MECANICĂ

MECANICA este capitolul de bază al fizicii, care studiază mişcarea cea mai simplă a corpurilor solide, lichide sau gazoase, anume deplasarea lor în spaţiu şi timp, precum şi cauzele care o produc.

Cinematica este partea din mecanică în care se studiază mişcarea corpurilor fără a interesa natura şi masa lor, cauzele şi efectele mişcării; în cinematică se stabilesc formulele matematice care exprima poziţia, viteza şi acceleraţia corpurilor aflate în mişcare, la orice moment de timp.

Deoarece nu există nimic absolut imobil, poziţia şi deplasarea unui corp se raportează întotdeauna la alte corpuri presupuse teoretic fixe iar fără acestea studiul mişcării şi repausului nu s-ar putea face, deci *mişcarea şi repausul sunt noţiuni relative*.

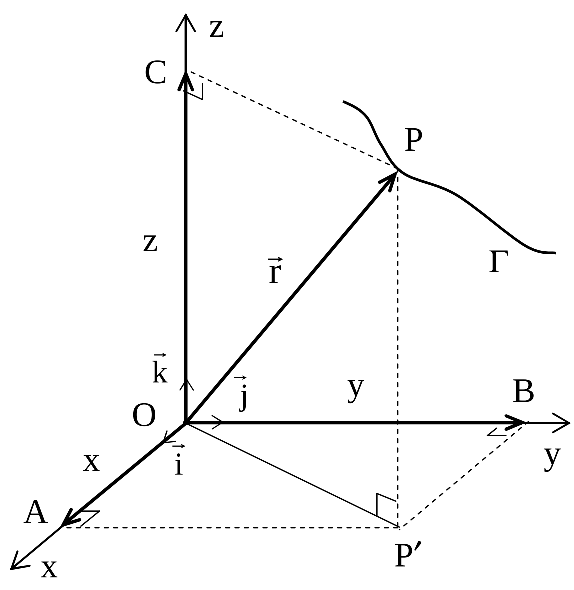
O primă simplificare utilizată introduce termenii:

- *punct material* – corp rigid cu dimensiuni neglijabile, caracterizat doar prin masa sa m;
- *mobil* – corp cu masa neglijabilă (m = 0), punct geometric aflat în mişcare.

Studiul stării de mişcare sau de repaus a unui corp se face numai în raport cu un ***sistem de referinţă***. Prin sistem de referinţă se înţelege un *reper* – originea O, căruia i se asociază un *sistem de coordonate ortogonal*, axele de coordonate Ox, Oy, Oz şi un *instrument care permite măsurarea timpului* (ceas, cronometru).

Un corp se găseşte în *mişcare* dacă el îşi schimbă poziţia faţă de sistemul de referinţă ales şi se află în *repaus*, este imobil, daca el nu îşi schimbă poziţia faţă de acesta.

Poziţia în spaţiu a unui corp în sistemul de referinţă inerţial ales, faţă de originea O, se determină prin cunoaşterea la orice moment de timp a *vectorului de poziţie* $\vec{r}$ sau a componentelor x, y şi z ale acestui vector pe axele de coordonate



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

unde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt *versorii fundamentali* ai celor trei axe de coordonate Ox, Oy şi Oz, cu $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

Modulul vectorului de poziție este:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

1° Dacă x = const., y = const., z = const., deci $\vec{r} = \text{const.}$, mobilul este în *repaus* iar dacă cel puțin una dintre coordonatele spațiale variază în timp, atunci mobilul se află în mişcare, putându-se distinge cazurile:

2° *mişcare unidimensională*, dacă

$x = x(t),\ y = 0,\ z = 0$, în lungul axei Ox,

$x = 0,\ y = y(t),\ z = 0$, în lungul axei Oy,

$x = 0,\ y = 0,\ z = z(t)$, în lungul axei Oz;

3° *mişcare bidimensională*, dacă

$x = x(t),\ y = y(t),\ z = 0$, în planul xOy,

$x = x(t),\ y = 0,\ z = z(t)$, în planul xOz,

$x = 0,\ y = y(t),\ z = z(t)$, în planul yOz;

4° *mişcare în spațiul tridimensional*, pentru

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

care poartă numele de ***ecuațiile cinematice ale mişcării*** şi reprezintă *ecuațiile parametrice ale traiectoriei*, în care parametrul este timpul.

În decursul mişcării mobilului putând avea loc o schimbare a modulului şi a orientării vectorului de poziție, scriem:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

şi obținem

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

ecuație ce exprimă dependența de timp a vectorului de poziție al mobilului şi reprezintă *legea de mişcare* (sau ***ecuația vectorială a mişcării***).

Se numeşte ***traiectorie***, curba descrisă de corp în timpul mişcării sale, adică locul geometric al punctelor prin care a trecut el, deci curba descrisă de vârful vectorului de poziție în cursul variației sale în timp, putând fi: o dreaptă, o curbă în plan (caz particular: cerc), o curbă în spațiu. *Expresia traiectoriei nu depinde de timp*.

Legea de mişcare şi forma traiectoriei caracterizează complet mişcarea mecanică a corpului şi formează ***elementele mişcării***, iar orice clasificare a mişcărilor mecanice trebuie să se facă pe baza lor.

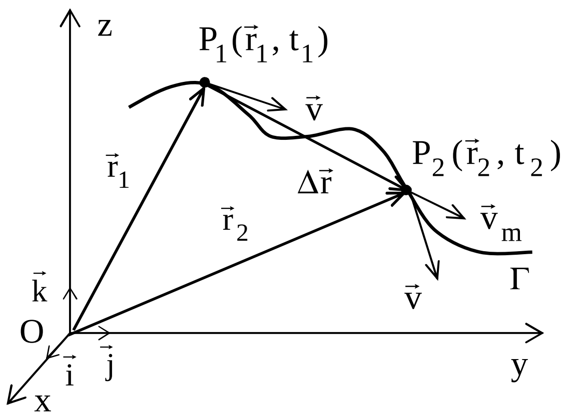
VITEZA ŞI ACCELERAŢIA

a. Viteza

Dacă un mobil care se deplasează pe o traiectorie Γ are în punctul P_1 la momentul de timp t_1, vectorul de poziţie $\vec{r}_1$, iar la momentul t_2, în punctul P_2, vectorul de poziţie $\vec{r}_2$, atunci putem defini *vectorul viteză medie*:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1)}{t_2 - t_1},$$

unde $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ este *vectorul deplasare* a mobilului în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$, fiind egal cu variaţia vectorului de poziţie. Vectorul viteză medie $\vec{v}_m$ este coliniar – având aceeaşi direcţie şi acelaşi sens, cu $\Delta\vec{r}$.



