Analiză complexă

Numere complexe

$i = \sqrt{-1}$ (Euler)

$\sqrt{\text{nr negativ}}$ = " nr imaginar "

$z = a + ib \rightarrow$ Gauss

$\hookrightarrow$ nr. complex

reprezentarea în plan a nr. complexe

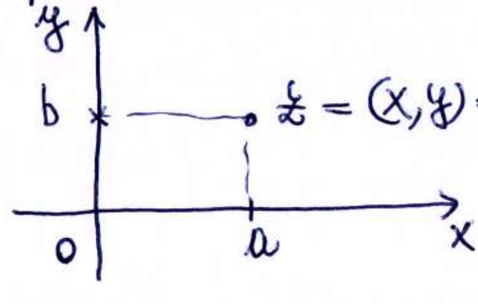
a) Repr. sub formă algebrică a nr. complexe

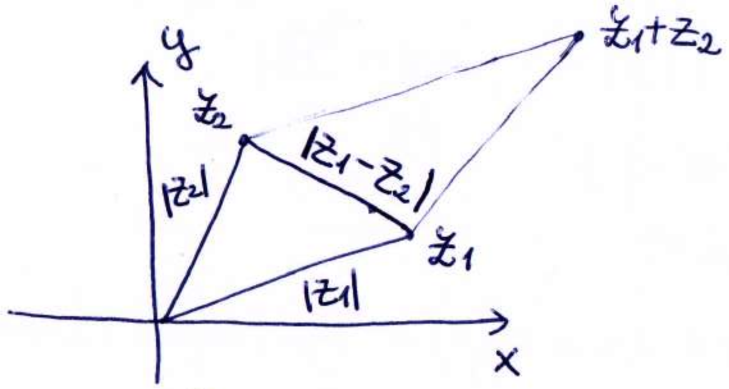
$z = x + iy \qquad x = \operatorname{Re} z$

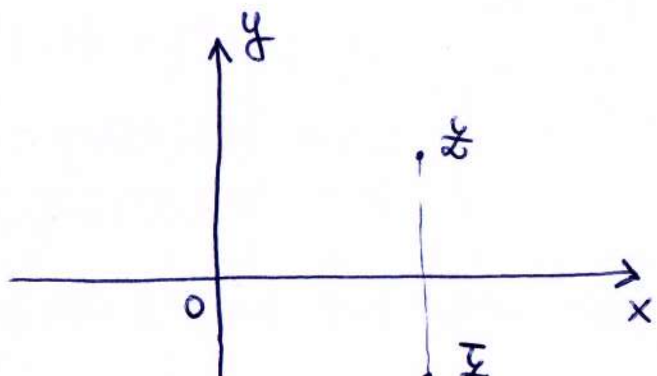
$\qquad\qquad\qquad y = \operatorname{Im} z$

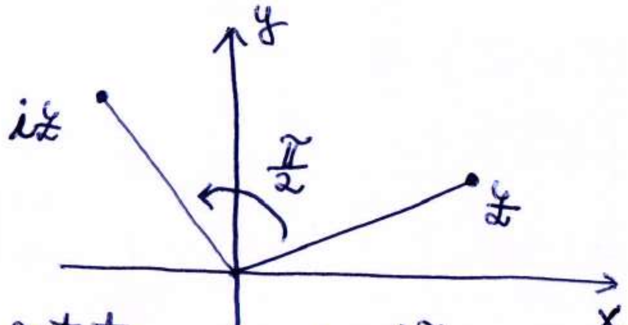
$i \equiv (0,1)$

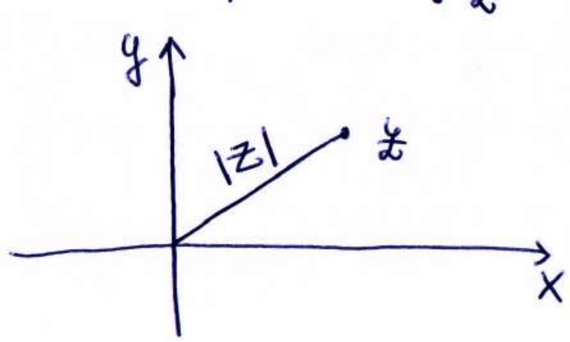
b) Repr. în plan a nr. complexe









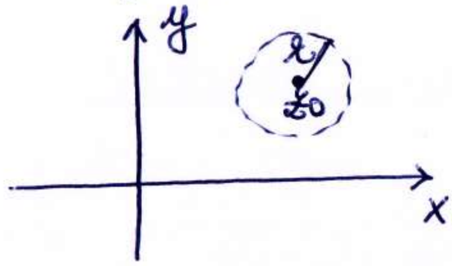


rotație cu $\pi/2$ $\leftarrow$ $z \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = iz$

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = d(z_1, z_2)$

$|z - z_0| = r \iff d(z, z_0) = r$

$|z - z_0| < r \iff B(z_0, r)$



$0 \le r < |z - z_0| < R \in (0, +\infty]$

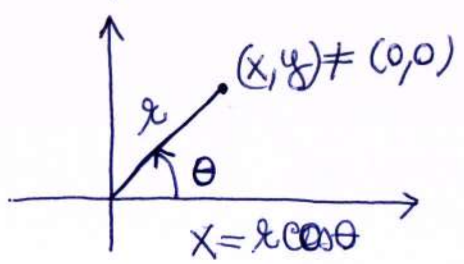
$\rightsquigarrow$ coroană circulară

$r = 0$, R finit $\rightsquigarrow$ $\odot$

$r = 0$, $R = \infty$ $\rightsquigarrow$ $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

c) Reprezentarea sub formă trigonometrică (repres. polară) a nr. complexe

$z \neq 0$



$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
$= |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\theta \in (-\pi, \pi]$

$\rightsquigarrow$ $\arg z$ argumentul principal al lui z

$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Aplicație: $z \neq 0$. Căutăm $\omega \in \mathbb{C}$ astfel încât $\omega^n = z$

$\Rightarrow |\omega^n| = |\omega|^n = |z| \Rightarrow |\omega| = \sqrt[n]{|z|}$.

$\omega = |\omega|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\omega^n = z \iff |\omega|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\begin{cases} \cos n\varphi = \cos\theta \\ \sin n\varphi = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow n\varphi \in \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$

$\varphi \in \left\{ \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$\Rightarrow \omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$\Rightarrow \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\} \equiv \sqrt[n]{z}$

radicalul complex de ordinul n al lui z

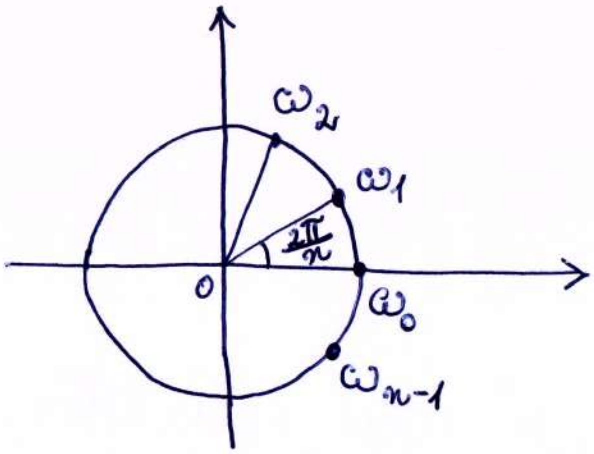
<u>obs:</u> 1) $\sqrt{z} = \{z_1, -z_1\}$ în $\mathbb{C}$

$\sqrt{z} = \{\sqrt{|z|}\,(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}) \mid k=\overline{0,1}\}$

2) $\sqrt{z^2} = \{z, -z\} \equiv \pm z$ în $\mathbb{C}$

3) $\sqrt[n]{1} = \{\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}\}$

$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k=\overline{0,n-1}$



4) Rezolvarea ec. de gradul 2 cu coef. complecși

$az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$

$\underset{\neq 0}{a}\,(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}) = 0$

$(z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

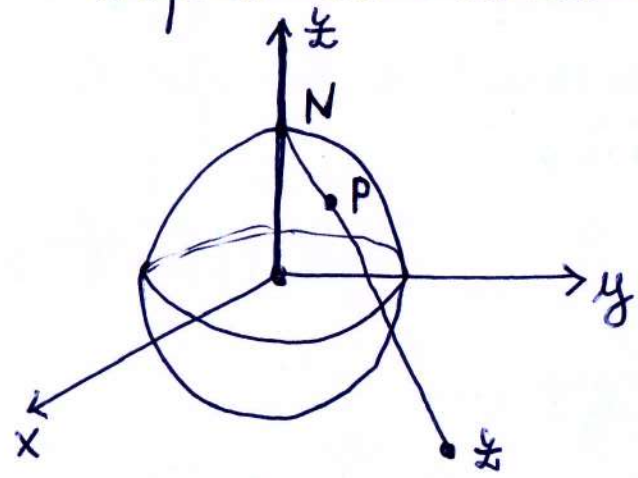
$\Downarrow$

$z + \frac{b}{2a} \in \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\pm 2a}$ (vezi Obs. 2))

$\Downarrow$

$$\boxed{z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

d) Reprezentarea pe sferă a nr.-lor complexe (Sfera lui Riemann)



$S \setminus \{N\} \leftrightarrow \mathbb{C}$

$S \leftrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \tilde{\mathbb{C}}$

punct fictiv

$N \leftrightarrow \infty$ ↳ infinitul complex

Se definesc: $\begin{cases} z+\infty=\infty \\ z-\infty=\infty \\ \dfrac{z}{0}=\infty, \ z\in\mathbb{C}^* \\ \dfrac{z}{\infty}=0 \\ \infty\cdot\infty=\infty \end{cases}$

$\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$

Structura algebrică: $(\mathbb{C},+,\cdot)$ corp comutativ, cu operațiile algebrice def. prin

$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$

$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)$

<u>obs.</u> Un nr. real $a\in\mathbb{R}$ se poate scrie $(a,0)$.

$i^2=-1$

$i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(0-1,\ 0+0)=(-1,0)$

!

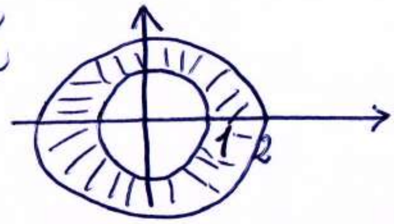
i	$i^{4k}=1$
$i^2=-1$	$i^{4k+1}=i$
$i^3=-i$	$i^{4k+2}=-1$
$i^4=1$	$i^{4k+3}=-i$

EX: Precizați pt. fiecare din următoarele cazuri ce mulțime de pct $P(z)$ din planul complex verifică relațiile:

