6. BAZELE MATEMATICE ALE REPREZENTARII OBIECTELOR IN SPATIUL TRIDIMENSIONAL (3D).

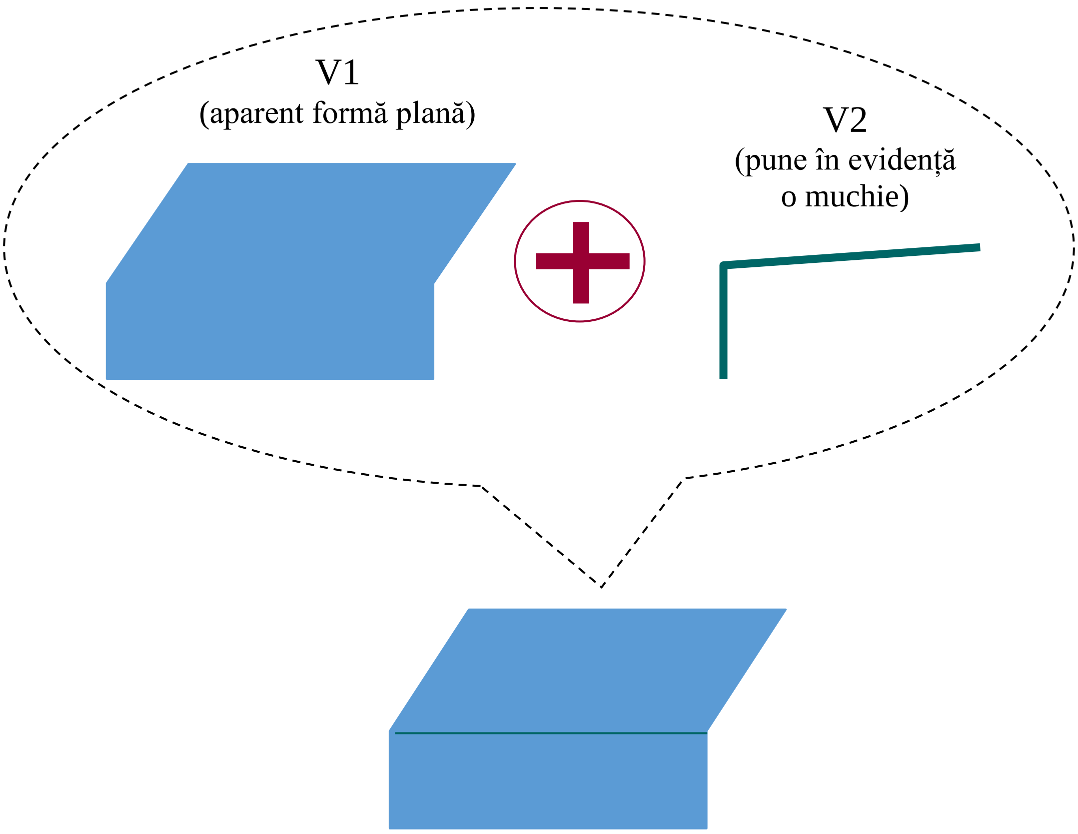
Spaţiul tridimensional este un **model al realităţii,** care stă la baza tuturor teoriilor din fizică şi matematică. Din punct de vedere geometric, spaţiul tridimensional permite reprezentarea obiectelor aşa cum sunt ele percepute de analizorul vizual uman: ca aspect geometric (bidimensional) şi ca *profunzime*, aceasta fiind considerată cea de a treia dimensiune. Perceptia celei de a treia dimensiuni a obiectelor reprezinta asa numita *indicatie de perspectiva* care consta in *strategiile folosite de creier* pentru *a estima profunzimea spatiului*. Creierul nu se bazeaza pe o singura strategie pentru a determina adancimea in profunzime a unui obiect, astfel ca in acest proces *indicatia de modificare a paralaxei*, *indicatia stereoscopica* bazata pe disparitatea binoculara contribuie la generarea unui *raspuns colectiv*.

6.1. Efecte optice în percepția spațialității obiectelor

Percepția profunzimii (spațialității) obiectelor reale folosește în principiu două mecanisme optice pentru estimarea formei, folosite de regulă combinat.

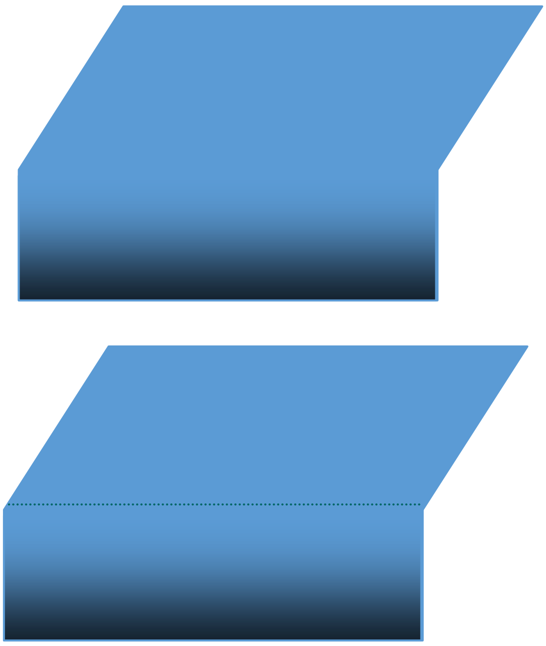
a) Estimarea formelor prin metode pur geometrice

Cu ajutorul a două vederi (perspective V1 și V2) diferite asupra obiectului se poate estima forma reală a obiectului. V1 este o vedere frontală, iar V2 este o vedere laterală. Combinarea informației din cele două vederi conduce la determinarea formei reale a obiectului, atunci când alte informații nu sunt disponibile.