În general, modulul vectorului deplasare nu coincide cu drumul parcurs de mobil pe traiectorie, egalitatea fiind satisfăcută numai în cazul traiectoriilor rectilinii.

Într-un interval temporal oarecare, oricât de complicată ar fi traiectoria mobilului, dacă poziţia sa finală coincide cu cea iniţială, viteza medie este nulă.

Unitatea de măsură pentru viteză, în S.I., este m/s.

Vectorul viteză momentană (sau *instantanee*) $\vec{v}$ se defineşte ca limită din viteza medie când intervalul de timp $\Delta t \to 0$, fiind derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului de poziţie – funcţia $\vec{r}(t)$.

Această definiţie implică faptul că vectorul viteză momentană este întotdeauna tangent la traiectorie în punctul corespunzător poziţiei mobilului la momentul respectiv, iar sensul său coincide cu sensul de mişcare a mobilului pe traiectorie.

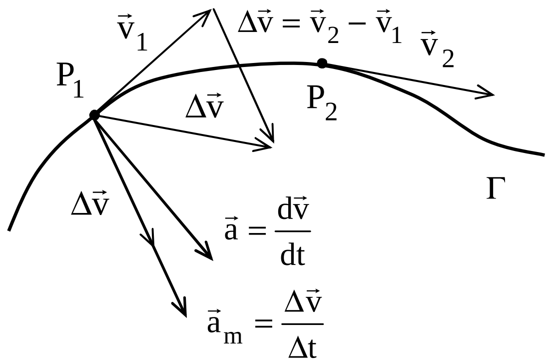
Vectorul viteză se scrie:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Mişcarea caracterizată prin $|\vec{v}| = \text{const.}$ se numeşte *mişcare uniformă,* iar dacă $|\vec{v}|$ variază cu timpul, mişcarea se numeşte *variată.*

b. Accelerația

În general, în timpul mişcării, vectorul viteză se poate schimba atât în modul cât şi ca direcție. Dacă la momentul de timp t_1, viteza mobilului este $\vec{v}_1$, iar la momentul de timp t_2 viteza lui este $\vec{v}_2$, vom putea exprima variația vitezei mobilului în raport cu intervalul de timp corespunzător acestei variații definind *vectorul accelerație medie*:



$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2(t_2) - \vec{v}_1(t_1)}{t_2 - t_1},$$

unde $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ este variația vectorului viteză în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$. Vectorul accelerație medie $\vec{a}_m$ are direcția şi sensul vectorului $\Delta\vec{v}$.

Unitatea de măsură pentru accelerație, în S.I., este m/s^2.

Vectorul accelerație momentană (sau *instantanee*) $\vec{a}$ este variația vectorului viteză calculată pentru un interval de timp Δt, când $\Delta t \to 0$, fiind derivata de ordinul I a vectorului viteză $\vec{v}(t)$ sau derivata de ordinul II a vectorului de poziție $\vec{r}(t)$, în raport cu timpul.

După cum accelerația este constantă (sau nulă) sau variază în timp, mişcarea mobilului este uniform variată (sau uniformă) sau variată.

Cu $t_2 > t_1$, dacă $v_2 > v_1$ (accelerație pozitivă), mişcarea este *accelerată*, iar dacă $v_2 < v_1$ (accelerație negativă), mişcarea este *încetinită*. Dacă vectorul viteză este constant nu avem accelerație, indiferent de valoarea vitezei. Accelerația momentană poate fi nenulă, chiar dacă în acel moment viteza este nulă.

Vectorul accelerație se scrie:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Mişcarea pentru care $|\vec{a}| = \text{const.}$ se numeşte *mişcare uniform variată* (accelerată sau încetinită).

Tema II.1

Să se exprime componentele vectorilor viteză şi acceleraţie, precum şi modulele acestora.

R:

În coordonate carteziene, *vectorul viteză* se scrie:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} =$$

$$= \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}, \qquad (1)$$

dar

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \qquad (2)$$

şi, folosind notaţiile lui Newton, *componentele vectorului viteză* $\vec{v}$ pe cele trei axe de coordonate sunt:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \qquad (3)$$

Astfel, componenta vectorului viteză pe o axă este egală cu derivata (de ordinul întâi) în raport cu timpul a funcţiei de poziţie x, y sau z.

Modulul vectorului viteză este:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,. \qquad (4)$$

În coordonate carteziene, *vectorul acceleraţie* se scrie:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) =$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \dot{v}_x \vec{i} + \dot{v}_y \vec{j} + \dot{v}_z \vec{k} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2}{dt^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) =$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}, \qquad (5)$$

dar totodată

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\,. \qquad (6)$$

Prin urmare, identificând

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \qquad (7)$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z},$$

deci *componentele vectorului accelerație* $\vec{a}$ pe cele trei axe sunt egale cu derivatele de ordinul întâi ale componentelor corespunzătoare ale vitezei sau cu derivatele de ordinul doi ale funcțiilor de poziție, în raport cu timpul.

Modulul vectorului accelerație este:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}\ . \tag{8}$$

Observație:

Cunoscând masa punctului material, atunci *ecuațiile diferențiale ale dinamicii punctului material*:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \tag{9}$$

în general, cu $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$, sau pe componente:

$$ma_x = m\ddot{x} = F_x, \quad ma_y = m\ddot{y} = F_y, \quad ma_z = m\ddot{z} = F_z\,. \tag{10}$$

Problema II.2

a.) Pentru un mobil aflat în mişcare, cunoscând

a.) $x = 15\,t^2$ şi $y = 4 - 20\,t^2$;

b.) $x = 3\,e^t + \frac{1}{4}$ şi $y = 4\,e^t - 1$,

să se calculeze viteza şi accelerația (componente, vector, modul).

