Cursul 9 Bazele Electrotehnicii & Electrotehnică

CAPITOLUL 4. CIRCUITE ELECTRICE MONOFAZATE ÎN REGIM ARMONIC PERMANENT

4.1. Elemente de circuit în regim armonic permanent (curent alternativ (c.a.)). Inductivități, cuplaje electromagnetice.

În circuitele de curent alternativ elementele de circuit sunt elementele active (sursele de energie) și cele pasive (rezistoarele, bobinele și condensatoarele).

Sursele de energie pot fi surse de tensiune sau de curent, ideale sau reale, independente sau comandate. Semnalele electrice ce le caracterizează sunt funcții variabile în timp (sinusoidale), notate cu litere mici, $e(t)=e$, $i_s(t)=i_s$.

Rezistorul electric ideal se caracterizează, ca și în c.c., prin rezistența electrică a sa. Condensatorul electric ideal se caracterizează (după cum s-a văzut în Capitolul 2 – Circuite electrice în regim static – rețele de condensatoare) prin capacitatea electrică a sa.

Bobina electrică. Inductivități.

Definiție: Se numește ***bobină electrică*** un circuit dipolar realizat dintr-un conductor filiform izolat lateral, realizat sub formă de spire și care poate fi alimentat în curent electric de conducție.

Definiție: ***Inductivitatea*** unui circuit se definește ca raportul dintre fluxul magnetic ce străbate o suprafață limitată de conturul circuitului și curentul care îl produce (ceilalți curenți fiind considerați nuli).

Se consideră două bobine de contur Γ_1 și Γ_2 cu N_1, N_2 spire în jurul cărora se admite un mediu magnetic liniar și omogen ($\mu \neq f(H)$, μ=constant).

Dacă numai bobina 1 este parcursă de curentul de conducție i_1 se definesc următoarele:

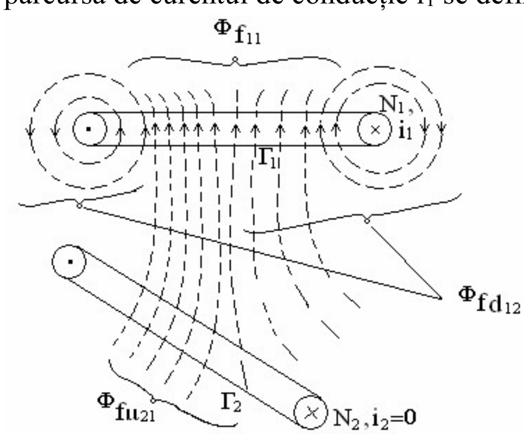


Fig.4.1 Linii de câmp magnetic generate de curentul din bobina 1

a). Fluxuri magnetice fasciculare – corespunzătoare unei spire

- Φf_{11} – ***fluxul fascicular*** produs de bobina 1 ce trece prin suprafața mărginită de o spiră a sa, numit și flux fascicular propriu al bobinei 1;
- Φfu_{21} – fluxul fascicular produs de bobina 1 ce trece prin suprafața mărginită de o spiră a bobinei 2, numit și ***flux fascicular util*** al bobinei 2 în raport cu bobina 1.

Convenții:

- Notația fluxurilor este afectată de doi indici, primul precizează circuitul prin a cărui suprafață trece fluxul, iar al doilea curentul care produce fluxul respectiv.

- Sensul de referință al fiecărui flux este asociat după regula burghiului drept cu sensul curentului din circuit.