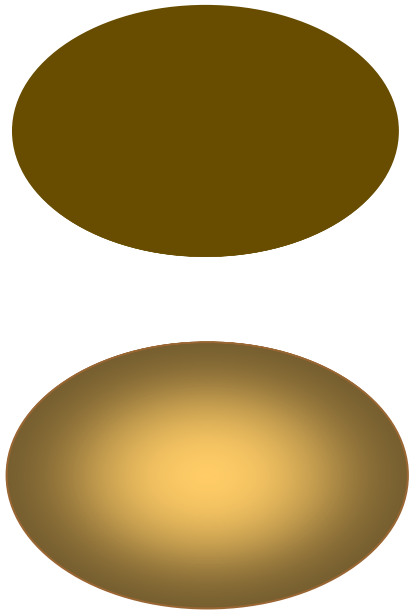


b) Estimarea formelor prin metode cromatice

Astfel de tehnici implică prelucrarea informației de culoare, textură, lumină, etc percepute de la obiectul real.



Zona umbrită poate sugera o schimbare de formă a obiectului perceput ca suprafață plana (sus), respectiv existența a două suprafețe plane care se intersectează formând o muchie



Zona strălucitoare poate sugera forma spațială de elipsoid a obiectului perceput inițial ca o suprafață 2D în formă de elipsă

În grafica pe calculator se pune problema stabilirii legaturilor dintre obiectele reale și modelele lor bidimensionale reprezentate pe dispositive grafice 2D. Legătura dintre spațiul 3D și 2D trebuie rezolvată prin modele matematice și algoritmi care definesc reprezentarea grafică.

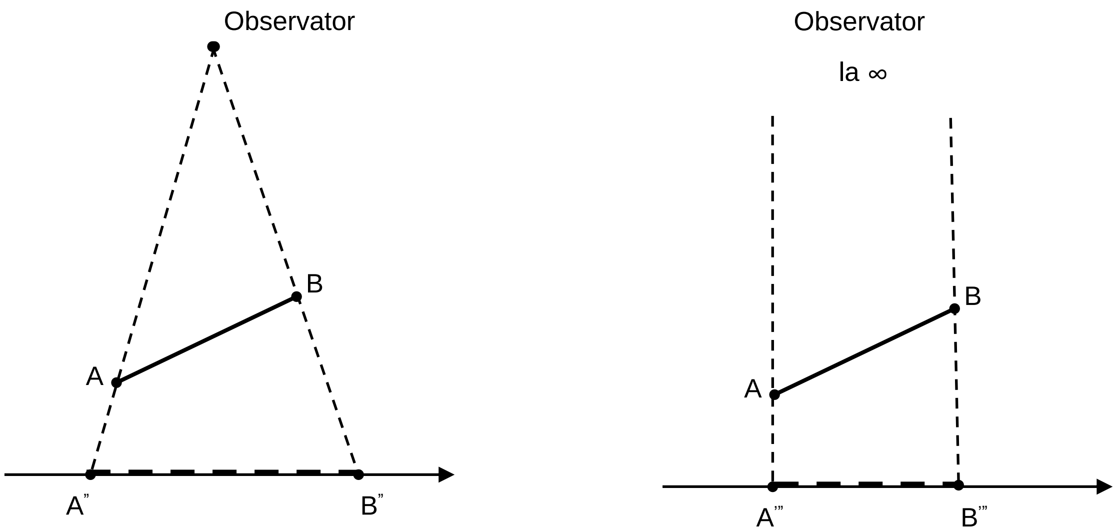
6.2. PROIECTIA SPAŢIULUI 3D PE SPAŢIUL BIDIMENSIONAL. TIPURI DE PROIECȚIE. ELEMENTE DE GEOMETRIE PROIECTIVA. PERSPECTIVA AUTOMATA.

Aşa cum s-a arătat în primul capitol, cele mai utilizate sisteme (tridimensionale) de coordonate sunt: sistemul triedru drept (coordonate carteziene), sistemul sferic şi sistemul cilindric.

În limbajul curent se foloseşte expresia de *reprezentare în spaţiu* a obiectelor ceea ce semnifică utilizarea unei metode de a crea senzaţia profunzimii obiectelor pe un sistem (suport) grafic bidimensional. Astfel se pune problema de a generaliza reprezentarea spaţiului tridimensional pe un spaţiu bidimensional. Pentru obţinerea unor reprezentări grafice în 3D este necesară aplicarea unei transformări constând într-un anumit *tip de proiecţie*.

Se folosesc doua tipuri de proiecții care sunt cunoscute sub următoarele denumiri consacrate(vezi Fig. 6.1):

i. Centrală sau perspectivă;
ii. Paralela, ortogonală sau izometrică.



(a) Proiectie centrala (b) Proiectie paralela (ortogonala)

Fig.6.1. Exemple de proiectie in 2D (segmentul AB)

Bazele matematice ale reprezentarii obiectelor in spatiul cu trei dimensiuni sunt prezentate sintetic in breviarul cu formule de geometrie analitica premergător acestui curs.

Proiectia obiectelor din spaţiului 3D pe spaţiul 2D cu pastrarea senzatiei de profunzime a obiectelor constituie principalul obiectiv in grafica pe calculator, care se realizeaza prin asa numita *perspectiva automata*. Obţinerea oricărei reprezentări perspective a unui obiect cuprinde etape descrise în continuare.