R:

a.) Dacă $x = 15\,t^2$, $y = 4 - 20\,t^2$, componentele vitezei mobilului pe cele două axe Ox şi Oy sunt:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 30\,t \quad \text{şi} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -40\,t, \tag{1) (2}$$

adică vectorul viteză se scrie

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = (30\,\vec{i} - 40\,\vec{j})\,t, \tag{3}$$

modulul vectorului viteză fiind

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 50\,t\,. \tag{4}$$

Dacă componentele vectorului accelerație sunt:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 30\,m/s^2 \tag{5}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -40\,m/s^2 < 0, \tag{6}$$

obținem expresia vectorului accelerație

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = 30\,\vec{i} - 40\,\vec{j} \tag{7}$$

iar modulul său va fi

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 50\ \mathrm{m/s^2} = \mathrm{const.} \tag{8}$$

b.) Procedăm analog, în cazul în care $x = 3e^t + \frac{1}{4}$, $y = 4e^t - 1$:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3e^t \quad \text{şi} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 4e^t, \tag{9) (10}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = (3\vec{i} + 4\vec{j})\,e^t, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5e^t, \tag{11) (12}$$

respectiv

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 3e^t \quad \text{şi} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 4e^t, \tag{13) (14}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = (3\vec{i} + 4\vec{j})\,e^t, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 5e^t. \tag{15) (16}$$

b.) Dacă proiecțiile poziției momentane a unui mobil pe axele ortogonale Ox şi Oy sunt date de relațiile: $x = 5 + 3t$ (m) şi $y = 2 + 9t + 3t^2$ (m), să se afle viteza mobilului după un timp $t_1 = 2\,\mathrm{s}$ de la începutul mişcării.

R:

Dacă ecuațiile cinematice ale mişcării, $x = x(t)$ şi $y = y(t)$, sunt de forma $x = 5 + 3t$ (m), $y = 2 + 9t + 3t^2$ (m), atunci componentele vectorului viteză pe cele două axe de coordonate Ox şi Oy, pentru $t_1 = 2\,\mathrm{s}$, se scriu:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(5 + 3t) = 3\ \mathrm{m/s} \tag{1}$$

şi

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(2 + 9t + 3t^2) = (9 + 6t)\Big|_{t=t_1} =$$

$$= (9 + 6t_1)\Big|_{t_1 = 2\,\mathrm{s}} = 21\ \mathrm{m/s} \tag{2}$$

iar modulul vectorului viteză este

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{3^2 + 21^2} = 21{,}21\ \mathrm{m/s}. \tag{3}$$

Problema II.3

Să se exprime dependența de timp a vitezei, respectiv a spațiului parcurs de un mobil care se deplasează cu accelerația constantă $a = 0{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, dacă la momentul inițial, $t_0 = 0$, mobilul se afla în poziția $s_0 = 6\ \mathrm{m}$ şi avea viteza $v_0 = 3\ \mathrm{m/s}$.

R:

Accelerația este $a = \frac{dv}{dt}$, din care

$$dv = a\,dt. \qquad (1)$$

Integrăm ținând seama de condițiile inițiale, adică la momentul de timp $t_0 = 0$, viteza este v_0, şi avem

$$\int_{v_0}^{v} dv = a\int_{0}^{t} dt. \qquad (2)$$

Obținem

$$v - v_0 = at \quad \text{sau} \quad v = v_0 + at, \qquad (3)$$

legea vitezei în mişcarea rectilinie uniform variată (accelerată), de unde, cu valorile numerice $v_0 = 3\,\text{m/s}$ şi $a = 0{,}8\ \text{m/s}^2$, rezultă

$$v = 3 + 0{,}8\,t\ \ (\text{m/s}). \qquad (4)$$

Viteza este $v = \frac{ds}{dt}$, deci

$$ds = v\,dt. \qquad (5)$$

Ținând seama de condițiile inițiale, la $t_0 = 0$, $s = s_0$, şi de relația (3), integrăm

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{0}^{t} v\,dt = \int_{0}^{t} (v_0 + at)\,dt = v_0\int_{0}^{t} dt + a\int_{0}^{t} t\,dt = v_0 t + a\,\frac{t^2}{2}, \qquad (6)$$

şi obținem

$$s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{sau} \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \qquad (7)$$

legea mişcării sau *ecuația spațiului* parcurs de mobil în mişcarea rectilinie uniform variată, iar înlocuind valorile numerice date, $s_0 = 6\,\text{m}$, $v_0 = 3\,\text{m/s}$ şi $a = 0{,}8\,\text{m/s}^2$, aflăm

$$s = 6 + 3t + 0{,}4\,t^2\ \ (\text{m}). \qquad (8)$$

Problema II.4

Să se găsească expresiile spațiului şi vitezei după un timp t de la începutul mişcării unui mobil a cărui accelerație ca funcție de timp este dată de relația $a = k\,t$, unde k este o constantă, dacă la momentul inițial $t_0 = 0$, $v_0 = 0$ şi $s = s_0$.

R:

Accelerația este

$$\begin{cases} a = \dfrac{dv}{dt} \\ a = k\,t\,, \text{ cu } k = \text{const.}, \end{cases}$$

unde $[\,k\,]_{SI} = \dfrac{[\,a\,]_{SI}}{[\,t\,]_{SI}} = \dfrac{m}{s^2}\cdot\dfrac{1}{s} = \dfrac{m}{s^3}$, iar prin egalare

$$\frac{dv}{dt} = k\,t\,. \qquad (1)$$

Separând variabilele, v şi t, relația (1) devine

$$dv = k\,t\,dt\,.$$

Integrăm ținând seama de condițiile inițiale, $t_0 = 0$ şi $v_0 = 0$,

$$\int_0^v dv = k\int_0^t t\,dt$$

şi găsim expresia vitezei mobilului, $v = v(t)$,

$$v = \frac{k}{2}\,t^2. \qquad (2)$$

Viteza este

$$v = \frac{ds}{dt},$$

expresie pe care o egalăm cu relația (2), astfel

$$\frac{ds}{dt} = \frac{k}{2}\,t^2. \qquad (3)$$

Separând variabilele, s şi t, vom obține

$$ds = \frac{k}{2}\,t^2 dt\,.$$

Integrăm ținând seama de condițiile inițiale, $t_0 = 0$, $s = s_0$, şi avem

$$\int_{s_0}^{s} ds = \frac{k}{2}\int_0^t t^2 dt$$

iar calculând

$$s - s_0 = \frac{k}{2}\cdot\frac{t^3}{3},$$

din care aflăm expresia spațiului parcurs de mobil în timpul t, $s = s(t)$,

$$s = s_0 + \frac{k}{6}\,t^3. \qquad (4)$$

Problema II.5

Să se găsească expresia vitezei, $v = v(t)$, precum şi cea a spațiului parcurs de un mobil, $s = s(t)$, a cărui accelerație depinde de viteză după legea $a = -kv^2$, unde k este o constantă, cunoscând că la momentul inițial $t_0 = 0$, $v = v_0$ şi respectiv $s = s_0$.