O parte din fluxul fascicular propriu al bobinei 1 nu trece prin bobina 2 și se numește ***flux fascicular de dispersie*** (pierderi sau scăpări) Φfd_{12}.

$$\phi_{f_{11}} = \phi_{fu_{21}} + \phi_{fd_{12}} \tag{4.1}$$

Unitatea de măsură pentru măsurarea fluxului magnetic în SI este weber-ul:

$\left\langle \Phi_f \right\rangle_{SI} = 1\,Wb$ (weber) , $\Phi[Wb]$

b). Fluxuri magnetice totale – pentru toate spirele

Se definește ***fluxul total propriu*** al bobinei 1 mărimea Φ_{11} dată de expresia:

$$\phi_{11} = N_1 \cdot \phi_{f\,11} \tag{4.2}$$

În mod similar se definesc, ***fluxul total util*** al bobinei 2 în raport cu bobina 1:

$$\phi_{u_{21}} = N_2 \cdot \phi_{fu_{21}} \tag{4.3}$$

și ***fluxul total de dispersi***e al bobinei 1 față de bobina 2:

$$\phi_{d_{12}} = N_1 \cdot \phi_{fd_{12}} \tag{4.4}$$

c) Inductivități (Inductanțe)

Se numește ***inductivitate proprie*** a bobinei 1 raportul pozitiv dintre fluxul total propriu al acesteia produs de curentul din bobină (cu sensul asociat după regula burghiului drept) și curent.

$$L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{f_{11}}}{i_1},\ L_{11} > 0 \tag{4.5}$$

Se numește ***inductivitate utilă (mutuală)*** a bobinei 2 în raport cu 1 raportul dintre fluxul total util al bobinei 2 în raport cu 1 și curentul care îl produce.

$$L_{u_{21}} = L_{21} = \frac{\phi_{u_{21}}}{i_1} = \frac{N_2 \phi_{fu_{21}}}{i_1},\ \ L_{21} > 0, L_{21} < 0 \ sau\ L_{21} = 0 \tag{4.6}$$

Observație: Fluxul se consideră pozitiv în sensul asociat după regula burghiului drept conform sensului curentului i_2. Deoarece sensul acestuia poate fi diferit de cel al curentului i_1, inductivitatea mutuală poate fi pozitivă sau negativă, după cum sensurile curenților din cele două bobine coincid sau nu.

Se numește ***inductivitate de dispersie*** a bobinei 1 față de 2 mărimea pozitivă dată de expresia:

$$L_{d_{12}} = \frac{\phi_{d_{12}}}{i_1} = \frac{N_1 \phi_{fd_{12}}}{i_1},\ L_{d_{12}} > 0 \tag{4.7}$$

Observație: Ținând cont de legătura dintre fluxurile fasciculare proprii, utile și de dispersie se poate stabili o relație între inductivitățile proprii, utile și de dispersie a două bobine.

$$\phi_{f_{11}} = \phi_{fu_{21}} + \phi_{fd_{12}}$$

$$\frac{L_{11} \cdot i_1}{N_1} = \frac{L_{u21} \cdot i_1}{N_2} + \frac{L_{d_{12}} \cdot i_1}{N_1}$$

$$L_{11} = \frac{N_1}{N_2} \cdot L_{u_{21}} + L_{d_{12}} \tag{4.8}$$

Observație: În mod similar se pot defini inductivitățile în situația când $i_2 \neq 0$ şi $i_1 = 0$: $L_{22}, L_{u_{12}}, L_{d_{21}}$

Se poate arăta că $L_{u_{12}} = L_{u_{21}} = M$, inductivitatea mutuală a celor două bobine, una față de cealaltă.

Practic, $\begin{matrix} L_{11} \rightarrow L_1 \\ L_{22} \rightarrow L_2 \end{matrix}$

Unitatea de măsură în SI pentru inductivitatea (inductanța) electrică a unei bobine este henry-ul (După numele omului de știință american Joseph Henry).

$\langle L \rangle_{SI} = 1\,H$ (henry), $L[\,H\,]$

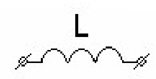


Fig.4.2 Simbolul grafic al unei inductivități

Se definește coeficientul de cuplaj magnetic între două bobine "k" prin relația:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_{11} \cdot L_{22}}}, \ k \in [0, 1] \tag{4.9}$$

- pentru k=0 bobinele nu sunt cuplate magnetic între ele (sunt ecranate)
- pentru k=1 bobinele sunt cuplate perfect (fără dispersie)

În fig. 4.3 sunt reprezentate două bobine cuplate pozitiv (adițional). Dacă se schimbă sensul curentului i_2, de exemplu, câmpul magnetic rezultant în interiorul fiecărei bobine se va micșora rezultând astfel un cuplaj negativ (diferențial) al bobinelor. Același fenomen se întâmplă dacă se schimbă sensul lui i_1 sau dacă se schimbă sensul de înfășurare al oricărei bobine.

