12. Reprezentarea grafică şi vizualizarea curbelor şi suprafeţelor

12.1. Curbele în grafica pe calculator

Descrierea unei curbe în grafica pe calculator reprezintă o problemă de interpolare a datelor. Aşa cum se cunoaşte, interpolarea este un caz special al unei probleme mai generale de aproximare a funcţiilor. Astfel, se pune problema găsirii unei *forme analitice* care să descrie cât mai precis o mulţime de puncte date (inclusiv în spaţiul bidimensional).

În general, în grafica pe calculator, formele geometrice nu pot fi identificate cu funcţii unice de tip explicit $y = f(x)$, în general funcții polinomiale.

Observaţii.

- Forma celor mai multe obiecte este *intrinsec independentă* de sistemul de coordonate. De exemplu, dacă privim o curbă sau o suprafaţă ca un set de puncte date, atunci, factorul important în determinarea formei obiectului este *relaţia dintre aceste puncte* şi nu cea dintre puncte şi un anumit sistem de referinţă, ales în mod arbitrar. Grafica pe calculator vizează în mod deosebit anumite *calităţi* care sunt caracteristice în condiţii specifice unei curbe sau suprafeţe. Această calitate se mai numeşte şi *proprietatea formei*: de exemplu, o sferă cu neregularităţi este tot o sferă în orice sistem de referinţă, dar *calitatea formei* este afectată.

- Există şi motive de ordin analitic pentru care lucrul cu forma explicită a ecuaţiei curbei este nepotrivită. De exemplu, anumite forme fizice pot avea tangente verticale, pot fi închise sau deschise, deci improprii pentru descrieri polinomiale.

Pentru toate aceste motive, reprezentarea dominantă a formelor în grafica pe calculator se face în *forma parametrică*.

Prin urmare pentru reprezentarea curbelor se va utiliza un set de funcţii parametrice de forma: $x = x(t)$ şi $y = y(t)$. Deci putem spune că o curbă în spaţiu se poate reprezenta prin vectorul $\overline{R}_c[x(t)\ \ y(t)\ \ z(t)]$. Cu ajutorul funcţiilor parametrice (*funcţii de "dirijare"* pentru dispozitivul de afişare) se pot reprezenta curbe care nu pot fi definite de o funcţie analitică explicită de forma $y = f(x)$. Parametrii pot fi mai uşor de controlat decât coeficienții unei expresii polinomiale.

Curbe parametrice polinomiale

O clasă de funcţii parametrice foarte utilizată în grafica pe calculator este chiar cea a **funcţiilor polinomiale**.

Exemplu: *curba cubică parametrică spaţială.*

Exprimare vectorială: $\overline{R} = \overline{A} + \overline{B}t + \overline{C}t^2 + \overline{D}t^3$, unde parametrul t aparţine intervalului [0,1].

Aceasta se poate exprima parametric prin funcţiile cubice scalare:

$$x(t) = a_x + b_x t + c_x t^2 + d_x t^3$$
$$y(t) = a_y + b_y t + c_y t^2 + d_y t^3$$
$$z(t) = a_z + b_z t + c_z t^2 + d_z t^3$$

Se observă că sunt necesari 12 coeficienţi pentru a defini o cubică parametrică. Parametrul *t* fiind o variabilă independentă care are valori pozitive. Din considerente practice, de regulă, această variabilă este asimilată cu timpul.

Determinarea curbelor descrise vectorial prin polinoame.

- Se porneşte de la expresia vectorială generală a unei curbe polinomiale de ordinul *n*:

$$\overline{P}(u) = \overline{A}_0 + \overline{A}_1 u + \overline{A}_2 u^2 + \cdots + \overline{A}_n u^n \,, \qquad (1)$$

unde parametrul $u \in [0,1]$ şi admite descrierea vectorială $\overline{u} = \left[1 \; u \; u^2 \ldots u^n\right]^T$, iar matricea vectorilor constanţi (coeficienţii) ce descriu de fapt curba este $\overline{A} = \left[\overline{A}_0 \; \overline{A}_1 \; \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n\right]$.

