1. CALCULUL FENOMEN MATEMATIC ŞI INSTRUMENT INGINERESC

Mintea şi cultura omului au dezvoltat un sistem formal de gândire pentru modelarea naturii numit matematică, iar primul lucru la care ne gândim atunci când auzim acest cuvânt este noţiunea de *număr*.

Întreaga problematică a calculului matematic se sprijină pe un edificiu conceptual care implică două tipuri de obiecte matematice: *numărul* şi *operaţia*. Realitatea este o măsură perceptibilă a universului, accesibilă cunoaşterii umane prin mecanisme inteligente de reprezentare şi formalizare matematică. Formalismul matematic introduce alături de număr şi operaţie şi alte obiecte cum sunt cel de *funcţie* şi cel de *transformare*. Obiectele matematice însă nu au existenţă în lumea reală, ele fiind *abstracţii*.

În inginerie, modelele matematice sunt transformate în *metode pragmatice* utilizate ca instrumente de proiectare în diverse domenii, în care calculul numeric joacă un rol major. Calculul în sine este un *proces*, care reprezintă la rândul său tot o abstracţie. Acest proces decurge cu ajutorul obiectelor matematice fundamentale: număr, operaţie, funcţie, transformare.

Ca proces, calculul înseamnă prelucrare de date şi poate fi definit sub forma generică următoare:

Calcul=Algoritm+Date

Prin *algoritm* se înţelege aici *metoda numerică* ce stă la baza prelucrării datelor. Prin metodă numerică se înţelege o cale de obţinere a unui rezultat pe baza exclusiv a operaţiilor cu numere efectuate de regulă în paşi succesivi. Metodele numerice numite şi *metode aproximative* de rezolvare se definesc prin contrast cu *metodele analitice*, care sunt considerate metode *exacte* de rezolvare în sensul că nu necesită calcule repetitive. Cu alte cuvinte o soluţie analitică înseamnă o relaţie unică, globală care se calculează dintr-o dată, în timp ce soluţia numerică presupune existenţa unui set de relaţii parţiale, de regulă mai simple, care se calculează repetitiv furnizând progresiv soluţii aproximative. Asupra locului şi rolulului algoritmului ca etapă fundamentală în rezolvarea problemelor se va reveni mai pe larg în capitolul următor.

În rezolvarea oricărei probleme, componenta numerică se regăseşte în general sub forma unor *structuri de date*, care constituie bagajul iniţial (materia primă) supusă prelucrării de către algoritm.

1.1. Obiectele matematice fundamentale

Număr

Numărul este un concept fundamental în universul cunoaşterii umane. Pe baza numerelor poate fi cuantificată şi reprezentată realitatea înconjurătoare. Astfel, deşi numărul este un concept abstract, el contribuie tocmai la obiectivizarea reprezentărilor mentale ale naturii prin numărare şi măsurare. Altfel spus, prin număr se codifică la nivel mental cantitativ universul în care trăim. Prin urmare putem spune că numărul este o măsură a abstractizării specifică şi accesibilă doar intelectului uman.