R:

Accelerația este

$$\begin{cases} a = \dfrac{dv}{dt} \\ a = -kv^2, \ \text{cu} \ k = \text{const.}, \end{cases}$$

unde $[k]_{SI} = \dfrac{[a]_{SI}}{[v^2]_{SI}} = \dfrac{[a]_{SI}}{[v]_{SI}^2} = \dfrac{m}{s^2} \cdot \dfrac{s^2}{m^2} = \dfrac{1}{m}$, iar prin egalare

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2. \tag{1}$$

Separând variabilele, v şi t, relația (1) se scrie

$$\frac{dv}{v^2} = -k\,dt.$$

Integrăm ținând seama de condițiile inițiale, $t_0 = 0$, $v = v_0$, şi avem succesiv

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -k\int_0^t dt; \quad \left(-\frac{1}{v}\right)\Bigg|_{v_0}^{v} = -kt; \quad -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -kt; \quad \frac{1}{v} = \frac{1 + v_0 k t}{v_0}$$

de unde obținem expresia vitezei mobilului, $v = v(t)$,

$$v = \frac{v_0}{1 + v_0 k t}. \tag{2}$$

Viteza este

$$v = \frac{ds}{dt}$$

expresie pe care o egalăm cu relația (2),

$$\frac{ds}{dt} = \frac{v_0}{1 + v_0 k t}. \tag{3}$$

Separând variabilele, s şi t, avem

$$ds = \frac{v_0}{1 + v_0 k t}\, dt.$$

Integrăm ținând seama de condițiile inițiale, $t_0 = 0$ şi $s = s_0$,

$$\int_{s_0}^{s} ds = v_0 \int_0^t \frac{1}{1 + v_0 k t}\, dt; \quad s - s_0 = \frac{v_0}{v_0 k} \ln(1 + v_0 k t)$$

şi aflăm expresia spațiului parcurs de mobil, $s = s(t)$,

$$s = s_0 + \frac{1}{k} \ln(1 + v_0 k t) . \qquad (4)$$

Problema II.6

Să se determine ecuația de mişcare pentru o particulă care se află în câmpul $U(x) = -Ax^4$, unde A este o constantă, dacă energia ei mecanică este nulă, iar la momentul inițial $t_0 = 0$, $x = x_0$.

R:

Potrivit enunțului problemei, energia mecanică a particulei este nulă, dar în general

$$E = T + U,$$

în care T reprezintă energia cinetică a particulei, cu $T = \frac{mv^2}{2}$, iar U energia potențială, cu $U \equiv U(x) = -Ax^4$.

Unitatea de măsură a constantei este:

$$[A]_{SI} = \frac{[U]_{SI}}{[x^4]_{SI}} = \frac{[U]_{SI}}{[x]_{SI}^4} = \frac{J}{m^4} .$$

Deoarece mişcarea particulei se face în lungul axei Ox, $v = v_x = \frac{dx}{dt}$, energia cinetică va fi:

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

şi astfel energia mecanică devine

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - Ax^4 = 0 \qquad (1)$$

din care putem scrie

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2A}{m}}\, x^2 . \qquad (2)$$

Separând variabilele, x şi t, rezultă

$$\frac{dx}{x^2} = \sqrt{\frac{2A}{m}}\, dt$$

iar ținând seama de condițiile inițiale, $t_0 = 0$ şi $x = x_0$, integrăm

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^2} = \sqrt{\frac{2A}{m}} \int_0^t dt$$

şi avem succesiv

$$\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x_0}^{x} = \sqrt{\frac{2A}{m}}\, t\,; \quad -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = \sqrt{\frac{2A}{m}}\, t\,; \quad \frac{1}{x} = \frac{1-\sqrt{\frac{2A}{m}}\, x_0 t}{x_0}.$$

Prin urmare, ecuația de mişcare a particulei, $x = x(t)$, capătă forma:

$$x = \frac{x_0}{1-\sqrt{\frac{2A}{m}}\, x_0 t}. \qquad (3)$$

Problema II.7

Un mobil este constrâns să efectueze simultan două mişcări după două direcții perpendiculare. Astfel, dacă

a.) $x = 3e^t + \frac{1}{4}$ şi $y = 4e^t - 1$;

b.) $x = 15t^2$ şi $y = 4 - 20t^2$;

c.) $x = a\cos\omega t$ şi $y = \frac{b}{c^2}(1-\cos\omega t)$, cu $a, b, c = \text{const.}$;

d.) $x = 10\cos 3t$ şi $y = 10\sin 3t$,

să se găsească expresia traiectoriei mobilului.

R:

Expresia analitică a traiectoriei unui mobil se obține prin eliminarea timpului din ecuațiile parametrice, în cazurile date, $x = x(t)$ şi $y = y(t)$, iar mişcarea mobilului în planul xOy va fi caracterizată de o funcție $f(x, y) = 0$.

a.) Din ecuațiile $x = 3e^t + \frac{1}{4}$, $y = 4e^t - 1$, găsim

$$e^t = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right) \quad \text{şi} \quad e^t = \frac{1}{4}(y+1) \qquad (1)\,(2)$$

iar prin egalare, calculând,

$$\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(y+1)\,; \quad 4x - 1 = 3y + 3,$$

obținem

$$4x - 3y - 4 = 0, \qquad (3)$$

care este ecuația unei drepte, ce reprezintă traiectoria mobilului în planul xOy.

