\left|h_0\right|}{2^k}\to 0$$

şi

$$x_{k+p}\in I_{k+p}\subset I_k\Rightarrow\left|x_{k+p}-x_k\right|\leq 2\left|h_k\right|\leq\varepsilon$$

pentru $\forall p\in\mathbb{N}$.

Considerăm $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\xi$ şi vom arăta că este chiar soluţia ecuaţiei $f\left(x\right)=0$. Notăm cu

$$M_1=\sup_{x\in I_0}\left|f'\left(x\right)\right| \tag{2.37}$$

şi din $h_k\approx-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ rezultă $f(x_k)\approx-h_kf'(x_k)$, deci

$$\left|f(x_k)\right|=\left|h_kf'(x_k)\right|\leq\left|h_k\right|M_1\to 0. \tag{2.38}$$

Adică $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = 0$, deci

$$f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = f(\xi) = 0. \tag{2.39}$$

Vom arăta unicitatea lui ξ pe I_0.

Ştim că $|x - x_0| < 2|h_0|, \forall x \in (x_0, x_0 + 2h_0)$. Din condiţia a treia şi din teorema creşterilor finite, găsim

$$\begin{gathered} |f'(x) - f'(x_0)| = |x - x_0| \cdot |f''(\xi)| \le |x - x_0| \cdot M_2 < \\ < 2|h_0| M_2 \le |f'(x_0)|, \end{gathered} \tag{2.40}$$

deci $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + 2h_0)$ ceea ce înseamnă că $f'(x) > 0$ sau $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + 2h_0)$, adică f este strict crescătoare sau strict descrescătoare pe intervalul $(x_0, x_0 + 2h_0)$, acest lucru arată că soluţia noastră este unică. □

Teorema 2.8 *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \in C^2[a,b]$, $\xi \in [a,b]$ o soluţie a ecuaţiei $f(x) = 0$ şi fie x_n, x_{n+1} două soluţii determinate cu metoda tangentei. Dacă $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, atunci eroarea aproximaţiei este dată de relaţia*

$$|\xi - x_{n+1}| \le \frac{M_2}{2m_1} h^2.$$

Demonstraţie. Aplicăm formula lui Taylor cu trei termeni şi avem

$$f(\xi) = 0 = f(x_n + (\xi - x_n)) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2!} f''(c_n)(\xi - x_n)^2,$$

cu $c_n \in (\xi, x_n)$.

$$-f'(x_n)(\xi - x_n) = f(x_n) + \frac{1}{2} f''(c_n)(\xi - x_n)^2 \Bigg| : (-f'(x_n)) \quad ,$$

$$\xi - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2,$$

$$\xi - \left[x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right] = -\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2,$$

$$\xi - x_{n+1} = -\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2,$$

$$|\xi - x_{n+1}| = \left| \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right| (\xi - x_n)^2,$$

$$|\xi - x_{n+1}| = \frac{|f''(c_n)|}{2|f'(x_n)|} (\xi - x_n)^2. \tag{2.41}$$

Ţinând cont de relaţiile $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ şi $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, găsim

$$|\xi - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1} (\xi - x_n)^2, \tag{2.42}$$

şi dacă $h = x_{n+} - x_n$, vom avea

$$\varepsilon \leq \frac{M_2}{2m_1} h^2. \tag{2.43}$$

□

Observaţia 2.9 Metoda tangentei este rapid convergentă dacă aproximaţia iniţială este aleasă astfel încât să avem

$$\frac{M_2}{2m_1} |\xi - x_n| \leq q < 1.$$

Observaţia 2.10 Alegerea punctului de start pentru aplicarea metodei tangentei este importantă deoarece soluţiile corespunzătoare celor n iteraţii trebuie să fie convergente către soluţia exactă, adică în intervalul (a, b).

Observaţia 2.11 Dacă prima derivată a funcţiei se anulează în interiorul intervalului (a, b), (sau nu este strict pozitivă sau negativă) metoda nu este convergentă.

Observaţia 2.12 În cazul în care a doua derivată a funcţiei se anulează în interiorul intervalului (a, b), graficul funcţiei admite un punct de inflexiune în intervalul (a, b) şi metoda nu este convergentă.

Exemplul 2.13 Să calculăm cu trei zecimale exacte rădăcina negativă a ecuaţiei

$$x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0.$$

Soluţie. Deoarece

$$f(-11) = 3453 > 0,$$
$$f(-10) = -1050 < 0$$

înseamnă că rădăcina ξ aparţine intervalului$(-11,-10)$. Considerăm ca aproximaţie iniţială $x_0=-11$.
Se aplică formula:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n=0,1,...$$

şi se întocmeşte următorul tabel:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	-11	3453	-5183	-10,3
1	-10,3	134,3	-4234	-10,27
2	-10,27	37,8	-4196	-10,261
3	-10,261	0,2	-	-

Valoarea aproximativă a rădăcinii este deci:

$$x_3 \ = -10,261.$$

Exemplul 2.14 Calculaţi rădăcina pozitivă a ecuaţiei $f(x)=5x^3-17x^2+8x+1=0$ în intervalul [0,6; 0,7] cu ajutorul metodei Newton cu două iteraţii.

Soluţie.

Verificăm dacă soluţia este în intervalul [0,6; 0,7]. Pentru acest lucru calculăm valorile lui f la capetele intervalului

$$\left\{\begin{array}{l} f\left(0,6\right)=0,76 \\ f\left(0,7\right)=-0,015 \end{array}\right. \Rightarrow f\left(0,6\right)\cdot f\left(0,7\right)<0.$$

Determinăm derivatele lui f în x

$$f'(x)=15x^2-34x+8,$$

$$f''(x)=30x-34.$$

Rezolvăm ecuaţia

$$f'(x)=0\Rightarrow 15x^2-34x+8=0,$$

astfel avem $\Delta=1156-480=676\Rightarrow\sqrt{\Delta}=26$ de unde rezultă soluţiile

$$x_1=0,2\left(6\right),x_2=2,$$

deci

$$f'(x)<0,\forall x\in\left[0,6\,;0,7\right].$$

Rezolvăm ecuaţia

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 30x - 34 = 0 \Rightarrow x = \frac{34}{30} = 1,1\,(3)\,,$$

deci

$$f''(x) < 0, \forall x \in [0,6\,;0,7]\,.$$

Metoda lui Newton se aplică în capătul intervalului în care f şi f'' au acealşi semn, în cazul nostru în punctul $(0,7;\, f\,(0,7))$, deci aproximaţia iniţială a soluţiei este $x_0 = b = 0,7$.
Prima iteraţie

$$x_1 = 0,7 - \frac{f(0,7)}{f'(0,7)} \approx 0,7 - \frac{-0,015}{-8,45} \approx 0,6983$$

$$f\,(0,6983) = 0,00187396$$

A doua iteraţie

$$x_2 = 0,6983 - \frac{f(0,6983)}{f'(0,6983)} \approx 0,6983 - \frac{0,00187396}{-8,42394} \approx 0,6982424$$

Evaluăm eroarea cu formula (2.43)

$$\varepsilon \leq \frac{M_2}{2m_1}h^2.$$

$$h = x_2 - x_1 = 0,6983 - 0,6982 = 0,0001 = 10^{-4}.$$

Ştim că $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'\,(x)|$ şi $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''\,(x)|$. În cazul nostru avem

$$m_1 = \min_{x\in[0,6;x_2]} |f'\,(x)| = |f'\,(0,6)| \approx 7,$$

$$M_2 = \max_{x\in[0,6;x_2]} |f''\,(x)| = |f''\,(0,6)| \approx 16.$$

Adică eroarea va fi

$$\varepsilon \leq \frac{M_2}{2m_1}h^2 \approx \frac{16}{2\cdot 7}10^{-4} \approx 0,00011$$

2.5 Metoda secantei

Această metodă se mai numeşte şi *metoda coardei.*

Fie ξ o rădăcină a ecuaţiei$f(x) = 0$, unde

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \in C^2[a, b]. \tag{2.44}$$

Pentru a aplica metoda coardei sau metoda secantei trebuie ca funcţia f să îndeplinească aceleaşi condiţii ca la metoda tangentei. Astfel, soluţia ξ să fie separată pe intervalul $[a, b]$, iar primele două derivate ale funcţiei $f(x)$ să fie continue şi să aibă semn constant pe intervalul $[a, b]$. Metoda secantei se aplică în acel capăt al intervalului $[a, b]$ în care f şi f''au valori cu semne diferite.

În cadrul acestei metode vom urmări două aspecte: primul este legat de convergenţa şirului de iteraţie către rădăcină şi al doilea se referă la evaluarea erorii aceastei metode.

Soluţia aproximativă este calculată la intersecţia abscisei Ox cu segmentul de dreaptă (coarda corespunzătoare porţiunii de grafic) care uneşte punctele de coordonate $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$. După determinarea unei aproximaţii a soluţiei, aceasta devine noul capăt al intervalului de lucru şi procedeul se aplică în continuare pană când variaţiile soluţiei aproximative devin nesemnificative.

Soluţia aproximativă la pasul următor se determină în funcţie de cea de la pasul precedent.

Deosebim patru cazuri care vor fi prezentate în cele patru figuri care urmează.

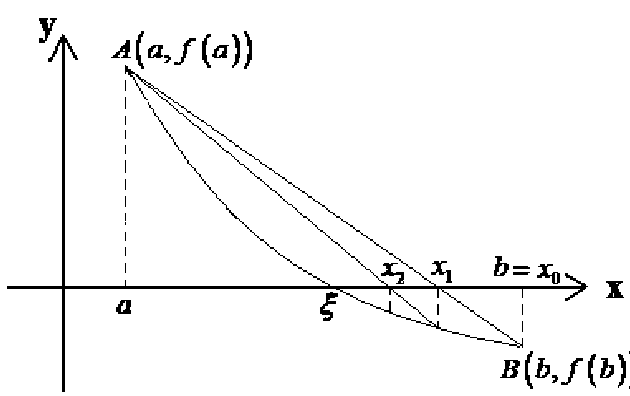

Figura 6.

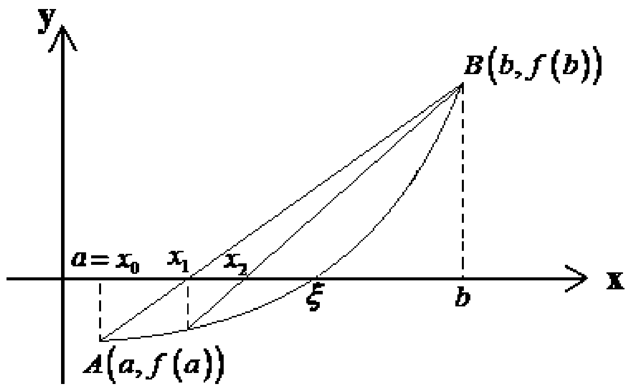

Figura 7.

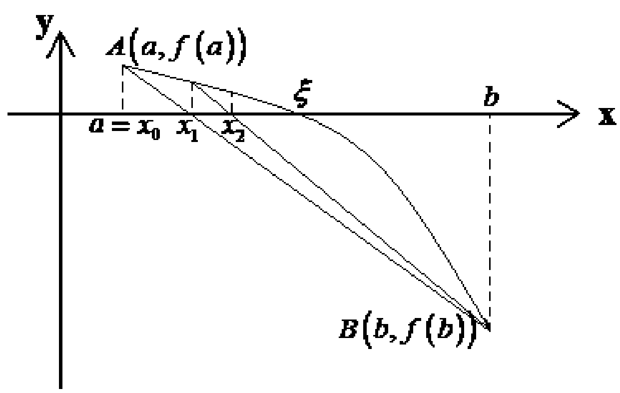

Figura 8.

Vom presupune că $f''(x) > 0$ (curba convexă).

În funcţie de poziţia relativă a coardei faţă de grafic putem avea două situaţii.

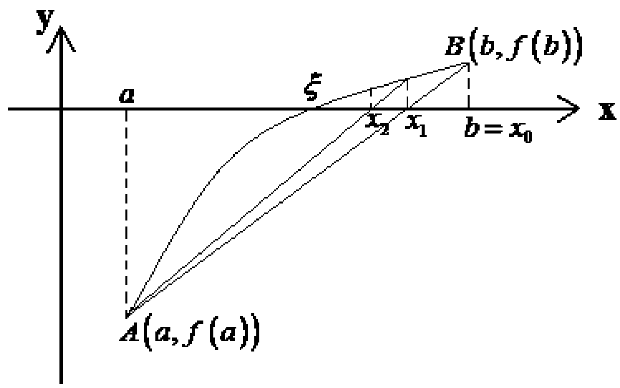

Figura 9.

a) $f(a) > 0$,
b) $f(a) < 0$.

a) Punctul $A(a, f(a))$ este punct fix (rămâne punct fix pe parcursul procesului iterativ) şi punctul de pornire al aproximaţiilor este punctul $B(b, f(b))$ care este vârf mobil, astfel că soluţia aproximativă iniţială va fi $x_0 = b$, iar deplasarea aproximaţiilor se face de la dreapta la stânga (Figura 6). În aceste condiţii avem

$$\begin{cases} y - f(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-b) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -f(b)(b-a) = (f(b) - f(a))(x-b)$$

$$\Leftrightarrow x - b = -\frac{f(b)}{f(b) - f(a)}(b-a) \Leftrightarrow x = b - \frac{f(b)}{f(b) - f(a)}(b-a)$$

dar $b = x_0$ deci

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(a)} \cdot (x_0 - a) \tag{2.45}$$

şi pentru $x = x_1$ rezultă

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(a)} \cdot (x_0 - a). \tag{2.46}$$

Dacă $x_0 \to x_n$, $x_1 \to x_{n+1}$ găsim că soluţia aproximativă x_{n+1} la pasul $n+1$ se va determina în funcţie de cea de la pasul precedent x_n conform relaţiei

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} \cdot (x_n - a), n = 0, 1, 2, ... \tag{2.47}$$

Iteraţiile formează un şir descrescător de numere reale ale aproximaţiei

$$a < \xi < \cdots < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < x_0 = b. \tag{2.48}$$

b) Punctul $B(b, f(b))$ este punct fix (rămâne punct fix pe parcursul procesului iterativ) şi punctul de pornire al aproximaţiilor este punctul $A(a, f(a))$ care este vârf mobil, astfel că soluţia aproximativă iniţială va fi $x_0 = a$, iar deplasarea aproximaţiilor se face de la stânga la dreapta (Figura 7). În aceste condiţii avem

$$\begin{cases} y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -f(a)(b - a) = (f(b) - f(a))(x - a)$$

$$\Leftrightarrow x - a = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a) \Leftrightarrow x = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

dar $a = x_0$ deci

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)} \cdot (b - x_0) \tag{2.49}$$

şi pentru $x = x_1$ rezultă

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)} \cdot (b - x_0). \tag{2.50}$$

Dacă $x_0 \to x_n$, $x_1 \to x_{n+1}$ găsim că soluţia aproximativă x_{n+1} la pasul $n+1$ se va determina în funcţie de cea de la pasul precedent x_n conform relaţiei

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n), n = 0, 1, 2, ... \tag{2.51}$$

Iteraţiile formează un şir crescător de valori aproximative

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < \xi < b. \tag{2.52}$$

Din relaţiile (2.47) şi (2.52) rezultă că cele două şiruri sunt convergente, notăm

$$\bar{\xi} = \lim_{n\to\infty} x_n, a < \bar{\xi} < b \tag{2.53}$$

şi trecem la limită după n în relaţia (2.51) de unde obţinem

$$\overline{\xi} = \overline{\xi} - \frac{f(\overline{\xi})}{f(\overline{\xi}) - f(a)}(\overline{\xi} - a) \Rightarrow f(\overline{\xi})\frac{1}{f(\overline{\xi}) - f(a)}(\overline{\xi} - a) = 0$$

$$\Rightarrow f(\overline{\xi}) = 0.$$

Dar ştim că în intervalul $[a, b]$ funcţia $f(x)$ are soluţie unică, ceea ce înseamnă că

$$\overline{\xi} = \xi. \tag{2.54}$$

Evaluarea erorii la metoda coardei (secantei)

Teorema 2.15 *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \in C^2[a, b]$. *Dacă* $|f'(x)|$ *este mărginit, adică* $\exists m_1, M_1 > 0$ *astfel încât* $0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1$, *atunci eroarea va avea expresia*

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} \cdot |x_n - x_{n-1}|.$$

Demonstraţie. În continuare vom considera cazul $f(a) > 0$, adică formula de calcul a soluţiei este dată de relaţia (2.51)

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(a)} \cdot (x_{n-1} - a) \Rightarrow$$

$$-f(x_{n-1})(x_{n-1} - a) = (f(x_{n-1}) - f(a))(x_n - x_{n-1})$$

$$-f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1}) - f(a)}{x_{n-1} - a} \cdot (x_n - x_{n-1})$$

Dar ξ este rădăcină pentru $f(x) = 0$, deci $f(\xi) = 0$

$$f(\xi) - f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1}) - f(a)}{x_{n-1} - a} \cdot (x_n - x_{n-1}) \tag{2.55}$$

Cu teorema lui Lagrange rezultă că există $\xi_{n-1} \in (x_{n-1}, b)$ şi $\bar{x}_{n-1} \in (a, x_{n-1})$ astfel încât

$$(\xi - x_{n-1}) \cdot f'(\xi_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) \cdot f'(\bar{x}_{n-1}). \tag{2.56}$$

Acum

$$(\xi - x_{n-1}) \cdot f'(\xi_{n-1}) = [(x_n - x_{n-1}) + (\xi - x_n)] \cdot f'(\xi_{n-1})$$

adică

$$(\xi - x_{n-1}) \cdot f'(\xi_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) \cdot f'(\xi_{n-1}) + (\xi - x_n) \cdot f'(\xi_{n-1}) \Leftrightarrow$$

$$(\xi - x_n) \cdot f'(\xi_{n-1}) = (\xi - x_{n-1}) \cdot f'(\xi_{n-1}) - (x_n - x_{n-1}) \cdot f'(\xi_{n-1}). \quad (2.57)$$

În relaţia (2.57) folosim formula (2.56), deci

$$(\xi - x_n) \cdot f'(\xi_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) \cdot f'(\bar{x}_{n-1}) - (x_n - x_{n-1}) \cdot f'(\xi_{n-1}) \Leftrightarrow$$

$$(\xi - x_n) \cdot f'(\xi_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) \cdot (f'(\bar{x}_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})) \Leftrightarrow$$

$$\xi - x_n = \frac{f'(\bar{x}_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})}{f'(\xi_{n-1})}(x_n - x_{n-1}).$$

Aplicând modulul acestei relaţii, găsim

$$|\xi - x_n| = \frac{|f'(\bar{x}_{n-1}) - f(\xi_{n-1})|}{|f'(\xi_{n-1})|} \cdot |x_n - x_{n-1}|, \quad (2.58)$$

dar ξ_{n-1} şi $\bar{x}_{n-1} \in [a, b]$,

$$|f'(\bar{x}_{n-1}) - f(\xi_{n-1})| \le M_1 - m_1$$

atunci (2.58) devine

$$|\xi - x_n| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1} \cdot |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.59)$$

□

Observaţia 2.16 Metoda tangentei este complementara metodei coardei şi anume faptul că dacă una dă o valoare aproximativă a rădăcinii prin lipsă (adaos), cealaltă oferă soluţia prin adaos (lipsă). Datorită simplităţii formulei de recurenţă, combinată cu o rapiditate a convergenţei, metoda tangentei este de preferat celorlalte metode.

Exemplul 2.17 Determinaţi rădăcina pozitivă a ecuaţiei:

$$f(x) = x^3 - 0,2 \cdot x^2 - 0,2 \cdot x - 1,2 = 0$$

cu eroarea $0,02$.

Soluţie. Determinăm intervalul în care se află soluţia:

$$f(1) = -0,6 < 0,$$

$$f(2) = 5,6 > 0,$$

$$f(1,5) = 1,425 > 0$$

deci intervalul este

$$[a,b] = [1;1,5].$$

Derivata de ordinul întâi a lui f este

$$f'(x) = 3x^2 - 0,4x - 0,2 = 0$$

şi are soluţiile

$$x_1 = -0,5$$
$$x_2 = 0,3$$

ceea ce înseamnă că $f'(x) > 0$, pentru $x \in [1;1,5]$.

Derivata de ordinul al doilea a lui f este

$$f''(x) = 6x - 0,4 = 0$$

şi are soluţia

$$x = 0,06,$$

ceea ce înseamnă că $f''(x) > 0$, pentru $x \in [1;1,5]$.

Am găsit că pe intervalul $[1;1,5]$ derivatele f', f'' nu schimbă semnul, deci putem aplica metoda.

Metoda se aplică în capătul $a = 1 = x_0$. Avem succesiv

$$x_1 = 1 + \frac{0,6}{1,425 + 0,6} \cdot (1,5 - 1) \cong 1,15.$$

Evaluăm eroarea după primul pas cu formula

$$\varepsilon \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} \cdot |x_1 - x_0|.$$

Cum $f'' > 0$ pentru orice $x \in [1,15;1,5]$ rezultă că funcţia f' este crescătoare pe acest interval, adică

$$m_1 = |f'(1,15)| = 3.3075,$$

$$M_1 = |f'(1,5)| = 5,95,$$

Deci eroarea este

$$\varepsilon \leq \frac{5,95 - 3,3075}{3,3075} \cdot |1,15 - 1| = 0,119841 > 0,02.$$

Continuăm cu al doilea pas.

$$x_2 = 1,15 + \frac{0,1770}{1,425 + 0,173} \cdot (1,5 - 1,15) \cong 1,190.$$

Evaluăm eroarea după al doilea pas cu formula

$$\varepsilon \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} \cdot |x_2 - x_1| \,.$$

Cum $f'' > 0$ pentru orice $x \in [1,198;1,5]$ rezultă că funcţia f' este crescătoare pe acest interval, adică

$$m_1 = |f'(1,19)| = 3.5723,$$

$$M_1 = |f'(1,5)| = 5,95,$$

Deci eroarea este

$$\varepsilon \leq \frac{5,95 - 3,5723}{3,5723} \cdot |1,19 - 1,15| = 0,026624 > 0,02.$$

Continuăm cu al treilea pas.

$$x_3 = 1,190 + \frac{0,036}{1,425 + 0,056} \cdot (1,5 - 1,190) \cong 1,198.$$

Evaluăm eroarea după al treilea pas cu formula

$$\varepsilon \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} \cdot |x_3 - x_2| \,.$$

Cum $f'' > 0$ pentru orice $x \in [1,19; 1,5]$ rezultă că funcţia f' este crescătoare pe acest interval, adică

$$m_1 = |f'(1,198)| = 3,626412,$$

$$M_1 = |f'(1,5)| = 5,95,$$

Deci eroarea este

$$\varepsilon \leq \frac{5,95 - 3,626412}{3,626412} \cdot |1,198 - 1,19| = 0,005126 < 0,02$$

Soluţia este

$$\xi = 1,198 + 0,02 \cdot \theta, \quad 0 < \theta \leq 1.$$

2.6 Metoda combinată

Fie ξ o rădăcină a ecuaţiei$f(x) = 0$, unde

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \in C^2[a,b]. \tag{2.60}$$

Metoda combinată este o metodă care presupune aplicarea metodei tangentei la un capăt al intervalului şi aplicarea metodei secantei la celălalt capăt. Astfel, soluţia ξ trebuie să fie separată pe intervalul $[a,b]$, iar primele două derivate ale funcţiei $f(x)$ să fie continue şi să aibă semn constant pe intervalul $[a,b]$.

Vom aplica pe rând cele două metode: metoda tangentei se aplică în acel capăt al intervalului $[a,b]$ în care f şi f''au valori cu acelaşi semn, iar metoda secantei în capătul celălalt.

Se disting patru cazuri.

Cazul I

$$f''(x) > 0$$
$$f'(x) < 0$$

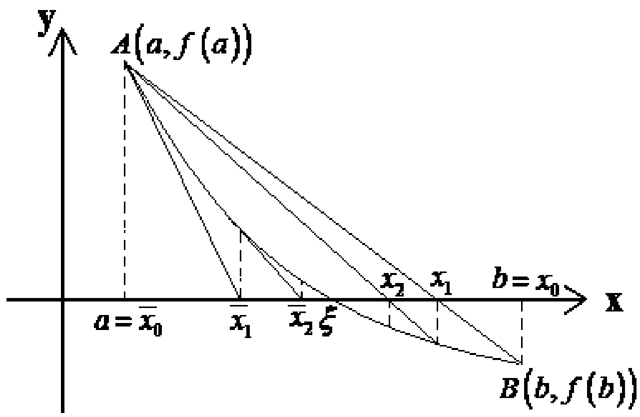

Figura 10.

Cazul II

$$f''(x) > 0$$
$$f'(x) > 0$$

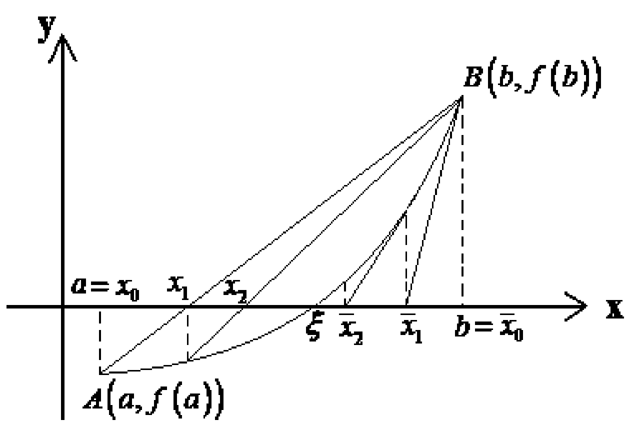

Figura 11.

Cazul III

$$f''(x) < 0$$
$$f'(x) > 0$$

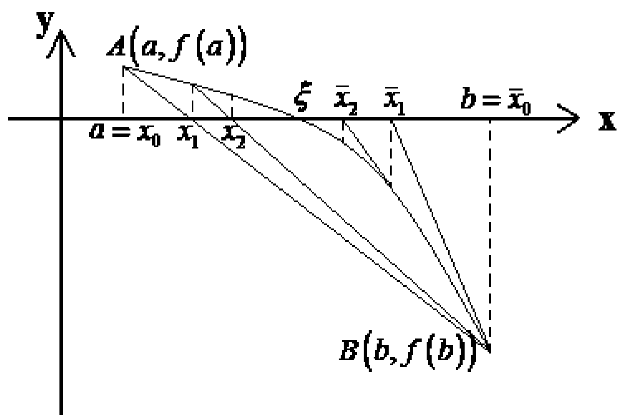

Figura 12.