Numărul în sine are asociat un *simbol* şi o *semnificație* intuitivă. Folosirea de simboluri pentru numere a debutat cu circa cinci mii de ani în urmă şi a evoluat din considerente practice la sistemul bazat pe *cifre* utilizat în prezent. Semnificația numerelor reprezintă unul dintre cele mai subtile aspecte ale intelectului uman datorită faptului că conceptul de număr a suferit extensii succesive, marcate de descoperirea unor clase tot mai largi de obiecte care îşi relevau utilitatea în practică. Astfel, avem intuitiv noțiunea de număr întreg natural care este cel mai simplu obiect folosit la numărat. Apoi, apariția numerelor raționale odată cu descoperirea fracțiilor a adus reprezentări intuitive interesante a ceea ce numim *parte dintr-un întreg* şi *subdiviziune*. Conceptul de *zero*, inventat mult mai târziu, ca nou tip de număr care semnifică ideea de "nimic" a reprezentat un moment esențial pentru aritmetică şi unul crucial în dezvoltarea matematicii. Pasul următor în extinderea conceptului de număr a fost descoperirea numerelor negative, cu semnificație intuitivă legată de datorii, sens de mişcare, caracterizarea unor mărimi situate sub nivelul considerat (convențional) ca fiind zero. Descoperirea numerelor iraționale, ca rezultat al unor operații ce nu se puteau reprezenta ca fracții exacte, (de pildă $\sqrt{2}$) a constituit o dezamăgire pentru grecii antici, dar a deschis viziunea către numerele reale. O nouă extensie în domeniul numerelor a pornit de la conceptul de rădăcină pătrată a numerelor negative şi a condus la descoperirea numerelor imaginare şi complexe. Astfel, se poate vorbi de cinci sisteme de obiecte ce desemnează numere, fiecare mai cuprinzător decât precedentul: numerele naturale, numerele întregi, numerele raționale, numerele reale şi numerele complexe. Aceste categorii de numere sunt clasificate sub forma binecunoscutelor mulțimi numerice. Noțiunile de număr şi mulțime numerică, ca şi cea de operație cu numere se capătă prin metode intuitive.

<u>Sisteme de numerație</u>

Un aspect interesant al conceptului de număr şi mai ales de numerație îl constituie reprezentarea în diferite baze. *Bazele de numerație* reprezintă metode de codificare cu diferite seturi de cifre semnificative. Sistemul zecimal, *baza zece* de numerație utilizează zece cifre semnificative $\{0,1,2,...,9\}$. Alături de acesta, considerente practice au impus sistemul *binar* (baza doi de numerație) cu cifrele $\{0,1\}$, sistemul *octal* (baza opt) cu cifrele semnificative $\{0,1,2,...,7\}$, sitemul *hexazecimal* (baza 16) cu setul cifric $\{0,1,2,...,9,A,B,C,D,E,F\}$ şi sitemul *sexagesimal* (baza 60 de numerație).

Operație

Operația este de asemenea un obiect fundamental al gândirii matematice. Adunarea, scăderea, înmulțirea şi împărțirea reprezintă *operațiile fundamentale*. Operația se referă la două sau la mai multe obiecte matematice (operanzii), pentru a se obține un al treilea obiect (rezultatul). Ca şi numerele, operațiile au fiecare asociat câte un simbol specific, respectiv un înțeles particular (semnificație intuitivă). Înțelesul propriuzis al fiecărei operații se bazează pe algoritmul propriu de manipulare a obiectelor numerice. Operațiile aritmetice fundamentale au algoritmi proprii specifici bazelor de numerație în care se lucrează.

Funcție

Funcția poate fi interpretată în sensul unei reguli care se aplică unui obiect matematic (de regulă un număr) căruia îi asociază un alt obiect. De pildă, pornind de la un număr şi extrăgând rădăcina sa pătrată se obține alt număr, caz în care se foloseşte obiectul funcție radical de ordinul doi. De cele mai multe ori, funcțiile sunt definite prin intermediul unor formule (expresii) algebrice, care reprezintă forme prescurtate, convenționale de scriere a regulilor respective. După cum se ştie, unele funcții au asociate simboluri consacrate.

Transformare

Transformarea, ca obiect matematic are acelaşi înțeles ca şi cel de funcție. Acest obiect semnifică însă reguli geometrice. De pildă, translația şi rotația sunt reguli geometrice consacrate, care se exprimă prin formule algebrice şi funcții trigonometrice.

1.2. Conceptul de eroare numerică în teoria măsurării

În general, calculele în inginerie au ca obiect numere reale ce caracterizează mărimi fizice măsurate, afectate inevitabil de un anumit grad de imprecizie. Măsurarea este o operație empirică şi conceptuală prin care se atribuie anumite valori numerice unor parametrii ai obiectelor şi proceselor.