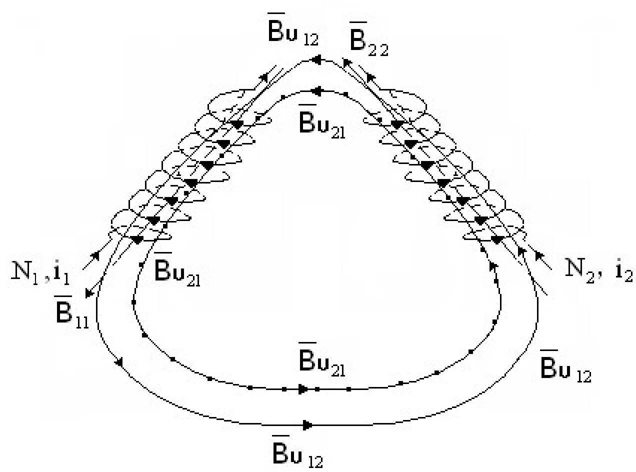


Fig.4.3 Bobine electrice cuplate magnetic

Observație: În mod obișnuit, nu se figurează explicit structura circuitului magnetic al bobinelor cuplate ci se adoptă convenția: orice indicare a valorii algebrice a unei inductivități mutuale este însoțită de însemnarea cu un asterisc sau un punct a uneia dintre bornele fiecărei bobine, numită bobină polarizată. Atunci când sensurile curenţilor prin cele două bobine cuplate magnetic sunt orientate în acelaşi mod faţă de bornele polarizate inductivitatea mutuală are valoarea pozitivă. Dacă sensurile curenţilor faţă de bornele polarizate ale bobinelor sunt diferite, inductivitatea mutuală are valoarea negativă.

Exemplu:

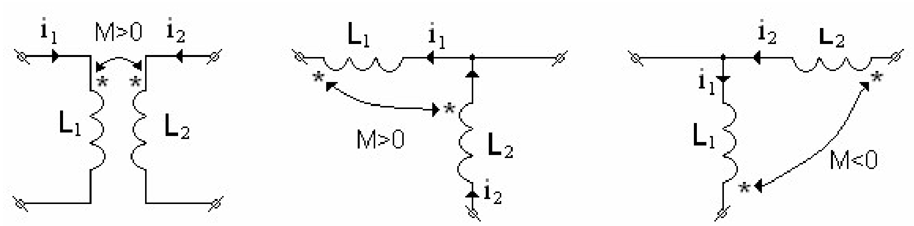


Fig.4.4 Reprezentarea grafică a bobinelor cuplate magnetic

4.2. Mărime periodică. Mărime armonică

4.2.1. Mărime variabilă. Valori caracteristice

Se numeşte ***mărime variabilă*** o mărime care îşi modifică valoarea în timp. O mărime variabilă se caracterizează prin valoarea instantanee a sa, care reprezintă valoarea pe care o are mărimea variabilă la un moment oarecare t. Prin convenţie, valoarea instantanee se notează cu literă mică.

Ex. e(t)=e, u(t)= u, i(t)=i

Se numeşte ***mărime periodică*** o mărime variabilă a cărei succesiune de valori se repetă la intervale egale de timp, numite perioade (T).

