INTEGRALE DUBLE

- **Să se reprezinte grafic următoarele domenii (determinând și coordonatele punctelor de intersecție):**

1. D este domeniul mărginit de parabolele $y = x^2$ și $y^2 = x$

2. D este domeniul mărginit de dreptele $x = 2$, $y = x$ și hiperbola $xy = 1$

3. D este domeniul mărginit de curbele $y = 0$, $x + y - 6 = 0$, $y^2 = 8x$

4. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le 2y\right\}$

5. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le x, y \ge 0\right\}$

6. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le 2x + 2y - 1\right\}$

<u>Indicație</u>: La domeniile 4 – 6 se fac artificii pentru a ajunge la ecuații de cerc, cu centrul diferit de origine.

- **Să se calculeze următoarele integrale duble** $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$**, cu reprezentare grafică a lui** D**:**

7. $D = [0,1] \times [2,3]$ **,** $f(x, y) = xy^2$ **.**

8. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le 1, 2x \le y \le x^2 + 1\right\}$, $f(x, y) = x$; Calculați și $aria(D)$.

9. D este domeniul mărginit de curbele $y = x$ și $y = x^2$, $f(x, y) = 3x - y + 2$;
Calculați și $aria(D)$.

10. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le a^2,\ a > 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$, $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

11. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le a^2,\ 0 \le \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3}\right\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

12. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 2 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x + y \ge 0\right\}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

13. D este domeniul mărginit de curbele $y = x^2 + 1$, $y = -x^2$, $x = -1$, $x = 3$, $f(x, y) = x + 3y$

14. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le 1\right\}$, $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$; Calculați și $aria(D)$.

15. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le x,\ y \ge 0\right\}$, $f(x, y) = xy$; Calculați și $aria(D)$.

16. D este domeniul mărginit de curbele $x^2 + y^2 = e^2$, $y = x\sqrt{3}$, $x = y\sqrt{3}$, $x \ge 0$,
$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$.

17. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0,\ y\ge 0\}$, $f(x,y)=e^{-2(x^2+y^2)}$.

18. Calculați $aria(D)$, unde D este domeniul situat în interiorul curbei de ecuație:
$(x-2y+3)^2+(3x+4y-1)^2=100$ (*fără reprezentare grafică*).

Indicații și soluții:

7. $D=[0,1]\times[2,3]$, $\iint\limits_D f=\int_0^1\left(\int_2^3 xy^2dy\right)dx=(...)=\frac{19}{6}$.

8. D este intergrafic, $\iint\limits_D f=\int_0^1\left(\int_{2x}^{x^2+1} xdy\right)dx=(...)=\frac{1}{12}$; $aria(D)=\int_0^1\left(x^2+1-2x\right)dx=\frac{1}{3}$.

9. D este intergrafic (se reprezintă grafic), $\iint\limits_D f=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x}(3x-y+2)dy\right)dx=(...)=\frac{31}{60}$;
$aria(D)=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\frac{1}{6}$.

10. Se reprezintă grafic D, apoi se trece la coordonate polare: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, domeniul de integrare devine de tip dreptunghi cu $r\in[0,a]$ și $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ iar jacobianul este $J(r,t)=r$; Obținem
$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^a \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}dr\right)dt=(...)=\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{1+a^2}-1\right)$.

11. Se reprezintă grafic D, apoi se trece la coordonate polare: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, domeniul de integrare devine de tip dreptunghi cu $r\in[0,a]$ și $t\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ iar jacobianul este $J(r,t)=r$; Obținem
$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_0^a r^3dr\right)dt=(...)=\frac{a^4\pi}{24}$.

12. Se reprezintă grafic D, apoi se trece la coordonate polare: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, domeniul de integrare devine de tip dreptunghi cu $r\in\left[\sqrt{2},2\right]$ și $t\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ iar jacobianul este $J(r,t)=r$;
Obținem $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\int_{\sqrt{2}}^2 r^2dr\right)dt=(...)=\frac{\pi}{3}\left(8-2\sqrt{2}\right)$.