Măsurarea este un proces de cunoaştere prin efectuarea de comparații, între mărimea dată şi unitatea de măsură sau unul din multiplii ori submultiplii săi. Rezultatul oricărei măsurători este o valoare numerică efectivă E, care arată de câte ori *mărimea* măsurată este mai mare sau mai mică decât o *unitate de măsură* convențională U, adică:

$$E = K \cdot U$$

unde K este un număr real (întreg sau zecimal) .

În procesul de măsurare, atât metoda de comparare cât şi unitatea de măsură în sine sunt susceptibile de a genera erori numerice.

a) Incertitudinea numerică

Considerând un număr real *x*, el poate fi înlocuit cu o valoare aproximativă a sa *a*. Eroarea comisă prin această înlocuire într-un calcul este prin definiție numărul $|x - a|$. În general, această valoare este fie necunoscută fie dificil de folosit datorită numărului infinit de zecimale.

În practică, noțiunea de *eroare absolută* este dependentă de schimbarea unității de măsură. Din acest motiv se foloseşte şi noțiunea de *eroare relativă*, care nu este afectată de unitatea de măsură a mărimilor şi se exprimă de obicei în procente. Prin urmare, se definesc două tipuri de erori:

- eroarea absolută $\varepsilon_a = |x - a|$;
- eroarea relativă $\varepsilon_r = \left|\frac{x - a}{x}\right|$.

Definiția erorii absolute este echivalentă cu expresia $x = a \pm \varepsilon_a$, ceea ce semnifică *incertitudinea numerică* existentă atunci când se lucrează cu numere reale. Această expresie pune în evidență faptul că eroarea absolută (ca şi cea relativă) poate să fie pozitivă sau negativă.

b) Rotunjirea numerelor. Aproximări

Rotunjirea numerelor presupune o aproximare a acestora. Valorile aproximative cele mai folosite sunt zecimale şi se obţin prin două procedee: aproximare *prin lipsă*, respectiv *prin adaos*. Este evident că rotunjirea numerelor produce erori. Astfel, rotunjirea prin lipsă se face fie prin neglijarea tuturor zecimalelor care se află după o anumită zecimală (exemplu: 0,26976→0,26900). De regulă, se practică înlocuirea cu 0 a ultimei zecimale dacă aceasta este mai mică ca 5 (exemplu: 0,26973→0,26970). Rotunjirea prin adaos se face prin mărirea cu 1 a penultimei zecimale dacă ultima este mai mare sau egală cu 5 şi eliminarea acesteia (exemplu: 0,26976→0,2698).

c) Procese iterative. Propagarea erorilor

O clasă importantă de metode numerice pentru rezolvarea problemelor se bazează pe calcule numerice succesive, repetitive, efectuate din aproape în aproape, reprezentând *procese iterative*. Procesele numerice iterative se aplică intens în metodele de rezolvare a problemelor de algebră liniară, precum şi în calculul integral şi diferenţial. Acest gen de calcule au un puternic caracter recursiv şi ridică aspecte fundamentale ale analizei numerice: *stabilitate*, *convergenţă*, *precizie*. Astfel în teoria generală a metodelor iterative descrierea unei ecuaţii $f(x)=0$ sub forma $x=\varphi(x)$ pe *m* puncte, conduce la o *formulă de iterare* de forma $x_{n+1}=\varphi(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-m+1})$, unde φ se numeste *funcţie de iterare*.

De cele mai multe ori rezultatul unui şir de de calcule are o acurateţe (precizie) redusă deoarece pe parcurs se efectuează calcule ce modifică *marginile erorilor* absolute. Există teoreme pentru aproximarea sumei şi diferenţei, precum şi pentru aproximarea produsului şi a câtului. Astfel:

- O eroare absolută a unei sume se obţine *adunând* erorile absolute ale fiecărui termen al sumei.
- O eroare absolută a unei diferenţe se obţine *adunând* erorile absolute ale fiecărui termen al diferenţei.