Pentru mărimile periodice există relaţiile:

$$x(t) = x(t + kT),\ k \in Z \tag{4.11}$$

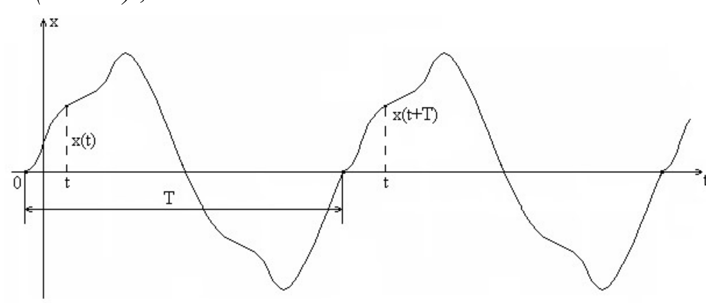


Fig. 4.7 Mărime periodică

Numărul de perioade cuprinse în unitatea de timp se numeşte ***frecvenţă*** (f), iar produsul $2\pi f = \omega$ se numeşte ***pulsaţia*** mărimii periodice.

Există deci relaţiile:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},\ \text{sau}\ \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T},\ \omega T = 2\pi \tag{4.12}$$

$\langle f \rangle_{SI} = 1\ Hz$ (Hertz), $\langle T \rangle_{SI} = 1\ s$, $\langle \omega \rangle_{SI}$=1 rad/s (radian pe secundă)

Observaţie:

În reţelele industriale din Europa frecvenţa este standardizată la 50 Hz, iar în cele din S.U.A., Canada şi Australia la 60 Hz. Această frecvenţă se mai numeşte uzual şi ***frecvenţa***

industrială, iar valoarea sa a fost aleasă mică pentru ca pierderile de putere să fie mici, dar suficient de mare pentru ca variațiile corespunzătoare intensității luminoase a lămpilor cu incandescență să fie insesizabile ochiului uman.
Pentru unele utilizări speciale se mai utilizează şi alte frecvențe, de ex.: 25 Hz, 162/3 Hz în tracțiune electrică pe calea ferată, 400 Hz în aviație și marină, de ordinul MHz și GHz în radiotehnică și televiziune.

Se numește ***valoare de vârf (maximă)*** sau amplitudine a unei mărimi periodice, cea mai mare valoare pe care o poate avea acea mărime în decursul unei perioade și se notează cu X_m.

Se definește ***valoarea medie*** a unei mărimi variabile ca fiind media aritmetică a valorilor instantanee ale mărimii variabile într-un anumit interval de timp.

$$X_{med} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\cdot dt \tag{4.13}$$

Dacă mărimea este periodică: $T = t_2 - t_1$,

$$X_{med} = X_0 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)dt \tag{4.14}$$

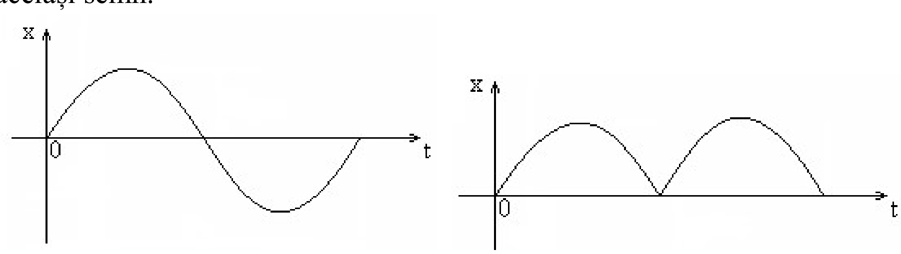
Valoarea efectivă sau eficace a unei mărimi periodice este egală cu rădăcina pătrată a mediei pătratului valorii instantanee a unei mărimi periodice în timp de o perioadă.

$$X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t)\cdot dt}, \quad X > 0 \tag{4.15}$$

Observație. Valoarea efectivă a unui curent periodic i(t), notată cu I, este numeric egală cu intensitatea unui curent continuu care străbătând aceeași rezistență ca și curentul periodic, produce aceeași cantitate de căldură în timp de o perioadă.

Se numește ***mărime alternativă*** o mărime periodică a cărei valoare medie pe o perioadă este nulă.