Pentru a determina curba trebuie aflaţi coeficienţii $A_0, \ldots A_n$ (necunoscutele), astfel:

- Se impune condiţia trecerii curbei prin *n*+1 puncte date $P(u_i)$, ceea ce se reduce la rezolvarea ecuației vectoriale $\overline{P}(u_i) = \overline{A} \cdot \overline{u}_i$, în care $\overline{u}_i = \left[1 \; u_i \; u_i^{\,2} \ldots u_i^{\,n}\right]^T$, cu $i = 0, 1, \ldots, n$.
- Se scrie sistemul matriceal de *n+1* ecuații liniare sub forma ecuației vectoriale: $\overline{P} = \overline{A} \cdot \overline{U}$, care explicitată (pe componentele sale $i = 0, 1, \ldots, n$) se scrie:

$$\overline{P} = [\overline{P}(u_0)\; \overline{P}(u_1) \ldots \overline{P}(u_n)] = \left[\overline{A}_0 \; \overline{A}_1 \; \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_0^2 & u_1^2 & \cdots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_0^n & u_1^n & \cdots & u_n^n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

- Matricea U admite inversa U^{-1}, iar coeficienţii polinomiali ai reprezentărilor parametrice se determină cu ecuaţia matriceală:

$$\overline{A} = \overline{P} \cdot \overline{U}^{-1}, \qquad (3)$$

în care $\overline{A}$ este matricea coeficienţilor, $\overline{P}$ matricea coordonatelor punctelor date (coordonatele fiecărui punct dispuse pe coloane, deci, matrici cu dimensiunea $3 \times n$), $\overline{U}^{-1}$ este inversa matricii parametrilor (organizată aşa cum s-a arătat mai sus).

În această manieră se determină unele **curbe remarcabile** frecvent utilizate în grafica pe calculator: cubica Ferguson, cubica Bézier, determinate de polinoame cubice particulare, cubica Coons definită de un polinom specific.

Cubica Ferguson

Cubica Ferguson (*J.C.Ferguson*, 1964) este curba determinată de două puncte extreme *P₀* şi *P₁* (de la început şi sfârşit) şi de valorile tangentelor în aceste puncte $P_0^{'}, P_1^{'}$.

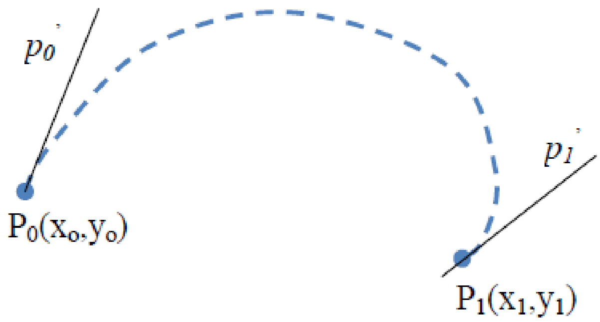


Fig.1. Exemplu generic de curba cubica Ferguson

Ecuaţia vectorială a cubicei Ferguson este

$$\overline{P}(u) = \overline{P}_0 \cdot F_1(u) + \overline{P}_1 \cdot F_2(u) + \overline{P}_0' \cdot F_3(u) + \overline{P}_1' \cdot F_4(u),$$

în care $u \in [0,1]$, iar funcţiile F_i , $i = 1,2,3,4$ sunt polinoamele cubice următoare:

$$F_1(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1$$
$$F_2(u) = -2u^3 + 3u^2$$
$$F_3(u) = u^3 - 2u^2 + u$$
$$F_4(u) = u^3 - u^2$$

Observaţii:

- din expresia funcţiei $P(u)$ rezultă în mod evident faptul că este vorba de o curbă cubică;
- punctul de început al curbei este P_0, deoarece: $F_1(0) = 1$, $F_2(0) = F_3(0) = F_4(0) = 0$, deci $P(0) = P_0$.
- dacă derivăm funcţia $P(u)$ obţinem:

$$\frac{d\overline{P}(u)}{du} = \overline{P}_0 \frac{dF_1(u)}{du} + \overline{P}_1 \frac{dF_2(u)}{du} + \overline{P}_0' \frac{dF_3(u)}{du} + \overline{P}_1' \frac{dF_4(u)}{du},$$

din care, pentru $u = 0$ se obţine $\left.\frac{d\overline{P}}{du}\right|_{u=0} = \overline{P}_0'$, deci valoarea tangentei în punctul de început al curbei.

