Capitolul 3

Analiză complexă

1.1. Numere complexe. Funcții complexe. Cauchy-Riemann

1.1.1. Numere complexe.

Forma algebrică a unui număr complex.

$$z = x + jy$$

unde: $j^2 = -1$, $j = \sqrt{-1}$ ~ unitatea imaginară

$x, y \in \mathbb{R}$ cu $x = \operatorname{Re} z \leftarrow$ partea reală a lui z

$y = \operatorname{Im} z \leftarrow$ partea imaginară

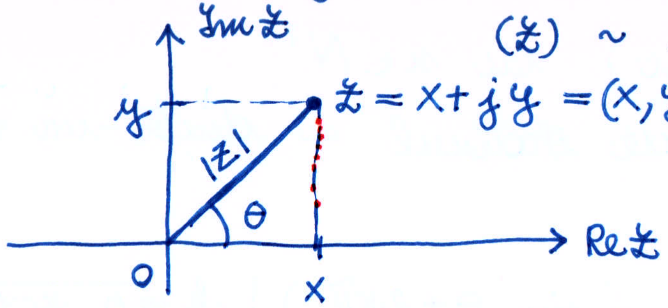
Se definesc: $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$\bar{z} = x - jy \leftarrow$ conjugatul numărului complex

Reprezentarea geometrică a numerelor complexe

(z) ~ planul complex $z : (xOy)$



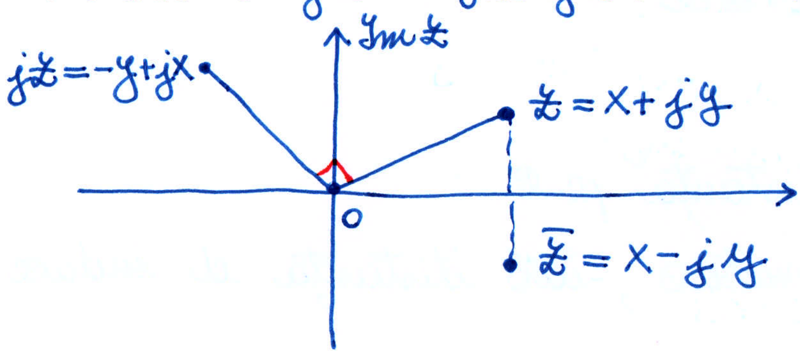
· Modulul unui număr complex: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

· Argumentul redus al unui nr. complex: $\arg z = \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$.

$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

De unde: $z = |z|(\cos\theta + j\sin\theta) \longrightarrow$ forma polară (trigonometrică) a nr. complex.

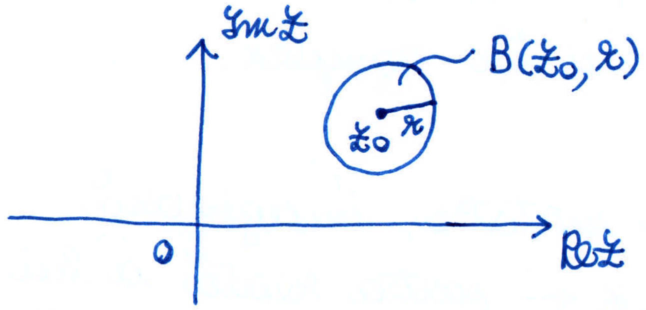
· Notăm $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.



Avem reprezentările uzuale:

Definim: $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ ~ distanța de la z_1 la z_2

• $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$, $r>0$ ~ discul centrat în z_0, de rază r
$z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$.



• Fie $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in [0, +\infty)$, $R \in (0, +\infty]$. Definim:
$B(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ ~ coroana circulară centrată în z_0, de rază interioară r și rază exterioară R.

Formula lui Moivre
$z^n = |z|^n (\cos n\theta + j \sin n\theta)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$
Extragerea radicalului de ordinul n dintr-un număr complex
$$\sqrt[n]{z} \in \left\{ \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \mid k = \overline{0, n-1} \right\}$$
Ecuația de gradul 2 în complex.
$az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ are soluțiile
$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
Punctul fictiv ∞ îl numim infinitul complex.
Definim: $z + \infty = \infty$, $z - \infty = \infty$, $\frac{z}{0} = \infty$ cu $z \in \mathbb{C}^*$,
$\frac{z}{\infty} = 0$ și $\infty \cdot \infty = \infty$.

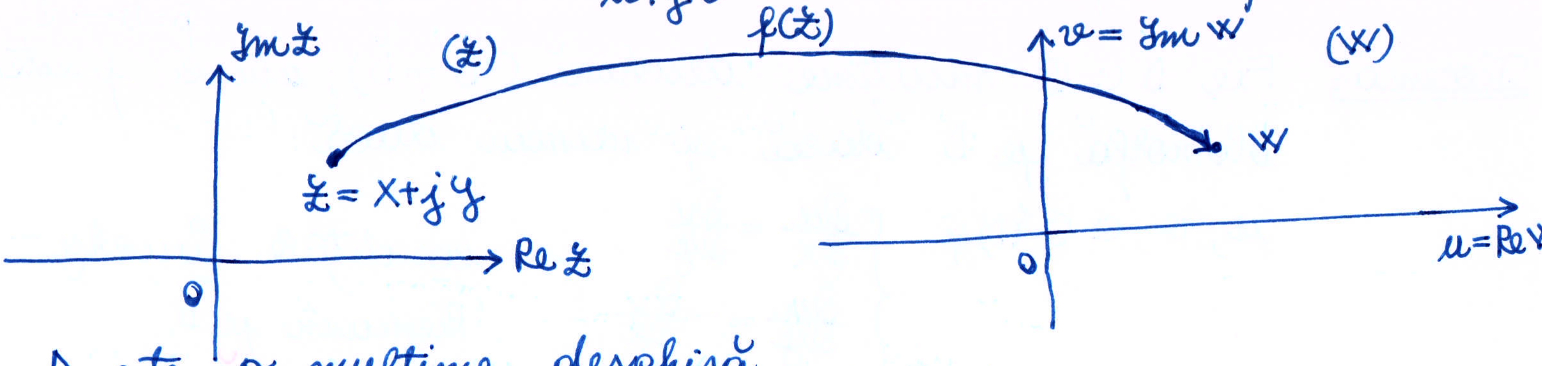
<u>Topologia pe $\mathbb{C}$.</u>

· $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ este distanța pe $\mathbb{C}$
· $(\mathbb{C}, d)$ se numește spațiu metric, iar distanța d induce o topologie pe $\mathbb{C}$.

- $D \subset \mathbb{C}$ se numește <u>mulțime deschisă</u> dacă pentru orice $z_0 \in D$ există un număr real strict pozitiv r astfel încât $B(z_0, r) \subset D$.
- A se numește <u>mulțime închisă</u> dacă are complementara mulțime deschisă.
- M se numește <u>mulțime convexă</u> dacă pentru orice $z_1, z_2 \in M$ există un arc de curbă netedă ce leagă z_1 z_2 și este conținut în M.
- D se numește simplu conexă dacă: orice curbă închisă conținută în D se poate deforma continuu până la un punct care aparține mulțimii.