1) $|z+3| = 5$ $\quad C(-3, 5)$

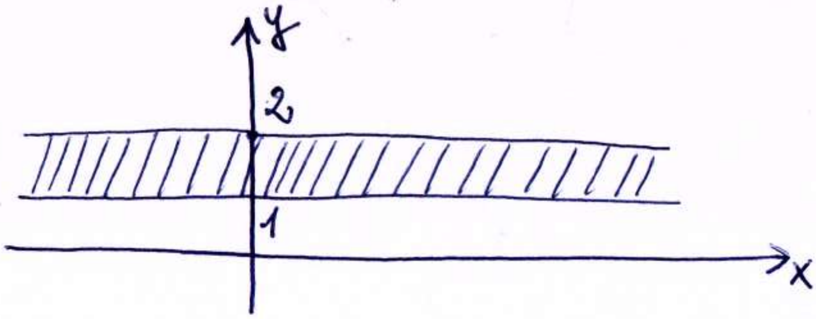
$\qquad\quad < 5$ $\quad$ int C

2) $1 < |z| < 2$ $\rightsquigarrow$ coroana circulară

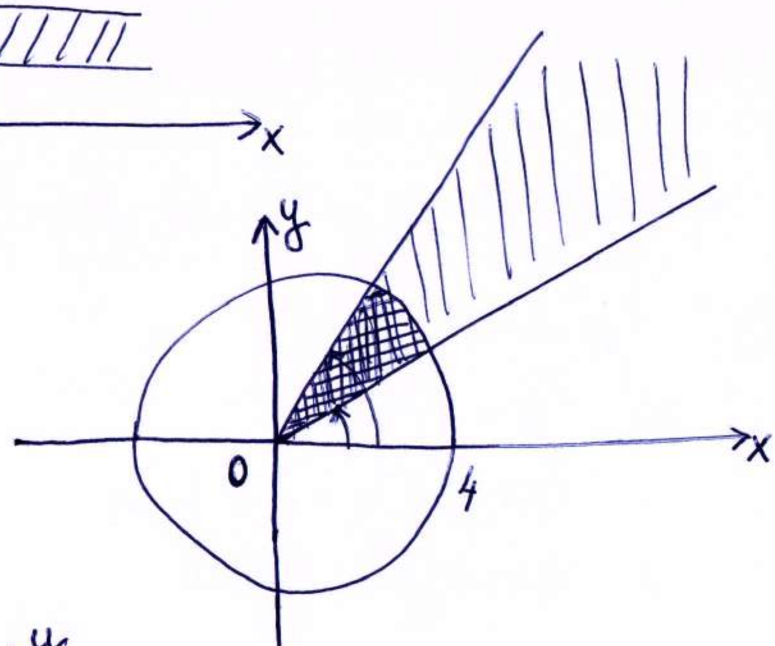


3) $1 < \operatorname{Im} z < 2 \implies 1 < y < 2$

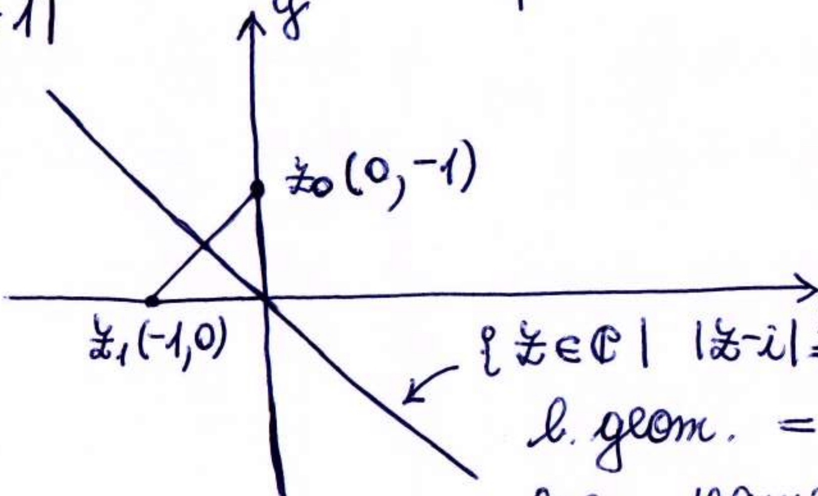
$z = x + iy$



4) $\begin{cases} \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{3} \\ |z| < 4 \end{cases}$



5) $|z - i| = |z + 1|$



$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| \overset{x}{=} |z+1|\}$

l. geom. = mediatoarea segmentului

$|x+iy-i| = |x+iy+1| \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x+1)^2+y^2$

$-2y = 2x \Rightarrow y=-x \leftarrow$ a II-a bisectoare

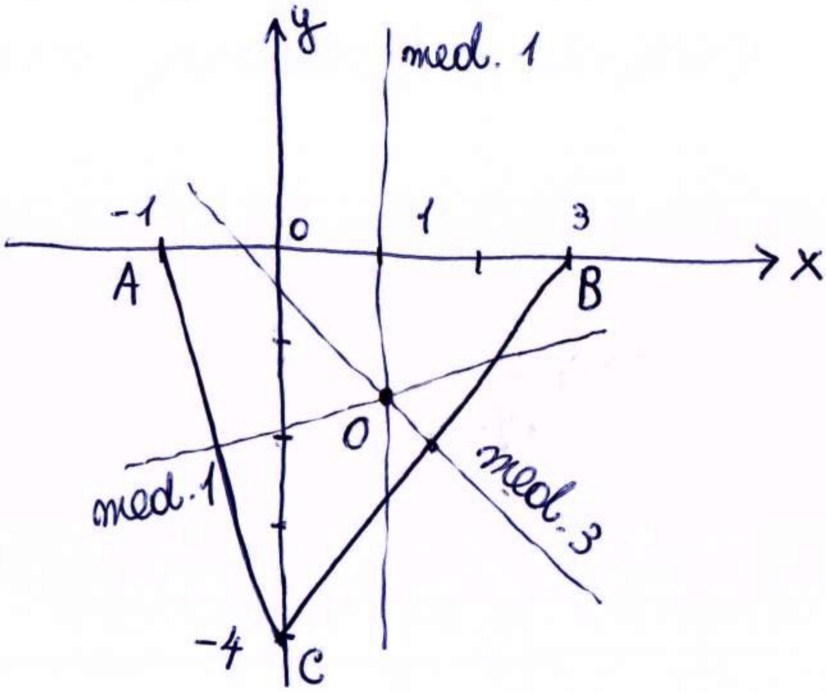
6) $|z+1| = |z-3| = |z+4i|$

$|z-\underset{A}{(-1+0\cdot i)}| = |z-\underset{B}{(3+0\cdot i)}| = |z-\underset{C}{(0-4i)}|$

$z_0 = (-1,0)$ A

$z_1 = (3,0)$ B

$z_2 = (0,-4)$ C



• Rezolvarea ec. de grad 2 cu coef. complecși

① $z^2=-i$

Fie $z = x+iy$

$$\left.\begin{array}{l}(x+iy)^2=-i\\ |x+iy|^2=|-i|\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^2-y^2=0\\ 2xy=-1\\ x^2+y^2=1\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^2=\frac{1}{2}\\ xy=-\frac{1}{2}\end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\ y=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ z_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}$$

Varianta ec. binome

$z^n = z_0 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$, $k=\overline{0,n-1}$

$z^2 = -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

$z_k = \cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}$, $k=\overline{0,1}$

$z_0 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

$z_1 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$.

(2) $(1+i)z^2 - (5+i)z + 6+4i = 0$

$\Delta = (5+i)^2 - 4(1+i)(6+4i) = 25+10i-1-4(6+10i-4) =$

$= 24+10i-8-40i = 16-30i$

$\Delta = z_0^2 = 16-30i$, $z_0 = x+iy$ $\Rightarrow$ $(x+iy)^2 = 16-30i$, $|x+iy|^2 = |16-30i|$ $\Rightarrow$

$\begin{cases} x^2-y^2=16 \\ 2xy=-30 \\ x^2+y^2=\sqrt{256+900} = \sqrt{1156} = 34 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm 5, \quad xy=-15 \Rightarrow y=\mp 3$

$\sqrt{\Delta} = \pm(5-3i) \Rightarrow z_{1/2} = \frac{5+i \pm (5-3i)}{2(1+i)} \Rightarrow$

$z_1 = \frac{5+i+5-3i}{2(1+i)} = \frac{10-2i}{2(1+i)} = \frac{5-i}{1+i}$

$z_2 = \frac{\cancel{5}+i-\cancel{5}+3i}{2(1+i)} = \frac{2i}{1+i}$.

Curs 6

Funcții olomorfe. Funcții complexe elementare

- Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $f : A \to \mathbb{C}$ o funcție complexă. Funcția f se numește <u>olomorfă</u> într-un punct $z_0 \in A$ (sau $\mathbb{C}$-derivabilă în z_0) dacă există și este finită limita

$$l = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Notăm l cu $f'(z_0)$ și se numește <u>derivata complexă</u> a lui f în z_0.

- Fie $f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$, unde: $P(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, $Q(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ și $z = x + iy$.

Condițiile Cauchy-Riemann sînt

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}}.$$

- Fie $A \subset \mathbb{C}$ mulțime deschisă și $f : A \to \mathbb{C}$, $f = P + iQ$. Atunci f este olomorfă în $z_0 = (x_0, y_0) \in A$ dacă și numai dacă $P, Q : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sînt diferențiabile în (x_0, y_0) și derivatele lor satisfac condițiile Cauchy-Riemann.

În plus

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)}$$

- Fie $u : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ o funcție de clasă C^2 pe A. Funcția u se numește <u>funcție armonică</u> dacă și numai dacă pentru orice $(x,y) \in A$ avem:

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, unde $\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ este laplaceeanul lui $u(x,y)$.

- f este olomorfă pe A dacă și numai dacă este olomorfă în orice punct din A.
- $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = P + iQ$ și $P, Q \in C^2(A)$.
  Dacă f este <u>olomorfă</u> atunci P și Q sînt <u>funcții armonice</u>.
- $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ <u>olomorfă</u> pe A. Atunci P și Q sînt funcții armonice și P și Q sînt funcții de clasă C^∞ pe $A \subset \mathbb{R}^2$. (Au derivate parțiale de orice ~~ordin~~ continue).
- Suma, produsul, raportul și compunerea a două funcții olomorfe este tot funcție olomorfă.
- Regulile de derivare pentru funcții olomorfe sînt aceleași ca în cazul funcțiilor reale de variabilă reală derivabile.

- <u>Exemple de funcții complexe elementare.</u>
  Următoarele funcții sînt olomorfe.
  - $f(z) = z, z^2, \dots, z^n$ și $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$
  - $f(z) = e^z$, $f'(z) = e^z$
  - $f(z) = e^{iz}$, $f'(z) = ie^{iz}$
  - $f(z) = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \longrightarrow (\cos z)' = -\sin z$
  - $f(z) = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \longrightarrow (\sin z)' = \cos z$
  - $f(z) = \mathrm{ch}\, z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \longrightarrow (\mathrm{ch}\, z)' = \mathrm{sh}\, z$
  - $f(z) = \mathrm{sh}\, z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \longrightarrow (\mathrm{sh}\, z)' = \mathrm{ch}\, z$.
  - $f(z) = \ln(1+z) \longrightarrow f'(z) = \frac{1}{z}$.

$$= \left[\underbrace{\frac{(e^{ix}-e^{-ix})}{i}}_{= i(e^{-ix}-e^{ix})}(e^{y}+e^{-y}) + i(e^{ix}+e^{-ix})(e^{y}-e^{-y})\right]\cdot\frac{1}{4} + iK =$$

$$= \frac{i}{4}\Big(e^{-ix+y} - \cancel{e^{ix+y}} + \underbrace{e^{-ix}\cdot e^{-y}}_{\cancel{e^{-ix-y}}} - e^{ix-y} + \cancel{e^{ix+y}} - e^{ix-y} + e^{-ix+y} - \cancel{e^{-ix-y}}\Big) + iK =$$

$$= \frac{i}{2}\cdot\left(e^{-i(x+iy)} - e^{i(x+iy)}\right) + iK = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} + iK = \sin z + iK.$$

④ f olomorfă dacă $\mathrm{Re}\, f = P(x,y) = xy + \frac{\cos y}{e^{x}}$.

⑤ f olomorfă dacă $\mathrm{Im}\, f = Q(x,y) = e^{x^2-y^2}\cdot \sin 2xy$.

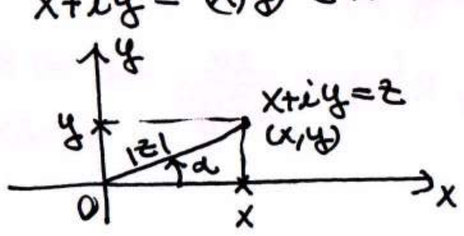
⑥ f olomorfă dacă: $P(x,y) = x^3y - xy^3$.

$$f(\underbrace{x+iy}_{z}) = \underset{\mathbb{R}^2}{\overset{\Uparrow}{P(x,y)}} + i\,\underset{\mathbb{R}^2}{\overset{\Uparrow}{Q(x,y)}}$$

⑦ Să se desv. în serie de puteri ale lui z, $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$ în următoarele domenii:

a) $|z|<1$; b) $1<|z|<2$; c) $|z|>2$.

$\boxed{\text{obs.}}$ $\overset{\in\mathbb{C}}{x+iy} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$



$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$z \neq 0$, $\alpha = \mathrm{arctg}\, y/x \in [0, 2\pi)$ $\left(\text{sau } (-\pi,\pi)\right)$.

$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|e^{i\alpha}$,

$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\bar{z} = x - iy \Rightarrow x = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

$i(x-iy) = y + ix = i\bar{z}$

$$\boxed{\begin{aligned} z &= x+iy \\ i\bar{z} &= y+ix \end{aligned}}$$

$z\cdot\bar{z} = |z|^2$

$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

$|z_1-z_2|^2 = (z_1+z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

$\Rightarrow 2(|z_1|^2+|z_2|^2) = |z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2.$

cărei coroană de convergență include pe D a.î. în D avem
$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$.

* pe un disc avem desv. în serie Taylor; pe o coroană circulară avem desv. în serie Laurent.