Analog se demonstrează pentru vectorul tangent în punctul final al curbei $\overline{P}_1'$.

Cubica Bezier

Cubica Bezier este determinată printr-un polinom cubic exprimat sub forma vectorială:

$$\overline{P}(u) = \sum_{i=1}^{4} \overline{V_i} \cdot B_i(u),$$

în care $\overline{V_i}$ sunt vectorii de poziţie a patru vârfuri ale unui poligon director (caracteristic) al cubicei, iar B_i sunt funcţiile cubice ale curbei Bezier definite astfel:

$$B_1(u) = (1-u)^2$$
$$B_2(u) = 3u(1-u)^2$$
$$B_3(u) = 3u^2(1-u)$$
$$B_4(u) = u^3$$

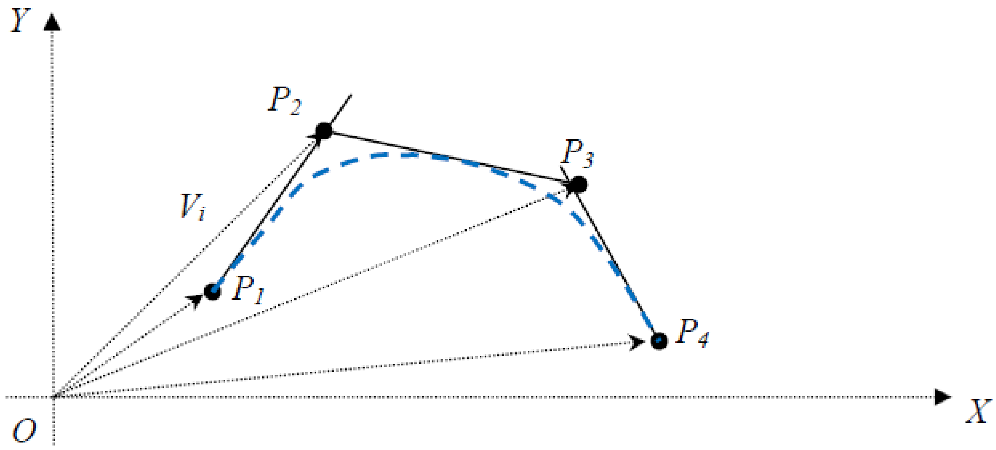


Fig.2. Exemplu de curba cubica Bezier

Observaţii. În general, vârfurile poligonului director al curbei Bezier nu sunt situate în totalitate pe curba propriuzisă.

Curba Bezier are următoarele proprietăţi:
- extremităţile (punctele de capăt) ale curbei sunt comune cu poligonul;
- Înclinarea tangentelor la curbă în punctele extreme ale curbei este egală cu înclinarea primei şi respectiv ultimei laturi ale poligonului director;
- curba se află conținută în întregime *în corpul convex* al punctelor extreme ale poligonului director.

Curba Bezier determinată de un poligon cu n-1 vârfuri are ca ecuaţie un polinom cu gradul n-1, iar B_i sunt funcţii de grad n-1. De exemplu un poligon cu 5 vârfuri defineşte o curbă de gradul 4. Valorile funcţiilor B_i sunt pozitive în intervalul [0,1].

Cubica Coons

Cubica Coons este definită pe baza aceluiaşi principiu ca şi curba lui Bezier. Ecuaţia vectorială este de forma următoare:

$$\overline{P}(u) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{4}\overline{V}_i \cdot C_i(u),$$

în care $\overline{V}_i$ sunt vectorii de poziţie a patru vârfuri ale unui poligon director al cubicei, iar C_i sunt funcţiile cubice ale curbei Coons, definite astfel:

$$C_1(u) = (1-u)^2$$
$$C_2(u) = 3u^3 - 6u^2 + 4$$
$$C_3(u) = -3u^3 + 3u^2 + 3u + 1$$
$$C_4(u) = u^3$$

12.2. Suprafeţe

O suprafaţă este constituită dintr-o infinitate de puncte, care satisfac o funcţie de două variabile: $z = f(x, y)$. În descrierea parametrică, un punct situat pe o suprafaţă este reprezentat prin vectorul $\overline{R}_S[x(u,v) \;\; y(u,v) \;\; z(u,v)]$. Unde u şi v sunt parametrii.

