5.3. Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

Aplicațiile de acest tip utilizează din plin calculul matriceal şi funcțiile oferite de mediul Matlab pentru operațiile cu matrice în general.

Vom porni de la forma generală de sistem liniar, particularizată pentru 3 ecuații cu 3 necunoscute:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = d_1 \\ b_1x + b_2y + b_3z = d_2 \\ c_1x + c_2y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Acesta poate fi scris matriceal sub două forme, după cum urmează:

$$\boxed{A \cdot X = D}$$

unde A – matricea coeficienților necunoscutelor (3x3);
X – matricea necunoscutelor (3x1), deci un vector coloană;
D – matricea termenilor liberi (3x1), deci vector coloană.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix},$$

adică:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix},$$

sau forma complementară:

$$\boxed{Y \cdot B = E}$$

unde B – matricea coeficienților, transpusa lui A(3x3);
Y – matricea necunoscutelor, transpusa lui X, deci vector linie (1x3);
E – matricea termenilor liberi, transpusa lui D, deci vector linie (1x3).

$$B = A^T = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad Y = X^T = [x \quad y \quad z], \quad E = D^T = [d_1 \quad d_2 \quad d_3]$$

adică:

$$[x \quad y \quad z] \times \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = [d_1 \quad d_2 \quad d_3]$$

<u>Metode de rezolvare</u>:

a) Prin împărțirea matricelor

Un sistem liniar de N ecuații cu N necunoscute se rezolvă prin operații de împărțire a matricelor, astfel:

- pentru reprezentarea în forma A·X=D rezultă X=A\D,
- pentru reprezentarea în forma Y·B=E rezultă Y=E/B.

Notă. În Matlab algoritmul operației de împărțire la stânga este mai rapid, deci din punctul de vedere al vitezei de calcul această operație este de preferat. (Timpul de calcul `elapsed_time` se poate evalua cu funcțiile `tic`, respectiv `toc`).

Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 5 \\ x - y - z = -10 \end{cases},$$

în forma A·X=D respectiv în forma $X^t \cdot A^t = D^t$ (adică Y·B=E).

```
>> A=[3 2 -1;-1 3 2;1 -1 -1]

A =
     3     2    -1
    -1     3     2
     1    -1    -1


>> B=[1 5 -10]

B =
     1     5   -10


>> B=B'

B =
     1
     5
   -10


>> x=A\B

x =
  -56.0000
   41.0000
  -87.0000


>> %verificare

>> A*x

ans =
    1.0000
    5.0000
  -10.0000
```

```
>> A=A'

A =
     3    -1     1
     2     3    -1
    -1     2    -1


>> E=B'

E =
     1     5   -10


>> y=E/A

y =
  -56.000   41.000  -87.000


>> %verificare

>> y*A

ans =
    1.000    5.000  -10.000
```

b) Utilizarea matricei inverse

În reprezentarea sistemului liniar sub forma $A \cdot X = D$ se poate scrie $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot D$ (prin înmulțire la stânga cu A^{-1}), atunci $A^{-1} \cdot A = I$ (matricea identitate) şi rezultă soluția sistemului sub forma:

$$X = A^{-1} \cdot D$$

În Matlab, matricea A^{-1} se calculează cu funcția `inv(A)` deci rezultă vectorul soluțiilor `X=inv(A)*D`, care este un vector coloană.

Cu descrierea sistemului sub forma a doua $Y \cdot B=E$, rezultă prin multiplicarea la dreapta cu B^{-1}:

$$Y \cdot B \cdot B^{-1}=E \cdot B^{-1}.$$

Se obține ecuația matriceală $Y=E \cdot B^{-1}$, care se rezolvă cu expresia Matlab `Y=E*inv(B)`, în care Y este vector linie.

Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare precizat la punctul anterior prin metoda matricei inverse.

```
A =
     3     2    -1
    -1     3     2
     1    -1    -1
D =
     1
     5
   -10

>> X=inv(A)*D

X =
  -56.000
   41.000
  -87.000
```

```
>> B=A'

B =
     3    -1     1
     2     3    -1
    -1     2    -1

>> E=D'

E =
     1     5   -10


>> Y=E*inv(B)

Y =
   -56.000  41.000  -87.000
```

Notă. Din punctul de vedere al timpului de calcul nu există diferențe semnificative între înmulțirea la stânga şi cea la dreapta. În schimb, timpul de calcul prin metoda matricei inverse este de circa trei ori mai mare decât cel al metodei împărțirii matricelor.

c) Alte instrumente utile în rezolvarea sistemelor liniare

Aceste aşa-numite instrumente sunt de fapt funcții Matlab pentru calcul matriceal pentru descompunerea şi factorizarea matricelor. Astfel, în secțiunea anterioară *5.2.5 Descompunerea şi factorizarea matricelor* au fost prezentate prin exemple utilizarea metodelor de factorizare Cholesky, QR, LU şi pseudoinversa matriceală, în rezolvarea sistemelor de ecuații liniare.