• $e^{iz} \underset{?}{=} \cos z + i\sin z$; $(\forall) z\in\mathbb{C}$. $\cos z$, $\sin z$, e^z, $\frac{1}{1\pm z}$ în serie de puteri.
formula lui Euler.

• Ex. de funcții olomorfe: $\begin{cases} \cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, & \sin z, \ \ln z \text{ — ramura principală.} \\ e^z = e^x \cos y + i\sin y. & \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i \operatorname{arctg} y/x \\ \overline{e^{iz}} = e^{-iz} \end{cases}$

$\boxed{\text{Temă seminar.}}\ \boxed{\text{nr. 6.}}$

① $f = P + iQ$ olomorfă a.î. $Q(x,y) = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$.

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1$; $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2$;

$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \Delta Q = 0$.

$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2x}{x^2+y^2} - 1 \end{cases} \Rightarrow P(x,y) = -\frac{2x}{x} \operatorname{arctg} y/x - y + K(x)$

$\frac{\partial P}{\partial x} = -2\cdot \dfrac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} + K'(x) = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2 \Rightarrow K(x) = -2x + K$.

• $P(x,y) = -2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y - 2x + K$

$f = -2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y - 2x + K + i\ln(x^2+y^2) + ix - 2iy =$

$= 2i\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) - (2-i)x - i(2-i)y + K =$

$= 2i\ln z - (2-i)z + K$.

② $f = P + iQ$ olomorfă ? a.î. $Q(x,y) = e^x \sin y - \frac{y}{x^2+y^2}$ și $f(1) = e$.
$f(z) = e^z + \frac{1}{z} - 1$.

③ $f = P + iQ$ olomorfă a.î. $P(x,y) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y$ și $f(0) = 0$.

$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \cos x\cdot \operatorname{ch} y \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = \sin x \cdot \operatorname{sh} y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin x \operatorname{sh} y \Rightarrow Q(x,y) = \cos x \operatorname{sh} y + a(y) \Rightarrow$

$\frac{\partial Q}{\partial y} = \cos x \cdot \operatorname{ch} y + a'(y) = \cos x\cdot \operatorname{ch} y \Rightarrow a'(y) = 0 \Rightarrow a(y) = K \Rightarrow$

$Q(x,y) = \cos x \operatorname{sh} y + K \Rightarrow f(z) = \overset{\sin}{\cancel{\cos}} x \cdot \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y + iK =$

④ $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = y - \cos y \cdot e^{-x} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \cos y \cdot e^{-x}$

$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = x - \sin y \cdot e^{-x} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\cos y \cdot e^{-x}$

$\Delta P = 0 \Rightarrow P$ este armonică

f olomorfă $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = y - \cos y \cdot e^{-x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = x - \sin y \cdot e^{-x} \end{cases}$

$\Rightarrow Q(x,y) = \int \frac{\partial Q}{\partial y}\, dy = \int (y - \cos y \cdot e^{-x})\, dy = y^2/2 - \sin y \cdot e^{-x} + a(x)$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \sin y \cdot e^{-x} + a'(x) = -x + \sin y \cdot e^{-x} \Rightarrow$

$a'(x) = -x \Rightarrow a(x) = -\frac{x^2}{2} + K.$

$Q(x,y) = \frac{-x^2 + y^2}{2} - \sin y \cdot e^{-x} + K$

$f(z) = P + iQ = xy + \cos y \cdot e^{-x} + \frac{i}{2}(-x^2 + y^2) - i \sin y \cdot e^{-x} + iK = -\frac{i}{2}(x^2 - y^2 + 2ixy) + e^{-x} \cdot e^{-iy} + iK =$

$= -\frac{i}{2}(x + iy)^2 + e^{-(x+iy)} + iK.$

$\boxed{f(z) = -\frac{i}{2} \cdot z^2 + e^{-z} + iK}$, $K \in \mathbb{R}$ ct.

⑤ $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \cdot e^{x^2-y^2} \cdot \sin 2xy + 2y \cdot e^{x^2-y^2} \cdot \cos 2xy$

$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = (e^{x^2-y^2})''_{x^2} \cdot \sin 2xy + 2(e^{x^2-y^2})'_x \cdot (\sin 2xy)'_x + e^{x^2-y^2} \cdot (\sin 2xy)''_{x^2}$

$= (4x^2+2) e^{x^2-y^2} \cdot \sin 2xy + 8xy \cdot e^{x^2-y^2} \cdot \cos 2xy - 4y^2 \cdot e^{x^2-y^2} \sin 2xy$

$\frac{\partial Q}{\partial y} = -2y \cdot e^{x^2-y^2} \cdot \sin 2xy + 2x \cdot e^{x^2-y^2} \cdot \cos 2xy$

$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = (4y^2 - 2) e^{x^2-y^2} \sin 2xy - 8xy \cdot e^{x^2-y^2} \cdot \cos 2xy - 4x^2 \cdot e^{x^2-y^2} \sin 2xy$

$\rightarrow \Delta Q = 0.$

Soluții temă: nr. 6.

② $Q(x,y) = e^x \sin y - y/x^2+y^2$, $f(1) = e$.

$\Delta Q = 0$? (temă).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = e^x \cos y - \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -e^x \sin y - \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

$$P(x,y) = \int \frac{\partial P}{\partial y}\, dy = e^x \cos y + x \int \frac{-(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2}\, dy + a(x) =$$

$$= e^x \cos y + \frac{x}{x^2+y^2} + a(x)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = e^x \cos y - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + a'(x) = e^x \cos y - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow$$

$$a(x) = K \Rightarrow$$

$$f(z) = P + iQ = e^x \cos y + \frac{x}{x^2+y^2} + K +$$

$$i e^x \sin y - \frac{iy}{x^2+y^2} =$$

$$= e^x \underbrace{(\cos y + i \sin y)}_{e^{iy}} + \frac{x-iy}{(x-iy)(x+iy)} + K =$$

$$= e^z + \frac{1}{z} + K .$$

$$f(1) = e \Rightarrow e + 1 + K = e \Rightarrow K = -1 .$$

$$\boxed{f(z) = e^z - \frac{z-1}{z}}$$

$f = P + iQ$ olomorfă $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = -2y e^{x^2-y^2} \cdot \sin 2xy + 2x e^{x^2-y^2} \cdot \cos 2xy \\ (*)\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x \cdot e^{x^2-y^2} \sin 2xy - 2y \cdot e^{x^2-y^2} \cdot \cos 2xy \end{cases}$

$P(x,y) = \int \frac{\partial P}{\partial x}(x,y)\,dx = \int e^{x^2-y^2} \cdot (\cos 2xy)'_x\,dx + \int 2x \cdot e^{x^2-y^2} \cdot \cos 2xy\,dx =$

$= e^{x^2-y^2} \cos 2xy - \int 2x \cdot e^{x^2-y^2} \cdot \cos 2xy\,dx + \int 2x e^{x^2-y^2} \cdot \cos 2xy\,dx$

$+ a(y) = e^{x^2-y^2} \cdot \cos 2xy + a(y)$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x \cdot e^{x^2-y^2} \sin 2xy - 2y \cdot e^{x^2-y^2} \cdot \cos 2xy + a'(y) = (*) \Rightarrow a'(y) = 0$

$\Rightarrow a(y) = K \in \mathbb{R}$, ct.

$f(z) = f(x+iy) = e^{x^2-y^2} \cdot e^{i2xy} + K = e^{z^2} + K.$

⑥ $P(x,y) = x^3y - xy^3$.

$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2y - y^3 \rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 6xy$

$\rightarrow \Delta P = 0.$

$\frac{\partial P}{\partial y} = x^3 - 3xy^2 \rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -6xy$

$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 3x^2y - y^3 \\ (*)\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = x^3 - 3xy^2 \end{cases} \longrightarrow Q(x,y) = \int (3x^2y - y^3)\,dy = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{y^4}{4} + a(x).$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3xy^2 + a'(x) = -x^3 + 3xy^2 \Rightarrow a'(x) = -x^3 \Rightarrow a(x) = -\frac{x^4}{4} + K$

$Q(x,y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{x^4+y^4}{4} + K, \quad K \in \mathbb{R}$, ct.

$f(z) = f(x+iy) = P + iQ = x^3y - xy^3 + i\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{i}{4} \cdot (x^4+y^4) + iK$

$= -\frac{i}{4}[x^4 + y^4 + 4ix^3y - 4ixy^3 - 6x^2y^2] + iK =$

$= -\frac{i}{4}(\underbrace{x^2 - y^2 + i2xy}_{(x+iy)^2})^2 + iK = -\frac{i}{4} \cdot z^4 + iK.$

⑦ $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$

a) $f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot z^n, \quad |z| < 1.$

b) $$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad 1 < |z| < 2.$$

c) $$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)\cdot\frac{1}{z^{n+1}}, \ |z|>2.$$

• C.C. 1.2.

1. Pițenaru Beatrice : 10
2. Șoavă Livia : 10

C.C. 1.3.

1. Tudor Cristina : 10

Integrala complexă: $\int_C f(z)\,dz$ unde: • $f(z)$ funcție complexă
• C curbă în planul complex ("cale de integrare")

• Reprezentarea parametrică a curbei.

$$C: z(t) = x(t) + i y(t), \quad a \le t \le b.$$

- sens pozitiv pentru C – sensul de creștere al argumentului t (sens trigonometric) (C este curbă orientată);
- C este netedă simplă – are derivata continuă și nenulă în orice punct: $z'(t) = \frac{dz}{dt} = x'(t) + i y'(t)$.
- dacă C este închisă (punctul terminal coincide cu cel inițial), atunci integrala complexă se notează cu: $\oint_C f(z)dz$; C s.n. contur.

Ipoteze generale:

- Toate curbele de integrare C sînt netede pe porțiuni (sînt formate dintr-un nr. finit de curbe netede "alipite").
- funcția $f(z)$ este continuă.

Proprietăți:

1. Liniaritate: $\int_C [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)]\,dz = k_1 \int_C f_1(z)\,dz + k_2 \int_C f_2(z)\,dz$ cu k_1, k_2 constante.

2. Schimbarea sensului (pentru o aceeași curbă C, cu z_0 punct inițial și z_1 punct terminal):

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = -\int_{z_1}^{z_0} f(z)\,dz.$$

3. Partiționarea curbei: $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$ (curbele C_1 și C_2 formează curba C).

Metode de evaluare

Metoda 1.

Pentru funcții olomorfe și domeniu D simplu conex (curbă închisă, simplă, fără auto-intersecții):

Fie D domeniu simplu conex, z_0 și z_1 puncte din D și $f(z)$ olomorfă pe D. Atunci pentru orice curbă din D care leagă punctele z_0 și z_1 avem:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0), \text{ unde } F'(z) = f(z).$$

Adică, în condițiile de mai sus, integrarea lui $f(z)$ este <u>independentă de cale</u>.

<u>Metoda 2.</u>

Mai generală, pentru orice funcție complexă continuă.

Fie C o <u>curbă netedă pe porțiuni</u> reprezentată prin $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ și $f(z)$ o <u>funcție continuă pe C</u>. Atunci:

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt.}$$

Obs. Dacă $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, putem scrie (pentru parametrizarea curbei C: $z = z(t)$, cu $a \leq t \leq b$):

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz} = \boxed{\int_C u\,dx - v\,dy + i \int_C u\,dy + v\,dx}$$

. Parametrizarea are loc când: a) f nu este olomorfă; b) C nu este contur.

Teorema integrală Cauchy (T.I.C.)

Dacă $f(z)$ este olomorfă pe D (domeniu simplu conex), atunci pentru orice curbă netedă simplă (contur) C din D avem:

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 0}$$

Formula integrală a lui Cauchy (F.I.C.)

Dacă $f(z)$ este olomorfă pe D (domeniu simplu conex) atunci, pentru orice curbă închisă (contur) $C \subset D$ cu $z_0 \in C$ (înțelegînd z_0 este în interiorul lui C) avem:

$$\boxed{\oint_C f(z)\cdot\frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)}$$

Consecințe.

1. Dacă $f(z)$ este olomorfă pe D, atunci are derivate de orice ordin pe D, care sînt la rîndul lor tot funcții olomorfe pe D.
2. Dacă f olomorfă pe D și C curbă simplă, închisă în D, care conține z_0, avem:

$$f'(z_0) = \frac{1!}{2\pi i}\oint_C f(z)\cdot\frac{1}{(z-z_0)^2}\,dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C f(z)\cdot\frac{1}{(z-z_0)^3}\,dz$$

....