Pentru rezolvarea problemei vizualizării funcţiilor de două variabile cei mai utilizaţi algoritmi sunt cel al lui Williamson şi cel al lui Wright.

Algoritmul Williamson

- Se efectuează *secţiuni succesive* ale suprafeţei cu plane x=const. (paralele cu planul YOZ).
- Coordonatele punctelor formând linia de creastă a curbelor astfel obţinute se stochează într-un tabel de date (tabelul "linia de creastă").
- Curbele astfel obţinute sunt *reportate într-un plan* (după ce s-a aplicat eventual *un decalaj de poziţie*) în scopul simulării profunzimii (adâncimii) astfel:
  - se afişază curba cea mai aproape de observator (în urma testului de adâncime),
  - se consideră apoi curba care se găseşte imediat în spatele primei, în raport cu observatorul,
  - se rezolvă problema vizibilităţii: de fiecare dată când, pentru un x şi un y date se găseşte o cotă z mai mică decât cota curbei din faţă atunci punctul este ascuns (invizibil). În cazul general, (dacă s-a aplicat un decalaj pentru perspectivă) se compară vectorii de poziţie ai punctelor analizate.

Forma programabilă a suprafeţei de tip Ferguson

Generarea unei suprafeţe se face pornind de la o curbă. Descrierea matematică a suprafeţei se bazează, de asemenea pe ecuaţia curbei, în care se introduce al doilea parametru.

1) *Ecuaţia parametrică a curbei în format vectorial*:

$$\bar{r}(u) = \bar{a}_0 + u\bar{a}_1 + u^2\bar{a}_2 + u^3\bar{a}_3$$

unde $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ sunt vectorii coeficienţilor, iar $u \in [0,1]$ este parametrul curbei.

2) Se înlocuiesc vectorii $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ prin alte funcţii care depind de al doilea parametru $v \in [0,1]$, astfel:

$$\bar{a}_i = \bar{a}_{i0} + v\bar{a}_{i1} + v^2\bar{a}_{i2} + v^3\bar{a}_{i3}, \qquad i = 0,1,2,3$$

3) *Ecuaţia suprafeţei Ferguson este în forma vectorială*:

$$\bar{r} = \bar{r}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\bar{a}_{ij}u^i v^j$$

4) Forma explicitată matriceal, pune în evidenţă matricea ”amprentă” a suprafeţei:

$$\bar{r}(u,v) = [1, u, u^2, u^3] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{a}_{00} & \bar{a}_{01} & \bar{a}_{02} & \bar{a}_{03} \\ \bar{a}_{10} & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{20} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{30} & \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matricea "amprentă"} \\ \text{a suprafeţei}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

5) Se decompune forma vectorială pe cele trei componente x, y, z, obținând ecuaţiile parametrice ale suprafeţei, care pun în evidență *16 x 3=48* coeficienți:

$$x(u,v) = \left[1, u, u^2, u^3\right] \cdot \begin{bmatrix} a_{00}^x & a_{01}^x & a_{02}^x & a_{03}^x \\ a_{10}^x & a_{11}^x & a_{12}^x & a_{13}^x \\ a_{20}^x & a_{21}^x & a_{22}^x & a_{23}^x \\ a_{30}^x & a_{31}^x & a_{32}^x & a_{33}^x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

$$y(u,v) = \left[1, u, u^2, u^3\right] \cdot \begin{bmatrix} a_{00}^y & a_{01}^y & a_{02}^y & a_{03}^y \\ a_{10}^y & a_{11}^y & a_{12}^y & a_{13}^y \\ a_{20}^y & a_{21}^y & a_{22}^y & a_{23}^y \\ a_{30}^y & a_{31}^y & a_{32}^y & a_{33}^y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

$$z(u,v) = \left[1, u, u^2, u^3\right] \cdot \begin{bmatrix} a_{00}^z & a_{01}^z & a_{02}^z & a_{03}^z \\ a_{10}^z & a_{11}^z & a_{12}^z & a_{13}^z \\ a_{20}^z & a_{21}^z & a_{22}^z & a_{23}^z \\ a_{30}^z & a_{31}^z & a_{32}^z & a_{33}^z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

TEMĂ:

Se vor studia aplicaţiile: *Nr4, Nr5 şi Nr6* prezentate în continuarea cursului.
Se vor implementa programele de exemplificare şi se vor rezolva exercițiile propuse.