Cazul IV

$$f''(x) < 0$$
$$f'(x) < 0$$

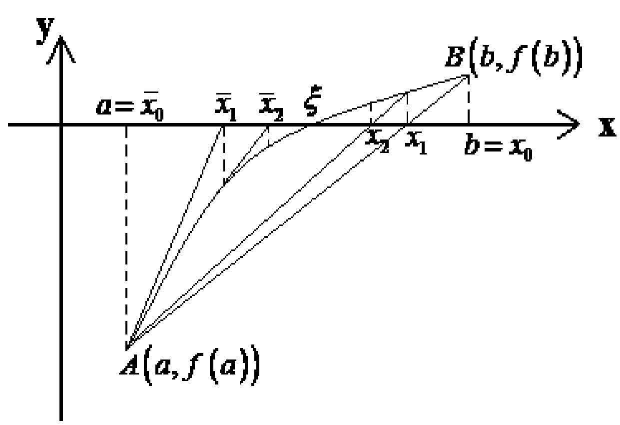

Figura 13.

Vom considera cazul al doilea în care $f''(x) > 0$ şi $f'(x) > 0$, cu $a \leq x \leq b$. În acest caz metoda tangentei se aplică în capătul b al intervalului şi vom avea ca şi aproximaţie iniţială pentru această metodă $\bar{x}_0 = b$, iar în celălalt

capăt aplicăm metoda secantei şi vom avea ca şi aproximaţie iniţială pentru această metodă $x_0 = a$.
La pasul $n+1$, în formula de calculul a soluţiei cu metoda secantei, apare soluţia $\bar{x}_n$ calculată cu metoda tangentei la pasul n. Astfel că, formulele de calcul pentru determinarea soluţiei la pasul $n+1$ vor fi:

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)} \tag{2.61}$$

pentru metoda tangentei,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} \cdot (\bar{x}_n - x_n) \tag{2.62}$$

pentru metoda secantei.
În acest mod sunt construite două şiruri convergente

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < \xi < b \tag{2.63}$$

şi

$$a < \xi < \cdots < \bar{x}_{n+1} < \bar{x}_n < \cdots < \bar{x}_1 < \bar{x}_0 = b. \tag{2.64}$$

Aplicând teorema "cleştelui" obţinem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi = \lim_{n\to\infty} \bar{x}_n. \tag{2.65}$$

Deci,

$$x_n < \xi < \bar{x}_n \tag{2.66}$$

şi scăzând x_n în relaţia (2.66) găsim

$$0 < \xi - x_n < \bar{x}_n - x_n.$$

Algoritmul se încheie atunci când la pasul n diferenţa între capetele intervalului este mai mică decât eroarea dată

$$\bar{x}_n - x_n < \varepsilon,$$

iar soluţia va fi egală cu media aritmetică a soluţiilor obţinute la pasul n cu cele două metode

$$\xi = \frac{\bar{x}_n + x_n}{2}. \tag{2.67}$$

Observaţia 2.18 Metoda combinată este aplicată pentru izolarea bilaterală a soluţiei.

Observaţia 2.19 Metoda combinată converge rapid.

Exemplul 2.20 Să determinăm o soluţie reală a ecuaţiei

$$x^3 + x^2 + x - 2 = 0$$

cu metoda combinată realizând doi paşi. Evaluaţi eroarea.

Soluţie. Considerăm $f(x) = x^3 + x^2 + x - 2 = 0$.

Determinăm intervalul în care se află soluţia:

$$f(0) = -2 < 0,$$

$$f(1) = 1 > 0.$$

Deci intevalul va fi

$$[a, b] = [0; 1].$$

Verificăm condiţiile pentru aplicarea metodei.

Derivata de ordinul întâi a lui f este

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1,$$

care are discriminantul negativ, ceea ce înseamnă că$f'(x) > 0$, pentru $x \in [0; 1]$.

Derivata de ordinul al doilea a lui f este

$$f''(x) = 6x + 2$$

şi are soluţia

$$x = -0,333$$

ceea ce înseamnă că $f''(x) > 0$, pentru $x \in [0; 1]$.
Am găsit că pe intervalul $[0; 1]$ derivatele f', f'' nu schimbă semnul, deci putem aplica metoda combinată.

Metoda secantei se aplică în capătul $a = 0 = x_0$. Metoda tangentei se aplică în capătul $b = 1 = \bar{x}_0$. Vom folosi formulele, pentru metoda secantei

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n)$$

şi pentru metoda tangentei

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}.$$

Primul pas. Aplicăm metoda secantei şi obţinem

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(\bar{x}_0) - f(x_0)}(\bar{x}_0 - x_0) = 0 - \frac{-2}{1-(-2)}(1-0) \approx 0,666.$$

Aplicăm metoda tangentei şi obţinem

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 - \frac{f(\bar{x}_0)}{f'(\bar{x}_0)} = 1 - \frac{1}{6} \approx 0,833.$$

Intervalul a devenit $[0,666; 0,833]$.

Al doilea pas. Aplicăm metoda secantei şi obţinem

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(\bar{x}_1) - f(x_1)}(\bar{x}_1 - x_1) =$$

$$= 0,666 - \frac{-0,595}{0,104-(-0,595)}(0,833-0,666) \approx 0,808.$$

Aplicăm metoda tangentei şi obţinem

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 - \frac{f(\bar{x}_1)}{f'(\bar{x}_1)} = 0,883 - \frac{0,104}{4,747} \approx 0,811.$$

Soluţia este

$$\xi = \frac{\bar{x}_2 + x_2}{2} \approx \frac{0,811+0,808}{2} \approx 0,809$$

iar eroarea este

$$\varepsilon \leq \bar{x}_2 - x_2 \approx 0,811 - 0,808 \approx 0,003.$$

Capitolul 3

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

1) Metode exacte

1. metoda Cramer
2. metoda Gauss
3. metoda pivotului

2) Metode iterative

1. metoda aproximaţiei successive
2. metoda Gauss-Seidel
3. metoda relaxării

3.1 Metoda lui Cramer

Considerăm sistemul liniar cu n ecuaţii şi n necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2, \\ \dotfill \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dotfill \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Facem următoarele notaţii

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Cu aceste notaţii sistemul (3.1) se scrie

$$AX = B. \tag{3.2}$$

Vom presupune că $\det A \neq 0$, adică sistemul de ecuaţii este compatibil determinat, deci există A^{-1}. Considerăm E matricea unitate de dimensiune egală cu matricea A. Înmulţind relaţia (3.2) cu A^{-1}, avem

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow EX = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B. \tag{3.3}$$

Pentru determinarea soluţiei sistemului (3.1) putem scrie următorul algoritm:
1. se calculează $\det A$.
2. dacă $\det A \neq 0$ înseamnă că există A^{-1} şi vom realiza următorii paşi

a) se transpune matricea A;

b) se calculează complemenţii algebrici ai transpusei $A_{ij} = (-1)^{(i+j)} m_{ij}$, unde m_{ij} este minorul corespunzător elementului a_{ij}, $i, j = 1, ..., n$;

c) se înlocuieşte în matricea transpusă elementele cu complemenţii algebrici şi se înmulţeşte cu $\frac{1}{\det A}$;

d) se obţine inversa mariceală a lui A;

e) se înmulţeşte la dreapta cu B;

f) se obţine vectorul necunoscutelor X;

Exemplul 3.1 Să rezolvăm sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Soluţie.
Conform notaţiilor (3.2) avem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

Calculăm determinantul matricei A şi găsim

$$\det A = -3,$$

deci $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$.
Scriem transpusa şi calculăm adjuncta

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

Cu aceste elemente determinăm inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{-3} & \frac{-1}{-3} & \frac{0}{-3} \\ \frac{-3}{-3} & \frac{0}{-3} & \frac{3}{-3} \\ \frac{-5}{-3} & \frac{1}{-3} & \frac{3}{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Acum înmulţim pe B, la stânga, cu A^{-1} şi vom obţine vectorul necunoscutelor X.

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{5}{3} & \frac{-1}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Deci soluţia sistemului este

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Observaţia 3.2 Din soluţia de mai sus rezultă

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, ..., n, \tag{3.4}$$

unde

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{şi} \quad \Delta_i = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & i & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}.$$

În continuare vom justifica relaţia (3.4).
Calculul matricei A^{-1} este dificil pentru $n \geq 4$ şi deci această metodă este folosită mai rar pentru aceste cazuri.
Pornind de la relaţia (3.3) este uşor de determinat formulele de calcul ale necunoscutelor x_i, $i = 1, ..., n$.
Ştim că

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A*, \tag{3.5}$$

unde $A*$ este matricea adjunctă.
Înlocuim în relaţia (3.3) inversa matricei A dată de relaţia (3.5) şi obţinem

$$X = \frac{1}{\det A} A * \cdot B$$

sau

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ ... \\ \Delta_n \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

unde am notat

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} b_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{3.7}$$

adică Δ_i este determinantul matricei A în care am înlocuit coloana i cu coloana termenilor liberi B.
Formulele lui Cramer se obţin cu relaţia (3.6), adică

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

şi sunt echivalente cu formula (3.4).

Exemplul 3.3 Să determinăm soluţia sistemului de mai jos, folosind formulele lui Cramer

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Soluţie.
Scriem matricea asociată sistemului de ecuaţii

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

şi calculăm determinantul ei

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1 & -2\end{vmatrix},$$

făcând zerouri pe prima coloană începând cu al doilea element şi obţinem

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1\\ 0 & -2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 3 & 2 & -3\end{vmatrix},$$

iar acum dezvoltăm după prima coloană şi avem

$$\det A=\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4\\ 0 & -2 & 2\\ 3 & 2 & -3\end{vmatrix}=14\neq 0,$$

deci putem aplica formulele lui Cramer.
Calculăm acum Δ_i pentru $i=1,...,4$:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -2\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\,2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+1}\,2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1\\ -1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}=-2\cdot 14+2\cdot 14=0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & -2\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\,2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -2\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+2}\,2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 2\cdot(-5) = 14,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\,2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+3}\,2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\cdot(-6) + 2\cdot(-6) = 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4}\,2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+4}\,2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 2\cdot(-1) = 14.$$

Folosind formulele (3.6) găsim soluţia sistemului

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{14} = 0, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1,$$
$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{14} = 0, x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1.$$

3.2 Metoda lui Gauss

Metoda lui Gauss este o metodă de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare care se bazează pe eliminarea succesivă a necunoscutelor. Pentru comoditate vom considera sistemul cu trei ecuaţii şi trei necunoscute

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}, & (1_1) \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 = a_{24}, & (1_2) \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 = a_{34}, & (1_3) \end{array}\right. , \tag{3.8}$$

cu $\det A \neq 0$.
Fie elementul $a_{11} \neq 0$. Împărţim prin a_{11} coeficienţii primei ecuaţii a sistemului (3.8)

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{a_{14}}{a_{11}}. \tag{3.9}$$

Cu notaţia

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j > 1, \tag{3.10}$$

relaţia (3.9) se scrie

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = b_{14}.$$

Înmulţim acum ecuaţia (1_1) a sistemului (3.8) cu $-a_{21}$ şi o adunăm cu ecuaţia (1_2) şi apoi, înmulţim ecuaţia (1_1) cu $-a_{31}$ şi o adunăm cu ecuaţia (1_3) a sistemului (3.8). Obţinem:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}\,x_3 = b_{14} \left| \begin{smallmatrix} *(-a_{21}) \\ *(-a_{31}) \end{smallmatrix} \right. & (4_1) \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)} & (4_2) \\ \quad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)} & (4_3) \end{cases}, \tag{3.11}$$

unde coeficienţii

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}\,b_{1j} \ \text{ cu } \ i, j \geq 2. \tag{3.12}$$

În continuare aplicăm acelaşi raţionament pentru cea de-a doua ecuaţie a sistemului (3.11).
Considerăm elementul $a_{22}^1 \neq 0$ (altfel $a_{32}^1 \neq 0$ şi interschimbăm ecuaţiile (4_2) şi (4_3) ale sistemului (3.11), după care renumerotăm coeficienţii). Mai întâi împărţim coeficienţii ecuaţiei (4_2) la a_{22}^1 şi ecuaţia (4_2) devine

$$x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_3 = \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \tag{3.13}$$

dar, ca şi anterior, notăm

$$b_{2j}^{(1)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad j > 2 \tag{3.14}$$

iar ecuaţia (3.13) devine

$$x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 = b_{24}^{(1)}.$$

Urmează să înmulţim ecuaţia (4_2) a sistemului (3.11) cu coeficientul $-a_{32}^1$ şi să o adunăm la ecuaţia (4_3).
Realizând aceste calcule, sistemul (3.11) se transformă în sistemul

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}\,x_3 = b_{14}, \\ x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 = b_{24}^{(1)}, \quad |(-a_{32}^{(1)}) \\ a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)}, \end{array}\right. \tag{3.15}$$

unde

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j}^{(1)}, \quad i, j \geq 3, \tag{3.16}$$

şi notăm cu

$$b_{34}^{(2)} = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}.$$

Astfel sistemul devine

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}\,x_3 = b_{14}, \\ x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 = b_{24}^{(1)}, \\ x_3 = b_{34}^{(2)}. \end{array}\right. \tag{3.17}$$

Am obţinut prin aceste transformări elementare legate de coeficienţii sistemului (3.8) un sistem superior triunghiular care poate fi rezolvat foarte uşor pornind de la ultima ecuaţie către prima. Deci, soluţia se determină cu relaţiile de mai jos:

$$\begin{array}{l} x_3 = b_{34}^{(2)} \\ x_2 = b_{34}^{(1)} - b_{23}^{(1)}b_{34}^{(2)} \\ x_1 = b_{14} - b_{12}\,(b_{24}^{(1)} - b_{23}^{(1)}b_{34}^{(2)}) - b_{13}b_{34}^{(2)} \end{array} \tag{3.18}$$

Exemplul 3.4 Să determinăm soluţia sistemului

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ \ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \end{array}\right.$$

folosind metoda lui Gauss.
Soluţie.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \quad / : 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1 \left| \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot 1 \end{array}\right. \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ -\frac{3}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 2 \,\Big|: \left(-\frac{3}{2}\right) \\ \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{7}{3}x_3 = -\frac{4}{3} \,\Big|\cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \\ \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{7}{3}x_3 = -\frac{4}{3} \\ \frac{13}{3}x_3 = \frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}.$$

Observaţia 3.5 O aplicaţie importantă a metodei lui Gauss este calculul matricei inverse aplicând transformările anterioare matricei

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se vor aplica succesiv, transformări elementare, până când în primele trei coloane obţinem matricea unitate, iar următoarele trei vor forma chiar matricea inversă căutată.

Exemplul 3.6 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine A^{-1}.

Soluţie.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & |A^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right);$$

Considerăm $A_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Pasul 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pasul 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 4,75 & -0,75 & -0,25 & 1 & 0 \\ 0 & 0,75 & 2,25 & -0,25 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pasul 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,157 & -0,052 & 0,210 & 0 \\ 0 & 0,75 & 2,25 & -0,25 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scădem din a 3 a ecuaţie pe a 2 a înmulţită cu 0,75.
Pasul 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,157 & -0,052 & 0,210 & 0 \\ 0 & 0 & 2,367 & -0,211 & -0,157 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pasul 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,157 & -0,052 & 0,210 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,080 & -0,066 & 0,422 \end{pmatrix}.$$

Pasul 6

$$\underline{\mathrm{L}_1 - 0,25\mathrm{L}_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,210 & 0,263 & -0,052 & 0 \\ 0 & 1 & -0,157 & -0,052 & 0,210 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,089 & -0,066 & 0,422 \end{pmatrix}.$$

Pasul 7

$$\underline{\mathrm{L}_2 + 0,157\mathrm{L}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,210 & 0,263 & -0,052 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0,065 & 0,199 & 0,066 \\ 0 & 0 & 1 & -0,089 & -0,066 & 0,422 \end{pmatrix}.$$

Pasul 8

$$\underline{\mathrm{L}_1 + 0,210\mathrm{L}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,244 & -0,065 & 0,088 \\ 0 & 1 & 0 & -0,065 & 0,199 & 0,066 \\ 0 & 0 & 1 & -0,089 & -0,066 & 0,422 \end{pmatrix}.$$

Găsim inversa matricei A

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,244 & -0,065 & 0,088 \\ -0,065 & 0,199 & 0,066 \\ -0,089 & -0,066 & 0,422 \end{pmatrix}.$$

3.3 Metoda pivotului

Considerăm sistemul liniar cu n ecuaţii şi n necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}\, x_n = a_{2,n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = a_{i,n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1} \end{cases} \tag{3.19}$$

pe care îl scriem matriceal

$$AX = B, \tag{3.20}$$

unde

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \cdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

şi să notăm cu M matricea extinsă

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iq} & \cdots & a_{in} & a_{i,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pn} & a_{p,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

Fie a_{pq}elementul nenul, cel mai mare în modul, ce nu aparţine coloanei termenilor liberi. Acest element se numeşte <u>pivot</u>.

Notăm $m_i = -\frac{a_{iq}}{a_{pq}}$, cu excepţia liniei p $(i \neq p)$. Linia p se numeşte linie <u>pivot</u>.

Adunăm la fiecare linie care nu conţine pivotul produsul dintre linia pivotului şi m_i şi rezultă o matrice cu coloana q egală cu zero. Eliminând linia p şi coloana q obţinem o nouă matrice M_1 cu *(n-1)* linii şi coloane.

Procedăm la fel cu M_1.

Obţinem un şir de matrici M_1, M_2, M_3,…,M_{n-1}.

Ultima matrice este o matrice linie cu 2 termeni.
Pornind de la ultima ecuaţie formăm un sistem care după renumerotarea necunoscutelor se obţine un sistem triunghiular.

3.4 Metoda aproximaţiilor succesive

Metoda aproximaţiilor succesive este o metodă aproximativă de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare, ceea ce înseamnă că soluţia se determină în urma unui proces iterativ ţinând cont de o eroare dată ε. O primă condiţie pentru a putea aplica această metodă unui sistem de ecuaţii liniare este ca $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$.

În cele ce urmează vom considera sistemul cu n ecuaţii şi n necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.21}$$

pentru care toţi coeficienţii diagonalei principale sunt nenuli ($a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$). Explicităm din ecuaţia i necunoscuta x_i, $i = \overline{1,n}$ şi în acest mod găsim formulele de calcul pentru necunoscutele sistemului (3.21) sub forma

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{12}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{13}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \frac{a_{1j}}{a_{22}}x_j - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{22}}x_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{3.22}$$

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 - \cdots - \frac{a_{i,i-1}}{a_{ii}}x_{i-1} - \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}}x_{i+i} - \cdots - \frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{nj}}{a_{nn}}x_j - \cdots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}$$

Pentru o scriere mai simplă vom folosi notaţiile

$$\begin{cases} \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j, \quad \text{pentru } i,j = \overline{1,n} \\ \alpha_{ij} = 0, & i = j, \quad \text{pentru } i,j = \overline{1,n} \\ \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, & i = \overline{1,n} \end{cases} \tag{3.23}$$

Cu notaţiile (3.23), relaţiile (3.22) se rescriu astfel

$$\begin{array}{l} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \cdots + \alpha_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \cdots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} \end{array} \tag{3.24}$$

Considerăm acum

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix}; \tag{3.25}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \dots & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \cdots & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \dots & 0 & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{ni} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

şi sistemul (3.21) devine

$$x = \beta + \alpha x.$$

Pentru a merge mai departe trebuie ca sistemul în forma dată de relaţia (3.24) să verifice o a doua condiţie şi anume, condiţia de convergenţă. Convergenţa algoritmului este îndeplinită dacă

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, i = \overline{1,n} \tag{3.26}$$

şi în caz afirmativ vom reţine $\max\left\{\sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{n} |\alpha_{ij}|, i = \overline{1,n}\right\}$. Notăm acest maxim cu $\|\alpha\|$, adică

$$\|\alpha\| = \max \left\{ \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{n} |\alpha_{ij}|, i = \overline{1,n} \right\} \tag{3.27}$$

şi acest maxim va fi util pentru calculul erorii.

Algoritmul de rezolvare a sistemului de ecuaţii continuă cu calculul soluţiei care se realizează în mai multe etape.

Fiind o metodă aproximativă va trebui să pornim procesul iterativ de la o aproximaţie iniţială a soluţiei şi, de obicei, se ia ca aproximaţie iniţială coloana termenilor liberi.

$$x^{(0)} = \beta \tag{3.28}$$

Se face prima iteraţie folosind relaţia $x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)}$, după care va fi evaluată eroarea folosind formula

$$\varepsilon < \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \cdot \max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|, i = \overline{1,n} \tag{3.29}$$

pentru $k = 1$. Dacă eroarea obţinută este mai mică decât eroarea dată, algoritmul se încheie aici. În caz contrar, se trece la a doua iteraţie folosind relaţia

$$x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)}$$

şi algoritmul se repetă.

În urma acestor iteraţii se obţine şirul $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(k+1)}, ...$ convergent, notăm cu $x = \lim\limits_{x \to \infty} x^{(k)}$ şi această limită este soluţia sistemului (3.21).

Exemplul 3.7 Să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x_1 - 0,05x_2 - 0,10x_3 = 0,795 \\ -0,11x_1 + x_2 - 0,05x_3 = 0,849 \\ -0,11x_1 - 0,12x_2 + x_3 = 1,398 \end{cases}$$

utilizând 3 iteraţii.

Soluţie.

Observăm că $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,3}$, prima condiţie este îndeplinită, deci putem aplica această metodă şi explicităm necunoscutele sistemului utilizând relaţia (3.22)

$$\begin{cases} x_1 = 0,795 + 0,05x_2 + 0,10x_3 \\ x_2 = 0,849 + 0,11x_1 + 0,05x_3 \\ x_3 = 1,398 + 0,11x_1 + 0,12x_2 \end{cases}$$

în care

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,795 \\ 0,849 \\ 1,398 \end{pmatrix};$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0,05 & 0,10 \\ 0,11 & 0 & 0,05 \\ 0,11 & 0,12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificăm convergenţa algoritmului cu formula (3.26)

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, i = \overline{1,3}$$

astfel avem
pentru $i = 1 \Rightarrow$

$$\sum_{j=2}^{3} |\alpha_{1j}| = |\alpha_{12}| + |\alpha_{13}| = 0,05 + 0,10 = 0,15 < 1,$$

pentru $i = 2 \Rightarrow$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{3} |\alpha_{2j}| = |\alpha_{21}| + |\alpha_{23}| = 0,11 + 0,05 = 0,16 < 1,$$

pentru $i = 3 \Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^{2} |\alpha_{3j}| = |\alpha_{31}| + |\alpha_{32}| = 0,11 + 0,12 = 0,23 < 1.$$

Convergenţa este verificată, deci şi a doua condiţie este îndeplinită.
Notăm cu

$$\|\alpha\| = \max\{0,15; 0,16; 0,23\} \Rightarrow \|\alpha\| = 0,23.$$

Urmează calculul soluţiei sistemului.

Vom lua ca aproximaţie iniţială coloana constantelor β rotunjite la 2 cifre:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,80 \\ 0,85 \\ 1,40 \end{pmatrix}.$$

Prima iteraţie ($k = 1$)

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,795 + 0,0425 + 0,140 \approx 0,977 \\ x_2^{(1)} = 0,849 + 0,088 + 0,070 \approx 1,007 \\ x_3^{(1)} = 1,398 + 0,088 + 0,102 \approx 1,588 \end{cases}$$

Evaluăm eroarea după prima iteraţie cu relaţia următoare:

$$\varepsilon < \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \cdot \max \left| x_i^{(1)} - x_i^{(0)} \right|, i = \overline{1,3}.$$

Calculăm

$$\begin{aligned} \left| x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \right| &= |0,977 - 0,80| = 0,177 \\ \left| x_2^{(1)} - x_2^{(0)} \right| &= |1,007 - 0,85| = 0,157 \\ \left| x_3^{(1)} - x_3^{(0)} \right| &= |1,588 - 1,40| = 0,188 \end{aligned}$$

$$\max \{0,177; 0,157; 0,188\} = 0,188.$$

Eroarea este

$$\varepsilon < \frac{0,23}{0,77} \cdot 0,188 \approx 0,056156.$$

A doua iteraţie ($k = 2$)

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1,00415 \approx 1,004 \\ x_2^{(2)} = 1,03587 \approx 1,035 \\ x_3^{(2)} = 1,62631 \approx 1,626 \end{cases}$$

Evaluăm eroarea după a doua iteraţie cu relaţia următoare:

$$\varepsilon < \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \cdot \max \left| x_i^{(2)} - x_i^{(1)} \right|, i = \overline{1,3}.$$

Calculăm

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |1,004 - 0,977| = 0,027$$
$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |1,035 - 1,007| = 0,026$$
$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |1,626 - 1,588| = 0,038$$

$$\max\{0,027; 0,026; 0,038\} = 0,038.$$

Eroarea este

$$\varepsilon < \frac{0,23}{0,77} \cdot 0,038 \approx 0,01135.$$

A treia iteraţie ($k = 3$)

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 1,00935 \approx 1,00 \\ x_2^{(3)} = 1,04074 \approx 1,04 \\ x_3^{(3)} = 1,63264 \approx 1,63 \end{cases}$$

Evaluăm eroarea după a treia iteraţie cu relaţia următoare:

$$\varepsilon < \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \cdot \max\left|x_i^{(3)} - x_i^{(2)}\right|, i = \overline{1,3}.$$

Calculăm

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |1,00 - 1,004| = 0,004$$
$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |1,04 - 1,035| = 0,005$$
$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |1,63 - 1,626| = 0,004$$

$$\max\{0,004; 0,005\} = 0,005.$$

Eroarea este

$$\varepsilon < \frac{0,23}{0,77} \cdot 0,005 \approx 0,0015 < 10^{-2}.$$

După trei iteraţii se obţine o soluţie cu o eroare mai mică de 10^{-2}, deci algoritmul se încheie aici.

Observaţia 3.8 Uneori pentru comoditate nu se mai calculează aproximaţiile soluţiilor, ci diferenţele lor, adică
Notăm

$$\Delta^{(k)} = x^{(k)} - x^{(k-1)}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)}$$

$$x^{(k)} = \beta + \alpha x^{(k-1)}$$

....