Se numește ***mărime pulsatorie***, o mărime periodică, a cărei valoare instantanee păstrează tot timpul același semn.



mărime alternativă mărime pulsatorie

Fig.4.8

4.2.2 Mărime sinusoidală. Proprietăți

Se numește ***mărime sinusoidală sau armonică***, o mărime alternativă care poate să fie scrisă în forma „ în sinus”:

$$x(t) = x = X_m \sin(\omega t + \gamma_x) \tag{4.16}$$

X_m - valoare maximă

$\omega t + \gamma_x$ - faza mărimii sinusoidale (argumentul sinusului)

γ_x - faza inițială; ω - pulsația; t - timpul

Proprietate. Valoarea medie a unei mărimi sinusoidale este nulă.

$$X_{med} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} X_m \sin(\omega t + \gamma_x)\cdot dt = -\frac{1}{T}\cdot\frac{X_m}{\omega}\cdot\cos(\omega t + \gamma_x)\Big|_{t_1}^{t_1+T} =$$

$$= -\frac{1}{T}\cdot\frac{X_m}{\omega}\cdot\left[\cos(\omega t_1 + \omega T + \gamma_x) - \cos(\omega t_1 + \gamma_x)\right]$$

$$\Rightarrow X_{med} = \frac{X_m}{2\pi}\left[\cos(\omega t_1 + \gamma_x) - \cos(\omega t_1 + \gamma_x + 2\pi)\right] = 0$$

Pentru a caracteriza o mărime sinusoidală se utilizează totuși, o valoare medie calculată pentru unda pozitivă.

$$X_{med(+)} = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+\frac{T}{2}} X_m \sin(\omega t + \gamma_x)dt = -\frac{2X_m}{\omega T}\left[\cos\left(\omega t_1 + \frac{\omega T}{2} + \gamma_x\right) - \cos(\omega t_1 + \gamma_x)\right] =$$

$$= \frac{X_m}{\pi}\left[\cos(\omega t_1 + \gamma_x) - \cos(\omega t_1 + \gamma_x + \pi)\right] = 2\frac{X_m}{\pi}\cos(\omega t_1 + \gamma_x)$$

Pentru $\gamma_x = 0, \quad t_1 = 0 \quad \Rightarrow X_{med(+)} = 2\frac{X_m}{\pi}$ (4.17)

Valoarea efectivă a unei mărimi sinusoidale este:

$$X^2 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} X_m^2 \sin^2(\omega t + \gamma_x)dt = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} X_m^2 \frac{1-\cos 2(\omega t + \gamma_x)}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}\frac{X_m^2}{2}\cdot dt - \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} X_m^2\frac{\cos 2(\omega t + \gamma_x)}{2}dt = \frac{1}{T}\cdot\frac{X_m^2}{2}(t_1 + T - t_1) + 0 = \frac{X_m^2}{2}$$

$$X^2 = \frac{X_m^2}{2} \Rightarrow \quad X_m = X\sqrt{2} \tag{4.18}$$

Raportul între valoarea efectivă și valoarea medie (calculată pentru semiunda pozitivă) a unei mărimi se numește ***factor de formă*** al undei.

$$k_f = \frac{X}{X_{med(+)}} \tag{4.19}$$

Pentru o mărime sinusoidală $k_f = \dfrac{X}{X_{med(+)}} = \dfrac{X_m/\sqrt{2}}{2X_m/\pi} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$

Întrucât în electrotehnică se lucrează cu valorile efective ale mărimilor sinusoidale, rezultă forma normală "în sinus" a unei mărimi sinusoidale:

$$x = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_x) \tag{4.20}$$

Observație. O mărime sinusoidală este complet determinată dacă i se cunosc:

- valoarea efectivă X;
- pulsația ω;
- faza inițială γ_x.

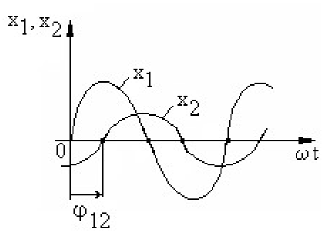
Definiție. Diferența dintre fazele inițiale a două mărimi sinusoidale se numește **defazaj**.