Aplicatii curbe Nr. 4

CURBA CUBICĂ PARAMETRICĂ SPAŢIALĂ

Aplicaţie 1.

Să se determine o cubică spaţială definită prin patru puncte `M1=[0 0 0]`, `M2=[1 0 1]`, `M3=[1 1 0]`, `M4=[0 1 0]`, ştiind că valorile parametrului *u* sunt 0, 1/3, 2/3 şi 1.

Problema se rezolvă pe baza ecuaţiei matriceale $\overline{A} = \overline{P} \cdot \overline{U}^{-1}$, unde:

$$P = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$U = \begin{matrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & 0.3333 & 0.6667 & 1.0000 \\ 0 & 0.1111 & 0.4444 & 1.0000 \\ 0 & 0.0370 & 0.2963 & 1.0000 \end{matrix}$$

$$U^{-1} = \begin{matrix} 1.0000 & -5.5000 & 9.0000 & -4.5000 \\ 0 & 9.0000 & -22.5000 & 13.5000 \\ 0 & -4.5000 & 18.0000 & -13.5000 \\ 0 & 1.0000 & -4.5000 & 4.5000 \end{matrix}$$

După efectuarea calculelor se obţine matricea coeficienţilor:

$$A = \begin{matrix} 0 & 4.5000 & -4.5000 & 0.0000 \\ 0 & -3.5000 & 13.5000 & -9.0000 \\ 0 & 9.0000 & -22.5000 & 13.5000 \end{matrix}$$

Ecuaţiile parametrice ale curbei sunt:

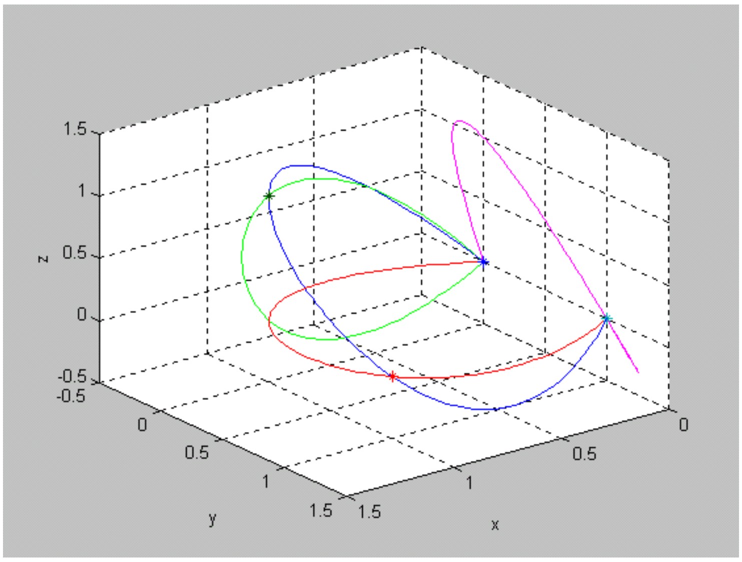
```
x=A(1,1)+A(1,2)*u+A(1,3)*u^2+A(1,4)*u^3
y=A(2,1)+A(2,2)*u+A(2,3)*u^2+A(2,4)*u^3
z=A(3,1)+A(3,2)*u+A(3,3)*u^2+A(3,4)*u^3
```

adică:

```
x = 4,5u+4,5u^2
y = -3,5*u+13,5*u^2-9*u^3
z = 9*u-22,5*u^2+13,5*u^3
```

