Analiză matematică

July 15, 2019

Cuprins

Cuvânt înainte

Cartea se adresează studenților de la electronică, rețele, electromecanică, mecanică (TCM) - studenți care parcurg disciplina analiză matematică. Fiecare capitol are două părți: considerații teoretice și probleme. Vă dorim succes în parcurgerea materialului didactic!

Capitolul I

Serii.

I.1 Serii numerice. Serii cu termeni pozitivi. Serii alternate

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ un șir de numere reale cu care formăm *sumele parțiale* $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $\dots$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Șirul S_n se numește *șirul sumelor parțiale*.

Dacă *șirul sumelor parțiale* converge către o limită reală și *finită* s spunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, unde a_n este termenul general al seriei.

Dacă șirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ este divergent spunem că seria este divergentă.

Teorema I.1.1. *(Criteriul lui Cauchy pentru serii) Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge dacă* $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n, p \in \mathbb{N}$ *cu* $n \geq N_\varepsilon$ *avem*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Lema I.1.2. *(Criteriul necesar de convergență) Seria* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *convergentă rezultă* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *(rezultă din criteriul Cauchy pentru* $p = 1$*).*

Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

1. *Criteriul comparației.* Fie $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq N_0$, $N_0 \in \mathbb{N}$ fixat.

   i) $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ convergentă, atunci $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ convergentă;

   ii) $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ divergentă, atunci $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ divergentă;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0, \infty)$, atunci cele două serii au aceeași natură;

- dacă $k = 0$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

- dacă $k = \infty$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge;

iv) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $\forall n \geq n_0$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

2. *Criteriul lui de D'Alembert* (raportului). Există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

   i) $l < 1$, atunci seria e convergentă;

   ii) $l > 1$, atunci seria e divergentă;

   iii) $l = 1$, atunci criteriul nu se aplică.

3. *Criteriul lui Cauchy* (radicalului). Există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

   i) $l < 1$, atunci seria e convergentă;

   ii) $l > 1$, atunci seria a divergentă;

   iii) $l = 1$, atunci criteriul nu se aplică.

4. *Criteriul Raabe-Duhamel.* Există $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = l$

   i) $l > 1$, atunci seria e convergentă;

   ii) $l < 1$, atunci seria a divergentă;

   iii) $l = 1$, atunci criteriul nu se aplică.

5. *Criteriul de condensare.* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ și $\sum\limits_{n\geq 0} 2^n a_{2^n}$ au aceeași natură.

6. Criteriul logaritmic Există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = l$

   i) $l > 1$, atunci seria e convergentă;

   ii) $l < 1$, atunci seria a divergentă;

   iii) $l = 1$, atunci criteriul nu se aplică.

Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare.

1. *Criteriul Dirichlet.* Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n \cdot v_n$ unde:

    i) $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ este șir mărginit;

    ii) $v_n > 0$, $\forall n \geq 0$ și $v_n \underset{n\to\infty}{\searrow} 0$.

    Atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n \cdot v_n$ este convergentă.

2. *Criteriul lui Abel.* Fie $\sum\limits_{n\geq 0} u_n \cdot v_n$ unde:

    i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ este serie convergentă;

    ii) $(v_n)_{n\geq 0}$ este șir convergent.

    Atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n \cdot v_n$ este convergentă.

3. *Criteriul lui Leibniz.* Fie $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ unde $a_n \underset{n\to\infty}{\searrow} 0$, atunci seria converge.

Definiţia I.1.3. *Dacă* $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|$ *converge atunci* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *se numește seria absolut convergentă.*

Dacă $\sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} a_n$ convergentă, $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|$ divergentă, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} a_n$ se numește *serie semiconvergentă.*

Operații cu serii numerice. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$ două serii numerice.

Considerăm $\begin{cases} c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_k b_{n-k} + \ldots + a_n b_0 \\ n \geq 0 \end{cases}$

Atunci, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ se numește *seria produs* a celor două serii.

1. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ două serii numerice convergente, din care una este absolut convergentă. Atunci seria produs este convergentă și suma seriei produs este egală cu produsul seriilor

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ sunt serii numerice absolut convergente. Atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ este *absolut convergentă* și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.

Observaţia I.1.4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă rezultă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ convergentă. Reciproc, nu.

Aproximarea sumelor seriilor numerice convergente.

Suma seriei convergente se poate aproxima cu termenii șirului sumelor parțiale.

- Pentru serii numerice pozitive.

  Dacă $S_{n_0} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_0} < \varepsilon$, atunci putem aproxima $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ prin S_{n_0};

- Pentru serii numerice alternate.

  Dacă $|a_{n_0}| < \varepsilon$ atunci $S_{n_0} = a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^{n_0} a_{n_0}$ aproximează suma seriei.

Seria geometrică

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & |q| < 1 \\ \text{divergentă} & |q| \geq 1 \end{cases}$

Seria armonică

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ se numește *serie armonică*, $p \in \mathbb{R}$.

$a_n = \dfrac{1}{n^p}$, $2^n \cdot a_{2^n} = 2^n \cdot \dfrac{1}{2^{np}} = \dfrac{1}{2^{n(p-1)}} = \left(\dfrac{1}{2^{p-1}}\right)^n$ atunci $\sum\limits_{n\geq 0} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^{p-1}}\right)^n$ este serie geometrică

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n = \begin{cases} \text{convergentă, pentru} & \dfrac{1}{2^{p-1}} < 1 \Leftrightarrow p > 1 \\ \text{divergentă, pentru} & \dfrac{1}{2^{p-1}} \geq 1 \Leftrightarrow p \leq 1. \end{cases}$$

Cu criteriul de condensare, cele două serii au aceeași natură:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{convergentă, pentru} & p > 1 \\ \text{divergentă, pentru} & p \leq 1. \end{cases}$$

I.1.1 Exerciții.

1. Să se determine natura și suma seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+3n+3}.$$

Soluție:

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy};\ n^2+3n+3 = (n+1)(n+2)+1.$$

$$\operatorname{arctg}(n+2) - \operatorname{arctg}(n+1) = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+3n+3}.$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} [\operatorname{arctg}(k+2) - \operatorname{arctg}(k+1)] = \operatorname{arctg}(n+2) - \operatorname{arctg} 1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+3n+3} = \lim_{n\to\infty} \left[\operatorname{arctg}(n+2) - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

□

2. Să se determine natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right).$$

Soluție: Comparăm cu seria divergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)} = 1$$

atunci cu criteriul de comparație iii) seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right)$ este divergentă. □

3. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(a\cdot n)^n}{n!},\ a > 0.$

Soluție: $a_n = \frac{(a\cdot n)^n}{n!} \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}\cdot(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n\cdot n^n} = a\cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ae$$

Criteriul raportului

- $ae < 1 \Leftrightarrow a < \dfrac{1}{e}$ seria este convergentă
- $ae > 1 \Leftrightarrow a > \dfrac{1}{e}$ seria este divergentă
- $a = \dfrac{1}{e} \Rightarrow a_n = \dfrac{n^n}{n!e^n} \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{e} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n;$

  $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{b_{n+1}}{b_n},\ \forall n \geq 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergentă.}$$

Cu criteriul comparației iv) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(n_n)^n}{n!e^n}$ divergentă.

□

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(b \cdot \dfrac{a+n}{a+n-1}\right)^n$.

Soluție: Fie $a_n = \left(b \cdot \dfrac{a+n}{a+n-1}\right)^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = b$.

Cu criteriul radicalului:

- $b < 1$, atunci seria e convergentă
- $b > 1$, atunci seria e divergentă
- $b = 1$, atunci $a_n = \left(\dfrac{a+n}{a+n-1}\right)^n = \left(1 + \dfrac{1}{a+n-1}\right)^n \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{a+n-1}\right)^{a+n-1}\right]^{\frac{n}{a+n-1}} = e \neq 0$$

atunci criteriul necesar ne dă serie divergentă.

□

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]\cdot\dfrac{1}{n}$

Soluție:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{n}\cdot(n+1)\cdot\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{n(2n+1)}=1$$

atunci nu se poate aplica criteriul raportului.

Aplicăm Raabe-Duhamel

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{2(n+1)^2}{n(2n+1)}-1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\frac{2n^2+4n+2-2n^2-n}{n(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1}=\frac{3}{2}>1$$

atunci seria este convergentă. □

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\cdot\cos\frac{1}{n}}{n}$

Soluție: $u_n=\dfrac{\cos n}{n}\Rightarrow a_n=\dfrac{1}{n}\searrow_n 0$; $b_n=\cos n$.

$S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos k=\cos 1+\cos 2+\ldots+\cos n$

$T_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin k=\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n$

$$S_n+iT_n=(\cos 1+i\sin 1)+(\cos 1+i\sin 1)^2+\ldots+(\cos 1+i\sin 1)^n$$

$$=z\cdot\frac{1-z^n}{1-z}=\frac{z-z^{n+1}}{1-z}=\frac{(\cos 1+i\sin 1)-(\cos(n+1)+i\sin(n+1))}{1-\cos 1-i\sin 1}$$

$$=\frac{\cos 1-\cos(n+1)+i(\sin 1-\sin(n+1))}{1-\cos 1-i\sin 1}$$

$$=\left[\cos 1-\cos(n+1)+i(\sin 1-\sin(n+1))\right](1-\cos 1+i\sin 1)\cdot\frac{1}{(1-\cos 1)^2+\sin^2 1}.$$

$$S_n=\frac{(1-\cos 1)(\cos 1-\cos(n+1))-\sin 1(\sin 1-\sin(n+1))}{2-2\cos 1}$$

$$=\frac{\cos 1-1-\cos(n+1)+\cos n}{4\sin^2\frac{1}{2}}=\left(\cos n-\cos(n+1)-2\sin^2\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow |S_n| \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}}, \ \forall n \geq 1.$$

Cu criteriul Dirichlet, rezultă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ convergentă. Pe de altă parte $v_n = \cos \frac{1}{n}$ este monoton crescător: $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow \cos \frac{1}{n+1} > \cos \frac{1}{n}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \cos 0 = 1$.

Cu criteriul Abel seria este convergentă. □

7. Convergența absolută și semiconvergența seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Soluție: $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; $b_n = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = 1$ și cu criteriul comparației iii) seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este divergentă.

$u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \underset{n\to\infty}{\searrow} 0$ și cu Leibniz seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ este convergentă.

În concluzie, seria este semiconvergentă. □

I.2 Șiruri și serii de funcții

I.2.1 Șiruri de funcții

- Fie șirul de funcții $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I interval. Spunem că șirul $(f_n)_n$ *converge simplu* către f dacă $\forall \varepsilon > 0$ și $\forall x \in I$, există un rang $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ astfel încât să avem

  $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall n \geq N_{\varepsilon,x}.$$

  Scriem $f_n \underset{I}{\overset{S}{\to}} f$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

- $f_n : I \to \mathbb{R}$ șir de funcții; spunem că el *converge uniform* către funcția $f : I \to \mathbb{R}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon$ și $\forall x \in I$.

  Scriem: $f_n \underset{I}{\overset{U}{\to}} f$.

Teorema I.2.1. *Șirul de funcții mărginite $f_n : I \to \mathbb{R}$ converge a uniform către o funcție mărginită $f(x)$ dacă și numai dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

I.2.2 Criterii de convergență uniformă pentru șiruri de funcții

1. *Criteriul lui Cauchy.*

   $f_n \underset{I}{\overset{U}{\to}} f$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq N_\varepsilon$, $\forall m \in \mathbb{N}^\star$ rezultă $|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in I$.

2. *Criteriul Weierstrass.* $f_n \underset{I}{\overset{U}{\to}} f \Leftrightarrow \exists$ șirul de numere reale pozitive $(g_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| \leq g_n$, $\forall x \in I$ și $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Teorema I.2.2. *Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții definite pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$, continue pe I și $f_n \underset{I}{\overset{U}{\to}} f$. Atunci: $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ este funcție continuă pe I. Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$, oricare ar fi compactul $[a,b] \subset I$.*

Teorema I.2.3. *Fie $(f_n)_n$ șir de funcții $C^1([a,b])$ adică derivabile cu derivatele continue, astfel încât: $f_n \underset{[a,b]}{\overset{S}{\to}} f$ și $f_n' \underset{[a,b]}{\overset{U}{\to}} g$. Atunci f este* derivabilă *și* $f' = g$.

Teorema I.2.4. *(Weierstrass-Stone) Oricare ar fi funcția continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, există un* șir de polinoame $(f_n)_n$ *cu $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \underset{[a,b]}{\overset{U}{\to}} f$.*

I.2.3 Serii de funcții

Fie $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ se numește serie de funcții *simplu convergentă* dacă, prin definiție șirul sumelor parțiale este convergent simplu pe $[a, b]$ către o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \underset{x\in[a,b]}{\overset{S}{\to}} f(x)$ și scriem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

- $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniform către f dacă $(S_n(x))_{n\geq 0}$ converge uniform către f.

- $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge absolut către f dacă $\sum\limits_{n\geq 1} |f_n(x)|$ este serie simplu convergentă.

Criteriul Weierstrass. Fie $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$, astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in [a, b]$, $|f_n(x)| \leq a_n$, $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ - serie numerică pozitivă, convergentă, rezultă $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ este *uniform convergentă*

Teorema I.2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *serie de funcții continue, uniform convergentă,* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ *și* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. *Atunci* f *este continuă și*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Teorema I.2.6. *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$ *serie convergentă de funcții,* $f_n \in C^1[a, b]$ *astfel încât* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$ *este uniform convergentă pe* $[a, b]$. *Atunci* f *este derivabilă* $[a, b]$ *și* $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in [a, b] \Leftrightarrow$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

Formula lui Taylor cu restul Lagrange. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcție de clasă C^{n+1} pe $[a, b]$ și fie $x_0 \in (a, b)$ arbitrar fixat. Atunci: $\forall x \in [a, b]$, există ξ între x_0 și x astfel încât

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1},$$

unde $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ - restul Lagrange.

I.2.4 Exerciții

1. Studiați convergența simplă și uniformă a șirului

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}.$$

Soluție: $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2} \overset{S}{\underset{n\to\infty}{\to}} f(x) \begin{cases} 1 & , x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$(f_n)_n$ este șir de funcții continue și $f_n \overset{S}{\underset{\mathbb{R}}{\to}} f$, f nu este continuă atunci $f_n \overset{U}{\not\to} f$. $\square$

2. $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx} \sin nx$.

Soluție: $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-nx} \sin nx = 0 \Rightarrow f_n \overset{S}{\underset{[0,\infty)}{\to}} f = 0.$

Fie șirul $x_n = \frac{1}{n} \underset{n}{\to} 0 \Rightarrow f_n(x_n) = e^{-1} \sin 1 \underset{n\to\infty}{\to} e^{-1} \sin 1 \neq 0 \Rightarrow f_n \overset{U}{\not\to} f$ pe $[0, \infty)$. $\square$

3. Aflați mulțimea de convergență (mulțimea pe care seria de funcții este convergentă) pentru seria de funcții $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^x}$

Soluție: $x > 0 \Rightarrow$ cu criteriul lui Leibniz seria converge, este serie alternată și $\frac{1}{n^x} \underset{n\to\infty}{\searrow} 0$

$x \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^x} \right| = \begin{cases} +\infty & , x \leq -1 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \neq 0 \Rightarrow$ serie divergentă.
Mulțimea de convergență este $(0, \infty)$. $\square$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$;

Soluție: $|f_n(x)| = \frac{|\sin nx|}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} = a_n$, $\forall n \geq 1, x \in \mathbb{R}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ serie armonică convergentă cu $\alpha = \frac{4}{3} > 1$. Cu criteriul lui Weierstrass seria de funcții este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$. $\square$

I.3 Serii de puteri

Definiţia I.3.1. *Se numește* serie de puteri *o serie de funcții* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *unde* $x \in \mathbb{R}$*, iar* $a_n \in \mathbb{R}$ *se numesc coeficienții seriei de puteri.*

Teorema I.3.2. *(Teorema lui Abel) Fie seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*. Atunci există* $0 \leq R \leq \infty$ *astfel încât:*

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este convergentă pe* $(-R, R)$*.*
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este divergentă oricare ar fi* x *cu* $|x| > R$*.*
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este absolut și uniform continuă pentru* $|x| \leq r$ *unde* $0 < r < R$*.*

Definiţia I.3.3. *R se numește* raza de convergență *a seriei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *și* $(-R, R)$ *mulțimea de convergență a seriei.*

Teorema I.3.4. *(Teorema Cauchy-Hadamard) Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *serie de puteri și fie* $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$*. Atunci:*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & \text{dacă } 0 < \rho < \infty \\ 0, & \text{dacă } \rho = \infty \\ +\infty & \text{dacă } \rho = 0 \end{cases}.$$

Seria de funcții de forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *se numește serie Taylor centrată în* x_0*.*

Dacă $x_0 = 0$*, atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *se numește seria Mac Laurin.*

Teorema I.3.5. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *cu raza R de convergență. Atunci:*

- $\left(\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n\right)' = \sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$, $\forall x \in (-R, R)$
- $\int \left(\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n\right) \mathrm{d}\,x = \sum\limits_{n\geq 0} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $\forall x \in (-R, R)$.

Teorema I.3.6. *$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ indefinit derivabilă (are derivate de orice ordin) pe intervalul I și fie $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ arbitrar fixat. Atunci f se scrie astfel:*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n,\ \forall x \in I_1 \subset I,$$

unde I_1-intervalul de convergență și $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$-seria Taylor a lui f în x_0.

Observaţia I.3.7. Dacă $x_0 = 0$ atunci $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$ *seria Mac Laurin* a lui $f(x)$-serie de puteri.

I.3.1 Serii Taylor uzuale-serii de puteri

1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n,\ \forall |x| < 1$.
3. $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,\ \forall |x| < 1$.
4. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n},\ \forall x \in \mathbb{R}$.
5. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1},\ \forall x \in \mathbb{R}$.
6. $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n,\ \forall |x| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$.

I.3.2 Aplicații.

1. Aflați mulțimea de convergență și suma seriei: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$;

   Soluție: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Rightarrow \rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow$ cu Cauchy-Hadamarad $R = 1 \Rightarrow$ seria converge pe $(-1, 1)$.

   În $x = -1 \Rightarrow -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă (seria armonică).

În $x = +1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ este convergentă cu criteriul Leibniz.

Deci, mulțimea de convergență este $(-1, 1]$.

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \Rightarrow f'(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f(x) = \int \frac{\mathrm{d}\, x}{1+x} = \ln(1+x) + c;\, f(0) = c = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x),\ x \in (-1, 1].$$

□

2. Dezvoltați în serie de puteri $f(x) = \int\limits_0^x \dfrac{\ln(1+t)}{t} dt$ și găsiți mulțimea de convergență.

Soluție:

$$f'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n} \Rightarrow$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2},$$

$R = 1$ și mulțimea de convergență este $[-1, 1]$ (cu seria armonică și seria cu criteriul Leibniz). □

3. Dezvoltați $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ în serie de puteri ale lui $(x+1)$.

Soluție: $x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow f(x) = f(y-1) = \dfrac{1}{(1-y)^2}$,
$\dfrac{1}{1-y} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y^n,\ |y| < 1 \overset{\text{derivare}}{\Rightarrow} \dfrac{1}{(1-y)^2} = f(y-1) = \sum\limits_{n\geq 1} n y^{n-1},\ |y| < 1.$

Revenim la notație:

$f(x) = \dfrac{1}{x^2} = \sum\limits_{n\geq 1} n(x+1)^{n-1} = \sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n$ pentru $|x+1| < 1$ $\Leftrightarrow -2 < x < 0.$ □

4. Să se dezvolte în serie de puteri $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. Precizați mulțimea de convergență.

Soluție:

$$f(x) = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \underset{\alpha=-\frac{3}{2}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot \ldots \cdot \left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}(-1)^n x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot x^{2n}.$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)(2n+3)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)(2n+2)} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow |x^2| < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1,1).$$

$$x = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+3} - 1\right)$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n}{2n+3} = -\dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ serie divergentă.
Pentru $x = -1$ e același rezultat. Deci mulțimea de convergență este $(-1,1)$. □

5. Folosind dezvoltarea funcției $\operatorname{arctg} x$ în serie de puteri calculați integrala $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, \mathrm{d}\, x$, cu o eroare mai mică de 10^{-6}.

Soluție:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},\ |x| < 1$$

$$g(x) = \int \frac{\mathrm{d}\, x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1},\ |x| \le 1.$$

(Cu Leibniz în $|x| = 1$)

$$c = 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1},\ |x| \le 1.$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n},\ |x| \le 1.$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \, \mathrm{d}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot x^{2n+1} \Bigg|_0^{\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \cdot 3^{2n+1}}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)! \cdot 3^{2n+1}} \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{(2n+1)^2 \cdot 3^{2n+1}} < 10^{-6} \Rightarrow$$

$$1000000 < 3 \cdot 9^n \cdot (2n+1)! \Rightarrow n = \dots$$

6. Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = -x^{2n} + x^n = x^n - x^{2n}$. Studiați convergența șirului $f_n(x)$ (simplă și uniformă).

   $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0; |f_n(x) - 0| = x^n - x^{2n} = f_n(x)$

   $f_n'(x) = nx^{n-1} - 2n \cdot x^{2n-1} = nx^{n-1}(1 - 2x^n) = 0 \Rightarrow x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$		1
$f_n'(x)$	$+$	$+$	0	-	-
$f_n(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)$	$\searrow$	$\searrow$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow$$

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{U}{\not\to}} f(x) \equiv 0; f_n(x) \underset{[0,1]}{\overset{S}{\searrow}} f(x) \equiv 0.$$

$\square$

Capitolul II

Funcții de mai multe variabile.

II.1 Funcții de mai multe variabile: limite și continuitate

II.1.1 Topologie pe $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$.

- Fie planul $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Definim *bila* centrată în punctul $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de rază $r > 0$ astfel:

  $$B((a, b), r) \overset{def}{=} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \|(x, y) - (a, b)\|_2 < r\right\},$$

  unde $\|(x, y) - (a, b)\|_2 \overset{def}{=} \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ se numește *norma euclidiană* pe $\mathbb{R}^2$.

- Considerăm planul $\mathbb{R}^2$ și fie punctul $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ fixat. O mulțime $V \subset \mathbb{R}^2$ se numește *vecinătate* a punctului a dacă $\exists r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset V$.

- O mulțime $D \subset \mathbb{R}^2$ se numește mulțimea *deschisă* dacă este vecinătate pentru orice punct al ei.

- Complementara unei mulțimi deschise se numește mulțimea *închisă*.

- O mulțime $M \subset \mathbb{R}^2$ se numește *mărginită* dacă există un număr $d > 0$ astfel încât, $\forall x \in M$, $x = (x_1, x_2)$ avem: $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \leq d$.

- $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime închisă și mărginită se numește mulțime *compactă*.

- Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime și $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ se numește punct *interior* al lui D dacă $\exists r_0 > 0$ astfel încât $B(a, r_0) \subset D$. Mulțimea punctelor interioare lui D formează *interiorul* lui D, notat cu $\overset{\circ}{D}$.

- $a \in \mathbb{R}^2$ se numește punct de *acumulare* pentru $D \subset \mathbb{R}^2$, dacă $\forall r > 0$ avem $B(a,r) \setminus \{a\} \cap D \neq \emptyset$. Mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii D se numește mulțimea *derivată* a lui D, notată cu D'.

- $a \in \mathbb{R}^2$ se numește punct de *aderență* pentru $D \subset \mathbb{R}^2$ dacă $\forall r > 0$ avem $B(a,r) \cap D \neq \emptyset$. Mulțimea punctelor de aderență pentru D se numește $\bar{D}$-aderență sau închiderea lui D.

- Se numește *frontiera* lui $D \subset \mathbb{R}^2$ mulțimea notată prin FrD sau ∂D egală cu: $FrD = \bar{D} \setminus \overset{\circ}{D} = \bar{D} \cap \overline{CD}$.

- Fie $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ și $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Numim distanța de la a la b, numărul pozitiv definit prin

$$d(a,b) = \|a-b\|_2 = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2} = \|(a_1,a_2) - (b_1,b_2)\|_2.$$

II.1.2 Proprietățile distanței (metricei)

i) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \equiv b \Leftrightarrow a_1 = b_1$ și $a_2 = b_2$.

ii) $d(a,b) \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^2$.

iii) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^2$-inegalitatea triunghiului.

- $(\mathbb{R}^2, d)$ se numește *spațiu metric*.

- Numim *topologie* pe $\mathbb{R}^2$ și o notăm cu $\mathcal{T}$, o familie de mulțimi deschise $\mathcal{T} = (D_i)_{i\in I}$ cu $D_i \subset \mathbb{R}^2$ care îndeplinește următoarele condiții: i) $\emptyset$ și $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$; ii) $\bigcup\limits_{i\in I} D_i \in \mathcal{T}$; iii) $\bigcap\limits_{j\in J} D_j \in \mathcal{T}$ cu J finită. $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ se numește *spațiu topologic*.

- Metrica pe $\mathbb{R}^2$ induce o topologie pe $\mathbb{R}^2$.

- Definim bila pe $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$.

Fie $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $r > 0 \Rightarrow$

$$B(a,r) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2} < r\right\}$$

$a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ și $r > 0$:

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x-a\|_2 < r\}$$

unde $\|x-a\|_2 \overset{def}{=} \sqrt{(x_1-a_1)^2 + \ldots (x_n-a_n)^2}$. Celelalte definiții se păstrează.