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C f(z)\cdot\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

3. Formula de calcul utilă

$$\boxed{\oint_C f(z)\cdot\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\cdot f^{(n)}(z_0), \text{ pentru } n=1,2,\dots}$$

Aplicații ale F.I.C. Serii Taylor. Serii Laurent.

- $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R$ s.n. discul centrat în z_0 de rază R. •• $B(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-z_0| < R\}$ c. coroană c. în z_0.
- Fie $f(z)$ olomorfă pe $B(z_0, R)$. Atunci $f(z)$ se dezvoltă în serie de puteri centrată în z_0, astfel:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot(z-z_0)^n}, \ (\forall)\, z \in B(z_0, r).$$

Dezvoltarea se numește seria Taylor a lui $f(z)$ centra tă în z_0.

- Fie funcția $f: B(z_0; r, R) \to \mathbb{C}$ olomorfă pe $B(z_0; r, R)$.
Atunci: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $(\forall)$ $z \in B(z_0; r, R)$.

unde: $\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz}$, $n \in \mathbb{Z}$,

C este un contur de forma: $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| = \rho\}$
cu $r < \rho < R$.

- Seria se numește <u>seria Laurent</u> a lui $f(z)$ centrată în z_0.
- $\sum_{n \geq 0} a_n \cdot (z-z_0)^n$ se numește <u>partea tayloriană</u> a seriei Laurent.
- $\sum_{n \geq 1} a_{-n} \cdot (z-z_0)^{-n}$ se numește <u>partea principală</u> a seriei Laurent.

- <u>Serii Taylor uzuale</u>

1. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $(\forall) |z| < 1$
2. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $(\forall) z \in \mathbb{C}$
3. $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1}$, $(\forall) z \in \mathbb{C}$
4. $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n}$
5. $\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(\forall) z \in \mathbb{C}$
6. $\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
7. $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot z^{n+1}$

· Singularități.

$B(z_0; 0, r) = B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ se numește discul punctat în z_0.

. Dacă $f(z)$ este olomorfă pe $B(z_0; 0, r)$, atunci z_0 se numește punct singular pentru $f(z)$.

· Dacă z_0 este punct singular pentru $f(z)$ astfel încât:

· există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ finită (sau constantă), atunci z_0 este punct singular aparent pentru $f(z)$.

· există $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$, z_0 se numește pol pentru $f(z)$

· nu există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \Rightarrow z_0$ s.n. punct singular esențial.

Obs. · z_0 pol de ordinul $m \geq 1$ dacă există $\lim\limits_{z \to z_0} [(z - z_0)^m \cdot f(z)] =$ constantă nenulă.

· z_0 pol de ordinul $m \geq 1$ dacă $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m \cdot h(z)}$ unde $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) \neq 0$.

· Reziduuri.

Fie conturul $C = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \rho \}$ sens trigonometric, z_0 pol de orice ordin pentru funcția $f(z)$, astfel încât nu mai există alt punct singular pe C sau în interiorul lui C. Definim:

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz}$$

· În general, dacă z_0 este punct singular, atunci:

$\operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz$, a_{-1} coeficientul lui $\frac{1}{z - z_0} = (z - z_0)^{-1}$ din seria Laurent a lui $f(z)$ centrată în z_0.

· z_0 pol de ordinul "$m \geq 1$", atunci:

$$\operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m \cdot f(z) \right]^{(m-1)}.$$

· z_0 pol simplu: $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \cdot f(z)$.

Obs: dacă $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ cu $p(z_0) \neq 0$ și $q(z)$ are un zero simplu în z_0, atunci: $\boxed{\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$

Teorema reziduurilor.

Fie $f(z)$ olomorfă pe C și în interiorul lui C (C curbă simplă închisă), cu excepția unui număr finit de puncte singulare $z_1, z_2, ----, z_n \in C$ (din interiorul lui C). Atunci, pentru integrarea în sens trigonometric, avem:

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{K=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_K} f(z).}$$

Aplicații ale teoremei reziduurilor în calculul integralelor reale.

① Integrale raționale în $\sin\theta$ și $\cos\theta$, de forma:

$$J = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta.$$

· Se rezolvă printr-o schimbare "consacrată" de variabilă

$$\boxed{z = e^{i\theta}}$$

· Deoarece $\theta \in [0, 2\pi]$, variabila $z = e^{i\theta}$ va avea ca domeniu cercul unitate (curba C de ecuație $|z| = 1$).

· Formule de transformare a funcției inițiale $F(\cos\theta, \sin\theta)$ în $f(z)$:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right).$$

· diferențierea notației $z = e^{i\theta}$ conduce la: $\frac{dz}{d\theta} = i e^{i\theta} \Longrightarrow$

$$\boxed{d\theta = \frac{1}{iz}\, dz}$$

Integrala inițială devine:

$J = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \oint_{|z|=1} f(z) \cdot \frac{1}{iz}\, dz$ care se rezolvă cu metodele corespunz. integralelor complexe (de ex. th. reziduurilor)

2. <u>Integrale improprii</u>, de forma: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

- Funcția $f(x)$ este o funcție reală, rațională, cu numitorul $\neq 0$ pentru $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ (nu are poli pe axa reală) și are gradul numitorului mai mare decât gradul numărătorului cu cel puțin 2 unități.
- Considerăm $f(z)$ <u>funcția complexă asociată</u> care are un număr finit de poli în jumătatea superioară a planului complex.
- Considerăm corespondența

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \rightsquigarrow \oint_C f(z)\,dz$$

cu C contur simplu suficient de mare cât să conțină toți polii din semiplanul superior S_S ai lui $f(z)$.

Calculăm integrala complexă cu teorema reziduurilor

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

unde reziduurile se calculează în toți polii lui $f(z)$ situați în S_S.

<u>Avem</u>:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z).}$$

3. <u>Integrale tip Fourier</u>, de forma: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \cos ax$ sau $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \sin ax\,dx$, cu $a \in \mathbb{R}$.

- Funcția $f(x)$ este reală, rațională, cu numitorul $\neq 0$ $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ (nu are poli pe axa reală) și are gradul numitorului mai mare decât gradul numărătorului cu cel puțin o unitate.
- Considerăm <u>integrala asociată</u> $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{iax}\,dx$

și corespondența:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{iax}\,dx \rightsquigarrow \oint_C f(z)\cdot e^{iaz}\,dz$$

cu conturul simplu C suficient de mare cât să conțină toți polii lui $f(z)$ situați în semiplanul superior Ss.

- Cu teorema reziduurilor avem

$$\oint_C f(z)\cdot e^{iaz}\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}[f(z)\cdot e^{iaz}],$$ unde reziduurile funcției $f(z)\cdot e^{iaz}$ corespund polilor din Ss ai funcției $f(z)$.

- În final rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}[f(z)\cdot e^{iaz}]$$

- După calcularea reziduurilor avem:

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \cos ax\,dx &= -2\pi \sum \operatorname{Im}\operatorname{Res}[f(z)\cdot e^{iaz}]\\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \sin ax\,dx &= 2\pi \sum \operatorname{Re}\operatorname{Res}[f(z)\cdot e^{iaz}].\end{aligned}}$$

Obs: $$(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cdot e^{iaz}\,dz = \begin{cases} 2\pi i \sum \operatorname{Res}\limits_{z=a_k} f(z)\cdot e^{iaz}, & a_k\in Ss,\ a>0 \\ -2\pi i \sum \operatorname{Res}\limits_{z=a_k} f(z)\cdot e^{iaz}, & a_k\in Si,\ a<0. \end{cases}$$

$$\parallel$$

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(z)\cdot e^{iaz}\,dz$$

$$\downarrow$$

înd. cond.

Curs

Continuare serii Laurent, punct singular esențial, reziduul în punctul de la infinit

Obs. 1) $D \subset \mathbb{C}$ deschisă, $f : D \to \mathbb{C}$ s.n. analitică pe D dacă

$(\forall)\, z_0 \in D,\ \exists\, B(z_0, r) \subset D$ a.î. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$ pe $B(z_0, r)$.

2) orice funcție este analitică $\Leftarrow\Rightarrow$ este olomorfă pe D pe D

Aplicații. $\boxed{\text{obs. 3}}$ $\boxed{f \text{ olomorfă pe } B(z_0; r, R) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}$

① Dezvoltați în serie Laurent $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

pe coroana

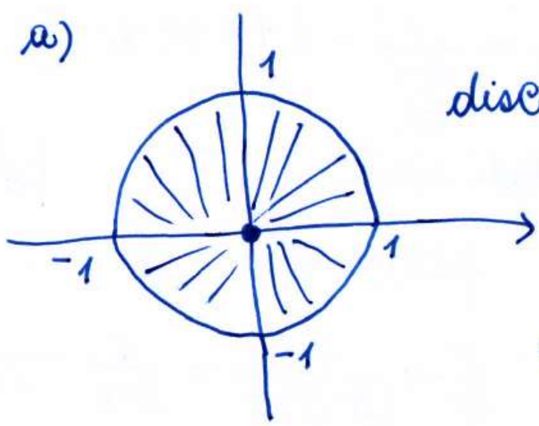
a) $0 < |z| < 1$

b) $1 < |z|$

c) $0 < |z-1| < 1$

d) $1 < |z-1|$

Sol. a)



disc punctat

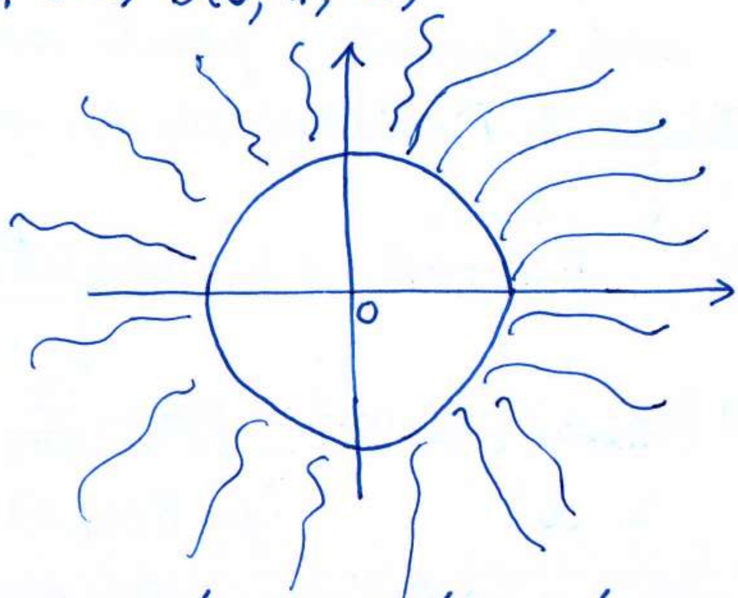
f olomorfă pe $B(0; 0, 1)$ $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{z} = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots$$

$a_{-1} = -1 \leftarrow$ coef. lui $\frac{1}{z}$ și $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -1$

$z = 0$ pol ord. unu pentru $f(z)$.

b) $|z| > 1 \rightarrow B(0;\, 1, \infty)$



f olomorfă pe $B(0;\, 1, \infty)$

$\Downarrow$

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z)^n$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} < 1$

$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) =$

$= \underbrace{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots}_{\text{parte principală}} \rightsquigarrow$ dezvoltarea în serie Laurent în jurul lui $z = \infty$

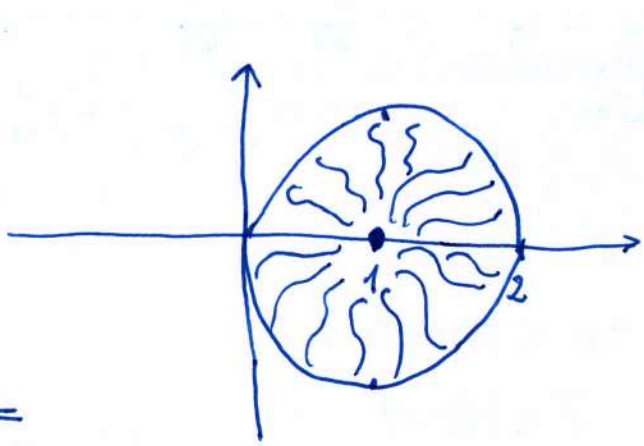
$\underline{z = \infty \text{ p.s.e.}}$ pentru $f(z)$.