13. D este integrafic cu $x\in[-1,3]$ și $-x^2\le y\le x^2+1$; $\iint\limits_D f=\int_{-1}^3\left(\int_{-x^2}^{x^2+1}(x+3y)\,dy\right)dx=(...)=68$.

14. Schimbare de variabilă cu coordonate polare: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, domeniul de integrare devine de tip dreptunghi cu $r\in[0,1]$ și $t\in[0,2\pi)$ iar jacobianul este $J(r,t)=r$; Obținem
$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dx\,dy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r\cdot e^{r^2}dr\right)dt=(...)=\pi(e-1)$; $aria(D)$= aria unui cerc centrat în origine, de rază 1, deci $aria(D)=\pi$.

15. Schimbare de variabilă $x=\frac{1}{2}+r\cos t$, $y=r\sin t$, domeniul de integrare devine de tip dreptunghi cu $r\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ și $t\in[0,\pi]$ iar jacobianul este $J(r,t)=r$; Obținem:

$\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(r^2\sin t\cos t+\frac{1}{2}r\sin t\right)\cdot r dr\right)dt=(...)=\frac{1}{24}$; Conform reprezentării grafice, $aria(D)$ = aria unui semi-cerc centrat în $\left(\frac{1}{2},0\right)$, de rază $\frac{1}{2}$, deci $aria(D)=\frac{\pi}{8}$.

16. Schimbare de variabilă cu coordonate polare: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, domeniul de integrare devine de tip dreptunghi cu $r\in[0,e]$ și $t\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ iar jacobianul este $J(r,t)=r$; Obținem:

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}\int_0^e 2r\ln\left(1+r^2\right)dr\right)dt=(...)=\frac{\pi}{12}\left(1+e^2\right)\left[\ln\left(1+e^2\right)-1\right]+\frac{\pi}{12}.$$

17. Schimbare de variabilă cu coordonate polare: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, domeniul de integrare devine de tip dreptunghi cu $r\in[0,+\infty)$ și $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ iar jacobianul este $J(r,t)=r$; Obținem:

$I=\iint\limits_D e^{-2\left(x^2+y^2\right)}dx\,dy=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2r^2}r\,dt\right)dr=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}e^{-2r^2}r dr$; Deoarece $\left(e^{-2r^2}\right)'=-4r\,e^{-2r^2}$, vom avea: $I=-\frac{\pi}{8}e^{-2r^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{8}$.

18. Schimbare de variabilă datorată formei ecuației curbei: $x-2y=u$, $3x+4y=v$, domeniul de integrare devine $D^*=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,(u+3)^2+(v-1)^2\le 100\right\}$, adică interiorul unui cerc de centru $(-3,1)$ și rază 10. Din schimbarea de variabilă făcută obținem $x=\frac{2}{5}u+\frac{1}{5}v$ și respectiv $y=-\frac{3}{10}u+\frac{1}{10}v$ iar jacobianul este $J^*(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10}\end{vmatrix}=\frac{1}{10}$ și astfel $aria(D)=\frac{1}{10}\iint\limits_{D^*}du\,dv$. Pentru a rezolva această integrală dublă pe domeniul $D^*=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,(u+3)^2+(v-1)^2\le 100\right\}$, trecem la coordonate polare cu $u+3=r\cos t$, $v-1=r\sin t$, domeniul de integrare devine de tip dreptunghi cu $r\in[0,10]$ și $t\in[0,2\pi)$ iar jacobianul este $J(r,t)=r$. Obținem:

$$aria(D)=\frac{1}{10}\iint\limits_{D^*}du\,dv=\frac{1}{10}\int_0^{10}\left(\int_0^{2\pi}r\,dt\right)dr=\frac{2\pi}{10}\int_0^{10}r dr=10\pi.$$