1.1.2. <u>Funcții complexe de variabilă complexă</u>.

Fie $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\underset{u+jv}{\underset{\parallel}{w}} = f(z) = f(x+jy) = \underbrace{u(x,y)}_{\operatorname{Re} f(z)} + j\,\underbrace{v(x,y)}_{\operatorname{Im} f(z)}$



D este o mulțime deschisă.

<u>Definiție</u>. $f: D = \mathring{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ se numește funcție continuă în $z_0 = x_0 + jy_0$ dacă funcțiile $u, v: D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sînt continue în (x_0, y_0). Avem:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + j \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) =$$
$$= u(x_0,y_0) + j\,v(x_0,y_0) = f(z_0).$$

<u>Definiție</u>. f este <u>derivabilă</u> în $z_0 \in D$ ~ mulțime deschisă dacă există $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$.

<u>Observație</u>. Regulile de derivare din real se păstrează și în complex.

Teorema Cauchy-Riemann

Fie $D \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $z_0 \in D$, $f: D \to \mathbb{C}$ cu $f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$. Atunci:

f este derivabilă în $z_0 = x_0 + j y_0$ dacă și numai dacă u și v sînt diferențiabile în (x_0, y_0) și sînt îndeplinite condițiile Cauchy-Riemann în (x_0, y_0)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \end{cases}$$

În plus, $f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + j\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{1}{j}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + j\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$.

Definiție. $f: \overset{\circ}{D} = D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se numește funcție __olomorfă__ pe D dacă f este derivabilă în orice punct al lui D.

Teoremă. Fie $D \subset \mathbb{C}$ mulțime deschisă ($D = \overset{\circ}{D}$); atunci $f: D \to \mathbb{C}$ este olomorfă pe D dacă și numai dacă:

$u, v \in C^1(D)$ și $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ ← condițiile Cauchy-Riemann pe D.

Corolar. $f: D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$ olomorfă astfel încît u și v sînt funcții de clasă C^2 pe D. Atunci:

i) $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ și $\Delta v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ pe D. Adică u și v sînt funcții __armonice__ pe D.

ii) funcția f este __indefinit derivabilă__ pe D (are derivate de orice ordin).

Aplicație.

Să se găsească funcția $f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$ olomorfă dacă $u(x,y) = x^3 y - x y^3$ și $f(0) = 0$.

Soluție: Întâi arătăm că $\Delta u = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y - y^3 \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 3xy^2 \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6xy$$

$$\Delta u = 0.$$

Există atunci $v(x,y)$ astfel încât u și v satisfac condițiile Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3xy^2 - x^3 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y - y^3 \quad (*) \end{cases} \longrightarrow v(x,y) = \int (3xy^2 - x^3)\,dx = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{x^4}{4} + a(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2y + a'(y) \overset{*}{=} 3x^2y - y^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a'(y) = -y^3 \rightarrow \boxed{a(y) = -\frac{y^4}{4} + K}$$

K constantă reală

deci: $v(x,y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4} + K$

$$f(z) = u(x,y) + jv(x,y) = x^3y - xy^3 + j\left(\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4} + K\right) = \frac{1}{4}(4x^3y - 4xy^3 + j(6x^2y^2 - x^4 - y^4)) + jK$$

$$= \frac{j}{4}(x^2 + 2jxy - y^2)^2 + jK = \frac{j}{4}(x+jy)^4 + jK$$

$$= \frac{j}{4} \cdot z^4 + jK.$$

din $f(0) = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow \boxed{f(z) = \frac{j}{4}z^4}$ $z \in \mathbb{C}$.

1.2. Funcții complexe elementare.

1.2.1. Funcția exponențială

$f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$

- $$e^{jy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + j\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \cos y + j \sin y$$

$$f(z) = e^z = e^{x+jy} = e^x(\cos y + j\sin y) \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \longrightarrow$$ f olomorfă pe $\mathbb{C}$ și

$$f'(z) = u_x + jv_x = e^x(\cos y + j\sin y) = e^z \Rightarrow (e^z)' = e^z, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

- $e^{z+2\pi j} = e^x[\cos(y+2\pi) + j\sin(y+2\pi)] = e^x(\cos y + j\sin y)$
$= e^z, \forall z \in \mathbb{C}$

Deci $f(z) = e^z$ are perioada $T = 2\pi j$.

Avem formula lui Euler:

$$e^{jz} = \cos z + j\sin z, (\forall) z \in \mathbb{C}.$$

2. Funcții circulare

$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{jz} - e^{-jz})$ $\quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz})$

$\sin z = 0 \Rightarrow z_K = 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$; $\cos z = 0 \Rightarrow z_K = (2K+1)\frac{\pi}{2}$, $K \in \mathbb{Z}$

Ambele sînt olomorfe și au perioada $T = 2\pi$.

$tg z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $ctg z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

Formulele trigonometrice din real rămîn valabile și în complex.

3. Funcții hiperbolice

$ch z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $sh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ $\quad \forall z \in \mathbb{C}$

- Sînt olomorfe, periodice cu $T = 2\pi j$.
- Zerourile: pentru $ch z$ sînt $z_K = (2K+1)\frac{\pi}{2} j$, $K \in \mathbb{Z}$
pentru $sh z$ sînt $z_K = K\pi j$, $K \in \mathbb{Z}$.

Formule:
$$sh(z_1 \pm z_2) = sh z_1\, ch z_2 \pm sh z_2\, ch z_1$$
$$ch(z_1 \pm z_2) = ch z_1\, ch z_2 \pm sh z_1\, sh z_2$$
$$sh(-z) = -sh z, \quad ch(-z) = ch z$$
$$ch^2 z - sh^2 z = 1$$
$$\frac{sh z}{ch z} = th z, \quad ctg z = \frac{ch z}{sh z}.$$

4. Funcția logaritm Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid Re\, z \leq 0\}$.

- $\ln z = \ln|z| + j\arg z + j2K\pi$, $K \in \mathbb{Z}$ s.n. ramuri uniforme
- $\ln z = \ln|z| + j\arg z$ = ramura principală

$$f(z)=\ln|z|+j\arg z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+j\,\mathrm{arctg}(y/x) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ v(x,y)=\mathrm{arctg}(y/x)\end{array}\right| \to \left.\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial x}=u_x=\frac{x}{x^2+y^2} \\ v_y=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}\end{array}\right| \Rightarrow u_x=v_y$$

$$\cdot\ \left.\begin{array}{l} u_y=\frac{y}{x^2+y^2} \\ v_x=\frac{-y/x^2}{1+\frac{y^2}{x^2}}=-\frac{y}{x^2+y^2}\end{array}\right| \Rightarrow u_y=-v_x$$

Condițiile Cauchy-Riemann implică olomorfia ramurii principale a logaritmului complex.

$$f'(z)=(\ln z)'=u_x+j\,v_x=\frac{x-jy}{x^2+y^2}=\frac{1}{x+jy}=\frac{1}{z},\quad \forall z\in\mathbb{C}^*$$

⑤ <u>Funcția polinomială</u>

$A(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots+a_nz^n$ cu $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$

este olomorfă

$$A'(z)=a_1+2a_2z+\dots+na_nz^{n-1}$$

⑥ <u>Funcția rațională</u>

$f(z)=\frac{A(z)}{B(z)}$, $B(z)=b_0+b_1z+\dots+b_mz^m$, grad $A<$ grad B

$z\in\mathbb{C}\setminus\{$rădăcinile lui $B(z)\}$.

$$f'(z)=\frac{A'(z)\cdot B(z)-A(z)\cdot B'(z)}{B^2(z)}.$$

<u>Obs.</u> $z=r(\cos\theta+j\sin\theta)=|z|\cdot e^{j\theta}$ ← formă exponențială

$r=|z|$, $\theta=\arg z$.