$-a_{-1} = \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$

c) $0 < |z-1| < 1$

$\swarrow$ cum f olom. pe $B(1;\, 0, 1)$

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-1)^n$



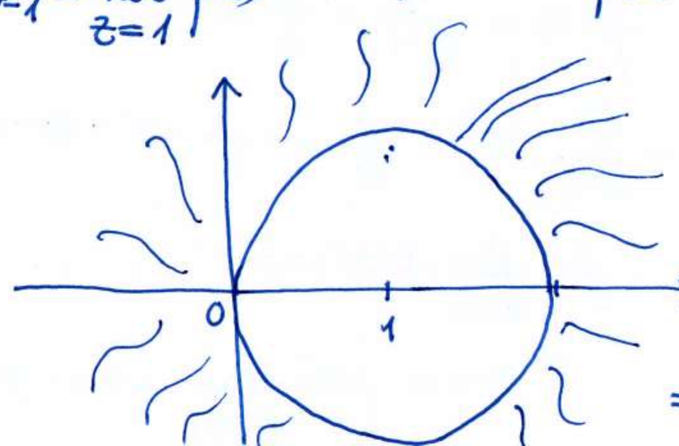
$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} =$

$= \frac{1}{z-1} + \frac{-1}{1+(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1+(z-1)} = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{\text{P.P.}} - \left(1 + (z-1) - (z-1)^2 + \dots\right.$

$a_{-1} = \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 1 \Rightarrow z = 1$ pol ord. unu.

$\left|\frac{1}{z-1}\right| = \frac{1}{|z-1|} < 1$

d)



$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z-1}} =$

$= \frac{1}{z-1}\left[1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \dots\right] =$

$= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{1}{(z-1)^4} + \dots$

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^4} - \cdots}_{\text{partea principală}}$$

2) $f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$, $f : \underbrace{B(2; 0, \infty)}_{= \mathbb{C} \setminus \{2\}} \to \mathbb{C}$ olomorfă $\Rightarrow f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-2)^n$

$$e^{\frac{1}{z-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n \cdot n!} = \underbrace{1}_{\text{partea Taylor}} + \underbrace{\frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!(z-2)^2} + \cdots}_{pp} \Rightarrow a_{-1} = 1.$$

3) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$, $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$

f olomorfă $\Rightarrow f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z)^n \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!\, z}}_{\text{partea principală}} + \underbrace{\frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots}_{\text{partea Taylor}}$$

$$a_{-1} = 0.$$

<u>De reținut!</u>

$f : B(z_0; r, R) \to \mathbb{C}$ <u>olomorfă</u> $\Rightarrow$ pe $B(z_0; r, R)$ avem $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. !!

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz ,$$ unde

conturul C este o curbă simplă, netedă ce înconjoară pe z_0 din coroană.

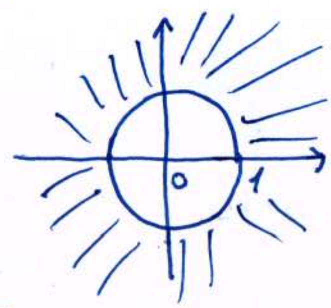
În general: $C = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \rho ,\ r < \rho < R \}$.

Puncte singulare izolate

Def. $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

1) $z_0 \in D$ s.n. <u>punct singular izolat</u> pentru f dacă $\exists\, B(z_0, r) \subset D$ a.î. f este olomorfă pe discul punctat $B(z_0, r) \setminus \{z_0\} = B(z_0; 0, r)$

2) ∞ s.n. pct. sing. izolat pentru f dacă f este olomorfă pe exteriorul unui disc centrat în origine.



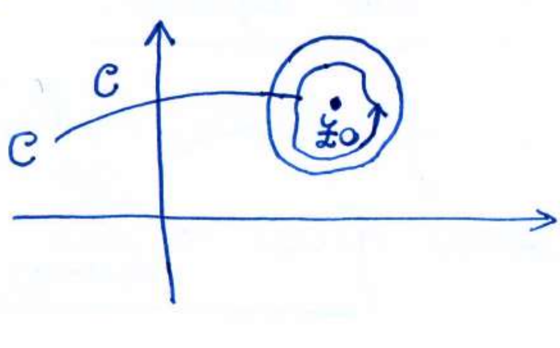
Ex. 1) $f(z) = \frac{1}{z-1}$, $z_0 = 1$, ∞.

Obs: $z_0 \in \mathbb{C}$ punct singular izolat pentru $f \Rightarrow$ f olomorfă pe $B(z_0; 0, r)$ ~ disc punctat centrat în z_0 și rază r și f se dezv. în serie Laurent pe discul punctat

!

$$(**)\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall\, z \in B(z_0; 0, r)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$



$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz.$$

Clasificarea punctelor singulare izolate $z_0 \in \mathbb{C}$

seria Laurent (**)	natura punctului singular z_0
$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$	z_0 = punct singular eliminabil (aparent)
$a_{-k}\cdot\frac{1}{(z-z_0)^k} + \dots + a_{-1}\cdot\frac{1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$ $a_{-k} \neq 0$	z_0 = pol k = ordinul polului $k=1 \Rightarrow z_0$ pol simplu
$\dots + a_{-n}\cdot\frac{1}{(z-z_0)^n} + \dots + a_{-1}\frac{1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$	z_0 = punct singular esențial

EX: 1) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$

Pt. $0 < |z| < 1$ $\quad f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots$

$z=0$ pol simplu

2) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \underbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z}}_{\text{partea princ.}} + \frac{z}{5!} - \dots \Rightarrow z=0$ pol

$k=3$ ordinul

3) $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \underbrace{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots}_{\text{partea Taylor}} \Rightarrow z=0$ p.s. aparent.

4) $f(z) = \sin\frac{1}{z} = \underbrace{\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots}_{\text{p. princ.}} \Rightarrow z=0$ p.s. esențial

<u>obs.</u> Natura punctului ∞ pentru $f(z)$ este natura punctului 0 pentru $f(\frac{1}{z})$.

$\infty \leftrightarrow f(z)$

$0 \leftrightarrow f(\frac{1}{z})$

! (P.) $z_0 = p.s.i.$ pt. f

1) $z_0 = p.s.a. \iff \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) =$ constantă din $\mathbb{C}$

2) a) z_0 pol $\iff \exists \lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$

b) z_0 pol de ord. $\underset{\geq 1}{K} \iff f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^K}$, φ olomorfă și $\varphi(z_0) \neq 0$.

3) z_0 p.s.e. $\iff \nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

EX: 1) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z} \to \lim\limits_{z \to 0} f(z) = 1 \to$

$\to z = 0$ p.s.a.

2) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-2)^2} \to z = 2$ pol de ordin 2

3) $f(z) = \dfrac{z+3}{(z+i)^8 (z+2)^4} = \dfrac{\frac{z+3}{(z+2)^4}}{(z+i)^8}$

$\to z_0 = -i$ pol ord. 8

$z_1 = -2$ pol ord. 4.

EX: $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)(z+2)}$ olom. pe $B(i; 0, \sqrt{5}) \Rightarrow$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-i)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{i+2}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+2}\right)$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{(z-i)+(2+i)} = \frac{1}{2+i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{2+i}} = \frac{1}{2+i}\left(1 - \frac{z-i}{2+i} + \frac{(z-i)^2}{(2+i)^2} - \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2+i} - \frac{z-i}{(2+i)^2} + \frac{(z-i)^2}{(2+i)^3} - \dots$$

$|z-i| < |2+i| = \sqrt{5}$

$\downarrow$

$\left|\dfrac{z-i}{2+i}\right| < 1$

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{(i+2)(z-i)}}_{PP} - \underbrace{\frac{1}{(2+i)^2} + \frac{z-i}{(2+i)^3} - \dots}_{\text{p. Taylor}}$$

$\to z = i$ pol simplu

Reziduuri

Def. 1) $z_0 \in \mathbb{C}$ p.s.i. pt. $f \rightsquigarrow f$ olom. pe $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

$$\rightsquigarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_{-1} \overset{\text{not.}}{=\!=} \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\,dz$$

2) ∞ = punct sing. izolat $\rightsquigarrow f$ olomorfă pe $B(0; r, \infty)$

$$\rightsquigarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

$$-a_{-1} \overset{\text{not.}}{=\!=} \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\,dz,$$

$C : \{|z - z_0| = \rho > r\}$

(P) **Calculul reziduurilor**

1) z_0 = p.s.a. $\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$

2) a) z_0 pol ordin $K \geq 1$ pt. $f \Rightarrow$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(K-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^K \cdot f(z)\right]^{(K-1)}$$

b) $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ cu $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$, $g(z_0) \neq 0$ $\Longrightarrow$

z_0 pol simplu și $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

3) f z_0 p.s.e. $\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$

4) $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=0} \left(-\frac{1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right)\right)$.

EX: 1) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-2)^2}$ olom. pe $\mathbb{C} \setminus \{2\}$

$z = 2$ pol ordin $2 \to \operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 2} \left[(z-2)^2 \frac{e^z}{(z-2)^2}\right]' =$

$= e.$

2) $f(z) = \frac{\cos z}{z} = \frac{g(z)}{h(z)} \to \begin{array}{l} g(0) \neq 0 \\ h(0) = 0,\ h'(0) = 1 \end{array} \Big| \to z = 0$ pol simplu

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{g(z)}{h'(z)}\Big|_{z=0} = \frac{1}{1} = 1$$

3) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$, $z = \infty$

$$g(z) = -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^2}+1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z^2+1}$$

$z = 0$ pol simplu $\to \operatorname*{Res}_{z=0} g(z) = \lim_{z \to 0} z \cdot g(z) = -1 \to$

$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -1.$

4) $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \dots \to z = 0$ p.s.e. $\to$

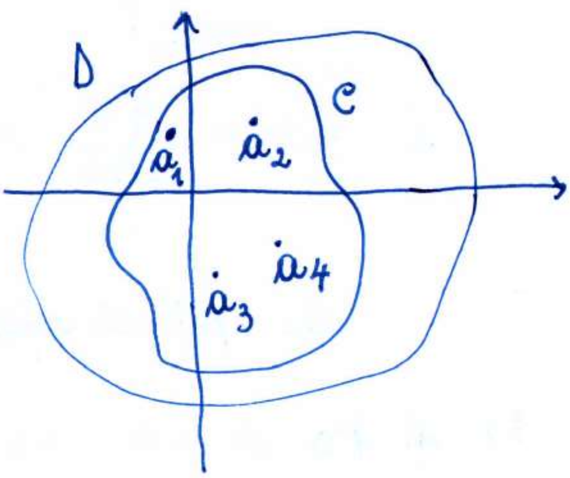
$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1.$

<u>T. reziduurilor</u>

$D \subset \mathbb{C}$ deschis, simplu conex

$f : D \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \to \mathbb{C}$ olom. $\Rightarrow$ $(\forall)$ C = curbă netedă pe porțiuni, închisă ce conține în int. $a_1, \dots, a_n$

$$\Rightarrow \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$



(P.) Corolar la th. reziduurilor

$f : \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \to \mathbb{C}$ olom. $\to$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Aplicații ale teoremei reziduurilor la calcul unor integrale reale

① $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, P și Q polinoame
grad Q − grad P ≥ 2
$Q \neq 0$ pe $\mathbb{R}$

$\parallel$

$2\pi i \sum_{k} \operatorname{Res}_{z=a_k} \frac{P(z)}{Q(z)}$, $a_k \in S_{sup}$

② $(V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{iax}\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \underbrace{f(z)\cdot e^{iaz}}_{}\,dz =$ ↗ funcția complexă asociată

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
grad Q − grad P ≥ 1
$Q \neq 0$ pe $\mathbb{R}$

$\overset{\text{Jordan}}{\underset{\text{modificată}}{=}} \oint_C f(z)\cdot e^{iaz}\,dz \overset{\text{th.}}{\underset{\text{rez.}}{=}}$

$$= \begin{cases} 2\pi i \sum \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z)\cdot e^{iaz}, & a_k \in S_{sup},\ a>0 \\ -2\pi i \sum \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z)\cdot e^{iaz}, & a_k \in S_{inf},\ a<0. \end{cases}$$

Obs. Dacă $Q(x)$ are $b_1, \dots, b_m$ poli simpli reali

$$\Rightarrow (V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{iax}\,dx = \begin{cases} 2\pi i \sum \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z)\cdot e^{iaz} + \\ \quad + \pi i \sum \operatorname{Res}_{z=b_j} f(z)\cdot e^{iaz}, & a_k \in S_{sup}, a>0 \\ \dots \end{cases}$$

th. semi-reziduurilor

Obs. Integrale Fourier. Fie $a>0$ și $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q \neq 0$ pe $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \cos ax\,dx = -2\pi \sum \operatorname{Im}\left(\operatorname{Res}_{z=a_k} f(z)\cdot e^{iaz}\right),\ a_k \in S_{sup}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \sin ax\,dx = 2\pi \sum \operatorname{Re}\left(\operatorname{Res}_{z=a_k} f(z)\cdot e^{iaz}\right),\ a_k \in S_{sup}.$$

Lema lui Jordan f continuă în sectorul $S_0[0,\pi]$ și drumul $\gamma_r(\theta) = r\cdot e^{i\theta}$, $\theta\in[0,\pi]$ în acest sector. Dacă $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \Rightarrow$
$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\cdot e^{iz}\,dz = 0$.