II.1.3 Funcții de mai multe variabile. Limite și continuitate

Definiţia II.1.1. *Fie* $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D'$ *și* $f : D \to \mathbb{R}$. *Există* $l = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ *dacă:* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât* $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2 < \delta_\varepsilon$ *implică* $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

l se numește limita globală *a lui f în* (x_0, y_0).

Considerăm *limitele iterate*
$\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ și respectiv $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$.
Avem proprietățile:

1. Există l =limita globală, există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ și $\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ atunci există limitele iterate și acestea sunt egale cu l.
2. Dacă există limitele iterate și nu sunt egale atunci l nu există.
3. E posibil ca limitele iterate să fie egale, fără ca limita globală l să existe.

Se poate generaliza la funcție de n variabile.

Definiţia II.1.2. *Funcția* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *este continuă în* $(x_0, y_0) \in D$ *dacă există* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Teorema II.1.3. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *este continuă în* $(x_0, y_0) \in D$ *dacă oricare ar fi șirurile reale* $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *cu* $(x_n, y_n) \in D$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ *rezultă* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)$.

Definiţia II.1.4. *Fie* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *și* $(x_0, y_0) \in D$. *Funcția f este* continuă parțial *în raport cu variabila x dacă funcția $f(x, y_0)$ este continuă în punctul x_0; dacă este continuă $f(x_0, y)$ în punctul y_0 spunem că f este continuă parțial în raport cu variabila y.*

Definiţia II.1.5. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *se numește continuă pe D dacă este continuă în fiecare punct din D.*

Propoziţia II.1.6. *Dacă f este continuă atunci f continuă parțial în raport cu fiecare variabilă. Reciproc, nu.*

Definiţia II.1.7. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *se numește uniform continuă pe D dacă* $\forall \varepsilon$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât* $\forall (x_1, y_1)$ *și* $(x_2, y_2) \in D$ *cu* $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_2 < \delta_\varepsilon$ *rezultă* $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$.

Propoziţia II.1.8. *f uniform continuă pe D atunci f continuă pe D. Reciproc nu.*

Propoziţia II.1.9. *$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continuă pe D =mulțime închisă și mărginită (compactă) în $\mathbb{R}^2$. Atunci f este uniform continuă pe D.*

Observaţia II.1.10. Operațiile cu funcții continue de două variabile duc la funcții continue. Se poate generaliza pentru n variabile.

II.1.4 Aplicații

Studiati continuitatea următoarelor funcții:

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Soluție: $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\to} (0,0)$; $f(x_n, y_n) = 0 \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$(x_n', y_n') = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\to} (0,0)$ $f(x_n', y_n') = \dfrac{\frac{2}{n}}{\frac{2}{n^2}} = n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ atunci nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0} f(x,y)$, deci f continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. □

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Soluție: f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{x^3y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \leq \frac{|x^3|y^2}{x^2y^2} = |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$= \|(x,y)-(0,0)\|_2 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0 \Rightarrow f$ continuă pe $\{(0,0)\}$.

Deci f continuă pe $\mathbb{R}^2$. □

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Soluție: $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=mx^2}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx^4}{x^4+m^2x^4} = \dfrac{m}{m^2+1} \Rightarrow$ limita în (0,0) a lui f depinde de cum tinde (x,y) la $(0,0)$, deci nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, deci f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. □

4. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Soluție:

$|f(x,y)| \leq (x^2+y^2) = \|(x,y)-(0,0)\|^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ continuă în $(0,0) \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}^2$. $\square$

5. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Soluție:

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y = mx^2}} f(x,y) = \dfrac{m}{1+m^2} \Rightarrow$ nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, atunci f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $\square$

6. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Soluție:

$|f(x,y)-f(0,0)| = \dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{x^2|y|}{|x||y|} = |x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0 \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}^2$. $\square$

7. $f(x,y) = \begin{cases} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, & x > 0 \text{ și } y > 0 \\ 1, & x = 0 \text{ și } y = 0 \end{cases}$

Soluție:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}$$

$$\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{xy}{\sqrt[4]{xy}} = x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = e^0 = 1$$

$= f(0,0) \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}^2$. $\square$

II.2 Derivate parțiale. Diferențiabilitate.

Definiţia II.2.1. *$f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ și $(a,b) \in U$ fixat. Dacă există limitele și sunt finite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f'_x(a,b)$$

$$\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=f'_y(a,b)$$

atunci f are derivate parțiale de ordinul unu în (a,b) în raport cu x, respectiv y.

Definiţia II.2.2. *Dacă f are derivate parțiale de ordinul unu în orice punct $(a,b)\in U$, atunci există $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}: U\to\mathbb{R}$.*

Observaţia II.2.3. Regulile de calcul pentru f'_x și f'_y sunt aceleași ca regulile de calcul din $\mathbb{R}$.

Definiţia II.2.4. *$f: U=\overset{\circ}{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ și $(a,b)\in U$ fixat. Atunci f este diferențiabilă în (a,b) dacă există $df(a):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ liniară și continuă astfel încât*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-f(a,b)-df(a)(x-a,y-b)}{\|(x,y)-(a,b)\|_2}=0.$$

Propoziţia II.2.5. *i) $df(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,\mathrm{d}\,x+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,\mathrm{d}\,y$, unde $\mathrm{d}\,x, \mathrm{d}\,y: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sunt proiecțiile canonice liniare și continue.*

ii) $df(a,b)(x-a,y-b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$.

iii) f diferențiabilă în (a,b) atunci f continuă în (a,b)

Observaţia II.2.6. f diferențiabilă pe U dacă f diferențiabilă în orice punct și operațiile cu funcții diferentiabile duc la funcții diferențiabile pe U.

Definiţia II.2.7. *Fie $f: U=\overset{\circ}{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ care are $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ definite într-o vecinătate deschisă $\subset U$ a lui (a,b) punct fixat în U. Atunci f are derivate parțiale de ordinul 2 în (a,b) dacă există*

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{x-a}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)=f''_{x^2}(a,b)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b);$$

$$\lim_{y\to b}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{y-b}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)=f''_{y^2}(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b);$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,b)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{x-a}=f''_{xy}(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b).$$

$$\lim_{y\to b}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{y-b}=f''_{xy}(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b).$$

Definiţia II.2.8. *f este de două ori diferențiabilă dacă f este diferențiabilă într-o vecinătate V a lui (a,b) și $\mathrm{d}\,f : V=\overset{\circ}{V}\subset U\to L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ este diferențiabilă în (a,b), unde $L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ este spațiul aplicațiilor liniare și continue de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}$.*

Observaţia II.2.9. Fie $d^2 f(a,b)$ o aplicație biliniară, continuă și $d^2 f(a,b)=f''_{x^2}(a,b)\,\mathrm{d}\,x^2+f''_{xy}(a,b)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y+f''_{yx}(a,b)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x+f''_{y^2}(a,b)\,\mathrm{d}\,y^2$.

Observaţia II.2.10. $\mathrm{d}\,x^2(x-a,y-b)^2=(x-a)^2$, $\mathrm{d}\,x^2((a,b),(c,d))=ac$, $\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y(x-a,y-b)^2=(x-a)(y-b)$, $\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x(x-a,y-b)^2=(y-b)(x-a)$ și

$$\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y((a,b),(c,d))=\mathrm{d}\,x(a,b)\cdot\mathrm{d}\,y(c,d)=ad.$$

Generalizare $f:U=\overset{\circ}{U}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ are derivate parțiale de ordinul unu dacă există și este finită

$$\lim_{x_i\to a_i}=\frac{f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)-f(a)}{x_i-a_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=f'_{x_i}(a),\ i=\overline{1,n},$$

$$\text{și }\ \mathrm{d}\,f(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,\mathrm{d}\,x_i.$$

Avem:

$$\mathrm{d}\,f:U\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\Rightarrow \mathrm{d}\,f(a)(x-a)=\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}(a)(x_i-a_i).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\lim_{x_i\to a_i}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)-\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)}{x_i-a_i},$$

$\forall i,j=\overline{1,n}$. Avem

$$d^2 f(a)=\sum_{i,l=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\,\mathrm{d}\,x_i\,\mathrm{d}\,x_j;$$

$$d^2 f(a)(x-a)^2=\sum_{i,j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(a)(x_i-a_i)(x_j-a_j)$$

unde $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ există pe o vecinătate a lui a;

Teorema II.2.11. ***Teorema lui Schwarz*** *(simetria derivatelor parțiale mixte).* $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de două ori diferențiabilă în* $a \in U$ *astfel încât există* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\forall i \neq j$ *pe o vecinătate a lui* a *și sunt continue în* a*. Atunci* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $\forall i \neq j$ $i, j = \overline{1, u}$.

Observaţia II.2.12. În cazul $n = 2$

$$d^2 f(a,b) = f''_{x^2}(a,b)\,\mathrm{d}\,x^2 + 2f''_{xy}(a,b)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + f''_{y^2}(a,b)\,\mathrm{d}\,y^2.$$

Observaţia II.2.13. Derivate parțiale de ordin m în raport cu $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ în $a \in U$. Presupunem că există derivate parțiale de ordinul $m-1$ într-o vecinătate a lui a. Dacă există și este finită

$$\begin{aligned}\lim_{x_{i_1} \to a_{i_1}} &= \frac{\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(a_1, \dots, x_{i_1}, \dots, a_m) - \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(a)}{x_{i_1} - a_{i_1}} \\ &= \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}(a).\end{aligned}$$

Definiţia II.2.14. *Fie* $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*; funcția* f *este de* $(m-1)$ *ori diferențiabilă într-o vecinătatea a lui* $a \in U$ *și* $\mathrm{d}^{m-1} f$ *este diferențiabilă în* a*. Atunci spunem că* f *este de* m *ori diferențiabilă în* a*.*

Teorema II.2.15. $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funcția este de* m *ori diferențiabilă în* $a \in U$ *astfel încât există derivate parțiale de ordin* m *mixte definite într-o vecinătate a lui* a *și sunt continue în* a*. Atunci:*

$$d^m f(a) = \sum_{i_1, \dots, i_m = 1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(a)\,\mathrm{d}\,x_{i_1} \dots \mathrm{d}\,x_{i_m}$$

și

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(a) = \frac{\partial^m f}{\partial x_{\sigma(i_1)} \partial x_{\sigma(i_2)} \dots \partial x_{\sigma(i_m)}}(a),$$

oricare ar fi σ *permutare a mulțimii* $\{i_1, \dots, i_m\}$*.*

Generalizare

Observaţia II.2.16. Cu Schwarz avem

$$\mathrm{d}^2 f(a,b) = f''_{x^2}(a,b)\,\mathrm{d}\,x^2 + 2f''_{xy}(a,b)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + f''_{y^2}(a,b)\,\mathrm{d}\,y^2.$$

$$\mathrm{d}^2 f(a,b,c) = f''_{x^2}(a,b,c)\,\mathrm{d}\,x^2 + f''_{y^2}(a,b,c)\,\mathrm{d}\,y^2 + f''_{z^2}(a,b,c)dz^2$$
$$+2f''_{xy}(a,b,c)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + 2f''_{yz}(a,b,c)\,\mathrm{d}\,ydz + 2f''_{zx}(a,b,c)dz\,\mathrm{d}\,x.$$

$$\mathrm{d}^3 f(a,b) = f'''_{x^3}(a,b)\,\mathrm{d}\,x^3 + 3f'''_{x^2y}(a,b)\,\mathrm{d}\,x^2\,\mathrm{d}\,y + 3f'''_{xy^2}(a,b)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y^2 + f'''_{y^3}(a,b)\,\mathrm{d}\,y^3$$

unde

$$\mathrm{d}^3 f(a,b) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}\,x + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}\,y\right)^{(3)} f(a,b)$$

$$f'''_{x^2y}(a,b)\,\mathrm{d}\,x^2\,\mathrm{d}\,y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

$$f'''_{xy^2}(a,b)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Teorema II.2.17. *a) Fie $f \in C^1(U)$ - funcție diferențiabilă și $\mathrm{d}\,f$ continuă $\Leftrightarrow$ f funcție continuă și $\exists f'_x, f'_y$ continue pe U.*

b) Fie $f \in C^2(U)$ - funcție de două ori diferențiabilă cu $df, d^2 f$ continue (sau $f \in C^1(U)$ și de două ori diferențiabilă cu $\mathrm{d}^2\, f$ continuă) $\Leftrightarrow$ f continuă și $\exists f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$ continue pe U.

Definiţia II.2.18. *Fie $F : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ cu $x \in U$ și $f_i : U \to \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1,n}$ funcții care au derivate parțiale în raport cu fiecare variabilă în punctul $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$, fixat. Considerăm matricea $m \times n$* $J_F(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$ *numită matricea Jacobi a lui F în a.*

Dacă $m = n$ avem $\det J_F(a) = \dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a)$ *care se numește* jacobianul *sau determinantul funcțional al funcțiilor $f_1, \ldots, f_n$ în punctul a.*

Definiţia II.2.19. *$F : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ cu $a \in U$. Atunci F este diferențiabilă în a dacă funcțiile $f_1, \ldots, f_m$ sunt diferențiabile în a și avem*

$$\mathrm{d}\,F(a) = (\mathrm{d}\,f_1(a), \ldots, \mathrm{d}\,f_m(a)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\,x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}\,x_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{d}\, f_1(a) \\ \vdots \\ \mathrm{d}\, f_m(a) \end{pmatrix}.$$

Teorema II.2.20. *$F : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to V = \overset{\circ}{V} \subset \mathbb{R}^m$, diferențiabilă în $a \in U$, $G : V = \overset{\circ}{V} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, diferențiabilă în $b = F(a)$. Atunci $G \circ F : U \to \mathbb{R}^p$ este diferențiabilă în a și avem relațiile:*

i) $\mathrm{d}(G \circ F)(a) = \mathrm{d}\, G(b) \circ \mathrm{d}\, F(a)$;

ii) $J_{G \circ F}(a) = J_G(b) \cdot J_F(a)$.

Teorema II.2.21. *$F : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diferențiabilă în $a \in U$ atunci f este continuă în a. Reciproc nu.*

Definiţia II.2.22. *Fie $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diferențiabilă în $a \in U$. Atunci oricare ar fi vectorul $\overline{v} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$* avem derivata lui f în a după direcția $\overline{v}$ *definită prin:*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{v}}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\|\overline{v}\|} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Avem $\frac{s_i}{\|\overline{v}\|} = \cos d_i$, $i = \overline{1, n}$ cosinusurile directoare ale lui $\overline{v}$.

Observaţia II.2.23. Regulile de derivare parțială sunt aceleași cu regulile de derivare pentru funcții reale.

De reținut.

Fie $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Avem
- f este de clasă $C^0(U)$ dacă este continuă pe U;
- f este de clasă $C^1(U)$ dacă f este continuă pe U, există funcții $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1, n}$ funcții continue pe U;
- f este de clasă $C^2(U)$ dacă $f \in C^1(U)$ și $\forall i = \overline{1, n}$ avem $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1(U) \Leftrightarrow$ există $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, $\forall i, j = \overline{1, n}$ funcții continue pe U.

Notăm: $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \overset{not}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ derivata parțială de ordinul doi în raport cu x_i și x_j, $\forall 1 \le i, j \le n$.

Observații.

- Fie $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Atunci: $f \in C^2(U) \Leftrightarrow$ f continuă pe U, $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ continue pe U, $\forall i = \overline{1, n}$, $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ continue, $\forall 1 \leq i, j \leq n$.
- $f \in C^k(U)$ $(k \geq 3)$ dacă f diferențiabilă de (k) ori și $\mathrm{d}\, f, \ldots, \mathrm{d}^k\, f$ continue pe U $\Leftrightarrow$ f continuă pe U și există $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}$, $\forall 1 \leq m \leq k$ continue pe U.

Teorema lui Schwartz. $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasă $C^1(U)$. Dacă f este de două ori diferențiabilă pe U și derivatele mixte sunt continue pe U, atunci pentru oricare $a \in U$ avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \text{ pentru orice } 1 \leq i, j \leq n.$$

II.2.1 Exemple

1. Folosind definiția calculați:

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, \dfrac{\pi}{2})$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$ pentru $f(x, y) = e^{\sin xy}$;

ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1)$ pentru $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soluție:

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x, \frac{\pi}{2}) - f(1, \frac{\pi}{2})}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{\sin \frac{\pi x}{2}} - e}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \cdot e^{\sin \frac{\pi x}{2}} = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(1, y) - f(1, 0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{e^{\sin y} - 1}{y} = \lim_{y \to 0} \cos y e^{\sin y} = 1$$

ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(1, 1) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)}{x-1}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 1) = \lim_{y \to 1} \frac{f(x, y) - f(x, 1)}{y - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + 1}}{y - 1}$$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{(y - 1)(y + 1)}{(y - 1)\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + 1}\right)} = \frac{2}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}}{(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{2(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{4} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1}{x+1)}x - 1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

□

2. Calculați derivata funcției $f(x,y,z) = 2x^2 - 3y^2 + 6xyz$ în punctul $M(1,1,0)$ după direcția $\overrightarrow{MN}$, $N(4,-2,3)$.

   Soluție: $\overrightarrow{MN} = \overline{v} = (3,-3,3) \Rightarrow \|\overline{v}\| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ cosinusurile directoare ale direcției MN.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 6yz,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -6y + 6xz,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 6xy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0) = 6,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0) = -6,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0) = 6.$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0)\cos\gamma$$

$$= \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}.$$

□

3. Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi pentru

$$f(x,y) = xy \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \text{ cu } xy \neq 1$$

   .

   Soluție: $\frac{\partial f}{\partial x} = y \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + xy \frac{\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}$

$$= y \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + xy \frac{\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}}{\frac{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2}{(1-xy)^2}}$$

$$= y \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \frac{xy(1+y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \frac{xy}{1+y^2}.$$

Înlocuim y prin x și x prin y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \frac{xy}{1+x^2}.$$

□

4. Derivatele parțiale de ordinul doi pentru $f(x,y) = \ln(x+y^2)$.

Soluție: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{2y}{x+y^2}\right)'_x = \frac{-2y}{(x+y^2)^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{2y}{x+y^2}\right)'_y = \frac{2(x+y^2)-4y^2}{(x+y^2)^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$. □

5. Calculați $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ pentru $f(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y))$ unde $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = e^{xy}$. Calculați $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Soluție: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$; $\frac{\partial v}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = xe^{xy}$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} 2x + ye^{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \frac{\partial \varphi}{\partial u} + xe^{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + ye^{xy} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + 2\frac{\partial \varphi}{\partial u} + y^2 e^{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$

$= 2x\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} 2x + ye^{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}\right) + ye^{xy}\left(2x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + ye^{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right) + 2\frac{\partial \varphi}{\partial u} +$

$+ y^2 e^{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 4xye^{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + y^2 e^{2xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial u} + y^2 e^{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2y \frac{\partial \varphi}{\partial u} + xe^{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = -2y\left(2x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + ye^{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}\right)$

$+ xe^{xy}\left(2x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + ye^{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right) + (1+xy)e^{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 2(x^2 - y^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + xye^{2xy}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + (1+xy)e^{xy}\frac{\partial \varphi}{\partial v}. \square$$

6. Calculați $\mathrm{d}\, f$ și $\mathrm{d}^2\, f$ pentru $f(x,y,z) = \cos(x+2y+3z)$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

   Soluție: $\mathrm{d}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}\, x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}\, y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}\, z\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x+2y+3z)(\mathrm{d}\, x + 2\,\mathrm{d}\, y + 3\,\mathrm{d}\, z)$ în general $\mathrm{d}^2\, f(a) = \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\,\mathrm{d}\, x_i\,\mathrm{d}\, x_j \Rightarrow$

   $$d^2 f(a) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{d}\, x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\mathrm{d}\, x_n\right)^{(2)} f(a).$$

   $n = 3 \Rightarrow \mathrm{d}^2\, f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}\, x^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}\, y^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\mathrm{d}\, z^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}\, x\,\mathrm{d}\, y + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\mathrm{d}\, y\,\mathrm{d}\, z + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\mathrm{d}\, z\,\mathrm{d}\, x = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}\, x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}\, y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^{(2)}$.

   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos(x+2y+3z)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\cos(x+2y+3z)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -9\cos(x+2y+3z)$

   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2\cos(x+2y+3z)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -6\cos(x+2y+3z)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -3\cos(x+2y+3z)$.

   $\mathrm{d}^2\, f = -\cos(x+2y+3z)(\mathrm{d}\, x^2 + 4\,\mathrm{d}\, y^2 + 9\,\mathrm{d}\, z^2 + 4\,\mathrm{d}\, x\,\mathrm{d}\, y + 12\,\mathrm{d}\, y\,\mathrm{d}\, z + 6\,\mathrm{d}\, z\,\mathrm{d}\, x) \Rightarrow$

   $\mathrm{d}^2\, f = -\cos(x+2y+3z)(\mathrm{d}\, x + 2\,\mathrm{d}\, y + 3\,\mathrm{d}\, z)^2.$ $\square$

7. Să se afle matricea Jacobi pentru funcția $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x+y^2, xe^y)$. Calculați $\mathrm{d}\, F$.

   Soluție: $f_1(x,y) = x + y^2$, $f_2(x,y) = xe^y$

   $$J_F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ e^y & xe^y \end{pmatrix};$$

   $$\mathrm{d}\, F = J_F \begin{pmatrix} \mathrm{d}\, x \\ \mathrm{d}\, y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ e^y & xe^y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}\, x \\ \mathrm{d}\, y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\, x + 2y\,\mathrm{d}\, y \\ e^y\,\mathrm{d}\, x + xe^y\,\mathrm{d}\, y \end{pmatrix}. \square$$

8. Să se studieze diferențiabilitatea în $(0,0)$ a funcției

   $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x-y}{x+y}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

calculând $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ și verificând continuitatea în $(0,0)$ a celor două derivate parțiale de ordinul unu.

Soluție: $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow$
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(\dfrac{x^2y - xy^2}{x+y}\right)'_x = \dfrac{(2xy - y^2)(x+y) - x^2y + xy^2}{(x+y)^2}$
$= \dfrac{2x^2y + 2xy^2 - xy^2 - y^3 - x^2y + xy^2}{(x+y)^2}$

$$(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2y + 2xy^2 - y^4}{(x+y)^2} = y\frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0.$$

Deci: $\dfrac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y \cdot \frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{x^2y - xy^2}{x+y}\right)'_y = \frac{(x^2 - 2xy)(x+y) - x^2y + xy^2}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{x^3 + x^2y - 2x^2y - 2xy^2 - x^2y + xy^2}{(x+y)^2} = \frac{x^3 - 2x^2y - xy^2}{(x+y)^2}$$

$$= x\frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x+y)^2}.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x \cdot \frac{x^2-2xy-y^2}{(x+y)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Studiem continuitatea pentru $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ și $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Avem $|x^2 \pm 2xy - y^2| \leq M(x+y)^2$ cu M constantă pozitivă.

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = |y|\frac{|x^2+2yx-y^2|}{(x+y)^2} \le M|y| \le M\left\|(x,y)-(0,0)\right\|$
$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}$ continuă în $(0,0) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}$ continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Analog, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Deci f are *derivate parțiale de ordinul unu continue* pe $\mathbb{R}^2$; f este *continuă* pe $\mathbb{R}^2$.

$$|f(x,y)-f(0,0)| = |xy|\frac{|x-y|}{|x+y|} \approx |xy| \le x^2+y^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0)$$

Atunci f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$ deci f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$. □

De reținut

- $f \in C^1(U)$ atunci f diferențiabilă pe U (în orice punct din U). Reciproc, nu.
- f este două diferențiabilă în a, dacă:

  - f diferențiabilă într-o vecinătate a lui a;

  - $\mathrm{d}\, f$ este diferențiabilă în a.
- f este de două ori diferențiabilă pe U dacă f diferențiabilă pe U și $\mathrm{d}\, f$ este diferențiabilă pe U; $\mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}\, f)$.
- $f \in C^2(U) \Rightarrow f$ este de două ori diferențiabilă pe U. Reciproc, nu.
- $\mathrm{d}\, f : U \to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $\mathrm{d}\, f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liniară, continuă.

  $\mathrm{d}^2 f : U \to L_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $\mathrm{d}^2 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ biliniară, continuă.
- Aproximarea prin diferențială:

$$f(x) \simeq f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot(x_i-a_i).$$

9. Cu ajutorul diferențialei unei funcții de mai multe variabile, calculați $(1.03)(2.02)^2(3.05)^3$

Soluție: $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $a = (a_1,a_2,a_3) = (1,2,3)$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3$; $\frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2$. $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) = 4 \cdot 27 = 108$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) = 2 \cdot 2 \cdot 27 = 108$; $\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3) = 3 \cdot 4 \cdot 9 = 108$.

$f(1.03, 2.02, 3.05) \approx f(1,2,3) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) \cdot (1.03 - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) \cdot (2.02 - 1) + + \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3) \cdot (3.05 - 1) = 108(1 + 0.03 + 0.02 + 0.05) = 108 \cdot 1.1 = 118.8$. □

II.3 Extreme locale pentru funcții de mai multe variabile. Funcții implicite.