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = \alpha\left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right) \Leftrightarrow \Delta^{(k+1)} = \alpha\Delta^{(k)}$$

Exemplul 3.9 Să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3; \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0; \end{cases}$$

Soluţie.

$$\begin{aligned} &x_1 = -1,5 + 0,5x_2 - 0,5x_3; \\ &x_2 = 0,2 - 0,6x_1 + 0,4x_3; \\ &x_3 = -0,1x_1 + 0,4x_{2;} \end{aligned}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & -0,5 \\ -0,6 & 0 & 0,4 \\ -0,1 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0,2 \\ -0,1 \end{pmatrix}; \Delta^{(0)} = \beta = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0,2 \\ -0,1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta^{(1)} = \alpha\Delta^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & -0,5 \\ -0,6 & 0 & 0,4 \\ -0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0,2 \\ -0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\Delta^{(2)} = \alpha * \Delta^{(1)} = \alpha \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,9 \\ 0,23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,335 \\ 0,032 \\ 0,350 \end{pmatrix};$$

k	$\Delta x_1^{(k)}$	$\Delta x_2^{(k)}$	$\Delta x_3^{(k)}$
0	-0,500	0,200	0,000
1	0,100	0,900	0,230
2	0,335	0,032	0,350
3	-0,159	-0,061	-0,021
4	-0,020	0,011	-0,008
5	0,010	0,009	0,006
6	0,002	-0,004	0,003
7	-0,004	0,000	-0,01
8	-0,000	0,002	0,000
9	-0,001	0,000	0,001
Σ	-1,235	1,089	0,560

Inconvenientul acestei medode este cumulul erorilor.

$$(a) \qquad \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1;$$

sau

$$(b) \qquad \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1;$$

$$|a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij};$$

Dacă coeficienţii sistemului sunt numere exacte se obţine o precizie cu m cifre.

3.5 Metoda Gauss-Seidel

Metoda Gauss-Seidel este o metodă aproximativă care determină soluţia unui sistem liniar cu n ecuaţii şi n necunoscute pentru care coeficienţii $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, cu o eroare dată ε.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.30}$$

Este o variantă îmbunătăţită a metodei aproximaţiilor succesive şi diferă de aceasta prin două aspecte: primul se referă la faptul că în timpul calculului celei de-a $k+1$ aproximaţii a necunoscutelor x_i, se folosesc valorile aproximative calculate la pasul $k+1$ ale necunoscutelor $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$ şi valorile aproximative de la pasul k ale necunoscutelor $x_{i+1}, ..., x_n$, iar al doilea aspect ne oferă posibilitatea de a alege ca şi aproximaţie iniţială a necunoscutelor $x_1, x_2, ..., x_n$ orice vector

$$x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right). \tag{3.31}$$

Condiţia de convergenţă este aceeaşi cu condiţia de convergenţă de la metoda aproxmaţiilor succesive, deci se verifică cu formula

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, i = \overline{1, n}. \tag{3.32}$$

Eroarea va fi evaluată după fiecare iteraţie cu relaţia

$$\varepsilon < \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \cdot \max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|, i = \overline{1, n}, \tag{3.33}$$

şi algoritmul se încheie atunci când eroarea calculată la o anumită iteraţie este mai mică decât eroarea dată ε.

Deci să considerăm sistemul (3.30) scris sub formă redusă

$$x = \alpha x + \beta \tag{3.34}$$

sau

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j i = \overline{1, n}. \tag{3.35}$$

Folosind această scriere, după $k+1$ paşi, putem spune că soluţia sistemului se determină cu relaţiile următoare:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)},$$

....

$$(7)x_i^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)},$$

....

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)}.$$

Teorema 3.10 *Se consideră sistemul liniar dat de formula* (3.34)

$$x = \alpha x + \beta$$

pentru care $\|\alpha\|_m < 1$, *unde*

$$\|\alpha\|_m = \max \left\{ \sum_{\substack{i \neq j \\ j = 1}}^{n} |\alpha_{ij}|, i = \overline{1, n} \right\}. \tag{3.36}$$

În aceste condiţii, pentru orice aproximaţie iniţială $x^{(0)}$, *şirul aproximaţiilor soluţiei sistemului este convergent către soluţia unică.*

Demonstraţie.

La pasul k necunoscuta x_i se detrmină cu relaţia

$$x_i^{(k)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k-1)}, i = \overline{1, n} \tag{3.37}$$

dar sistemul are soluţie unică de forma

$$\overline{x_i} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \overline{x_j}, i = \overline{1, n}. \tag{3.38}$$

Scădem cele două relaţii şi găsim

$$\overline{x_i} - x_i^{(k)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \overline{x_j} - \left(\beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k-1)} \right), i = \overline{1, n}$$

$$\overline{x_i} - x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \left(\overline{x}_j - x_j^{(k)} \right) + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} \left(\overline{x}_j - x_j^{(k-1)} \right), i = \overline{1, n}. \tag{3.39}$$

Aplicând modulul relaţiei anterioare, obţinem

$$\left|\overline{x_i} - x_i^{(k)}\right| = \left|\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\left(\overline{x}_j - x_j^{(k)}\right) + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij}\left(\overline{x}_j - x_j^{(k-1)}\right)\right|, i = \overline{1,n} \Rightarrow$$

$$\left|\overline{x_i} - x_i^{(k)}\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\left(\overline{x}_j - x_j^{(k)}\right)\right| + \left|\sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij}\left(\overline{x}_j - x_j^{(k-1)}\right)\right|, i = \overline{1,n} \Rightarrow$$

$$\left|\overline{x_i} - x_i^{(k)}\right| \leq \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| \cdot \left|\overline{x}_j - x_j^{(k)}\right| + \sum_{j=i+1}^{n} |\alpha_{ij}| \cdot \left|\overline{x}_j - x_j^{(k-1)}\right|, i = \overline{1,n}. \quad (3.40)$$

Din definiţia normei $\|\alpha\|_m$ ştim că

$$\left\|\overline{x} - x^{(k)}\right\| = \max\left|\overline{x_i} - x_i^{(k)}\right|, i = \overline{1,n}$$

şi rezultă

$$\left|\overline{x_i} - x_i^{(k)}\right| \leq \left\|\overline{x} - x^{(k)}\right\|_m. \quad (3.41)$$

Ţinând cont de relaţia (3.41), relaţia (3.40) se scrie

$$\left|\overline{x_i} - x_i^{(k)}\right| \leq \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| \cdot \left\|\overline{x} - x^{(k)}\right\|_m + \sum_{j=i+1}^{n} |\alpha_{ij}| \cdot \left\|\overline{x} - x^{(k-1)}\right\|_m, i = \overline{1,n}. \quad (3.42)$$

Notăm cu p valoarea indicelui $i = \overline{1,n}$ pentru care avem

$$\left\|\overline{x_p} - x_p^{(k)}\right\| = \max\left|\overline{x_i} - x_i^{(k)}\right| = \left\|\overline{x} - x^{(k)}\right\|_m, i = \overline{1,n}. \quad (3.43)$$

Pentru $i = p$ relaţia (3.42) devine

$$\left|\overline{x_p} - x_p^{(k)}\right| \leq \sum_{j=1}^{p-1} |\alpha_{pj}| \cdot \left\|\overline{x} - x^{(k)}\right\|_m + \sum_{j=p+1}^{n} |\alpha_{pj}| \cdot \left\|\overline{x} - x^{(k-1)}\right\|_m, p = \overline{1,n},$$

cu (3.43) avem

$$\left\|\overline{x} - x^{(k)}\right\|_m \leq \sum_{j=1}^{p-1} |\alpha_{pj}| \cdot \left\|\overline{x} - x^{(k)}\right\|_m + \sum_{j=p+1}^{n} |\alpha_{pj}| \cdot \left\|\overline{x} - x^{(k-1)}\right\|_m, p = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \left\|\overline{x}-x^{(k)}\right\|_m - \sum_{j=1}^{p-1}|\alpha_{pj}|\cdot\left\|\overline{x}-x^{(k)}\right\|_m \leq \sum_{j=p+1}^{n}|\alpha_{pj}|\cdot\left\|\overline{x}-x^{(k-1)}\right\|_m, p=\overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \left\|\overline{x}-x^{(k)}\right\|_m\left(1-\sum_{j=1}^{p-1}|\alpha_{pj}|\right) \leq \sum_{j=p+1}^{n}|\alpha_{pj}|\cdot\left\|\overline{x}-x^{(k-1)}\right\|_m, p=\overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \left\|\overline{x}-x^{(k)}\right\|_m \leq \frac{\sum_{j=p+1}^{n}|\alpha_{pj}|}{1-\sum_{j=1}^{p-1}|\alpha_{pj}|}\cdot\left\|\overline{x}-x^{(k-1)}\right\|_m, p=\overline{1,n} \tag{3.44}$$

Notăm cu $\eta_p=\sum_{j=1}^{p-1}|\alpha_{pj}|$, $\gamma_p=\sum_{j=p+1}^{n}|\alpha_{pj}|$ şi

$$q=\max_{1\leq i\leq n}\frac{\gamma_i}{1-\eta_i}$$

astfel formula (3.44) se scrie

$$\left\|\overline{x}-x^{(k)}\right\|_m \leq q\cdot\left\|\overline{x}-x^{(k-1)}\right\|_m. \tag{3.45}$$

Vom arăta că $q\leq 1$.
Ştim că

$$\eta_i+\gamma_i=\sum_{j=1}^{i-1}|\alpha_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}|\alpha_{ij}|=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|,$$

dar

$$\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|\leq\|\alpha\|_m<1,$$

deci

$$\gamma_i\leq\|\alpha\|_m-\eta_i. \tag{3.46}$$

Astfel,

$$\frac{\gamma_i}{1-\eta_i}\leq\frac{\|\alpha\|_m-\eta_i}{1-\eta_i}\leq\frac{\|\alpha\|_m-\eta_i\|\alpha\|_m}{1-\eta_i}=\frac{\|\alpha\|_m(1-\eta_i)}{1-\eta_i}=\|\alpha\|_m\Rightarrow$$

$$q=\|\alpha\|_m<1.$$

Din relaţia (3.45) rezultă

$$\left\|\overline{x} - x^{(k)}\right\|_m \leq q^k \cdot \left\|\overline{x} - x^{(0)}\right\|_m$$

şi trecând la limită după $k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \bar{x}$$

adică teorema este demonstrată.

□

Observaţia 3.11 Algoritmul metodei Gauss-Seidel converge mai rapid decât algoritmul metodei aproximaţiilor succesive, datorită faptului că pentru determinarea soluţiei x_i de la pasul $k+1$ sunt utilizate cele mai bune valori (cele mai recent determinate) ale necunoscutelor ce intervin în formula necunoscutei x_i.

Exemplul 3.12 Să rezolvăm sistemul următor, cu metoda Gauss-Seidel, cu o eroareε mai mică de 10^{-2}:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 + 10x_2 + x_3 = 14, \\ 3x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 16. \end{cases}$$

Soluţie.
Observăm că toţi coeficienţii $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,3}$.
Explicităm necunoscutele sistemului:

$$\begin{cases} x_1 = 1,2 - 0,1x_2 - 0,1x_3 \\ x_2 = 1,4 - 0,3x_1 - 0,1x_3 \\ x_3 = 1,6 - 0,3x_1 - 0,3x_2 \end{cases}$$

Verificăm convergenţa algoritmului

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, i = \overline{1,3}$$

astfel avem
pentru $i = 1$

$$\sum_{j=2}^{3} |\alpha_{1j}| = |\alpha_{12}| + |\alpha_{13}| = 0,1 + 0,1 = 0,2 < 1,$$

pentru $i = 2$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{3} |\alpha_{2j}| = |\alpha_{21}| + |\alpha_{23}| = 0,3 + 0,1 = 0,4 < 1,$$

pentru $i = 3$

$$\sum_{j=1}^{2} |\alpha_{3j}| = |\alpha_{31}| + |\alpha_{32}| = 0,3 + 0,3 = 0,6 < 1.$$

Convergenţa este verificată.
Notăm cu

$$\|\alpha\| = \max\{0,2; 0,4; 0,6\} \Rightarrow \|\alpha\| = 0,6.$$

Urmează calculul soluţiei sistemului.
Vom lua ca aproximaţie iniţială un vector oarecare:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prima iteraţie ($k = 1$)

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1,2 - 0,1 \cdot 0 - 0,1 \cdot 0 = 1,2 \\ x_2^{(1)} = 1,4 - 0,3 \cdot 1,2 - 0,1 \cdot 0 = 1,04 \\ x_3^{(1)} = 1,6 - 0,3 \cdot 1,2 - 0,3 \cdot 1,04 = 0,728 \end{cases}$$

Evaluăm eroarea după prima iteraţie cu relaţia următoare:

$$\varepsilon < \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \cdot \max\left|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}\right|, i = \overline{1,3}.$$

Calculăm

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \\ x_2^{(1)} - x_2^{(0)} \\ x_3^{(1)} - x_3^{(0)} \end{vmatrix} \begin{matrix} = |1,2 - 1| = 0,2 \\ = |1,04 - 0| = 1,04 \\ = |0,728 - 0| = 0,728 \end{matrix}$$

$$\max\{0,2; 1,04; 0,728\} = 1,04.$$

Eroarea este

$$\varepsilon < \frac{0,6}{0,4} \cdot 1,04 = 1,56 > \varepsilon.$$

A doua iteraţie ($k = 2$)

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1,2 - 0,1 \cdot 1,04 - 0,1 \cdot 0,728 = 1,0232 \\ x_2^{(2)} = 1,4 - 0,3 \cdot 1,0232 - 0,1 \cdot 0,728 = 1,02024 \\ x_3^{(2)} = 1,6 - 0,3 \cdot 1,0232 - 0,3 \cdot 1,02024 = 0,986968 \end{cases}$$

Evaluăm eroarea după a doua iteraţie cu relaţia următoare:

$$\varepsilon < \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \cdot \max \left| x_i^{(2)} - x_i^{(1)} \right|, i = \overline{1,3}.$$

Calculăm

$$\begin{aligned} \left| x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \right| &= |1,0232 - 1,2| = 0,1768 \\ \left| x_2^{(2)} - x_2^{(1)} \right| &= |1,02024 - 1,04| = 0,01976 \\ \left| x_3^{(2)} - x_3^{(1)} \right| &= |0,986968 - 0,728| = 0,258968 \end{aligned}$$

$$\max \{0,1768; 0,01976; 0,258968\} = 0,258968.$$

Eroarea este

$$\varepsilon < \frac{0,6}{0,4} \cdot 0,258968 = 0,388452 > \varepsilon.$$

A treia iteraţie ($k = 3$)

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 1,2 - 0,1 \cdot 1,02024 - 0,1 \cdot 0,986968 = 0,9992792 \\ x_2^{(3)} = 1,4 - 0,3 \cdot 0,9992792 - 0,1 \cdot 0,986968 = 1,00151944 \\ x_3^{(3)} = 1,6 - 0,3 \cdot 0,9992792 - 0,3 \cdot 1,00151944 = 0,99997604 \end{cases}$$

Evaluăm eroarea după a treia iteraţie cu relaţia următoare:

$$\varepsilon < \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \cdot \max \left| x_i^{(3)} - x_i^{(2)} \right|, i = \overline{1,3}.$$

Calculăm

$$\begin{aligned} \left| x_1^{(3)} - x_1^{(2)} \right| &= |0,9992792 - 1,0232| = 0,02327 \\ \left| x_2^{(3)} - x_2^{(2)} \right| &= |1,00151944 - 1,02024| = 0,01782 \\ \left| x_3^{(3)} - x_3^{(2)} \right| &= |0,99997604 - 0,986968| = 0,01279 \end{aligned}$$

$$\max\{0,02327; 0,01782; 0,01279\} = 0,02327.$$

Eroarea este

$$\varepsilon < \frac{0,6}{0,4} \cdot 0,02327 \approx 0,03490812 > \varepsilon.$$

A patra iteraţie ($k = 4$)

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 1,2 - 0,1 \cdot 1,00151944 - 0,1 \cdot 0,99997604 \approx 1 \\ x_2^{(4)} = 1,4 - 0,3 \cdot 1 - 0,1 \cdot 0,99997604 \approx 1 \\ x_3^{(4)} = 1,6 - 0,3 \cdot 1 - 0,3 \cdot 1 \approx 1 \end{cases}$$

Evaluăm eroarea după a patra iteraţie cu relaţia următoare:

$$\varepsilon < \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \cdot \max\left|x_i^{(4)} - x_i^{(3)}\right|, i = \overline{1,3}.$$

Calculăm

$$\begin{aligned} \left|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}\right| &= |1 - 0,9992792| = 0,0007208 \\ \left|x_2^{(4)} - x_2^{(3)}\right| &= |1 - 1,00151944| = 0,00151944 \\ \left|x_3^{(4)} - x_3^{(3)}\right| &= |1 - 0,99997604| = 0,00002396 \end{aligned}$$

$$\max\{0,0007208; 0,00151944; 0,00002396\} = 0,00151944.$$

Eroarea este

$$\varepsilon < \frac{0,6}{0,4} \cdot 0,00151944 \approx 0,0022 < \varepsilon.$$

După patru iteraţii se obţine o soluţie cu o eroare mai mică de 10^{-2}. Algoritmul se încheie aici şi soluţia este

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1.$$

3.6 Metoda Relaxării

Fie sistemul cu n ecuaţii şi n necunoscute pentru care $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.47}$$

Trecem în membrul stâng termenii liberi din membrul drept şi împărţim fiecare ecuaţie i a sistemului (3.47) la $-a_{ii}$, $i = \overline{1,n}$, adică

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - b_1 = 0 \ / : (-a_{11}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - b_2 = 0 \ / : (-a_{22}) \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - b_i = 0 \ / : (-a_{ii}) \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n - b_n = 0 \ / : (-a_{nn}) \end{cases} \tag{3.48}$$

şi obţinem sistemul echivalent

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \frac{a_{nm}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} = 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - x_2 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{21}} = 0 \\ .... \\ -\frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 - \frac{a_{i2}}{a_{ii}}x_2 - \cdots - \frac{a_{i,i-1}}{a_{ii}}x_{i-1} - x_i - \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}}x_{i+1} - \\ \cdots - \frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n + \frac{b_i}{a_{ii}} = 0 \\ .... \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \cdots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nm}}x_{n-1} - x_n + \frac{b_n}{a_{nm}} = 0 \end{cases} \tag{3.49}$$

Facem următoarele notaţii

$$-\frac{a_{ij}}{a_{ii}} = b_{ij}, \quad \frac{b_i}{a_{ii}} = c_i \tag{3.50}$$

pentru $i \neq j$ şi $i, j = \overline{1,n}$.

Cu aceste notaţii sistemul (3.49) devine

$$\begin{cases} -x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \cdots + b_n x_n + c_1 = 0 \\ -x_2 + b_{21}x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_n x_n + c_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_i + b_{i1}x_1 + \cdots + b_{i,i-1}x_{i-1} + b_{i,i+1}x_{i+1} + \\ \cdots + b_{in}x_n + c_i = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_n + b_{n1}x_1 + \cdots + b_{n,n-1}x_{n-1} + c_n = 0 \end{cases} \tag{3.51}$$

Fie un vector oarecare

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \cdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

aproximaţia iniţială a soluţiei sistemului de ecuaţii.
Introducem aceste valori în sistemul (3.51) şi obţinem resturile

$$\begin{cases} R_1^{(0)} = c_1 - x_1^{(0)} + \sum_{j=2}^n b_{1j}x_j^{(0)} \\ R_2^{(0)} = c_2 - x_2^{(0)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^n b_{2j}x_j^{(0)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_n^{(0)} = c_n - x_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{nj}x_j^{(0)} \end{cases} \tag{3.53}$$

Dacă dăm unei necunoscute $x_j^{(0)}$ creşterea $\delta x_s^{(0)}$, restul corespunzător $R_s^{(0)}$ se micşorează cu valoarea $\delta x_s^{(0)}$, iar în celelate expresii ale resturilor se va produce o majorare cu valoarea $b_{is}\delta x_s^{(0)}$.
În practică se dă creşterea $\delta x_s^{(0)} = R_s^{(0)}$ şi avem

$$\begin{cases} R_s^{(1)} = 0 \\ R_i^{(1)} = R_i^{(0)} + b_{is}\delta x_s^{(0)}. \end{cases} \tag{3.54}$$

Procedeul de determinare a soluţiei constă în calculul resturilor, folosind formula

$$R_i^{(k)} = R_i^{(k-1)} + b_{is}\delta x_s^{(k-1)}, \quad i = \overline{1,n} \tag{3.55}$$

până când la un anumit pas toate resturile sunt zero. În acest moment putem scrie soluţia sistemului, astfel: pentru a găsi necunoscuta x_i, adăugăm la aproximaţia iniţială $x_i^{(0)}$, dată de relaţia (3.52), toate creşterile corespunzătoare lui x_i obţinute în cadrul algoritmului.

Observaţia 3.13 De obicei se dă $\delta x_s^{(0)} = \max\left\{\left|R_1^{(0)}\right|, \left|R_2^{(0)}\right|, ..., \left|R_n^{(0)}\right|\right\}$.

Exemplul 3.14 Să calculăm soluţia sistemului cu metoda relaxării

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - x_3 = 10, \\ 2x_1 + 10x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 10x_3 = 1. \end{cases}$$

Soluţie.
Trecem termenii liberi în membrul stâng şi împărţim fiecare ecuaţie i la $-a_{ii}$, $i = \overline{1,3}$ şi obţinem

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - x_3 = 10 \\ 2x_1 + 10x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 10x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 + 1 = 0 \\ -0,2x_1 - x_2 + 0,1x_3 + 0,2 = 0 \\ -0,1x_1 + 0,1x_2 - x_3 + 0,1 = 0 \end{cases}$$

Vom lua ca aproximaţie iniţială a soluţiei: $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$ şi obţinem resturile de la pasul zero

$$\begin{cases} R_1^{(0)} = 1 \\ R_2^{(0)} = 0,2 \\ R_3^{(0)} = 0,1 \end{cases}$$

$$\max\left\{\left|R_1^{(0)}\right|, \left|R_2^{(0)}\right|, \left|R_3^{(0)}\right|\right\} = 1 = R_1^{(0)} \Rightarrow \delta x_1^{(0)} = 1$$

Calculăm resturile de la pasul 1 cu relaţia (3.55)

$$\begin{cases} R_1^{(1)} = R_1^{(0)} + b_{11}\delta x_1^{(0)} = 1 + (-1)\cdot 1 = 0 \\ R_2^{(1)} = R_2^{(0)} + b_{11}\delta x_1^{(0)} = 0,2 + (-0,2)\cdot 1 = 0 \\ R_3^{(1)} = R_3^{(0)} + b_{11}\delta x_1^{(0)} = 0,1 + (-0,1)\cdot 1 = 0 \end{cases}$$

După pasul 1 am găsit toate resturile zero. Determinăm acum soluţia

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{(0)} + \delta x_1^{(0)} = 0 + 1 = 1 \\ x_2 = x_2^{(0)} = 0 \\ x_3 = x_3^{(0)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Exemplul 3.15 Să calculăm soluţia sistemului următor folosind metoda relaxării

$$\begin{cases} 20x_1 - 2x_2 - 14x_3 = 4 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Soluţie.
Trecem termenii liberi în membrul stâng şi împărţim fiecare ecuaţie i la $-a_{ii}$, $i=\overline{1,3}$

$$\begin{cases} 20x_1 - \ \ 2x_2 - 14x_3 = 4 \\ -x_1 + 10x_2 - \ \ 2x_3 = 7 \\ -x_1 - \ \ x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 0,1x_2 + 0,7x_3 + 0,2 = 0 \\ 0,1x_1 - \ \ x_2 + \ 0{,}2x_3 + 0,7 = 0 \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 - \ \ x_3 + 0,8 = 0 \end{cases}$$

Vom lua ca aproximaţie iniţială a soluţiei vectorul:

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$$

şi obţinem resturile de la pasul zero

$$\begin{cases} R_1^{(0)} = 0,2 \\ R_2^{(0)} = 0,7 \\ R_3^{(0)} = 0,8 \end{cases}$$

$$\max\left\{\left|R_1^{(0)}\right|, \left|R_2^{(0)}\right|, \left|R_3^{(0)}\right|\right\} = R_3^{(0)} = 0,8.$$

Vom avea o creştere pentru x_3 la pasul zero

$$\delta x_3^{(0)} = R_3^{(0)} = 0,8.$$

Pasul 1
Soluţia este

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8 \end{pmatrix}.$$

Calculăm resturile cu relaţia (3.37) şi avem

$$\begin{cases} R_1^{(1)} = R_1^{(0)} + b_{13}\delta x_3^{(0)} = 0,2 + 0,7 \cdot 0,8 = 0,2 + 0,56 = 0,76 \\ R_2^{(1)} = R_2^{(0)} + b_{23}\delta x_3^{(0)} = 0,7 + 0,2 \cdot 0,8 = 0,7 + 0,16 = 0,86 \\ R_3^{(1)} = R_3^{(0)} + b_{33}\delta x_3^{(0)} = 0,8 + (-1) \cdot 0,8 = 0 \end{cases}$$

deci

$$\max\left\{\left|R_1^{(1)}\right|, \left|R_2^{(1)}\right|, \left|R_3^{(1)}\right|\right\} = R_2^{(1)} = 0,86.$$

Vom avea o creştere pentru x_2

$$\delta x_2^{(1)} = 0,86.$$

Pasul 2
Soluţia este

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,86 \\ 0,8 \end{pmatrix}.$$

Calculăm resturile

$$\begin{cases} R_1^{(2)} = R_1^{(1)} + b_{12}\delta x_2^{(1)} = 0,76 + 0,1 \cdot 0,86 = 0,76 + 0,086 = 0,846 \\ R_2^{(2)} = R_2^{(1)} + b_{22}\delta x_2^{(1)} = 0,86 + (-1) \cdot 0,86 = 0 \\ R_3^{(2)} = R_3^{(1)} + b_{32}\delta x_2^{(1)} = 0 + 0,1 \cdot 0,86 = 0,086 \end{cases}$$

deci

$$\max \left\{ \left| R_1^{(2)} \right|, \left| R_2^{(2)} \right|, \left| R_3^{(2)} \right| \right\} = R_1^{(2)} = 0,846.$$

Vom avea o creştere pentru x_1

$$\delta x_1^{(2)} = 0,846.$$

Pasul 3
Soluţia este

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,846 \\ 0,86 \\ 0,8 \end{pmatrix}.$$

Calculăm resturile de la pasul al treilea

$$\begin{cases} R_1^{(3)} = R_1^{(2)} + b_{11}\delta x_1^{(2)} = 0,846 + (-1) \cdot 0,846 = 0 \\ R_2^{(3)} = R_2^{(2)} + b_{21}\delta x_1^{(2)} = 0 + 0,1 \cdot 0,846 = 0,00846 \approx 0,085 \\ R_3^{(3)} = R_3^{(2)} + b_{31}\delta x_1^{(2)} = 0,086 + 0,1 \cdot 0,846 = 0,1706 \approx 0,171 \end{cases}$$

deci

$$\max \left\{ \left| R_1^{(3)} \right|, \left| R_2^{(3)} \right|, \left| R_3^{(3)} \right| \right\} = R_3^{(3)} = 0,171.$$