Seminar

Completare reziduuri, integrale cu reziduuri

obs. $\exists \lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)^n \cdot f(z) =$ constantă nenulă $\Rightarrow z_0$ pol ordinul n.

① $\oint\limits_C z\cdot\cos\frac{1}{z}\,dz$, $C: |z-1+i| = 3$ figura?

$z_0 = 1-i$, $r = 3$

② $\oint\limits_C \frac{e^z}{z^2-z^3}$, $C: |z|=2$ cu serii Laurent și direct

③ $\oint\limits_C \frac{e^z\cdot\cos z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\,dz$, $C: |z|=2$.

④ $\oint\limits_C \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{1+z^2}\,dz$, $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $b>1$

Soluții.

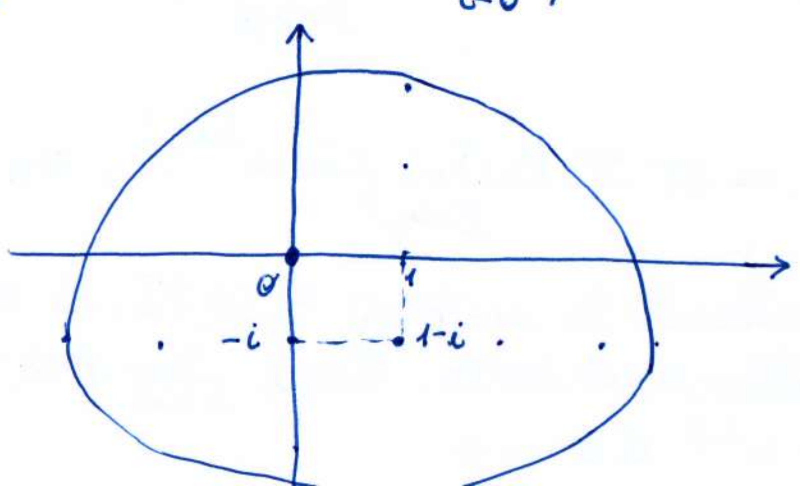
① $f(z) = z\cdot\cos\frac{1}{z} = z\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{1}{z^{2n}} = z\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\dots\right)$

$= z \underbrace{-\frac{1}{2!z}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z^3}-\dots\dots}_{p.p.}$

$\Rightarrow z=0$ p.s.e. $\to \operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}$.

$|0-1+i| = \sqrt{2} < 3 \Rightarrow z=0 \in C \Rightarrow$ th. res

$\oint\limits_C z\cdot\cos\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z) = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i.$



② $f(z) = \dfrac{e^{z}}{z^{2}(1-z)} \rightarrow$ $z_1 = 0$ pol de ord. 2 ; $z_{1,2} \in C$
$z_2 = 1$ pol simplu

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \left(\frac{e^{z}}{1-z}\right)' = \frac{e^{z}(1-z)+e^{z}}{(1-z)^{2}}\Big|_{z=0} = 1+1 = 2$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} (z-1)\cdot\frac{e^{z}}{-(z-1)} = -e.$$

$$\oint_C f(z)\,dz \overset{\text{th.}}{\underset{\text{res}}{=}} 2\pi i\,(2-e).$$

Cu serii Laurent.

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty} z^m\right) = \frac{1}{z^2}\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\dots\right)\left(1+z+z^2+\dots\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\dots\right)\left(1+z+z^2+\dots\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{z^2}\cdot z+\frac{1}{z}\cdot 1\right)+\dots = 2\cdot\frac{1}{z}+\dots \rightarrow a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2.$$

↓ S.L.

· Dezv. în serie Laurent în jurul lui $z=1$.

$$\frac{1}{z^2} = z^{-2} = [1+(z-1)]^{-2} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-2)(-3)\dots(-2-k+1)\cdot\frac{\cancel{z^k}\,(z-1)^k}{k!}$$

$$e^{z} = e^{(z-1)+1} = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}$$

$$f(z) = +e\cdot\frac{1}{1-z}\left[1+\frac{z-1}{1!}+\frac{(z-1)^2}{2!}+\dots\right]\left[1-\frac{2}{1!}(z-1)+\frac{6}{2!}(z-1)^2+\dots\right]$$

$$= \dots\dots\frac{-e}{z-1}+\dots \rightarrow \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = -e.$$

obs. $(1+z)^{\alpha} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}\cdot z^{k}$

↓ serie binomială

(3) $f(z)=\dfrac{e^{z}\cos z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

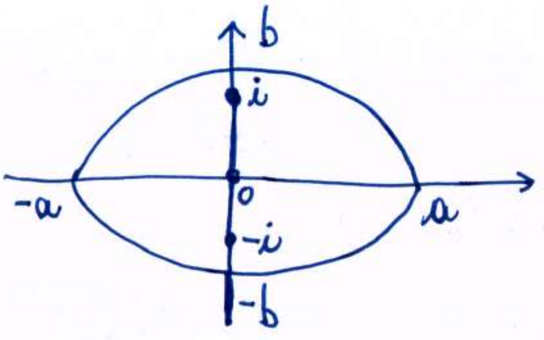
$\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)f(z)=\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} e^{z}\cdot\dfrac{\cos z}{z-\frac{\pi}{2}}=e^{\frac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{-\sin\frac{\pi}{2}}{1}=-e^{\frac{\pi}{2}}\in\mathbb{C}^*$

$\Rightarrow z=\frac{\pi}{2}$ pol de ord. unu

$\operatorname{Res}\limits_{z=\frac{\pi}{2}} f(z)=\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\dfrac{e^{z}\cos z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}=-e^{\frac{\pi}{2}}$

$\left|\frac{\pi}{2}\right|<2\Rightarrow\frac{\pi}{2}\in C \xRightarrow[\text{Res}]{\text{th.}} \oint_C f(z)\,dz=2\pi i\operatorname{Res}\limits_{z=\frac{\pi}{2}} f(z)=-2\pi i\cdot e^{\frac{\pi}{2}}$

(4)



$z_0=0\in C$ p.s.i.

$z_{1,2}=\pm i\in C$ poli simpli

$f(z)=\left(\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^m z^{2m}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\dfrac{\pi^{2n+1}}{z^{2n+1}}\right)$

$=\left(1-z^2+z^4-\ldots\right)\left(\dfrac{\pi}{z}-\dfrac{\pi^3}{3!z^3}+\ldots\right)=\ldots=$

$=\ldots\left(\dfrac{\pi}{z}+\dfrac{\pi^3}{3!z}+\dfrac{\pi^5}{5!z}-\ldots\right)+\ldots \longrightarrow z=0$ p.s.e.

$\Vert$

$\dfrac{1}{z}\underbrace{\left(\pi+\dfrac{\pi^3}{3!}+\dfrac{\pi^5}{5!}-\ldots\right)}$

$a_{-1}=\operatorname{sh}\pi=0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{Res}\limits_{z=0} f(z)=\operatorname{sh}\pi} \to$ mai repede așa!

sau: $f(z)=\sum\limits_{m,n\geq 0}\dfrac{(-1)^{m+n}}{(2n+1)!}\cdot\pi^{2n+1}\cdot z^{2m-2n-1} \xlongequal[p=2m-2n-1\in\mathbb{Z}]{2m=p+2n+1}$

$=\sum\limits_{p\in\mathbb{Z}}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{p+2n+1}{2}+n}\cdot\dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\cdot z^p \to$ S.L. $\to$

$z=0$ p.s.e. și $\operatorname{Res}\limits_{z=0} f(z)=a_{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}=\operatorname{sh}\pi.$

- $\operatorname{Res}\limits_{z=i} f(z)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{z}}{2z}\Big|_{z=i}=\dfrac{1}{2i}\sin\dfrac{\pi}{i}=-\dfrac{1}{2i}\sin(\pi i)=-\dfrac{i}{2i}\operatorname{sh}\pi=-\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}\pi$
- $\operatorname{Res}\limits_{z=-i} f(z)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{z}}{2z}\Big|_{z=-i}=\dfrac{\sin(\pi i)}{-2i}=\dfrac{i\operatorname{sh}\pi}{-2i}=-\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}\pi.$

$\oint_C f(z)\,dz \xlongequal[\text{res.}]{\text{th.}} 2\pi i\left(\operatorname{Res}\limits_{z=0} f(z)+\operatorname{Res}\limits_{z=i} f(z)+\operatorname{Res}\limits_{z=-i} f(z)\right)=0.$

Integrale reale cu ajutorul teoremei reziduurilor

① Integrale raționale în sin și cos.

$I = \int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$

$\theta \in [0, 2\pi]$. Schimbare de variabilă: $z = r \cdot e^{i\theta}$ $(z = r(\cos\theta + i\sin\theta))$.

$C : |z| = 1$

$dz = i r e^{i\theta} d\theta$ $\qquad \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta \longrightarrow \oint_C f(z)\, dz.$

$dz = i z\, d\theta$

$d\theta = \frac{1}{iz} dz$

Aplicații:

1) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 - 4\sin\theta}\, d\theta$

9.f)

Schimbare de variabilă: $\theta \in [0, 2\pi] \longrightarrow z \in C : |z| = 1$

$z = e^{i\theta}$

$dz = \cancel{1} i z\, d\theta$

$d\theta = \frac{1}{iz} dz$

$\sin^2\theta = -\frac{1}{4}\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$$\oint_C \frac{-\frac{1}{4}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2}{5 - \frac{2}{i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{1}{iz}\, dz = -\frac{1}{4} \oint_C \frac{z^2 - 2 + \frac{1}{z^2}}{5iz - 2(z^2-1)}\, dz =$$

$$= -\frac{1}{4} \oint_C \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2(-2z^2 + 5iz + 2)}\, dz = \frac{1}{4} \oint_C \frac{(z^2-1)^2}{z^2(2z^2 - 5iz - 2)}\, dz =$$

$$= \frac{1}{8} \oint_C \frac{(z^2-1)^2}{z^2\left(z - \frac{i}{2}\right)(z - 2i)}\, dz$$

Puncte singulare (poli): $z = 0 \in C$ (pol ordinul 2)

$z = \frac{i}{2} \in C$

$z = 2i \notin C$

$$z_0 = \frac{i}{2}\ ; \ \operatorname*{Res}_{z=\frac{i}{2}} f(z) = \lim_{z \to \frac{i}{2}} \cancel{\left(z - \frac{i}{2}\right)} \cdot \frac{(z^2-1)^2}{z^2\cancel{\left(z - \frac{i}{2}\right)}(z - 2i)} = \frac{\left(-\frac{1}{4} - 1\right)^2}{-\frac{1}{4}\left(+\frac{i}{2} - 2i\right)} =$$

$$= \frac{25}{\cancel{16}_{4_2}} \cdot (\cancel{-4}) \cdot \frac{1}{\frac{\cancel{-3}i}{\cancel{2}}} = \frac{25}{6i} =$$

$$= -\frac{25}{6} i.$$

$z_0=0$; $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0}\left[\cancel{z^2}\cdot\dfrac{(z^2-1)^2}{\cancel{z^2}(z-2i)(z-\frac{i}{2})}\right]' =$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2(z^2-1)\cdot 2z\cdot(z-2i)(z-\frac{i}{2})-(z^2-1)^2(2z-\frac{5i}{2})}{(z-2i)^2(z-\frac{i}{2})^2}=\frac{\frac{5i}{2}}{(-4)(-\frac{1}{4})}=\frac{5i}{2}.$$

$$\oint_C f(z)\,dz=\frac{1}{8}(\cdot 2\pi i\cdot\left(-\frac{25}{6}i+{}^{3)}\frac{5i}{2}\right)=\frac{\pi i}{4}\cdot\left(-\frac{10}{6}i\right)=\frac{5\pi}{12}.$$