$f(z)=e^{jz}$ are perioada $T=2\pi$.

$e^{2\pi j}=1$, $e^{\pi j}=-1$, $e^{-\pi j}=-1$, $e^{\frac{\pi}{2}j}=j$, $e^{-\frac{\pi}{2}j}=-j$

$\cdot\ f(z)=e^{j(a+jb)}=e^{-b}\cos a+j\,e^{-b}\sin a$

$\cdot\ |f(z)|=e^{-b}=e^{-\mathrm{Im}\,z}$

$\cdot\ |e^{j\theta}|=|\cos\theta+j\sin\theta|=1,\quad\forall\theta\in\mathbb{R}.$

1.3. Integrare complexă

$f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, D domeniu simplu conex, f funcție complexă și $\gamma: [a,b] \to D$, $\gamma(t) = x(t) + j\,y(t)$ drum neted sau neted pe porțiuni. Fie C reprezentarea drumului γ. Definim:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot \gamma'(t)\,dt, \quad \text{unde } \gamma'(t) = x'(t) + j\,y'(t).$$

Dacă γ este drum închis sau curbă închisă (<u>contur</u>) scriem $\oint_C f(z)\,dz$.

$\boxed{\text{Obs.}}$ D se numește domeniu simplu conex dacă frontiera lui D este curbă închisă, simplă, fără autointersecții.

Formula integrală a lui Cauchy (FIC)

$f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfă pe D, D domeniu simplu conex.

Fie $z_0 \in D$ arbitrar fixat. Atunci pentru orice contur C din D, neted (pe porțiuni), care conține pe z_0 în interior avem:

$$\oint_C f(z)\cdot \frac{1}{z - z_0}\,dz = 2\pi j\, f(z_0).$$

Se generalizează: $\oint_C f(z)\cdot \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi j}{n!}\cdot f^{(n)}(z_0)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

1.4. Serii Taylor. Serii Laurent.

Teorema Taylor.

Fie $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, D mulțime deschisă. Atunci f este olomorfă pe D $\Leftrightarrow$ f este analitică pe D, adică $\forall\, z_0 \in D$ arbitrar fixat, există $r > 0$ astfel încât $B(z_0, r) \subset D$ și

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot (z - z_0)^n, \quad \forall\, z \in B(z_0, r)$$

• Seria reprezintă seria Taylor a lui f(z) în jurul lui z_0

Serii Taylor uzuale.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$; 2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$, $|z| < 1$.

3. $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot z^{n+1} + \dots$, $|z| < 1$.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$; 5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sin z$; $\forall z \in \mathbb{C}$ 6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n} = \cos z$, $\forall z \in \mathbb{C}$; 7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} z$, $\forall z \in \mathbb{C}$; 8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} z$, $\forall z \in \mathbb{C}$; 9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n = (1+z)^\alpha$, $\forall |z| < 1$ și $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$.

Serii Laurent

Def. Seria următoare se numește serie Laurent dacă are forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \dots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots,\quad z_0 \in \mathbb{C} \text{ fixat}$$

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ ~ serie Laurent centrată în z_0
- $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$ ~ partea principală a SL (seriei Laurent).
- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ ~ partea tayloriană

$\boxed{\text{Teoremă.}}$ Fie $f : B(z_0; r, R) \longrightarrow \mathbb{C}$, $r \in [0, +\infty)$ și $R \in (0, +\infty]$.
Funcția f este olomorfă pe $B(z_0; r, R)$ dacă și numai dacă

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \ \forall z \in B(z_0; r, R) \text{ unde:}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\substack{|z-z_0|=\rho \\ \rho \in (r,R)}} f(z) \cdot \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Puncte singulare izolate.

Def. Fie $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Atunci z_0 se numește punct singular izolat pentru f dacă:
f este olomorfă pe $B(z_0; 0, r) = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r \}$ numit discul punctat în z_0 notat prin $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

$\boxed{\text{Obs.}}$ f olomorfă pe $B(z_0; 0, r) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, $\forall z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Avem: $c_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C f(z)\,dz$, cu $C : |z| = \rho$, $\rho \in (r, R$

Clasificarea punctelor singulare izolate

1. z_0 se numește punct singular aparent $\Leftrightarrow$
$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots \Leftrightarrow$
există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ și este finită.

2. z_0 este pol de ordinul $K \geq 1 \Leftrightarrow f(z) = a_{-K} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^K} + \ldots +$
$+ \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots, \quad a_{-K} \neq 0 \Leftrightarrow$ există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^K \cdot f(z)$ există și este egală cu o constantă
nenulă $\Leftrightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^K h(z)}$ unde g și h sînt olomorfe
cu $g(z_0) \neq 0$ și $h(z_0) \neq 0$.

3. z_0 este punct singular esențial $\Leftrightarrow f(z) = \ldots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots$
$\ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_n(z-z_0)^n + \ldots$ cu o infinitate de coeficienți nenuli în partea principală $\Rightarrow$ nu
există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

1.5. Reziduul unei funcții într-un punct singular

Fie z_0 punct singular izolat pentru f, atunci:
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in B(z_0; 0, r).$$
În acest caz, $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) \overset{def.}{=} a_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{\substack{|z-z_0| = \rho \\ 0 < \rho < R}} f(z)\,dz$ și se
numește reziduul lui f în z_0.

Cum se calculează reziduul?

1. z_0 punct singular aparent $\Rightarrow \operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) = 0$.

2. z_0 este pol de ordinul $K \Rightarrow \operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(K-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^K \cdot f(z)\right]^{(K-1)}$

Dacă $f(z) = \frac{P(z)}{(z-z_0)^K Q(z)}$ cu $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) \neq 0$ atunci

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(K-1)!}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}\right]^{(K-1)}_{|z=z_0}.$$

• Dacă z_0 pol de ordinul unu și $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ cu $g(z_0)\neq 0$, $h'(z_0)\neq 0$, atunci: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

3. z_0 este punct singular esențial $\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$ - coeficientul lui $\frac{1}{(z-z_0)}$ din seria Laurent a lui f centrată în z_0.