6.2.1. Descrierea obiectelor

Descriere a obiectelor tridimensionale reprezintă cea mai importantă etapă pentru procesul de digitalizare a obiectelor in vederea reprezentarii grafice. Alegerea modului de descriere trebuie să satisfacă necesităţile aplicaţiei şi posibilităţile sistemului de calcul.

În funcţie de forma obiectelor, acestea se pot încadra în două clase: *poliedre* şi corpuri mărginite de *suprafeţe curbe,* care pot fi la rândul lor suprafeţe de revoluţie sau suprafeţe curbe neregulate. În realitate însă, majoritatea obiectelor au formă şi structură complexă. Structural acestea pot fi descompuse în forme geometrice regulate. În cadrul algoritmilor discutaţi în continuare se va opera numai cu obiecte alcătuie din feţe plane. Problematica reprezentării suprafeţelor curbe urmând sa fie abordată într-un capitol dedicat.

Metoda generala pentru descrierea obiectelor din clasa poliedru se face după următorul algoritm (vezi figura 6.2).

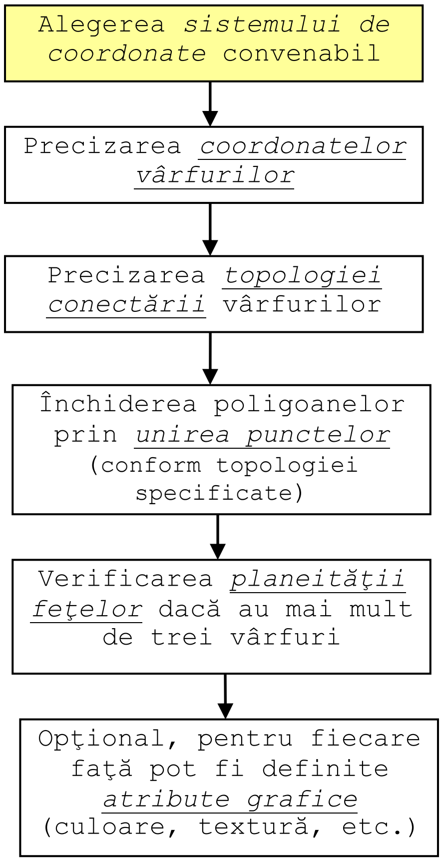


Fig. 6.2. Algoritmul descrierii obiectelor.

6.2.2. Tipuri de proiecţie

A doua etapă importantă în realizarea proiecţiei perspective este alegerea tipului de proiecţie şi determinarea *coordonatelor perspective absolute* şi a *coordonatelor perspective relative*. Există doua tipuri fundamentale de proiectie in functie *pozitia razelor (liniilor)* vizuale ce depinde de distanța la cere se află observatorul:

- **proiectia centrala/perspectiva** (razele vizuale sunt <u>convergente</u> in punctul de vizare, iar observatorul se află la distanță finită în raport cu obiectul);
- **proiectia paralela/izometria** (razele vizuale sunt <u>paralele</u> cu o anumita direcție data, iar observatorul se consideră la distanță infinită față de obiectul vizat).

Exista de asemenea si o serie de tipuri de proiecţii perspective particulare in functie de pozitia relativa a observatorului in raport cu obiectul:

- perspective ascendente (observatorul priveşte un obiect înalt de jos şi destul de aproape),

- perspective descendente (observatorul priveşte construcţia de sus, sub raze vizuale accentuat oblice),
- perspective normale (la înălţimea normală a orizontului),
- perspective pe tablouri plane verticale,
- perspective pe tablouri plane înclinate,
- perspective cavaliere (frontale sau orizontale).

Generalizarea metodei **proiectiei perspective pe un plan (tablou) înclinat oarecare**, presupune:

A. determinarea coordonatelor perspective **absolute**- într-un triedru ortogonal fix;
B. determinarea coordonatelor perspective **relative**- în raport cu reperul de referinţă asociat tabloului de perspectivă.

6.2.3. Modele pentru calculul coordonatelor in proiecție centrală si paralelă în sistemul de coordonate absolut si relativ

A) Determinarea coordonatelor perspective absolute.

a) <u>Utilizarea proiectiei centrale</u>

Elementele sunt următoarele (vezi Fig.6.3):

- triedrul ortogonal fix OXYZ;
- observatorul situat în punctul de vedere $V(X_o, Y_o, Z_o)$;
- planul oarecare considerat tablou (înclinat) de perspectivă, având ecuaţia:

$$AX + BY + CZ + D = 0;$$

- punctele spaţiului real (ale obiectului) $P_i(X_i, Y_i, Z_i)$, unde $i = 1,2,3,...,n$;