② 9.g). $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{13-12\cos 2\theta}\,d\theta$

$z=e^{i\theta}$

$d\theta=\frac{1}{iz}\,dz$

$\theta\in[0,2\pi]\rightsquigarrow C:|z|=1.$

$\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$

$\cos 2\theta=\frac{1}{2}(z^2+\frac{1}{z^2})$

$$\oint_C f(z)\,dz=\oint_C\frac{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}{13-\cancel{12}^{\,6}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(z^2+\frac{1}{z^2})}\cdot\frac{1}{iz}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2i}\oint_C\frac{z^2+1}{13z^2-6z^4-6}\,dz=-\frac{1}{2i}\oint_C\frac{z^2+1}{6z^4-13z^2+6}\,dz.$$

$\cdot\ 6z^4-13z^2+6=0$

$z^2=t\Rightarrow 6t^2-13t+6=0\Rightarrow t_1=\frac{3}{2},\ t_2=\frac{2}{3}\Rightarrow$

$6(t-\frac{3}{2})(t-\frac{2}{3})=6(z^2-\frac{3}{2})(z^2-\frac{2}{3})=$

$=6(z^2-\frac{3}{2})(z-\sqrt{\frac{2}{3}})(z+\sqrt{\frac{2}{3}})$

pol pol

$z^2=\frac{3}{2}\Rightarrow z_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\notin C$

$z^2=\frac{2}{3}\Rightarrow z_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\in C.$

$$\cdot\ -\frac{1}{2i}\oint_C\frac{(z^2+1)}{6(z^2-\frac{3}{2})(z-\sqrt{\frac{2}{3}})(z+\sqrt{\frac{2}{3}})}\,dz$$

$\cdot\ z_0=\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to\sqrt{\frac{2}{3}}}\dfrac{\cancel{(z-\sqrt{\frac{2}{3}})}(z^2+1)}{6(z^2-\frac{3}{2})\cancel{(z-\sqrt{\frac{2}{3}})}(z+\sqrt{\frac{2}{3}})}=\dfrac{\frac{2}{3}+1}{6(\frac{2}{3}-\frac{3}{2})\cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}}}=$

$$=\frac{\cancel{5}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{6}}\cdot\frac{1}{(-\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}})\cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}}}=-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$\cdot\ z_0=-\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to-\sqrt{\frac{2}{3}}}\cancel{(z+\sqrt{\frac{2}{3}})}\cdot\dfrac{z^2+1}{6(z^2-\frac{3}{2})(z-\sqrt{\frac{2}{3}})\cancel{(z+\sqrt{\frac{2}{3}})}}=$

$$=\frac{\frac{\cancel{5}}{3}}{\cancel{6}\cdot(-\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}})(-2\sqrt{\frac{2}{3}})}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\oint_C f(z)\,dz=-\frac{1}{2i}\cdot 2\pi i\left(-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=-\pi\cdot 0=0.$$

② Integrale improprii de forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

cu $\begin{cases} gr\,Q \geq 2 + gr\,P \\ Q(x) \text{ nu are răd. reale} \end{cases}$

Se asociază funcția complexă $f(x) \longrightarrow f(z)$
Se calculează $\oint_C f(z)\,dz$ cu (th.) Res pt. polii din Ss
iar C este un contur suficient de mare care conține
toți polii din Ss (semiplanul superior).

<u>Aplicații:</u>

10. j) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$

Asociem funcția complexă $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$

Pct. singulare: $z^4 = \underset{\cos\pi + i\sin\pi}{\underset{\parallel}{-1}}$ $\Rightarrow z_K = \cos\frac{\pi+2K\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2K\pi}{4}$, $K = \overline{0,3}$.

<u>Obs.</u> $z^n = z_0 \Rightarrow$ răd. de ord. n ale lui z_0 sînt vf. unui poligon complex regulat înscris în cercul de rază $\sqrt[n]{|z_0|}$.

$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases} \in Ss$

$z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{cases} \in Ss$

$z_{2,3}$ $(z_2, z_3) \in Si$

Varianta (doar) pt. polii simpli: $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$; $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \left.\frac{g(z)}{h'(z)}\right|_{z=z_0}$

z_0 pol: $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \left.\frac{z^2+1}{4z^3}\right|_{z=z_0}$

pt. $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1}{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{\frac{1}{2}(\cancel{1} + 2i - \cancel{1}) + 1}{\cancel{4}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8}(1+i)^3} =$

$= \frac{\cancel{1+i}}{\sqrt{2}\cdot 2i\cancel{(1+i)}} = \frac{1}{2\sqrt{2}i} = \frac{-i}{2\sqrt{2}}$.

pt. $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1}{4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{\frac{1}{2}(-1+i)^2 + 1}{\cancel{4}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8}\cdot(-1+i)^3} =$

$$= \frac{1-i}{\sqrt{2}\cdot(-2i)(i-1)} = \frac{\cancel{1-i}}{2\sqrt{2}\,i\,(\cancel{1-i})} = \frac{1}{2\sqrt{2}i} = \frac{-i}{2\sqrt{2}}.$$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res} = 2\pi i\cdot\left(\frac{-i}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{2\sqrt{2}}\right) = 2\pi i\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right) = \pi\sqrt{2}.$$

③ Integrale tip Fourier $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx$; $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx$

unde $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ cu $\begin{cases} \text{gr. } Q \geq 1 + \text{gr. } P \\ Q(x) \text{ nu are} \\ \text{răd. reale} \end{cases}$

Se asociază funcția complementară $f(z)\cdot e^{iaz}$.

Se calculează $\oint_C f(z)\cdot e^{iaz}\,dz$ cu Res pentru toți polii din Ss unde C este un contur suficient de mare încât să conțină toți polii din Ss.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos ax\,dx = -2\pi \sum \mathrm{Im}(\mathrm{Res})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\sin ax\,dx = 2\pi \sum \mathrm{Re}(\mathrm{Res})$$

<u>Aplicație:</u>

11. a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^4+1}\,dx$

$$\oint_C \frac{1}{z^4+1}\cdot e^{iz}\,dz$$

$z^4 = -1 \Leftrightarrow z^4 = \cos\pi + i\sin\pi$

$$z_K = \cos\frac{\pi+2K\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2K\pi}{4}, \quad K=\overline{0,3}$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \in C$$

z_0: $\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \left.\frac{e^{iz}}{4z^3}\right|_{z=z_0}$

nu-l mai scriem

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \left(\left.\frac{e^{iz}}{4z^3}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}}\right) = \frac{e^{i\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}}{4\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{4\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} =$$

$$= \frac{e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{4\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8}(1+i)^2(1+i)} = \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{2}\cdot(2i)\cdot(1+i)} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\sqrt{2}\,(-1+i)} = \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{(-1-i)\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{4\sqrt{2}} \cdot (-1-i)\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\mathrm{Re}: \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{4\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{e^{i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{e^{-i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}}{4\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8}(-1+i)^2\cdot(-1+i)} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2} - i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}\cdot(-2i)(-1+i)} = \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\sqrt{2}}{2} - i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+i} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{4\sqrt{2}} \cdot (1-i)\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2} - i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{Re}: \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{4\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\oint_C \frac{1}{z^4+1} \cdot e^{iz}\,dz = 2\pi \sum \mathrm{Re}(\mathrm{Res}) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^4+1}\,dx = 0.$$

De reținut!

$f: B(z_0; r, R) \to \mathbb{C}$ olomorfă

z_0 este pol de ordinul $k \geq 1$ pentru fcția $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \Leftrightarrow$

i) z_0 răd. de ordinul k pentru funcția $h(z)$ adică: $h(z_0) = h'(z_0) = \dots = h^{(k-1)}(z_0) = 0$, $h^{(k)}(z_0) \neq 0$;

ii) $g(z_0) \neq 0$.

Aplicație:

① Stabiliți sing. izolate și tipul lor pentru funcțiile:

i) $f(z) = \frac{z}{e^z+1}$; ii) $f(z) = \frac{1}{(e^z+i)^2}$

Soluție: i) $g(z) = z$, $h(z) = 1 + e^z = 0 \Leftrightarrow e^z = -1 \Rightarrow$

$z_K \in \mathrm{Ln}(-1) = \{\ln|-1| + i(\pi + 2K\pi) \mid K \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow z_K = i\pi(2K+1)$, $K \in \mathbb{Z}$

$h'(z) = (e^z + 1)' = e^z \rightarrow h'(z_K) = e^{i\pi(2K+1)} = \boxed{e^{iz} \text{ periodică } T = 2\pi}$

$= \underbrace{e^{i\pi}}_{\underbrace{\cos\pi}_{-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{0}} = -1 \neq 0$

$\Rightarrow z_K$ răd. ordinul unu pentru $h(z)$.
$g(z_K) = z_K = i\pi(2K+1) \neq 0$ $\Big\} \Rightarrow z_K =$ pol ord. unu pentru $f(z)$.

ii) $g(z) = 1$, $h(z) = (e^z + i)^2 = 0 \Rightarrow e^z + i = 0 \Rightarrow$

$e^z = -i \rightarrow z_K \in \mathrm{Ln}(-i) = \{\ln|-i| + i(\frac{3\pi}{2} + 2K\pi) \mid K \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow z_K = i\pi(2K + \frac{3}{2})$, $K \in \mathbb{Z}$.

$h'(z) = 2e^z(e^z + i) \Rightarrow h'(z_K) = 0$

$h''(z) = 2e^z(2e^z + i) \Rightarrow h''(z_K) = 2e^{i(\frac{3\pi}{2} + 2K\pi)} \cdot (2e^{i(\frac{3\pi}{2} + 2K\pi)} + i) = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}(2e^{i\frac{3\pi}{2}} + i) =$

$= -2i(-2i + i) = -2i(-i) = 2i^2 = -2 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_K$ rădăcină dublă pentru $h(z)$.
$g(z_K) = 1 \neq 0$ $\Big\} \Rightarrow z_K =$ pol dublu.

(2) $\oint_{|z|=1} (z+1)^2 \sin\frac{1}{z}\, dz$; $f(z) = (z+1)^2 \sin\frac{1}{z}$, $z = 0$ p.s.i.

$f(z) = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots\right) + 2z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots\right) +$

$+ \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots = z + 2 + (1 - \frac{1}{3!})\frac{1}{z} - \frac{2}{3!z^2} +$

$+ \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!}\right)\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{2}{5!}\cdot\frac{1}{z^4} + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}\right)\cdot\frac{1}{z^5} + \dots \Rightarrow$

p.p. are o inf. de termeni nenuli $\Rightarrow z = 0$ ~~pol~~ punct singular esențial;

$z = 0 \in C : |z| = 1$;

$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = a_{-1} = 1 - \frac{1}{3!} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \Rightarrow$ cu teorema rez

$\oint_{|z|=1} (z+1)^2 \sin\frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{5}{6} = \frac{5\pi i}{3}$.

Temă seminar: (nr. 7.)

① $\oint\limits_C \frac{e^z}{(z-1)^2\cdot(z^2+4)}\,dz$, $C:\ |z-2+i|=\sqrt{3}$, prin 2 metode.

② $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\sin\theta}\,d\theta$.

③ $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13-12\cos 2\theta}\,d\theta$.

④ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$

⑤ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^4+1}\,dx$.

⑥ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+3}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$.

Soluții:

① a) Cu F.I.C. $f(z)=\frac{e^z}{z^2+4}$ olomorfă pe int C: $|z-2+i|\leq\sqrt{3}$

$(z_{1,2}=\pm 2i \notin |z-2+i|\leq\sqrt{3}$: $|2i-2+i|=|3i-2|=$
$=\sqrt{11}>\sqrt{3}$;
$|-2i-2+i|=|-2-i|=\sqrt{5}>\sqrt{3})$.

$z_0=1$, $n=1$ $\Longrightarrow$ $\oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz=\frac{2\pi i}{1!}f'(z_0)=$

$=2\pi i\cdot\left(\frac{e^z}{z^2+4}\right)'\Big|_{z=1}=2\pi i\,\frac{e^z(z^2+4)-2z\cdot e^z}{(z^2+4)^2}\Big|_{z=1}=$

$=2\pi i\,\frac{3e}{25}=\frac{6\pi e}{25}i$.

b) Cu teorema reziduurilor:

$\oint\limits_C \frac{e^z}{(z-1)^2\cdot(z^2+4)}\,dz=2\pi i\,\operatorname{Res}_{z=1} f(z)=2\pi i\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\cdot f(z)\right]'=$
$=2\pi i\cdot\frac{3e}{25}=\frac{6\pi e}{25}i$.

