Cursul 5 Bazele Electrotehnicii & Electrotehnică

CAPITOLUL 3. CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM STAȚIONAR

3.1. Reguli de asociere pentru tensiune și curent

Elementele dipolare de circuit sunt fie generatoare fie receptoare și pentru fiecare există reguli de asociere pentru tensiune și curent după cum urmează:

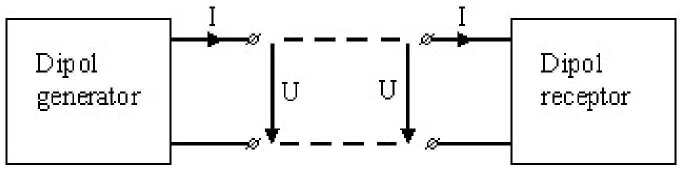


Fig. 3.1

La dipolul generator, U și I se urmează ca sens pe un contur închis iar la un dipolul receptor U și I au sensuri opuse pe un contur închis.

3.2 Elemente de circuit (generatoare/receptoare)

Elementele de circuit ale unei rețele electrice de curent continuu (c.c.) sunt sursele de energie și rezistoarele electrice.

Mărimile electrice care intervin în studiul circuitelor electrice de c.c. sunt:

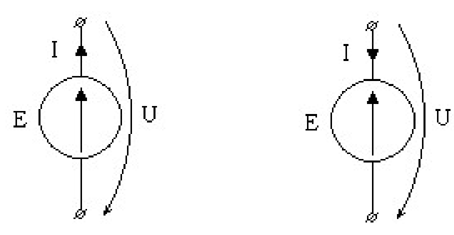
- tensiunea electromotoare “E”;
- căderea de tensiune sau tensiunea electrică “U”;
- intensitatea curentului electric “I”;
- puterea electrică “P”;

Observație: În curent continuu mărimile se notează cu litere mari .

3.2.1 Elemente active independente (elemente care generează energie). Scopul lor este de stabilire și întreținere a regimului electrocinetic.

a). Sursă ideală independentă de tensiune (SIIT)

E - tensiunea electromotoare a sursei, U - căderea de tensiune, I - intensitatea curentului electric pe latură



a. generatoare b. receptoare

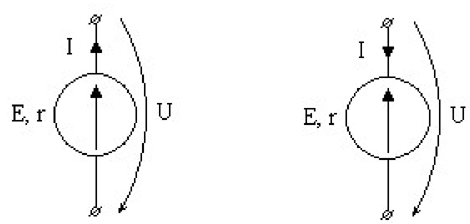
Fig. 3.1 SIIT

$$U = E \tag{3.1}$$

Obs. *Tensiunea la bornele unei surse de tensiune ideale este egală cu tensiunea electromotoare a sa, indiferent dacă aceasta este în gol sau în sarcină (până la curentul maxim admis).*
Ex. *Se consideră o sursă de tensiune continuă stabilizată de 30V care poate debita maxim 5A. Se conectează la bornele sale un rezistor prin care va trece un curent de 3A.*
Tensiunea la bornele sursei ideale va fi de 30V, aceeași care se va aplica și la bornele rezistorului.

b). Sursă reală independentă de tensiune (SRIT)

E - tensiunea electromotoare a sursei, U - căderea de tensiune, I - intensitatea curentului electric pe latură, r – rezistența internă



a. generatoare b. receptoare
Fig. 3.2 SRIT

Pentru SRIT generatoare căderea de tensiune la bornele sale va fi:

$$U = E - r \cdot I \tag{3.2}$$

Pentru SRIT receptoare căderea de tensiune la bornele sale va fi:

$$U = E + r \cdot I \tag{3.3}$$

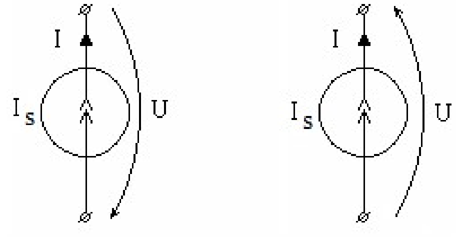
Obs. *Un exemplu practic, ușor de înțeles, este considerând drept sursă reală de tensiune o baterie de acumulatoare cu tensiunea electromotoare E=24V și rezistența internă r=0,1Ω .*