Deci la adunare sau la scădere, marginea erorii absolute a rezultatului este dată de suma marginilor erorilor absolute ale termenilor.

În cazul operaţiilor de înmulţire şi împărţire estimarea erorilor se face pe baza erorilor relative cu anumite rezerve, astfel: eroarea relativă a produsului poate fi estimată ca suma erorilor relative ale factorilor (dacă una dintre aproximări este suficient de mică), în timp ce eroarea relativă a câtului este dată de suma aproximărilor relative ale termenilor (dacă cele două erori sunt relativ mici).

O *formulă generală de propagare a erorilor* se deduce pornind de la conceptual de diferențială a unei funcții $y(x)$ de o variabilă vectorială $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ într-un punct x^*. Eroarea *maximală* care se comite asupra funcției $y(x)$, notată cu Δy, datorită erorii argumentului Δx_i este dată de expresia:

$$|\Delta y| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i}(x^*) \right| |\Delta x_i| .$$

d) Sursele de erori şi clasificarea lor

În funcție de cauzele apariției lor, erorile numerice care se comit asupra mărimilor măsurate pot fi încadrate în trei categorii: erori *sistematice*, erori *întâmplătoare* şi erori *grosolane* (greşeli). Aceste tipuri de erori se manifestă în general cumulat, iar efectul global contribuie la incertitudinea ce afectează calculele numerice în ştiință şi inginerie. O clasificare a acestor erori este schematizată în tabelul de mai jos.

Erori sistematice	Constante	Nu depind de valoarea mărimii măsurate
	Variabile după funcții liniare	Proporționale cu valoarea mărimii măsurate
	Variabile după funcții periodice	Variază în ambele sensuri odată cu variația numai într-un sens a mărimii măsurate
	Variabile după funcții oarecare	Variază în general după relații care se determină experimental
Erori întâmplătoare	Variabile aleatoare ca valoare şi semn	Nu pot fi stabilite în prealabil şi au cauze greu de anticipat
Erori grosoloane	Variabile ce denaturează exagerat rezultatul măsurătorii	Datorate unor defecțiuni accidentale, neatenției observatorului sau schimbării bruşte a condițiilor de măsurare.

În concluzie, în procesul de rezolvare a multitudinii problemelor inginereşti, din perspectiva modelării matematice avem la dispoziţie două abordări (categorii de metode) fundamentale:

a) *metode exacte*, care furnizează aşa numite *soluţii analitice*,

b) *metode aproximative*, care furnizează *soluţii numerice*.

În mod evident, calculul numeric se adresează celor din urmă pentru obţinerea rezultatului final exclusiv pe baza unor metode numerice.

În cazul metodelor analitice, rezolvarea efectivă pentru găsirea soluţiei se bazează exclusiv pe reguli şi metode de manipulare simbolică a expresiilor matematice ce compun modelul problemei. De cele mai multe ori, prelucrarea simbolică a expresiilor analitice în procesul de rezolvare a problemelor se bazează pe metode euristice[1]. În final, rezultatul numeric se obţine prin simpla înlocuire cu numere a parametrilor din expresia rezultată.

Utilitatea metodelor numerice se manifestă în problemele care nu pot fi rezolvate prin metode exacte, deci care nu admit soluţii analitice. Pe de altă parte, metodele de calcul numeric admit algoritmi de calcul ce pot fi automatizaţi şi programaţi eficient pentru o clasă largă de probleme.

[1] Termenul *euristic* vine de la grecescul *heuriskein* =”a afla” şi stă la baza unei ramuri speciale a metodologiei ştiinţei ce implică reguli de căutare, descoperire şi invenţie în procesul de rezolvare a problemelor.