$f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2\cdot(z^2+4)}$ are un pol de ord. 2 $z_0=1\in C$.

② $z = e^{i\theta}$, $z \in C : |z| = 1$; $\sin\theta = \frac{z^2-1}{2iz}$; $d\theta = \frac{1}{i}\,dz$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\sin\theta}\,d\theta = \frac{1}{i} \oint_C \frac{\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2}{5-4\cdot\frac{z^2-1}{2iz}} \cdot \frac{dz}{z} =$$

$$= \oint_C \frac{\frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}}{\frac{5iz-2z^2+2}{\cancel{iz}}} \cdot \frac{dz}{\cancel{iz}} =$$

$$= \frac{1}{4} \oint_C \frac{(z^2-1)^2}{z^2(2z^2-5iz-2)}\,dz.$$

$f(z) = \frac{(z^2-1)^2}{z^2(2z^2-5iz-2)}$ are: $z_1 = 0$ pol de ord. 2, $\in C$.

$z_{2,3} = \frac{5i \mp 3i}{4}$ ↗ $z_2 = 2i \notin C$ ↘ $z_3 = \frac{i}{2} \in C$.

Cu th. rez.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\sin\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\frac{i}{2}} f(z)\right)\cdot 2\pi i$$

$\cdot \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \left[\frac{(z^2-1)^2}{2z^2-5iz-2}\right]'\Big|_{z=0} = \frac{4z(z^2-1)(2z^2-5iz-2)-(z^2-1)^2\cdot(4z-5i)}{(2z^2-5iz-2)^2}\Big/_{z=0} = \frac{+5i}{4}.$

$\cdot \operatorname*{Res}_{z=\frac{i}{2}} f(z) = \lim_{z\to\frac{i}{2}} \cancel{\left(z-\frac{i}{2}\right)} \cdot \frac{(z^2-1)^2}{z^2\cdot 2\cancel{\left(z-\frac{i}{2}\right)}(z-2i)} = \frac{\frac{25}{16}}{2\cdot\left(-\frac{3i}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)} = -\frac{25}{12}i$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\sin\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}2\pi i\left(+\frac{5i}{4} - \frac{25}{12}i\right) = \frac{\pi i}{2}\cdot\left(-\frac{10i}{12}\right) = \frac{5\pi}{12}.$$

③ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13-12\cos 2\theta}\, d\theta$

$z = e^{i\theta}$

$d\theta = \frac{1}{iz}\, dz$

$\theta \in [0, 2\pi] \rightsquigarrow C: |z| = 1.$

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$\cos 2\theta = \dfrac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_C \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{13 - \cancel{12}^{6} \cdot \frac{z^4+1}{\cancel{2}z^2}} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{-1}{2i} \oint_C \frac{z^2+1}{6z^4 - 13z^2 + 6}\, dz$$

$6z^4 - 13z^2 + 6 = 0 \quad \to \quad 6\left(t - \frac{3}{2}\right)\left(t - \frac{2}{3}\right) = 6\left(z^2 - \frac{3}{2}\right)\left(z^2 - \frac{2}{3}\right) =$

$z^2 = t \Rightarrow 6t^2 - 13t + 6 = 0 \qquad = 6\left(z^2 - \frac{3}{2}\right)\underbrace{\left(z - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)}_{\text{pol}}\underbrace{\left(z + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)}_{\text{pol}}$

$t_{1,2} = \dfrac{+13 \mp 5}{12}$ $\quad t_1 = \frac{3}{2}$, $\quad t_2 = \frac{2}{3}$

$z^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow z_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \notin C$

$z^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow z_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \in C.$

$$\cdot \operatorname*{Res}_{z=\sqrt{\frac{2}{3}}} f(z) = \lim_{z \to \sqrt{\frac{2}{3}}} \cancel{\left(z - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)} \cdot \frac{z^2+1}{6\left(z^2 - \frac{3}{2}\right)\cancel{\left(z - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)}\left(z + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)} =$$

$$= \frac{\overbrace{\frac{2}{3}+1}^{\frac{5}{3}}}{\cancel{6}\underbrace{\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right)}_{-\frac{5}{6}} \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\cdot \operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{\frac{2}{3}}} f(z) = \lim_{z \to -\sqrt{\frac{2}{3}}} \cancel{\left(z + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)} \cdot \frac{z^2+1}{6\left(z^2 - \frac{3}{2}\right)\left(z - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)\cancel{\left(z + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)}} =$$

$$= \frac{\frac{5}{3}}{(-5)\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\oint_C f(z)\, dz = -\frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \left(-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 0.$$

③ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$

Asociem funcția complexă $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^4+1}$

Pct. singulare: $z^4=-1=\cos\pi+i\sin\pi$

$$\Rightarrow z_K=\cos\frac{\pi+2K\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2K\pi}{4},\ K=\overline{0,3}$$

$$z_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\\ e^{i\frac{\pi}{4}}\end{array}\right.\in S_s$$

$$z_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\left\langle\begin{array}{l}-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\\ e^{i\frac{3\pi}{4}}\end{array}\right.\in S_s$$

$z_2, z_3\in S_i$.

Varianta doar pentru poli simpli: $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$;

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

· z_0 pol: $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\left.\frac{z^2+1}{4z^3}\right|_{z=z_0}$

· pentru $z=\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$ $\quad \operatorname{Res} f(z)=\dfrac{\frac12(1+i)^2+1}{4\left(\frac{1}{\sqrt2}+\frac{i}{\sqrt2}\right)^3}=\dfrac{\cancel{1+i}}{\frac{2\cancel{4}}{\cancel{2}\sqrt2}\cancel{(1+i)}\cdot(2i)}=$

$$=\frac{\sqrt2}{4i}=\frac{-i}{2\sqrt2}.$$

pentru $z=-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$ $\quad \operatorname{Res} f(z)=\dfrac{\frac12(-1+i)^2+1}{\frac{2\cancel{4}}{\cancel{2}\sqrt2}(i-1)^3}=\dfrac{\cancel{1-i}}{\sqrt2\cancel{(i-1)}(-2i)}$

$$=\frac{-i}{2\sqrt2}.$$

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\sum\operatorname{Res}=2\pi i\left(\frac{-i}{\sqrt2}\right)=\pi\sqrt2.$$

$$\to\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx=\pi\sqrt2.$$

(5.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^4+1}\,dx$

$$\oint_C \frac{1}{z^4+1}\cdot e^{i3z}\,dz.$$

$$z^4 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad e^{i\frac{3\pi}{4}} \in Ss$$

$$z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = e$$

$$z_0 : \operatorname{Res} f(z) = \left.\frac{e^{i3z}}{4z^3}\right|_{z=z_0}$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \operatorname{Res} f(z) = \frac{e^{3i\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}} \qquad \overline{\overline{e^{\frac{3\pi i}{4}} = -e^{-\frac{\pi i}{4}}}}$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{\sqrt2}}\cdot e^{\frac{3\sqrt2}{2}i}\cdot e^{\frac{\pi i}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{\sqrt2}}\cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt2}{2}\right)i} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\operatorname{Im} = -\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{\sqrt2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt2}{2}\right)}$$

$$z_0 = e^{i\frac{3\pi}{4}};\ \operatorname{Res} f(z) = \left.\frac{e^{i3z}}{4z^3}\right|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{3i\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{3}{\sqrt2}}\cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt2}{2}\right)} \longrightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{Im} = -\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{\sqrt2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt2}{2}\right).}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^4+1}\,dx = -2\pi\sum \operatorname{Im}(\operatorname{Res}) = -2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{\sqrt2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt2}{2}\right)\right) =$$

$$= \pi e^{-\frac{3}{\sqrt2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt2}{2}\right) =$$

$$= \pi e^{-\frac{3}{\sqrt2}}\left(\frac{1}{\sqrt2}\cos\frac{3\sqrt2}{2} + \frac{1}{\sqrt2}\sin\frac{3\sqrt2}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt2}e^{-\frac{3}{\sqrt2}}\left(\cos\frac{3\sqrt2}{2} + \sin\frac{3\sqrt2}{2}\right).$$

⑥ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+3}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$

$f(z) = \frac{z+3}{(z^2-2z+2)^2} \longrightarrow$ funcția complexă asociată

Polii : $z^2-2z+2=0 \Rightarrow z_{1,2} = 1 \pm i$

$z_1 = 1+i \in S_s$

$z_2 = 1-i \in S_i$.

$$\operatorname*{Res}_{z=1+i} f(z) = \lim_{z \to 1+i} \left[\cancel{(z-1-i)^2} \cdot \frac{z+3}{\cancel{(z-1-i)^2}(z-1+i)^2} \right]' =$$

$$= \lim_{z \to 1+i} \frac{(z-1+i)^{\cancel{2}} - 2(z+3)\cancel{(z-1+i)}}{(z-1+i)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{\cancel{1}+i-\cancel{1}+i-2(1+i+3)}{(\cancel{1}+i-\cancel{1}+i)^3} = \frac{2i-2i-8}{-8i} = \frac{1}{i}.$$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1+i} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{i} = 2\pi.$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+3}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = 2\pi.$$

INTEGRARE COMPLEXĂ

A. Teorema Integrală Cauchy (TIC). Formula Integrală Cauchy (FIC)

1. Integrați pe $C:|z|=1$, sens trigonometic (explicând unde este aplicabilă TIC), următoarele funcții:

a) $\mathrm{Re}(z)$ **b)** $e^{\frac{z^2}{2}}$ **c)** $\frac{1}{3z-\pi i}$ **d)** $\frac{1}{\bar{z}}$ **e)** $tg(z^2)$ **f)** $\frac{1}{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}$

g) $\frac{1}{4z-3}$ **h)** $\bar{z}^2$ **i)** $\frac{1}{z^8-1,2}$ **j)** $\frac{1}{2|z|^3}$ **k)** $z^2 \cdot ctg(z)$

2. Evaluați:

a) $\oint_C \frac{\cos z}{z} dz$, pentru $C_1:|z|=1$ și $C_2:|z|=3$ (sens trigonometic);

b) $\oint_C \frac{1}{z^2+1} dz$, pentru $C_1:|z+i|=1$, $C_2:|z-i|=1$, $C_3:|z|=\frac{1}{2}$, $C_4:|z-i|=\frac{3}{2}$ (sens trigonometic);

c) $\oint_C \frac{z^2-4}{z^2+4} dz$, pentru $C_1:|z-i|=2$, $C_2:|z-1|=2$, $C_3:|z+3i|=2$, $C_4:|z|=\frac{\pi}{2}$ (sens trigonometic);

d) $\oint_C \mathrm{th}(z) dz$, pentru $C_1:\left|z-\frac{1}{4}\pi i\right|=\frac{1}{2}$ (sens trigonometic);

e) $\oint_C \mathrm{Re}(2z) dz$, pentru $C_1:|z|=1$ intersectat cu semiplanul superior (sens trigonometric);

3. Evaluați utilizând FIC:

a) $\oint_C \frac{z+2}{z-2} dz$, $C:|z-1|=2$

b) $\oint_C \frac{e^{3z}}{3z-i} dz$, $C:|z|=1$

c) $\oint_C \frac{sh(\pi z)}{z^2-3z} dz$, $C:|z|=1$

d) $\oint_C \frac{\ln(z+1)}{z^2+1} dz$, $C:|z-2i|=2$

e) $\oint_C \frac{7z-6}{z^2-2z} dz$, $C:|z-1|=2$

f) $\oint_C \frac{e^{2z}}{2z^2+4z} dz$, $C:|z-1+i|=2$

g) $\oint_C \frac{\ln(z+1)}{z^2+1} dz$, $C:|z-2i|=2$

h) $\oint_C \frac{\ln(z-1)}{z-5} dz$, $C:|z-4|=2$

i) $\oint_C \frac{\sin z}{z^2-2iz} dz$, C = cuprinsă între $|z|=3$ (sens trig.) și $|z|=1$ (sens invers trig.).

4. Evaluați $\oint_C f(z)dz$ utilizând consecințele FIC pe cercul $C:|z-1-i|=2$ (sens trigonometric):

a) $f(z)=\frac{sh(2z)}{z^4}$ **b)** $f(z)=\frac{\cos(2z)}{\left(z-\frac{\pi i}{4}\right)^3}$ **c)** $f(z)=\frac{e^{2z}\cdot \sin z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^2}$ **d)** $f(z)=\frac{e^{2z}}{4z^4}$