b.) Procedând analog, în cazul când $x = 15t^2$ şi $y = 4 - 20t^2$, avem

$$t^2 = \frac{x}{15} \quad \text{şi} \quad t^2 = \frac{4-y}{20}, \qquad (4)\,(5)$$

apoi egalăm şi simplificăm

$$\frac{x}{15} = \frac{4-y}{20} \quad \text{sau} \quad \frac{x}{3} = \frac{4-y}{4}$$

iar în final rezultă

$$4x + 3y - 12 = 0, \tag{6}$$

traiectoria este o dreaptă, mobilul aflându-se în mişcarea rectilinie.

c.) În cazul în care $x = a\cos\omega t$ şi $y = \frac{b}{c^2}(1-\cos\omega t)$, cu a, b şi c constante, separăm

$$\cos\omega t = \frac{x}{a} \quad \text{şi} \quad \cos\omega t = 1 - \frac{yc^2}{b}, \tag{7) (8}$$

egalăm

$$\frac{x}{a} = 1 - \frac{yc^2}{b},$$

calculăm şi obţinem

$$y + \frac{b}{c^2}\left(\frac{x}{a} - 1\right) = 0, \tag{9}$$

adică traiectoria mobilului este o dreaptă.

d.) Dacă $x = 10\cos 3t$ şi $y = 10\sin 3t$, atunci având în vedere formula fundamentală a trigonometriei, $\sin^2 3t + \cos^2 3t = 1$, scriem

$$\cos 3t = \frac{x}{10} \quad \text{şi} \quad \sin 3t = \frac{y}{10}, \tag{10) (11}$$

şi deci

$$\cos^2 3t = \frac{x^2}{100} \quad \text{şi} \quad \sin^2 3t = \frac{y^2}{100} \tag{12) (13}$$

iar însumând rezultă

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{100} = 1 \quad \text{sau} \quad x^2 + y^2 = 100, \tag{14}$$

prin urmare traiectoria mobilului este un cerc (de rază r = 10) în planul xOy.

Problema II.8

a.) Dacă asupra unui corp de masă $m = 4\ \text{kg}$, care se deplasează fără frecare, pornind din repaus din originea axelor de coordonate, acţionează o forţă variabilă $F(t) = 2 + 8t$ (N), să se calculeze: a.) acceleraţia şi viteza corpului precum şi spaţiul parcurs de acesta după un timp $t_1 = 6\ \text{s}$ de la începutul mişcării; b.) puterea consumată în acest timp.

R:

a.) Acceleraţia, viteza şi spaţiul parcurs de corp se obţin scriind:

$$a(t)=\frac{F(t)}{m}=\frac{2+8t}{4}=\frac{1}{2}+2t\,; \tag{1}$$

$$v(t)=\int_0^t a(t)\,dt=\int_0^t\left(\frac{1}{2}+2t\right)dt=\frac{1}{2}t+t^2\,; \tag{2}$$

$$x(t)=\int_0^t v(t)\,dt=\int_0^t\left(\frac{1}{2}t+t^2\right)dt=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{3}t^3 \tag{3}$$

iar expresiile şi valorile acestora la momentul de timp t_1, cu $t_1=6\,s$, vor fi:

$$a(t_1)=\left(\frac{1}{2}+2t\right)\Bigg|_{t_1}=\left(\frac{1}{2}+2t_1\right)\Bigg|_{t_1=6s}=12{,}5\ m/s^2\,; \tag{4}$$

$$v(t_1)=\left(\frac{1}{2}t+t^2\right)\Bigg|_{t_1}=\left(\frac{1}{2}t_1+t_1^2\right)\Bigg|_{t_1=6s}=39\ m/s\,; \tag{5}$$

$$x(t_1)=\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_{t_1}=\left(\frac{1}{4}t_1^2+\frac{1}{3}t_1^3\right)\Bigg|_{t_1=6s}=81\ m\,. \tag{6}$$

b.) Exprimăm lucrul mecanic efectuat de forța variabilă $F(t)$:

$$L=\int \delta L=\int F(t)\,dx=\int_0^t F(t)\cdot v(t)\,dt=\int_0^t (2+8t)\cdot\left(\frac{1}{2}t+t^2\right)dt=$$

$$=\int_0^t (t+6t^2+8t^3)\,dt=\int_0^t t\,dt+6\int_0^t t^2\,dt+8\int_0^t t^3\,dt=\frac{t^2}{2}+2t^3+2t^4, \tag{7}$$

care după un timp $t_1=6\,s$ de la începutul mişcării devine

$$L(t_1)=\frac{t^2}{2}(1+4t+4t^2)\Bigg|_{t_1}=\frac{t_1^2}{2}(1+4t_1+4t_1^2)\Bigg|_{t_1=6s}=3042\ J\,. \tag{8}$$

Puterea consumată în timpul t este

$$P=\frac{L}{t}=\frac{t}{2}(1+4t+4t^2)\,, \tag{9}$$

care pentru t_1 se scrie:

$$P(t_1)=\left(\frac{L}{t}\right)\Bigg|_{t_1}=\frac{t}{2}(1+4t+4t^2)\Bigg|_{t_1}=$$

$$=\frac{t_1}{2}(1+4t_1+4t_1^2)\Bigg|_{t_1=6s}=507\ W\,. \tag{10}$$

b.) Calculați lucrul mecanic efectuat de forța $F(x)=8x\ (N)$ pentru a-şi deplasa punctul de aplicație între A şi B, dacă $x_A=0{,}2\ m$, $x_B=0{,}5\ m$.

R:

Lucrul mecanic efectuat de forța $F(x) = 8x$ (N) este:

$$L_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx = \int_{x_A}^{x_B} 8x\,dx = 8\int_{x_A}^{x_B} x\,dx = 8\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_A}^{x_B} = 4\,(x_B^2 - x_A^2) \qquad (1)$$

iar pentru $x_A = 0{,}2$ m şi $x_B = 0{,}5$ m aflăm $L_{AB} = 0{,}84$ J.

c.) Un corp punctiform, cu masa $m = 1$ kg, se află sub acțiunea unei forțe $\vec{F} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$ (N). Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de această forță pentru a deplasa corpul din originea sistemului de coordonate în punctul $M\,(-2, 4, 6)$ (m).

R:

În general, lucrul mecanic elementar efectuat de forța $\vec{F}$ pentru a-şi deplasa punctul de aplicație pe distanța $d\vec{r}$ este:

$$\delta L = \vec{F}\cdot d\vec{r} = (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})\cdot(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}) =$$

$$= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz\,, \qquad (1)$$

unde am ținut seama că $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$ şi $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$.