Atunci când bateria este în regim de generator și debitează un curent, de exemplu, de 2A, ea va avea la borne o tensiune, $U = 24 - 0{,}1 \cdot 2 = 23{,}8\,V$*, care se va aplica la bornele consumatorului, adică mai mică decât tensiunea electromotoare proprie de 24V.*

Dacă bateria este în regim de receptor și se încarcă de la un încărcător la un curent permis, de exemplu, de 2A, ea va necesita la borne o tensiune, $U = 24 + 0{,}1 \cdot 2 = 24{,}2\,V$*, deci mai mare decât tensiunea electromotoare proprie de 24V.*

c). Sursă ideală independentă de curent (SIIC)

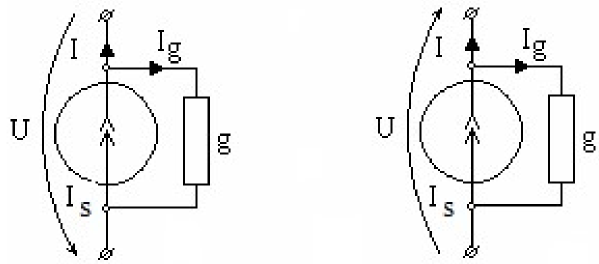
I_s – intensitatea curentului sursei, U - căderea de tensiune, I - intensitatea curentului electric pe latură; $I=I_s$



a. generatoare b. receptoare
Fig. 3.3 SIIC

d). Sursă reală independentă de curent (SRIC)

I_s – intensitatea curentului sursei, U - căderea de tensiune, I - intensitatea curentului electric pe latură, g – conductanța internă, I_g - intensitatea curentului electric prin conductanță



a. generatoare b. receptoare

Fig. 3.4 SRIC

Pentru SRIC generatoare:

$$I_s = I + I_g \tag{3.4}$$

$$I_g = U \cdot g \tag{3.5}$$

$$I = I_s - U \cdot g \tag{3.6}$$

3.2.2 Elemente active comandate (sunt ideale)

a). Sursă de tensiune comandată în tensiune (STCT)

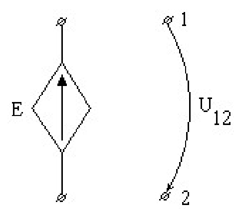


Fig. 3.5 STCC

$$E = \alpha_{12} \cdot U_{12} \tag{3.7}$$

α_{12} - coeficient de transfer în tensiune între latura comandată și latura de comandă

b). Sursă de tensiune comandată în curent (STCC)

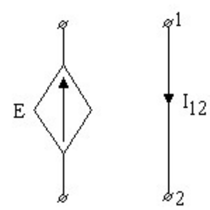


Fig. 3.6 STCC

$$E = r_{12} \cdot I_{12} \tag{3.8}$$

r_{12} - rezistența de transfer între latura comandată și latura de comandă.

Atenție! *r_{12} nu este rezistență internă (pe care să cadă o tensiune sau să se consume o putere) – sursele comandate sunt ideale!*

c). Sursă de curent comandată în tensiune (SCCT)

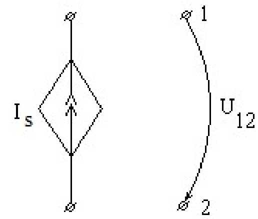


Fig. 3.7 SCCT

$I_s = g_{12} \cdot U_{12}$ (3.9)

g_{12} - conductanța de transfer între latura comandată și latura de comandă

d). Sursă de curent comandată în curent (SCCC)

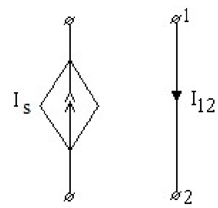


Fig. 3.8 SCCT

$I_s = \beta_{12} \cdot I_{12}$ (3.10)

β_{12} - coeficient de transfer în curent între latura comandată și latura de comandă

3.2.3 Elemente pasive

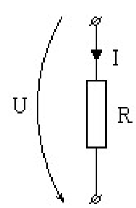


Fig. 3.9 Rezistor

$U = R \cdot I$ (3.11)

R= rezistența rezistorului

3.3 Teoremele lui Kirchhoff (TK)

3.3.1 Prima teoremă a lui Kirchhoff (TK I)

Se referă la intensitățile curenților și se aplică în noduri.

Enunț:Suma algebrică a intensitații curenților laturilor dintr-un nod de rețea este nulă.(Se iau cu semnul plus curenții care ies din nod și cu semnul minus curenții care intră în nod).