Ex. $x_1 = X_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_{x1})$

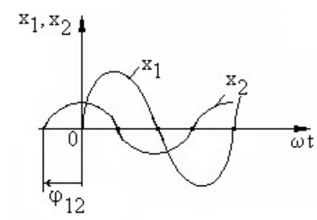
$$x_2 = X_2\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma_{x2}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi_{12} = \gamma_{x_1} - \gamma_{x2} \qquad (4.21)$$

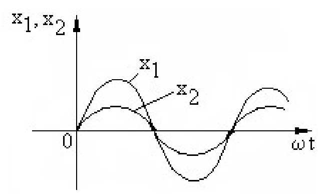
- Dacă $\varphi_{12} > 0$; x_1 este defazat înaintea lui x_2
- Dacă $\varphi_{12} < 0$; x_1 este defazat în urma lui x_2
- Dacă $\varphi_{12} = 0$; x_1 este în fază cu x_2
- Dacă $\varphi_{12} = \pm\dfrac{\pi}{2}$; mărimile sunt cuadratură
- Dacă $\varphi_{12} = \pm\pi$; mărimile sunt în opoziție de fază.



a. $\varphi_{12} > 0$



b. $\varphi_{12} < 0$



c. $\varphi_{12} = 0$

Fig. 4.9 Mărimi sinusoidale defazate

4.2.3 Operații elementare cu mărimi sinusoidale

Circuitele liniare de curent alternativ sunt descrise de ecuații integro-diferențiale liniare, în care asupra mărimilor sinusoidale se fac operațiile de adunare, înmulțire cu un scalar, derivare sau integrare. Prin aceste operații se obțin mărimi sinusoidale de aceeași frecvență.

Adunarea mărimilor sinusoidale $x_1 = X_1\sqrt{2}\,sin\left(\omega t + \gamma_1\right)$ și $x_2 = X_2\sqrt{2}\,sin\left(\omega t + \gamma_2\right)$ conduce la o mărime sinusoidală de forma: $x = X\sqrt{2}\,sin\left(\omega t + \gamma\right)$.

Dacă $x = x_1 + x_2$ prin identificare rezultă:

$$X\sqrt{2}\,sin\left(\omega t + \gamma\right) = X_1\sqrt{2}\,sin\left(\omega t + \gamma_1\right) + X_2\sqrt{2}\,sin\left(\omega t + \gamma_2\right)$$

Când $\omega t = 0 \Rightarrow \; sin\,\gamma = \dfrac{1}{X}\left(X_1\,sin\,\gamma_1 + X_2\,sin\,\gamma_2\right)$

Când $\omega t = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \; cos\,\gamma = \dfrac{1}{X}\left(X_1\,cos\,\gamma_1 + X_2\,cos\,\gamma_2\right)$

Dar $sin^2\gamma + cos^2\gamma = 1$, din care rezultă :

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2\,cos\left(\gamma_1 - \gamma_2\right)} \qquad (4.22)$$

$$\text{și } \gamma = artcg\,\frac{X_1\,sin\,\gamma_1 + X_2\,sin\,\gamma_2}{X_1\,cos\,\gamma_1 + X_2\,cos\,\gamma_2} \qquad (4.23)$$

Amplificarea unei mărimi sinusoidale cu un scalar λ conduce la o mărime sinusoidală de aceeași frecvență și aceeași fază inițială, dar cu valoarea efectivă amplificată de λ ori:

$\lambda x = \lambda X\sqrt{2}\, sin(\omega t + \gamma)$, adică

$$X' = \lambda X \tag{4.24}$$

Derivarea unei mărimi sinusoidale în raport cu timpul conduce la o mărime sinusoidală de aceeași frecvență, dar defazată înainte cu $\frac{\pi}{2}$ și având valoarea efectivă de ω ori mai mare:

$$\frac{dx}{dt} = X\sqrt{2}\cdot\omega\, cos(\omega t + \gamma) = \omega X\sqrt{2}\, sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.25}$$