Definiţia II.3.1. *Fie* $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *o funcție continuă pe* U *și fie* $a \in U$. *Spunem că punctul* a *este punct de* extrem local *pentru funcția* f *dacă există o bilă* $B(a,r) = \{x \in U | \|x - a\|_2 < r\} \subset U$ *astfel încât pentru orice* $x \in B(a,r)$ *avem relația* $f(x) - f(a) \geq 0$ *sau* $f(x) - f(a) \leq 0$ *ceea ce înseamnă că* a *este minim local sau maxim local.*

Teorema II.3.2. *Fie* $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *o funcție de clasă* C^1 *pe* U *și* a *un punct de extrem local pentru* f. *Atunci* $\mathrm{d}\, f(a) = 0$.

Definiţia II.3.3. *Un punct* $a \in U$ *se numește punct* critic *sau* staționar *pentru funcția* $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferențiabilă pe* U *dacă* $\mathrm{d}\, f(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$.

Teorema II.3.4. *(Formula lui Taylor) Fie* $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *o funcție de clasă* $C^{n+1}(U)$ *și fie* $B(a,r) \subset U$. *Atunci oricare ar fi* $x \in B(a,r)$ *există un punct intermediar* ξ *între* a *și* x *cu proprietatea*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\,\mathrm{d}\, f(a)(x-a) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(a)(x-a)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}\,\mathrm{d}^n f(a)(x-a)^n + \frac{1}{n+1!}\,\mathrm{d}^{n+1} f(\xi)(x-a)^{n+1}$$

unde primii $(n+1)$ *termeni formează* polinomul Taylor de ordinul n *în punctul* a, *iar ultimul termen este* restul *sub forma lui* Lagrange de ordinul n.

Observaţia II.3.5. $\mathrm{d}\, f(a)(x-a)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)$

$$\mathrm{d}^2\, f(a)(x-a)^2=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1-a_1)+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n-a_n)\right]^{(2)}$$

respectiv

$$\mathrm{d}^{n-1}\, f(a)(x-a)^{n-1}=\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(n-1)} f(a),$$

unde $(2),\ldots,(n-1)$ reprezintă puterea simbolică.

II.4 Calculul punctelor de extrem. Extreme cu legături.

Propoziţia II.4.1. *Dacă* $f=f(x_1,\ldots,x_n)$, $f:U=\overset{\circ}{U}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *de clasă* C^2 *pe* U.

i) Găsim punctele critice ale lui f *din sistemul*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n)=0,\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_n)=0.$$

Fie $(a_1,\ldots,a_n)=0$ punct critic *sau staționar.*

ii) Scriem matricea hessiană $H=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)_{1\le i,j\le n}$.

iii) Calculăm valorile proprii ale matricii H.

- *Dacă toate valorile proprii sunt* strict pozitive, *rezultă că* a *este* minim local.
- *Dacă toate valorile proprii sunt* strict negative *rezultă că* a *este* maxim local.
- *Dacă unele valori proprii sunt strict negative, iar altele sunt strict pozitive rezultă că* a *nu este punct de extrem (e punct șa).*
- *Dacă 0 se află printre valorile proprii, rezultă că semnul diferenței* $f(x_1,\ldots,x_n)-f(a_1,\ldots,a_n)$ *îl studiem cu ajutorul* formulei lui Taylor.

Propoziţia II.4.2. *Dacă* $f=f(x,y)$.

i) *Determinăm punctele critice din sistemul* $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ *și* $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. *Fie* $A = (a, b)$ *un punct critic.*

ii) *Se calculează* $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$.

- *Dacă* $r > 0$ *și* $rt - s^2 > 0$ *atunci* (a, b) *este* minim local.
- *Dacă* $r < 0$ *și* $rt - s^2 > 0$ *atunci* (a, b) *este* maxim local.
- *Dacă* $rt - s^2 < 0$ *atunci* (a, b) *nu este extrem local (este punct șa).*
- *Dacă* $rt - s^2 = 0$ *atunci pentru a stabili dacă* (a, b) *este sau nu extrem pentru* f *studiem semnul diferenței* $f(x, y) - f(a, b)$ *cu formula Taylor.*

Teorema II.4.3. *(Teorema funcțiilor implicite). Fie funcția* $F : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *de clasă* C^2 *pe* U *și fie punctul* $(a, b, c) \in U$ *astfel încât:*

$$F(a, b, c) = 0 \text{ și } \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0.$$

Atunci există o vecinătate $V \subset \mathbb{R}^2$ *a punctului* (a, b) *a astfel încât* există și este unică *o funcție* $z : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de clasă* C^2 *pe* V *cu proprietățile:* $(x, y, z(x, y)) \in U$, $F(x, y, z(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in V$ *și* $z(a, b) = c$.

Observaţia II.4.4. i) $z = z(x, y)$ se numește *funcție implicită* definită de relația $F(x, y, z) = 0$, numită ecuație implicită.

ii) Aplicăm derivarea funcțiilor compuse:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \end{array}\right. .$$

iii) Pentru funcțiile definite implicit se calculează punctele de extrem după metoda anterioară.

II.4.1 Extreme cu legături

Fie $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe U cu legăturile $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$ unde $\varphi_1, \ldots, \varphi_m : U \to \mathbb{R}$ de clasă C^1.

Se formează lagrangeanul $F : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definit prin $F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots \lambda_m\varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$ cu $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *multiplicatorii lui Lagrange*. Aflăm *punctele critice și multiplicatorii lui Lagrange* ale lui F în sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

după care pentru fiecare caz în parte, aflăm punctele de extrem cu legături.

II.4.2 Aplicații

1. Folosind polinomul Taylor de ordinul doi calculați valoarea aproximativă pentru $(0,95)^{2,01}$

   Soluție: $f(x, y) = x^y$, alegem punctul $(a, b) = (1, 2)$ și $(x, y) = (0,95, 2,01)$

   $$f(x, y) \approx f(1, 2) + \frac{1}{1!}\,\mathrm{d}\,f(1, 2)(x-1, y-2) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2\,f(1, 2)(x-1, y-2)+$$

   $$= f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y-2) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 2)(x-1)^2\right.$$

   $$\left.+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2)(x-1)(y-2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 2)(y-2)^2\right].$$

   $$f(1, 2) = 1^2 = 1;\ \frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1};\ \frac{\partial f}{\partial y} = \left[e^{y \ln x}\right] ț_y = x^y \ln x;$$

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^y \ln x\right) = yx^{y-1} \cdot \ln x + x^{y-1};$$

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y(\ln x)^2 + x^{y-1}.$$

   Deci $f(1, 2) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 2) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 2) = 1$.

$f(0,95;2,01) \approx 1+2(0,95-1)+\frac{1}{2}\left[2\cdot(0,95-1)^2+2(0,95-1)(2,01-2)+\right.$
$\left.+(2,01-2)^2\right] = 1-2\cdot 0,05+(-0,05)^2-0,05\cdot 0,01+(0,01)^2\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$(0,95)^{2,01} \approx 1-0,1+0,0025-0,0005+0,00005 = 0,902$$

$\square$

2. Calculați extremele pentru funcțiile:

   a) $f(x,y) = (x+1)(y+1)(x+y)$;

   b) $f(x,y) = (3x^2-y)(5x^2-y)$.

Soluție: a) $f(x,y) = (xy+x+y+1)(x+y) = x^2y+xy^2+x^2+xy+xy+y^2+x+y = x^2y+xy^2+x^2+y^2+2xy+x+y$.

Puncte critice $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy+y^2+2x+2y+1=0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2+2xy+2y+2x+1=0 \end{cases}$

scădem ecuația (1) din a doua ecuație $\begin{cases} (1) \\ (x-y)(x+y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \\ x=y \end{cases}$ sau $\begin{cases} (1) \\ x=-y \end{cases}$

(I) $\begin{cases} x=y \\ 2x^2+x^2+4x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+4x+1=0 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} (3x+1)(x+1)=0 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ și $B(-1,-1)$ soluții ale sistemului I

(II) $\begin{cases} x=-y \\ -2x^2+x^2+2x-2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x=-y \end{cases} \Rightarrow C(1,-1)$ și $D(-1,1)$ soluții ale sistemului II. Punctele *critice* ale funcției f sunt: $A\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$, $B(-1,-1)$, $C(1,-1)$ și $D(-1,1)$.

Calculăm: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y+2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2x+2y+2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x+2$.

Pentru $A\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ avem:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}+2 = \frac{4}{3}$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}$$
$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}.$$

Avem: $rt - s^2 = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{3} > 0$, $r > 0 \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ este punct de minim local. $B(-1,-1) \Rightarrow r = -2+2 = 0$, $s = -2$, $t = 0 \Rightarrow rt - s^2 = -4 < 0 \Rightarrow B(-1,-1)$ nu este extrem local (este punct șa). $C(1,-1) \Rightarrow r = 0$, $s = 2$ și $t = 4 \Rightarrow rt - s^2 = -4 < 0 \Rightarrow C(1,-1)$ nu este extrem local (este punct șa). $D(1,1) \Rightarrow r = 4$, $s = 2$ și $t = 0 \Rightarrow rt - s^2 = -4 < 0 \Rightarrow D(-1,1)$ nu este extrem local (este punct șa).

b) $f(x,y) = 15x^4 - 3x^2y - 5x^2y + y^2 = 15x^4 - 8x^2y + y^2$.

Punctele critice

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 60x^3 - 16xy = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -8x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x(15x^2 - 4y) = 0 \\ 4x^2 = y \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} y = 4x^2 \\ 4x(15x^2 - 16x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0)$ singurul punct critic. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 180x^2 - 16y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -16x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $r = 0$, $s = 0$, $t = 2 \Rightarrow rt - s^2 = 0 \Rightarrow$ stabilim dacă punctul critic $A(0,0)$ este sau nu extrem local cu formula Taylor: o scriem pe cea cu polinomul Taylor de ordinul 2, deoarece $\mathrm{d}\, f(0,0)(x,y) = 0$.

Avem cu formula Taylor:

$$f(x,y) - f(0,0) \approx \frac{1}{1!}\,\mathrm{d}\, f(0,0)(x,y) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(0,0)(x,y)^2 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right] \Rightarrow$$
$$f(x,y) - f(0,0) \approx y^2 > 0.$$

Deci $f(x,y) \geq f(0,0) \Rightarrow A(0,0)$ este minim local. □

3. Aflați extremele funcției $z = z(x,y)$ definită implicit de ecuația
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 - x^2 - z^2.$$

Soluție: $F(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2 + x^2 + z^2$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2 + z^2) + 2x = 2x(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1).$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2 + z^2).$
$\dfrac{\partial F}{\partial z} = 4z(x^2 + y^2 + z^2) + 2z = 2z(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1) \neq 0 \Rightarrow z \neq 0.$
Punctele critice ale lui $z = z(x, y)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{x}{z} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{y\cdot(x^2+y^2+z^2)}{2z\cdot(2x^2+2y^2+2z^2+1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$x = y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$ punct staționar pentru z.

$z \neq 0$. Înlocuim $x = y = 0$ în ecuație și obținem $z^4 + z^2 - a^2 = 0 \Rightarrow z^2 = \frac{-1\pm\sqrt{1+4a^2}}{2}$ și convine numai $z^2 = \frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2} \Rightarrow z(0, 0) = +\sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}}$ sau $z(0, 0) = -\sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z(x, y) - x\dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y)}{z^2(x, y)} \Rightarrow r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{-1}{z(0, 0)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x\dfrac{\partial z}{\partial y}(x, y)}{z^2(x, y)} \Rightarrow s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{4z} + \frac{y}{4z(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1)} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{z(x, y) - y\dfrac{\partial z}{\partial y}(x, y)}{4z^2(x, y)}$$
$$+\frac{1}{4}\frac{z(2x^2+2y^2+2z^2+1)-y\left[\frac{\partial z}{\partial y}(2x^2+2y^2+2z^2+1)+z\left(4y+4z\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]}{z^2(2x^2+2y^2+2z^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) = -\frac{1}{4z(0, 0)} + \frac{1}{4z(0, 0)(2z^2 + 1)} = \frac{-z^2(0, 0)}{2z(0, 0)(2z^2(0, 0) + 1)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-z(0, 0)}{2(2z^2(0, 0) + 1)}.$$

Deci $r = -\frac{1}{z(0,0)}$, $s = 0$, $t = -\frac{z(0,0)}{2(2z^2(0,0)+1)}$, $rt - s^2 = \frac{1}{2(2z^2(0,0)+1)} > 0$.

Cazul I. $z(0,0)=\sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{c} r<0 \\ rt-s^2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,0)$ este maxim local pentru $z=z(x,y)$ definită implicit cu $z(0,0)=\sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}}$.

Cazul II. $z(0,0)=-\sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} r>0 \\ rt-s^2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,0)$ este minim local. □

4. Determinați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x-2y+2z$, unde $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2\le 9\}$.
Soluție: Aflăm întâi extremele lui f în interiorul sferei:

$$\overset{\circ}{\Omega}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2<9\}.$$

Punctele critice:

$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}=1\neq 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2\neq 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=2\neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow$ nu are extreme în $\overset{\circ}{\Omega}$, fiind funcție de clasă C^1 care nu are puncte staționare.

Aflăm extremele lui f pe sfera $x^2+y^2+z^2=9$ deci găsim extremele lui f cu legătura $x^2+y^2+z^2-9=0$ construim Lagrangeanul:

$$F(x,y,z)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-9).$$

Punctele critice și multiplicatorul lui Lagrange

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x}=1+2\lambda x=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=-2+2\lambda y=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2+2\lambda=0 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2\lambda} \\ y=\dfrac{1}{\lambda} \\ z=-\dfrac{1}{\lambda} \\ \dfrac{1}{4\lambda^2}+\dfrac{1}{\lambda^2}+\dfrac{1}{\lambda^2}=9 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda^2=\dfrac{1}{4} \\ x=-\dfrac{1}{2\lambda} \\ y=\dfrac{1}{\lambda} \\ z=-\dfrac{1}{\lambda} \end{array}\right. \Rightarrow$$

Cazul I. $\lambda=\dfrac{1}{2}\Rightarrow A(-1,2,-2)$ punct critic pentru F.

Cazul II. $\lambda=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow B(1,-2,2)$ punct critic pentru F.

Cazul I. $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x,y,z) = x - 2y + 2z + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) - \frac{9}{2}$.
$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(A) = 2\lambda = 1$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(A) = 2\lambda = 1$; $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(A) = 2\lambda = 1$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}(A) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(A) = 0$.

Matricea hessiană: $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ îi calculăm valorile proprii din polinomul caracteristic $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 1$ atunci toate valorile proprii sunt strict pozitive și $A(-1,2,-2)$ minim cu legătură pentru f sau $A(-1,2,-2)$ este minimul lui f pe sfera $x^2+y^2+z^2 = 9$ și $f(-1,2,-2) = -1-4+4 = -1$.

Cazul II. $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(x,y,z) = x - 2y + 2z - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + \frac{9}{2}$.
$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(B) = -1$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(B) = -1$; $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(B) = -1$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(B) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}(B) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(B) = 0$.

Matricea hessiană: $H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ are valorile proprii $\lambda_{1,2,3} = -1 < 0$ strict negative atunci $B(1,-2,2)$ este maximul lui f pe sfera și $f(1,-2,2) = 1+4-4 = 1$.

Deci valoarea minimă a lui f este atinsă în punctul $A(-1,2,-2)$ și este egală cu -1, valoarea maximă a lui f pe Ω se atinge în punctul $B(1,-2,2)$ și este egală cu +1.

$$f_{\min} = f(A) = -1;\ f_{\max} = f(B) = +1.$$

$\square$

Observaţia II.4.5. $f \in C^1(U)$ și $\mathrm{d}\, f(A) \neq 0$ (A nu este punct critic), unde $A \in U \Rightarrow A$ nu este extrem.

Capitolul III

Integrale.

III.1 Integrale pe intervale infinite

Definiţia III.1.1. *Fie* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *o funcție continuă. Definim* $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim\limits_{l\to\infty} \int\limits_a^l f(x)\,\mathrm{d}\,x$. *Dacă există* $\lim\limits_{l\to\infty} \int\limits_a^l f(x)\,\mathrm{d}\,x$ *și este finită atunci integrala numită improprie* $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}\,x$ *este convergentă și* $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim\limits_{l\to\infty} \int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

În caz contrar integrala este divergentă.

Criterii de convergență pentru integrale improprii.

I. Dacă $|f(x)| \leq F(x)$, $\int\limits_a^\infty F(x)\,\mathrm{d}\,x$ convergentă, atunci $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}\,x$ este convergentă - se numește criteriul comparației.

II. $f(x) \geq 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha \cdot f(x) = L$ finită. Atunci:

i) $\alpha > 1 \Rightarrow \int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}\,x$ convergentă.

ii) $\alpha \leq 1$ și avem $L \neq 0 \Rightarrow \int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}\,x$ este divergentă.

III.2 Integrale improprii din funcții nemărginite

Definiţia III.2.1. *Fie* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *nemărginită în* $c \in (a, b)$ *și continuă pe* $[a, b] \setminus \{c\}$. *Definim* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{c-\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$. *Dacă* *cele două limite există și sunt finite atunci* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ *este convergentă și* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ *se numește integrală improprie din funcție nemărginită.*

I. *Criteriul comparației.* Dacă $|f(x)| \leq F(x)$ și $\int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{d}\,x$ - convergentă, atunci $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ - convergentă.

II. Dacă $f(x) \geq 0$ și există $\lim\limits_{x\to c}(x-c)^\alpha f(x) = L$ - finită. Atunci:

i) dacă $\alpha < 1$ atunci $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ convergentă;

ii) dacă $\alpha \geq 1$ și $L \neq 0$ atunci $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ este divergentă.

III.2.1 Aplicații.

Studiați natura integralelor improprii:

1. $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^4+1}{x^6+1}\,\mathrm{d}\,x$ integrala e convergentă, deoarece: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{x^4+1}{x^6+1} = 1$ și $\alpha = 2 > 1$.

2. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$.

   Soluție: $\dfrac{1}{e^{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\ldots} < \dfrac{1}{1+x^2} = g(x)$.

   $\int\limits_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_0^\infty \dfrac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2} = \lim\limits_{l\to\infty}\int\limits_0^l \dfrac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \lim\limits_{l\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^l$

   $= \lim\limits_{l\to\infty}(\operatorname{arctg} l) = \operatorname{arctg}(\infty) = \dfrac{\pi}{2}$ - finită.

   Cu definiția $\int\limits_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}\,x$ convergentă și cu criteriul comparație avem $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$ convergentă. $\square$

3. $\int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)\mathrm{d}\,x$.

   Soluție: $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) = 0 \Rightarrow$

f este mărginită în $x = 0$.

Calculăm $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x) = \lim\limits_{l\to\infty}\left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)x^2 \underset{y=\frac{1}{x^2}}{=} \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{-a^2y} - e^{b^2y}}{y}$ $\overset{L.H.}{=} \lim\limits_{y\to 0}\left(-a^2e^{-a^2y} + b^2e^{-b^2y}\right) = b^2 - a^2$ - finită. Cum $\alpha = 2 > 1$ atunci integrala e convergentă cu criteriul II de la III.1. $\square$

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \,\mathrm{d}\, x$;

Soluție: $f(x) = \ln\sin x$ este nemărginită în $x = 0$. Fie $\forall x > 0$ $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}}\ln\sin x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{x^{-\frac{1}{2}}} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = -2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{sinx}\cdot x^{\frac{1}{2}} = 0$; $\alpha = \frac{1}{2} \in (0,1) \Rightarrow$ integrală convergentă. $\square$

III.3 Integrale cu parametru

Fie $f : [a,b]\times[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann în raport cu prima variabilă $x \in [a,b]$, $x \mapsto f(x,y)$.

Definiţia III.3.1. *Funcția* $F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ *se numește integrală cu parametru.*

Propoziţia III.3.2. *Dacă f este continuă pe $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ atunci F este continuă pe $[\alpha,\beta]$.*

Regula de derivare I. Fie $f : [a,b]\times[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ continuă și există $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continuă pe $[a,b]\times(\alpha,\beta)$. Atunci F este derivabilă pe (α,β) și $F'(y) = \int\limits_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}\,x$, pentru orice $y \in (\alpha,\beta)$.

Regula derivare II. Fie $f : [a,b]\times[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]\times[\alpha,\beta]$, există $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continuă pe $[a,b]\times(\alpha,\beta)$ și funcțiile de clasă C^1 pe (α,β), $u(y)$ și $v(y)$. Atunci funcția $F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, $F(y) = \int\limits_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ este derivabilă pe (α,β) și

$$F'(y) = \int\limits_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}\,x + f(v(y),y)\cdot v'(y) - f(u(y),y)\cdot u'(y).$$

III.3.1 Schimbarea ordinii de integrare

Fie $f : [a,b] \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci

$$\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,x = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}\,y.$$

III.3.2 Integrale improprii cu parametri

Avem ipotezele:

i) Fie $f : [a,b) \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ local integrabilă în raport cu prima variabilă ($x \mapsto f(x,y)$ este integrabilă Riemann pe $[a,\gamma]$, $\forall a < \gamma < b$).

ii) Integrală improprie $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ converge.

Atunci funcția $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ se numește *integrală improprie cu parametru.*

Definiţia III.3.3. $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ *se numește* uniform convergentă *dacă*

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \gamma_\varepsilon \in (a,b)$ *astfel încât* $\left| \int_t^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \right| < \varepsilon$, $\forall t \in (\gamma_\varepsilon, b)$ *și* $\forall y \in [\alpha,\beta]$.

Teorema III.3.4. *Fie $f : [a,b) \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a,b) \times [\alpha,\beta]$ și $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ este uniform convergentă, atunci $F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ este continuă.*

III.3.3 Derivarea integralei improprii cu parametru

Regulă de derivare.

- $f : [a,b) \times (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ continuă;
- $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ convergentă pentru orice $y \in (\alpha,\beta)$ fixat.
- $\exists \frac{\partial f}{\partial y}$ continuă pe $[a,b) \times (\alpha,\beta)$.

- $\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}\,x$, uniform convergentă pe (α,β).

  Atunci $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ este derivabilă pe (α,β) și

$$F'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}\,x,\ \forall y \in (\alpha,\beta).$$

Criteriu de comparație. $f : [a,b) \times (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ continuă, $g : [a,b) \to \mathbb{R}_+$ astfel încât:

- $|f(x,y)| \le g(x)$, $\forall x \in [a,b)$ și $\forall y \in (\alpha,\beta)$,
- $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$ integrală improprie convergentă.

Atunci $\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ este *uniform convergentă.*

Funcțiile euleriene B (Beta) și Γ (Gamma)

- $\mathrm{B} : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{B}\,(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}\,x$ există pentru orice $p > 0$ și $q > 0$ se numește funcția B și este o integrală improprie cu doi parametri.

- $\Gamma(p) = \int\limits_0^1 x^{p-1} \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ este integrală improprie cu un parametru, există pentru orice $p > 0$ și se numește funcția Γ.

Proprietăți.

i) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $\forall p > 0$ și $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $\mathrm{B}\,(p,q) = \mathrm{B}\,(q,p)$, $\forall\ p > 0$ și $q > 0$.

iii) $\Gamma(p) > 0$, $\forall\ p > 0$ și $\mathrm{B}\,(p,q) > 0$, $p > 0$, $q > 0$.

iv) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

v) $B(p,1-p) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi p)}$, $0 < p < 1$.

Aplicație.

Facem $p = q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x(1-x)}}$;

Facem $x = \sin^2 t \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Avem $t = \arcsin\sqrt{x}$, $\mathrm{d}\,x = 2\sin t \cos t \,\mathrm{d}\,t$.

Atunci: $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left[\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]^2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{2\sin t\cos t}{\sin t\cos t}\,\mathrm{d}\,t = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Efectuăm substituția $x^2 = t \Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_0^\infty e^{-t}\dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exerciții.

1. $I(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x}\,\mathrm{d}\,x$, $|a| < 1$. Se cere $I(a)$.

$I'(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\cos x \cdot (1 + a\cos x)}\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{1 + a\cos x}$.

Schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t \Rightarrow$

$$I'(a) = \frac{2}{1-a}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}.$$

Substituția $a = \cos u \Rightarrow I(a) = -\dfrac{(\arccos a)^2}{2} + c$, $I(0) = 0 \Rightarrow c = \dfrac{\pi^2}{8} \Rightarrow c = \dfrac{\pi^2}{8}$. Deci $I(a) = \dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{(\arccos a)^2}{2}$.