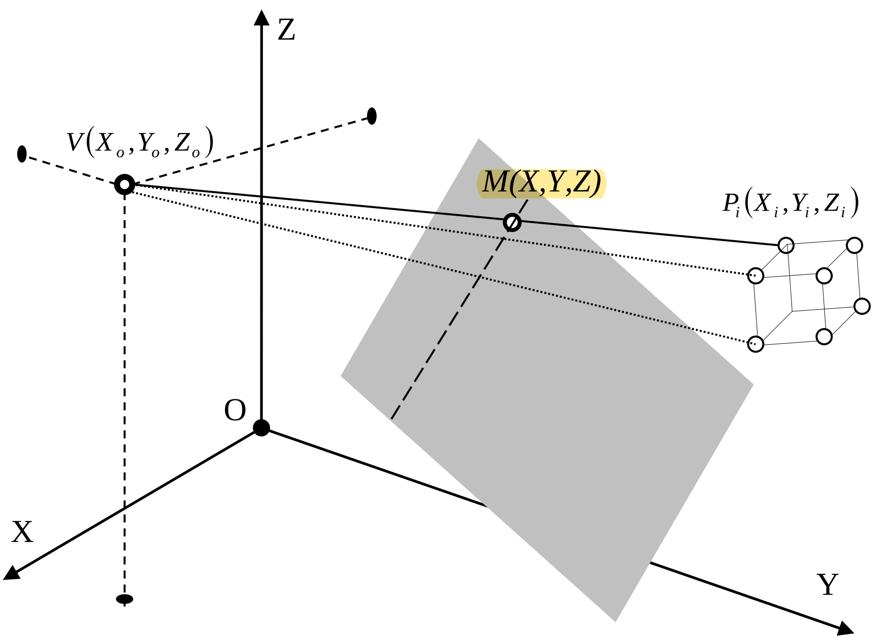


Fig. 6.3. Elementele proiecţiei perspective (centrale)

Ecuaţia *dreptei/liniei de vizare* care trece prin punctul de vedere $V(X_o, Y_o, Z_o)$ şi punctele aparţinând obiectului $P_i(X_i, Y_i, Z_i)$ este reprezentată prin expresia următoare:

$$\frac{X - X_0}{l_i} = \frac{Y - Y_0}{m_i} = \frac{Z - Z_0}{n_i},$$

unde l_i , m_i , n_i sunt *parametrii directori* ai dreptei *i*, având valoarea cosinuşilor directori ai razei de vizare respective. Fiecare dreaptă *i* din fascicolul dreptelor (razelor) de vizare are parametrii directori următori:

$$l_i = \frac{X_i - X_o}{d_{VP_i}}, \; m_i = \frac{Y_i - Y_o}{d_{VP_i}}, \; n_i = \frac{Z_i - Z_o}{d_{VP_i}},$$

în care d_{VP_i} reprezintă lungimea liniei de vizare curente *i*:

$$d_{VP_i} = \sqrt{(X_i - X_o)^2 + (Y_i - Y_o)^2 + (Z_i - Z_0)^2}$$

Coordonatele perspectiva absolute, sunt punctele proiectate $M(X, Y, Z)$ obţinute ca intersecţii ale liniilor de vizare cu planul de perspectivă, dacă este îndeplinită condiţia generală de intersecţie a dreptei *i* cu un planul dat: $A \cdot l_i + B \cdot m_i + C \cdot n_i \neq 0$. Acestea se obţin în urma rezolvării sistemului de trei ecuaţii independente format din:

$$\frac{X - X_0}{l_i} = \frac{Y - Y_0}{m_i} = \frac{Z - Z_0}{n_i} \quad \text{şi} \quad AX + BY + CZ + D = 0.$$

După unele prelucrări elementare se obţin expresiile *coordonatelor absolute* sub forma:

$$\begin{cases} X = X_o - \lambda_i \cdot l_i \\ Y = Y_o - \lambda_i \cdot m_i \\ Z = Z_o - \lambda_i \cdot n_i \end{cases}$$

unde factorul de multiplicare λ_i se determină cu expresia:

$$\lambda_i = \frac{AX_o + BY_o + CZ_o + D}{A \cdot l_i + B \cdot m_i + C \cdot n_i}$$

Observaţie. Legătura între coordonatele punctelor din spaţiu şi coordonatele perspective din planul de perspectivă este dată de *expresii neliniare*.

b) Utilizarea proiectiei paralele (izometria)

În demonstraţiile anterioare ne-am bazat pe ipoteza că liniile de vizare pornesc în fascicul dintr-un singur punct numit punct (centru) de observare sau de vizare, motiv pentru care proiecţia respectiva se numeşte *centrală*. Relaţiile generale obţinute stabilesc corespondenţa univocă intre punctele spaţiului tridimensional $S^{(3)}$ şi punctele (proiectate) in planul dat *P*.

Punctele definite prin coordonatele generale se numesc *perspectivele punctelor* corespunzătoare din spaţiu (punctele M), iar figura obţinută prin unirea lor organizată se numeşte *perspectiva liniară* a figurii din spaţiu definită de punctele $P_i(X_i, Y_i, Z_i)$.

Proiecţia paralelă (izometrica) a spaţiului tridimensional pe planul de perspectivă presupune *înlocuirea punctului de vizare* $V(X_o, Y_o, Z_o)$ *cu o direcţie de vizare Δ, definită prin cosinuşii directori α, β şi γ* în raport cu triedrul ortogonal fundamental considerat ca sistem de referinta absolut. În această ipoteză, liniile de vizare a obiectului sunt asimilate *proiectantelor* punctelor P_i paralele cu direcţia Δ definite de ecuaţia unei drepte, în care cosinuşii directori *l*, *m* şi *n* sunt înlocuiţi cu valorile date: α, β şi γ.

$$\frac{X - X_i}{\alpha} = \frac{Y - Y_i}{\beta} = \frac{Z - Z_i}{\gamma}$$

Practic, aceasta situatie corespunde poziției punctului de vizare situat la infinit, (caz în care razele de vizare pot fi considerate paralele).