Potrivit enunțului problemei, expresia forței care conduce la deplasarea corpului din $O\,(0, 0, 0)$ în punctul $M\,(-2, 4, 6)$, este $\vec{F} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$ (N), ceea ce înseamnă că $F_x = 4$; $F_y = -5$ şi $F_z = 0$ (N).

Prin urmare, cu $F_z = 0$, avem

$$\delta L = F_x\,dx + F_y\,dy = 4\,dx - 5\,dy\,. \qquad (1')$$

Prin integrare aflăm lucrul mecanic total:

$$L = \int_0^{-2} 4\,dx + \int_0^{4} (-5)\,dy = 4x\Big|_0^{-2} - 5y\Big|_0^{4} = -28\text{ J}\,. \qquad (2)$$

Acelaşi rezultat l-am fi obținut scriind vectorul deplasare a punctului de aplicație al forței din $O\,(x_O, y_O, z_O)$ în $M\,(x_M, y_M, z_M)$, adică, conform enunțului problemei, din $O\,(0, 0, 0)$ în $M\,(-2, 4, 6)$ (m),

$$\vec{d} = (x_M - x_O)\,\vec{i} + (y_M - y_O)\,\vec{j} + (z_M - z_O)\,\vec{k} \qquad (3)$$

sau, identificând,

$$\vec{d} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}\,. \qquad (3')$$

Lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ pentru a deplasa corpul pe distanța $\vec{d}$ va fi:

$$L = \vec{F}\cdot\vec{d} = (4\vec{i} - 5\vec{j})\cdot(-2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}) = -8\,\vec{i}\cdot\vec{i} - 20\,\vec{j}\cdot\vec{j} = -28\text{ (J)}. \qquad (4)$$

d.) Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ (N) pentru a-şi deplasa punctul de aplicație pe distanța AB, din $A\,(7, 12)$ în $B\,(13, 4)$ (m), precum şi unghiul format de direcția forței cu direcția deplasării.

R:

În general, vectorul deplasare a punctului de aplicație al forței pe distanța AB, din $A\,(x_A, y_A, z_A)$ în $B\,(x_B, y_B, z_B)$, se scrie:

$$\vec{d} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j} + (z_B - z_A)\,\vec{k} \tag{1}$$

iar $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$, care în cazul nostru, având $A\,(7, 12)$ şi $B\,(13, 4)$ (m), devine

$$\vec{d} = (13 - 7)\,\vec{i} + (4 - 12)\,\vec{j} = 6\vec{i} - 8\vec{j} \text{ (m).} \tag{1′}$$

Lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ pentru a-şi deplasa punctul de aplicație pe distanța $\vec{d}$ este:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d} = (4\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot (6\vec{i} - 8\vec{j}) = 24\,\vec{i} \cdot \vec{i} + 24\,\vec{j} \cdot \vec{j} = 48 \text{ (J).} \tag{2}$$

Calculăm unghiul $(\vec{F}, \vec{d})$, format de direcția forței cu direcția deplasării. Astfel, conform teoriei produsului scalar

$$\cos\,(\vec{F}, \vec{d}) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{Fd}, \tag{3}$$

unde $F = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ (N), $d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ (m), şi vom obține $\cos\,(\vec{F}, \vec{d}) = \dfrac{48}{5 \cdot 10} = 0{,}96$, adică

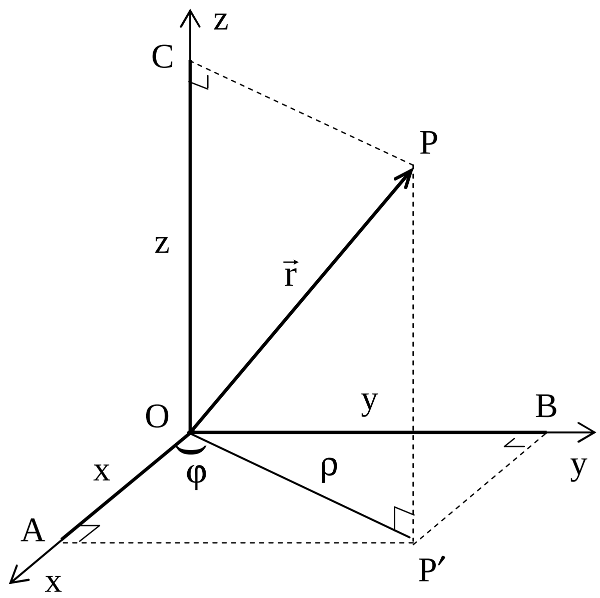
$$(\vec{F}, \vec{d}) = \arccos\ 0{,}96\,. \tag{4}$$

Problema II.9

Să se stabilească expresia modulului vectorului viteză în coordonate polare plane (ρ, φ) şi în coordonate cilindrice (ρ, φ, z).

R:

În coordonate polare plane, poziția în spațiu a unui punct P' situat în planul xOy se poate defini prin: distanța $\rho = OP'$ şi unghiul φ (dintre



axa Ox şi ρ).

Scriem modulul vectorului viteză:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,.$$

În coordonate polare, în planul xOy, în triunghiul dreptunghic OAP′:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \tag{1}$$

cu $0 \le \rho < \infty$; $0 \le \varphi < 2\pi$, unde φ este numit şi unghi polar. Ambele coordonate polare plane sunt funcţii de timp, $\rho = \rho(t)$ şi $\varphi = \varphi(t)$.

Se vor calcula derivatele de ordinul întâi în raport cu timpul ale coordonatelor x şi y, date prin relaţiile (1).

Astfel, vom avea

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\,\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\,\dot{\varphi}\cos\varphi\,. \tag{2}$$

Ridicând la pătrat fiecare dintre relaţiile (2), obţinem

$$\dot{x}^2 = \dot{\rho}^2\cos^2\varphi - 2\rho\,\dot{\rho}\,\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi \tag{3}$$

$$\dot{y}^2 = \dot{\rho}^2\sin^2\varphi + 2\rho\,\dot{\rho}\,\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi\,. \tag{4}$$

Însumăm relaţiile (3) şi (4), simplificăm şi, aplicând formula fundamentală a trigonometriei $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, rezultă

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2, \tag{5}$$

deci

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2}\,. \tag{6}$$

Sistemul de coordonate cilindrice reprezintă o combinaţie între sistemul de coordonate polare plane ρ, φ şi coordonata carteziană z.