Vom avea o creştere pentru x_3

$$\delta x_3^{(3)} = 0,171.$$

Pasul 4
Soluţia este

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,846 \\ 0,86 \\ 0,971 \end{pmatrix}.$$

Calculăm resturile

$$\begin{cases} R_1^{(4)} = 0 + 0,7 \cdot 0,171 = 0,1197 \approx 0,120 \\ R_2^{(4)} = 0,085 + 0,2 \cdot 0,171 = 0,1192 \approx 0,119 \\ R_3^{(4)} = 0 \end{cases}$$

deci

$$\max\left\{\left|R_1^{(4)}\right|, \left|R_2^{(4)}\right|, \left|R_3^{(4)}\right|\right\} = R_1^{(4)} = 0,12.$$

Vom avea o creştere pentru x_1

$$\delta x_1^{(4)} = 0,12.$$

Pasul 5
Soluţia este

$$x^{(5)} = \begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,966 \\ 0,86 \\ 0,971 \end{pmatrix}.$$

Calculăm resturile

$$\begin{cases} R_1^{(5)} = 0,12 + (-1) \cdot 0,12 = 0 \\ R_2^{(5)} = 0,119 + 0,1 \cdot 0,12 = 0,131 \\ R_3^{(5)} = 0 + 0,1 \cdot 0,12 = 0,012 \end{cases}$$

deci

$$\max\left\{\left|R_1^{(5)}\right|, \left|R_2^{(5)}\right|, \left|R_3^{(5)}\right|\right\} = R_2^{(5)} = 0,131.$$

Vom avea o creştere pentru x_2

$$\delta x_2^{(5)} = 0,131.$$

Pasul 6
Soluţia este

$$x^{(6)} = \begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \\ x_3^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,966 \\ 0,991 \\ 0,971 \end{pmatrix}.$$

Calculăm resturile

$$\begin{cases} R_1^{(6)} = 0 + 0,1 \cdot 0,131 = 0,0131 \approx 0,013 \\ R_2^{(6)} = 0,131 + (-0,1) \cdot 0,131 = 0 \\ R_3^{(6)} = 0,012 + 0,1 \cdot 0,131 = 0,0251 \approx 0,025 \end{cases}$$

deci

$$\max\left\{\left|R_1^{(6)}\right|, \left|R_2^{(6)}\right|, \left|R_3^{(6)}\right|\right\} = R_3^{(6)} = 0,025.$$

Vom avea o creştere pentru x_3

$$\delta x_3^{(6)} = 0,025.$$

Pasul 7
Soluţia este

$$x^{(7)} = \begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \\ x_3^{(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,966 \\ 0,991 \\ 0,996 \end{pmatrix}.$$

Calculăm resturile

$$\begin{cases} R_1^{(7)} = 0,013 + 0,7 \cdot 0,025 = 0,0305 \approx 0,030 \\ R_2^{(7)} = 0 + 0,2 \cdot 0,025 = 0,0050 \approx 0,005 \\ R_3^{(7)} = 0,025 + (-1) \cdot 0,025 = 0 \end{cases}$$

deci

$$\max\left\{\left|R_1^{(7)}\right|, \left|R_2^{(7)}\right|, \left|R_3^{(7)}\right|\right\} = R_1^{(7)} = 0,03.$$

Vom avea o creştere pentru x_1

$$\delta x_1^{(7)} = 0,03.$$

Pasul 8
Soluţia este

$$x^{(8)} = \begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \\ x_3^{(8)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,996 \\ 0,991 \\ 0,996 \end{pmatrix}.$$

Calculăm resturile

$$\begin{cases} R_1^{(8)} = 0,03 + (-1) \cdot 0,03 = 0 \\ R_2^{(8)} = 0,005 + 0,1 \cdot 0,03 = 0,008 \\ R_3^{(8)} = 0 + 0,1 \cdot 0,03 = 0,003 \end{cases}$$

deci

$$\max\left\{\left|R_1^{(8)}\right|, \left|R_2^{(8)}\right|, \left|R_3^{(8)}\right|\right\} = R_2^{(8)} = 0,008.$$

Vom avea o creştere pentru x_2

$$\delta x_2^{(8)} = 0,008.$$

Pasul 9
Soluţia este

$$x^{(9)} = \begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \\ x_3^{(9)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,996 \\ 0,999 \\ 0,996 \end{pmatrix}.$$

Calculăm resturile

$$\begin{cases} R_1^{(9)} = 0 + 0,1 \cdot 0,008 = 0,0008 \approx 0,001 \\ R_2^{(9)} = 0,008 + (-1) \cdot 0,008 = 0 \\ R_3^{(9)} = 0,003 + 0,1 \cdot 0,008 = 0,0038 \approx 0,004 \end{cases}$$

deci

$$\max\left\{\left|R_1^{(9)}\right|, \left|R_2^{(9)}\right|, \left|R_3^{(9)}\right|\right\} = R_3^{(9)} = 0,004.$$

Vom avea o creştere pentru x_3

$$\delta x_3^{(9)} = 0,004.$$

Pasul 10
Soluţia este

$$x^{(10)} = \begin{pmatrix} x_1^{(10)} \\ x_2^{(10)} \\ x_3^{(10)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,996 \\ 0,999 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculăm resturile

$$\begin{cases} R_1^{(10)} = 0,001 + 0,7 \cdot 0,004 = 0,0038 \approx 0,004 \\ R_2^{(10)} = 0 + 0,2 \cdot 0,004 = 0,0008 \approx 0,001 \\ R_3^{(10)} = 0,004 + (-1) \cdot 0,004 = 0 \end{cases}$$

deci

$$\max\left\{\left|R_1^{(10)}\right|, \left|R_2^{(10)}\right|, \left|R_3^{(10)}\right|\right\} = R_1^{(10)} = 0,004.$$

Vom avea o creştere pentru x_1

$$\delta x_1^{(10)} = 0,004.$$

Pasul 11
Soluţia este

$$x^{(11)} = \begin{pmatrix} x_1^{(11)} \\ x_2^{(11)} \\ x_3^{(11)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,999 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculăm resturile

$$\begin{cases} R_1^{(11)} = 0,004 + (-1) \cdot 0,004 = 0 \\ R_2^{(11)} = 0,001 + 0,1 \cdot 0,004 \approx 0,001 \\ R_3^{(11)} = 0 + 0,1 \cdot 0,004 = 0,0004 \approx 0 \end{cases}$$

deci

$$\max\left\{\left|R_1^{(11)}\right|, \left|R_2^{(11)}\right|, \left|R_3^{(11)}\right|\right\} = R_2^{(11)} = 0,001.$$

Vom avea o creştere pentru x_2

$$\delta x_2^{(11)} = 0,001.$$

Pasul 12
Soluţia este

$$x^{(12)} = \begin{pmatrix} x_1^{(12)} \\ x_2^{(12)} \\ x_3^{(12)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculăm resturile

$$\begin{cases} R_1^{(12)} = 0 + 0,1 \cdot 0,001 \approx 0 \\ R_2^{(12)} = 0,001 + (-1) \cdot 0,001 \approx 0 \\ R_3^{(12)} = 0 + 0,1 \cdot 0,001 \approx 0 \end{cases}$$

La acest pas toate resturile sunt nule, deci algoritmul se încheie aici, astfel soluţia sistemului este

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Capitolul 4

Valori proprii şi vectori proprii

Este o noţiune cu o arie largă conceptuală (o găsim definită în algebră, analiză matematică etc) şi mai ales cu o mare diversitate de aplicaţii în numeroase domenii ale ştiinţei şi tehnicii. Calculul valorilor şi vectorilor proprii este strict legat de teoria matricelor.

4.1 Valori şi vectori proprii ai unui operator liniar

Fie V un spaţiu vectorial peste K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$) şi fie $T : V \to V$ un operator liniar pe V.

Definiţia 4.1 Un scalar $\lambda \in K$ se numeşte ***valoare proprie*** a lui T dacă există un vector nenul $v \in V$ pentru care

$$T(v) = \lambda v.$$

Orice vector care satisface această relaţie se numeşte ***vector propriu*** aparţinând / al valorii proprii λ a operatorului T.

Să observăm că orice multiplu kv al vectorului propriu v este, de asemenea, un vector propriu: într-adevăr, dacă $T(v) = \lambda v$, atunci $T(kv) = kT(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$. Mai mult, avem următoarea proprietate.

Propoziţia 4.2 *Mulţimea, notată V_λ sau $V(\lambda)$, a vectorilor proprii aparţinând valorii proprii λ a operatorului liniar $T : V \to V$ este un subspaţiu al lui V, numit **spaţiul propriu** al lui λ.*

Demonstraţie. Exerciţiu. □

Exemplul 4.3 Fie $Id_V : V \to V$ operatorul identitate pe V. Deoarece $Id_V(v) = v = 1 \cdot v$ pentru orice $v \in V$ rezultă că $\lambda = 1$ este (unica) valoare proprie a lui Id_V şi că spaţiul propriu $V_\lambda = V$.

Exemplul 4.4 Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operatorul liniar care roteşte fiecare vector $v \in \mathbb{R}^2$, $v = (x, y)$ cu un unghi θ în jurul originii, în sensul trigonometric negativ. Legea de corespondenţă a lui T este

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Dacă $\theta = 90°$, atunci $T(x, y) = (y, -x)$. Acest operator nu are valori proprii, deci nici vectori proprii.

Exemplul 4.5 Fie V spaţiul vectorial al funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile de orice ordin (de clasă C^∞) şi fie $T : V \to V$ dat prin $T(f) = f'$. Deoarece $T(e^{7x}) = 7e^{7x}$ rezultă că $\lambda = 7$ este o valoare proprie a lui T, iar funcţia $f(x) = e^{7x}$ este un vector propriu al lui $\lambda = 7$.

În continuare, prezentăm o scurtă caracterizare a valorilor şi vectorilor proprii.

Teorema 4.6 *Fie $T : V \to V$ un operator liniar pe spaţiul vectorial V peste K. Atunci $\lambda \in K$ este o valoare proprie T $\Leftrightarrow$* operatorul *$\lambda Id_V - T$ nu este injectiv.*

În aceste condiţii, spaţiul propriu $V_\lambda = Ker(\lambda Id_v - T)$.

Demonstraţie. Dacă λ este valoarea proprie şi $v \neq 0$ e un vector propriu, atunci $T(v) = \lambda v$ se mai scrie $T(v) = \lambda Id_V(v)$, $(T - \lambda Id_V)(v) = 0$. Rezultă că aplicaţia $T - \lambda Id_V$ nu este injectivă, deci neinversabilă. Invers, dacă $T - \lambda Id_V$ este aplicaţie neinjectivă, atunci $\exists v \neq 0$ astfel încât $(T - \lambda Id_V)(v) = 0$. $\square$

Propoziţia 4.7 *Vectorii proprii nenuli care aparţin la valori proprii diferite sunt liniar independenţi. Mai precis, dacă $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sunt n vectori proprii nenuli ai operatorului $T : V \to V$ aparţinând valorilor proprii diferite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, atunci $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sunt liniar independenţi.*

Demonstraţie. (Inducţie după n). Dacă $n = 1$, atunci $a_1 v_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ căci altfel, a inversabil şi $a_1^{-1}(a_1 v_1) = 0 \Rightarrow v_1 = 0$, contradicţie cu alegerea lui v_1. Presupunem că proprietatea este adevărată pentru $n - 1$ vectori şi fie

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 0. \tag{4.1}$$

Aplicăm T lui (4.1) şi rezultă

$$a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_2 v_2 + \ldots + a_n\lambda_n v_n = 0. \tag{4.2}$$

Pe de altă parte, înmulţind cu λ_n relaţia $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$ obţinem

$$a_1\lambda_n v_1 + a_2\lambda_n v_2 + \ldots + a_n\lambda_n v_n = 0. \tag{4.3}$$

Din (4.2) şi (4.3) rezultă că

$$a_1\left(\lambda_1 - \lambda_n\right)v_1 + \ldots + a_{n-1}\left(\lambda_{n-1} - \lambda_n\right)v_{n-1} = 0.$$

Cu ipoteza de inducţie rezultă $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$, fiindcă $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Revenind în avem $a_nv_n = 0$, deci $a_n = 0$. Aşadar, vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sunt liniar independenţi. $\square$

Fie $T : V \to V$ un operator liniar pe spaţiul vectorial V cu $\dim_K V = n$. Fie $B = \{v_i\}$ o bază alcătuită din vectori proprii. Atunci din relaţiile $T\left(v_i\right) = \lambda_i v_i$ obţinem

$$\begin{array}{l} T\left(v_1\right) = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n, \\ T\left(v_2\right) = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + 0v_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T\left(v_n\right) = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + \lambda_n v_n. \end{array} \tag{4.4}$$

Din relaţia (4.4) rezultă că reprezentarea matriceală $(T)_B$ a lui T în baza B este o matrice diagonală:

$$(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Este adevărată şi reciproca afirmaţiei precedente: dacă $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ este o bază a lui V astfel încât $(T)_B$ este dată de (4.5), atunci vectorii v_i ai bazei sunt vectori proprii aparţinând valorilor proprii λ_i. Într-adevăr, din relaţia matriceală

$$\left(T\left(v_i\right)\right)_B = (T)_B \left(v_i\right)_B \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

rezultă

$$\left(T\left(v_i\right)\right)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} (i) \;\; = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} (i) \;\;,$$

respectiv $T(v_i) = \lambda_i v_i$, etc. În acest fel am demonstrat teorema următoare.

Teorema 4.8 *Un operator $T : V \to V$ poate fi reprezentat printr-o matrice diagonală D dacă şi numai dacă V are o bază alcătuită din vectori proprii ai lui T. În acest caz, elementele diagonalei principale a lui D sunt valorile proprii cores-punzătoare vectorilor proprii. În aceste condiţii, se spune că T este* ***diagonalizabil****.*

4.2 Calculul valorilor proprii

Calculul valorilor proprii este o problemă matriceală, aşa cum rezultă din următoarele consideraţii.

Fie $T : V \to V$ un operator liniar pe spaţiul vectorial n-dimensional V şi B o bază a lui V. Dacă $\lambda \in K$ este o valoare proprie şi $v \neq 0$ este un vector propriu aparţinând valorii proprii λ, atunci

$$T(v) = \lambda v. \tag{4.6}$$

Reprezentarea matriceală a relaţiei (4.6) în raport cu baza B este

$$(T(v))_B = \lambda (v)_B \,,$$

respectiv,

$$(T)_B (v)_B = \lambda I (v)_B \,, \quad (\lambda I - (T)_B)(v)_B = 0, \tag{4.7}$$

unde I este matricea unitate de ordin n.
Notăm $(T)_B = A = (a_{ij})$ şi $(v)_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Atunci (4.7) se scrie

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Condiţia (4.8) este un sistem omogen de n ecuaţii liniare cu n necunoscute. Condiţia $v \neq 0$ înseamnă că sistemul (4.8) are soluţii nenule. Pentru aceasta trebuie îndeplinită condiţia

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{4.9}$$

care înseamnă că valorile proprii sunt printre soluţiile ecuaţiei $\det(\lambda I - A) = 0$, o ecuaţie de gradul n în necunoscuta λ.

În mod firesc ne punem întrebarea: dacă B' este o altă bază a lui V, atunci cum este influenţat calculul valorilor proprii ale lui T? Vom arăta că ecuaţia $\det(\lambda I - (T)_B)$ este independentă de baza aleasă. Într-adevăr, dacă B' este o bază a lui V, atunci are loc relaţia

$$(T)_{B'} = P^{-1}(T)_B P,$$

unde P este matricea de trecere de la baza B la baza B'. Atunci

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - (T)_{B'}) &= \det(P^{-1}(\lambda I)P - P^{-1}(T)_B P) = \det(P^{-1}(\lambda I - (T)_B)P) = \\ &= \det(P^{-1}) \cdot \det(\lambda I - (T)_B) \cdot \det(P) = \det(\lambda I - (T)_B),\end{aligned}$$

care înseamnă că valorile proprii ale lui T sunt soluţii ale aceleiaşi ecuaţii, indife-rent de reprezentarea matriceală a lui T.

Observaţia 4.9 Există şi alte tipuri de probleme care conduc la rezolvarea ecuaţiei $\det(\lambda I - A) = 0$, unde A este o matrice pătrată de ordinul n. De exemplu, următoarea problemă de maxim din analiza matematică: să se afle maximul expresiei

$$x^t A x, \text{ cu condiţia } x^t x = 1, \text{ unde } n \in \mathbb{R}^n,\ A^t = A.$$

Metoda multiplicatorilor lui Lagrange constă în introducerea funcţiei

$$L = x^t A x - \lambda\left(x^t x - 1\right),$$

pentru care o condiţie necesară de extrem este $\nabla L = 0$. Această condiţie se traduce prin ecuaţia $Ax - \lambda x = 0$, iar existenţa soluţiei nenule este garantată de condiţia $\det(\lambda I - A) = 0$.

4.3 Valori şi vectori proprii ale unei matrice

Rezolvarea ecuaţiei (4.9) apare în mai multe tipuri de probleme. De aceea, ne propunem să abordăm problema determinării valorilor proprii în termenii ecuaţiei

$$\det(\lambda I - A) = 0, \tag{4.10}$$

unde $A \in M_n(K)$.

Definiţia 4.10 Ecuaţia (4.10) se numeşte ***ecuaţia caracteristică*** a matricei A, iar rădăcinile λ ale acestei ecuaţii se numesc ***valorile proprii*** ale lui A. Ele conduc la determinarea soluţiilor nenule ale ecuaţiei $Ax = \lambda x$, $x \in K^n$, soluţii ce reprezintă vectorii proprii.

Este bine să vedem ecuaţia $Ax = \lambda x$ ca relaţia $T(x) = \lambda x$, unde $T : K^n \to K^n$ este operatorul liniar cu legea de corespondenţă $T(x) = Ax$. Mai mult, deoarece A este reprezentarea matriceală a lui T în baza standard a lui K^n, toate matricele

$$P^{-1}AP, \quad P \text{ inversabil}$$

au aceleaşi valori proprii şi aceiaşi vectori proprii.

În fine, este clar că *dacă A este reprezentarea matriceală a unui operator liniar $T : V \to V$, atunci valorile proprii ale matricei A sunt valorile proprii ale operatorului T.*

Teorema (4.8) are următoarea formă alternativă exprimată în termeni matriceali.

Teorema 4.11 *Fie A o matrice pătrată de ordinul n. Atunci există o matrice pătrată P astfel încât $P^{-1}AP = D$ este diagonală dacă şi numai dacă A are n vectori liniar independenţi. Mai mult, în acest caz coloanele lui P sunt vectorii proprii, iar elementele diagonalei principale a lui D sunt valorile proprii.*

Demonstraţie.(Cazul $n = 2$) Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ şi $Av_1 = \lambda_1 v_1,\ Av_2 = \lambda_2 v_2$. Presupunem că $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$. Atunci avem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix},$$

respectiv

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_{11} & \lambda_2 v_{12} \\ \lambda_1 v_{21} & \lambda_2 v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Punem $P = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$ şi relaţia precedentă se scrie

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

respectiv

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Exemplul 4.12 Să verificăm relaţia $P^{-1}AP = D$ pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Soluţie.

Ecuaţia caracteristică a matricei A este

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

cu rădăcinile (valorile proprii) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Să determinăm câte un vector propriu pentru fiecare valoare proprie.

Pentru $\lambda = 2$, ecuaţia $Ax = 2x$ înseamnă

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

respectiv ecuaţia $x_1 - 2x_2 = 0$. Punem $x_1 = 2$ şi rezultă $x_2 = 1$, deci $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ este un vector propriu.

Pentru $\lambda = -1$, ecuaţia $Ax = -x$ înseamnă

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

respectiv ecuaţia $2x_1 - x_2 = 0$. Atunci $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ este un vector propriu.

Astfel, matricea P cu proprietatea $P^{-1}AP$ este diagonală, este $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Să verificăm relaţia $P^{-1}AP = D$. Calculăm $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ şi obţinem

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 4.13 Să aflăm valorile proprii şi spaţiile proprii corespunzătoare pentru operatorul liniar $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, dat prin

$$T(x,y,z)=(4x-y+6z,2x+y+6z,2x-y+8z).$$

Soluţie.

Atunci, $A=\begin{pmatrix}4&-1&6\\2&1&6\\2&-1&8\end{pmatrix}$. Valorile proprii le găsim din ecuaţia caracteristică

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-4&1&-6\\-2&\lambda-1&-6\\-2&1&\lambda-8\end{vmatrix}=$$
$$=(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-8)+12+12-12(\lambda-1)+6(\lambda-4)+2(\lambda-8)=$$
$$=\lambda^3-13\lambda^2+40\lambda-36=0$$

O valoare proprie a lui A (respectiv a lui T) este $\lambda=2$. Să determinăm spaţiul propriu corespunzător $V(\lambda)$. Spaţiul propriu $V(\lambda)$ este mulţimea vectorilor $u=(x,y,z)$ pentru care $T(u)=2u$, deci mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$(4x-y+6z,2x+y+6z,2x-y+8z)=(2x,2y,2z).$$

Rezultă sistemul

$$\begin{cases}4x-y+6z=2x\\2x+y+6z=2y\\2x-y+8z=2z\end{cases}$$

respectiv sistemul omogen cu o ecuaţie şi trei necunoscute $\{2x-y+6z=0$. Rangul sistemului este 1, deci $\dim V(\lambda)=2$. Să determinăm o bază a spaţiului vectorial $V(\lambda)$ în care alegem necunoscute secundare (sau libere) pe x şi z: $x=1,z=0\Rightarrow y=2$, deci un vector al bazei este $u_1=(1,2,0)$; cu $x=0,z=1\Rightarrow y=6$, deci un alt vector al bazei este $u_2=(0,6,1)$. În fine, $u\in V(\lambda)\Rightarrow u=\alpha u_1+\beta u_2$, adică $u=\alpha(1,2,0)+\beta(0,6,1)=(\alpha,2\alpha+6\beta,\beta)$, unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Altfel spus, $V(\lambda)=\{(\alpha,2\alpha+6\beta,\beta)\,|\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$.

Exemplul 4.14 Fie $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T(x,y,z)=(2x+2y+z,x+3y+z,$ $x+2y+2z)$ un operator liniar. Să îi determinăm valorile proprii.

Soluţie.

Pentru aceasta observăm că

$$T(x,y,z)=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Valorile proprii sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0,$$

respectiv ale ecuaţiei $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$. Obţinem $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ şi $\lambda_3 = 5$.

Exemplul 4.15 Este posibil ca un operator să nu aibă valori proprii. De exemplu, dacă $T(x, y) = (x + 2y, -3x - y)$ este un operator liniar pe $\mathbb{R}^3$, atunci $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ şi ecuaţia caracteristică este $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5 = 0$ care nu are rădăcini reale.

Teorema care urmează completează echivalenţa stabilită de Teorema 4.11 prin faptul că evidenţiază o metodă practică de a determina numărul maxim de vectori proprii liniar independenţi ai matricei pătratice A. Dacă acest număr coincide cu ordinul matricei A, atunci A este diagonalizabilă.

Teorema 4.16 *Pentru matricea pătratică $A \in M_n(K)$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) A este o matrice diagonalizabilă;

(b) Operatorul liniar $T : K^n \to K^n$, $T(x) = Ax$ este diagonalizabil;

(c) Ecuaţia caracteristică $\det(\lambda I - A) = 0$ *are n rădăcini în K (numărând multiplicităţile) şi dacă polinomul caracteristic se descompune în*

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_1)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_1)^{n_r}, \ n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n,$$

atunci, $\dim V_{\lambda_i} = n_i$ *pentru toţi* $i = 1, 2, \ldots, r$. $\square$

În general, un operator liniar nu este diagonalizabil. Dar chiar şi atunci există reprezentări matriceale diagonale de forma

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix},$$

unde $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sunt matrice-bloc. O aprofundare a temei diagonalizării poate fi consultată în monografiile consacrate algebrei liniare sau în capitolele de algebră liniară din unele cărţi de algebră.

4.4 Metoda Krylov

Este o metodă de determinare a coeficienţilor polinomului caracteristic care se bazează pe teorema Caylei-Hamilton.

Teorema 4.17 *Dacă $A \in M_n(K)$ iar polinomul caracteristic este*

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \cdots - p_{n-1}\lambda - p_n, \tag{4.11}$$

atunci

$$P(A) = 0. \tag{4.12}$$

Demonstraţie. Fie $B(\lambda)$ adjuncta matricei $\lambda I - A$, adică

$$(\lambda I - A) B(\lambda) = \det(\lambda I - A) \cdot I. \tag{4.13}$$

Fiecare element al lui $B(\lambda)$ este un polinom de grad cel mult $n-1$ în λ, deoarece este un minor de ordin $n-1$ al matricei $\lambda I - A$. Putem scrie

$$B(\lambda) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B\lambda + B_0, \tag{4.14}$$

unde $B_i \in M_n(K), i = \overline{0, n-1}$.
Introducem relaţia (4.14) în relaţia (4.13) şi găsim

$$(\lambda I - A)\left(B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B\lambda + B_0\right) = \det(\lambda I - A) \cdot I =$$

$$= \left(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \cdots - p_{n-1}\lambda - p_n\right) \cdot I.$$

Identificând coeficienţii avem relaţiile

$$\begin{array}{c} B_{n-1} = I \\ B_{n-2} - AB_{n-1} = -p_1 I \\ B_{n-1} - AB_{n-2} = -p_2 I \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_0 - AB_1 = -p_{n-1} I \\ - AB_0 = -p_n I \end{array} \tag{4.15}$$

Înmulţind aceste relaţii cu A^n, A^{n-1}, $\ldots$, I şi apoi adumând obţinem

$$0 = A^n - p_1 A^{n-1} - p_2 A^{n-2} - \cdots - p_{n-1} A - p_n I,$$

adică

$$P(A) = 0.$$

□

Determinăm acum coeficienţii polinomului $D(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n$ care diferă de polinomul caracteristic printr-un semn. Ştim, din teorema de mai sus, că matricea A anulează polinomul caracteristic şi astfel avem

$$A^n + p_1A^{n-1} + p_2A^{n-2} + \cdots + p_{n-1}A + p_nI = 0. \tag{4.16}$$

Considerăm un vector arbitrar, nenul

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ \cdots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

şi înmulţim relaţia (4.16) cu el, de unde rezultă

$$A^ny^{(0)} + p_1A^{n-1}y^{(0)} + p_2A^{n-2}y^{(0)} + \cdots + p_{n-1}Ay^{(0)} + p_ny^{(0)} = 0. \tag{4.18}$$

Vom face următoarea notaţie

$$y^{(k)} = A^ky^{(0)} = Ay^{(k-1)}, k = 1, 2, ... \tag{4.19}$$

Cu (4.19), relaţia (4.18) se scrie

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y^{(1)} + p_ny^{(0)} = 0 \tag{4.20}$$

echivalent cu

$$p_1y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y^{(1)} + p_ny^{(0)} = -y^{(n)}. \tag{4.21}$$

Ecuaţia (4.21) scrisă matriceal devine

$$\begin{pmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \cdots & y_1^{(0)} \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_2^{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \cdots \\ y_n^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Relaţia (4.22) este un sistem liniar cu n ecuaţii şi n necunoscute

$$p_1y_j^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y_j^{(1)} + p_ny_j^{(0)} = -y_j^{(n)}, j = 1, ..., n, \tag{4.23}$$

care dacă este compatibil determinat, prin rezolvarea lui găsim coeficienţii polinomului $D(\lambda)$, dar dacă sistemul (4.23) nu are soluţie unică, problema este mai complicată şi în acest caz este indicat să se schimbe vectorul iniţial dat de relaţia (4.17).