Şi în acest caz relaţiile generale obţinute stabilesc corespondenţa univocă intre punctele spaţiului tridimensional (3D) şi puncte din planul de proiecţie dat *P* , având aceeaşi formă ca în primul caz, dar cu parametrii diferiți:

$$\begin{cases} X = X_i - \lambda_i \cdot \alpha \\ Y = Y_i - \lambda_i \cdot \beta \\ Z = Z_i - \lambda_i \cdot \gamma \end{cases}$$

în care $\lambda_i = \dfrac{AX_i + BY_i + CZ_i + D}{A \cdot \alpha + B \cdot \beta + C \cdot \gamma}$.

Menționăm și aici condiția $A \cdot \alpha + B \cdot \beta + C \cdot \gamma \neq 0$, care asigură existența proiecției obiectului pe planul dat.

Punctele definite prin coordonatele generale se numesc *perspectivele paralele ale punctelor* corespunzătoare din spaţiu, iar figura obţinută prin unirea lor organizată se numeşte *perspectiva paralelă liniară* a figurii din spaţiu definită de punctele $P_i(X_i, Y_i, Z_i)$.

În funcţie de orientarea normalei $\overline{N}$ a planului de proiecţie în raport cu direcţia de proiecţie $\overline{\Delta}$ se obţin diferite tipuri de proiecţii paralele: *proiecţia paralelă ortogonală* sau *proiecţia paralelă oblică*.

Observatie. Efectul distantei precum si al dimensiunilor obiectului asupra reprezentarii perspective (forma, aspect si dimensiune) este semnificativ mai accentuat la perspectiva centrala.

B. Determinarea coordonatelor perspectiva relative

În continuare se pune problema de a determina coordonatele punctelor perspectiva într-un sistem de coordonate legat de tabloul (planul) perspectivei.

Pentru această demonstraţie elementele sunt (vezi Fig. 6.4):

- un punct de referinţă $T(X_T, Y_T, Z_T)$, conţinut în *planul perspectivei* şi considerat originea sistemului de axe al tabloului perspectivei $TX_1Y_1Z_1$.
- vectorii de poziţie $\overline{R}$ şi $\overline{r}_T$ ai punctelor M respectiv T în raport cu reperul absolut (OXYZ) (având versorii axelor $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$) şi vectorul de poziţie relativă $\overline{r}$ al punctului M faţă de reperul relativ $TX_1Y_1Z_1$ (având versorii axelor $\overline{i}_1$, $\overline{j}_1$, $\overline{k}_1$).

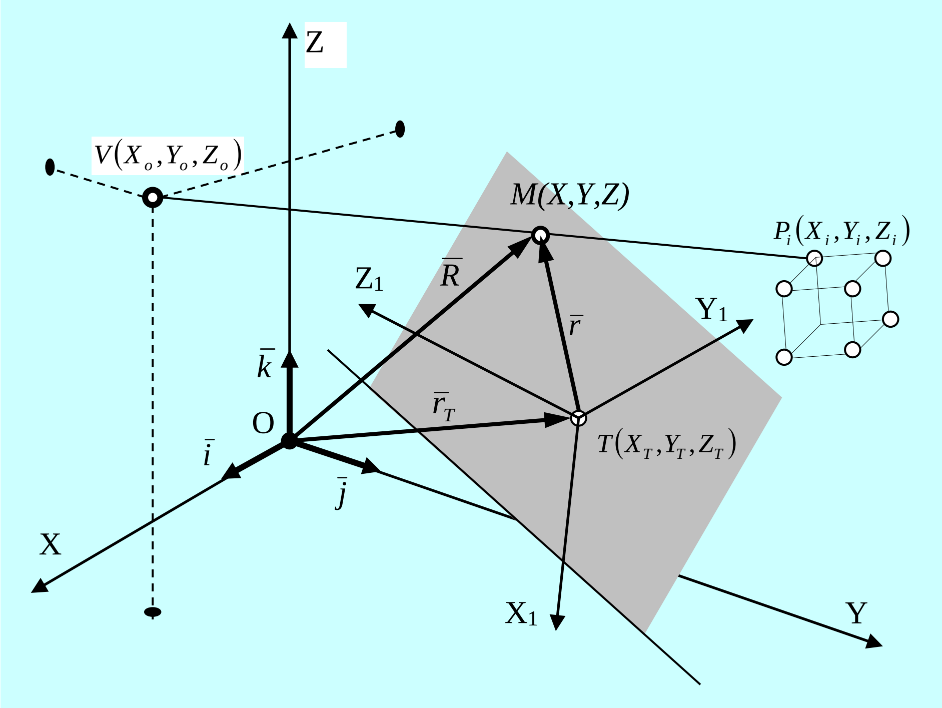


Fig. 6.4. Elementele proiecţiei perspective relative

Trecerea de la sistemul cartezian absolut OXYZ la sistemul cartezian $TX_1Y_1Z_1$ se face în general, prin proiectarea ecuaţiei vectoriale de legătură a originilor celor două sisteme cu punctul de perspectivă M: $\overline{r} = \overline{R} - \overline{r}_T$, pe direcţiile axelor sistemului absolut, astfel:

$$X_1\overline{i}_1 + Y_1\overline{j}_1 + Z_1\overline{k}_1 = (X - X_T)\overline{i} + (Y - Y_T)\overline{j} + (Z - Z_T)\overline{k},$$