Programul următor calculează matricea coeficienţilor, trasează curba spaţială şi proiecţiile acesteia pe planele triedrului de referinţă.

```
%cubica parametrică spatiala
clear
%puncte date
m1=[0 0 0]
m2=[1 0 1]
m3=[1 1 0]
m4=[0 1 0]
%valorile parametrului
pu=[0 1/3 2/3 1]
%definirea matricelor sistemului
%matricea punctelor date
P=[m1; m2; m3; m4]'
%matricea U
U=[ones(1,4); pu; pu.^2; pu.^3]
%matricea coeficientilor ecuatiilor parametrice
A=P*inv(U)
%ecuatiile parametrice
t=0:0.01:1
for i=1:length(t)
    x(i)=A(1,1)+A(1,2)*t(i)+A(1,3)*(t(i))^2+A(1,4)*(t(i))^3
    y(i)=A(2,1)+A(2,2)*t(i)+A(2,3)*(t(i))^2+A(2,4)*(t(i))^3
    z(i)=A(3,1)+A(3,2)*t(i)+A(3,3)*(t(i))^2+A(3,4)*(t(i))^3
end
%trasare grafica
plot3(x, y, z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
grid
%optional punctele de definire
hold on
plot3(m1(1),m1(2),m1(3),'*',m2(1),m2(2),m2(3),'*',m3(1),m3(2),m3(3),'*',...
      m4(1),m4(2),m3(3),'*')
%proiectiile curbei pe planele triedrului
vzero=zeros(1,i)
hold on
plot3(x,y,vzero,'r')
hold on
plot3(x,vzero,z,'g')
hold on
plot3(vzero,y,z,'y')
end
```



Aplicaţie 2.

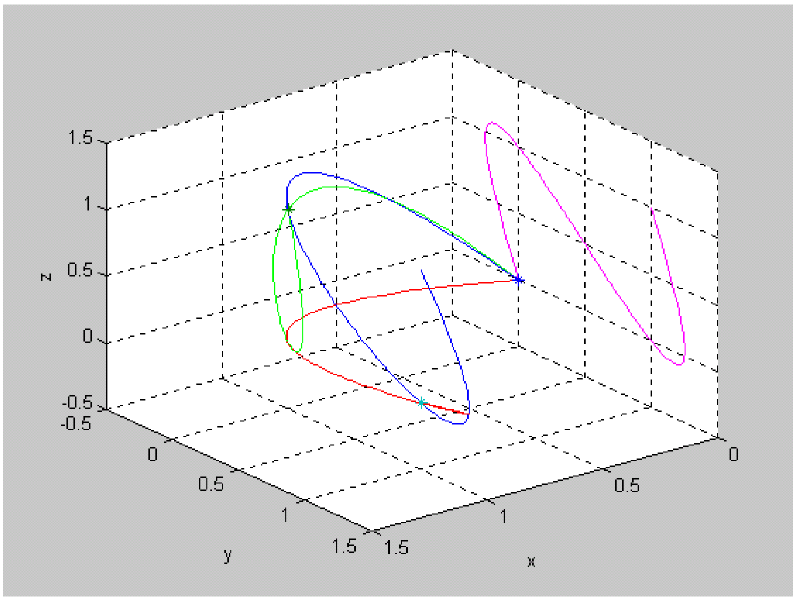
Aceeaşi problemă de la aplicaţia 1, cu condiţia că ultimul punct al curbei este `M4=[1 1 1]`

Matricea coeficienţilor se modifică astfel:

A =

0	5.5000	-9.0000	4.5000
0	-3.5000	13.5000	-9.0000
0	10.0000	-27.0000	18.0000

Curba şi proiecţiile sale au aspectul din figura de mai jos.



Întrebări şi exerciţii.

1. Determinaţi o curbă cubică spaţială închisă.
2. Se poate sa se determine o curbă cubică spaţială având forma cifrei 8 ?

APLICATII Nr.5: Curbe polinomiale descrise vectorial

1. Cubica Ferguson

Enunţ

Să se determine cubica Ferguson definită prin **punctele terminale** $P_0(0,0,0)$ şi $P_1(1,1,0)$ şi prin **vectorii tangenţi curbei** în aceste puncte $\overline{P}_0' = [5,0,5]$ şi $\overline{P}_1' = [10,0,0]$.

Soluţie.