2. $I(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\dfrac{1 + a\sin x}{1 - a\sin x}\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\sin x}$, $|a| < 1$

$$I'(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1 + a\sin x} + \frac{1}{1 - a\sin x}\right)\mathrm{d}\,x = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\,x}{1 - a^2\sin^2 x}$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\,x}{1 - a^2\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}} = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + (1-a^2)\operatorname{tg}^2 x}\,\mathrm{d}\,x = 2\int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,u}{1 + (1-a^2)u^2}$$

$$= \frac{2}{1-a^2}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,u}{u^2 + \frac{1}{1-a^2}} = \frac{2}{1-a^2}\sqrt{1-a^2}\operatorname{arctg}(u\sqrt{1-a^2})\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} \Rightarrow$$

$I(a) = \pi \arcsin a + c \Rightarrow I(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \dfrac{1 + a\sin x}{1 - a\sin x} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\sin x} = \pi \arcsin a.$

3. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^3} \mathrm{d}\,x = ?$

Substituția $x^2 = \dfrac{t}{1-t} \Rightarrow x^2 - x^2 t = t \Rightarrow x^2 = t(1+x^2) \Rightarrow t = \dfrac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 & t = 0 \\ x = \infty & t = 1 \end{cases}$$

$$x = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}\,t}{(1-t)^2}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^3} = t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{1-t}\right)^3} = t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}(1-t)^3.$$

$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}(1-t)^3 \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} \dfrac{\mathrm{d}\,t}{(1-t)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2} \dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}{\Gamma(3)} = \dfrac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\dfrac{5}{4}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4^2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4^3}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{64}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \dfrac{5\pi}{32\sqrt{2}}.$

III.4 Integrale curbilinii

Definiţia III.4.1. *Fie funcția continuă $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. γ se numește **drum parametrizat** și $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$.*

i) *$x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, …, $x_n = x_n(t)$ se numesc ecuațiile parametrice ale drumului γ;*

ii) *$\gamma(a)$ și $\gamma(b)$ se numesc **capetele** drumului;*

iii) *dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$ drumul se numește **închis**;*

iv) ***opusul** lui $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ este definit prin*

$$\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma^-(t) = \gamma(a+b-t);$$

v) ***reuniunea** drumurilor $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^n$ o definim prin $\gamma_1 \vee \gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_1 \vee \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & t \in [b,c] \end{cases}$;*

v) *$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se numește **drum neted** dacă $\gamma \in C^1([a,b])$ și $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$;*

vi) γ *se numește drum* ***neted*** *pe* ***porțiuni*** *dacă este* ***reuniune finită*** *de drumuri netede.*

Definiţia III.4.2. *Fie* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *drum neted cu* $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$*. Lungimea drumului* γ *este*

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,\mathrm{d}\,t.$$

III.4.1 Integrala curbilinie de prima speță

Definiţia III.4.3. *Fie* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *drum neted,* $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *continuă astfel încât* $\gamma([a, b]) \subset D$*. Definim integrala curbilinie de* ***prima speță*** *prin*

$$\int_\gamma f(x, y, z)\,\mathrm{d}\,s = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,\mathrm{d}\,t.$$

Aplicație: Dacă γ este un fir material cu densitatea $\rho = \rho(x, y, z)$ avem:

- masa firului: $M = \int_\gamma \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\,s$;
- coordonatele centrului de greutate $x_G = \dfrac{1}{M}\int_\gamma x\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\,s$, $y_G = \dfrac{1}{M}\int_\gamma y\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\,s$, $z_G = \dfrac{1}{M}\int_\gamma z\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\,s$.

$\square$

III.4.2 Integrala curbilinie de speța a doua

Definiţia III.4.4. *Fie funcțiile continue* $P, Q, R : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *și drumul parametrizat* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$*, drum neted cu* $\gamma([a, b]) \subseteq D$*. Integrala curbilinie de speța a doua se definește prin:*

$$\int_\gamma P(x, y, z)\,\mathrm{d}\,x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}\,y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}\,z = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t)$$

$$+Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)]\,\mathrm{d}\,t$$

Observaţia III.4.5. 1. În două variabile

$$\int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}\,x+Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y=\int_a^b [P(x(t),y(t))\cdot x'(t)+Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)]\,\mathrm{d}\,t$$

Se poate generaliza la n variabile.

2. Considerăm vectorul $\overline{v}=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$. Atunci, dacă γ este drumul neted parametrizat, avem $\int_\gamma P\,\mathrm{d}\,x+Q\,\mathrm{d}\,y+R\,\mathrm{d}\,z=\int_\gamma \overline{v}\,\mathrm{d}\,\overline{r}$-se numește circulația câmpului vectorial $\overline{v}$ de a lungul drumului γ.

- Dacă $\overline{v}=\overline{F}$ câmp de forțe, atunci $\int_\gamma \overline{F}\,\mathrm{d}\,\overline{r}$ este lucrul mecanic al forței $\overline{F}$ pe drumul γ.
- Forma diferențială exactă $\omega=P\,\mathrm{d}\,x+Q\,\mathrm{d}\,y+R\,\mathrm{d}\,z$ se numește forma diferențială de gradul unu, unde $P,Q,R:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ funcții continue.
- ω se numește formă diferențială exactă dacă există o funcție $F:D\to\mathbb{R}$ de clasă C^1 pe D astfel încât $dF=\omega$ pe D sau $\dfrac{\partial F}{\partial x}=P$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q$ și $\dfrac{\partial F}{\partial z}=R$. Funcția F se numește **potențial scalar** sau **primitivă** pentru ω.

III.4.3 Forma diferențială închisă

ω se numește formă diferențială închisă dacă

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

1. Fie $\omega=\mathrm{d}\,F$ o formă diferențială exactă, $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ drum neted parametrizat. Atunci:

$$\int_\gamma \omega=\int_\gamma \mathrm{d}\,F=F(\gamma(b))-F(\gamma(a)).$$

Integrala curbilinie este în acest caz independentă de drum, depinzând numai de capetele drumului.

2. O formă diferențială exactă este închisă pe D. O formă diferențială închisă este locală exactă (exactă pe vecinătatea oricărui punct din D).

Exerciții.

1. $\int\limits_{\Gamma}(|x|+|y|)\,\mathrm{d}\,s$, $\Gamma : x^2+y^2 = \lambda x$. $\Gamma : \left(x-\frac{\lambda}{2}\right)^2+y^2 = \frac{\lambda^2}{4}$ parametrizat:

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda}{2}+\frac{|\lambda|}{2}\cos\theta \quad \theta \in [0,2\pi] \\ y = \frac{|\lambda|}{2}\sin\theta \end{cases}.$$

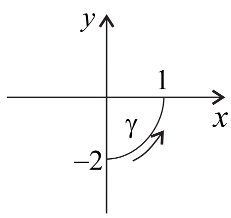
Soluție: $\mathrm{d}\,s = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4}\sin^2\theta+\frac{\lambda^2}{4}\cos\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = \frac{|\lambda|}{2}\,\mathrm{d}\,\theta.$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma}(|x|+|y|)\,\mathrm{d}\,s &= \int\limits_0^{2\pi}\frac{\lambda^2}{4}(1\pm\cos\theta+|\sin\theta|)\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= \frac{\lambda^2}{4}2\pi+\frac{\lambda^2}{4}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta-\frac{\lambda^2}{4}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= \frac{\pi}{2}\lambda^2-\frac{\lambda^2}{4}\cos\theta\Big|_0^{\pi}+\frac{\lambda^2}{4}\cos\theta\Big|_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}\lambda^2+\frac{\lambda^2}{4}\cdot 2+\frac{\lambda^2}{4}\cdot 2 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\int\limits_{\Gamma}(|x|+|y|)\,\mathrm{d}\,s = \lambda^2\left(\frac{\pi}{2}+1\right).$$

□

2. Circulația câmpului vectorial $\overline{v} = (y+1)\overline{i}+x^2\overline{j}$ de a lungul lui $\gamma : x^2+\frac{y^2}{4} = 1,\ y \le 0,\ x \ge 0.$



Soluție:

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 2\sin\theta, \quad \theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}\,x = -\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta \\ dy = 2\cos\theta\,\mathrm{d}\,\theta \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overline{v}\,\mathrm{d}\,\overline{r} &= \int_\gamma (y+1)\,\mathrm{d}\,x + x^2\,\mathrm{d}\,y = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} [(1+2\sin\theta)(-\sin\theta)+2\cos^3\theta]\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\,\theta + 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos\theta(1-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= \cos\theta\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} + 2\sin\theta\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} - \frac{2}{3}\sin^3\theta\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\
&= 1 - \frac{\pi}{2} + 2 - \frac{2}{3} = 3 - \frac{2}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{7}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{14-3\pi}{6}.
\end{aligned}$$

□

3. Fie $\omega = (y^2 - 3x^2)\,\mathrm{d}\,x + 2xy\,\mathrm{d}\,y$. Găsiți potențialul ei scalar.

Soluție: $P(x,y) = y^2 - 3x^2$, $Q(x,y) = 2xy$. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \omega$ este forma diferențială închisă.

Atunci ω este local exactă, deci există $F(x,y)$ de clasă C^1 a astfel încât

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = P \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y^2 - 3x^2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2xy \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$F(x,y) = \int (y^2 - 3x^2)\,\mathrm{d}\,x = xy^2 - x^3 + a(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + a'(y) = 2xy \Rightarrow a'(y) = 0 \Rightarrow a(y) \equiv 0 \Rightarrow F(x,y) = xy^2 - x^3.$$

□

III.5 Integrale duble

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un **domeniu mărginit** și fie $\mathbb{R}^2 = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{I}} \omega_i$ **o partiție** a lui $\mathbb{R}^2$ cu intervalele bidimensionale $\omega_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ **mărginită**. Notăm cu ω_k, $k = \overline{1,n}$ intervalele din partiție care **au puncte comune** cu D.

Mulțimea acestor intervale se numește **diviziunea** Δ a domeniului D.

Notăm $\nu(\Delta) = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \dim\omega_k$, $\dim\omega_k = (b_k - a_k)(d_k - c_k)$ sau $\dim\omega_k =$ aria (ω_k), $\nu(\Delta)$-se numește **norma diviziunii** Δ.

Definim **suma Riemann** atașată funcției f corespunzătoare diviziunii Δ a domeniului D prin $\tau_\Delta(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k, \eta_k)\text{aria}(\omega_k)$ unde $(\varepsilon_k, \eta_k) \in \omega_k$.

Notăm

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \lim_{\nu(\Delta)\to 0} \tau_\Delta(f)$$

numită **integrală dublă** a funcției f pe domeniul D. Limita este aceeași pentru orice alegere a punctelor intermediare (ε_k, η_k).

III.5.1 Calculul integralei duble

1. D este domeniul simplu în raport cu axa Oy adică:

$$D : \begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \end{cases}$$

unde $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue.

Atunci:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x.$$

2. Dacă D este *simplu în raport cu Ox*, adică

$$D : \begin{cases} c \le y \le d \\ \mu(y) \le x \le \delta(y) \end{cases}$$

unde μ și δ sunt funcții continue pe $[c,d]$. Atunci

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{\mu(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right]\mathrm{d}\,y.$$

Schimbarea de variabile la integrale duble Fie schimbarea de variabile (transformarea)

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \phi(u,v) \end{cases}, \quad \text{unde } (\varphi, \phi) : D' \to D$$

funcție care îndeplinește condițiile următoare:

i) (φ, ϕ) este bijectivă;

ii) φ, ϕ sunt continue și au derivate parțiale continue și mărginite pe D'

iii) $J = \dfrac{D(\varphi, \phi)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial u} & \dfrac{\partial \phi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq, 0$ J fiind Jacobianul transformării.

Atunci: dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe D avem

$$\iint\limits_{D'} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint\limits_{D'} f(\varphi(u, v), \phi(u, v)) \cdot \left|\frac{D(\varphi, \phi)}{D(u, v)}\right| \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$$

Exemple

i) **Coordonate polare**

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \phi\sin\theta \end{cases}, \quad \text{unde } (\rho, \theta) \in D'.$$

$|J| = \rho \Rightarrow \iint\limits_{D} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta$

ii) Coordonate polare generalizate $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}$ $|J| = ab\rho$

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint\limits_{D'} f(a\rho\cos\theta, ab\rho\sin\theta)ab\rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta.$$

Aplicații.

1. Aria unei plăci plane D

$$\mathcal{A} = \iint\limits_{D} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \text{aria } (D).$$

2. Masa unei plăci plane D de densitate $\rho(x, y) > 0$

$$M = \iint\limits_{D} \rho(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

3. Coordonatele centrului de greutate G al unei plăci plane D de densitate $\rho(x, y) > 0$.

$x_G = \frac{1}{M}\iint\limits_{D} x\rho(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $y_G = \frac{1}{M}\iint\limits_{D} y\rho(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.

4. Momentele de inerție în raport cu axele Ox și Oy.

$$I_x = \iint\limits_{D} y^2\rho(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,\ I_y = \iint\limits_{D} x^2\rho(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

iar momentul de inerție în raport cu originea este $I_o = I_x + I_y$.

Exerciții.

$\boxed{1.}$ $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, D, domeniul delimitat de parabola $y = x^2$ și de dreapta $y = 2x + 3$.

Soluție: Intersecția este

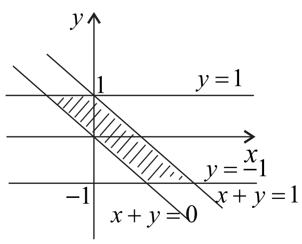
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x-3) = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

și găsim punctele: $A(-1, 1)$ și $B(3, 9)$. D este simplu în raport cu Oy : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x^2 \leq y \leq 2x + 3 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y &= \int\limits_{-1}^{3} x\,\mathrm{d}\,x \int\limits_{x^2}^{2x+3} y\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3} x \cdot y^2 \Big|_{x^2}^{2x+3} \mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \left[(2x+3)^2 - x^4\right] \mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3} x \cdot (4x^2 + 12x + 9 - x^4)\,\mathrm{d}\,x = 53 + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

$\boxed{2.}$ $\iint\limits_D \arcsin\sqrt{x+y}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, unde D este domeniul mărginit de dreptele $x + y = 0$, $x + y = 1$, $y = -1$, $y = 1$.



Soluție: Domeniul D este simplu în raport cu axa Ox:

$$\begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ -y \leq x \leq 1 - y \end{cases}$$

$$\iint\limits_D \arcsin\sqrt{x+y}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int\limits_{-1}^{1} \left[\int\limits_{-y}^{1-y} \arcsin\sqrt{x+y}\,\mathrm{d}\,x\right] \mathrm{d}\,y.$$

Facem substituția $t = x + y \Rightarrow \mathrm{d}\,t = \mathrm{d}\,x$, $x = -y \Rightarrow t = 0$, $x = 1 - y \Rightarrow t = 1$.

$$\int_{-y}^{1-y} \arcsin\sqrt{x+y}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t.$$

Facem substituția: $\arcsin\sqrt{t} = u \Rightarrow t = \sin^2 u \Rightarrow \mathrm{d}\,t = 2\sin u\cos u\,\mathrm{d}\,u$.

$$\int_{-y}^{1-y} \arcsin\sqrt{x+y}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\sin(2u)\,\mathrm{d}\,u$$

$$= -\left.\frac{u}{2}\cos(2u)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u)\,\mathrm{d}\,u = -\frac{\pi}{4}\cos\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Deci: $\iint\limits_D \arcsin\sqrt{x+y}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \dfrac{\pi}{2}$. □

$\boxed{3.}$ În coordonate polare calculați

$$\iint\limits_D xe^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y, \quad \text{unde } D : a^2 \le x^2+y^2 \le b^2,\ -x \le y \le x.$$

Soluție:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \le \rho^2 \le b^2 \\ -\cos\theta \le \sin\theta \le \cos\theta \\ x \ge 0 \Rightarrow \cos\theta \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho \in [a,b] \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$(\Leftrightarrow -1 \le \operatorname{tg}\theta \le 1)$.

$$\iint\limits_D xe^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_a^b \rho^2 e^\rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\,\mathrm{d}\,\theta = \sqrt{2}\int_a^b \rho^2 e^\rho\,\mathrm{d}\,\rho$$

$$= \sqrt{2}\left[\left.\rho^2 e^\rho\right|_a^b - 2\int_a^b \rho e^\rho\,\mathrm{d}\,\rho\right] = \sqrt{2}\,\left(b^2e^b - a^2e^a - \left.2\rho e^\rho\right|_a^b + \left.2e^\rho\right|_a^b\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[\left(b^2-2b+2\right)e^b - \left(a^2-2a+2\right)e^a\right].$$

□

$\boxed{4.}$ $y = \iint\limits_D \left(2 + \sqrt{1+x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $D : x^2+y^2-2y \le 0$

Soluție:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}, \begin{cases} 0\le\rho\le 2\sin\theta \\ \theta\in[0,2\pi] \end{cases} \Rightarrow \sin\theta\ge 0\Rightarrow\theta\in[0,\pi]$$

$D' : 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\rho\le 2\sin\theta.$

$$I=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\rho\left(2+\sqrt{1+\rho^2}\right)\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{2\sin\theta}\left(2\rho+\rho\sqrt{1+\rho^2}\right)\mathrm{d}\,\rho$$

$$=\int_0^{\pi}\left[4\sin^2\theta+\frac{1}{3}(1+4\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}\,\theta.$$

$$I=\int_0^{\pi}\left[4\sin^2\theta+\frac{1}{3}\left(1+4\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}\right]=2\pi+\int_0^{\pi}\frac{1}{3}(1+4\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,\theta.$$

□

$\boxed{5.}$ $\iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,\ D : x^2+y^2\le a^2,\ y\ge 0,\ x\ge-\sqrt{3}y.$

Soluție:

$$\left.\begin{cases} x=\rho\cos\theta,\ \theta\in[0,2\pi] \\ y=\rho\sin\theta,\ y\ge 0 \end{cases}\right\}\Rightarrow\theta\in[0,\pi]\,,\ \rho^2\le a^2\Rightarrow\rho\in[0,a].$$

$$\left.\begin{array}{c} x\ge-\sqrt{3}y \\ y\ge 0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{y}=\operatorname{ctg}\theta\ge-\sqrt{3} \\ \sin\theta\ge 0\Rightarrow\theta\in[0,\pi] \\ \operatorname{ctg}\text{ este strict descrescătoare} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \theta\le\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6} \\ \theta\in[0,\pi] \end{array}\right\}\Rightarrow\theta\in\left[0,\frac{5\pi}{6}\right],$$

$$\iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^{a}\int_0^{\frac{5\pi}{6}}\rho f(\rho)\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta=\left(\int_0^{\frac{5\pi}{6}}\mathrm{d}\,\theta\right)\left(\int_0^{a}\rho f(\rho)\,\mathrm{d}\,\rho\right)$$

$$=\frac{5\pi}{6}\left[\int_0^{a}f(\rho)\rho\,\mathrm{d}\,\rho\right].$$

□

$\boxed{6.}$ $\iint\limits_D (x^2+y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,\ D : y=x^2$ și $y^2=x.$

Soluție:

$$D:\begin{cases} 0\le x\le 1\\ x^2\le y\le \sqrt{x}\end{cases},$$

$$I=\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x=\int_0^1\left[x^2\left(\sqrt{x}-x^2\right)+\frac{1}{2}\left(x-x^4\right)\right]\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}-x^4+\frac{x}{2}-\frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}\,x=\left.\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right|_0^1-\left.\frac{3}{10}x^5\right|_0^1+\left.\frac{1}{4}x^2\right|_0^1=\frac{2}{7}-\frac{3}{10}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{75-42}{140}=\frac{33}{140}.$$

□

$\boxed{7.}$ $\iint\limits_D\left(1+\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,\ D:\begin{cases}-\frac{4b}{5a}x\le y\le\frac{3b}{5a}x\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\le 1\end{cases}.$

Soluție:

$$\begin{cases} x=a\rho\cosh\theta\\ y=b\rho\sinh\theta\end{cases}\Rightarrow J=\left|\begin{vmatrix} a\cosh\theta & a\rho\sinh\theta\\ b\sinh\theta & b\rho\cosh\theta\end{vmatrix}\right|=ab\rho.$$

$\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=ab\rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta.$

$\begin{cases}\rho^2\le 1\\ \rho\in[0,1]\end{cases}\Rightarrow x\ge 0\Rightarrow -\frac{4}{5}\le\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}\Rightarrow -\frac{4}{5}\le\frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1}\le\frac{3}{5}\Rightarrow$

$\ln\frac{1}{3}\le\theta\le\ln 2.$

$$\iint\limits_D\left(1+\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^1\int_{\ln\frac{1}{3}}^{\ln 2}ab\rho(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$=\int_{\ln\frac{1}{3}}^{\ln 2}ab\left[\int_0^1\rho(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,\rho\right]\mathrm{d}\,\theta=\frac{1}{2}\left[\int_0^1(1+\rho^2)'(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,\rho\right]\left(\int_{\ln\frac{1}{3}}^{\ln 2}ab\,\mathrm{d}\,\theta\right)$$

$$=ab\left(\ln 2-\ln\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}\left.\frac{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{ab}{3}(\ln 6)[2\sqrt{2}-1]=\frac{ab}{3}(2\sqrt{2}-1)\ln 6.$$

□

$\boxed{8.}$ i) $\iint\limits_D f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,\ D:\begin{cases}1\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 9\\ \frac{b}{a}\sqrt{3}\le\frac{y}{x}\le\frac{b}{a}\end{cases},x>0.$

Soluție:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{array}\right., \ 1 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 9 \Rightarrow 1 \leq \rho^2 \leq 9 \Rightarrow 1 \leq \rho \leq 3.$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta \in [-\pi, \pi] \\ x > 0 \Rightarrow \cos\theta \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$-\frac{b}{a}\sqrt{3} \leq \frac{b}{a}\operatorname{tg}\theta \leq \frac{b}{a} \Rightarrow -\sqrt{3} \leq \operatorname{tg}\theta \leq 1 \Rightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$$

deoarece pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tg este strict crescătoare de unde rezultă $-\sqrt{3} \leq \operatorname{tg}\theta \leq 1 \Rightarrow -\operatorname{arctg}\sqrt{3} \leq \theta \leq \operatorname{arctg} 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Atunci:

$$\iint\limits_D f\left(\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int\limits_1^3 \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}\theta\right) ab\rho\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,\rho$$

$$= \frac{ab}{2}\rho^2\Big|_1^3 \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}\theta\right)\mathrm{d}\,\theta = 4ab\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}\theta\right)\mathrm{d}\,\theta.$$

$\square$

ii) $\iint\limits_D f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,\ D: ax \leq x^2 + y^2 \leq 2ax,\ y \geq 0$

Soluție:

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ \left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array}\right. \Rightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$a\cos\theta \leq \rho \leq 2a\cos\theta$. Atunci:

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{a\cos\theta}^{2a\cos\theta} \rho^2\,\mathrm{d}\,\rho\right)\mathrm{d}\,\theta = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 7a^3\cos^3\theta\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$= \frac{7a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta\right)\mathrm{d}\,\theta = \frac{7a^3}{12}\left(\frac{1}{3}\sin 3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 3\sin\theta|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{7a^3}{12}\left(\frac{1}{3}(-1) + 3\right) = \frac{7a^3}{12}\frac{8}{3} = \frac{14a^3}{9}$$

$\square$

$\boxed{9.}$ $\iint\limits_D (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,\ D: \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2 \leq a^2 \\ x^2+y^2 \geq ax \end{array}\right.,\ y \geq 0,\ a > 0.$

Soluție:

$$\left\{\begin{array}{ll} x=\rho\cos\theta & y\ge 0\\ y=\rho\sin\theta & \theta\in[0,2\pi]\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin\theta\ge 0\\ \theta\in[0,2\pi]\end{array}\right\}\Rightarrow \theta\in[0,\pi]$$

$$a\rho\cos\theta\le\rho^2\le a^2\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} a\cos\theta\le\rho\le a,\\ \rho\ge 0,\ \theta\in[0,\pi]\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a\cos\theta\le\rho\le a\\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\end{array}\right. \quad \text{sau} \left\{\begin{array}{l} 0\le\rho\le a\\ \theta\in[\frac{\pi}{2},\pi]\end{array}\right. .$$

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{a\cos\theta}^{a}\rho^2\,\mathrm{d}\,\rho\right)\mathrm{d}\,\theta+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int\limits_0^a\rho^2\,\mathrm{d}\,\rho\right)\mathrm{d}\,\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^3\Bigg|_{a\cos\theta}^{a}\mathrm{d}\,\theta+\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}a^3\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\,\mathrm{d}\,\theta+\frac{a^3}{3}\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{a^3}{3}\frac{\pi}{2}-\frac{a^3}{3}\frac{2}{3}+\frac{a^3}{3}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi a^3}{3}-\frac{2a^3}{9}=\frac{a^3}{9}(3\pi-2).$$

□

$\boxed{10.}$ Aria domeniului D limitat de: $y=ax$, $y=bx(0<a<b)$, $y^2=px$, $y^2=qx$, $0<p<q$, $x>0$, $y>0$.

Soluție: Facem transformarea: $\left\{\begin{array}{l} u=\frac{y^2}{x}\\ v=\frac{y}{x}\end{array}\right.$, $(u,v)\in[p,q]\times[a,b]$.

$$\left\{\begin{array}{l} y^2=xu\\ y^2=x^2v^2\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\frac{u}{v^2}\\ y=\frac{u}{v}\end{array}\right.\Rightarrow J=\left|\begin{array}{cc}\frac{1}{v^2} & -\frac{2u}{v^3}\\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2}\end{array}\right|=\frac{u}{v^4}$$

$$\text{Aria } D=\iint\limits_D\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int\limits_p^q\int\limits_a^b\frac{u}{v^4}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v=\left(\int\limits_p^q u\,\mathrm{d}\,u\right)\left(\int\limits_a^b v^{-4}\,\mathrm{d}\,v\right)$$

$$=\frac{u^2}{2}\bigg|_p^q\frac{v^{-3}}{-3}\bigg|_a^b=-\frac{1}{6}(q^2-p^2)(\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1}{a^3}\right)=\frac{(q^2-p^2)(b^3-a^3)}{6a^3b^3}$$

$$=\frac{1}{6a^3b^3}(q^2-p^2)(b^3-a^3).$$

□

$\boxed{11.}$ $\iint\limits_D\sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $D:\triangle AOB$, $A(1,-1)$, $B(1,1)$.

Soluție: $OA:\frac{x-1}{y+1}=-1\Rightarrow x-1=-y-1\Rightarrow y=-x$.