Integrarea în timp a unei mărimi sinusoidale conduce la o mărime sinusoidală de aceeași frecvență, dar defazată în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ și având valoarea efectivă de ω ori mai mică.

$$\int x dt = X\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\omega} cos(\omega t + \gamma)\right] = \frac{X}{\omega}\sqrt{2}\, sin\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.26}$$

4.3 Reprezentarea simbolică a mărimilor sinusoidale

În cazul circuitelor electrice care au o structură mai complicată, determinarea regimul permanent prin metoda directă expusă anterior este dificilă și prea puțin intuitivă. Din acest motiv se face apel la reprezentări simbolice pentru mărimile sinusoidale, care conduc la o rezolvare simplă a circuitelor de curent alternativ similară cu cea a celor de curent continuu.

Pentru ca rezolvarea cu ajutorul mărimilor simbolice să fie eficientă, ea trebuie să îndeplinească anumite cerințe:

- reprezentarea să fie biunivocă, adică fiecărei mărimi sinusoidale să-i corespundă un simbol și fiecărui simbol să-i corespundă o mărime sinusoidală și numai una;
- calculul cu simboluri să fie mult mai ușor decât cu mărimea sinusoidală;
- trecerea de la mărimea sinusoidală la simbolul ei precum și invers, de la simbol la mărimea sinusoidală, să se facă ușor.

În studiul circuitelor de curent alternativ (c.a.) care funcționează în regim permanent sinusoidal se utilizează două tipuri de reprezentări simbolice: reprezentarea geometrică (prin fazori) și reprezentarea analitică (în complex). În general, în cadrul aceleiași probleme, se utilizează ambele reprezentări simultan, care sunt în plan.

4.3.1 Reprezentarea geometrică (prin fazori)

Dacă se consideră o mărime sinusoidală: $x = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_x)$ acesteia i se poate asocia în planul *xOy* un vector $\overline{OA}$, de modul $OA = X\sqrt{2}$ și care formează cu axa *Ox* unghiul $\omega t + \gamma$. Acest vector se numește ***fazor*** și are proprietatea că proiecția pe axa *Oy* este egală în orice moment cu valoarea instantanee a mărimii x.

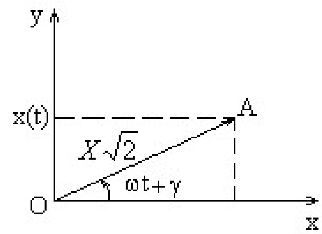


Fig. 4.20

Observație: Vectorul $\overline{OA}$ nu reprezintă din punct de vedere fizic un curent sau o tensiune ci numai un simbol al acestora.

4.3.2 Reprezentarea analitică (în complex)

După cum se știe din algebra numerelor complexe, fiecărui număr complex îi corespunde biunivoc în planul complex al lui Gauss un punct (afixul numărului) și prin urmare îi corespunde un vector de poziție. Rezultă că identificând planul reprezentării geometrice cu planul complex, se stabilește o corespondență biunivocă între funcțiile sinusoidale și numerele complexe.

Mărimii sinusoidale de forma: $x = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_x)$ i se atașează în planul complex simbolul $\underline{x}$, numit valoarea instantanee complexă, de forma: $\underline{x} = X\sqrt{2} \cdot e^{j(\omega t+\gamma)}$, cu $j = \sqrt{-1}$. Aceasta are proprietatea că proiecția sa pe axa imaginară este chiar mărimea sinusoidală *x*.

$x = Im(\underline{x})$.

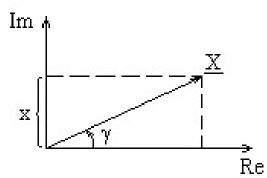


Fig. 4.21

Pentru simplificarea calculului, în rezolvarea problemelor, se adoptă reprezentarea în complex simplificată:

$$x = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_x) \leftrightarrow \underline{X} = X \cdot e^{j\gamma_x} \qquad (4.46)$$

În acest caz $\underline{X}$ nu mai este funcție de timp și se suprimă termenul $\sqrt{2}$.