1.6. Teorema reziduurilor.

Fie $D\subset\mathbb{C}$ domeniu simplu conex, $f: D\to\mathbb{C}$ olomorfă pe $D\setminus\{a_1, a_2,\dots,a_n\}$ ← puncte singular izolate pentru funcția f. Atunci pentru orice contur $C\subset D$, neted, ce include în interior punctele $a_1,\dots,a_n$ avem:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi j\sum_{K=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_K} f(z).$$

Teorema semireziduurilor

$f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ olomorfă pe $D\setminus\{a_1,\dots,a_n, b_1,\dots,b_m\}$ ← puncte singulare izolate. Atunci $(\forall)$ $C\subset D$ contur neted ce include în interior punctele singular izolate $a_1,\dots,a_n$, iar $b_1,\dots,b_m$ sînt poli de ordinul unu situați pe conturul C, avem:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi j\sum_{K=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_K} f(z) + j\sum_{K=1}^{m}\alpha_K\operatorname*{Res}_{z=b_K} f(z),$$ unde α_K este unghiul sub care se vede din b_K conturul C.

Lema lui Jordan.

Fie $f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ continuă pe $D=$ domeniu. Fie $S[\theta_1,\theta_2]$ sectorul de cerc de rază r.

i) Dacă $\lim_{z\to\infty} z\cdot f(z)=0$ atunci $\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz=0$ unde $\gamma_r(\theta)=r\cdot e^{j\theta}$ cu $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$ este arc de cerc.

ii) Dacă $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$ atunci $\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)\cdot e^{i\alpha z}\,dz=0$, cu $\alpha\in\mathbb{R}^*_+$

1.4. Integrale reale calculate cu teorema reziduurilor

1. Integrale improprii

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \quad \text{unde: grad } P + 2 \leq \text{grad } Q, \quad Q \not\equiv 0 \text{ pe } \mathbb{R}.$$

Notăm $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ funcția complexă asociată, este funcție rațională cu un număr finit de poli situați în semiplanul superior notat

$S_{sup} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

Atunci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi j \sum_k \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z), \quad \text{unde: } Q(a_k) = 0, \ \operatorname{Im} a_k > 0$$

$(a_k \in S_{sup})$.

2. Integrale improprii tip Fourier.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \cos \alpha x\, dx = -2\pi \sum_k \operatorname{Im} \operatorname*{Res}_{z=a_k} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \cdot e^{i\alpha z} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \sin \alpha x\, dx = 2\pi \sum_k \operatorname{Re} \operatorname*{Res}_{z=a_k} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \cdot e^{i\alpha z} \right)$$

unde $\text{gr.} P + 1 \leq \text{gr.} Q$, $Q \not\equiv 0$ pe $\mathbb{R}$, $Q(a_k) = 0$, $a_k \in S_{sup}$.

3. $\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$, unde $f(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ este funcție rațională.

Facem substituția $z = e^{j\theta} \Rightarrow d\theta = \frac{1}{jz}\, dz$.

$\sin\theta = \frac{1}{2j}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$.

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{jz} f\left(\frac{z^2-1}{2jz}, \frac{z^2+1}{2z} \right) dz \longrightarrow \text{teorema reziduurilor.}$$

Aplicații

① Folosind teorema reziduurilor calculați:

a) $\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)}dz$ $\quad$ b) $\oint_C \frac{\sin\frac{\pi}{z}}{z^2+1}dz$, $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $b>1$

$C: |z-2+j|=\sqrt{3}$

Soluție: a) $f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)}$ are polii: $z_1=1$ dublu, $z_{2,3}=\pm 2j$ simpli

$|1-2+j|=|-1+j|=\sqrt{2}<\sqrt{3} \Rightarrow z_1=1 \in$ interiorului lui C

$|2j-2+j|=|-2+3j|=\sqrt{13}>\sqrt{3} \Rightarrow z_2=2j \in$ exteriorului lui C

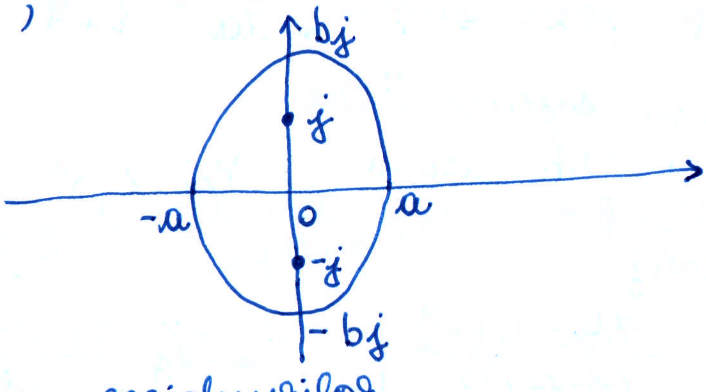
$|-2j-2+j|=|-2-j|=\sqrt{5}>\sqrt{3} \Rightarrow z_3=-2j \in$ exteriorului lui C

Cu teorema reziduurilor avem:

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)}dz = 2\pi j \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi j\cdot\left(\frac{e^z}{z^2+4}\right)'\Big|_{z=1} =$$

$$= 2\pi j\cdot \frac{e^z(z^2+4-2z)}{(z^2+4)^2}\Big|_{z=1} = 2\pi j\cdot\frac{3e}{25}=\frac{6\pi e}{25}j.$$

b) $f(z)=\frac{\sin\frac{\pi}{z}}{z^2+1}$ are polii simpli $z_{1,2}=\pm j$ și $z_3=0$ punct singular esențial.



Cu teorema reziduurilor

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi j \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + 2\pi j \operatorname*{Res}_{z=j} f(z) + 2\pi j \operatorname*{Res}_{z=-j} f(z).$$

Dezvoltăm $f(z)$ în serie Laurent în vecinătatea lui $z=0$

$$f(z)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z^{2n+1}}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m z^{2m}\right]=$$

$$=\sum_{m,n\geq 0}\frac{(-1)^{m+n}}{(2n+1)!}\pi^{2n+1}\cdot z^{2m-2n-1} \underline{\underline{\;p=2m-2n-1,\ p\in\mathbb{Z}\;}}$$

$$=\sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{p+1}{2}+2n}\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot z^p$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^{\frac{p+1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \cdot z^{p} \Rightarrow$$ S.L. are o infinitate de termeni nenuli în partea principală $\Rightarrow z=0$ e punct singular esențial

$\cdot \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = a_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} = sh\pi.$

$\cdot \operatorname{Res}_{z=j} f(z) = \left. \frac{\sin\frac{\pi}{z}}{2\ z} \right|_{z=j} = \frac{1}{2j} \sin\frac{\pi}{j} = \frac{1}{2j}\sin(-\pi j) = -\frac{1}{2j}\sin(\pi j) =$

$= -\frac{j}{2j} \cdot sh\pi = -\frac{1}{2} sh\pi$

$\cdot \operatorname{Res}_{z=-j} f(z) = \left. \frac{\sin\frac{\pi}{z}}{2z} \right|_{z=-j} = -\frac{1}{2j}\sin\frac{\pi}{-j} = -\frac{1}{2j}\sin\pi j = -\frac{1}{2} sh\pi.$

$\oint_{C} f(z)\,dz = 2\pi j\,(sh\pi - \frac{1}{2}sh\pi - \frac{1}{2}sh\pi) = 0.$

② Calculați integralele.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+3}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$; b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx$, $a>0$ și $b>$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^4+1}\,dx$; d) $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$.