$OB : \frac{x-1}{y-1} = 1 \Rightarrow y = x.$
$AB : \frac{x-1}{y+1} = 0 \Rightarrow x = 1.$
Atunci: $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -x \leq y \leq x \end{cases}$

$$I = \iint\limits_D \sqrt{x^2 - y^2} \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-x}^{x} \sqrt{x^2 - y^2} \,\mathrm{d}\, y \right) \mathrm{d}\, x$$

$$= 2 \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{x} \sqrt{x^2 - y^2} \,\mathrm{d}\, y \right) \mathrm{d}\, x.$$

$$\left. \begin{array}{c} y = x \sin\theta \\ y = 0,\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = 0,\ \theta = \frac{\pi}{2};\ \mathrm{d}\, y = x \cos\theta \,\mathrm{d}\,\theta.$$

$$I = 2 \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2\theta \,\mathrm{d}\,\theta \right) \mathrm{d}\, x = 2 \left(\int\limits_0^1 x^2 \,\mathrm{d}\, x \right) \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\,\theta \right)$$

$$= \frac{2}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \,\mathrm{d}\,\theta = \frac{2}{3}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}.$$

□

$\boxed{12.}$ $\iint\limits_D f\left(\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y,\ a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b,\ -x \leq y \leq x,\ x > 0.$

Soluție:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} a^2 \leq \rho^2 \leq b^2 \Rightarrow \rho \in [a, b].$$

$\left. \begin{array}{c} \theta \in [-\pi, \pi] \\ \cos\theta \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$-x \leq y \leq x \Leftrightarrow -1 \leq \tfrac{y}{x} \leq 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -1 \leq \operatorname{tg}\theta \leq 1 \\ \operatorname{tg}\theta \text{ strict crescătoare pe } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$-\operatorname{arctg} 1 \leq \theta \leq \operatorname{arctg} 1 \Rightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

$$\iint\limits_D f\left(\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y = \int\limits_a^b \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \rho f(\operatorname{tg}\theta) \,\mathrm{d}\,\rho \,\mathrm{d}\,\theta$$

$$= \left(\int\limits_a^b \rho \,\mathrm{d}\,\rho \right) \left(\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\operatorname{tg}\theta) \,\mathrm{d}\,\theta \right) = \frac{b^2 - a^2}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\operatorname{tg}\theta) \,\mathrm{d}\,\theta.$$

$\square$

III.6 Integrale triple

Considerăm domeniul $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mărginit și $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funcție mărginită.

Fie $\mathbb{R}^3 = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{I}} v_i$ o partiție a lui $\mathbb{R}^3$, unde $v_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i] \times [e_i, f_i]$ sunt intervale tridimensionale. Le reținem pe acele v_i care au puncte comune cu Ω și notăm mulțimea lor prin $\Delta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ numită *diviziune* a lui Ω.

$\gamma(\Delta) = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \mathrm{vol}(v_k)$ denumită *norma diviziunii* Δ.

Notăm:

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \delta_k)\mathrm{vol}(v_k), \text{ unde } (\xi_k, \eta_k, \delta_k) \in v_k$$

și se numește *suma Riemann* asociată lui f corespunzătoare diviziunii Δ.

Numim *integrala triplă* a lui f pe domeniul Ω

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_\Delta(f)$$

limita fiind aceeași indiferent de alegerea punctelor intermediare $(\xi_k, \eta_k, \delta_k)$.

Cum se calculează o integrală triplă?

Dacă Ω este limitat de o *suprafață cilindrică* cu *generatoarele paralele* cu axa Oz, care intersectează pe Ω după *curba închisă* γ.

Curba γ *se proiectează pe* xOy *după curba* Γ ce determină în interior domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$.

Curba γ împarte domeniul Ω în suprafața inferioară $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$ și în suprafața superioară $z = \psi(x, y)$ cu $(x, y) \in D$.

Atunci când f *este continuă pe* D avem

$$\iiint\limits_\Omega f(x, y, z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \iint\limits_D \left[\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}\,z\right]\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

Schimbarea de variabilă la integrala triplă

Fie schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad \text{unde } (u, v, w) \in \Omega_1$$

iar funcțiile x, y, z satisfac condițiile:

i) $(x, y, z) : \Omega_1 \to \Omega$ este funcție bijectivă;

ii) x, y, z sunt continue și derivatele lor parțiale continue;

iii) $J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ jacobianul transformării este nenul pe Ω.

Atunci

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot |J|\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v\,\mathrm{d}\,w.$$

Cazuri particulare.

a) **Coordonate sferice**:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\sin\varphi \\ y = \rho\sin\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{c} (\rho,\theta,\varphi) \in \Omega_1 \\ \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta\sin\varphi \end{array}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \iiint\limits_{\Omega_1} f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,\varphi.$$

b) **Coordonate cilindrice**: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \iiint\limits_{\Omega_1} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,z.$$

Aplicații ale integralei triple.

1. $\mathrm{vol}(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$, notăm $\mathrm{d}\,v = \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$;

2. $M(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,v$ unde $\rho(x,y,z)$ este densitatea

3. Coordonatele centrului de greutate: $x_G = \frac{1}{M(\Omega)} \cdot \iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,v$;

$y_G = \frac{1}{M(\Omega)} \cdot \iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,v$;

$z_G = \frac{1}{M(\Omega)} \cdot \iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,v$.

4. Momentele de inerție în raport cu planele și cu axele de coordonate, în raport cu originea: $I_{xOy} = \iiint\limits_{\Omega} z^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,v$, $I_{yoz} = \iiint\limits_{\Omega} x^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,v$, $I_{zOx} = \iiint\limits_{\Omega} y^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,v$,

$I_{Ox} = \iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,v$, $I_{Oy} = \iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,v$, $I_{Oz} = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,v$, $I_O = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,v$,

Exerciții rezolvate.

1. Calculați volumul corpului Ω: $x^2+y^2 \leq 4x$, $x^2+y^2 \geq 4z$, $z \geq 0$.

Soluție: Ω este domeniul cuprins între interiorul cilindrului $x^2+y^2 \leq 4x$ și exteriorul paraboloidului de rotație $x^2+y^2 \geq 4z$.

Proiecția lui Ω pe XoY este: $D = \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega : x^2+y^2 \leq 4x$ și avem $0 \leq z \leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)$.

Deci: $\mathrm{vol}(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \iint\limits_{D} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \int\limits_{0}^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)} \mathrm{d}\,z$

$= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4x} \frac{1}{4}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$; $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \to \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 4\cos\theta \\ \cos\theta \geq 0 \\ \theta \in [-\pi,\pi] \end{cases} \Bigg| \to \theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

Deci: $\mathrm{vol}(\Omega) = \dfrac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\,\theta \int\limits_{0}^{4\cos\theta} \rho^3\,\mathrm{d}\,\rho = \dfrac{1}{16}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16^2\cos^4\theta\,\mathrm{d}\,\theta = 32\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^4\theta\,\mathrm{d}\,\theta.$

$\cos^2\theta = y \Rightarrow \theta = \arccos\sqrt{y} \Rightarrow d\theta = \dfrac{-1}{2\sqrt{y}\sqrt{1-y}}\,\mathrm{d}\,y \Rightarrow$

$$\mathrm{vol}(\Omega) = 32\int_0^1 y^2 \frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}\,y = 16\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}(1-y)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,y$$

$$= 16B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = 16\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = 16\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2!} = 16\frac{3\pi}{8} = 6\pi.$$

$\square$

2. Calculați integrala $\mathcal{I} = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$, unde Ω este interiorul elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$.

Soluție: $x = a\rho\cos\theta\sin\varphi$, $y = b\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = c\rho\cos\varphi$, $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in [0,\pi]$.

$I = \int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} abc\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,\varphi = abc\int\limits_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi.$

$\int\limits_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho \overset{\rho=sint}{=} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{\pi}{16}.$

$\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi = -\cos\varphi|_0^{\pi} = 2.$

$I = abc\dfrac{\pi}{16}\cdot 2\pi\cdot 2 = \dfrac{\pi^2}{4}abc.$ $\square$

III.7 Integrale de suprafață

III.7.1 Integrale de suprafață de speța întâi

Fie $\Delta = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ o diviziune a suprafeței regulate Σ, realizată prin rețeaua curbelor coordonate, s_i, $i = \overline{1, n}$, fiind porțiunile elementare de suprafață.

Fie d_i diametrul celei mai mici sfere ce conține elementul de suprafață s_i.

Norma diviziunii Δ este numărul $\nu(\Delta) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} d_i$. Fie punctul $(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \in s_i$, arbitrar ales.

1. Fie $F(x, y, z)$ o funcție continuă pe Σ. Se numește **integrală de suprafață de prima speță**, numărul real

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}\,\sigma = \lim_{\nu(\Delta) \to 0} \sigma_{\Delta}(F),$$

unde $\sigma_{\Delta}(F) = \sum\limits_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \cdot \mathrm{aria}(s_i)$, limita fiind aceeași pentru orice alegere a punctelor intermediare.

Calculul integralei de suprafață de prima speță:

I. Σ suprafață regulată dată explicit prin:

$z = \varphi(x, y)$ cu $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ unde $D = \mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma$. Atunci:

$$\iint\limits_{\Sigma} F(x, y, z)\,\mathrm{d}\,\sigma = \iint\limits_{D} F(x, y, \varphi(x, y)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,$$

unde $\mathrm{d}\,\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$-elementul de arie.

II. Σ este parametric dată prin: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ cu $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

$d\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v$, unde $A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$, $c = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$.

$$\iint\limits_{\Sigma} F(x, y, z)\,\mathrm{d}\,\sigma = \iint\limits_{D} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$$

2. Fie funcțiile $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$, continue în punctele suprafeței regulate Σ. Fie Σ_+ fața superioară a suprafeței regulate Σ, definită de versorul normalei $\overrightarrow{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

III.7.2 Integrala de suprafață de speță a doua

Integrala de suprafață de speță a doua se reduce la o integrală de suprafață de speța întâi, astfel:

$$\iint\limits_{\Sigma_+} P\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + Q\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x + R\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}\,\sigma$$

$$= \iint_\Sigma (P,Q,R)\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\,\sigma = \iint_\Sigma \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\,\sigma,\ \text{unde}\ \overline{v} = (P,Q,R).$$

Calculul cosinusurilor directoare ale normalei la Σ se face în următoarele cazuri:

$\boxed{1.}$ Suprafața regulată Σ este definită implicit prin

$$\Sigma : \Phi(x,y,z) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} = \frac{\pm \operatorname{grad}\Phi(x,y,z)}{\|\operatorname{grad}\Phi(x,y,z)\|},\ \text{unde}\ \operatorname{grad}\Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z).$$

Semnul se ia în funcție de ce unghi face normala cu axa Oz (ascuțit sau obtuz); $\mathrm{d}\,\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $\Sigma : z = z(x,y)$, forma explicită a lui Σ.

$\boxed{2.}$ $\Sigma : x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\,\sigma = (\pm A^2, \pm B^2, \pm C^2)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v,$$

semnul se ia în funcție de ce unghi face normala cu axa Oz.

Aplicații

1. Aria porțiunii de suprafață Σ este:
$\mathcal{A} = \iint_\Sigma \mathrm{d}\,\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint_{D'} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$

2. $M = \iint_\Sigma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,\sigma$, $x_G = \frac{1}{M}\iint_\Sigma x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,\sigma \ldots.$

3. Momentul de inerție al **porțiunii de suprafață** Σ față de origine

$$I_0 = \iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

Exerciții

1. $\iint_\Sigma (x+y+z)\,\mathrm{d}\,\sigma$, $\Sigma : x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z \geq 0$

Soluție: $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$;
$D = \mathrm{pr}_{xOy}\Sigma : x^2+y^2 \leq a^2$. $I = \iint_\Sigma (x+y+z)\,\mathrm{d}\,\sigma$

$$I = \iint_{x^2+y^2\leq a^2} (x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2-x^2-y^2} + \frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq a^2} \frac{a(x+y)}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + a\cdot \mathrm{aria}(D)$$

$$= \left[\int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta]\int_0^a \frac{a\rho^2\,\mathrm{d}\,\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right] + a\pi a^2 = \pi a^3.$$

□

2. $I = \iint\limits_{\Sigma} z \,\mathrm{d}\,\sigma$, Σ-porțiunea din paraboloidul $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ decupată de cilindrul $x^2 + y^2 = 8$.

Soluție: $z = \frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = y$, $\mathrm{d}\,\sigma = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $D = \mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma$: $x^2 + y^2 \leq 8$

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 8} \frac{x^2+y^2}{2}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$= \frac{\pi}{3}\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\rho^2\left[(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]'\mathrm{d}\,\rho = \frac{\pi}{3}\left\{\left[\rho^2(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^{2\sqrt{2}} - 2\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\rho(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,\rho\right\}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[8\cdot 27 - \frac{2}{5}(1+\rho^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{2\sqrt{2}}\right] = \frac{\pi}{3}\left[8\cdot 27 - \frac{2}{5}\frac{2}{5}\cdot 9\cdot 27 + \frac{2}{5}\Big|_0^{2\sqrt{2}}\right]$$

$$\frac{\pi}{3\cdot 5}(27\cdot 22+2) - 27\cdot\left(8 - \frac{18}{5}\right) = 27\cdot\frac{22}{5} + \frac{2}{5} = \frac{596\pi}{15}.$$

□

3. Aria suprafeței $3z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$.

Soluție: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_0 = \text{arie}\Sigma_0 = \pi\cdot 4 = 4\pi$. $\mathcal{A}_1 = \iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}\,\sigma$;

$z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \Rightarrow \mathrm{d}\,\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\mathrm{d}\,\sigma = \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{3(x^2+y^2)}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.

$$\mathcal{A}_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4}\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 4\pi = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}.$$

□

4. $I = \iint\limits_{\Sigma}(xy + yz + zx)\,\mathrm{d}\,\sigma$, Σ:porțiunea din suprafața conică $z = \sqrt{x^2+y^2}$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $a > 0$.

Soluție: $p = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\mathrm{d}\,\sigma = \sqrt{2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2-2ax\leq 0}\sqrt{2}\left(xy + (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

$$\left.\begin{array}{c} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ x^2+y^2 \leq 2ax \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 0 \leq \rho \leq 2a\cos\theta \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$$

$$I=\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{0}^{2a\cos\theta}\rho^3\,\mathrm{d}\,\rho\right)(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}16a^4(\sin\theta\cos^5\theta+\sin\theta\cos^4\theta+\cos^5\theta)\,\mathrm{d}\,\theta=4\sqrt{2}a^4 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$=8\sqrt{2}a^4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\,\theta=8\sqrt{2}a^4\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{2}y^{\frac{5}{2}}\frac{\mathrm{d}\,y}{y^{\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int\limits_{0}^{1}y^2(1-y)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,y=4\sqrt{2}a^4B\left(3,\frac{1}{2}\right)=4\sqrt{2}a^4\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}$$

$$=4\sqrt{2}a^4\frac{2\sqrt{\pi}}{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

□

5. $I=\iint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+y\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z+z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, Σ-fața exterioară sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Soluție: $\overline{v}=(x,y,z)$, $\overline{n}_e=\frac{\operatorname{grad}\Phi}{\|\operatorname{grad}\Phi\|}$, $\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2$. $\operatorname{grad}\Phi=(2x,2y,2z)$; $\|\operatorname{grad}\Phi\|=\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}=\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}=\sqrt{4a^2}=2a$; $\overline{n}_e=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)$.

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\overline{v}\cdot\overline{n}_e\,\mathrm{d}\,\sigma=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^2+y^2+z^2}{a}\,\mathrm{d}\,\sigma=a\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}\,\sigma=2a\iint\limits_{\Sigma_0}\mathrm{d}\,\sigma$$

$\Sigma_0: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\Rightarrow\rho=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $q=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\Rightarrow$
$\mathrm{d}\,\sigma=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\Rightarrow$

$$I=2a^2\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=2a^2 2\pi\int\limits_{0}^{a}\frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\mathrm{d}\,\rho$$

$$=4\pi a^2\left(-\sqrt{a^2-\rho^2}\Big|_0^a\right)=4\pi a^3$$

□

6. $I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+(z-x)\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x+(x-y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, Σ-fața exterioară închisă a conului $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le h$.

Soluție: $\overrightarrow{n}_1 = (0,0,1)$, $\overline{v} = (y-z, z-x, x-y)$,
$\operatorname{pr}_{xOy}\Sigma_1 = D : x^2+y^2 \le h^2$, $\Sigma_1 : z = h \Rightarrow \mathrm{d}\,\sigma = \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \overline{v}\cdot\overline{n}_1\,\mathrm{d}\,\sigma = \iint\limits_{x^2+y^2\le h^2} (x-y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^h \rho^2\,\mathrm{d}\,\rho\right)(\cos\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta = 0.$$

$$\Sigma_2 : z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \Phi(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} - z = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{grad}\Phi = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) \Rightarrow \|\operatorname{grad}\Phi\| = \sqrt{2}.$$

Normala exterioară la con face unghi obtuz cu $Oz \Rightarrow \cos\gamma < 0$

$$\left.\begin{array}{c} \overline{n}_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) = \overrightarrow{n}_2 \\ \overline{v} = (y-z, z-x, x-y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\overline{v}\overrightarrow{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{x(y-z)+y(z-x)}{\sqrt{x^2+y^2}} - x + y\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{z(y-x)}{\sqrt{x^2+y^2}} + (y-x)\right] = \sqrt{2}(y-x).$$

$$\mathrm{d}\,\sigma = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \sqrt{2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$\operatorname{pr}_{xOy}\Sigma_2 : x^2+y^2 \le h^2$.

$$\iint\limits_{\Sigma_2} \overline{v}\cdot\overline{n}_2\,\mathrm{d}\,\sigma = \iint\limits_{x^2+y^2\le h^2} 2(y-x)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 0.$$

Deci

$$I = \iint\limits_{\Sigma_1} \overline{v}\cdot\overline{n}_1\,\mathrm{d}\,\sigma + \iint\limits_{\Sigma_2} \overline{v}\cdot\overline{n}_2\,\mathrm{d}\,\sigma = 0.$$

□

7. $I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, Σ-fața exterioară a paraboloidului $4x^2+y^2 = z$, $0 \le z \le 1$

Soluție: $\Phi(x,y,z) = 4x^2+y^2-z = 0$ ecuația suprafeței Σ.
$\operatorname{grad}\Phi = (8x, 2y, -1) \Rightarrow \|\operatorname{grad}\Phi\| = \sqrt{64x^2+4y^2+1}$.
Normala exterioară face unghi obtuz, atunci $\cos\gamma < 0 \Rightarrow$

$$\overline{n}_e = \left(\frac{8x}{\sqrt{64x^2+4y^2+1}}, \frac{2y}{\sqrt{64x^2+4y^2+1}}, \frac{-1}{\sqrt{64x^2+4y^2+1}}\right).$$

$p = 8x$, $q = 2y \Rightarrow \mathrm{d}\,\sigma = \sqrt{64x^2+4y^2+1}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$; $\overline{v} = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}}\right) \Rightarrow$ $\overline{v}\cdot\overline{n}_e = \frac{-1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}\sqrt{64x^2+4y^2+1}}$; $\mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma : 4x^2+y^2 \le 1$

$$I = \iint\limits_{4x^2+y^2\le 1} \frac{-1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int\limits_0^1 \frac{\rho\,\mathrm{d}\,\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} = -\pi\sqrt{\rho^2+1}\Big|_0^1$$

$$= -\pi(\sqrt{2}-1) = \pi(1-\sqrt{2}).$$

□

8. $I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $\Sigma : z = 4-x^2-y^2$, $z\in[0,1]$.

Soluție: $\overline{v} = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; $\Phi(x,y,z) = z+x^2+y^2-4 = 0$-ecuația suprafeței Σ,

Normala exterioară face unghi ascuțit cu $Oz \Rightarrow \cos\gamma > 0 \Rightarrow$

$$\overline{n}_e = \left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right);$$

$\mathrm{d}\,\sigma = \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.

$\mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma : 3 \le x^2+y^2 \le 4$.

$$I = \iint\limits_{3\le x^2+y^2\le 4} \frac{2xy-2xy+1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint\limits_{3\le x^2+y^2\le 4} \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int\limits_{\sqrt{3}}^{2}\mathrm{d}\,\rho$$

$$= 4\pi - 2\sqrt{3}\pi = 2\pi(2-\sqrt{3}).$$

□

9. $I = \iint\limits_{\Sigma}(x^2-y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + (y^2+z)\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x + (z^2-x)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, Σ-porțiunea interioară de pe $x^2+y^2+z^2=3$, situată în interiorul $2z = x^2+y^2$.

Soluție: $\overline{v} = (x^2-y, y^2+z, z^2-x)$, $\Phi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3 = 0$ - ecuația suprafeței Σ de pe sferă; $\|\mathrm{grad}\,\Phi\| = \sqrt{4(x^2+y^2+z^2)} = 2\sqrt{3}$

$\overline{n}_i$ face unghi obtuz cu $Oz \Rightarrow \cos\gamma < 0 \Rightarrow \overline{n}_i = \left(\frac{-x}{\sqrt{3}}, \frac{-y}{\sqrt{3}}, \frac{-z}{\sqrt{3}}\right)$, $\overline{v} = (x^2-y, y^2+z, z^2-x)$. Atunci:

$$\overline{v}\cdot\overline{n}_i = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left[x(x^2-y)+y(y^2+z)+z(z^2-x)\right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}[x^3+y^3-xy+(y-x)z+z^3] = -\frac{1}{\sqrt{3}}[x^3+y^3-xy+z(y-x+z^2)]$$

$z \geq 0 \Rightarrow z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

$$\overline{v} \cdot \overline{n}_i = -\frac{1}{\sqrt{3}}[x^3 + y^3 - xy + \sqrt{3 - x^2 - y^2}(y - x + 3 - x^2 - y^2)]$$

$\mathrm{d}\,\sigma = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-x^2-y_2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$; $\mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma = ?$ Cele două suprafețe se intersectează după

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ 2z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 + 2z - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2z \\ z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma : x^2 + y^2 \leq 2.$$

Atunci:

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \overline{v} \cdot \overline{n}_i = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 2} (\frac{x^3 + y^3 - xy}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}} + y - x + 3 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (\cos^3\theta + \sin^3\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^4}{\sqrt{3 - \rho^2}}\,\mathrm{d}\,\rho +$$

$$+ \int\limits_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\,\theta \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^3}{\sqrt{3 - \rho^2}}\,\mathrm{d}\,\rho + \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 2} (x^2 + y^2 + x - y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y - 3\text{aria }(D)$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho^3\,\mathrm{d}\,\rho - 3\pi \cdot 2 = \frac{\pi}{2}\rho^4\Big|_0^{\sqrt{2}} - 6\pi = 2\pi - 6\pi = -4\pi.$$

□

III.8 Teoria câmpurilor. Formule integrale.

Fie $\overline{v}(x, y, z)$ câmp vectorial, $\overline{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$; $P, Q, R \in C^1(U)$, $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^3$. Introducem:

- $\mathrm{div}\overline{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ divergență este un scalar.
- $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k} \to \mathrm{div}\overline{v} = \nabla \cdot \overline{v}$, unde $\nabla = \mathrm{grad}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ este operatorul gradient numit **nabla**.

- rotorul lui $\overline{v}$

$$\mathrm{rot}\overline{v}\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k},$$

$\mathrm{rot}\overline{v} = \nabla \times \overline{v}$

Reguli de calcul cu divergență și rotor.

1. $\mathrm{div}(\overline{v}+\overline{w}) = \mathrm{div}\overline{v}+\mathrm{div}\overline{w}$; $\mathrm{rot}(\overline{v}+\overline{w}) = \mathrm{rot}\overline{v}+\mathrm{rot}\overline{w}$; $\mathrm{div}(\lambda\overline{v}) = \lambda\mathrm{div}\overline{v}$;$\mathrm{rot}(\lambda\overline{v}) = \mathrm{rotdiv}\overline{v}$, unde λ este scalar real.

2. Fie $\overline{r}$-vectorul de poziție, $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} \to \mathrm{div}\overline{r} = 3$; $\mathrm{rot}\overline{r} = 0$.

3. $\varphi = \varphi(x, y, z)$ un câmp scalar, $\overline{v}$ câmp vectorial de clasă C^1 pe $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^3$. Atunci:

$$\mathrm{div}(\varphi\overline{v}) = \varphi\mathrm{div}\overline{v} + \overline{v}\mathrm{grad}\,\varphi.$$

$$\mathrm{rot}(\varphi\overline{v}) = \varphi\mathrm{rot}\overline{v} - \overline{v}\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Gradientul, divergența și rotorul se numesc operatorii diferențiali de ordinul întâi în teoria câmpurilor. Avem:

$$\nabla\varphi = \mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\overline{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right)\varphi.$$

$$\nabla \cdot \overline{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right)\left(P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}\right) = \mathrm{div}\overline{v}.$$

$$\nabla \times \overline{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right) \times \left(P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}\right) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \mathrm{rot}\overline{v}.$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\overline{v}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix},$$

$$= \overline{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\right) + \overline{j}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right) = 0$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \mathrm{div}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\overline{k}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 z} = \Delta\varphi,$$

unde operatorul diferențial de ordinul doi $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ se numește **laplacean**.

Formule integrale. Formula Green-Riemann.