unde

$$\begin{aligned}
\overline{i} &= \overline{i}_1\cos(\overline{i}, \overline{i}_1) + \overline{j}_1\cos(\overline{i}, \overline{j}_1) + \overline{k}_1\cos(\overline{i}, \overline{k}_1) = \alpha_1 \cdot \overline{i}_1 + \beta_1 \cdot \overline{j}_1 + \gamma_1 \cdot \overline{k}_1 \\
\overline{j} &= \overline{i}_1\cos(\overline{j}, \overline{i}_1) + \overline{j}_1\cos(\overline{j}, \overline{j}_1) + \overline{k}_1\cos(\overline{j}, \overline{k}_1) = \alpha_2 \cdot \overline{i}_1 + \beta_2 \cdot \overline{j}_1 + \gamma_2 \cdot \overline{k}_1 \\
\overline{k} &= \overline{i}_1\cos(\overline{k}, \overline{i}_1) + \overline{j}_1\cos(\overline{k}, \overline{j}_1) + \overline{k}_1\cos(\overline{k}, \overline{k}_1) = \alpha_3 \cdot \overline{i}_1 + \beta_3 \cdot \overline{j}_1 + \gamma_3 \cdot \overline{k}_1
\end{aligned}$$

Înlocuind şi identificând corespondenţa componenetelor se obţin relatiile generale de calcul ale *coordonatelor relative* ale perspectivei în raport cu triedrul de referinţă solitar cu tabloul (înclinat) de perspectivă:

$$\begin{aligned}
X_1 &= (X - X_T)\alpha_1 + (Y - Y_T)\beta_1 + (Z - Z_T)\gamma_1, \\
Y_1 &= (X - X_T)\alpha_2 + (Y - Y_T)\beta_2 + (Z - Z_T)\gamma_2, \\
Z_1 &= (X - X_T)\alpha_3 + (Y - Y_T)\beta_3 + (Z - Z_T)\gamma_3,
\end{aligned}$$

unde

$$\alpha_1 = \cos(X_1, X),\ \alpha_2 = \cos(Y_1, X),\ \alpha_3 = \cos(Z_1, X),$$
$$\beta_1 = \cos(X_1, Y),\ \beta_2 = \cos(Y_1, Y),\ \beta_3 = \cos(Z_1, Y),$$
$$\gamma_1 = \cos(X_1, Z),\ \gamma_2 = \cos(Y_1, Z),\ \gamma_3 = \cos(Z_1, Z),$$

reprezintă *cosinuşii directori* ai fiecărei axe a sistemului de coordonate relativ (in raport cu axele sistemului absolut).

Observaţii:

- În acest caz trebuie remarcat că, deocamdată, numai originea T a noului triedru relativ aparţine tabloului de perspectivă si este cunoscuta prin precizarea coordonatelor (X_T, Y_T, Z_T).
- Pozitia completa a sistemului de coordonate relativ (orientarea sa efectiva) este definita de 9 (noua) coeficienti – cosinusi directori.
- Relatiile generale de calcul ale coordonatelor perspectiva se cauta a fi simplificate prin anularea unor termeni sau aducerea unor factori la valoare unitara.

Din punct de vedere practic, coordonatele perspective relative prezintă un interes major numai în **două coordonate**, respectiv **în planul tabloului de perspectivă**. Acesta poate fi de exemplu ecranul de afişare al monitorului.

Pentru ca proiecția punctelor în coordonate absolute (M) să fie posibilă în sistemul de coordonate relativ este obligatoriu ca două axe ale acestui sistem să fie conținute în tabloul de proiecție. Prin urmare, vom conveni ca în plan să fie sistemul de axe TX_1Y_1, deci planul format de aceste axe X_1TY_1 *va coincide* cu planul tabloului de perspectivă (plane confundate), iar axa TZ_1 devine normală la planul de proiecție. Punctele M nu se proiectau oricum pe axa TZ_1 (deoarece originea T este conținută în plan). Practic, considerăm că tabloul (planul) de perspectivă va coincide cu ecranul (suprafața) de reprezentare în 2D.

În continuare se vor determina condiţiile ca planul X_1TY_1 *să coincidă* cu planul înclinat de perspectivă (plane confundate). În această situaţie axa TZ_1 va deveni *normală* pe planul de perspectivă şi va avea cosinuşii directori exprimaţi astfel:

$$\alpha_3 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\quad \beta_3 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\quad \gamma_3 = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

În acest caz, a treia ecuaţie din relaţiile coordonatelor devine: $Z_1 = 0$, iar numarul parametrilor (cosinusilor directori) se reduce astfel de la 9 la 6.

Determinarea cosinuşilor directori

Ecuaţiile pentru determinarea coordonatelor perspectiva relative, la care s-a ajuns până acum, pot fi utilizate cu succes dacă se determină în prealabil cei 6 cosinuşi directori ramasi $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $(i = 1, 2)$. Astfel, ecuaţiile de lucru ce descriu proiecția 2D în sistemul relativ (conținut în ecran) sunt:

$$X_1 = (X - X_T)\alpha_1 + (Y - Y_T)\beta_1 + (Z - Z_T)\gamma_1,$$
$$Y_1 = (X - X_T)\alpha_2 + (Y - Y_T)\beta_2 + (Z - Z_T)\gamma_2,$$

unde

$\alpha_1 = \cos(X_1, X)$, $\alpha_2 = \cos(Y_1, X)$,
$\beta_1 = \cos(X_1, Y)$, $\beta_2 = \cos(Y_1, Y)$,
$\gamma_1 = \cos(X_1, Z)$, $\gamma_2 = \cos(Y_1, Z)$.