$\sum_{k \in a} \pm I_k = 0$ (3.12)

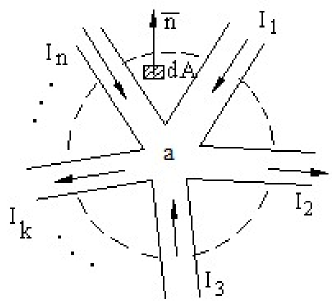


Fig. 3.10 Nod de circuit electric

Din legea conservări sarcinii electrice libere, în electrocinetică:

$$\left.\begin{aligned} i_\Sigma &= -\frac{dq_\Sigma}{dt} \\ q_\Sigma &= const. \end{aligned}\right\} \Rightarrow i_\Sigma = 0 \Rightarrow \oint_\Sigma \overline{J}\,\overline{dA} = 0 \tag{3.13}$$

$$\int_{S_1} \overline{J_1}\,\overline{dA} + \int_{S_2} \overline{J_2}\,\overline{dA} + \int_{S_3} \overline{J_3}\,\overline{dA} + ... + \int_{S_k} \overline{J_k}\,\overline{dA} + ... + \int_{S_n} \overline{J_n}\,\overline{dA} = 0 \tag{3.14}$$

$$-I_1 + I_2 - I_3 + ... + I_k + ... - I_n = 0 \tag{3.15}$$

$$\sum_{k \in a} \pm I_k = 0$$

3.3.2 A doua teoremă a lui Kirchhoff(TK II)

Se referă la tensiuni și se aplică pe ochiurile circuitului.

Enunț: Suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor în lungul unui ochi de rețea este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune din laturile ochiului.

$$\sum_{k \in O} \pm E_k = \sum_{k \in O} \pm R_k I_k \tag{3.16}$$

În care se ia semnul *plus* dacă sensul de parcurgere al ochiului coincide cu sensul surselor de tensiune electromotoare și cu sensul căderilor de tensiune (sau a intensităților curenților din laturile circuitului) și semnul *minus* în caz contrar.

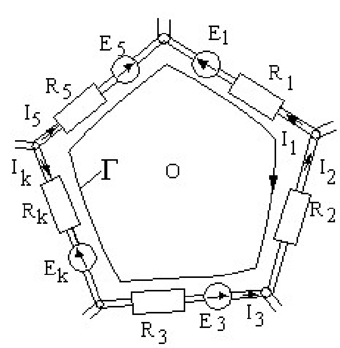


Fig. 3.11 Ochi de circuit electric în c.c.

Se efectuează integrala pe o curbă închisă (Γ), pornind de la forma locală a legii conducției electrice:

$$\left.\begin{array}{l}\oint_{\Gamma}(\overline{E}+\overline{E_i})\overline{dl}=\oint_{\Gamma}\rho\cdot\overline{J}\cdot\overline{dl}\\ \oint_{\Gamma}\overline{E}\cdot\overline{dl}=0\end{array}\right. \Rightarrow \oint_{\Gamma}\overline{E_i}\,\overline{dl}=\oint_{\Gamma}\rho\cdot\overline{J}\cdot\overline{dl} \tag{3.17}$$

$$-E_1-E_3+E_k+E_5=-R_1I_1-R_2I_2-R_3I_3+R_kI_k+R_5I_5 \tag{3.18}$$

$$\sum_{k\in O}\pm E_k=\sum_{k\in O}\pm R_k\cdot I_k \tag{3.19}$$

Mai general se poate scrie:

$$\sum_{k\in O}\pm E_k=\sum_{k\in O}\pm R_kI_k+\sum_{k\in O}\pm r_kI_k+\sum_{k\in O}\pm U_{gk}+\sum_{k\in O}\pm U_k \tag{3.20}$$

U_{g_k} - tensiunea la bornele surselor de curent

Algoritm de rezolvare a problemelor de curent continuu utilizând teoremele lui Kirchhoff

1. Se stabilește numărul de noduri n, numărul de laturi l, și rezultă numărul de ochiuri independente ale circuitului, cu relația lui Euler, $o=l-n+1$.
2. Se aleg sensuri arbitrare ale intensităților curenților prin laturile circuitului și sensuri arbitrare ale tensiunilor la bornele surselor de curent. Se aleg sensuri arbitrare de parcurgere a celor "o" ochiuri independente.
3. Se aplică teoremele lui Kirchhoff. Prima teoremă se aplică în "$n-1$" noduri. A doua teoremă se aplică pe cele "o" ochiuri independente.
4. Se obține un sistem liniar de “l” ecuații, care se rezolvă.