Soluție:

a) $f(z) = \frac{z+3}{(z^2-2z+2)^2}$ are polii dubli: $z_{1,2} = 1 \pm j$. Avem $z_1 = 1+j$ aparține semiplanului superior Ssup.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+3}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = 2\pi j \operatorname{Res}_{z=1+j} f(z) = 2\pi j \cdot \lim_{z\to 1+j} \left[(z-1-j)^2 \cdot \frac{z+3}{(z-1-j)^2(z-1+j)^2} \right]' =$$

$$= 2\pi j \left. \frac{z-1+j-2(z+3)}{(z-1+j)^3} \right|_{z=1+j} = 2\pi j \cdot \frac{2j-2-2j-6}{-8j} = 2\pi.$$

b) $f(z) = \frac{e^{j2az} - e^{j2bz}}{z^2} \Rightarrow \lim_{z\to 0} z\cdot f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{j2az} - e^{j2bz}}{z} =$

$= 2j(a-b)$ constantă nenulă $\Rightarrow z=0$ pol real simplu și cu teorema semireziduurilor avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\pi j \operatorname{Res}_{z=0} f(z)\right) = \frac{\pi}{2}\operatorname{Re}\left(j\cdot \lim_{z\to 0} z\cdot f(z)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\operatorname{Re}[j\cdot 2j(a-b)] = \pi(b-a).$$

c) $f(z)=\dfrac{e^{j3z}}{z^4+1}$; $z^4+1=0 \Rightarrow z_k=\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{4}+j\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{4}$

$k\in\{0,1,2,3\}$

$z_0=\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt2}+j\cdot\frac{1}{\sqrt2}$ $\qquad z_0, z_1\in S_{sup}$

$z_1=\cos\frac{3\pi}{4}+j\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt2}+j\cdot\frac{1}{\sqrt2}$ $\qquad z_2, z_3\in S_{inf}$

$z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+j\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt2}-j\cdot\frac{1}{\sqrt2}$

$z_3=\cos\frac{7\pi}{4}+j\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt2}-j\cdot\frac{1}{\sqrt2}$

$$\cdot\ \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{e^{j3z}}{4z^3}\Big|_{z=\frac{1}{\sqrt2}+\frac{j}{\sqrt2}}=\frac{e^{3j\left(\frac{1}{\sqrt2}+\frac{j}{\sqrt2}\right)}}{\frac{4}{2\sqrt2}(1+j)^2(1+j)}=\frac{e^{-\frac{3}{\sqrt2}}}{2\sqrt2}\cdot\frac{e^{\frac{3j}{\sqrt2}}}{-1+j}=$$

$$=\frac{e^{-\frac{3}{\sqrt2}}}{4\sqrt2}\left(\cos\frac{3}{\sqrt2}+j\sin\frac{3}{\sqrt2}\right)(-1-j)\ \Rightarrow$$

$$\operatorname{Im}\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=-\frac{e^{-\frac{3}{\sqrt2}}}{4\sqrt2}\left(\sin\frac{3}{\sqrt2}+\cos\frac{3}{\sqrt2}\right)$$

$$\cdot\cdot\ \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)=\frac{e^{j3z}}{4z^3}\Big|_{z=-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{j}{\sqrt2}}=\frac{e^{j\frac{3}{\sqrt2}(-1+j)}}{\frac{4}{2\sqrt2}(-1+j)(-1+j)^2}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt2}e^{-\frac{3}{\sqrt2}}\cdot\left(\cos\frac{3}{\sqrt2}-j\sin\frac{3}{\sqrt2}\right)(1-j)\ \Rightarrow$$

$$\operatorname{Im}\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)=-\frac{e^{-\frac{3}{\sqrt2}}}{4\sqrt2}\left(\cos\frac{3}{\sqrt2}+\sin\frac{3}{\sqrt2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^4+1}\,dx=-2\pi\left(\operatorname{Im}\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)+\operatorname{Im}\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)\right)=$$

$$=\pi e^{-\frac{3}{\sqrt2}}\left(\frac{1}{\sqrt2}\cos\frac{3}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\sin\frac{3}{\sqrt2}\right)=\pi e^{-\frac{3}{\sqrt2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{\sqrt2}\right)$$

d) $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}\overset{a>0}{=}\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z\left(a+b\frac{z^2+1}{2z}\right)}dz=\frac{2}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{bz^2+2az+b}.$$

$f(z)=\dfrac{1}{bz^2+2az+b}$ are polii: $z_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

Cazul 1. $|a|>|b| \Rightarrow f(z)$ are 2 poli reali distincți

$|-a-\sqrt{a^2-b^2}|>|b| \Leftrightarrow a^2+a^2-b^2+2a\sqrt{a^2-b^2}>b^2 \Leftrightarrow$

$a^2-b^2+2a\sqrt{a^2-b^2}>0$ adevărat $\Rightarrow z_1=\dfrac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\in$ exterior lui lui $|z|=1$.

$|-a+\sqrt{a^2-b^2}|<|b| \Leftrightarrow a^2-2a\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2<b^2$

$2a^2-2b^2-2a\sqrt{a^2-b^2}<0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2-b^2}<a \Leftrightarrow a^2-b^2<a^2$ – adevărat!

$z_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ e pol simplu situat în interiorul lui $|z|=1$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{1}{2bz+2a}\Big|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}} = \frac{1}{-2a+2\sqrt{a^2-b^2}+2a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2}{j} 2\pi j \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

<u>Cazul 2.</u> $a<|b| \Rightarrow f(z)=\frac{1}{bz^2+2az+b}$ are 2 poli complex conjugați,

$z_{1,2} = \frac{-a\pm j\sqrt{b^2-a^2}}{b} \Rightarrow |z_{1,2}| = \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2-a^2}{b^2} = 1$, deci avem 2 poli simpli situați pe cercul unitate.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{2bz+2a}\Big|_{z=\frac{-a+j\sqrt{b^2-a^2}}{b}} = \frac{1}{2j\sqrt{b^2-a^2}} = \frac{-j}{2\sqrt{b^2-a^2}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=\bar{z}_1} f(z) = \overline{\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)} = \frac{j}{2\sqrt{b^2-a^2}}.$$ Cu teorema semireziduurilor avem:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{1}{j}\cdot \pi j \left[\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\bar{z}_1} f(z)\right] = \pi\cdot 0 = 0.$$

<u>Cazul 3.</u> $a=|b| \Rightarrow a=\pm b.$

i) $a=b \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a(1+\cos\theta)} = \frac{1}{a}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{a}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} =$

$= \frac{1}{a}\cdot \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} = +\infty-(-\infty) = +\infty \Rightarrow$ integrala e divergentă

ii) $a=-b \Rightarrow \frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1}{a}\int_0^{\pi}\frac{\frac{1}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta + \frac{1}{a}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\frac{1}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta =$

$= -\frac{1}{a}\cdot \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} = +\infty+\infty=+\infty \Rightarrow$ integrala e divergentă.