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ compact(închis mărginit), $\operatorname{Fr} D$-contur neted; P și Q sunt de clasă $C^1(D)$. Atunci:

$$\int\limits_{\operatorname{Fr} D} P \,\mathrm{d}\, x + Q \,\mathrm{d}\, y = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Formula Gauss-Ostrogradski

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ compact cu $\partial\Omega = \Sigma$ o suprafață închisă și $\overline{v} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ câmp vectorial de clasă C^1 pe Ω. Atunci fluxul lui $\overline{v}$ prin Σ după normala exterioară $\overline{n}_e$ este egal cu integrala divergenței lui $\overline{v}$ pe Ω:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{v}) = \iint\limits_{\Sigma} \overline{v} \cdot \overline{n}_e \,\mathrm{d}\, \sigma = \iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{div}\overline{v}) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z.$$

Formula lui Stokes. Fie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ o porțiune de suprafață netedă și mărginită și fie frontiera sa închisă C. Fie $\overline{v}$ un câmp vectorial de clasă C pe un deschis din $\mathbb{R}^3$ care conține pe Σ. Atunci circulația lui $\overline{v}$ de-a lungul lui C este egală cu fluxul rotorului $\overline{v}$ prin Σ:

$$\int\limits_{C} \overline{v} \,\mathrm{d}\, \overline{r} = \iint\limits_{\Sigma} \operatorname{rot}\overline{v} \cdot \overline{n}_e \,\mathrm{d}\, \sigma.$$

Definiţia III.8.1. *Fie $\overline{v} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ câmp vectorial de clasă C^1; $\overline{v}$ se numește **câmp de gradienți** dacă există $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ astfel încât*

$$\operatorname{grad} F = \overline{\nabla} F = \overline{v}$$

echivalent cu $\frac{\partial F}{\partial x} = P$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial F}{\partial z} = R$.

Proprietate III.8.2. Fie $\overline{v}$ un câmp de gradienți astfel încât $\overline{v} = \operatorname{grad} F = \overline{\nabla} F$. Fie $C \subset \mathbb{R}^3$ un arc de curbă netedă ce leagă punctele A și B. Atunci, circulația lui $\overline{v}$ de-a lungul lui C este:

$$\int\limits_{C} \overline{v} \,\mathrm{d}\, \overline{r} = F(B) - F(A).$$

Demonstraţie. Fie parametrizarea lui C: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$.

$$\int\limits_{C} \overline{v} \,\mathrm{d}\, \overline{r} = \int\limits_{C} \overline{\nabla} F \,\mathrm{d}\, \overline{\overline{r}} = \int\limits_{C} \left(F_x\overline{i} + F_y\overline{j} + F_z\overline{k} \right) \left(\mathrm{d}\, x\overline{i} + \mathrm{d}\, y\overline{j} + \mathrm{d}\, z\overline{k} \right)$$

$$= \int\limits_{C} F_x \,\mathrm{d}\, x + F_y \,\mathrm{d}\, y + F_z \,\mathrm{d}\, z = \int\limits_{C} \mathrm{d}\, F = \int\limits_{a}^{b} \left\{ F_x(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + \right.$$

$$+F_y(x(t),y(t),z(t))y'(t)+F_z(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big\}\,\mathrm{d}\,t$$

$$=\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left[F(x(t),y(t),z(t))\right]\mathrm{d}\,t \overset{Leibniz-Newton}{=} F(x(t),y(t),z(t))\big|_a^b$$

$$=F(x(b),y(b),z(b))-F(x(a),y(a),z(a))=F(B)-F(A).$$

□

Aplicații.

1. Circulația câmpului vectorial $\overline{v}=y^2\overline{i}+xy\overline{j}+(x^2+y^2)\overline{k}$ prin conturul format de intersecția paraboloidului $x^2+y^2=Rz$ cu planele $x=0$, $y=0$, $z=R$ parcurs în sens pozitiv relativ la normala exterioară a paraboloidului

Soluție: $\int\limits_C \overline{v}\,\mathrm{d}\,\overline{r} \overset{\text{Stokes}}{=} \iint\limits_\Sigma \mathrm{rot}\overline{v}\cdot\overline{n}_e\,\mathrm{d}\,\sigma$, unde Σ este porțiunea din paraboloid cuprinsă între planele $x=0$, $y=0$ și $z=R$.

$$\mathrm{rot}\overline{v}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & xy & (x^2+y^2)\end{vmatrix}=2y\overline{i}-2x\overline{j}-y\overline{k}.$$

Normala $\overline{n}_e$ face unghi obtuz cu Oz.

$$\Phi(x,y,z)=x^2+y^2-Rz=0 \overset{\star}{\to} \left.\begin{array}{c}\mathrm{grad}\,\Phi=(2x,2y,-R)\\ \|\mathrm{grad}\,\Phi\|=\sqrt{4x^2+4y^2+R^2}\end{array}\right|\Rightarrow$$

$$\overline{n}_e=\frac{\mathrm{grad}\,\Phi}{\|\mathrm{grad}\,\Phi\|}=\left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+R^2}},\frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+R^2}},\frac{-R}{\sqrt{4x^2+4y^2+R^2}}\right).$$

$$z=\frac{x^2+y^2}{R}\Rightarrow p=\frac{2x}{R},\ q=\frac{2y}{R}\Rightarrow$$

$$\mathrm{d}\,\sigma=\sqrt{1+\frac{4x^2}{R^2}+\frac{4y^2}{R^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,\ \mathrm{d}\,\sigma=\frac{1}{R}\sqrt{4x^2+4y^2+R^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

$$\mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma: x^2+y^2\le R^2,\ x\ge 0, y\ge 0$$

$$\int\limits_C \overline{v}\,\mathrm{d}\,\overline{r}=\iint\limits_{x^2+y^2\le\mathbb{R}^2,x\ge0,y\ge0}\frac{Ry}{R}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{R^3}{3}\left(-\cos\theta\big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{R^3}{3}.$$

□

2. Fluxul rotorului câmpului $\overline{v}=y\overline{i}+yz\overline{j}+zx\overline{k}$ prin suprafața sferei $x^2+y^2+(z-2)^2=1$ situate deasupra planului $z=2$.

Soluție:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\mathrm{rot}\overline{v})=\iint\limits_\Sigma \mathrm{rot}\overline{v}\cdot\overline{n}_e\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

$$\text{rot}\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & yz & zx \end{vmatrix} = -y\overline{i} - z\overline{j} - \overline{k}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-2)^2 \\ \overline{n}_e \text{ face unghi ascuțit cu } Oz \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{grad}\,\Phi = (2x, 2y, 2(z-2)) \\ \|\text{grad}\,\Phi\| = 2\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{n}_e = (x, y, z-2) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{rot}\overline{v} \cdot \overline{n}_e = -xy - yz - (z-2) \\ z \geq 2,\ z - 2 = \sqrt{1-x^2-y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\text{rot}\overline{v} \cdot \overline{n}_e = -xy - y\left(2 + \sqrt{1-x^2-y^2}\right) - \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$= -xy - 2y - (y+1)\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

$$z = 2 + \sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow p = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ q = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \Rightarrow$$

$$\mathrm{d}\,\sigma = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$\text{pr}_{xOy}\,\Sigma : x^2 + y^2 \leq 1.$

$$\mathcal{F}_\Sigma(\text{rot}\overline{v}) = -\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \frac{xy+2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y - \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} y\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y - \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = -\pi.$$

□

3. Aplicând formula lui Stokes, calculați circulația lui $\overline{v} = yz\overline{i} + 2xz\overline{j} - x^2\overline{k}$ de a lungul curbei C: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = 1,\ z = 1.$

Soluție: Aplicând formula Stokes

$$\int\limits_C \overline{v}\,\mathrm{d}\,\overline{r} = \iint\limits_\Sigma \text{rot}\overline{v} \cdot \overline{n}_e\,\mathrm{d}\,\sigma$$

unde Σ este porțiunea din elipsoidul superior care se sprijină pe C.

$$\text{rot}\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & 2xz & -x^2 \end{vmatrix} = -2x\overline{i} + (2x+y)\overline{j} + z\overline{k}$$

$$\Sigma : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = 1 \Rightarrow \Phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} - 1 \Rightarrow$$

$$\text{grad}\,\Phi = (x, \frac{y}{4}, z) \Rightarrow \|\text{grad}\,\Phi\| = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{16} + z^2}$$

$$\overline{n}_e = \left(\frac{4x}{\sqrt{16x^2+y^2+16z^2}}, \frac{y}{\sqrt{16x^2+y^2+16z^2}}, \frac{4z}{\sqrt{16x^2+y^2+16z^2}} \right)$$

$$\mathrm{rot}\overline{v}\cdot\overline{n_e} = \frac{-8x^2+2xy+y^2+4z^2}{\sqrt{16x^2+y^2+16z^2}} = \frac{2xy+8-12x^2}{\sqrt{16x^2+y^2+16z^2}} = \frac{8+2xy-12x^2}{\sqrt{32-3y^2}}$$

deoarece: $4z^2 = 8-4x^2-y^2$; $16x^2+y^2+32-16x^2-4y^2 = 32-3y^2$.

$z = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{8-4x^2-y^2} \Rightarrow p = \frac{-2x}{\sqrt{8-4x^2-y^2}}$, $q = \frac{-y}{2\sqrt{8-4x^2-y^2}}$,

$\mathrm{d}\,\sigma = \sqrt{1+\frac{4x^2}{8-4x^2-y^2}+\frac{y^2}{4(8-4x^2-y^2)}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \frac{\sqrt{32-16x^2-4y^2+16x^2+y^2}}{2\sqrt{8-4x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$
$= \frac{\sqrt{32-3y^2}}{2\sqrt{8-4x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$

$$\left.\begin{array}{c} 4x^2+y^2=4 \\ z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma = D : x^2+\frac{y^2}{4}\le 1$$

Atunci:

$$\int_C \overline{v}\,\mathrm{d}\,\overline{r} = \iint_{x^2+\frac{y^2}{4}\le 1} \frac{8+2xy-12x^2}{2\sqrt{8-4x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y =$$

$$\underset{\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=2\rho\sin\theta \end{cases}}{=} \int_0^1\int_0^{2\pi} 2\rho\frac{4+2\rho^2\sin\theta\cos\theta-6\rho^2\cos^2\theta}{\sqrt{8-4\rho^2}}\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$\int_C \overline{v}\,\mathrm{d}\,\overline{r} = \int_0^1 \frac{4\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}\,\mathrm{d}\,\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta - \int_0^1\frac{3\rho^3}{\sqrt{2-\rho^2}}\,\mathrm{d}\,\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta$$

$$= -2\pi\cdot 4\sqrt{2-\rho^2}\Big|_0^1 + 6\pi\int_0^1 \rho^2(\sqrt{2-\rho^2})'\,\mathrm{d}\,\rho = -8\pi(1-\sqrt{2}) + 6\pi\rho^2\sqrt{2-\rho^2}\Big|_0^1$$

$$-12\pi\int_0^1 \rho\sqrt{2-\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho = -8\pi+8\sqrt{2}\pi+6\pi+6\pi\frac{(2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1$$

$$= -2\pi+8\sqrt{2}\pi+4\pi(1-2\sqrt{2}) = 2\pi.$$

Metoda a doua: direct. Alegem suprafața pe care se sprijină curba C din planul $z=1$.

$$\Sigma_0 : z=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \overline{n}=\overline{k} \\ \mathrm{rot}\overline{v}\cdot\overline{n}=z \\ \mathrm{d}\,\sigma = \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\ \mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma_0 : x^2+\frac{y^2}{4}\le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\int_C \overline{v}\,\mathrm{d}\,\overline{r} = \iint_{\Sigma_0}\mathrm{rot}\overline{v}\cdot\overline{n}\,\mathrm{d}\,\sigma = \iint_{\Sigma_0} z\,\mathrm{d}\,\sigma = \iint_{x^2+\frac{y^2}{4}\le 1}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^1 2\rho\,\mathrm{d}\,\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta = 2\pi.$$

□

4. Să se calculeze cu formula Green-Riemann

i) $I = \int\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}(-y\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,y)$.

Soluție:

$P(x,y) = -ye^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$, $Q(x,y) = xe^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} - 2\frac{y^2}{b^2}e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} + 2\frac{x^2}{a^2}e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\cdot e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}.$$

$$I = 2\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\cdot e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 2ab\int_0^1\int_0^{2\pi}(\rho+\rho^3)e^{\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$= \frac{4\pi}{2}ab\int_0^1\left(e^{\rho^2}\right)'(1+\rho^2)\,\mathrm{d}\,\rho = 2\pi ab\left[e^{\rho^2}(1+\rho^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 2\rho e^{\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho\right]$$

$$= 2\pi ab\left[\rho^2\cdot e^{\rho^2}\Big|_0^1\right] = 2\pi abe.$$

□

ii) $\int\limits_C (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,x + y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,\mathrm{d}\,y$, $(C)(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Soluție: $P(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + \dfrac{y\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = y^2 + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2)}}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 + \frac{y-y}{\sqrt{x^2+y^2)}} = y^2.$$

$$I = \int\limits_C P(x,y)\,\mathrm{d}\,x + Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y \overset{\text{Green-Riemann}}{=} \iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

$D: (x-1)^2+(y-1)^2 \le 1$. $\begin{cases} x = 1+\rho\cos\theta \\ y = 1+\rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \rho \le 1 \Rightarrow \rho \in [0,1]$; $\theta \in [0,2\pi]$; $\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta$.

$I = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho(1+\rho\sin\theta)^2 \,\mathrm{d}\,\theta \,\mathrm{d}\,\rho = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho(1+2\rho\sin\theta+\rho^2\sin^2\theta) \,\mathrm{d}\,\rho \,\mathrm{d}\,\theta$
$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho \,\mathrm{d}\,\theta \,\mathrm{d}\,\rho + 2\left(\int\limits_0^1 \rho^2 \,\mathrm{d}\,\rho\right)\left(\int\limits_0^{2\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\,\theta\right) + \left(\int\limits_0^1 \rho^3 \,\mathrm{d}\,\rho\right)\left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} \,\mathrm{d}\,\theta\right)$
$= \frac{2\pi}{2} + 0 + \pi\frac{1}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$ □

5. Circulația câmpului vectorial $\overline{v} = y^2\overline{i} + xy\overline{j}$ de-a lungul curbei

$$\Gamma = \left\{(x,y) | x^2+y^2=1,\ y>0\right\} \cup \{(x,y) | y = x^2-1,\ y \le 0\}$$

Soluție: Aplicăm Green-Riemann:

$$\int\limits_{\Gamma} \overline{v} \,\mathrm{d}\,\overline{r} = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y = -\iint\limits_{D} y \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y = \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} y \,\mathrm{d}\,y\right) \mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{-1}^{1} y^2 \Big|_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \left[(1-x^2) - (x^2-1)^2\right] \mathrm{d}\,x$$

$$= \int\limits_0^1 (1-x^2)(1-1+x^2) \,\mathrm{d}\,x = -\int\limits_0^1 (x^2-x^4) \,\mathrm{d}\,x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$$

□

6. Fluxul câmpului vectorial $\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ prin suprafața închisă de cilindrul $x^2+y^2=R^2$ și planele $z=0$ și $z=a$, după normala exterioară la suprafață: direct și cu Gauss-Ostrogradski

Soluție: Direct.

$\mathcal{F}(\overline{v}) = \iint\limits_{\Sigma} \overline{v} \cdot \overline{n}_e \,\mathrm{d}\,\sigma$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3.$

$\Sigma_1 : \overline{n}_1 = (0,0,1)$, $\mathrm{d}\,\sigma = \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $\overline{v} \cdot \overline{n}_1 = -z = 0$; $\mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma_1 : x^2+y^2 \le R^2$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \overline{v} \cdot \overline{n}_1 \,\mathrm{d}\,\sigma = \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} 0 \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y = 0$$

$\Sigma_2 : x^2+y^2 = R^2$, $\Phi(x,y,z) = x^2+y^2-R^2 \Rightarrow \mathrm{grad}\,\Phi = (2x,2y,0)$; $\|\mathrm{grad}\,\Phi\| = 2\sqrt{x^2+y^2} = R^2 \Rightarrow \overline{n}_2 = \frac{\mathrm{grad}\,\Phi}{\|\mathrm{grad}\,\Phi\|} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0\right)$, $\overline{v} \cdot \overline{n}_2 = \frac{x^2+y^2}{R} = R$, $\mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma_2 : x^2+y^2 \le R^2$.

$$\iint\limits_{\Sigma_2} \overline{v} \cdot \overline{n}_2 \,\mathrm{d}\,\sigma = \iint\limits_{\Sigma_2} R \,\mathrm{d}\,\sigma = R\mathrm{aria}(\Sigma_2) = R \cdot 2\pi R a = 2\pi a R^2.$$

$\Sigma_3 : z = a \Rightarrow \overline{n}_3 = (0,0,1) \Rightarrow \overline{v} \cdot \overline{n}_3 = z = a$, $\mathrm{d}\,\sigma = \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$; $\mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma_3 : x^2+y^2 \le R^2$.

$$\iint\limits_{\Sigma_3} \overline{v} \cdot \overline{n}_3 \,\mathrm{d}\,\sigma = \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} a \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y = \pi a R^2.$$

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{v}) = 3\pi a R^2 = \iint\limits_{\Sigma_1} \overline{v} \cdot \overline{n}_1 \,\mathrm{d}\,\sigma + \iint\limits_{\Sigma_2} \overline{v} \cdot \overline{n}_2 \,\mathrm{d}\,\sigma + \iint\limits_{\Sigma_3} \overline{v} \cdot \overline{n}_3 \,\mathrm{d}\,\sigma.$$

Cu Gauss-Ostrogradski

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{v}) = \iint\limits_{\Sigma} \overline{v} \cdot \overline{n}_e \,\mathrm{d}\,\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}\overline{v} \,\mathrm{d}\,v = \iiint\limits_{\Omega} 3 \,\mathrm{d}\,v = 3vol(\Omega),$$

unde Ω este cilindrul $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ 0 \le z \le a \end{cases} \Rightarrow \mathcal{F}_\Sigma(\overline{v}) = 3\pi R^2 a = 3\pi a \mathbb{R}^2.$ □

7. $I = \iint\limits_{\Sigma} 2x^2yz \,\mathrm{d}\,y \,\mathrm{d}\,z + z^2 \,\mathrm{d}\,z \,\mathrm{d}\,x + xyz^2 \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y$, Σ este fața exterioară a semielipsoidului superior $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ limitat de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

Soluție: Fie $\overline{v} = (2x^2yz, z^2, xyz^2)$.

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \overline{v} \cdot \overline{n}_e \,\mathrm{d}\,\sigma \underset{G.O.}{=} \iiint\limits_{V} (\mathrm{div}\overline{v}) \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y \,\mathrm{d}\,z = \iiint\limits_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0}} (4xyz + 2xyz) \,\mathrm{d}\,v$$

$$= 6 \iiint\limits_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0}} xyz \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y \,\mathrm{d}\,z$$

$$= 6a^2b^2c^2 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^5 \sin\theta \cos\theta \cos\varphi \sin^3\varphi \,\mathrm{d}\,\rho \,\mathrm{d}\,\theta \,\mathrm{d}\,\varphi$$

$$= a^2b^2c^2\rho^6\Big|_0^1 \cdot \left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left.\frac{\sin^4\varphi}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2b^2c^2}{8}.$$

Am folosit coordonate sferice generalizate $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\rho\cos\theta \end{cases}$. $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $\rho \in [0, 1]$; $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y \,\mathrm{d}\,z = abc\rho^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\,\rho \,\mathrm{d}\,\theta \,\mathrm{d}\,\varphi$. □

8. Fluxul câmpului vectorial $\overline{v} = x\overline{i} + z^2\overline{j} + y^2\overline{k}$ prin suprafața laterală a conului $z^2 = x^2 + y^2$ mărginită de planul $z = 1$, pentru $z \ge 0$.

Soluție: $\mathcal{F}_\Sigma(\overrightarrow{v}) = \iint\limits_{\Sigma} \overline{v} \cdot \overline{n}_e \,\mathrm{d}\,\sigma$. Închidem suprafața Σ cu discul $\Sigma_1 : x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$.

Aplicăm formula Gauss-Ostrogradski pentru suprafața închisă $\Sigma \cup \Sigma_1$, iar volumul V închis de $\Sigma \cup \Sigma_1$ este: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le z^2 \\ z \le 1, z \ge 0 \end{cases}$ și $\operatorname{div}\overline{v} = 1$.

$$\iint_\Sigma \overline{v} \cdot \overline{n}_e + \iint_{\Sigma_1} \overline{v} \cdot \overline{n}_1 \,\mathrm{d}\,\sigma = \iiint_V (\operatorname{div}\overline{v}) \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y \,\mathrm{d}\,z$$

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{v}) + \iint_{\Sigma_1} \overline{v} \cdot \overline{n}_1 \,\mathrm{d}\,\sigma = \iiint_V \mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y \,\mathrm{d}\,z$$

$\Sigma_1 : x^2 + y^2 = 1,\ z = 1 \Rightarrow \mathrm{d}\,\sigma = \mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y;$ $\left.\begin{matrix} \overline{n}_1 = (0,0,1) \\ \overline{v} = (x, z^2, y^2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{v} \cdot \overline{n}_1 = y^2$, $\mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma_1 : x^2 + y^2 \le 1$.

$$\iint_{\Sigma_1} \overline{v} \cdot \overline{n}_1 \,\mathrm{d}\,\sigma = \iint_{x^2+y^2\le 1} y^2 \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y = \int_0^1 \rho^3 \,\mathrm{d}\,\rho \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\,\theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\iiint_V \mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y \,\mathrm{d}\,z == \iint_{x^2+y^2\le 1} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \mathrm{d}\,z \right) \mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (1 - \sqrt{x^2+y^2}) \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y = \pi - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \,\mathrm{d}\,\rho \,\mathrm{d}\,\theta = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Deci:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{v}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

□

9. Fie $\overline{v} = \big(x^2 + 5ay + 3yz, 5x + 3az - 2, (2+a)xy - 4z\big)$.

i) $a = ?$ dacă $\overline{v}$ este câmp de gradienți;

ii) câmpul scalar F din care provine câmpul de gradienți;

iii) circulația lui $\overline{v}$ de-a lungul unui drum de la $A(1,0,1)$ la $B(1,0,2)$.

Soluție:

i) $\overline{v}$ câmp de gradienți $\Leftrightarrow$ există potențial scalar F astfel încât

$$\overline{v} = \operatorname{grad} F \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} F_x = x^2 + 5ay + 3yz = P \\ F_y = 5x + 3az - 2 = Q \\ F_z = (2+a)xy - 4z = R \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} Q_x = P_y \\ P_z = R_x \\ R_y = Q_z \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 5 + 3az = 5a + 3z \\ 3y = (2+a)y \\ (2+a)x = 3ax \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 1$$

$$\overline{v} = (x^2 + 5y + 3yz)\overline{i} + (5x + 3xz - 2)\overline{j} + (3xy - 4z)\overline{k}.$$

ii) $\overline{v} = \nabla F = \operatorname{grad} F \Rightarrow$

. $F_x = x^2 + 5y + 3yz \Rightarrow F(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + 5xy + 3xyz + k(x, y).$

.. $F_y = 5x + 3xz + k_y = 5x + 3xz - 2 \Rightarrow k_y = -2 \Rightarrow k(yz) = -2y + a(z) \Rightarrow$ $F(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + 5xy + 3xyz - 2y + a(z).$

... $F_z = 3xy + a'(z) = 3xy - 4z \Rightarrow a'(z) = -4z \Rightarrow a(z) = -2z^2 \Rightarrow$ $F(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + 5xy + 3xyz - 2y - 2z^2 \leftarrow$ potențialul scalar al câmpului de gradienți $\overline{v}$.

iii) $\int\limits_C \overline{v}\,\mathrm{d}\,\overline{r} = \int\limits_C (\operatorname{grad} F)\,\mathrm{d}\,\overline{r} = \int\limits_C \mathrm{d}\,F = F(B) - F(A) = F(1, 0, 2) - F(1, 0, 1)$ $= -6,$

$$(\operatorname{grad} F)\,\mathrm{d}\,\overline{r} = F_x\,\mathrm{d}\,x + F_y\,\mathrm{d}\,y + F_z\,\mathrm{d}\,z = \mathrm{d}\,F.$$

□

10. i) $\int\limits_{Fr(\Omega)} \overline{n} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{r})\,\mathrm{d}\,\sigma.$

ii) $\int\limits_{Fr(\Omega)} \overline{n}\,[\overline{a}\,(\overline{a} \cdot \overline{r})]\,\mathrm{d}\,\sigma.$

iii) $\int\limits_{Fr(\Omega)} [(\overline{a} \cdot \overline{r}) \cdot (\overline{a} \cdot \overline{n})]\,\mathrm{d}\,\sigma$, unde Ω=volum mărginit de suprafața închisă $Fr(\Omega)$; $\overline{a}$ vector constant, $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

Soluție:

i) ($\star$). $\int\limits_{Fr(\Omega)} \varphi \cdot n_i\,\mathrm{d}\,\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\,\omega \leftarrow$ flux- divergență

($\star\star$) $\iint\limits_{Fr(\Omega)} \varphi \cdot \overline{n}\,\mathrm{d}\,\sigma = \iiint\limits_{Omega} \operatorname{grad} \varphi\,\mathrm{d}\,\omega \leftarrow$ **formula gradientului**.

$$\begin{cases} \overline{a} \cdot \overline{r} = (a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k})(x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}) = ax + by + cz \\ \operatorname{grad}(\overline{a} \cdot \overline{r}) = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k} = \overline{a} \end{cases}.$$

$$\iint\limits_{Fr(\Omega)} \overline{n} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{r})\,\mathrm{d}\,\sigma \overset{(\star\star)}{=} \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{grad}(\overline{a} \cdot \overline{r})\,\mathrm{d}\,\omega = \overline{a} \iint\limits_{Fr(\Omega)} \mathrm{d}\,\omega = \overline{a} \cdot \operatorname{vol}(\Omega).$$

ii) $\overline{a} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{r}) = \overline{a} \cdot (ax + bx + cz) = (a^2x + aby + acz)\overline{i} + (abx + b^2y + bcz)\overline{j} + (acx + bcy + c^2z)\overline{k} \Rightarrow$

$$\iint\limits_{Fr(\Omega)} \overline{n} \cdot [\overline{a} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{r})]\,\mathrm{d}\,\sigma \overset{(\star\star\star)}{=} \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}[\overline{a} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{r})]\,\mathrm{d}\,\omega$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (a^2 + b^2 + c^2)\,\mathrm{d}\,\omega = |a|^2 \text{ vol } (\Omega).$$

($\star\star\star$) $\iint\limits_{Fr(\Omega)} \overline{v} \cdot \overline{n}\,\mathrm{d}\,\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\overline{v}\,\mathrm{d}\,\omega \Rightarrow$ Gauss-Ostrogradski

iii) $\overline{a} \cdot \overline{r} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = (bz - cy)\overline{i} + (cx - az)\overline{j} + (ay - bx)\overline{k}$; $\overline{a} \cdot \overline{n} = (bn_3 - cn_2)\overline{i} + (cn_1 - an_3)\overline{j} + (an_2 - bn_1)\overline{k}$; $(\overline{a} \cdot \overline{r}) \cdot (\overline{a} \cdot \overline{n}) = \left[(b^2 + c^2)x - aby - acz\right] n_1 + \left[(a^2 + c^2)y - abx - bcz\right] n_2 + \left[(a^2 + b^2)x - acx - bcy\right] n_3$

$$\iint\limits_{Fr(\Omega)} \left[(\overline{a} \cdot \overline{r}) \cdot (\overline{a} \cdot \overline{n})\right] \mathrm{d}\,\sigma \overset{(\star)}{=} \iiint\limits_{\Omega} (b^2 + c^2)\,\mathrm{d}\,\omega + \iiint\limits_{\Omega} (a^2 + c^2)\,\mathrm{d}\,\omega + \iiint\limits_{\Omega} (a^2 + b^2)\,\mathrm{d}\,\omega = 2|\overline{a}|^2 \text{ vol } (\Omega).$$

□

III.9 Probleme

T1

1. Folosind dezvoltarea funcției $\sin x$ în serie de puteri, calculați $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}\, x$ cu o eroare mai mică decât 10^{-6}.