Verificarea soluțiilor obținute:

1. Se aplică T.K. I în al “n-lea” nod, pentru n>2. Se aplică T.K. II pe toate ochiurile neutilizate.
2. Se efectuează bilanțul puterilor.

Interpretarea soluțiilor:

Pentru mărimile care au valori negative (intensități ale curenților prin laturile circuitului și tensiuni la bornele surselor de curent) se precizează că sensul real este opus celui ales în mod arbitrar.

3.4 Teorema conservări puterilor în circuitele de curent continuu. Bilanțul puterilor

Această teoremă se poate enunța în două moduri:

a). Suma algebrică a puterilor, primite de toate laturile rețelei prin bornele lor, este nulă pentru o rețea izolată:

$$\sum_{k=1}^{l}\pm U_{bk}I_k=0 \tag{3.21}$$

relația fiind scrisă pentru toate laturile circuitului cu convenția de la receptoare.

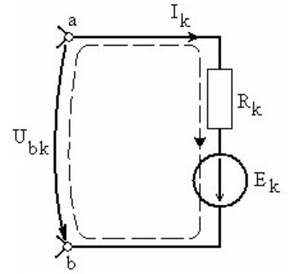


Fig. 3.12 Latură activă receptoare de circuit

b). Suma algebrică a puterilor debitate de sursele din rețea este egală cu suma puterilor disipate în rezistențele laturilor.

$$\sum_{k=1}^{l} \pm E_k I_k = \sum_{k=1}^{l} R_k I_k^2 \tag{3.22}$$

Demonstrație:

Se consideră latura activă din figura 3.13 pentru care se scrie, conform convenției de la receptoare:

$$E_k = R_k I_k - U_{bk} \tag{3.23}$$

Dacă se înmulțește relația (3.23) cu I_k rezultă bilanțul energetic al laturii:

$$E_k I_k = R_k I_k^2 - U_{bk} I_k \tag{3.24}$$

$$E_k I_k + U_{bk} I_k = R_k I_k^2 \tag{3.25}$$

$P_{gk} = E_k I_k$ - puterea debitată de sursă

$P_{bk} = U_{bk} I_k$ - puterea primită pe la borne

$P_{Rk} = R_k I_k^2$ - puterea disipată pe rezistență

Se aplică în continuare prima teoremă a lui Kirchhoff unui nod oarecare a și se multiplică ecuația cu potențialul V_a al acelui nod. Se consideră apoi suma tuturor ecuațiilor scrise pentru toate nodurile:

$$\sum_{k \in a} \pm I_k = 0, \quad | \cdot V_a, \quad \sum_{a=1}^{n}$$

$$\sum_{a=1}^{n} V_a \sum_{k \in a} \pm I_k = 0 \tag{3.26}$$

În această suma dublă fiecare curent I_k va apare de două ori, fiind multiplicat pe rând cu fiecare din cele două potențiale de la bornele laturii k, intervenind o dată cu semnul $(+)$ când iese din nod și altă dată cu semnul $(-)$ când intră în nod. Prin urmare suma dublă extinsă la numărul de noduri se poate transforma într-o sumă simplă extinsă la numărul de laturi astfel:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{l} \pm (V_a - V_b) I_k = 0 \\ &dar \quad V_a - V_b = U_{bk} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{l} \pm U_{bk} I_k = 0 \tag{3.27}$$

Din relația (3.25), însumând pentru l laturi se obține:

$$\sum_{k=1}^{l} E_k I_k + \sum_{k=1}^{l} U_{bk} I_k = \sum_{k=1}^{l} R_k I_k^2 \tag{3.28}$$

Din relațiile (3.27) și (3.28) se obține:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{l} E_k I_k}_{putere\_generata} = \underbrace{\sum_{k=1}^{l} R_k I_k^2}_{putere\_consumata} \tag{3.29}$$

sau $P_g = P_c$, numită și **bilanțul puterilor (B.P.)** (3.30)

Observație: Generalizând relația (3.30) și pentru laturi ce conțin surse de tensiune în regim de receptor și surse de curent în regim de generator se obține:

$$\sum_{k=1}^{l} \pm E_k I_k + \sum_{k=1}^{l} \pm U_{gk} I_{sk} = \sum_{k=1}^{l} R_k I_k^2 + \sum_{k=1}^{l} r_k I_k^2 \tag{3.31}$$

3.5 Transformarea schemelor circuitelor liniare de curent continuu

Pentru a simplifica studiul și rezolvarea circuitelor complexe de curent continuu se recurge la transformare și înlocuirea schemelor complicate cu altele mai simple, dar echivalente.