$\boxed{\text{Distribuţii}}$

Fie $C_0^\infty(\mathbb{R})$ spaţiul funcţiilor indefinit derivabile şi cu suport compact: $C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ şi $\operatorname{supp}\varphi =$ compact$\}$ unde $\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}}$.

$(C_0^\infty(\mathbb{R}), \mathcal{T})$ unde $\mathcal{T}$ este o topologie pe $C_0^\infty(\mathbb{R})$ se notează prin $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Def. Aplicaţia liniară şi continuă $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ se numeşte distribuţie şi scriem $\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$ unde $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \leftarrow$ spaţiul funcţiilor test.
Se notează prin $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ spaţiul distribuţiilor.

Definiţia distribuţiei regulate

Fie f o funcţie continuă pe porţiuni. Distribuţia T_f indusă de funcţia f prin:
$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt$$
se numeşte distribuţie regulată. În caz contrar, distribuţia se numeşte distribuţie singulară.

Derivata unei distribuţii

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$
T' este tot distribuţie.

O distribuţie este indefinit derivabilă:
$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle$$
pentru orice $k \geq 2$.

Proprietăţi.
i) $\langle aT, \varphi \rangle = a\langle T, \varphi \rangle$ pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$
ii) $\langle T(at), \varphi \rangle = \frac{1}{|a|}\langle T, \varphi(t/a) \rangle$.
iii) $\langle T(t-a), \varphi \rangle = \langle T, \varphi(t+a) \rangle$
iv) $\langle g(t)T(t), \varphi \rangle = \langle T, g(t)\cdot\varphi(t) \rangle$
v) $\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$.
vi) $[f(t)\cdot T(t)]' = f'(t)\cdot T(t) + f(t)\cdot T'(t)$, pentru orice funcţie $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Distribuţia Heaviside

$$\langle H, \varphi \rangle \stackrel{def.}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)\cdot\varphi(t)\,dt = \int_0^\infty \varphi(t)\,dt, \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Distribuţia Dirac

$$\langle \delta, \varphi \rangle \stackrel{def.}{=} \varphi(0)$$

Proprietate. Distribuția δ a lui Dirac este singulară.

Aplicație. $<H', \varphi> = -<H, \varphi'> = -\int_0^\infty \varphi'(t)dt = -\varphi(t)\Big|_0^\infty = \varphi(0) = <\delta, \varphi>$

deoarece: $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Deci: $H' = \delta$.

* Derivata lui $\sigma(t)$ ca distribuție (în sens clasic $\sigma(t)$ nu e derivabilă: $\sigma'(t) = 0$ pentru $t \neq 0$ și $\sigma'(0)$ nu există) este chiar distribuția lui Dirac.

Exerciții.

① Folosind proprietățile distribuțiilor calculați:

a) $t\delta'(t)e^{-5t}$; b) $t\delta^{(3)}(t)$.

Soluție:

a) Fie funcția test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$<t\delta'(t)e^{-5t}, \varphi(t)> = <\delta'(t), te^{-5t}\varphi(t)> =$$
$$= -<\delta(t), (te^{-5t}\varphi(t))'> = -<\delta(t), (e^{-5t} - 5te^{-5t})\varphi(t) +$$
$$+ te^{-5t}\varphi'(t)> = -[(e^{-5\cdot 0} - 5\cdot 0\cdot e^{-5\cdot 0})\varphi(0) + 0\cdot e^{-5\cdot 0}\cdot\varphi'(0)] =$$
$$= -\varphi(0) = -<\delta(t), \varphi(t)> = <-\delta(t), \varphi(t)>$$

de unde avem: $\boxed{t\delta'(t)e^{-5t} = -\delta(t)}$

b) $<t\delta^{(3)}(t), \varphi(t)> = <\delta^{(3)}(t), t\varphi(t)> = (-1)^3 <\delta(t), (t\varphi(t))'''> \overset{*}{=}$

$[t\varphi(t)]' = \varphi(t) + t\varphi'(t)$

$[t\varphi(t)]'' = 2\varphi'(t) + t\varphi''(t)$

$[t\varphi(t)]''' = 2\varphi''(t) + \varphi''(t) + t\varphi'''(t) = 3\varphi''(t) + t\varphi'''(t)$.

$\overset{*}{=} -<\delta(t), 3\varphi''(t) + t\varphi'''(t)> = -3\varphi''(0) = <\delta(t), -3\varphi''(t)> =$

$= <-3\delta''(t), \varphi(t)>$

de unde obținem: $\boxed{t\delta^{3}(t) = -3\delta''(t)}$

② Găsiți coeficienții c_1, c_2, c_3 din relațiile:

a) $e^{-3t}\delta''(3t) = c_1\delta''(t) + c_2\delta'(t) + c_3\delta(t)$

b) $6t^2\delta''(3t+2) = c_1\delta'' \qquad + c_2\delta'(t) + c_3\delta(t)$.

Soluție: a) Avem relația

$$<\delta(at), \varphi(t)> = \frac{1}{|a|} <\delta(t), \varphi(\tfrac{t}{a})>. \quad (*)$$

Se deduce din formula:

$$\boxed{<f(at+b), \varphi(t)> = \int_{-\infty}^{\infty} f(\underbrace{at+b}_{\tau})\cdot\varphi(t)\,dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\varphi(\tfrac{\tau-b}{a})\,d\tau = \frac{1}{|a|}<f(t), \varphi(\tfrac{t-b}{a})>} \quad (**)$$

Cu (*) avem:

$$<e^{-3t}\delta''(3t), \varphi(t)> = <\delta''(3t), e^{-3t}\varphi(t)> = <\delta(3t), (e^{-3t}\varphi(t))''>$$

$$\overset{=}{\scriptstyle a=3} \frac{1}{3}<\delta(t), (e^{-t}\varphi(\tfrac{t}{3}))''> \overset{*}{=}$$

$$\cdot[e^{-t}\varphi(\tfrac{t}{3})]'' = e^{-t}\varphi(\tfrac{t}{3}) - \frac{2}{3}e^{-t}\varphi'(\tfrac{t}{3}) + \frac{e^{-t}}{9}\varphi''(\tfrac{t}{3})$$

$$\overset{*}{=} <\delta(t), \frac{1}{3}e^{-t}\varphi(\tfrac{t}{3}) - \frac{2}{9}e^{-t}\varphi'(\tfrac{t}{3}) + \frac{e^{-t}}{27}\varphi''(\tfrac{t}{3})> =$$

$$= \frac{1}{3}\varphi(0) - \frac{2}{9}\varphi'(0) + \frac{1}{27}\varphi''(0) = <\frac{1}{3}\delta(t) + \frac{2}{9}\delta'(t) + \frac{1}{27}\delta''(t), \varphi(t)>$$