2. Dezvoltați în serie Fourier funcția
$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{dacă} \quad x \in (1,2) \\ -1 & \text{dacă} \quad x \in [2,3] \end{cases}$.

3. Calculați $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, unde $u(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$, $x > 0$, $y > 0$.

4. Determinați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției $f : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = x - 2y + 2z,$$

unde $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\right\}$.

5. Calculați

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x} \, \mathrm{d}\, x, \ t \in \mathbb{R}$$

6. Calculați

$$\iiint\limits_{\Omega} e^{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4}}} \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y \, \mathrm{d}\, z$$

unde $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \leq 1\right\}$

7. Fie $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

a) Calculați $\oint\limits_{(\gamma)} x^2 y \, \mathrm{d}\, x + (yz-1) \, \mathrm{d}\, y + (2x-1) \, \mathrm{d}\, z$ unde $(\gamma) = |AB| \cup |BC| \cup |CA|$.

b) Calculați $\iint\limits_{\Sigma} y \, \mathrm{d}\, y \, \mathrm{d}\, z + 2 \, \mathrm{d}\, z \, \mathrm{d}\, x + x^2 \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y$ unde (Σ) este suprafața triunghiului ABC orientată dupa normala $\vec{N} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

c) Verificați rezultatele obținute la punctele a) și b) folosind formula lui Stokes.

T2

1. Folosind dezvoltarea funcției $\arctan x$ în serie de puteri, calculați $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} \, \mathrm{d}\, x$ cu o eraoare mai mică decât 10^{-6}.

2. Dezvoltați în serie de cos funcția

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{dacă} \quad x \in (1,2) \\ -1 & \text{dacă} \quad x \in [2,3] \end{cases}.$$

3. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = xe^{y-2x} + z\ln(1 + x^2).$$

Liniarizați funcția f în jurul punctului $(1, 2, 1)$.

4. Determinați punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^2 - 3xz - 3yz + 4z + 3.$$

5. Folosind funcțiile lui Euler, calculați

a) $\int\limits_0^\infty \frac{x}{(1+x^3)^2} \,\mathrm{d}\, x,$

b) $\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-9x^2+6x} \,\mathrm{d}\, x$

6. Calculați aria porțiunii din suprafața (Σ): $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 2y$ și $z > 0$.

7. Fie $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ și $(\gamma) = \partial(\Sigma)$ frontiera suprafeței (Σ)

a) Calculați $\oint\limits_{(\gamma)} x \,\mathrm{d}\, x + y \,\mathrm{d}\, y + z \,\mathrm{d}\, z$, γ fiind parcursă în sens trigonometric.

b) Calculați $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z + \mathrm{d}\, z \,\mathrm{d}\, x + \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y$, suprafața (Σ) fiind orientată după normala care face un unghi ascuțit cu axa Oz.

c) Folosind formula lui Stokes, verificați rezultatele obținute la punctele a) și b).

T3

1. Arătați că seria de funcții $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n} \cos((2n+1)x)$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$ către o funcție continuă, calculați $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} s(x) \,\mathrm{d}\, x$, unde s este suma seriei date.

2. Dezvoltați în serie de sin funcția

$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \in [0, 1] \\ 1 \text{ dacă } x \in (1, 3] \end{cases}$

3. Arătați că funcția $u(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $x > 0$, $y > 0$ verifică relația

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

4. Determinați punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \cos^2 x + \sin^2 y$$

cu legătura $x + y = \frac{\pi}{4}$.

5. Calculați $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\alpha \tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}\,x, \alpha \geq 0.$

6. Calculați $\iint\limits_D \sin x^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, unde D este mărginit de dreptele $y = x$, $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $x = \sqrt{\pi}$, $y = 0$.

7. a) Calculați $\iiint\limits_\Omega 2x\,\mathrm{d}\,xd\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$, unde $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\right\}$.

b) Calculați $\iint\limits_{(\Sigma)} x^2\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + y^2 + 2yz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + z^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ pe fața exterioară a suprafeței sferice $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 = 9$

c) Folosind formula Gauss-Ostrogradski verificați rezultatele obținute la punctele a) și b).

T4

1. Determinați mulțimea de convergență și suma seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2}(1 - x^2)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

2. Arătați că funcția $u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$, $x > 0$, $t > 0$, $a > 0$ verifică ecuația

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3. Determinați punctele de extrem local pentru functia $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + z.$$

4. Arătați că ecuația $x + 2y + 2z^2 = e^x$ definește implicit funcția $z(x, y)$ într-o vecinătate a punctului $(2, -1, 0)$. Calculați $\mathrm{d}\,z(2, -1)$.

5. Folosind funcțiile Euler, calculați

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{cosx}}\,\mathrm{d}\,x$;

b) $\int\limits_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{x}}\,\mathrm{d}\,x$.

6. Fie $A\{1, 1)$, $B(2, 1)$, $C(1, 2)$.

a) Calculați $\oint\limits_{(\gamma)} 2xy\,\mathrm{d}\,x - (x - y)\,\mathrm{d}\,y$ unde $(\gamma) = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$ este parcursă în sens trigonometric.

b) Calculați $\iint\limits_D (1-2x)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, unde D este domeniul mărginit de dreptele $[AB]$, $[BC]$ și $[CA]$.

c) Verificați rezultatele obținute la punctele a) și b) folosind formula lui Riemann-Green.

7. Calculați volumul corpului mărginit de suprafețele $z = x^2 + y^2$ și $z = 8 - x^2 - y^2$.

T5

1. Extremele locale pentru $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 2xy$.

Soluție:

$$\left.\begin{array}{c} f'_x = 3x^2 - 2y = 0 \\ f'_y = 24y^2 - 2x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x^2 - 2y = 0 \\ x = 12y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 3\cdot 144y^4 - 2y = 0 \\ x = 12y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\left\{\begin{array}{c} y(216y^3-1) = 0 \\ x = 12y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} y_1 = \frac{1}{6} \\ x_1 = \frac{1}{3} \end{array}\right\}$ și $y_2 = x_2 = 0$, $A\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$ și $B(0,0)$ puncte critice.

$f''_{x^2} = 6x$, $f''_{xy} = -2$, $f''_{y^2} = 48y$.

$\mathrm{d}^2 f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right) = 2\,\mathrm{d}\,x^2 - 4\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + 8\,\mathrm{d}\,y^2 = 2(\mathrm{d}\,x - \mathrm{d}\,y)^2 + 6\,\mathrm{d}\,y^2$ este pozitiv definită. Altfel cu hessiana

$H_f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 12 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow A\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$ minim local

$\mathrm{d}^2 f(0,0) = -4\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ are semn variabil, nu e nici pozitiv, nici negativ definită, rezultă $B(0,0)$ nu este extrem. Sau $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 0, \Delta_2 = -4 < 0 \Rightarrow B(0,0)$ nu este extrem.

□

2. $z = z(x,y)$ definit de $zx^2y - 2\sin z + z^2 = 0$. Calculați $z'_x(1,1)$, $z'_y(1,1)$, $z''_{x^2}(1,1)$.

Soluție:

$F(x,y,z) = zx^2y - sinz + z^2$ diferențiabilă pe $V(1,1,0)$, $F(1,1,0) = 0$, $F'_z = x^2y - 2\cos z + 2z \Rightarrow F'_z(1,1,0) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ există $z = z(x,y)$ și este unică, diferențiabilă în $(1,1)$, $z(1,1) = 0$ și $F(x,y,z(x,y)) = 0$ pentru orice (x,y) într-o vecinătate a lui $(1,1)$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2xy}{x^2y - 2\cos z + 2z} \Rightarrow z'_x(1,1) = -\frac{2\cdot 1\cdot 1\cdot 0}{-1} = 0$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{zx^2}{x^2y - 2\cos z + 2z} \Rightarrow z'_y(1,1) = -\frac{0\cdot 1}{-1} = 0$$

$z''_{x^2} = (z'_x)'_x$

$$= -\frac{(2yz + 2xy\cdot z'_x)\left(x^2y - 2\cos z + 2z\right) - 2xyz\left(x^2y + 2\sin z\cdot z'_x + 2z'_x\right)}{\left(x^2y - 2\cos z + 2z\right)^2} \Rightarrow$$

$$z''_{xy}(1,1) = \frac{0 \cdot (1 - 2 + 2 \cdot 0) - 2 \cdot 0 \cdot 0)}{(-1)^2} = 0.$$

□

3. a) $\int\limits_{\gamma} (x - y) \,\mathrm{d}\, s$, $\gamma : 1 + |x| = y$, $-2 \le x \le 2$.

b) $\int\limits_{\gamma} \frac{y}{1+xy} \,\mathrm{d}\, x + \frac{x}{1+xy} \,\mathrm{d}\, y$ este independentă de drum și calculați pe un drum de unește $A\left(\frac{1}{3}, -2\right)$ și $B(3, 0)$.

Soluție: a) $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$, $\gamma = AB \vee BC \vee CA$, unde

$$\gamma_1 = AB : \left.\begin{array}{c} y = x + 1 \\ x \in [0, 2] \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma_1 : \left.\begin{array}{c} x = t \\ y = t + 1 \\ t \in [0, 2] \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{d}\, s = -\sqrt{2} \,\mathrm{d}\, t.$$

$$\gamma_2 = BC : \left.\begin{array}{c} y = 3 \\ x \in [+2, -2] \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma_2 : \left.\begin{array}{c} x = t \\ y = 3 \\ t \in [+2, -2] \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{d}\, s = \mathrm{d}\, t.$$

$$\gamma_3 = CA : \left.\begin{array}{c} y = 1 - x \\ x \in [-2, 0] \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma_3 : \left.\begin{array}{c} x = t \\ y = 1 - t \\ t \in [-2, 0] \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{d}\, s = \sqrt{2} \,\mathrm{d}\, t.$$

$$\int\limits_{\gamma} \mathrm{d}\, s = \int\limits_{0}^{2} -\sqrt{2} \,\mathrm{d}\, t + \int\limits_{2}^{-2} (t - 3) \,\mathrm{d}\, t + \int\limits_{-2}^{0} (2t - 1)\sqrt{2} \,\mathrm{d}\, t$$

$$= -2\sqrt{2} + 12 + t^2|_{-2}^{0} - \sqrt{2} \cdot 2 = -4\sqrt{2} + 12 - 4 = 8 - 4\sqrt{2} = 4(2 - \sqrt{2})$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = \dfrac{y}{1+xy} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1 + xy - xy}{(1+xy)^2} = \dfrac{1}{(1+xy)^2} \\ Q(x,y) = \dfrac{x}{1+xy} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1 + xy - xy}{(1+xy)^2} = \dfrac{1}{(1+xy)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow$$

$\int\limits_{\gamma} P(x, y) \,\mathrm{d}\, x + Q(x, y) \,\mathrm{d}\, y$ este independentă de drum.

Există $F(x, y)$ diferențiabilă astfel încât

$$\mathrm{d}\, F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \,\mathrm{d}\, x + \frac{\partial F}{\partial y} \,\mathrm{d}\, y = P(x,y) \,\mathrm{d}\, x + Q(x,y) \,\mathrm{d}\, y \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = P = \dfrac{y}{1+xy} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q = \dfrac{x}{1+xy} \end{array}\right\} \Rightarrow F(x,y) = \int \frac{y}{1+xy} \,\mathrm{d}\, x = \ln|1 + xy| + K(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q \Rightarrow \frac{x}{1+xy} + K'(y) = \frac{x}{1+xy} \Rightarrow K'(y) = o \Rightarrow$$

$$F(x,y)=\ln|1+xy|+K \Rightarrow \int\limits_{\gamma} P(x,y)\,\mathrm{d}\,x+Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y=$$

$$=F(3,0)-F\left(\frac{1}{3},-2\right)=\ln 1+k-\ln\left(1-\frac{2}{3}\right)-K=\ln 3.$$

□

4. a) $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(1+y)^2}$, $D: y\le x,\ xy\ge 1,\ 1\le x\le 2.$

b) $\iint\limits_D \left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $D: x^2+y^2-y\le 0,\ x\ge 0.$

Soluție: a) $D:\begin{cases}1\le x\le 2\\ \frac{1}{x}\le y\le x\end{cases}$, simplu în raport cu Oy

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(1+y)^2} &= \int\limits_1^2\left[\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\mathrm{d}\,y}{(1+y)^2}\right]\mathrm{d}\,x=\int\limits_1^2 -\frac{1}{1+y}\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}\mathrm{d}\,x\\ &= \int\limits_1^2\frac{x-1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x=\int\limits_1^2\left(1-\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}\,x\\ &= 2-1-2\ln(x+1)|_1^2=1-2\ln\frac{3}{2}=1-\ln\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

b) $\left.\begin{cases}x=\rho\cos\theta & x\ge 0\\ y=\rho\sin\theta & y\ge 0\end{cases}\right)\} \Rightarrow \theta\in[0,\frac{\pi}{2}];\ 0\le\rho\le\sin\theta\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y &= \mathrm{aria}(D)+\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\\ &= \frac{\pi}{8}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\sin\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\,\theta\\ &= \frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 3\theta\right)\mathrm{d}\,\theta\\ &= \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{9\cdot 4}\cos 3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

□

5. $\iiint\limits_{\Omega} z \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z$, $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3,\ z \geq 1$.

Soluție: Cele 2 suprafețe se intersectează după curba $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ cerc $\Rightarrow \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega = D := \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$; limitele între care variază z, $1 \leq z \leq \sqrt{3 - x^2 - y^2}$:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2} \left(\int\limits_{1}^{\sqrt{3-x^2-y^2}} z \,\mathrm{d}\, z \right) \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2} \left. \frac{z^2}{2} \right|_{1}^{\sqrt{3-x^2-y^2}} \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \\
&= \frac{1}{2} \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2} (3 - x^2 - y^2 - 1) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y = \frac{1}{2} \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2} (2 - x^2 - y^2) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2} \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y - \frac{1}{2} \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2} (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \\
&= \mathrm{aria}(D) - \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \int\limits_{0}^{2\pi} \rho^3 \,\mathrm{d}\, \theta \,\mathrm{d}\, \rho = 2\pi - \left. \frac{1}{8} \rho^4 \right|_{0}^{\sqrt{2}} \cdot 2\pi = 2\pi - \pi = \pi.
\end{aligned}$$

□

T6

1. Găsiți extremele funcției $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 12x - 6y + 9$.

2. $z = z(x, y)$, $e^{x^2 - z} = y^2 + z^2$ în $V(1, 0, 1)$. Calculați $z'_x(1, 0)$, $z'_y(1, 0)$, $z''_{xy}(1, 0)$.

Soluție:

$F(x, y, z) = e^{x^2-z} - y^2 - z^2$ diferențiabilă, $F(1, 0, 1) = 1 - 1 = 0$, $F'_z(x, y, z) = -e^{x^2-z} - 2z \Rightarrow F'_z(1, 0, 1) = -1 - 2 = -3 \neq 0 \Rightarrow$ cu TFI există și este unică $z = z(x, y)$ diferențiabilă în $(1, 0)$ cu $F(x, y, z(x, y)) = 0$ și $z(1, 0) = 1$.

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2xe^{x^2-z}}{-e^{x^2-z} - 2z} \Rightarrow z'_x(1, 0) = -\frac{2 \cdot 1 \cdot e^{1-z(1,0)}}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-2y}{-e^{x^2-z} - 2z} \Rightarrow z'_y(1, 0) = -\frac{0}{-3} = 0$$

$$z''_{xy} = \left(z'_y\right)'_x = -\left(\frac{2y}{e^{x^2-z} + 2z}\right)'_x = \frac{2y\left[(2x - z'_x) \cdot e^{x^2-z} + 2z'_x\right]}{(e^{x^2-z} + 2z)^2} \Rightarrow$$

$$z''_{xy}(1,0) = \frac{2\cdot 0\cdot\left[\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot e^{1-1}+2\frac{2}{3}\right]}{3^2} = 0.$$

$\square$

3. a) $\int\limits_\gamma |xy|\,\mathrm{d}\,s$, $\gamma: x+y=0$, $x=2$.

b) $\int\limits_\gamma y^3\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,y$, $\gamma: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $x\geq 0$.

Soluție: a) $\int\limits_\gamma |xy|\,\mathrm{d}\,s = \int\limits_{OA} |xy|\,\mathrm{d}\,s + \int\limits_{AB} |xy|\,\mathrm{d}\,s + \int\limits_{BO} |xy|\,\mathrm{d}\,s$, unde

$$OA: \left.\begin{array}{c} x=y \\ x\in[0,2] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x=t \\ y=t \\ x\in[0,2] \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{d}\,s=\sqrt{2}\,\mathrm{d}\,t$$

$$\int\limits_{OA} |xy|\,\mathrm{d}\,s = \int\limits_0^2 \sqrt{2}t^2\,\mathrm{d}\,t = \frac{\sqrt{2}}{3}t^3\Bigg|_0^2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

$$AB: \left.\begin{array}{c} x=2 \\ y=t \\ t\in[-2,2] \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{d}\,s=\mathrm{d}\,t$$

$$\int\limits_{AB} |xy|\,\mathrm{d}\,s = \int\limits_{-2}^2 |2t|\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_0^2 t\,\mathrm{d}\,t = 2t^2\big|_0^2 = 8.$$

$$BO: \left.\begin{array}{c} x=t \\ y=-t \\ t\in[2,0] \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{d}\,s=\sqrt{2}\,\mathrm{d}\,t$$

$$\int\limits_{BO} |xy|\,\mathrm{d}\,s = \int\limits_2^0 |-t^2|\sqrt{2}\,\mathrm{d}\,t = -\sqrt{2}\int\limits_0^2 t^2\,\mathrm{d}\,t = \frac{-\sqrt{2}}{2}t^3\Bigg|_0^2 = -\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

$$\int\limits_\gamma |xy|\,\mathrm{d}\,s = \frac{8\sqrt{2}}{3}+8-\frac{8\sqrt{2}}{3} = 8.$$

b) $\left\{\begin{array}{ll} x=2\cos\theta & \theta\in[-\pi,\pi] \\ y=3\sin\theta & x\geq 0\Rightarrow\cos\theta\geq 0\Rightarrow\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \end{array}\right)\} \Rightarrow \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}\,x=-2\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta \\ \mathrm{d}\,y=3\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta \end{array}\right)\} \Rightarrow$

$$\int\limits_\gamma y^3\,\mathrm{d}\,x + \frac{\mathrm{d}\,y}{1+x^2} \quad = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -54\sin^4\theta\,\mathrm{d}\,\theta + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos\theta}{1+4\cos^\theta}$$

$$= -54\cdot 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta(1-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\,\theta + 6\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin\theta)'}{5-4\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$= -54\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\,\theta + +\frac{54\cdot 2}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\,\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\frac{(\sin\theta)'}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$= -54\frac{\pi}{2} + 27\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-cos4\theta}{2}\,\mathrm{d}\,\theta + \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\ln|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}-\sin\theta}{\sqrt{5}}2+\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -27\pi + 27\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right) = -27\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right).$$

□

4. a) Aria domeniului $D: x+y=1,\ x-y=1,\ x=y^2-1$.

b) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,\ D: x^2+y^2\le 4,\ x\le 0,\ y\le 0$.

Soluție:

a) $D = D_1\cup D_2 : D_1 : \begin{cases} -1\le x\le 0 \\ -\sqrt{x+1}\le y\le\sqrt{x+1}\end{cases}, D_2 : \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x-1\le y\le 1-x\end{cases}.$

$$\begin{aligned}
\text{Aria}(D) &= \text{Aria}(D_1)+\text{Aria}(D_2) = \iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \iint\limits_{D_2}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\\
&= \int\limits_{-1}^{0}\left(\int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x + \int\limits_0^1\left(\int\limits_{x-1}^{1-x}\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x\\
&= 2\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}\,x + \int\limits_0^1(1-x-x+1)\,\mathrm{d}\,x\\
&= 2\left.\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_{-1}^{0} + 2x|_0^1 - x^2|_0^1 = \frac{4}{3}+2-1 = \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

b)
$$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 4\\ x\le 0,\ y\le 0}} e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d} = \int_0^2\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \rho e^{\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta$$
$$= \left(\int_0^2 \rho e^{\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho\right)\cdot\left(\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^{\rho^2}\Big|_0^2\left(\frac{3\pi}{2}-\pi\right) = \frac{\pi}{4}(e^4-1).$$

□

5. $\iiint\limits_\Omega (x^2+z^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$, $\Omega : \begin{cases} x^2+y^2\le z \\ 2\le z\le 4\end{cases}$.