Ecuaţia vectorială ce descrie curba Ferguson (vezi curs), în acest caz se explicitează formal astfel:

$$[x, y, z] = [0,0,0]\cdot F_1(u) + [1,1,0]\cdot F_2(u) + [5,0,5]\cdot F_3(u) + [10,0,0]\cdot F_4(u)$$

adică, explicitând şi funcţiile polinomiale ale lui Ferguson se obtine:

$$[x, y, z] = [0,0,0]\cdot\left(2u^3 - 3u^2 + 1\right) + [1,1,0]\cdot\left(-2u^3 + 3u^2\right) + [5,0,5]\cdot\left(u^3 - 2u^2 + u\right) + [10,0,0]\cdot\left(u^3 - u^2\right).$$

Se proiectează ecuaţia vectorială a curbei Ferguson pe axele Ox, Oy, respectiv Oz. Prima formă este mai uşor de utilizat şi prin umare se obţin ecuaţiile :

$$x(u) = F_2(u) + 5F_3(u) + 10F_4(u)$$
$$y(u) = F_2(u)$$
$$z(u) = 5F_3(u)$$

Înlocuind expresiile funcţiilor F_i (vezi curs) rezultă:

$$x(u) = 13u^3 - 27u^2 + 5u$$
$$y(u) = -2u^3 + 3u^2$$
$$z(u) = 5u^3 - 10u^2 + 5u$$

Algoritmul de rezolvare

Rezolvarea se poate face cel mai uşor în forma matriceală, aranjând datele problemei după cum urmează :

- vectorul funcţiilor polinomiale ale curbei Ferguson F_i , $i = 1,2,3,4$:

$$F = \begin{bmatrix} 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ -2u^3 + 3u^2 \\ u^3 - 2u^2 + u \\ u^3 - u^2 \end{bmatrix}$$

- matricea punctelor date ce definesc curba: $P_0(0,0,0)$ $P_1(1,1,0)$ $\overline{P}_0' = [5,0,5]$ şi $\overline{P}_1' = [10,0,0]$:

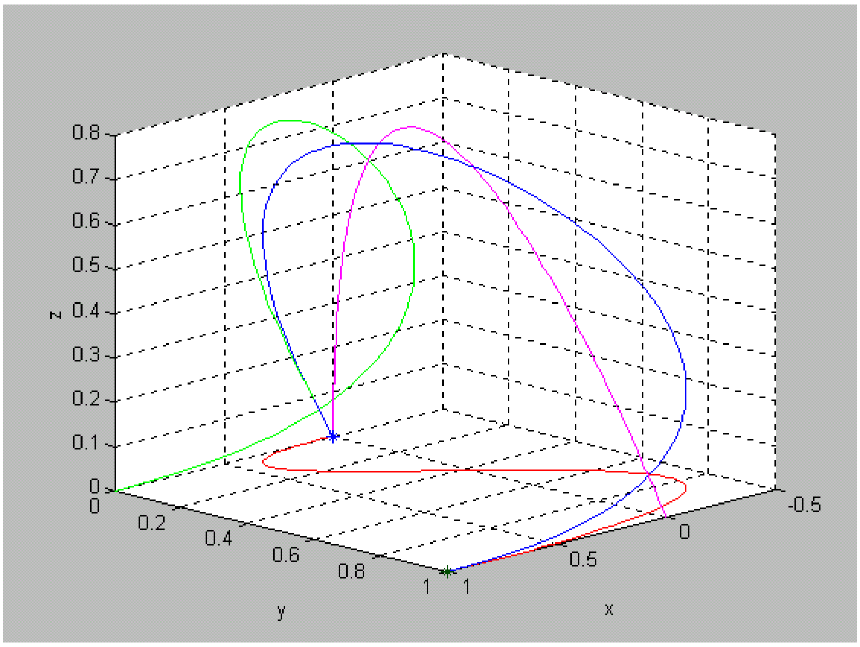
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

- vectorul coordonatelor parametrice este de tip coloană şi se obţine astfel :