Deci: $e^{-3t}\delta''(3t) = \frac{1}{27}\delta''(t) + \frac{2}{9}\delta'(t) + \frac{1}{3}\delta(t)$, deci

$$c_1 = \frac{1}{27} \quad c_2 = \frac{2}{9} \quad c_3 = \frac{1}{3}.$$

b) $<6t^2\delta''(3t+2), \varphi(t)> = <\delta''(3t+2), 6t^2\varphi(t)> \overset{a=3}{\underset{b=2}{=}}$ (formula **)

$$= \frac{1}{3}<\delta''(t), 6\left(\frac{t-2}{3}\right)^2\varphi(\tfrac{t-2}{3})> =$$

$$= 2<\delta(t), \left[\left(\frac{t-2}{3}\right)^2\cdot\varphi(\tfrac{t-2}{3})\right]''> =$$

$$= <\delta(t), \frac{4}{9}\varphi(\tfrac{t-2}{3}) + \frac{8}{9}\left(\frac{t-2}{3}\right)\varphi'(\tfrac{t-2}{3}) + \frac{2}{9}\left(\frac{t-2}{3}\right)^2\varphi''(\tfrac{t-2}{3})> =$$

$$= \frac{4}{9}\varphi(-\tfrac{2}{3}) - \frac{16}{27}\varphi'(-\tfrac{2}{3}) + \frac{8}{81}\cdot\varphi''(-\tfrac{2}{3}) = <\frac{4}{9}\delta(t) + \frac{16}{9}\delta'(t) + \frac{8}{9}\delta''(t), \varphi(\tfrac{t-2}{3})>$$

de unde: $6t^2\delta''(3t+2) = \frac{4}{9}\delta(t) + \frac{16}{9}\delta'(t) + \frac{8}{9}\delta''(t)$

și obținem: $c_1 = \frac{8}{9} \qquad c_2 = \frac{16}{9} \qquad c_3 = \frac{4}{9}$

③ Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$ în $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ în următoarele cazuri:

a) $f_n(t) = -\frac{n^2}{4}\sigma(t+3+\frac{2}{n}) + \frac{n^2}{2}\sigma(t+3) - \frac{n^2}{4}\sigma(t+3-\frac{2}{n})$.

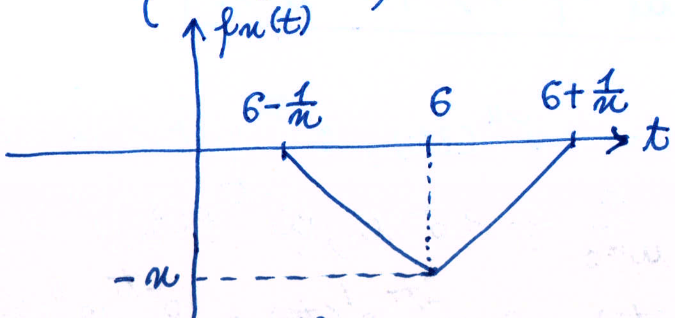
b) $f_n(t) = \begin{cases} n, & t\in[0,\frac{1}{n}) \\ 0, & t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$

c) $f_n(t) = \frac{n}{2}\left[\sigma(t+\frac{1}{n}) - \sigma(t-\frac{1}{n})\right]$

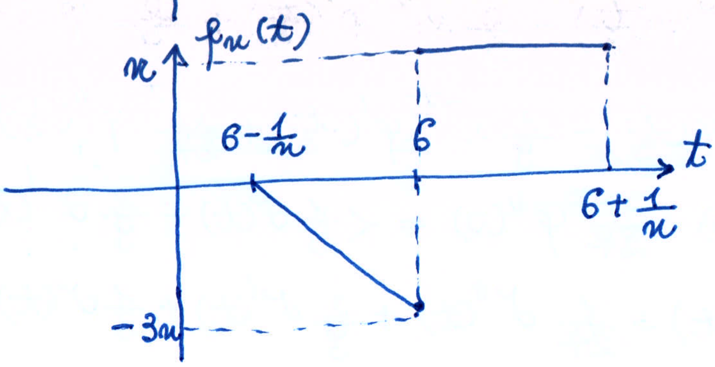
d) $f_n(t) = n^2\left[\sigma(t+\frac{1}{n}) - 2\sigma(t) + \sigma(t-\frac{1}{n})\right]$

e) $f_n(t) = \begin{cases} n^2 t + n, & t\in[-\frac{1}{n}, 0] \\ -n^2 t + n, & t\in(0,\frac{1}{n}] \\ 0, & \text{rest} \end{cases}$

f)

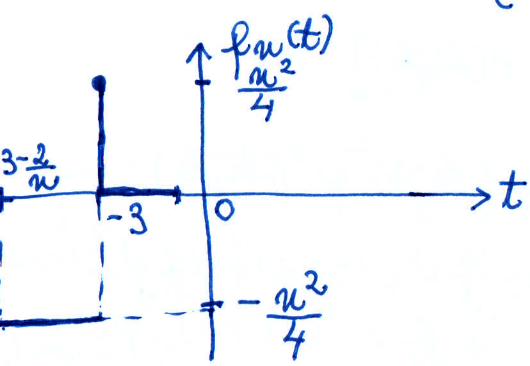


g)



h) $f_n(t) = n\left[\sigma(t+\frac{1}{2n}) - \sigma(t-\frac{1}{n})\right]$

<u>Soluție:</u> a) $f_n(t) = \begin{cases} -\frac{n^2}{4}, & t\in[-3-\frac{2}{n}, -3) \\ \frac{n^2}{4}, & t=-3 \\ 0, & t\in(-3, -3+\frac{2}{n}] \end{cases}$



$\langle \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t), \varphi(t)\rangle \underset{\text{distribuției}}{\overset{\text{continuitatea}}{=}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \langle f_n(t), \varphi(t)\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{-3-\frac{2}{n}}^{-3+\frac{2}{n}} f_n(t)\varphi(t)\,dt =$

$\underset{\text{de medie}}{\overset{\text{teorema}}{=}} \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{n^2}{4}\cdot\frac{2}{n}\cdot\varphi(\xi_n)\Big|_{\xi_n\in[-3-\frac{2}{n}, -3]} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{n}{2}\cdot\varphi(\xi_n) \underset{\downarrow}{=} -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(-3+a_n)}{\frac{2}{n}} = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(-3+x)}{x} = \varphi'(-3) =$