În coordonate cilindrice, poziţia în spaţiu a unui punct P poate fi definită prin: proiecţia ortogonală $\rho = OP'$ a razei vectoare $\vec{r}$ în planul xOy, unghiul φ (dintre axa Ox şi ρ) şi cota z.

În consecinţă, pentru aflarea expresiei modulului vectorului viteză în coordonate ρ, φ, z utilizăm calculul realizat anterior pentru primele două coordonate. Ţinând seama şi de cea de-a treia coordonată, z, a cărei derivată în raport cu timpul, ridicată la pătrat este $\dot{z}^2$, obţinem

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\,. \tag{7}$$

Prin urmare, am aflat

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2} \tag{8}$$

iar considerând versorii $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\varphi$, $\vec{k}$ reciproc perpendiculari (similar relaţiei $\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$) putem scrie:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi + \dot{z}\vec{k}\,. \tag{9}$$

Problema II.10

Să se stabilească expresia modulului vectorului viteză în coordonate sferice (r, θ, φ).

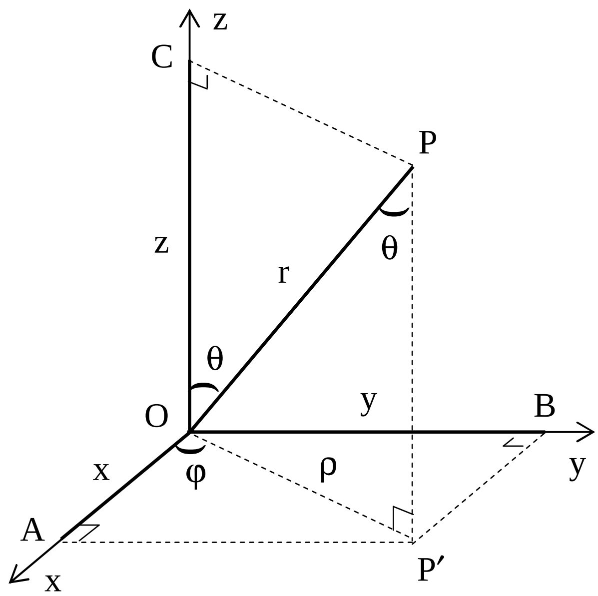
R:

În coordonate sferice, poziția în spațiu a unui punct P se poate defini prin: distanța $r = |\vec{r}| = OP$, unghiul θ (latitudine), între axa Oz şi raza vectoare $\vec{r}$, şi unghiul φ (longitudine) între axa Ox şi proiecția ortogonală OP' a razei vectoare în planul xOy.

Modulul vectorului viteză este: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.

În coordonate polare, în planul xOy, în triunghiul dreptunghic $\Delta OAP'$ aplicăm funcțiile trigonometrice sin şi cos şi astfel avem

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \qquad (1)$$



apoi în spațiu, în triunghiul dreptunghic $\Delta OP'P$, procedând similar,

$$\begin{cases} \rho = r \sin \theta \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \qquad (2)$$

Din (1) şi (2), rezultă

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \qquad (3)$$

cu $0 \le r < \infty$; $0 \le \theta \le \pi$ şi $0 \le \varphi < 2\pi$.

Calculăm derivatele în raport cu timpul ale x, y, z, date în relațiile (3)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r\,\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r \sin \theta\, \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r\,\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r \sin \theta\, \dot{\varphi} \cos \varphi \qquad (4) \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \theta - r\,\dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned}$$

Ridicând la pătrat fiecare dintre relațiile (4), obținem $\dot{x}^2$, $\dot{y}^2$ şi $\dot{z}^2$. Însumându-le, utilizând formula fundamentală a trigonometriei, scrisă în general $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, şi simplificând, aflăm

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta\, \dot{\varphi}^2, \qquad (5)$$

deci rezultă

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta\, \dot{\varphi}^2} \qquad (6)$$

iar considerând versorii $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$ ce formează un triedru ortogonal drept scriem relația vectorială:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi . \tag{7}$$

Problema II.11

Să se deducă expresia energiei cinetice a unui punct material de masă m, în coordonate carteziene, polare plane, cilindrice, sferice.

R:

Formula energiei cinetice a unui punct material de masă m aflat în mişcare de translație cu viteza v este:

$$T = \frac{m}{2} v^2 . \tag{1}$$

Utilizând relațiile pentru v^2 calculate anterior, găsim expresia energiei cinetice,

- în coordonate carteziene (x, y, z), cu $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$,

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); \tag{2}$$

- în coordonate polare plane (ρ, φ), cu $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$,

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2); \tag{3}$$

- în coordonate cilindrice (ρ, φ, z), cu $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$,

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2); \tag{4}$$

- în coordonate sferice (r, θ, φ), cu $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2$,

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2). \tag{5}$$

Problema II.12

Să se găsească expresia momentului cinetic al unui punct material în coordonate polare plane (ρ, φ).

R:

Momentul cinetic al unui punct material de masă m față de un pol O este dat de relația:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} , \tag{1}$$

în care $\vec{r}$ este vectorul de poziție şi $\vec{p}$ vectorul impuls al punctului material.

Întrucât

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k},$$
cu
$$\vec{p} = m\vec{v} = m(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) = m\dot{x}\vec{i} + m\dot{y}\vec{j} + m\dot{z}\vec{k},$$
scriem
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} =$$
$$= m(y\dot{z} - z\dot{y})\vec{i} + m(z\dot{x} - x\dot{z})\vec{j} + m(x\dot{y} - y\dot{x})\vec{k} =$$
$$= L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k}. \qquad (2)$$

În coordonate polare plane, avem
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$
deci derivatele de ordinul întâi în raport cu timpul ale coordonatelor x şi y, date de relațiile anterioare
$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi$$
$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi,$$
precum şi
$$z = 0, \quad \dot{z} = 0,$$
ceea ce implică
$$L_x = L_y = 0 \quad \text{şi} \quad \vec{L} = L_z \vec{k}. \qquad (3)\ (4)$$