Exemplul 4.18 Să găsim coeficienţii polinomului caracteristic cu semn schimbat pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluţie.
Dimensiunea matricei A este 3, deci polinomul $D(\lambda)$ are forma $D(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3$. Vom avea de calculat trei coeficienţi p_1, p_2, p_3. Astfel, considerăm un vector nenul, oarecare de dimensiune trei

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şi cu formula (4.19) calculăm vectorii $y^{(1)}$, $y^{(2)}$,$y^{(3)}$, deci

$$y^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$y^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$y^{(3)} = Ay^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Scriem relaţia (4.22)

$$\begin{pmatrix} y_1^{(2)} & y_1^{(1)} & y_1^{(0)} \\ y_2^{(2)} & y_2^{(1)} & y_2^{(0)} \\ y_3^{(2)} & y_3^{(1)} & y_3^{(0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1^{(3)} \\ y_2^{(3)} \\ y_3^{(3)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă sistemul

$$\begin{cases} \phantom{-p_1 -{}} p_2 + p_3 = -1 \\ -p_1 - p_2 \phantom{{}+p_3} = -1 \\ p_1 \phantom{{}-p_2+p_3} = -1 \end{cases},$$

cu soluţiile

$$\begin{cases} p_1 = -1, \\ p_2 = 2, \\ p_3 = -3. \end{cases}$$

Polinomul $D(\lambda)$ se scrie $D(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 3$, adică polinomul caracteristic este

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + 3.$$

4.5 Metoda Leverrier

Metoda Leverrier este o altă metodă de determinare a coeficienţilor polinomului caracteristic şi pentru acest lucru vom utiliza următoarea lemă.

Lema 4.19 Dacă

$$D(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n \tag{4.24}$$

este un polinom de gradul n, cu rădăcinile λ_i, $i = 1, ..., n$ şi dacă

$$s_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k \tag{4.25}$$

pentru k întreg, atunci luând $p_0 = 1$ avem

$$-kp_k = \sum_{0 \le j \le k-1} p_j s_{k-j}. \tag{4.26}$$

Demonstraţie. Din

$$D(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) \tag{4.27}$$

găsim

$$\begin{aligned} \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 - {}^{\lambda_i}\!/_{\lambda}} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{\lambda^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{\lambda^{k+1}}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

pentru $|\lambda| > \max(|\lambda_1|, ..., |\lambda_n|)$ şi $s_0 = n$.
Deci

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i)\, p_i \lambda^{n-i-1} = \sum_{j=0}^{n} p_j \lambda^{n-j} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{\lambda^{k+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (n-i)\, p_i \lambda^{n-i-1} = \sum_{j,k \geq 0} p_j s_k \lambda^{n-j-k-1}. \tag{4.29}$$

Identificăm coeficienţii în relaţia (4.29) şi găsim

$$(n-i)\, p_i = \sum_{j+k=i} p_j s_k = \sum_{j=0}^{i} p_j s_{i-j} = p_i s_0 + \sum_{j=0}^{i-1} p_j s_{i-j}.$$

□

Fie

$$D(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n$$

polinomul caracteristic cu semn schimbat al matricei A, rădăcinile sale λ_i, $i = 1, ..., n$, sumele $s_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k$ şi formulele lui Newton $s_k + p_1 s_{k-1} + \cdots + p_{k-1} s_1 = -k p_k$, $k = 1, .., n$.

Dând valori lui k în formulele lui Newton, avem

$$k = 1 \Rightarrow s_1 = -p_1 \Rightarrow p_1 = -s_1,$$

$$k = 2 \Rightarrow s_2 + p_1 s_1 = -2p_2 \Rightarrow p_2 = -\frac{1}{2}(s_2 + p_1 s_1), \tag{4.30}$$

....

$$k = n \Rightarrow s_n + \sum_{i=1}^{n-1} p_i s_{n-i} = -n p_n \Rightarrow p_n = -\frac{1}{n}\left(s_n + \sum_{i=1}^{n-1} p_i s_{n-i}\right).$$

Sumele s_k, $k = 1, .., n$ se calculează cu formula

$$s_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k = Tr\left(A^k\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^k \tag{4.31}$$

unde $A^k = \left(a_{ii}^k\right)$, $k = 1, .., n$.

În aceste condiţii, algoritmul metodei Leverrier, se poate scrie în trei paşi

1. se determină puterile matricii A, adică A^k, $k = 1, .., n$.

2. se calculează sumele s_k, $k = 1, .., n$ cu formula (4.31).

3. se determină coeficienţii p_i, $i = 1, ..., n$ cu relaţiile (4.30).

Exemplul 4.20 Să găsim coeficienţii polinomului caracteristic cu semn schimbat, cu metoda Leverrier, pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluţie.
Dimensiunea matricei A este 3, deci polinomul $D(\lambda)$ are forma $D(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3$, astfel vom avea de calculat trei coeficienţi p_1, p_2, p_3. Aplicăm algoritmul metodei şi pentru început calculăm puterile matricei A până la puterea a treia.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculăm acum sumele s_1, s_2, s_3.

$$s_1 = Tr(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 1,$$

$$s_2 = Tr\left(A^2\right) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}^2 = -3,$$

$$s_3 = Tr\left(A^3\right) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}^3 = 4.$$

Determinăm coeficienţii:

$$p_1 = -s_1 \Rightarrow p_1 = -1,$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}\left(s_2 + p_1 s_1\right) \Rightarrow p_2 = -\frac{1}{2}\left(-3 - 1\right) = 2,$$

$$p_3 = -\frac{1}{3}\left(s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1\right) \Rightarrow p_3 = -\frac{1}{3}\left(4 + 3 + 2\right) = -3.$$

Astfel, polinomul $D\left(\lambda\right)$ se scrie $D\left(\lambda\right) = \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 3$, adică polinomul caracteristic este

$$P\left(\lambda\right) = -\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + 3.$$

Capitolul 5

Interpolarea şi aproximarea funcţiilor

5.1 Polinomul de interpolare al lui Lagrange

Fie $[a, b]$ un interval al axei reale şi $n + 1$ puncte $x_0, x_1, ..., x_n$ ale acestui segment astfel încât

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leq b. \tag{5.1}$$

Definiţia 5.1 Punctele $x_0, x_1, ..., x_n$ se numesc **puncte sau noduri de interpolare**.

Considerăm o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi valorile ei în aceste puncte de interpolare

$$f(x_0) = y_0, \ldots, f(x_n) = y_n. \tag{5.2}$$

Problema care se pune este de a forma o nouă funcţie $F(x)$ astfel încât valorile ei în nodurile de interpolare să coincidă cu valorile funcţiei f în aceste puncte:

$$F(x_0) = y_0, \ldots, F(x_n) = y_n. \tag{5.3}$$

sau

$$F(x_i) = y_i, i = 0, \ldots, n. \tag{5.4}$$

Teorema 5.2 *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n + 1$ puncte de interpolare $x_0, x_1, ..., x_n$ şi valorile ei în aceste puncte de interpolare $f(x_0) = y_0, \ldots, f(x_n) = y_n$. În* *aceste condiţii, există şi este unic un polinom $L_n(x)$ de grad mai mic sau egal cu n şi care în punctele $x_0, x_1, ..., x_n$ coincide cu valorile lui f în x_i, $i = 0, ..., n$, adică $L_n(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$.*

Demonstraţie.

Pasul 1. Se construieşte un polinom $P_i(x)$ astfel ca

$$P_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{5.5}$$

Scriem acest polinom sub forma

$$P_i(x) = C_i\,(x - x_0)\,(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})\,(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)\,, \tag{5.6}$$

unde C_i este o constantă pe care o obţinem punând $x = x_i$ în relaţia (5.6). Avem pe de o parte

$$P_i(x_i) = \delta_{ii} = 1$$

şi pe de altă parte avem

$$P_i(x_i) = C_i\,(x_i - x_0)\,(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})\,(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)\,,$$

de unde rezultă

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)\,(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})\,(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}. \tag{5.7}$$

Înlocuind (5.7) în formula lui $P_i(x)$ avem

$$P_i(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}. \tag{5.8}$$

Pasul 2. Construim acum polinomul $L_n(x)$ cu condiţia $L_n(x) = y_i$ şi arătăm că acest polinom este de forma:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_i(x) y_i. \tag{5.9}$$

Deoarece polinoamele $P_i(x)$, $i = \overline{0, n}$ au gradul n, atunci gradul lui $L_n(x)$ este cel mult n.

Formula (5.9) se mai scrie

$$L_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} P_i(x_j)y_i = P_j(x_j)y_j = y_j, j = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.10}$$

Cu relaţia (5.10) polinomul $L_n(x)$ devine

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} \cdot y_i \tag{5.11}$$

Expresia (5.11) poartă numele de **polinomul (formula) lui Lagrange**.

Pasul 3. Arătăm unicitatea polinomului dat de formula (5.11), folosind metoda reducerii la absurd.

Presupunem că $\exists M_n(x)$ un polinom distinct de $L_n(x)$, cu gradul mai mic sau egal cu n astfel ca, $M_n(x_i) = y_i$, pentru $i = \overline{0, n}$.
Considerăm polinomul

$$Q_n(x) = M_n(x) - L_n(x). \tag{5.12}$$

Putem spune că gradul lui $Q_n(x)$ este cel mult n fiind diferenţa a două polinoame de grad maxim n. Mai observăm că polinomul $Q_n(x)$ se anulează în $n+1$ puncte $x_0, x_1, ..., x_n$ ceea ce înseamnă că că

$$Q_n(x) = 0$$

adică

$$M_n(x) = L_n(x),$$

astfel că unicitatea polinomului este demonstrată. □

Observaţia 5.3 Vom nota cu $\Pi_{n+1}(x)$ polinomul

$$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n). \tag{5.13}$$

Derivând expresia (5.13) avem

$$\Pi'_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} (x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n). \tag{5.14}$$

Dacă luăm $x = x_i$, $i = \overline{0, n}$ (5.14), avem

$$\Pi'_{n+1}(x) = (x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n). \tag{5.15}$$

Deci expresia polinomului Lagrange devine

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})\,(x-x_i)\,(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})\qquad\qquad(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \cdot \frac{1}{x-x_i} \Rightarrow$$

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{1}{\Pi'_{n+1}(x)\,(x-x_i)}. \tag{5.16}$$

Exemplul 5.4 Un caz particular de polinom Lagrange găsim pentru $n = 1$ $\Rightarrow y = L_1(x)$, adică

$$y = \frac{x-b}{a-b} y_0 + \frac{x-a}{b-a} y_1,$$

unde $a = x_0$ şi $b = x_1$, puncte de interpolare.

Exemplul 5.5 Un alt caz particular de polinom Lagrange găsim pentru $n = 2 \Rightarrow y = L_2(x)$, adică

$$y = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} y_0 + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} y_1 + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} y_2,$$

unde $a = x_0$, $b = x_1$, $c = x_2$ puncte de interpolare.

Exemplul 5.6 Să construim polinomul Lagrange pentru $y = \sin \pi x$ în punctele de interpolare

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{1}{2}.$$

Soluţie.

$$y_0 = f(x_0) = 0, y_1 = f(x_1) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, y_2 = f(x_2) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$L_2(x) = \frac{\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(0-\frac{1}{6}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)} \cdot 0 + \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}-0\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)} \cdot 1 =$$

$$= \frac{7}{2}x - 3x^2$$

Deci $L_2(x) = -3x^2 + \frac{7}{2}x$.

Exemplul 5.7 Să determinăm polinomul Lagrange ştiind că $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, iar $f(0) = 1,\ f(1) = 0,\ f(2) = 3,\ f(3) = 0$.
Soluţie.
Din enunţul problemei avem

$$\begin{gathered} n = 4, \\ x_0 = 0 \text{ şi } y_0 = f(x_0) = 1, \\ x_1 = 1 \text{ şi } y_1 = f(x_1) = 0, \\ x_2 = 2 \text{ şi } y_2 = f(x_2) = 3, \\ x_3 = 3 \text{ şi } y_3 = f(x_3) = 0. \end{gathered}$$

Folosind relaţia (5.11) găsim

$$L_4(x) = \sum_{i=0}^{4} \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_3)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_3)} \cdot y_i$$

$$\begin{aligned} L_4(x) = {} & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \cdot y_0 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot y_1 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot y_2 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot y_3 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$L_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-1)(0-1)} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \cdot 0 +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \cdot 3 + \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \cdot 0 \Rightarrow$$

$$L_4(x) = -(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{3}{2}x(x-1)(x-3) \Rightarrow$$

$$L_4(x) = -(x-1)(x-3)\left[x - 2 + \frac{3}{2}x\right] \Rightarrow$$

$$L_4(x) = -(x-1)(x-3)\left(\frac{5}{2}x - 2\right).$$

Teorema 5.8 *(evaluarea erorii polinomului lui Lagrange)*
Fie funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cu $f \in C^{(n+1)}_{[a,b]}$, $y = f(x)$, $n+1$ puncte ale graficului lui f : $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $\ldots$,$y_n = f(x_n)$ şi polinomul lui Lagrange $L_n(x)$. Presupunem că funcţia posedă toate derivatele până la $(n+1)$, inclusiv

$$f'(x), ..., f^{(n+1)}(x). \tag{5.17}$$

Facem următoarele notaţii

$$\begin{array}{l} R_n(x) = f(x) - L_n(x), \\ M = \max\limits_{a \le x \le b} \left|f^{(n+1)}(x)\right|. \end{array} \tag{5.18}$$

În aceste condiţii eroarea se scrie

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| = \frac{M}{(n+1)!}\left|\Pi_{n+1}(x)\right|. \tag{5.19}$$

Demonstraţie. Introducem funcţia auxiliară $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ definită astfel

$$\theta(x) = f(x) - L_n(x) - k\Pi_{n+1}(x), k \in \mathbb{R}. \tag{5.20}$$

Alegem constanta k astfel ca $\theta(x)$ să aibă rădăcina a $(n+2)$-a într-un punct fixat $\bar{x}$ al intervalului $[a,b]$, diferit de punctele de interpolare. Deci

$$\theta(\bar{x}) = f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) - k\Pi_{n+1}(\bar{x}) = 0, \tag{5.21}$$

de unde rezultă k de forma

$$k = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})}. \tag{5.22}$$

Pentru această valoare a lui k, $\theta(x)$ are $(n+2)$ rădăcini pe $[a,b]$ şi se anulează la capetele fiecărui interval:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_i, \bar{x}], [\bar{x}, x_{i+1}], ..., [x_{n-1}, x_n]. \tag{5.23}$$

Aplicăm teorema lui Rolle fiecărui segment şi observăm că $\theta'(x)$ are cel puţin $(n+1)$ rădăcini în intervalul $[a,b]$, iar $\theta''(x)$ va avea cel puţin n rădăcini în intervalul $[a, b]$şi continuând raţionamentul avem că $\theta^{(n+1)}(x)$ are cel puţin un zero pe care îl notăm cu ξ, adică

$$\theta^{(n+1)}(\xi) = 0. \tag{5.24}$$

Cum $L_n^{(n+1)}(x) = 0$ şi $\Pi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ prin derivarea formulei (5.20) de $(n+1)$ ori, găsim

$$\theta^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)!. \tag{5.25}$$

Pentru $x = \xi$ avem

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)!,$$

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{5.26}$$

Am obţinut două valori pentru k. Egalăm cele două expresii (5.22) şi (5.26)

$$\frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

sau

$$f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(\bar{x}). \tag{5.27}$$

Deoarece $\bar{x}$ este arbitrar, formula (5.27) se poate rescrie

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x), \tag{5.28}$$

unde ξ depinde de x şi $\xi \in (a, b)$.
Notăm acum cu M următoarea expresie

$$M = \max_{a \le x \le b} \left| f^{(n+1)}(x) \right|. \tag{5.29}$$

Astfel că relaţia (5.28) devine

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)|. \tag{5.30}$$

$\square$

Exemplul 5.9 Cu ce precizie putem calcula $\sqrt{115}$ cu ajutorul formulei Lagrange pentru funcţia $y = \sqrt{x}$ când avem punctele de interpolare $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$.
Soluţie.
În cazul nostru $n = 2$.
Calculăm derivatele până la ordinul $n + 1 = 3$:

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad y'' = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$

$$y''' = \left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}.$$

Cu formula (5.29) găsim

$$M = \max|y'''| = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{100^5}} = \frac{3}{8}10^{-5}, 100 \leq x \leq 144.$$

Aplicăm relaţia (5.30) şi obţinem eroarea

$$|R_2| \leq \frac{3}{8}10^{-5}\frac{1}{3!}\left|(115-100)(115-121)(115-144)\right| =$$

$$= \frac{1}{16}10^{-5} \cdot 15 \cdot 6 \cdot 29 \simeq 1.6 \cdot 10^{-3}.$$

5.2 Diferenţe finite

Se consideră

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tag{5.31}$$

o funcţie reală cu $y = f(x)$.

Definiţia 5.10 Numim **pasul** diferenţei, valoarea $\Delta x = h$ a creşterii argumentului funcţiei *f*.

Observaţia 5.11 Pasul diferenţei este o valoare dată şi constantă.

Definiţia 5.12 Expresia

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{5.32}$$

se numeşte **diferenţa de ordinul întâi** în x pentru funcţia f.

Celelalte diferenţe se calculează pe baza diferenţei de ordinul întâi, astfel

$$\Delta^2 y = \Delta\left(\Delta y\right) = \Delta\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right) =$$

$$= f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x) - [f(x+\Delta x) - f(x)] =$$

$$= f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)$$

Definiţia 5.13 Expresia

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)) \tag{5.33}$$

se numeşte **diferenţa de ordinul *n*** a funcţiei f.

Exemplul 5.14 Să determinăm diferenţele până la ordinul n, pentru funcţia: $f(x) = 3x+1$, cu pasul $\Delta x = h = 1$.
Soluţie.

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) =$$

$$= 3\left(x+1\right)^2 + 1 - 3x^2 - 1 = 3x^2 + 6x + 3 + 1 - 3x^2 - 1 = 6x + 3.$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(6x+3) = 6(x+1) + 3 - 6x - 3 = 6x + 6 + 3 - 6x - 3 = 6.$$

$$\Delta^3 f(x) = 6 - 6 = 0.$$

Pentru $k > 2, \quad k \in N, \quad \Delta^{(k)} f(x) = 0.$

Teorema 5.15 *Fie*

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{5.34}$$

un polinom de gradul n cu coeficienţi reali şi $h = \Delta x$ atunci diferenţa de ordinul n are forma

$$\Delta^n P_n(x) = a_0 n! h^n, \tag{5.35}$$

adică este un polinom de gradul zero, deci o constantă.

Demonstraţie.
Calculăm diferenţa de ordinul întâi:

$$\Delta P_n(x) = P_n(x + \Delta x) - P_n(x) =$$

$$= a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x+h) + a_n -$$

$$-a_0 x^n - a_1 x^{n-1} - \cdots - a_{n-1}x - a_n =$$

$$= a_0^{(1)} x^{n-1} + a_1^{(1)} x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}^{(1)} = P_{n-1}^{(1)}(x),$$

unde $a_0^1 = n a_0 h$.

Calculăm diferenţa de ordinul al doilea:

$$\Delta^2 P_n(x) = \Delta P_{n-1}^{(1)}(x) =$$

$$= a_0^{(1)}(x+h)^{n-1} + a_1^{(1)}(x+h)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}^{(1)} -$$

$$-a_0^{(1)} x^{n-1} - a_1^{(1)} x^{n-2} - \cdots - a_{n-1}^{(1)} =$$

$$= a_0^{(2)} x^{n-2} + a_1^{(2)} x^{n-3} + \cdots + a_{n-2}^{(2)} = P_{n-2}^{(2)}(x),$$

unde $a_0^2 = n(n-1) a_0 h^2$.

Din aproape în aproape obţinem diferenţa de ordinul $n-1$

$$\Delta^{n-1} P_n(x) = \Delta P_2^{(n-2)}(x) =$$

$$= a_0^{(n-1)} x + a_1^{(n-1)} = P_1^{(n-1)}(x),$$

unde $a_0^{(n-1)} = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot a_0 \cdot h^{n-1}$

Astfel, diferenţa de ordinul n este

$$\Delta^n P_n(x) = \Delta P_1^{(n-1)}(x) = a_0^{(n)} = P_0^{(n)}(x),$$

unde $a_0^{(n)} = a_0^{(n-1)} \cdot 1 \cdot h = a_0 n! \cdot h^n$.
$\square$

Observaţia 5.16 $\Delta^{n+1}P_n(x) = 0$ şi în general pentru $k \in \mathbb{N}^*$, $k > 0$, $\Delta^k P_n(x) = 0$.

Observaţia 5.17 Δ poate fi considerat un operator ce asociază funcţiei f funcţia $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, unde Δx este o constantă.

Propoziţia 5.18 *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci diferenţele finite au următoarele proprietăţi:*

$$1)\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g, \tag{5.36}$$

$$2)\Delta(cf) = c \cdot \Delta f, \tag{5.37}$$

unde c este o constantă reală,

$$3)\Delta^m \Delta^n f = \Delta^{m+n} f, \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{5.38}$$

Demonstraţie.
1. Considerăm un $x \in \mathbb{R}$ şi aplicăm relaţia (5.32) funcţiei sumă $f + g$

$$\Delta(f + g)(x) = (f + g)(x + \Delta x) - (f + g)(x) =$$

$$= f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x) =$$

$$= f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x) =$$

$$= \Delta f(x) + \Delta g(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

adică

$$\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g.$$

2. Considerăm un $x \in \mathbb{R}$, aplicăm relaţia (5.32) funcţiei produs cf, pentru $c \in \mathbb{R}$ şi găsim

$$\Delta(cf)(x) = (cf)(x + \Delta x) - (cf)(x) =$$

$$= cf\left(x+\Delta x\right) - cf\left(x\right) =$$

$$= c\left[f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right)\right] =$$

$$= c\left[\Delta f\left(x\right)\right], \forall x \in \mathbb{R},$$

adică

$$\Delta(cf) = c \cdot \Delta f, \forall c \in \mathbb{R}.$$

3. Demonstrăm prin inducţie după m. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrar fixat. Dacă $m = 1$, atunci cu relaţia (5.32), avem

$$\Delta^m \Delta^n f = \Delta\left(\Delta^n f\right) = \Delta^{1+n} f = \Delta^{m+n} f. \tag{5.39}$$

Presupunem că relaţia

$$\Delta^m \Delta^n f = \Delta^{m+n} f, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

este adevărată pentru $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrar şi pentru $m \in \mathbb{N}^*$. Arătăm acum că ea este adevărată şi pentru $m+1$, astfel

$$\Delta^{m+1}\Delta^n f = \Delta\left[\Delta^m\left(\Delta^n f\right)\right] = \Delta\left(\Delta^{m+n} f\right) = \Delta^{m+1+n} f, \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

□

Propoziţia 5.19 *Fie funcţia$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci avem următoarea relaţie:*

$$f(x+n\Delta x) = (1+\Delta)^n f(x) \tag{5.40}$$

sau

$$f(x+n\Delta x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \Delta^m f(x). \tag{5.41}$$

Demonstraţie.
Din definiţia diferenţelor finite rezultă

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \Rightarrow f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x+\Delta x) = (1+\Delta)\, f(x). \tag{5.42}$$

Aplicăm încă o dată definiţia relaţiei (5.42) şi avem

$$\Delta f(x+\Delta x) = f(x+\Delta x+\Delta x) - f(x+\Delta x) = f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+2\Delta x) = \Delta f(x+\Delta x) + f(x+\Delta x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x+2\Delta x) = (1+\Delta)\, f(x+\Delta x).$$

Dar ţinând cont de (5.42) găsim

$$f(x+2\Delta x) = (1+\Delta)^2\, f(x).$$

Aplicând definiţia de n ori avem

$$f(x+n\Delta x) = (1+\Delta)^n f(x)$$

sau

$$f(x+n\Delta x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \Delta^m f(x).$$

□

Propoziţia 5.20 *Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$, diferenţa de ordinul n are forma următoare:*

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x) = f(x+n\Delta x) - C_n^1 f\left(x+(n-1)\,\Delta x\right) + \\ +C_n^2 f\left(x+(n-2)\,\Delta x\right) - \cdots + (-1)^n f(x).\end{aligned} \tag{5.43}$$

Demonstraţie.