$\xi_n = -3 + a_n, \quad -\frac{2}{n} \leq a_n < 0$ ↓

$= \langle \delta(t+3), \varphi(t)\rangle =$

$= \langle -\delta'(t+3), \varphi(t)\rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}'} -\delta'(t+3).$$

b) $$\langle \lim_{n\to\infty} f_n(t), \varphi(t)\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n\,\varphi(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}\varphi(\xi_n)\Big|_{\xi_n\in[0,\frac{1}{n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \varphi(\xi_n)\,|\,\xi_n\in[0,\tfrac{1}{n}) = \varphi(0) = \langle\delta(t), \varphi(t)\rangle$$

$$0 \le \xi_n < \frac{1}{n}$$
$$\downarrow$$
$$0$$

$$\Rightarrow \quad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}'} \delta(t).$$

c) analog: $$\lim_{n\to\infty} \langle f_n(t), \varphi(t)\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2}\cdot\varphi(t)\,dt =$$

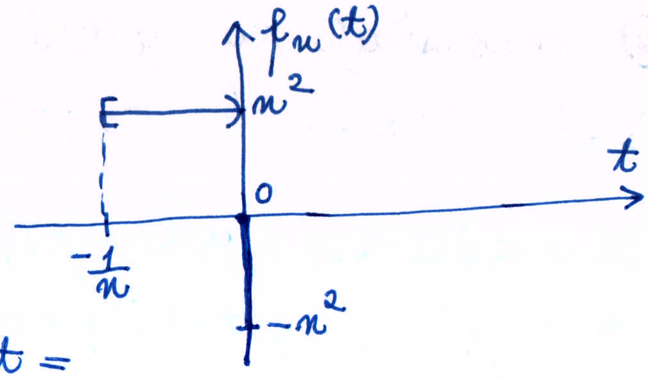
$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & t\in[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ 0, & \text{rest} \end{cases}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n}\varphi(\xi_n)\,|\,\xi_n\in[-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}]$$

$$= \varphi(0) = \langle\delta(t), \varphi(t)\rangle \Rightarrow$$

$$f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}'} \delta(t).$$

d) $$f_n(t) = \begin{cases} n^2, & t\in[-\frac{1}{n}, 0) \\ -n^2, & t = 0 \\ 0, & \text{rest} \end{cases}$$

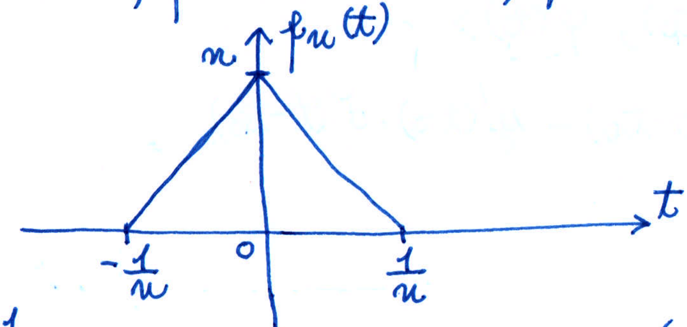


$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n(t), \varphi(t)\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{0} n^2\varphi(t)\,dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\,\varphi(\xi_n)\Big|_{\xi_n\in[-\frac{1}{n},0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\xi_n)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\varphi'(x) = \varphi'(0)$$

$$= \langle\delta(t), \varphi'(t)\rangle = \langle -\delta'(t), \varphi(t)\rangle \Rightarrow f_n(t) \xrightarrow[n]{\mathcal{D}'} -\delta'(t).$$

e)



$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n(t), \varphi(t)\rangle =$$

$$\lim_{n\to\infty} \Big\{ \int_{-\frac{1}{n}}^{0} (n^2t+n)\varphi(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{n}} (-n^2t+n)\varphi(t)\,dt \Big\} = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n}(n^2\xi_n+n)\varphi(\xi_n)\,|\,\xi_n\in[-\tfrac{1}{n},0] +$$

$$+ \frac{1}{n}(-n^2\xi_n+n)\varphi(\xi_n)\,|\,\xi_n\in(0,\tfrac{1}{n}] \Big) = \lim_{n\to\infty}\Big\{\varphi(\xi_n)\,|\,\xi_n\in[-\tfrac{1}{n},0] + \varphi(\xi_n)\,|\,\xi_n\in(0,\tfrac{1}{n}]\Big\} =$$

$$= 2\varphi(0) = \langle 2\delta(t), \varphi(t)\rangle \Rightarrow f_n(t) \xrightarrow[n]{\mathcal{D}'} 2\delta(t).$$

f) $f_n(t)$ descrește liniar la $-n$ pe $(6-\frac{1}{n}, 6)$ și crește liniar de la $-n$ pe $(6, 6+\frac{1}{n})$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \langle f_n(t), \varphi(t)\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{6-\frac{1}{n}}^{6+\frac{1}{n}} f_n(t)\cdot\varphi(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty} [\frac{1}{n}\cdot(-n)\cdot$

$\cdot \varphi(\xi_n) | \xi_n \in (6-\frac{1}{n}, 6) + \frac{1}{n}\cdot(-n)\varphi(\xi_n) | \xi_n \in (6, 6+\frac{1}{n})] = -2\varphi(6) =$

$= \langle -2\delta(t), \varphi(t+6)\rangle \Rightarrow f_n(t) \xrightarrow{\mathcal{D}'} -2\delta(t-6)$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \langle f_n(t), \varphi(t)\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} [\frac{1}{n}\cdot(-3n)\cdot\varphi(\xi_n) | \xi_n \in (6-\frac{1}{n}, 6) + \frac{1}{n}\cdot n\cdot$

$\cdot \varphi(\xi_n) | \xi_n \in (6, 6+\frac{1}{n})] = -3\varphi(6) + \varphi(6) = -2\varphi(6) = -2\langle\delta(t), \varphi(t+6)\rangle =$

$= \langle -2\delta(t-6), \varphi(t)\rangle \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = -2\delta(t-6) \text{ în } \mathcal{D}'!}$

④ Demonstrați că $g(t)\delta'(t-t_0) = g(t_0)\delta'(t-t_0) - g'(t_0)\delta(t-t_0)$.

<u>Soluție:</u> $\langle g(t)\cdot\delta'(t-t_0), \varphi(t)\rangle = \langle\delta'(t-t_0), g(t)\cdot\varphi(t)\rangle =$

$= -\langle\delta(t-t_0), [g(t)\cdot\varphi(t)]'\rangle = -\langle\delta(t), [g(t+t_0)\cdot\varphi(t+t_0)]'\rangle$

$= -\langle\delta(t), g'(t+t_0)\varphi(t+t_0) + g(t+t_0)\varphi'(t+t_0)\rangle =$

$= -g'(t_0)\varphi(t_0) - g(t_0)\varphi'(t_0) = -\langle\delta(t-t_0), g'(t_0)\varphi(t)\rangle -$

$-\langle\delta(t-t_0), g(t_0)\cdot\varphi'(t)\rangle = \langle\delta'(t-t_0), g(t_0)\varphi(t)\rangle - \langle\delta(t-t_0), g'(t_0)\varphi(t)\rangle$

$= \langle g(t_0)\delta'(t-t_0) - g'(t_0)\delta(t-t_0), \varphi(t)\rangle \Rightarrow$

$g(t)\cdot\delta'(t-t_0) = g(t_0)\delta'(t-t_0) - g'(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$.