Pentru ca două circuite să fie echivalente este necesar ca tensiunile între noduri și curenții ce intra în noduri să fie neschimbate.

3.5.1 Grupare rezistoarelor:

a) Gruparea serie:

La gruparea serie rezistoarele sunt plasate unul după altul, fiind parcurse de același curent.

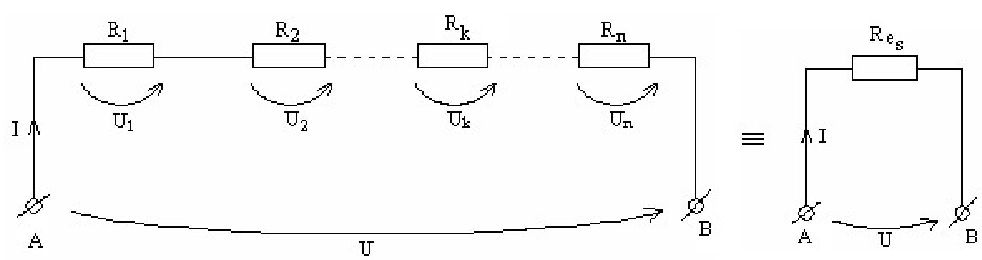


Fig. 3.14

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_k + \ldots + U_n \tag{3.39}$$

Dar $U_1 = R_1 I,\quad U_2 = R_2 I,\quad \ldots\quad U_k = R_k I,\quad \ldots\quad U_n = R_n I$ (3.40)

Rezultă: $U = (R_1 + R_2 + \cdots + R_k + \ldots + R_n) I$

Dar, $R_{es} = \dfrac{U}{I} = R_1 + R_2 + \cdots + R_k + \ldots + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k$

$$R_{es} = \sum_{k=1}^{n} R_k \tag{3.41}$$

Observație: $R_{es} > R_k, \quad \forall k = \overline{1,n}$

b) Gruparea paralel (derivaţie)

La gruparea paralel rezistoarele au aceeaşi tensiune la borne.

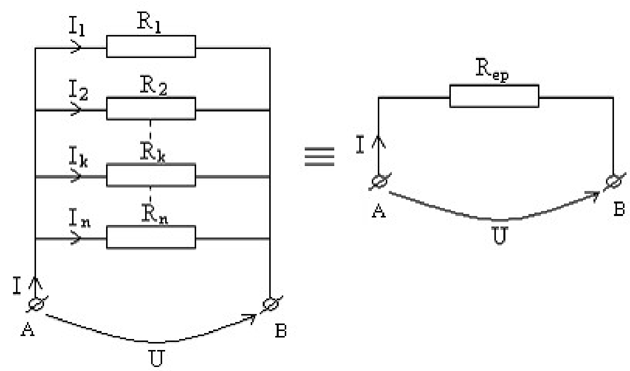


Fig. 3.15

$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_k + \ldots I_n$

Dar:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2}, \quad \ldots \quad I_k = \frac{U}{R_k}, \quad \ldots \quad I_n = \frac{U}{R_n}$$

Rezultă:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \ldots + \frac{U}{R_k} + \ldots + \frac{U}{R_n} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_k} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right)U \qquad (3.44)$$

Dar $R_{ep} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_k} + \ldots + \frac{1}{R_n}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}$

$$R_{ep} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}} \qquad (3.45)$$

Observaţie: $R_{ep} < R_k, \quad \forall k = \overline{1,n}$

Pentru conductanţa echivalentă a grupării se poate scrie:

$$G_{ep} = \sum_{k=1}^{n} G_k \qquad (3.46)$$

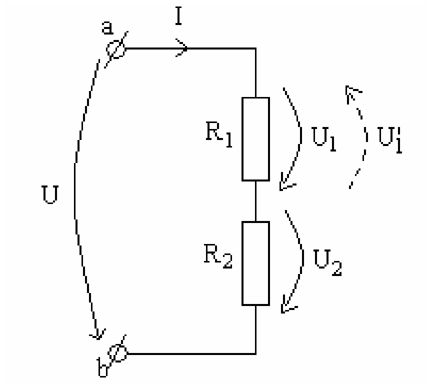
3.5.1 Gruparea rezistoarelor – Aplicaţii

a. Gruparea serie

$R_{es} = \sum_{k=1}^{n} R_k, \quad R_{es} > R_k, \quad \forall k = \overline{1,n}$

Aplicaţie: Divizorul de tensiune

Dacă există două rezistoare conectate în serie, cunoscând tensiunea aplicată la borne, se pot determina căderile de tensiune la bornele fiecărui rezistor în parte, fără a mai fi nevoie să se calculeze curentul.