Soluție: $\Omega = \Omega_2\setminus\Omega_1$

$\Omega_1 : \begin{cases} x^2+y^2\le z\le 2 \\ \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega_1 = D_1 = \{(x,y)|x^2+y^2\le 2\}\end{cases}$

$\Omega_2 : \begin{cases} x^2+y^2\le z\le 4 \\ \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega_2 = D_2 = \{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}\end{cases}$

$$\iiint\limits_\Omega (x^2+z^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \iint\limits_{D_2}\left[\int_{x^2+y^2}^4 (x^2+z^2)\,\mathrm{d}\,z\right]\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y - \iint\limits_{D_1}\left[\int_{x^2+y^2}^2 (x^2+z^2)\,\mathrm{d}\,z\right]\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\left[x^2(4-x^2-y^2)+\frac{64-(x^2+y^2)^3}{3}\right]\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$
$$- \iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\left\{x^2(2-x^2-y^2)+\frac{1}{3}[8-(x^2+y^2)^3]\right\}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$
$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta\int_0^2\rho^3(4-\rho^2)\,\mathrm{d}\,\rho + \frac{64}{3}4\pi - \frac{2\pi}{3}\int_0^2\rho^7\,\mathrm{d}\,\rho$$
$$- \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3(2-\rho^2)\,\mathrm{d}\,\rho - \frac{8}{3}2\pi + \frac{2\pi}{3}\int_0^{\sqrt{2}}\rho^7\,\mathrm{d}\,\rho$$
$$= \pi\left(\rho^4\big|_0^2 - \frac{\rho^6}{6}\Big|_0^2\right) + \frac{256}{3}\pi - \frac{2\pi}{3}\frac{2^8}{8} - \pi\left(\frac{\rho^4}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}} - \frac{\rho^6}{6}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right) - \frac{16\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\frac{(\sqrt{2})^8}{8} = \frac{194}{3}\pi$$

$\square$

6. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$, $\Omega:\begin{cases} x^2+y^2\le z\\ 2\le z\le 4\end{cases}$

Soluție: $\Omega=\Omega_2\cup\Omega_1$, unde

$\Omega_1:\begin{cases} 2\le z\le 4\\ \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega_1: x^2+y^2\le 2\end{cases}$

$\Omega_2:\begin{cases} x^2+y^2\le z\le 4\\ \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega_2: 2\le x^2+y^2\le 4\end{cases}$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega_1}(x^2+z^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\int\limits_2^4(x^2+z^2)\,\mathrm{d}\,z\\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\left(2x^2+\frac{56}{3}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\\
&= 2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\theta\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho^3\,\mathrm{d}\,\rho+\frac{56}{3}\mathrm{aria}\,\mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega_1\\
&= 2\pi\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}}+\frac{112\pi}{3}=\frac{118\pi}{3}.
\end{aligned}$$

$$\iiint\limits_{\Omega_2}(x^2+z^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \iint\limits_{2\le x^2+y^2\le 4}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\int\limits_{x^2+y^2}^{4}(x^2+z^2)\,\mathrm{d}\,z$$

$$=\iint\limits_{2\le x^2+y^2\le 4}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\int\limits_{x^2+y^2}^{4}(x^2+z^2)\,\mathrm{d}\,z$$

$$=\iint\limits_{2\le x^2+y^2\le 4}\left[x^2(4-x^2-y^2)+\frac{64}{3}-\frac{(x^2+y^2)^3}{3}\right]\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\theta\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\rho^3(4-\rho^2))\,\mathrm{d}\,\rho+\frac{64}{3}(4\pi-2\pi)-\frac{2\pi}{3}\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\rho^7\,\mathrm{d}\,\rho$$

$$=\pi\rho^4\big|_{\sqrt{2}}^2-\frac{\rho^6}{6}\Big|_{\sqrt{2}}^2+\frac{128\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\frac{\rho^8}{8}\Big|_{\sqrt{2}}^2=76\frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= \iiint\limits_{\Omega_1}(x^2+z^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+\iiint\limits_{\Omega_1}(x^2+z^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z\\
&= \frac{118\pi}{3}+76\frac{\pi}{3}=194\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

□

T7

1. Calculați următoarele volume mărginite de suprafețele:

a) $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 18$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z$.

c) $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2a}$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $z \geq 0$.

d) $x^2 + y^2 = 4a^2$, $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x + y + z = 3$, $x \geq 0$, $x \geq 0$ și $a \in (0, 1)$.

e) $x^2 + y^2 + z^2 = 18$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $x^2 + y^2 = z^2$.

f) $z = \pm h$, $y^2 = 4a^2 - 2ax$, $y^2 = ax$.

Soluție:

a) $\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ D = \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega : x^2 + y^2 \leq ax \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(\Omega) &= \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq ax} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}\,z \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2 \leq ax} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \end{aligned}$$

$\left\{ \begin{array}{ll} x = \rho\cos x & \theta \in [-\pi, \pi] \\ y = \rho \sin x & \rho^2 \leq a\rho\cos\theta \Rightarrow \cos\theta \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leq \rho \leq a\cos\theta$, $\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta$

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{a\cos\theta} \rho\left(a^2 - \rho^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{a\cos\theta} \mathrm{d}\,\theta = \frac{1}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[a^3 - a^3|\sin\theta|^3\right] \mathrm{d}\,\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\left[\pi - 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,\mathrm{d}\,\theta\right] = \frac{a^3}{3}\left[\pi - \frac{2}{4}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (3\sin\theta - \sin 3\theta)\,\mathrm{d}\,\theta\right] = \frac{a^3}{9}(3\pi - 4).$$

b) $\Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1$, unde

$\Omega_1 : \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ D_1 = \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega_1 : x^2 + y^2 \leq 3 \end{cases}$

$$\Omega_2 : \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{3} \leq z \leq \sqrt{18 - x^2 - y^2} \\ D_2 = \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega_2 : x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z \;=\; \iiint\limits_{\Omega_2} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z - \iiint\limits_{\Omega_1} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos x \\ y = \rho\sin x \end{array} \right\} \Rightarrow \theta \in [0, 2\pi],\; 0 \leq \rho \leq 3,\; \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega_2} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} \mathrm{d}\,z \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} \left(\sqrt{18 - x^2 - y^2} - \frac{x^2+y^2}{3}\right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\
&= \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} \left[\rho(18-\rho^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\rho^3}{3}\right] \mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(18-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 - \frac{\rho^4}{12}\Big|_0^3 \right] \\
&= 2\pi\left(-9 + 18\sqrt{2} - \frac{27}{4}\right) = \mathrm{Vol}(\Omega_2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega_1} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 3} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \mathrm{d}\,z \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 3} \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} - \frac{x^2+y^2}{3}\right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\
&= \int\limits_0^{\sqrt{3}} \int\limits_0^{2\pi} \left[\rho(4-\rho^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\rho^3}{3}\right] \mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{\rho^4}{12}\Big|_0^{\sqrt{3}} \right] \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{3}{4}\right) = \mathrm{Vol}(\Omega_1).
\end{aligned}$$

$\mathrm{Vol}(\Omega) = \mathrm{vol}\Omega_2 - \mathrm{vol}\Omega_1 = \frac{4\pi}{3}(27\sqrt{2} - 26)$.

Metoda a doua pentru b)

$\Omega : \begin{cases} x^2+y^2+z^2=18,\ x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=3z \end{cases}$, $\Omega = \Omega_2 \cup \Omega_1$, unde

$\Omega_1 : \begin{cases} \sqrt{4-x^2+y^2} \le z \le \sqrt{18-x^2+y^2} \\ \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega_1 : x^2+y^2 \le 3 \end{cases}$

$\Omega_2 : \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{3} \le z \le \sqrt{18-x^2-y^2} \\ \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega_2 : 3 \le x^2+y^2 \le 9 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega_1} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 3} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \int\limits_{\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{18-x^2+y^2}} \mathrm{d}\,z \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\le 3} \left(\sqrt{18-x^2+y^2}-\sqrt{4-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \left[\rho(18-\rho^2)^{\frac{1}{2}} - \rho(4-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= 2\pi\left[-\frac{1}{3}(18-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right] \\
&= \frac{2\pi}{3}\left(54\sqrt{2}-7-15\sqrt{15}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega_2} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= \iint\limits_{3\le x^2+y^2\le 9} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} \mathrm{d}\,z \\
&= \iint\limits_{3\le x^2+y^2\le 9} \left(\sqrt{18-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{3}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\sqrt{3}}^{3} \left[\rho(18-\rho^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\rho^3}{3}\right]\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= 2\pi\left[-\frac{1}{3}(18-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\sqrt{3}}^{3} - \frac{\rho^4}{12}\Big|_{\sqrt{3}}^{3}\right] \\
&= 2\pi\left(-9+5\sqrt{15}-\frac{27}{4}+\frac{3}{4}\right) == 2\pi(-15+5\sqrt{15}).
\end{aligned}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \iiint\limits_{\Omega_1} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + \iiint\limits_{\Omega_2} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$$

$$= 36\sqrt{2}\pi - 10\sqrt{15}\pi - \frac{14\pi}{3} - 30\pi + 10\sqrt{15}\pi = 36\sqrt{2}\pi - \frac{104\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}(27\sqrt{2}\pi - 26).$$

c) $\Omega : \left\{ \begin{array}{l} 0 \le z \le \frac{x^2+y^2}{2a} \\ D = \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega : x^2 + y^2 \le 2ax \end{array} \right. \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(\Omega) &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 2ax} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \int\limits_0^{\frac{x^2+y^2}{2a}} \mathrm{d}\,z \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 2ax} \frac{x^2+y^2}{2a}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \stackrel{\star}{=} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = \rho\cos\theta & \rho \in [0,a] \\ y = \rho\sin\theta & \theta \in [0,2\pi] \end{array} \right\}$$

$$\stackrel{\star}{=} \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho}{2a}\left(a^2 + \rho^2 + 2a\rho\cos\theta\right)\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta = \frac{1}{2a}2\pi\left(a^2\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^a + \frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^a\right) = \frac{3\pi}{4}a^3$$

d) $\Omega : \left\{ \begin{array}{l} 0 \le z \le 3 - x - y \\ D = \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 4a^2,\ x^2 + y^2 \ge 2ay, x \ge 0\} \end{array} \right. \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(\Omega) &= \iint\limits_D \left(\int\limits_0^{3-x-y} \mathrm{d}\,z \right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\ &= \iint\limits_D (3 - x - y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} x = \rho\cos\theta & \theta \in [0,2\pi]; & \rho^2 \le 4a^2 \\ y = \rho\sin\theta & & \rho^2 \ge 2a\sin\theta \end{array} \right\} \Rightarrow \rho \in [2a\sin\theta, 2a].$$

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=2ay \Rightarrow y\geq 0 \Rightarrow \sin\theta\geq 0 \Rightarrow \theta\in[0,\pi] \\ x\geq 0 \Rightarrow \cos\theta\geq 0 \Rightarrow \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2},2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \theta\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\Omega) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{2a\sin\theta}^{2a} \rho\,(3-\rho\cos\theta-\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{ \frac{3}{2}\rho^2\Big|_{2a\sin\theta}^{2a} - (\sin\theta+\cos\theta)\frac{\rho^3}{3}\Big|_{2a\sin\theta}^{2a}\right\}\mathrm{d}\,\theta \\
&= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\,\theta - \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \\
&\quad +\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta\cos\theta+\sin^4\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= \frac{3\pi a^2}{2} - 2a^3 + \frac{\pi a^3}{2}.
\end{aligned}$$

e) $V = V_1 - V_2$;

$$V_1 = \mathrm{Vol}(\Omega_1),\ \Omega_1 : \left\{\begin{array}{c} z^2\geq x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2\leq 18 \\ z\geq 0 \end{array}\right.$$

$$V_2 = \mathrm{Vol}(\Omega_1),\ \Omega_2 : \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2\leq z^2 \\ x^2+y^2+z^2\leq 8 \\ z\geq 0 \end{array}\right.$$

$$\Omega_1 : \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq \sqrt{18-x^2-y^2} \\ \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega_2 = D_1 : x^2+y^2\leq 9 \end{array}\right.$$

$$\Omega_2 : \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq \sqrt{8-x^2-y^2} \\ \mathrm{pr}_{xOy}\,\Omega_2 = D_2 : x^2+y^2\leq 4 \end{array}\right.$$

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z \;=\; \iiint_{\Omega_1} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z - \iiint_{\Omega_2} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \theta\in[0,2\pi],\ 0\leq\rho\leq 3,\ \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega_1} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 9} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} \mathrm{d}\,z \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\le 9} \left(\sqrt{18-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\
&= \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} \left[\rho(18-\rho^2)^{\frac12}-\rho^2\right]\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= 2\pi\left[-\frac13(18-\rho^2)^{\frac32}\Big|_0^3-\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^3\right] \\
&= 36\pi\left(\sqrt2-1\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega_2} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} \mathrm{d}\,z \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \left(\sqrt{8-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2} \left[\rho(8-\rho^2)^{\frac12}-\rho^2\right]\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta = \frac{32\pi}{3}\left(\sqrt2-1\right).
\end{aligned}
$$

$$V=V_1-V_2=\left(36-\frac{32}{3}\right)\pi(\sqrt2-1)=\frac{76}{3}\pi(\sqrt2-1).$$

Altfel:

Coordonate sferice: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi];\ \varphi\in[0,\pi],\ z\ge 0\Rightarrow$ $\cos\varphi\ge 0\Rightarrow\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\left.\begin{array}{r} 8\le\rho^2\le 18\Rightarrow\rho\in[2\sqrt2,3\sqrt2] \\ \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z=\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\theta \end{array}\right\}\Rightarrow x^2+y^2\le z^2\Rightarrow\sin^2\varphi\le\cos^2\varphi\Rightarrow$ $\cos 2\varphi\ge 0\Rightarrow 2\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$V=\mathrm{Vol}(\Omega)=\int\limits_{2\sqrt2}^{3\sqrt2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\theta=2\pi\frac{\rho^3}{3}\Big|_{2\sqrt2}^{3\sqrt2}(-\cos\varphi)\big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(54\sqrt{2} - 16\sqrt{2}) = \frac{76}{3}\pi(\sqrt{2} - 1).$$

f)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\Omega) &= \iint\limits_D \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \int\limits_{-h}^{h} \mathrm{d}\,z = 2h \iint\limits_D \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\
&= 2h\left(\int\limits_0^a \mathrm{d}\,x \int\limits_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} \mathrm{d}\,y + \int\limits_a^{\frac{4a}{3}} \mathrm{d}\,x \int\limits_{-\sqrt{4a^2-3ax}}^{\sqrt{4a^2-3ax}} \mathrm{d}\,y\right) \\
&= 2h\left(\int\limits_0^a 2\sqrt{ax}\,\mathrm{d}\,x + \int\limits_a^{\frac{4a}{3}} 2\sqrt{4a^2-3ax}\right)\mathrm{d}\,x \\
&= 2h\left(2\sqrt{a}\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3a}\frac{(4a^2-3ax)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_a^{\frac{4a}{3}}\right) \\
&= 2h\left(\frac{4a^2}{3} + \frac{4a^2}{9}\right) = \frac{32}{9}a^2 h
\end{aligned}$$

□

T8

1. Volumul corpului $V : x^2 + y^2 \geq 4x,\ x^2 + y^2 \geq 4z,\ z \geq 0.$

Soluție: $V : \begin{cases} 0 \leq z \leq \frac{x^2+y^2}{4} \\ \mathrm{pr}_{xOy} V = D : x^2 + y^2 \leq 4x \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V) \iiint\limits_V \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4x} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \int\limits_0^{\frac{x^2+y^2}{4}} \mathrm{d}\,z = \iint\limits_{(x-2)^2+y^2\leq 4} \frac{x^2+y^2}{4}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\
&= \frac{1}{4}\int\limits_0^2 \int\limits_0^{2\pi} (4 + \rho^2 + 4\rho\cos\theta)\rho\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,\rho \\
&= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^2 (4\rho + \rho^3)\,\mathrm{d}\,\rho \\
&= \frac{\pi}{2}(2\rho^2\Big|_0^2 - \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{\pi}{2}(8+4) = 6\pi.
\end{aligned}$$

□

2. Aria suprafeței:

a) $3z^2 = x^2 + y^2,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4.$

b) $\Sigma : y^2 = 2x,\ x < 8,\ 0 \leq z \leq 2.$

Soluție: a) $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$; $\mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma : x^2 + y^2 \leq 4,\ z_x = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_y = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$
$\mathrm{d}\,\sigma = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$

$$\mathrm{Aria}(\Sigma) = \iint\limits_{\Sigma} = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{aria}(\mathrm{pr}_{xOy}\,\Sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}4\pi = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}.$$

b) Avem un cilindru parabolic.

$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = t \\ z = z \end{cases} \Rightarrow t \in [-4, 4],\ z \in [0, 2],\ A = \frac{D(y,z)}{D(t,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ B = \frac{D(z,x)}{D(t,z)} =$
$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{vmatrix} = 0;\ C = \frac{D(x,y)}{D(t,z)} = 0 \Rightarrow \mathrm{d}\,\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,z = \sqrt{1 + t^2}\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,z$

$$\mathcal{A} = \iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}\,\sigma = \int\limits_{-4}^{4}\int\limits_{0}^{2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,t = 4\int\limits_{0}^{4} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t.$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}\,t + \int t(\sqrt{1+t^2})'\,\mathrm{d}\,t \\ &= \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + t\sqrt{1+t^2} - I \Rightarrow \\ I &= \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{1+t^2}) + \frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}. \\ \mathcal{A} &= 2\ln(t + \sqrt{1+t^2})\Big|_0^4 + 2t\sqrt{1+t^2}\Big|_0^4 = 8\sqrt{17} + 2\ln(4 + \sqrt{17}. \end{aligned}$$

□

3. a) Circulația câmpului $\overline{v} = (y+1)\overline{i} + x^2\overline{j}$ de-a lungul lui $\gamma\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, $y \leq 0,\ x \geq 0.$

b) $\int\limits_{\Gamma}(|x| + |y|)\,\mathrm{d}\,s,\ \Gamma : x^2 + y^2 = \lambda x.$

Soluție: a) $\int\limits_{\Gamma} \overline{v}\,\mathrm{d}\,\overline{r} = \int\limits_{\Gamma}(y+1)\,\mathrm{d}\,x + x^2\,\mathrm{d}\,y \stackrel{\star}{=}$

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi],\ \gamma : \begin{cases} \mathrm{d}\, x = -\sin\theta \,\mathrm{d}\,\theta \\ \mathrm{d}\, y = 2\cos\theta \,\mathrm{d}\,\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\star}{=} \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left[(2\sin\theta + 1)(-\sin\theta) + \cos^2\theta 2\cos\theta\right] \mathrm{d}\,\theta = \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (2\cos^3\theta - 2\sin^2\theta - \sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= 2\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left(-\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta\right)\mathrm{d}\,\theta - \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\,\theta + \cos\theta|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\
&= -\frac{3}{2}\sin\theta\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} + \frac{1}{6}\sin 3\theta\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} + 1 \\
&= -\frac{3}{2} - \frac{1}{6} - \frac{\pi}{2} + 1 = -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{6}(3\pi + 4).
\end{aligned}$$

b) $\Gamma : \left(x - \dfrac{\lambda}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^2 \Rightarrow \gamma : \begin{cases} x = \dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\lambda}{2}\cos\theta \\ y = \dfrac{\lambda}{2}\sin\theta \quad \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \end{cases}$

$$\begin{cases} x'(\theta) = -\dfrac{\lambda}{2}\sin\theta \\ y'(\theta) = \dfrac{\lambda}{2}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}\, s = \frac{|\lambda|}{2}$$

$$\int\limits_{\Gamma} (|x| + |y|)\,\mathrm{d}\, s = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{|\lambda|}{2} \cdot \frac{|\lambda|}{2}\,(1 + \cos\theta + |\sin\theta|)\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$= \frac{\lambda^2}{4} \cdot 2\pi + \frac{\lambda^2}{4}\left(\int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin\theta\right)\mathrm{d}\,\theta$$

$$= \frac{\pi\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4}\left(-\cos\theta|_0^{\pi} + \cos\theta|_{\pi}^{2\pi} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} + 1\right) = \lambda^2\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

□

4. a) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}\, x$; b) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}\, x$

Soluție:

a) $x^2 = \frac{t}{1-t} \Rightarrow x = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}\, t}{(1-t)^2}$, $t = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$

$t = 0$; $x \to \infty \Rightarrow t = 1$

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}\,x &= \int\limits_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}(1-t)^3\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}\,t}{(1-t)^2}\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\frac{9}{4}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\frac{5}{4}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\\
&= \frac{1}{4}\frac{5}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{1\cdot 5\cdot 1}{4^3}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\\
&= \frac{5}{64}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{5\pi}{32\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}\pi}{64}
\end{aligned}$$

b) $x^2 = \frac{t}{1-t} \Rightarrow x = t^{\frac{1}{2}}\,(1-t)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}\,t}{(1-t)^2}$,

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{6}}(1-t)^{-\frac{1}{6}}(1-t)^2 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}\,t}{(1-t)^2}\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}}(1-t)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}B\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

□

5. a) $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{\sqrt{1+(y-1)^n}}$, $D: 0 \le y < x < 1$, $n \ge 1$.

b) $\iint\limits_D \left(2+\sqrt{1+x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $D: x^2+y^2-2y \le 0$.

c) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $D: 1 \le x^2+y^2 \le 4$, $-\sqrt{3}x \le y \le x$.

Soluție: a) $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{\sqrt{1+(y-1)^n}} = \int\limits_0^1 \mathrm{d}\,x \int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}\,y}{\sqrt{1+(y-1)^n}}.$$

b) $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi]$; $y \ge 0 \Rightarrow \theta \in [0, \pi]$

$x^2+y^2\leq 2y \Rightarrow 0\leq\rho\leq 2\sin\theta$

$$\iint\limits_D \left(2+\sqrt{1+x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \;=\; 2\mathrm{aria}(D)+\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\sin\theta}\rho\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$2\pi+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\sin\theta}(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}(1+\rho^2)'\,\mathrm{d}\,\rho = 2\pi+\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi}(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\sin\theta}\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$2\pi+\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi}(1+4\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}+\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi}(1+4\sin\theta)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,\theta.$$

c) $x\geq 0$, $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}\leq \mathrm{tg}\,\theta\leq 1 \\ x\geq 0\Rightarrow \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \end{cases} \Rightarrow$
$-\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{3}\leq\theta\leq\mathrm{arctg}\,\sqrt{3}$; $-\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$, $1\leq\rho\leq 2$ și $\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta$.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \;=\; \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_1^2 \rho f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta.$$

□

6. Aflați extremele pentru:
a) $f(x,y)=(x+1)(y+1)(x+y)$;
b) $f(x,y)=(3x^2-y)(5x^2-y)$;
c) $f:\Omega\to\mathbb{R}$ $f(x,y,z)=x-2y+2z$, unde $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2\leq 9\}$.

Soluție:

a) $f(x,y)=x+y+x^2+y^2+2xy+x^2y+xy^2$.
$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2x+2y+2xy+y^2=0 \\ 1+2y+2x+x^2+2xy=0 \end{cases} \Rightarrow$ punctele critice $A\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, $B(-1,-1)$, $C(1,-1)$, $D(-1,1)$.

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 1+2y & 2+2x+2y \\ 2+2x+2y & 2+2x \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$H_f(A)=\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}\Rightarrow r_0=\frac{4}{3}, s_0=\frac{2}{3}, t_0=\frac{4}{3}\Rightarrow$$

$r_0t_0-s_0^2=\frac{16}{9}-\frac{4}{9}=\frac{4}{3}>0$, $r_0>0\Rightarrow A$ minim local

$$H_f(B)=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow r_0=0, r_0t_0-s_0^2=-4<0\Rightarrow B \text{ punct șa}.$$

$$H_f(C)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow r_0=0, r_0t_0-s_0^2=-4<0\Rightarrow C \text{ punct șa}.$$

$$H_f(D) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_0 > 0, r_0t_0 - s_0^2 = -4 < 0 \Rightarrow D \text{ punct șa.}$$

b) $f(x,y) = 15x^4 - 8x^2y + y^2 \Rightarrow \begin{cases} f_x = 60x^3 - 16xy = 0 \\ f_y = -8x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 4x(15x^2 - 4y) = 0 \\ 4x^2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0)$ punct critic.

$\begin{cases} 15x^2 = 4y \\ 4x^2 = y \end{cases} \Rightarrow$ sistem cu o singură soluție.

$f(x,y) - f(0,0) = (3x^2 - y)(5x^2 - y)$ ia valori atât pozitive cât și negative în jurul lui $(0,0)$: $y \in (3x^2, 5x^2) \Rightarrow f(x,y) - f(0,0) < 0$ și pentru $y \in (0, 3x^2) \Rightarrow f(x,y) > 0$. Deci $(0,0)$ nu este extrem.

c) $f_x = 1$, $f_y = -2$, $f_z = 2$. Nu avem puncte critice ale lui f în Ω.

Deci f nu are extreme în interiorul lui Ω. Domeniul Ω este compact, f este funcție continuă pe Ω, rezultă că f este mărginită și își atinge marginile pe Ω. Cum f nu are extreme în interiorul lui Ω, rezultă că f își atinge extremele pe $\partial\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Aflăm extremele lui f cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Formăm lagrangeanul $F(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$.

$$\begin{cases} F_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ F_y = -2 + 2\lambda y = 0 \\ F_x = 2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \\ z_1 = -2 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} \lambda_2 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \\ y_2 = -2 \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $A(-1,2,-2)$ punct critic pentru $F(x,y,z) = x - 2y + 2z + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$. $F_{x^2} = 1$, $F_{y^2} = 1$, $F_{z^2} = 1$, $F_{xy} = F_{yz} = F_{zx} = 0$

$$H_F(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = 1 > 0, \Delta_3 = 1 > 0 \Rightarrow$$

$A(-1,2,-2)$ minim cu legătură pentru $f(x,y,z)$.

$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $B(1,-2,2)$ punct critic pentru $F(x,y,z) = x - 2y + 2z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$. $F_{x^2} = -1$, $F_{y^2} = -1$, $F_{z^2} = -1$, $F_{xy} = F_{yz} = F_{zx} = 0$

$$H_F(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = -1 < 0, \Delta_2 = 1 > 0, \Delta_3 = -1 < 0 \Rightarrow$$

$B(1,-2,2)$ maxim cu legătură pentru $f(x,y,z)$.

$$f_{min} = f(A) = f(-1,2,-2) = -1-4-4 = -9.$$

$$f_{max} = f(b) = f(1,-2,2) = 1+4+4 = 9.$$

$\square$

Bibliografie

[1] Chiriță, S., *Probleme de matematici superioare*, Ed. Didacică și Pedagogică, București, 1989.

[2] Colojoară, I., *Analiză matematică*, Ed. Didacică și Pedagogică, București, 1983.

[3] Costache, T.L., *Culegere de analiză matematică*, Ed. Printech, București, 2009.

[4] Flondor, D., Danciu, N., *Algebră și Analiză matematică*, Ed. Didacică și Pedagogică, București, 1979.

[5] Găină, S., Câmpu, E., *Culegere de problemem de calcul diferențial și integral*, (vol. III), Ed. Tehnică, București, 1966.

[6] Stănășilă, O., *Analiză matematică*, Ed. Didacică și Pedagogică, București, 1981.