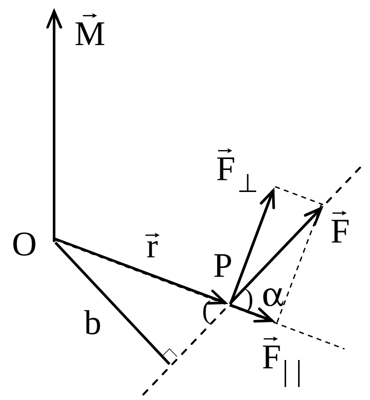
Prin urmare,
$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) =$$
$$= m[\rho \cos \varphi (\dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi) - \rho \sin \varphi (\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi)]$$
iar în urma calculelor, simplificând şi utilizând formula $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, rezultă
$$L_z = m\rho^2 \dot{\varphi}$$
şi astfel
$$\vec{L} = m\rho^2 \dot{\varphi}\, \vec{k}. \qquad (5)$$

Problema II.13

O forță $\vec{F} = 30\vec{i} + 40\vec{j}$ (N) acționează asupra unei particule situate în punctul definit prin vectorul de poziție $\vec{r} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$ (m). Să se calculeze: a.) momentul forței în raport cu originea sistemului de axe de coordonate; b.) brațul forței; c.) componenta forței perpendiculară pe vectorul de poziție.

R:

a.) Momentul forței în raport cu un pol – originea O a sistemului de axe de coordonate este, prin definiție, produsul vectorial dintre vectorul de poziție $\vec{r}$ al punctului de aplicație al forței şi vectorul forță $\vec{F}$:



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad (1)$$

unde

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad (2)$$

dar potrivit enunțului problemei $\vec{r} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$, adică $x = 8;\ y = 6;\ z = 0\ (\mathrm{m})$, iar

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, \qquad (3)$$

dar cum $\vec{F} = 30\vec{i} + 40\vec{j}$, identificăm $F_x = 30;\ F_y = 40;\ F_z = 0\ (\mathrm{N})$.

Prin urmare, scriem

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 6 & 0 \\ 30 & 40 & 0 \end{vmatrix} = (8 \cdot 40 - 6 \cdot 30)\,\vec{k} = 140\,\vec{k}. \qquad (4)$$

Modulul momentului forței va fi

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin(\vec{r}, \vec{F})$$

sau scris

$$M = r F \sin\alpha, \qquad (5)$$

relație în care $b = r \sin\alpha$ reprezintă brațul forței, iar $F_\perp = F \sin\alpha$ este componenta perpendiculară pe $\vec{r}$ a vectorului forță $\vec{F}$, şi deci avem

$$M = b F = r F_\perp. \qquad (6)$$

Deoarece $\vec{M} = 140\,\vec{k}$, modulul momentului forței este

$$|\vec{M}| = M = 140\ \mathrm{N \cdot m}. \qquad (7)$$

Întrucât $\vec{F} = 30\vec{i} + 40\vec{j}$, potrivit teoremei lui Pitagora,

$$|\vec{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 50\ \mathrm{N} \qquad (8)$$

şi, de asemenea, cum $\vec{r} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$, aflăm

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = 10\ \mathrm{m}. \qquad (9)$$

b.) Utilizând relația (6), rezultă

$$b = \frac{M}{F} = \frac{M}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \qquad (10)$$

iar conform relațiilor (7) şi (8) găsim b = 2,8 m.

c.) Componenta perpendiculară pe $\vec{r}$ a vectorului forță $\vec{F}$ este

$$F_{\perp} = \frac{M}{r} = \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{11}$$

din care, înlocuind valorile numerice date de relațiile (7) şi (9), vom obține $F_{\perp} = 14\ N$.

Problema II.14

O particulă se deplasează în planul xOy sub acțiunea unei forțe $\vec{F} = (y^2 - x^2)\,\vec{i} + 3xy\,\vec{j}$. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de această forță între punctele $O\,(0, 0)$ şi $A\,(2, 4)$ de-a lungul unui segment de dreaptă OA, când $y = 2x$, respectiv pe o porțiune de parabolă, $y = x^2$, limitată de punctele O şi A, şi să se spună dacă $\vec{F}$ este o forță conservativă.

R:

Scriem expresia lucrului mecanic:

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}\,, \tag{1}$$

în general, lucrul mecanic elementar efectuat de forța $\vec{F}$ pentru a-şi deplasa punctul de aplicație pe distanța $d\vec{r}$ fiind

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j}) \cdot (dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}) = F_x\,dx + F_y\,dy\,,$$

întrucât $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, respectiv $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$, şi prin urmare avem

$$\delta L_{12} = F_x\,dx + F_y\,dy = (y^2 - x^2)\,dx + 3xy\,dy\,. \tag{2}$$

În primul caz, integrăm de-a lungul dreptei ce trece prin punctele O şi A. Astfel, cu $y = 2x$,

$$L_{OA1} = \int_{0,0}^{2,4} (y^2 - x^2)\,dx + \int_{0,0}^{2,4} 3xy\,dy = \int_0^2 (4x^2 - x^2)\,dx - \int_0^4 \frac{3}{2}\,y^2\,dy \tag{3}$$

sau

$$L_{OA1} = 3\int_0^2 x^2\,dx - \frac{3}{2}\int_0^4 y^2\,dy$$

şi găsim

$$L_{OA1} = x^3 \Big|_0^2 + \frac{1}{2}\,y^3 \Big|_0^4 = 40\ J\,. \tag{4}$$

În cel de-al doilea caz, calculăm integrala de-a lungul porțiunii OA a parabolei $y = x^2$. Scriind

$$L_{OA2} = \int_0^2 (x^4 - x^2)\,dx + \int_0^2 3x^3\,(2x\,dx) = \int_0^2 (x^4 - x^2 + 6x^4)\,dx \qquad (5)$$

sau

$$L_{OA2} = \int_0^2 (7x^4 - x^2)\,dx\,,$$

vom obține

$$L_{OA2} = \frac{7}{5}x^5\Big|_0^2 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = 42{,}13\,\mathrm{J}\,. \qquad (6)$$

În consecință, valoarea lucrului mecanic diferă în cele două cazuri ($L_{OA1} \neq L_{OA2}$) şi deci lucrului mecanic depinde de drumul parcurs de particula care se deplasează între punctele O şi A, iar drept urmare $\vec{F}$ nu este o forță conservativă.