Curentul prin rezistor este:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2},$$

iar căderile de tensiune la bornele rezistoarelor vor fi:

$$U_1 = R_1 I = R_1 \frac{U}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = R_2 I = R_2 \frac{U}{R_1 + R_2}$$

Pentru un divizor de tensiune cu *n* rezistoare, se poate generaliza:

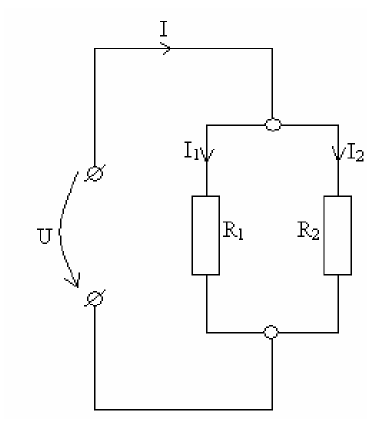
$$U_k = R_k \frac{U}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} = R_k \frac{U}{\sum_{k=1}^{n} R_k}, \ \forall k = \overline{1,n}$$

b. Gruparea paralel (derivație)

$$R_{ep} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}, \ \ R_{ep} < R_k, \quad \forall k = \overline{1,n}$$

Aplicație: Divizorul de curent

Dacă există două rezistoare conectate în paralel, cunoscând intensitatea curentului total care le parcurge, se pot determina curenții prin cele două rezistoare, fără a fi nevoie să se calculeze tensiunea aplicată la bornele lor.



Tensiunea la bornele rezistoarelor este:

$$U = R_{ep} I = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I,$$

Atunci curentul prin fiecare rezistor va fi:

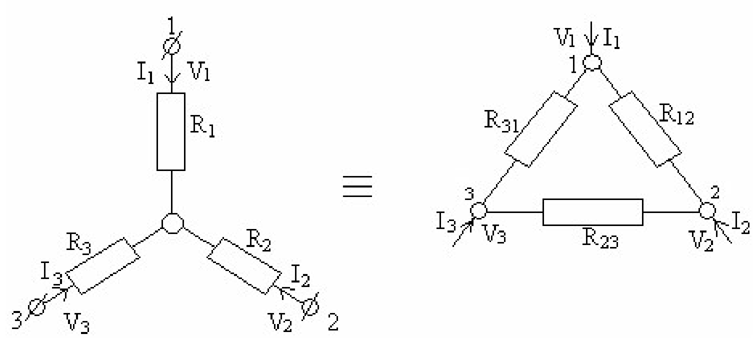
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

Pentru un divizor de curent cu *n* rezistoare, se poate generaliza:

$$I_k = \frac{1}{R_k} \frac{I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}} = \frac{1}{R_k} \frac{I}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}, \ \forall k = \overline{1,n}$$

c. Transfigurarea stea-triunghi și triunghi-stea



$R_{e12}^{\lambda} = R_{e12}^{\Delta}, \quad R_{e23}^{\lambda} = R_{e23}^{\Delta}, \quad R_{e31}^{\lambda} = R_{e31}^{\Delta}$

rezultă: $\begin{cases} R_1 + R_2 = \dfrac{R_{12}(R_{31} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 + R_3 = \dfrac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 + R_1 = \dfrac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{cases}$

La transfigurarea *stea-triunghi* se cunosc rezistențele $R_1, \quad R_2, \quad R_3$ și se determină $R_{12}, \quad R_{23}, \quad R_{31}$.

$R_{12} = \dfrac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$ ș.a.m.d.

La transfigurarea *triunghi-stea* se cunosc rezistențele $R_{12}, \quad R_{23}, \quad R_{31}$ și se determină $R_1, \quad R_2, \quad R_3$.

$R_1 = \dfrac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$ ș.a.m.d.