$\underline{X}$ - se numește valoarea efectivă complexă

Observație: Reprezentarea în complex simplificată este valabilă numai pentru mărimile sinusoidale care au aceeași pulsație.

$$C\{x(t)\} = \underline{X} \qquad (4.47)$$

Din formulele lui Euler:

$cos\gamma = \dfrac{e^{j\gamma} + e^{-j\gamma}}{2}$ și $sin\gamma = \dfrac{e^{j\gamma} - e^{-j\gamma}}{2j}$ rezultă: $cos\gamma + j\,sin\gamma = e^{j\gamma}$

Atunci $\underline{X} = X \cdot e^{j\gamma_x} = X(\cos\gamma_x + j\sin\gamma_x) = \text{Re} + j\,\text{Im}$ (4.48)

Exemple:

a). $u = 100\sqrt{2}\,sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})\,V \xrightarrow{C} \underline{U} = 100 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = 100(cos\frac{\pi}{6} + j\,sin\frac{\pi}{6})$

$\underline{U} = 100(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}) = 50\sqrt{3} + 50j = 86{,}6 + 50j$

b). $i = 20\sqrt{2}\,sin(100\pi t - \frac{\pi}{3})\,A \xrightarrow{C} \underline{I} = 20 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} = 20(cos\frac{\pi}{3} - j\,sin\frac{\pi}{3})$

$\underline{I} = 20(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}) = 10 - 10\sqrt{3}j = 10 - 17{,}3j$

c). $e = 50\,sin(100\pi t - \frac{\pi}{4})\,V \xrightarrow{C} \underline{E} = \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{50}{\sqrt{2}}(cos\frac{\pi}{4} - j\,sin\frac{\pi}{4})$

$\underline{E} = \frac{50}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}) = 25 - 25j$

d). $e = 200\sqrt{2}\,cos(100\pi t - \frac{\pi}{4})\,V \Rightarrow e = 200\sqrt{2}\,sin(100\pi t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})$

$e = 200\sqrt{2}\,sin(100\pi t + \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{C} \underline{E} = 200 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = 200(cos\frac{\pi}{4} + j\,sin\frac{\pi}{4})$

$\underline{E} = 200(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = 100\sqrt{2} + 100\sqrt{2}j = 141{,}4 + 141{,}4j$

Revenirea din complex în instantaneu se face cu relația:

$$x = Im\{\,\underline{X}\sqrt{2}e^{j\omega t}\,\} \qquad (4.49)$$

$$x = \text{Im}\{\underline{X}\sqrt{2}e^{j\omega t}\} = \text{Im}\{X\sqrt{2}e^{j(\omega t+\gamma}\} = \text{Im}\{X\sqrt{2}\cos(\omega t+\gamma) + jX\sqrt{2}\sin(\omega t+\gamma)\} =$$
$$= X\sqrt{2}\sin(\omega t+\gamma)$$

Observație: Dacă $\underline{X} = Re + j\,Im \;\Rightarrow\; X = \sqrt{Re^2 + Im^2}$ şi $\gamma = arctg\frac{Im}{Re}$

Exemple:

a). $\underline{I} = 3 + 2j$**,** $I = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3{,}6\;A$**,** $\gamma = arctg\frac{2}{3} = 0{,}58\;rad$

$\Rightarrow i = 3{,}6\sqrt{2}\,sin(\,\omega t + 0{,}58\,)\;A$

b). $\underline{U} = 9 - 15j$**,** $U = \sqrt{9^2 + (-15)^2} = \sqrt{306} = 17{,}49\;V$**,**

$\gamma = arctg\frac{-15}{9} = -1{,}03\;rad \Rightarrow u = 17{,}49\sqrt{2}\,sin(\,\omega t - 1{,}03\,)\,V$

$u = 17,49\sqrt{2}\sin(\omega t - 1,03)\;V = 17,49\sqrt{2}\sin(\omega t + 2\pi - 1,03) = 17,49\sqrt{2}\sin(\omega t + 5,25)\;V$