Observaţie. De regulă, din considerente practice urmărim *simplificarea* problemei perspectivei prin aranjarea tabloului de perspectivă astfel încât planul acestuia sa aibă sistemul de axe relativ 2D, *cu cel puţin o axă paralelă* cu cea a sistemului de axe absolut.

Prin urmare, se procedeaza la o noua particularizare a sistemului de axe relativ. De exemplu, în figura 2.4, poziţia particulară a sistemului 2D este aleasă astfel încât:

$TX_1 \,||\, OY$,
$TY_1 \perp OY$,
$TX_1 \perp OX$,
$TX_1 \perp OZ$
și
$TZ_1 \perp OY$,

Astfel că o parte din cosinuşii directori devin:

$\alpha_1 = \cos(X_1, X) = \cos 90^o = 0$,
$\beta_1 = \cos(X_1, Y) = \cos 0^o = 1$,
$\beta_2 = \cos(Y_1, Y) = \cos 90^o = 0$,
$\gamma_1 = \cos(X_1, Z) = \cos 90^o = 0$

În acest caz, expresiile coordonatelor perspectiva relative capata forma urmatoare:

$$X_1 = Y - Y_T,$$
$$Y_1 = (X - X_T)\alpha_2 + (Z - Z_T)\gamma_2$$

Se remarca prezenta **a numai doi coeficienti** ce definesc urmatoarele:

- pozitia axei TY_1 in raport cu OX, adica inclinarea verticala a tabloului de proiectie exprimata prin cosinusul director $\alpha_2 = \cos(Y_1, X)$, respectiv;
- pozitia axei TY_1 in raport cu axa OZ, adica rotirea tabloului de proiectie in raport cu normala sa se exprima prin cosinusul director $\gamma_2 = \cos(Y_1, Z)$.

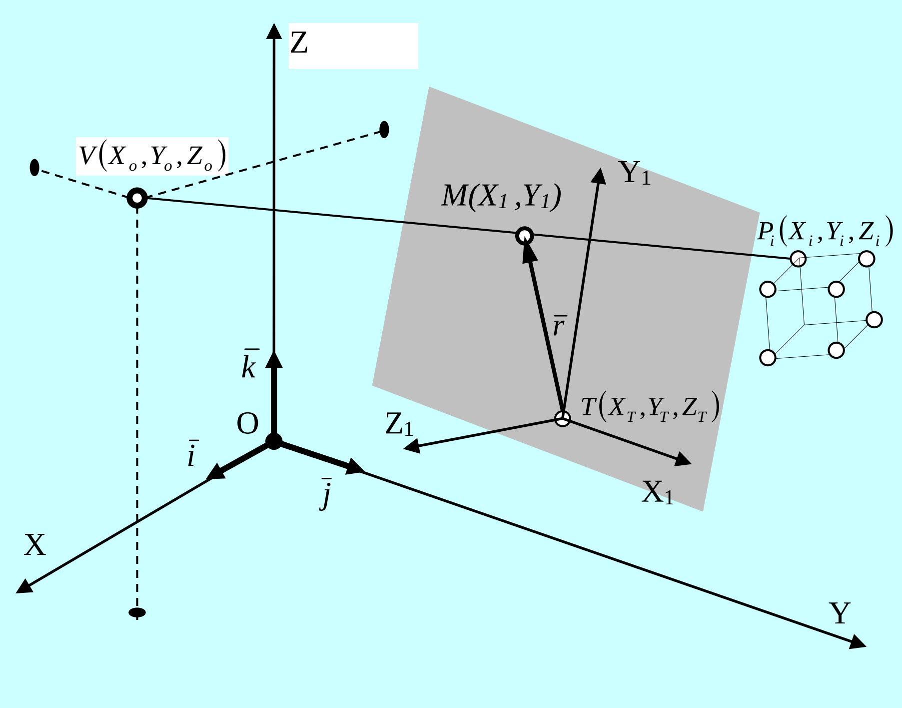


Fig. 6.5. Poziţie particulară a tabloului de perspectivă

Observatie:
Încercarea de a simplifica și mai mult expresiile de mai sus necesită schimbarea poziției planului (tabloului) de proiecție ales inițial, definit prin ecuația $AX+BY+CZ+D=0$ alegând o poziție particular a acestuia în care:

- *tabloul de proiectie devine paralel cu planul vertical absolut* definit de OYZ, adică $\cos(Y_1,X)=\cos(90^\circ)=0$;
- tabloul de proiecție are axa verticală (TY1) paralelă cu axa verticală a sistemului absolut (OZ), adică $\cos(Y_1,Z)=\cos(0^\circ)$.

În acest caz, cei doi cosinuși directori vor fi:

$$\alpha_2=\cos(Y_1,X)=0$$
$$\gamma_2=\cos(Y_1,Z)=1$$

Expresiile proiecției relative devin:

$$X_1=Y-Y_T$$
$$Y_1=Z-Z_T$$

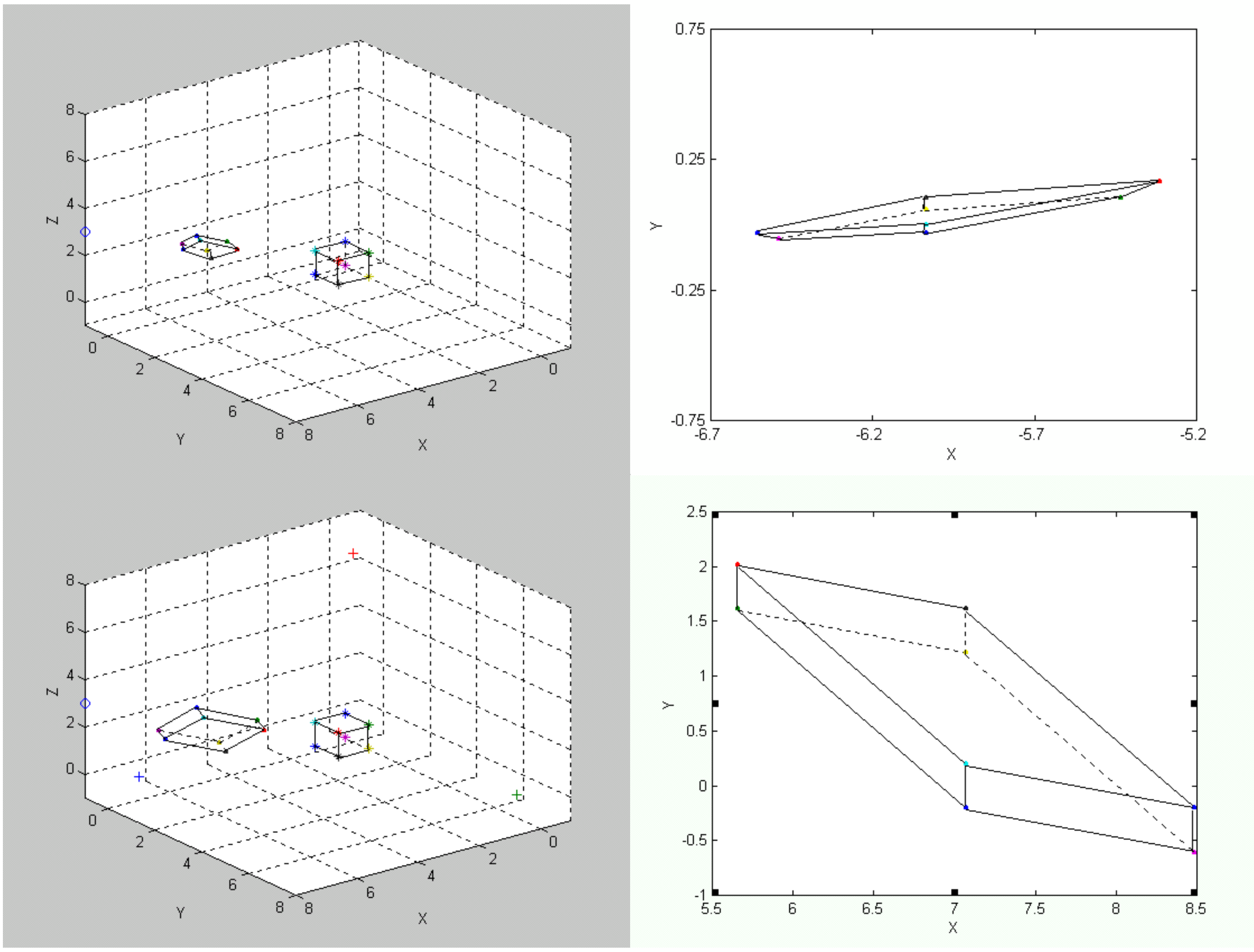
Ceea ce echivaleaza cu o simpla translație cu cotele (Y_T, Z_T) a sistemului de coordonate relativ in raport cu cel absolut.

Notă! De reținut că pentru această nouă poziție a tabloului de proiecție *trebuie recalculate coordonatele proiecției absolute* – punctele M(X,Y,Z), cu verificarea condiției $A\cdot l_i+B\cdot m_i+C\cdot n_i\neq 0$ sau $A\cdot\alpha+B\cdot\beta+C\cdot\gamma\neq 0$, deoarece *poziția planului s-a schimbat.*

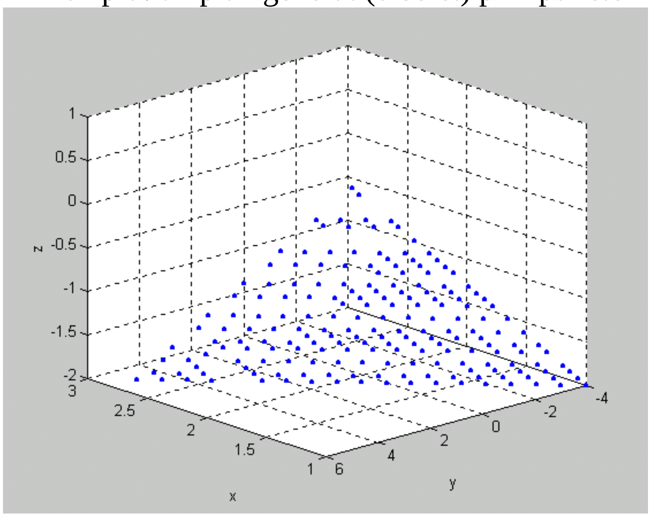
6.3. Exemple simulate de proiecții centrală si paralelă în coordonate absolute și relative

(reprezentare 3D – în coordonate absolute în graficele din partea stânga,
respectiv 2D – în coordonate relative în planul de proiecție, în partea dreaptă).

Planul de proiecție este definit prin tăieturile pe axele X, Y și Z, marcate cu cerculețe respectiv cu steluțe.



Exemplu: un plan generat (discret) prin puncte



Etapa următoare constă în rezolvarea problemelor specifice perspectivei și anume problemele de vizibilitate. În această categorie se încadrează determinarea *suprafețelor (liniilor) ascunse* și *testele de interioritate*.