Diferenţa Δ mai poate fi scrisă

$$\Delta = (1+\Delta) - 1.$$

Astfel, diferenţa de ordinul n a funcţiei f se scrie

$$\Delta^n f(x) = \left[(1+\Delta) - 1\right]^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (1+\Delta)^{n-k} f(x) =$$

$$= (1+\Delta)^n f(x) - C_n^1 \cdot (1+\Delta)^{n-1} f(x) + C_n^2 \cdot (1+\Delta)^{n-2} f(x) - \cdots + (-1)^n f(x).$$

Deci, cu relaţiile (5.40) şi (5.41) rezultă chiar forma (5.43) a diferenţei de ordinul n a funcţiei f:

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x) = f(x+n\Delta x) - C_n^1 \cdot f\left[x+(n-1)\,\Delta x\right] + \\ +C_n^2 \cdot f\left[x+(n-2)\,\Delta x\right] - \cdots + (-1)^n f(x).\end{aligned}$$

□

Exemplul 5.21 Să determinăm diferenţa de ordinul n pentru funcţia: $y = \sin x$.
Soluţie.
Rezolvăm acest exemplu prin inducţie.
Calculăm diferenţa de ordinul întâi

$$\Delta y = \sin(x+h) - \sin x = 2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x\right].$$

Calculăm diferenţa de ordinul al doilea

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x+h\right] - 2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x\right] =$$

$$= 2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+h+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}+x+h+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^2 \sin\left[2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x\right]$$

Presupunem relaţia adevărată pentru $n-1$

$$\Delta^{n-1} y = \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^{n-1}\sin\left[(n-1)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x\right],$$

şi să calculăm diferenţa de ordinul n:

$$\Delta^n y = \Delta\left(\Delta^{n-1} y\right) = \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^{n-1}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sin\left[(n-1)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x+h\right] - \sin\left[(n-1)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x\right]\right\} =$$

$$= \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^{n}\cos\left[(n-1)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x+\frac{h}{2}\right] =$$

$$= \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^{n}\sin\left[n\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x\right].$$

Calculul acestui exemplu ne sugerează legătura ce ar putea exista între calculul diferenţei de ordin n şi derivata a n a funcţiei.

Teorema 5.22 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I un interval deschis din $\mathbb{R}$, $y = f(x)$, f indefinit derivabilă şi Δx pasul. În aceste condiţii avem*

$$\Delta^n f(x) = (\Delta x)^n f^{(n)}(x + n\gamma\Delta x), \text{ unde } 0 < \gamma < 1. \tag{5.44}$$

Demonstraţie.
Vom demonstra prin inducţie
Pentru $n = 1$, avem

$$\Delta f(x) = \Delta x f'(x + \gamma\Delta x) \tag{5.45}$$

care este teorema creşterilor finite a lui Lagrange.
Presupunem relaţia adevărată pentru n

$$\Delta^n f(x) = (\Delta x)^n f^{(n)}(x + n\gamma\Delta x), \text{ unde } 0 < \gamma < 1,$$

şi arătăm că este adevărată şi pentru $n + 1$

$$\Delta^{n+1} f(x) = \Delta(\Delta^n f(x)) = \Delta^n[f(x+\Delta x) - f(x)] = \Delta^n f(x+\Delta x) - \Delta^n f(x) =$$

$$= (\Delta x)^n[f^{(n)}(x + \Delta x + n\gamma_1\Delta x) - f^{(n)}(x + n\gamma_1\Delta x)],$$

cu teorema lui Lagrange obţinem

$$(\Delta x)^n \Delta x f^{(n+1)}(x + n\gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta x) \text{ unde } 0 < \gamma_2 < 1. \tag{5.46}$$

Notăm

$$\gamma = \frac{n\gamma_1 + \gamma_2}{1 + n} \in (0, 1)$$

şi avem:

$$n\gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta x = \Delta x(n\gamma_1 + \gamma_2) = (1 + n)\gamma\Delta x. \tag{5.47}$$

Deci
$\Delta^{n+1} f(x) = (\Delta x)^{n+1} f^{(n+1)}(x + \gamma(n + 1)\Delta x)$ cu $0 < \gamma < 1$.
Adică

$$f^{(n)}(x + \gamma n\Delta x) = \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}. \tag{5.48}$$

Presupunem $f^{(n)}(x)$continuă, deci $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n} = f^{(n)}(x)$.

□

Tabloul diferenţelor

Se utilizează când funcţiile sunt date prin valori $y_i = f(x_i)$ pentru un sistem de puncte echidistante x_i (i =0,1,2...) adică:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{constant.} \tag{5.49}$$

Avem

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - y_{i+1} + y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

....

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$$

Prima egalitate se mai scrie:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = (1+\Delta) y_i$$

$$y_{i+2} = y_{i+1} + \Delta y_{i+1} = (1+\Delta) y_{i+1} = (1+\Delta)^2 y_i$$

$$y_{i+3} = y_{i+2} + \Delta y_{i+2} = (1+\Delta) y_{i+2} = (1+\Delta)^3 y_i$$

....

$$y_{i+n} = (1+\Delta)^n y_i \tag{5.50}$$

sau

$$y_{i+n} = y_i + C_n^1 \Delta y_i + C_n^2 \Delta^2 y_i + \cdots + \Delta^n y_i \tag{5.51}$$

Invers avem

$$\Delta^n y_i = [(1+\Delta) - 1]^n y_i =$$

$$= (1+\Delta)^n y_i - C_n^1 (1+\Delta)^{n-1} y_i + C_n^2 (1+\Delta)^{n-2} y_i - \cdots + (-1)^n y_i \tag{5.52}$$

sau

$$\Delta^n y_i = y_{i+n} - C_n^1 y_{i+n-1} + C_n^2 y_{i+n-2} - \cdots + (-1)^n y_i \tag{5.53}$$

Exemplul 5.23 Să calculăm diferenţa a 4-a a primului număr din şirul:

$$y_0 = 2,\ \ y_1 = 4,\ \ y_2 = 8,\ \ y_3 = 12,\ \ y_4 = 18$$

Soluţie.
Vom folosi relaţia

$$\Delta^n y_i = y_{i+n} - C_n^1 y_{i+n-1} + C_n^2 y_{i+n-2} - \cdots + (-1)^n y_i.$$

În cazul nostru $n = 4$ şi $i = 0$, astfel

$$\Delta^4 y_0 = y_4 - C_4^1 y_3 + C_4^2 y_2 - C_4^3 y_1 + C_4^4 y_0 =$$

$$= 18 - 4 \cdot 12 + 6 \cdot 8 - 4 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 4.$$

Exemplul 5.24 Se consideră şirul diferenţelor: $y_0 = 0$; $\Delta y_0 = 2$; $\Delta^2 y_0 = 4$; $\Delta^3 y_0 = 6$; $\Delta^4 y_0 = 8$. Să calculăm y_1, y_2, y_3, y_4;
Soluţie.

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 2 = 3$$

$$y_2 = (1+\Delta)^2 y_0 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 = 0 + 2 \cdot 2 + 4 = 8$$

$$y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 = 0 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 6 = 24$$

$$y_4 = y_0 + 4\Delta y_0 + 6\Delta^2 y_0 + 4\Delta^3 y_0 + \Delta^4 y_0 = 0 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 8 = 64$$

Formule de sumare

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k = \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_{n-1} =$$
$$= y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + y_3 - y_2 + \cdots + y_n - y_{n-1} =$$
$$= y_n - y_0 \tag{5.54}$$

Exemplul 5.25 Să arătăm că $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Soluţie.

Trebuie să căutam un polinom $P(x)$, pentru care $\Delta P(x) = x$, pasul fiind $h = 1$. Adică, se caută un polinom sub forma

$$P(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2.$$

Deci

$$x = \Delta P(x) = A_0(x+1)^2 + A_1(x+1) + A_2 - A_0 x^2 - A_1 x - A_2 =$$

$$= 2A_0 x + A_0 + A_1$$

Identificând coeficienţii celor două polinoame rezultă

$$A_0 = \frac{1}{2}; A_1 = -\frac{1}{2},$$

adică $P(x)$ are forma

$$P(x) = \frac{x^2 - x}{2}.$$

Calculăm valorile lui $P(x)$ pentru $x = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ n+1;$

$$y_0 = P(0) = \frac{0^2 - 0}{2} = 0,$$

$$y_1 = P(1) = \frac{1^2 - 1}{2} = 0\ ,$$

$$y_2 = P(2) = \frac{2^2 - 2}{2} = 1,$$

$$y_3 = P(3) = \frac{3^2 - 3}{2} = 3,$$

$$y_4 = P(4) = \frac{4^2 - 4}{2} = 6,$$

....

$$y_n = P(n) = \frac{n^2 - n}{2},$$

$$y_{n+1} = P(n+1) = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Determinăm $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \cdots, \Delta y_n$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 0,$$

$$\begin{aligned}
\Delta y_1 &= y_2 - y_1 = 1,\\
\Delta y_2 &= y_3 - y_2 = 2,\\
\Delta y_3 &= y_4 - y_3 = 3,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\Delta y_n &= y_{n+1} - y_n = n.
\end{aligned}$$

Deci

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i = y_{n+1} - y_1 = \frac{n^2+n}{2} - 0 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Putere generalizată

Definiţia 5.26 Se numeşte **putere generalizată** de ordinul n, produsul de n factori din care primul este x, iar fiecare termen care urmează diferă de precedentul prin h adică

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\cdots[x-(n-1)h] \tag{5.55}$$

cu h fixat.

Caz particular: $h = 0 \Rightarrow x^{[n]} = x^n$.

Calculul diferenţelor unei puteri generalizate

$$\begin{gathered}
\Delta x^{[n]} = (x+h)^{[n]} - x^{[n]} =\\
= (x+h)x(x-h)\cdots[x-(n-2)h] -\\
-x(x-h)(x-2h)\cdots[x-(n-2)h]\,[x-(n-1)h] =\\
= x(x-h)\cdots[x-(n-2)h]\,[x+h-x+(n-1)h] =\\
= x(x-h)\cdots[x-(n-2)h]\,nh = nhx^{[n-1]}.
\end{gathered}$$

Deci

$$\Delta x^{[n]} = nhx^{[n-1]}. \tag{5.56}$$

$$\Delta^2 x^{[n]} = \Delta(\Delta x)^{[n]} = \Delta\left(nhx^{[n-1]}\right) =$$

$$= nh(n-1)hx^{[n-2]} = n(n-1)h^2x^{[n-2]}.$$

Adică, diferenţa de ordinul k este

$$\Delta^k x^{[n]} = n(n-1)\cdots[n-(k-1)]\,h^k x^{[n-k]}. \qquad (5.57)$$

Pentru $s > n$ avem

$$\Delta^s x^{[n]} = 0.$$

5.3 Formulele de interpolare ale lui Newton

5.3.1 Prima formulă de interpolare a lui Newton

Teorema 5.27 *Fie funcţia*

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad (5.58)$$

cu $y = f(x)$. Considerăm valorile echidistante ale variabilei

$$x_i = x_0 + ih, i = \overline{0,n}, \qquad (5.59)$$

unde h este pasul de interpolare, h constant. Dacă $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$, atunci există un polinom $P_n(x)$ de grad mai mic sau egal cu n, care în punctul x_i ia valorile y_i, adică

$$P_n(x_i) = y_i, i = \overline{0,n}. \qquad (5.60)$$

Condiţiile (5.60) *sunt echivalente cu*

$$\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0 \text{ pentru } m = 0,1,2,...,n. \qquad (5.61)$$

Demonstraţie.

Pasul 1.Căutăm un polinom de forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) +$$

$$+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\cdots+a_n(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})\cdots(x-x_0)\,(4).$$

Utilizând puterile generalizate avem:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0)^{[1]} + a_2(x-x_0)^{[2]} + \cdots + a_n(x-x_0)^{[n]}. \qquad (5.62)$$

Pasul 2. Să determinăm coeficienţii $a_i,\ i=\overline{0,n}$ ai polinomului $P_n\left(x\right)$ Facem în (5.62) $x=x_0$ şi avem coeficientul a_0

$$P_n\left(x_0\right)=y_0=a_0. \tag{5.63}$$

Calculăm diferenţa de ordinul întâi a lui $P_n\left(x\right)$

$$\Delta P_n\left(x\right)=a_1h+2a_2\left(x-x_0\right)^{[1]}h+3a_3\left(x-x_0\right)^{[2]}h+\cdots+na_n\left(x-x_o\right)^{[n-1]}h. \tag{5.64}$$

Facem $x=x_0$ şi găsim

$$\Delta P_n\left(x_0\right)=\Delta y_0=a_1h, \tag{5.65}$$

de unde

$$a_1=\frac{\Delta y_0}{1!h}. \tag{5.66}$$

Calculăm diferenţa a doua:

$$\Delta^2P_n\left(x_0\right)=2!a_2h^2+2\cdot 3h^2a_3\left(x-x_0\right)^{[1]}+\cdots+(n-1)nh^2a_n\left(x-x_0\right)^{[n]}. \tag{5.67}$$

Facem $x=x_0$ şi avem

$$a_2=\frac{\Delta^2y_0}{2!h^2}. \tag{5.68}$$

Continuând raţionamentul obţinem coeficienţii polinomului $P_n\left(x\right)$

$$a_i=\frac{\Delta^iy_0}{i!h^i},\quad i=\overline{0,n}, \tag{5.69}$$

unde 0!=1 şi $\Delta^0y=y$.
Introducând coeficienţii (5.69) în formula (5.62) a polinomului $P_n\left(x\right)$ avem

$$P_n\left(x\right)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!h}\left(x-x_0\right)^{[1]}+\frac{\Delta^2y_0}{2!h^2}\left(x-x_0\right)^{[2]}+...+\frac{\Delta^ny_0}{n!h^n}\left(x-x_0\right)^{[n]}. \tag{5.70}$$

Pasul 3. Verificăm că polinomul dat de (5.70) satisface condiţiile de interpolare:

1. Grad $P_n\left(x\right)\leq n$.

2. $P_n(x_0) = y_0$.

3.
$$P_n(x_k) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_k - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x_k - x_0)(x_k - x_1) +$$

$$+ \cdots + \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot kh + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(k-1)khh + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots 1}{k!}\Delta^k y_0 =$$

$$= (1+\Delta)^k y_0 = y_k. \tag{5.71}$$

4. Să arătăm că pentru $h \to 0$ formula (5.70) ne dă polinomul lui Taylor

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^k y_0}{h^k} = \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)_{x=x_0} = y^{(k)}_{(x_0)}, \tag{5.72}$$

$$\lim_{h\to 0} (x - x_0)^{[n]} = (x - x_0)^n. \tag{5.73}$$

Deci avem

$$P_n(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{5.74}$$

care este tocmai polinomul Taylor.

5. Notăm $q = \frac{x - x_0}{h}$ şi obţinem

$$\frac{(x - x_0)^{[i]}}{h!} = \frac{x - x_0}{h} \cdot \frac{x - x_0 - h}{h} \cdot \frac{x - x_0 - 2h}{h} \cdots \frac{[x - x_0 - (i-1)h]}{h} =$$

$$= q(q-1)(q-2)\cdots(q-i+1), i = 1, 2, ..., n. \tag{5.75}$$

Înlocuind în formula (5.70) avem:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \tag{5.76}$$

□

Observaţia 5.28 Formula (5.76) se mai numeşte şi **polinomul Newton ascendent**.

Observaţia 5.29 Formula este avantajoasă cand interpolarea se face în vecinătatea lui x_0, iar q este foarte mic.

Exemplul 5.30 Cazuri particulare de polinpame Newton.

Pentru $n = 1$

$$P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0.$$

Pentru $n = 2$

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0.$$

Exemplul 5.31 Pasul h este 0.05. Să construim pe intervalul [3.5, 3.7] polinomul de interpolare Newton pentru funcţia $y = e^x$ dată de tabelul:

x	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70
y	33,115	34,813	36,598	38,475	40,447

Soluţie.

Calculăm diferenţele lui y.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
3,50	33,115	1,698	0,087	0,005
3,55	34,813	1,795	0,092	0,003
3,60	36,598	1,877	0,095	
3,65	38,475	1,972		
3,70	40,447			

Deci

$$n = 3$$

$$x_0 = 3,50$$

$$y_0 = 33,115$$

$$P_3(x) = 33,115 + 1,698q + 0,087\frac{q(q-1)}{2} + 0,05\frac{q(q-1)(q-2)}{6},$$

unde $q = \frac{x-3,50}{0,050} = 20(x-3,5)$.

Exemplul 5.32 Fie $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$. Aplicând prima formulă de interpolare a lui Newton să determinăm $\phi(1.43)$. (Intervalul considerat va fi $[1,\ 2]$, iar h=0,1) .

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0,1	0,8427	0,0375	-0,0074	0,0010
1,1	0,8802	0,0301	-0,0064	0,0010
1,2	0,9103	0,0237	-0,0054	0,0009
1,3	0,9340	0,0183	-0,0045	0,0009
1,4	0,9523	0,0138	-0,0036	0,0009
1,5	0,9661	0,0102	-0,0027	0,0005
1,6	0,9763	0,0075	-0,0022	0,0006
1,7	0,9838	0,0053	-0,0016	0,0004
1,8	0,9891	0,0037	-0,0012	
1,9	0,9928	0,0025		
2,0	0,9953			

Punem x_0 valoarea cea mai apropiata de 1,43, adică $x_0 = 1.4$, h=0,1. Deci $q = \frac{1{,}43-1{,}4}{0{,}1} = 0,3$.

Mergând în formula de interpolare Newton :

$$y \approx 0,9523 + 0,3 \cdot 0,138 + \frac{0,3\,(0,3-1)}{2!}\,(-0,036) +$$
$$+\frac{0,3\,(0,3-1)\,(0,3-2)}{3!} \cdot 0,009 = 0,95686.$$

5.3.2 A doua formulă de interpolare a lui Newton

Teorema 5.33 *Fie funcţia*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \tag{5.77}$$

cu $y = f(x)$. *Considerăm valorile echidistante ale variabilei*

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{0, n}, \tag{5.78}$$

unde h *este pasul de interpolare,* h *constant. Dacă* $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, *atunci există un polinom* $P_n(x)$ *de grad mai mic sau egal cu* n, *cu proprietatea că* $P_n(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$, *de forma*

$$P_n(x) = y_n + \frac{q}{1!h}\Delta y_{n-1} + \frac{q\,(q+1)}{2!h^2}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots + \frac{q(q+1)\cdots(q+n-1)}{n!h^n}\Delta^n y_0, \tag{5.79}$$

care este un polinom de interpolare cu

$$q = \frac{x - x_n}{h}. \tag{5.80}$$

Demonstraţie.
Pasul 1. Căutăm un polinom de forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+ a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \cdots + a_n(x - x_n)\cdots(x - x_1) \tag{5.81}$$

sau

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n)^{[1]} +$$
$$+ a_2(x - x_{n-1})^{[2]} + a_3(x - x_{n-2})^{[3]} + \cdots + (x - x_1)^{[n]} \tag{5.82}$$

Pasul 2. Calculăm coeficienţii $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ astfel ca $P_n(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$. Deci

$$\Delta^i P_n(x_{n-i}) = \Delta^i y_{n-i}, i = \overline{0, n}. \tag{5.83}$$

Punem $x = x_n$ în (5.81) şi obţinem coeficientul a_0

$$P_n(x_n) = y_n = a_0,$$

de unde rezultă

$$a_0 = y_n. \tag{5.84}$$

Calculăm diferenţa de ordinul întâi a lui $P_n(x)$ şi avem

$$\Delta P_n(x) = a_1 \cdot 1 \cdot h + a_2 \cdot 2 \cdot h(x - x_{n-1})^{[1]} + a_3 \cdot 3 \cdot h(x - x_{n-2})^{[2]} + \cdots + a_n \cdot n \cdot h(x - x_1)^{[n-1]}. \tag{5.85}$$

Punem $x = x_{n-1}$ în (5.85) şi avem

$$\Delta P_n(x_{n-1}) = \Delta y_{n-1} = a_1 h, \tag{5.86}$$

de unde rezultă coeficientul a_1:

$$a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}. \tag{5.87}$$

Calculăm diferenţa de ordinul al doilea:

$$\Delta^2 P_n(x) = a_2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot h^2 +$$

$$+a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot h^2(x - x_{n-2})^{[1]} + \cdots + a_n \cdot n(n-1)h^2(x - x_1)^{[n-2]}. \tag{5.88}$$

Punem $x = x_{n-2}$ în (5.88) şi avem

$$\Delta^2 P_n(x_{n-2}) = \Delta^2 y_{n-2} = a_2 2! h^2, \tag{5.89}$$

de unde rezultă coeficientul a_2:

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! h^2}. \tag{5.90}$$

Continuând raţionamentul obţinem coeficienţii polinomului $P_n(x)$

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i! h^i}, \quad i = \overline{0, n}. \tag{5.91}$$

Introducând coeficienţii (5.91) în formula polinomului $P_n(x)$ avem

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1! h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3! h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_n) \cdots (x - x_1). \tag{5.92}$$

Notăm cu q raportul

$$q = \frac{x - x_n}{h}, \tag{5.93}$$

şi obţinem relaţiile

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1,$$

$$\frac{x - x_{n-2}}{h} = \frac{x - x_n + 2h}{h} = q + 2.$$

Deci avem

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} +$$

$$+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta y_{n-2} + \cdots + \frac{q(q+1)\cdots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \tag{5.94}$$

□

Observaţia 5.34 Formula (5.94) se mai numeşte şi **polinomul Newton descendent**.

Exemplul 5.35 Să calculăm valoarea logaritmului $\lg 1044$.

Soluţie.

Avem $x = 144$ şi următorul tabel pentru $h = 10$ şi $n = 5$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3,00000	0,0043214	-0,0000426	0,0000008
1010	3,0043214	0,0042788	-0,0000418	0.0000009
1020	3,0086002	0,0042370	-0,0000409	0,0000008
1020	3,0128372	0,0041961	-0,0000401	
1040	3,0170333	0,0041560		
1050	3,0212893			

$$x_n = 1050 \Rightarrow q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1044 - 1050}{10} = -0,6$$

$$\lg 1044 = 3,0211893 + (-0,6) \cdot 0,0041560 + \frac{(-0,6)(-0,6+1)}{2} \cdot 0,0000401 +$$

$$+ \frac{(-0,6)(-0,6+1)(-0,6+2)}{6} \cdot 0,0000008 = 3,0187005.$$

5.3.3 Evaluarea erorilor pentru formulele lui Newton

Ştim că $x_{i+1} - x_i = h$, $i = \overline{0, n-1}$.

Pentru prima formulă a lui Newton avem q de forma

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \tag{5.95}$$

astfel

$$R_n(x) = h^{n+1} \cdot \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi), \tag{5.96}$$

deci $\xi \in [x_0, x_n]$.

Pentru cea de a doua formulă a lui Newton avem

$$q = \frac{x - x_n}{h}, \tag{5.97}$$

astfel

$$R_n(x) = h^{n+1} \cdot \frac{q(q+1)...(q+n)}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi). \tag{5.98}$$

Observaţia 5.36 Calculul se opreşte atunci când diferenţele între temeni pot fi considerate în limitele preciziei impuse.

Deoarece

$$f^{(n+1)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta^{n+1} y}{h^{n+1}} \tag{5.99}$$

avem aproximarea

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}. \tag{5.100}$$

Cu această aproximare, resturile (erorile) formulelelor lui Newton devin:

$$R_n(x) \approx \frac{q(q-1)...(q-n)}{(n+1)!} \cdot \Delta^{n+1} y_0, \tag{5.101}$$

$$R_n(x) \approx \frac{q(q+1)...(q+n)}{(n+1)!} \cdot \Delta^{n+1} y_0. \tag{5.102}$$

Capitolul 6

Integrare numerică

6.1 Formule de cuadratură

Se consideră o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe intervalul $[a, b]$ şi primitiva sa $F(x)$ se consideră cunoscută. În aceste condiţii integrala definită a acestei funcţii de la a la b se poate calcula cu formula Newton-Leibniz:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{6.1}$$

În unele situaţii primitiva $F(x)$ nu poate fi calculată prin metode elementare sau există situaţii când funcţia $f(x)$ este dată tabelar ceea ce face ca determinarea primitivei $F(x)$ să fie lipsită de sens, astfel calculul integralei dată de relaţia (6.1) nu poate fi realizat. Acestea sunt motivele principale care arată importanţa practică a metodelor numerice (aproximative) de calcul al integralelor.

Definiţia 6.1 O procedură numerică prin care valoarea unei integrale definite este aproximată folosind informaţii despre integrant numai în anumite puncte (unde integrantul este definit) se numeşte **formulă de cuadratură**.

Definiţia 6.2 Calculul numeric al unei integrale simple poartă numele de **cuadratură mecanică** şi calculul unei integrale duble se numeşte **cubatură mecanică**.

În cele ce urmează vom considera calculul numeric al unei integrale simple

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Procedeul constă în a înlocui funcţia dată $y = f(x)$ printr-o funcţie de interpolare sau de aproximare (de exemplu un polinom) $\phi(x)$, astfel încât

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx. \tag{6.2}$$

Funcţia $\varphi(x)$ trebuie să aibe o formă care să permită calculul imediat al integralei

$$\int_a^b \varphi(x)dx. \tag{6.3}$$

Dacă funcţia $f(x)$ este dată analitic se va pune problema evaluării erorii.

Vom analiza în acest scop polinomul lui Lagrange.

Fie funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, cu $y = f(x)$ astfel ca în $n + 1$ puncte echidistante şi cunoscute ale intervalului $[a, b]$, să avem

$$y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, ..., n. \tag{6.4}$$

Cu aceste informaţii, dorim să determinăm integrala

$$\int_a^b ydx = \int_a^b f(x)dx. \tag{6.5}$$

Fie polinomul Lagrange dat de relaţia următoare

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} \cdot y_i \tag{6.6}$$

cu

$$\begin{cases} L_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n} \\ \Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)...(x - x_n). \end{cases}$$

Atunci avem expresia

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + R_n(f) \ , \tag{6.7}$$

unde $R_n(f)$ este restul.

Introducem (6.6) în (6.7) şi integrala va fi

$$I_n = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} y_i dx + R_n(f) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} dx \right) y_i + R_n(f) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} A_i y_i + R_n(f),$$

deci

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i + R_n(f), \qquad i = 0, 1, 2, ..., n, \tag{6.8}$$

unde am notat

$$A_i = \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} dx. \tag{6.9}$$

Definiţia 6.3 Formula (6.8) se numeşte **formulă de cuadratură**.

Definiţia 6.4 Dacă limitele de integrare a, b sunt puncte de interpolare, atunci formula de cuadratură (6.8) se spune că este **de tip închis**, în caz contrar, ea este **de tip deschis**.

Avem două observaţii cu privire la coeficienţii A_i.

Observaţia 6.5 Coeficienţii A_i nu depind de alegerea funcţiei f pentru o mulţime de puncte date.

Observaţia 6.6 Pentru un polinom de grad cel mult n formula $\int_a^b y\, dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\, y_i$ este exactă deoarece $L_n(x) \equiv f(x)$. În particular, formula de cuadratură (6.8) este exactă pentru $y = x^k,\ \ k = 0, 1, 2, ..., n$, deci în particular $R_n\left(x^k\right) = 0$, pentru $k = \overline{0, n}$.

Justificăm a doua observaţie.
Punem în formula (6.8) $y = x^k,\ \ k = 0, 1, 2, ..., n$ şi obţinem relaţiile

pentru $k = 0$

$$I_0 = \sum_{i=0}^{n} A_i,$$

pentru $k = 1$

$$I_1 = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i,$$

....

pentru $k = n$

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^n,$$

adică un sistem de $n + 1$ ecuaţii

$$\begin{cases} I_0 = \sum_{i=0}^{n} A_i, \\ I_1 = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ I_n = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^n, \end{cases} \tag{6.10}$$

unde

$$I_k = \int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n, \tag{6.11}$$

din care determinăm coeficienţii A_i, $i = \overline{0, n}$. Determinantul sistemului (6.10) este un determinant de tip Vandermonde, adică

$$D = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0, \tag{6.12}$$

deci A_i pot fi determinaţi în mod unic.

Exemplul 6.7 Să găsim o formulă de cuadratură de forma

$$\int_0^1 y\, dx = A_0\, y\left(\frac{1}{4}\right) + A_1 y\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 y\left(\frac{3}{4}\right).$$

Soluţie.
Fie $y = x^k$, $k = 0, 1, 2.$
Folosind formula (6.11), avem

$$\begin{array}{ll} \text{pentru } k = 0, & \mathrm{I}_0 = \int_0^1 dx = 1, \\ \text{pentru } k = 1, & \mathrm{I}_1 = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}, \\ \text{pentru } k = 2, & \mathrm{I}_2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}. \end{array}$$

Scriem acum sistemul (6.10), deci

$$\begin{cases} I_0 = \sum_{i=0}^{2} A_i = A_0 + A_1 + A_2, \\ I_1 = \sum_{i=0}^{2} A_i x_i = A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2, \\ I_2 = \sum_{i=0}^{2} A_i x_i^2 = A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 1, \\ \frac{A_0}{4} + \frac{A_1}{2} + \frac{3A_2}{4} = \frac{1}{2}, \\ \frac{A_0}{16} + \frac{A_1}{4} + \frac{9A_2}{16} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul găsim coeficienţii

$$A_0 = \frac{2}{3}, \quad A_1 = -\frac{1}{3}, \quad A_2 = \frac{2}{3}.$$

Adică formula de cuadratură căutată este

$$\int_0^1 y\, dx = \frac{2}{3} y\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} y\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} y\left(\frac{3}{4}\right).$$

Observaţia 6.8 Formula de mai sus este de tip deschis şi este exactă pentru toate polinoamele de grad mai mic sau egal cu 2.

6.2 Formulele de cuadratură Newton - Côtes

Să presupunem că pentru o funcţie dată $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu $y = f(x)$ trebuie să calculăm integrala

$$\int_a^b f(x)\; dx = \int_a^b y\, dx. \tag{6.13}$$

Notăm

$$h = \frac{b-a}{n} \tag{6.14}$$

şi împărţim segmentul $[a, b]$ cu ajutorul punctelor echidistante

$$x_0 = a, x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, ..., n-1, \;\; x_n = b. \tag{6.15}$$

Fie $y_i = f(x_i)$ pentru $i = 0, 1, 2, ..., n$.
Înlocuim funcţia y prin polinomul lui Lagrange corespunzător $L_n(x)$, pentru a obţine formula de cuadratură aproximativă dată de (6.8)

$$\int_a^b f(x)\; dx = \int_a^b y\, dx = \int_{x_0}^{x_n} y\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i y_i, \tag{6.16}$$

unde coeficienţii A_i sunt nişte constante.
Dar

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) y_i, \tag{6.17}$$

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}. \tag{6.18}$$

Notăm

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \tag{6.19}$$

prelucrăm numărătorul expresiei (6.18)

$$\begin{cases} x - x_0 = qh \\ \frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0}{h} - \frac{h}{h} = q - 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{x-x_{i-1}}{h} = \frac{x-x_0}{h} - (i-1)\,\frac{h}{h} = q - (i-1) \\ \frac{x-x_{i+1}}{h} = \frac{x-x_0}{h} - (i+1)\,\frac{h}{h} = q - (i+1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{x-x_n}{h} = \frac{x-x_0}{h} - n\frac{h}{h} = q - n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = qh \\ x - x_1 = (q-1)\,h \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x - x_{i-1} = (q-(i-1))\,h \\ x - x_{i+1} = (q-(i+1))\,h \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x - x_n = (q-n)\,h \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n) =$$

$$= h^n q\,(q-1)\cdots(q-(i-1))\,(q-(i+1))\cdots(q-n)\,.$$

Dar

$$q^{[n+1]} = q(q-1)\cdots(q-n),$$

deci, numărătorul se poate scrie în forma

$$(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n) = h^n \frac{q^{[n+1]}}{(q-i)}. \tag{6.20}$$

Procedăm similar pentru numitorul expresiei (6.18) şi găsim

$$\begin{cases} x_i - x_0 = x_0 + ih - x_0 \\ x_i - x_1 = x_0 + ih - x_0 - h \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i - x_{i-1} = x_0 + ih - x_0 - (i-1)h \\ x_i - x_{i+1} = x_0 + ih - x_0 - (i+1)h \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i - x_n = x_0 + ih - x_0 - nh \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i - x_0 = ih \\ x_i - x_1 = (i-1)h \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i - x_{i-1} = h \\ x_i - x_{i+1} = (-1)\,h \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i - x_n = (-1)(n-i)h \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1}) = i!h^i,$$

$$(x_i - x_{1+1})\cdots(x_i - x_n) = (-1)^{n-i}h^{n-i}(n-i)!,$$

adică numitorul va fi

$$(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{1+1})\cdots(x_i - x_n) = (-1)^{n-i}h^n i!(n-i)! \quad (6.21)$$

de unde rezultă că polinomul lui Lagrange

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x)y_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi'_{n+1}(x)(x-x_i)}y_i$$

se scrie cu ajutorul relaţiilor (6.20) şi (6.21) sub forma

$$L_n(q) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i}y_i. \quad (6.22)$$

Facem schimbarea de variabilă folosind relaţia (6.19) scrisă în forma următoare

$$\begin{cases} q = \frac{x-x_0}{h} \\ a = x_0 \end{cases} \Rightarrow qh = x - a \Rightarrow x = a + qh \Rightarrow dx = h\,dx. \quad (6.23)$$

Limitele de integrare le determinăm din (6.23), ştiind că $x \in [a,b] = [x_0, x_n]$. Astfel pentru $x = x_0$ rezultă

$$q = 0, \tag{6.24}$$

iar pentru $x = x_n = x_0 + nh$ rezultă

$$q = n, \tag{6.25}$$

deci $q \in [0, n]$.

Integrala (6.16) devine

$$I_n = \int_{x_0}^{x_n} y\ dx = \int_{x_0}^{x_n} f\left(x\right)\ dx = \int_0^n f\left(a + qh\right) h\ dq = \int_0^n F\left(q\right) dq \tag{6.26}$$

unde

$$F\left(q\right) = f\left(a + qh\right) h. \tag{6.27}$$

Dar $F\left(q\right) \approx L_n(q)$ rezultă

$$I_n = \int_0^n F\left(q\right) dq \approx \int_0^n L_n(q) dq =$$

$$= \int_0^n \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i} y_i dq =$$

$$= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot y_i \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq. \tag{6.28}$$

Coeficienţii A_i, pentru $i = 0, 1, ..., n$, vor fi

$$A_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq. \tag{6.29}$$

În aceste condiţii integrala noastră se scrie

$$\int_{x_0}^{x_n} f\left(x\right)\ dx = \int_a^b y dx \approx \sum_{i=0}^n A_i y_i. \tag{6.30}$$

Definiţia 6.9 Formula (6.30) poartă numele de **formula de cuadratură Newton- Côtes.**

Restul în formula Newton- Côtes reprezintă diferenţa dintre valoarea integralei iniţiale şi valoarea aproximativă a ei. Acesta se scrie în felul următor:

$$R = \int_{x_0}^{x_n} f\left(x\right)\ dx - \sum_{i=0}^{n} A_i y_i.$$

Cu formula (6.28), avem

$$\int_0^n F\left(q\right) dq - \int_0^n L_n(q) dq = \int_0^n \left[F\left(q\right) - L_n(q)\right] dq = \frac{F_{(\xi)}^{(n+1)}}{(n+1)!} \int_0^n q^{[n+1]} dq, \xi \in \left[0, n\right].$$

Deci restul este

$$R = \frac{F_{(\xi)}^{(n+1)}}{(n+1)!} \int_0^n q^{[n+1]} dq, \xi \in \left[0, n\right]. \tag{6.31}$$

Definiţia 6.10 Expresia (6.31) se numeşte **restul** formulei de cuadratură Newton- Côtes.

6.3 Formula trapezelor

Formula trapezelor este un caz particular al formulei de cuadratură Newton-Côtes care se obţine pentru $n = 1$. În acest caz considerăm funcţia continuă $f : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{R}$ şi presupunem că x_i şi x_{i+1} sunt distincte. Notăm cu I_i integrala

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x\right) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y dx. \tag{6.32}$$

Facem schimbarea de variabilă

$$x = x_i + \left(x_{i+1} - x_i\right) q \Rightarrow dx = \left(x_{i+1} - x_i\right) dq,$$

sau dacă ţinem cont că $h = x_{i+1} - x_i$ găsim

$$x = x_i + hq \Rightarrow dx = h\ dq. \tag{6.33}$$

Calculăm limitele de integrare, astfel pentru

$$x = x_i \Rightarrow x_i = x_i + hq \Rightarrow q = 0$$

şi

$$x = x_{i+1} \Rightarrow x_{i+1} = x_i + hq \Rightarrow x_{i+1} - x_i = hq \Rightarrow h = hq \Rightarrow q = 1.$$

Integrala (6.32) devine

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \int_0^1 F(q)\,dq \tag{6.34}$$

unde

$$F(q) = f(x_i + (x_{i+1} - x_i)\,q)\,(x_{i+1} - x_i)\,,$$

dar $h = x_{i+1} - x_i$, deci

$$F(q) = f(x_i + qh) \cdot h. \tag{6.35}$$

Formula (6.30) pentru $n = 1$, se scrie

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y dx \approx \sum_{i=0}^{1} A_i y_i = A_0 y_0 + A_1 y_1. \tag{6.36}$$

Determinăm coeficienţii A_i cu formula (6.29) şi găsim
pentru $i = 0$

$$A_0 = -\int_0^1 \frac{q(q-1)}{q} dq = \frac{1}{2},$$

şi pentru $i = 1$

$$A_1 = \int_0^1 q \cdot dq = \frac{1}{2}.$$

Cu aceşti coeficienţi formula (6.36) se scrie

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y \cdot dx \approx \frac{1}{2}(y_0 + y_1). \tag{6.37}$$

Ştim că

$$y_0 = F(0) = f(x_i + 0 \cdot h)\,h = hf(x_i) \tag{6.38}$$

şi

$$y_1 = F(1) = f(x_i + 1 \cdot h)\,h = hf(x_{i+1})\,. \tag{6.39}$$

Dacă ţinem cont de relaţiile (6.38) şi (6.39), rescriem relaţia (6.37)

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y \cdot dx \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left[f\left(x_i\right) + f\left(x_{i+1}\right) \right] \tag{6.40}$$

sau

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x\right) dx \approx \frac{h}{2} \left[f\left(x_i\right) + f\left(x_{i+1}\right) \right]. \tag{6.41}$$

Definiţia 6.11 Formula (6.41) poartă numele de **formula trapezelor**.

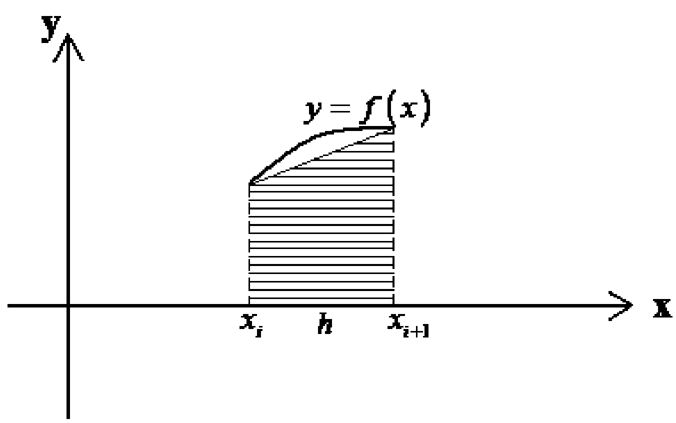

Figura 14

Observaţia 6.12 Această formulă are o interpretare geometrică simplă, şi anume, că aria de sub curba $y = f\left(x\right)$, adică integrala I_i, este aproximată prin aria trapezului haşurat din figura alăturată.

Evaluarea erorii la formula trapezelor

Vom nota cu R restul în formula trapezelor.

Teorema 6.13 *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dacă presupunem că $y \in C^2 [a, b]$, atunci restul în formula trapezelor este dat de relaţia următoare*

$$R = -\frac{h^3}{12} y''\left(\xi\right).$$

Demonstraţie. Restul reprezintă diferenţa dintre integrala funcţiei şi valoarea aproximativă determinată cu formula trapezelor, adică

$$R = \int_{x_0}^{x_1} y dx - \frac{1}{2}(y_0 + y_1).$$

Renotând restul avem

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} y dx - \frac{h}{2}\left(y(x_0) + y(x_0 + h)\right). \tag{6.42}$$

Derivăm acum şi obţinem

$$R'(h) = y(x_0+h) - \frac{1}{2}\left(y(x_0) - \frac{1}{2}y(x_0+h)\right) - \frac{h}{2}y'(x_0+h) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[y(x_0+h) - y(x_0)\right] - \frac{h}{2}y'(x_0+h). \tag{6.43}$$

Derivând din nou relaţia (6.43), avem

$$R''(h) = \frac{1}{2}y'(x_0+h) - \frac{1}{2}y'(x_0+h) - \frac{h}{2}y''(x_0+h) \approx -\frac{h}{2}y''(x_0+h). \tag{6.44}$$

În plus

$$R(0) = R'(0) = 0. \tag{6.45}$$

Integrând în raport cu h, de la 0 la h, găsim

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)\, dt = -\frac{1}{2}\int_0^h t y''(x_0+t)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2}y''(\xi_1)\int_0^h t dt = \frac{h^2}{4}y''(\xi_1), \tag{6.46}$$

unde $\xi_1 \in (x_0, x_0 + h)$.

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)\, dt = -\frac{1}{4}\int_0^h t^2 y''(\xi_1)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{4}y''(\xi)\int_0^h t^2 dt = -\frac{h^3}{12}y''(\xi), \tag{6.47}$$

unde $\xi \in (x_0, x_0 + h)$.

Deci eroarea (restul) are forma

$$R = -\frac{h^3}{12}y''(\xi), \tag{6.48}$$

unde $\xi \in (x_0, x_1)$. $\square$

Observaţia 6.14 Dacă $y'' > 0$ aproximaţia se realizează prin exces, iar dacă $y'' < 0$ aproximaţia se realizează prin lipsă.

Exemplul 6.15 Să calculăm integrala

$$\int_0^1 x^3 + 1dx,$$

folosind formula trapezelor.

Soluţie.

Deoarece funcţia considerată este o funcţie polinomială de gradul al treilea, rezultă că formula trapezelor nu este exactă ($n = 1$).

Determinăm această integrală cu formula trapezelor

$$\int_0^1 x^3 + 1dx = \frac{1-0}{2}\left[f\left(0\right) + f\left(1\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1+2\right) = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Pentru a justifica ce am menţionat anterior, referitor la exactitate, calculăm cu metoda clasică această integrală şi avem

$$\int_0^1 x^3 + 1dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|\begin{matrix}1\\0\end{matrix} + x\Bigg|\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} = 1,25$$

care este un rezultat exact.

6.4 Formula generalizată a trapezelor

Pentru a calcula integrala $\int_a^b f\left(x\right)dx$ vom împărţi intervalul de integrare [a,b] în n părţi egale $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ şi să aplicăm pe fiecare subinterval formula trapezelor (6.41). Fie $h = \frac{b-a}{n}$ şi notăm $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Deci

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \int_{x_0}^{x_1} y\cdot dx + \int_{x_1}^{x_2} y\cdot dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} y\cdot dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{2}\left(f\left(a\right) + f\left(x_1\right)\right) + \frac{h}{2}\left(f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right)\right) + \cdots + \frac{h}{2}\left(f\left(x_{n-1}\right) + f\left(b\right)\right)$$

$$= \frac{h}{2}\left[f\left(a\right) + 2f\left(x_1\right) + \cdots + 2f\left(x_{n-1}\right) + f\left(b\right)\right] \qquad (6.49)$$

sau folosind relaţia (6.37) se mai poate scrie sub forma

$$\int_a^b y\cdot dx = \frac{1}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right). \qquad (6.50)$$

Definiţia 6.16 Relaţia (6.49), respectiv relaţia (6.50), poartă numele de **formula generalizată a trapezelor**.

Evaluarea erorii pentru formula generalizată a trapezelor

Teorema 6.17 *Fie* $f : [a,b] \to R$, $y = f(x)$ *de clasă* C^2 *pe intervalul* $[a,b]$. *Dacă* $\exists M_2 > 0$ *astfel încât* $|f''(x)| \le M_2$, $\forall x \in [a,b]$, *atunci restul are forma*

$$R(f) = -\frac{nh^3}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^3}{12} f''(\xi), \ \ \xi \in (a,b), \tag{6.51}$$

iar eroarea pentru formula generalizată a trapezelor este

$$\varepsilon = |R(f)| \le \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3. \tag{6.52}$$

Demonstraţie. Considerăm restul $R_i(f)$ pe fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$. Folosind formula (6.31), pentru $n = 1$, avem

$$R_i(F(q)) = \frac{F''(\xi)}{2!} \int_0^1 q(q-1)\,dq = -\frac{F''(\xi)}{12}, \xi \in [0,1]. \tag{6.53}$$

Derivând de două ori expresia $F(q) = f(x_i + (x_{i+1} - x_i)q)(x_{i+1} - x_i)$, găsim

$$F''(q) = f''(x_i + (x_{i+1} - x_i)q)(x_{i+1} - x_i)^3 \tag{6.54}$$

şi înlocuim în (6.53) de unde rezultă

$$R_i(F(q)) = -\frac{f''(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)^3}{12}, i = \overline{0, n-1},$$

dar $h = x_{i+1} - x_i$, deci restul pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ este

$$R_i(F(q)) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i), \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, n-1}. \tag{6.55}$$

Pentru a găsi restul pe intervalul $[a,b]$ vom însuma cele n resturi obţinute pe fiecare subinterval

$$R(f) = \sum_{i=0}^{n-1} R_i(f) = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i), \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{6.56}$$

Vom considera media aritmetică

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = n\mu. \tag{6.57}$$

Dar f'' este de clasă C^2 pe intervalul [a,b] , rezultă că are proprietatea lui Darboux, deci există un punct $\xi \in [a,b]$ astfel ca

$$\mu = f''(\xi). \tag{6.58}$$

Înlocuim (6.58) în (6.57) şi obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = nf''(\xi), \xi \in [a,b]. \tag{6.59}$$

Astfel că restul va avea forma

$$R\left(f\right) = -\frac{nh^3}{12} f''\left(\xi\right) = -\frac{n\left(b-a\right)^3}{12n^3} f''\left(\xi\right) = -\frac{f''\left(\xi\right)}{12n}\left(b-a\right)^3, \xi \in [a,b]. \tag{6.60}$$

Pentru $M_2 > 0$, cu $|f''\left(x\right)| \leq M_2$, $\forall x \in [a,b]$, eroarea devine

$$\varepsilon = |R\left(f\right)| \leq -\frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3.$$

□

Exemplul 6.18 Să calculăm integrala

$$\int_0^1 x^3 + 1dx,$$

folosind formula generalizată a trapezelor pentru $n = 2$, $n = 4$ şi $n = 8$.

Soluţie.

Pentru $n = 2$, împărţim intervalul $[0,1]$ în două subintervale, aplicăm formula generalizată a trapezelor (6.50) şi avem

$$\int_0^1 x^3+1dx = \frac{1}{2}\left[\frac{f\left(0\right)}{2} + f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f\left(1\right)}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{8} + 1\right) = \frac{21}{16} = 1,3125.$$

Pentru $n = 4$, avem 4 subintervale şi deci vom scrie

$$\int_0^1 x^3 + 1dx = \frac{1}{4}\left[\frac{f\left(0\right)}{2} + \sum_{i=1}^{3} f\left(0 + \frac{i}{4}\right) + \frac{f\left(1\right)}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{f(0)}{2} + \sum_{i=1}^{3} f\left(\frac{i}{4}\right) + \frac{f(1)}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{f(0)}{2} + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{f(1)}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{65}{64} + \frac{72}{64} + \frac{91}{64} + 1\right) = \frac{324}{256} = 1,2656.$$

Pentru $n = 8$, avem 8 subintervale şi deci vom scrie

$$\int_0^1 x^3 + 1dx = \frac{1}{8}\left[\frac{f(0)}{2} + \sum_{i=1}^{3} f\left(0 + \frac{i}{8}\right) + \frac{f(1)}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{f(0)}{2} + \sum_{i=1}^{7} f\left(\frac{i}{8}\right) + \frac{f(1)}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{f(0)}{2} + f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{2}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\frac{4}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{6}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) + \frac{f(1)}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{65}{64} + \frac{72}{64} + \frac{91}{64} + 1\right) = \frac{321}{256} = 1,2539.$$

6.5 Formula Simpson

Formula Simpson este un caz particular al formulei de cuadratură Newton-Côtes care se obţine pentru $n = 2$, şi avem o interpolare pătratică pe intervalul $[0, 2]$. Considerăm funcţia continuă$f : [x_{2i}, x_{2i+2}] \to \mathbb{R}$, iar intervalul $[a, b]$ va fi divizat în $2n$ subintervale egale $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2i} < x_{2i+1} < \cdots < x_{2n-1} < x_{2n} = b$, $h = \frac{b-a}{2n} = x_{k+1} - x_k$, $k = \overline{0, 2n-1}$. Notăm

$$I_{2i} = \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\, dx. \tag{6.61}$$

Facem schimbarea de variabilă

$$x = x_{2i} + \frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{2} q \Rightarrow dx = \frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{2} dq. \tag{6.62}$$

Integrala (6.61) devine

$$I_{2i} = \int_0^2 F(q)\, dq \tag{6.63}$$

unde

$$F(q) = f\left(x_{2i} + \frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{2} q\right) \cdot \frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{2}. \tag{6.64}$$

Folosim acum formula Newton − Côtes, care pentru $n = 2$, se scrie

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx \approx \sum_{i=0}^{2} A_i y_i = A_0 y_0 + A_1 y_1 + A_2 y_2, \tag{6.65}$$

unde $y(i) = F(i)$, $i = \overline{0, 2}$.
În cazul nostru, expresia (6.29) a coeficienţilor devine

$$A_i = \frac{(-1)^{2-i}}{i!(2-i)!} \int_0^2 \frac{q^{[2+1]}}{q - i} dq, i = 0, 1, 2. \tag{6.66}$$

Astfel, pentru $i = 0$

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{q(q-1)(q-2)}{q} dq = \frac{1}{2} \int_0^2 (q-1)(q-2) dq = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (q^2 - 3q + 2) dq = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} - 6 + 4\right) = \frac{1}{3}, \end{aligned} \tag{6.67}$$

pentru $i = 1$

$$A_1 = -\frac{1}{1} \int_0^2 \frac{q(q-1)(q-2)}{q-1} dq = -\int_0^2 q(q-2) = \frac{4}{3}, \tag{6.68}$$

şi pentru $i = 2$

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{q(q-1)(q-2)}{q-2} dq = \frac{1}{2} \int_0^2 q(q-1) dq = \frac{1}{3}. \tag{6.69}$$

Înlocuind coeficienţii A_i, $i = \overline{0, 2}$ în formula (6.65), avem

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx = \frac{1}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{6.70}$$

Dar $x_{2i+2} - x_{2i} = 2h$, $i = \overline{0, n}$. Cu formula (6.64) obţinem

$$y_0 = F(0) = hf(x_{2i}), \tag{6.71}$$

$$y_1 = F(1) = hf(x_{2i+1}), \tag{6.72}$$

şi

$$y_2 = F(2) = hf(x_{2i+2}), \tag{6.73}$$

Înlocuim acum în relaţia (6.70) pe y_i, $i = \overline{0,2}$ şi găsim

$$\int_0^2 y \cdot dx = \frac{h}{3}\left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right]. \tag{6.74}$$

Definiţia 6.19 Expresia (6.74) poartă numele de **formula lui Simpson**.

Exemplul 6.20 Să calculăm integrala

$$\int_0^1 x^3 + 1dx,$$

folosind formula lui Simpson.

Soluţie.
Pentru $n = 2$,

$$\int_0^1 x^3 + 1dx = \frac{\frac{1-0}{2}}{3}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{15}{2} = \frac{15}{12} = 1.25.$$

Evaluarea restului formulei Simpson

Teorema 6.21 *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ de clasă C^4 pe intervalul $[a,b]$, atunci restul în formula lui Simpson are forma*

$$R = -\frac{h^5}{90}y^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x_1 - h, x_1 + h). \tag{6.75}$$

Demonstraţie. Fie restul în formula lui Simpson

$$R = \int_{x_0}^{x_2} ydx - \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \;\; y \in C^4[a,b]. \tag{6.76}$$

Fixând punctual median x_i şi $R = R(h)$, $h \geq 0$, avem

$$R = R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} ydx - \frac{h}{3}[y(x_1 - h) + 4y(x_1) + y(x_1 + h)]. \tag{6.77}$$

Derivăm de trei ori pe $R\,(h)$în raport cu h.
Calculăm prima derivată

$$R'(h) = [y(x_1+h) + y(x_1-h)] - \frac{1}{3}[y(x_1-h) + 4y(x_1) + y(x_1+h)] -$$

$$-\frac{h}{3}[-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)] \Rightarrow R'(h) =$$

$$= \frac{2}{3}[y(x_1-h) + y(x_1+h)] - \frac{4}{3}y(x_1) - \frac{h}{3}[-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)]. \quad (6.78)$$

Analog, avem derivata a doua

$$R''\,(h) = \frac{2}{3}\left[-y'\,(x_1-h) + y'\,(x_1+h)\right] - \frac{1}{3}\left[-y''\,(x_1-h) + y''\,(x_1+h)\right] -$$

$$-\frac{h}{3}\left[y''\,(x_1-h) + y''\,(x_1+h)\right] \Rightarrow$$

$$R''\,(h) = \frac{1}{3}\left[-y'\,(x_1-h) + y'\,(x_1+h)\right] - \frac{h}{3}\left[y''\,(x_1-h) + y''\,(x_1+h)\right]. \quad (6.79)$$

Iar dervata a treia este

$$R'''(h) = \frac{1}{3}[y''(x_1-h) + y''(x_1+h)] -$$

$$-\frac{1}{3}[y''(x_1-h) + y''(x_1+h)] - \frac{h}{3}[-y'''(x_1-h) + y'''(x_1+h)]R'''(h) =$$

$$= -\frac{h}{3}[y'''(x_1+h) - y'''(x_1-h)] \xrightarrow{Lagrange}$$

$$R'''(h) = -\frac{2h^2}{3}y^{(4)}(\xi_3),\ \xi_3 \in (x_1-h, x_1+h). \quad (6.80)$$

Se observă că $R(0) = R'(0) = R''(0) = 0$.
Integrând pe $R'''(h)$ şi aplicând teorema de medie avem

$$R''(h) = R''(0) + \int_0^h R'''(t)dt = -\frac{2}{3}\int_0^h t^2 y^{(4)}(\xi_3)dt =$$

$$= -\frac{2}{3}y^{(4)}(\xi_2)\int_0^h t^2 dt = -\frac{2}{9}h^3 y^{(4)}(\xi_2),$$

$$R''(h) = -\frac{2}{9}h^3 y^{(4)}(\xi_2), \xi_2 \in (x_1-h, x_1+h). \quad (6.81)$$

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{2}{9}\int_0^h t^3 y^{(4)}(\xi_2)dt =$$

$$= -\frac{2}{9}y^{(4)}(\xi_1)\int_0^h t^3 dt = -\frac{1}{18}h^4 y^{(4)}(\xi_1),$$

$$R'(h) = -\frac{1}{18}h^4 y^{(4)}(\xi_1), \xi_1 \in (x_1 - h, x_1 + h). \tag{6.82}$$

$$R(h) = R(0) - \frac{1}{18}\int_0^h t^4 y^{(4)}(\xi_1)dt = -\frac{1}{18}y^{(4)}(\xi)\int_0^h t^4 dt = -\frac{h^5}{90}y^{(4)}(\xi),$$

Adică restul este

$$R(h) = -\frac{h^5}{90}y^{(4)}(\xi), \xi \in (x_1 - h, x_1 + h). \tag{6.83}$$

□

6.6 Formula Simpson generalizată

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$, $h = \frac{b-a}{2n}$. Aplicăm formula lui Simpson pe fiecare interval $[x_{2i}, x_{2i+1}]$, astfel că adumând aceste integrale obţinem

$$\int_a^b ydx = \int_{x_0}^{x_{2n}} ydx = \int_{x_0}^{x_2} ydx + \int_{x_2}^{x_4} ydx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} ydx. \tag{6.84}$$

Cu formula (6.74) avem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1}(y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}) \tag{6.85}$$

sau

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \tag{6.86}$$

sau

$$\int_a^b ydx = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \cdots + y_{2n-2})\right]. \tag{6.87}$$

Definiţia 6.22 Fiecare din expresiile (6.85), (6.86), (6.87) reprezintă **formula lui Simpson generalizată**.

Evaluarea restului în formula lui Simpson generalizată

Teorema 6.23 *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ de clasă C^4 pe intervalul $[a, b]$. Dacă $\exists M_4 > 0$ astfel încât $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq M_4$, $\forall x \in [a, b]$, atunci, formula lui Simpson generalizată, restul are forma*

$$R(f) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \ \ \xi \in [a, b], \tag{6.88}$$

iar eroarea este

$$\varepsilon = |R(f)| \leq \frac{M_4}{180}(b-a)h^4. \tag{6.89}$$

Demonstraţie.
Restul pe intervalul $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ îl notăm

$$R_i = -\frac{h^5}{90} y^{(4)}(\xi_{2i}), \quad \xi_{2i} \in [x_{2i}, x_{2i+2}], \tag{6.90}$$

cu $y^{(4)}$ continuă pe intervalul $[a, b]$.
Pe întreg intervalul $[a, b]$ restul formulei lui Simpson generalizată se obţine prin adunarea tuturor resturilor, astfel

$$R = \sum_{i=1}^{n-1} R_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{h^5}{90} y^{(4)}(\xi_{2i})\right) \Rightarrow$$

$$R = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{n-1} y^{(4)}(\xi_{2i}), \quad \xi_{2i} \in [x_{2i}, x_{2i+2}]. \tag{6.91}$$

Din teorema lui Darboux, avem un punct $\xi \in [a, b]$, astfel că media aritmetică este

$$y^{(4)}(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} y^{(4)}(\xi_{2i}) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} y^{(4)}(\xi_{2i}) = n y^{(4)}(\xi). \tag{6.92}$$

Introducem relaţia (6.92) în (6.91) şi avem formula

$$R = -\frac{nh^5}{90} y^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]\,, \tag{6.93}$$

unde $h = \frac{b-a}{2n}$.
Fie $M_4 > 0$ astfel încât $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq M_4$, $\forall x \in [a, b]$, astfel avem eroarea

$$\varepsilon = |R| \leq \frac{M_4}{180}(b-a)h^4. \tag{6.94}$$

□

Exemplul 6.24 Să calculăm valorile aproximative cu ajutorul formulei Simpson şi să evaluăm integrala

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x},$$

cu $n = 10$.

Soluţie.

i	x_i	y_{2j-1}	y_{2j}
0	0		1,00000
1	0,1	0,90909	
2	0,2		0,83333
3	0,3	0,76923	
4	0,4		0,71429
5	0,5	0,66667	
6	0,6		0,62500
7	0,7	0,58824	
8	0,8		0,55556
9	0,9	0,52632	
10	1		0,50000
Σ		3,45955	2,72818

$$I \approx \frac{0,1}{3}(1,00000 + 0,500000 + 4 \cdot 3,45955 + 2 \cdot 2,72818) = 0,69315$$

Distingem 2 feluri de erori:

1. Erori de rotunjire

$$R_{rot} = \sum_{i=0}^{n} A_i \varepsilon = \varepsilon \sum_{i=0}^{n} A_i = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

Dar toate cifrele sunt rotunjite la a cincea zecimală şi sunt egale $\frac{1}{2}10^{-5}$.

2. Erori de metodă

$$y = \frac{1}{1+x}; y' = -\frac{1}{(1+x)^2}; y'' = \frac{2}{(1+x)^3};$$
$$y''' = -\frac{6}{(1+x)^4}; y^4 = \frac{24}{(1+x)^5}.$$

Dar

$$\max_{0 \le x \le 1} \left| y^{(4)} \right| = 24.$$

Deci

$$|R_2| < 1 \cdot \frac{(0,1)^4}{180} \cdot 24 = 1,3 \cdot 10^{-5}.$$

Deci eroarea va fi:

$$R = R_{rot} + R_2 = 0,5 \cdot 10^{-5} + 1,3 \cdot 10^{-5} = 1,8 \cdot 10^{-5} < 0,00002.$$

Deci:

$$I = 0,69315 \pm 0,00002.$$

6.7 Formula de cuadratură a lui Cebîşev

Pentru formula Newton - Côtes se folosesc puncte arbitrare, dar echidistante. Dacă însă se aleg anumite puncte de diviziune fără a mai impune altă condiţie, atunci se obţine formula de cuadratură Cebîşev.

Fie integrala

$$I = \int_{-1}^{1} f(t)dt \tag{6.95}$$

şi considerăm aproximarea

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} B_i f(t_i) \tag{6.96}$$

unde B_i sunt constante.

Alegerea punctelor t_i se face astfel încât să fie îndeplinite condiţiile
a) constantele B_i, $i = \overline{1, n}$ sunt egale între ele;
b) formula de cuadratură (6.96) este exactă pentru toate polinoamele pană la gradul n inclusiv;

Din prima condiţie avem

$$B_1 = B_2 = ... = B_n = B, \tag{6.97}$$

deci

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = B \sum_{i=1}^{n} f(t_i). \tag{6.98}$$

Punem $f\,(t) = 1$ şi avem

$$2 = nB \Rightarrow B = \frac{2}{n}. \tag{6.99}$$

Deci

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i). \tag{6.100}$$

Pentru a găsi abscisele t_i, vom ţine cont de condiţia (b) şi de relaţia (6.100), care ne spune că formula (6.98) trebuie să fie exactă pentru funcţii de forma $f\,(t) = t, t^2, ..., t^n$.
Introducând aceste funcţii în formula (6.100), obţinem sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2 = \frac{n}{3}, \\ t_1^3 + t_2^3 + \cdots + t_n^3 = 0, \\ t_1^4 + t_2^4 + \cdots + t_n^4 = \frac{n}{5}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_1^n + t_2^n + \cdots + t_n^n = \frac{n[1-(-1)^{n+1}]}{2(n+1)}. \end{cases} \tag{6.101}$$

Rezolvarea sistemului se reduce la determinarea rădăcinilor reale ale unor ecuaţii algebrice de gradul n.

S.N. Bernstein a demonstrat că pentru $n = 8$ şi $n \geq 10$ sistemul (6.101) nu admite rădăcini reale.

Exemplul 6.25 Să deducem formula Cebîşev cu trei abscise.

Soluţie.

Avem $n = 3$, astfel formula Cebîşev se scrie folosind relaţia (6.100)

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3} f(t_i).$$

Va trebui să determinăm cele trei abscise. Sciem sistemul (6.101)

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1, \\ t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 = 0. \end{cases}$$

Notăm cu S_1, S_2, S_3 sumele următoare

$$\begin{array}{l} S_1 = t_1 + t_2 + t_3, \\ S_2 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3, \\ S_3 = t_1 t_2 t_3, \end{array}$$

şi găsim valorile

$$S_1 = 0,$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\left[(t_1 + t_2 + t_3)^2 - \left(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2\right)\right] = \frac{1}{2}(0 - 1) = -\frac{1}{2},$$

$$S_3 = \frac{1}{6}\left[(t_1 t_2 t_3)^3 - 3(t_1 + t_2 + t_3)\left(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2\right) + 2\left(t_1^3 + t_2^3 + t_3^3\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}(0 - 0 + 0) = 0.$$

Scriem ecuaţia de gradul al treilea

$$t^3 - S_1 t^2 + S_2 t - S_3 = 0$$

adică

$$t^3 - \frac{1}{2}t = 0$$

şi are soluţiile

$$t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, t_2 = 0, t_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deci formula de cuadratură se scrie:

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{3}\left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$$

Observaţia 6.26 Pentru a aplica formula de cuadratură Cebîşev integralei de forma

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \tag{6.102}$$

facem substituţia

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t, \tag{6.103}$$

care transformă intervalul $a \leq x \leq b$ în intervalul $-1 \leq t \leq 1$.
Aplicând formula (6.100) integralei transformate, se obţine

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{6.104}$$

unde

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i, \quad i = 1, ..., n. \tag{6.105}$$

Exemplul 6.27 Să calculăm integrala $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$ cu formula Cebîşev cu 5 ordonate.

Soluţie.
Notăm $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Cu formula (6.104) avem

$$I = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = \frac{1}{5}\left[f(x_1) + \cdots + f(x_5)\right].$$

Cu relaţia (6.105) calculăm x_i, $i = \overline{1,5}$.

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-0,83250) = 0,08375,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-0,37454) = 0,31273,$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0,5,$$

$$x_4 = 1 - x_2 = 0,68727,$$

$$x_5 = 1 - x_1 = 0,91625.$$

Determinăm acum $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{1,5}$.

$$y_1 = 0,0773,$$

$$y_2 = 0,2382,$$

$$y_3 = 0,3333,$$

$$y_4 = 0,4073,$$

$$y_5 = 0,4781.$$

Astfel integrala noastră are valoarea

$$I = \frac{1}{5} \cdot 1,5342 = 0,3068.$$

6.8 Formula de cuadratură a lui Gauss

Pentru început vom prezenta forma şi proprietăţile polinoamelor Legendre.

Definiţia 6.28 Polinomul de forma

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \cdot \left[\left(x^2 - 1\right)^n\right], \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{6.106}$$

poartă numele de **polinomul Legendre**.

Teorema 6.29 *Polinoamele Legendre au următoarele proprietăţi*

1. $\_P_n(1) = 1$;
2. $P_n(-1) = (-1)^n$;
3. $\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot Q_k(x)\, dx = 0, k < n$;

4. Polinomul $P_n(x)$ are toate rădăcinile reale (n rădăcini), care sunt cuprinse în intervalul $(-1,1)$*;*

Demonstraţie.

1. Vom scrie polinomul Legendre dat de (6.106) cu formula lui Leibniz. Fie

$$y = u(x)\, v(x)\,, \tag{6.107}$$

$$y^{(n)} = (uv)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)} =$$
$$= u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v^1 + C_n^2 u^{(n-2)} v^2 + \dots + uv^n. \tag{6.108}$$

Considerăm

$$u = (x-1)^n\,, \quad v = (x+1)^n \tag{6.109}$$

astfel că

$$uv = (x+1)^n (x-1)^n\,. \tag{6.110}$$

Deci

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \left[(x+1)^n \cdot \frac{d^n (x-1)^n}{dx^n} + \right.$$
$$\left. + C_n^1 \cdot \frac{d(x+1)^n}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{d^n (x+1)^n}{dx^n} \cdot (x-1)^n \right]. \tag{6.111}$$

Deoarece toţi termenii începând cu al doilea admit factorul $(x-1)$ rezultă că toţi aceşti termeni sunt egali cu 0 pentru $x = 1$.

Deci

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} \cdot 2^n n! = 1. \tag{6.112}$$

2. Repetăm procedeul pentru $x = -1$ dar de data aceasta singurul termen nenul este ultimul.
Deci

$$P_n(-1) = \frac{1}{2^n n!} \cdot n! \cdot (-2)^n = (-1)^n\,. \tag{6.113}$$

3. Fie u, v două funcţii continue, cu derivatele lor continue. Atunci formula de intergrare prin părţi generalizată este

$$\int_a^b uv^{(n+1)} dx =$$

$$= \left[uv^{(n)} - u^{1}v^{(n-1)} + \cdots + (-1)^{n} u^{(n)}v\right]\Big|_{a}^{b} + (-1)^{n+1}\int_{a}^{b} u^{(n+1)}v dx. \quad (6.114)$$

Ne propunem să găsim polinomul $X_n(x)$ de gradul n, astfel încât pentru un polinom oarecare $Q(x)$ de grad strict mai mic ca n să fie satisfăcută egalitatea

$$\int_{a}^{b} X_n(x)\, Q(x)\, dx = 0 \quad (6.115)$$

a şi b oarecare, dar fixe.

Observaţia 6.30 Orice polinom $X_n(x)$ de gradul n poate fi considerat ca derivata de ordinul n a unui polinom $R(x)$ de gradul $2n$, care se obţine prin n integrări succesive.

Observaţia 6.31 Dacă la fiecare integrare se alege constanta arbitrară astfel încât pentru $x = a$ integrala să devină zero, atunci $R(x)$ va trebui să satisfacă condiţiile

$$\begin{cases} R(a) = 0, \\ R'(a) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ R^{(n-1)}(a) = 0. \end{cases} \quad (6.116)$$

Deci problema se reduce la determinarea unui polinom de gradul $2n$ astfel încât să avem

$$\int_{a}^{b} R^{(n)}(x)\, Q(x)\, dx = 0 \quad (6.117)$$

pentru un polinom $Q(x)$ de grad strict mai mic ca n care satisface şi relaţia (6.116).

Înlocuind în formula integrării prin părţi pe n cu $n-1$ avem

$$\int_{a}^{b} R^{(n)}(x)\, Q(x)\, dx =$$
$$= \left[Q(x)\, R^{(n-1)}(x) - Q'(x)\, R^{(n-2)}(x) + \cdots + Q^{(n-1)}(x)\, R(x)\right] \pm$$
$$\pm \int_{a}^{b} Q^{(n)} R(x)\, dx. \quad (6.118)$$

Dar ultima integrală este egală cu zero deoarece grad $Q < n$. Deci avem

$$Q(b)\, R^{(n-1)}(b) - Q'(b)\, R^{(n-2)}(b) + \cdots + Q^{(n-1)}(b)\, R(b) = 0. \quad (6.119)$$

Având în vedere caracterul absolut arbitrar al polinomului $Q(x)$ putem lua

$$R(b) = R'(b) = \cdots = R^{(n-1)}(b) = 0. \tag{6.120}$$

Din egalităţile (6.116) şi (6.120) rezultă că polinomul $R(x)$ are numerele a şi b rădăcini multiple de ordinul n, adică

$$X_n(x) = C_n \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^n (x-b)^n\right] \tag{6.121}$$

şi luând pe $a = 1$şi $b = -1$, obţinem pentru

$$C_n = \frac{1}{2^n n!}$$

chiar polinomul Legendre.
Deci avem

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, Q(x)\, dx = 0 \tag{6.122}$$

şi mai mult dacă $m \neq n$ rezultă că

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0. \tag{6.123}$$

4. Observăm că polinomul $(x^2-1)^n = (x-1)^n (x+1)^n$ şi cele $n-1$ derivate succesive se anulează pentru $x = \pm 1$. Atunci prima derivată, după teorema lui Rolle, va admite o rădăcină reală în intervalul $(-1, 1)$. Folosind aceeaşi teoremă, a doua derivată va admite două rădăcini reale, şi în final a $(n-1)$ derivată va admite $(n-1)$ rădăcini reale. Aplicând în final, încă o dată teorema lui Rolle, rezultă că $P_n(x)$ are pe intervalul $(-1, 1)$ n rădăcini reale. □

Exemplul 6.32 Să generăm acum polinoame Legendre până la $n = 4$.
Soluţie.

$$P_0(x) = 1;$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2 \cdot 1}\left(x^2-1\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 \cdot 2!}\left[\left(x^2-1\right)^2\right]'' = \frac{1}{8}\left[4x\left(x^2-1\right)\right]' = \frac{1}{2}\left(x^3-x\right)' = \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right).$$

Fie $y = f(t)$ unde

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}. \tag{6.124}$$

Printr-o schimbare de variabilă, cazul general se aduce la intervalul $[-1, 1]$.
Se doreşte să se determine punctele

$$t_1, t_2, ..., t_n \tag{6.125}$$

şi coeficienţii

$$A_1, A_2, ..., A_n \tag{6.126}$$

astfel ca formula de cuadratură

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) \tag{6.127}$$

să fie exactă pentru orice polinom $f(t)$ de grad N, cât mai mare posibil. Deoarece avem $2n$ necunoscute t_i, A_i, $i = 1, ..., n$ atunci polinomul trebuie să fie de gradul $2n - 1$deoarece acesta este unic determinat de $2n$ coeficienţi. Deci

$$N = 2n - 1. \tag{6.128}$$

Pentru a avea egalitatea (6.127) trebuie ca ea să fie verificată pentru funcţiile

$$f(t) = 1, t, t^2, ..., t^{2n-1}. \tag{6.129}$$

Într-adevăr punând

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k, \quad k = 0, 1, ..., 2n - 1 \tag{6.130}$$

şi

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t^k \tag{6.131}$$

avem

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \left(\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i \left(\sum_{k=0}^{2n-1} C_k t_i^k \right) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(t_i)\,. \tag{6.132}$$

Ţinând cont de relaţiile

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \frac{2}{k+1}, & \text{pentru } k \text{ par,} \\ 0, & \text{pentru } k \text{ impar,} \end{cases} \tag{6.133}$$

rezultă sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i = 2, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1}, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-1} = 0. \end{cases} \tag{6.134}$$

Acest sistem este neliniar şi prezintă dificultăţi pentru rezolvarea sa cu metode obişnuite. Pentru a rezolva acest sistem vom folosi următoarele artificii.

Fie polinomul

$$f(t) = t^k P_n(t)\,, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{6.135}$$

unde $P_n(t)$ este polinomul Legendre. Gradul acestui polinom nu depăşeşte $2n-1$şi trebuie să verifice sistemul (6.134). Deci

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i)\,, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{6.136}$$

Pe de altă parte din ortogonalitatea polinoamelor Legendre (vezi proprietăţi), avem

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)\, dt = 0 \;\text{ pentru }\; k < n \tag{6.137}$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) = 0 \text{ pentru } k = \overline{0, n-1}. \tag{6.138}$$

Dacă punem $P_n(t_i) = 0$ pentru $i = \overline{1, n}$ egalităţile (6.138) vor fi adevărate oricare ar fi valorile A_i. Din proprietatea (6.109) a polinomului Legendre rezultă că toate rădăcinile sunt reale, distincte, cuprinse în intervalul $(-1, 1)$. Cunoscând aceste rădăcini şi pornind de la sistemul liniar al primelor n necunoscute ale sistemului (6.134) putem găsi cu uşurinţă constantele A_i cu $i = \overline{1, n}$.
Determinantul acestui sistem este Vandermonde

$$D = \prod_{i>j} (t_i - t) \neq 0 \tag{6.139}$$

şi deci determinarea lui A_i este unică.

Observaţia 6.33 Se poate demonstra că formulele

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i)$$

sunt exacte pentru orice polinom de grad mai mic sau egal cu $2n - 1$.

Exemplul 6.34 Să se deducă formula Gauss în cazul a trei ordonate.

Soluţie.

Polinomul Legendre de gradul trei este

$$P_3(t) = \frac{1}{2^3 3!} \cdot \frac{d^3}{dt^3} \left[(t-1)^3 \right] = \frac{1}{48} \cdot \frac{d^3}{dt^3} \left(t^6 - 3t^4 + 3t^2 + 1 \right) = \frac{1}{48} \left(120t^3 - 72t \right) \Rightarrow$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2} \left(5t^3 - 3t \right).$$

Din ecuaţia $P_3(t) = 0$ găsim rădăcinile

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0,774597;$$

$$t_2 = 0;$$

$$t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0,774597.$$

Pentru a determina coeficienţii A_1, A_2si A_3 avem sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \quad A_3 = 2, \\ -\sqrt{\frac{3}{5}A_1} \quad + \sqrt[3]{\frac{3}{5}}A_3 = 0, \\ \frac{3}{5}A_1 \quad + \frac{3}{5}A_3 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

De unde avem soluţiile

$$\begin{cases} A_1 = A_3 = \frac{5}{9}, \\ A_2 = \frac{8}{9}. \end{cases}$$

Astfel, formula Gauss cu trei ordonate este

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right].$$

Observaţia 6.35 Inconvenientul acestei formule este faptul că abscisele sunt în general numere iraţionale.

Observaţia 6.36 Precizia ridicată este un avantaj al formulei, dacă avem un număr de ordonate relativ mic.

Consecinţa 6.37 Calculul integralei $\int_a^b f(x)\,dx$ prin formula lui Gauss.

Facem schimbarea de variabilă

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t \tag{6.140}$$

si avem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt. \tag{6.141}$$

Aplicând ultimei relaţii formula lui Gauss avem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \tag{6.142}$$

unde

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{6.143}$$

t_i fiind rădăcinile polinoamelor Legendre $P_n(t)$.

Se demonstrează că formula lui Gauss cu n puncte generează restul

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3(2n+1)}, \quad n=\overline{2,n}. \tag{6.144}$$

De exemplu pentru două, respectiv trei puncte, formula lui Gauss generează resturile

$$R_2 = \frac{1}{135}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi), \tag{6.145}$$

$$R_3 = \frac{1}{15750}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(6)}(\xi). \tag{6.146}$$

Exemplul 6.38 Să calculăm integrala $I=\int_0^1 \sqrt{1+2x}dx$**.**

Soluţie.

Avem $a=0$ şi $b=1$. Cele trei abscise, cu 5 zecimale, sunt

$$x_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_1 = 0,11270,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_2 = 0,50000,$$

$$x_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_3 = 0,88730.$$

Deci coeficienţii formulei de cuadratură vor fi

$$C_1 = \frac{b-a}{2}A_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{18} = 0,27778$$

$$C_2 = \frac{b-a}{2}A_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9} = 0,44444$$

$$C_3 = \frac{b-a}{2}A_3 = 0,27778$$

i	x_i	y_i	C_i	C_iy_i
1	0,11270	1,10698	0,27776	0,30747
2	0.50000	1.41421	0.44444	0.62853
3	0.88730	1.66571	0.27778	0.46270
$\sum$				1.39870

$$I = \sum_{i=1}^{3} C_i y_i = 1,39870.$$

Valoarea exactă a integralei este$I = \sqrt{3} - \frac{1}{3} = 1,39872$.
Folosim relaţia (6.146) pentru a calcula restul şi avem

$$R_3 = \frac{1}{15750} \left(\frac{b-a}{2} \right)^7 f^{(6)}(\xi).$$

Calculăm $f^{(6)}(x)$.

$$f(x) = \sqrt{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$f^{(6)}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)(1+2x)^{\frac{-11}{2}} \cdot 2^6 =$$

$$= -945\,(1+2x)^{\frac{-11}{2}}.$$

Rezultă că

$$\max\left|f^{(6)}(x)\right| = -945, x \in [0,1].$$

Eroarea va fi

$$\varepsilon = |R_3| \leq \frac{945}{15750}\left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx \frac{1}{2000} = 2 \cdot 10^{-3}.$$

Bibliografie

[1] Ancău, M., Ancău, D.M., *Metode Numerice*, U.T. Press, Cluj-Napoca, 2011.

[2] Asadurian, E., Dumitrache, M., *Matematici pentru ingineri: Geometrie analitică şi algebră liniară*, Editura Tiparg, Piteşti, 2011.

[3] Asadurian, E., Dumitrache, M., *Matematici pentru ingineri: Geometrie analitică. Algebră liniară. Geometrie diferenţială*, Editura Tiparg, Piteşti, 2012.

[4] Babescu, Gh., Stan, I., Anghelescu, R., Kovacs, A., Tudor, Gh., Filipescu, A., *Analiză numerică*, Editura Politehnica, Timişoara, 2000.

[5] Hadăr, A., Petre, C., Marin, C., Voicu, A., *Metode numerice în inginerie*, Politehnice Press, Bucureşti, 2004.

[6] Iorga, V., Jora, B., *Metode numerice*, Editura Albastră, CityplaceCluj-Napoca, 2004.

[7] Mariş, S., Brăescu, L., *Metode Numerice. Probleme de seminar şi lucrări de laborator*, Timişoara, 2007.

[8] Radovici-Mărculescu, P., Deaconu, L., *Analiză numerică*, Editura Universităţii din placeCityPiteşti, 1998.

[9] Roşca, I., *Elemente de analiză numerică matriceală*, Editura Fundaţiei România de mâine, Bucureşti, 2001.

[10] Stănescu N. D., *Metode numerice*, Editura Didactică şi Pedagogică R. A., Bucureşti, 2007.

[11] Udrişte, C., Iftode, V., Postolache, M., *Metode numerice de calcul*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1996.