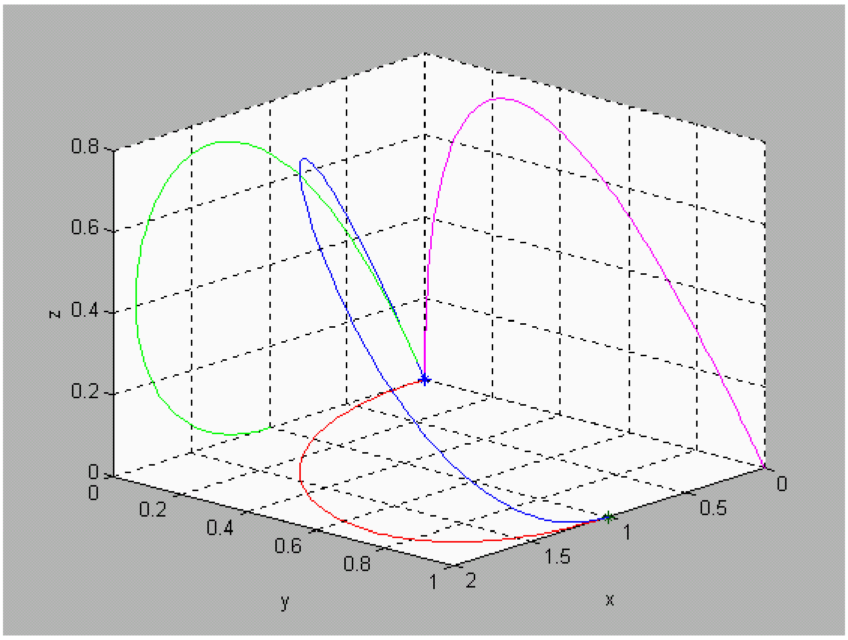
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ -2u^3 + 3u^2 \\ u^3 - 2u^2 + u \\ u^3 - u^2 \end{bmatrix}$$

Codul sursă al programului de rezolvare

```
%curba Ferguson
clear
%puncte date
m1=[0 0 0];
m2=[1 1 0];
m3=[5 0 5];
m4=[10 0 0];
%vectorul parametrului
i=1;
for u=0:0.01:1
%vectorul functiilor
f=[(2*u^3-3*u^2+1) (-2*u^3+3*u^2) (u^3-2*u^2+u) (u^3-u^2)]'
P=[m1; m2; m3; m4]';
%ecuatiile parametrice
xyz=P*f
x(i)=xyz(1)
y(i)=xyz(2)
z(i)=xyz(3)
i=i+1;
end
%trasare grafica
plot3(x, y, z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
grid
%optional punctele de definire
hold on
plot3(m1(1),m1(2),m1(3),'*',m2(1),m2(2),m2(3),'*')
%proiectiile curbei pe planele triedrului
vzero=zeros(1,i-1);
hold on
plot3(x,y,vzero,'r')
hold on
plot3(x,vzero,z,'g')
hold on
plot3(vzero,y,z,'m')
end
```



Curbă Ferguson (cu albastru) şi proiecţiile sale ($\overline{P}_1^{'} = [10{,}0{,}0]$)



Curbă Ferguson (cu albastru) şi proiecţiile sale ($\overline{P}_1^{'} = [-5{,}0{,}0]$)

2. Cubica Bezier

Aplicaţie

Să se determine cubica Bezier definită de **poligonul director** cu vârfurile $V_1(0,0,0)$ $V_2(1,0,0)$, $V_3(0,0,1)$ $V_4(0,1,0)$.

Soluţie.

Ecuaţia vectorială ce descrie curba Bezier în acest caz se explicitează formal astfel :

$$[x, y, z] = [0,0,0] \cdot B_1(u) + [1,0,0] \cdot B_2(u) + [0,0,1] \cdot B_3(u) + [0,1,0] \cdot B_4(u),$$

iar funcţiile cubice sunt :

$$B_1(u) = (1-u)^2$$
$$B_2(u) = 3u(1-u)^2$$
$$B_3(u) = 3u^2(1-u)$$
$$B_4(u) = u^3$$

Ecuaţiile parametrice ale curbei sunt:

$$x(u) = B_2(u)$$
$$y(u) = B_4(u)$$
$$z(u) = B_3(u),$$

adică :

$$x(u) = 3u(1-u)^2$$
$$y(u) = u^3$$
$$z(u) = 3u^2(1-u).$$

Algoritmul de rezolvare.

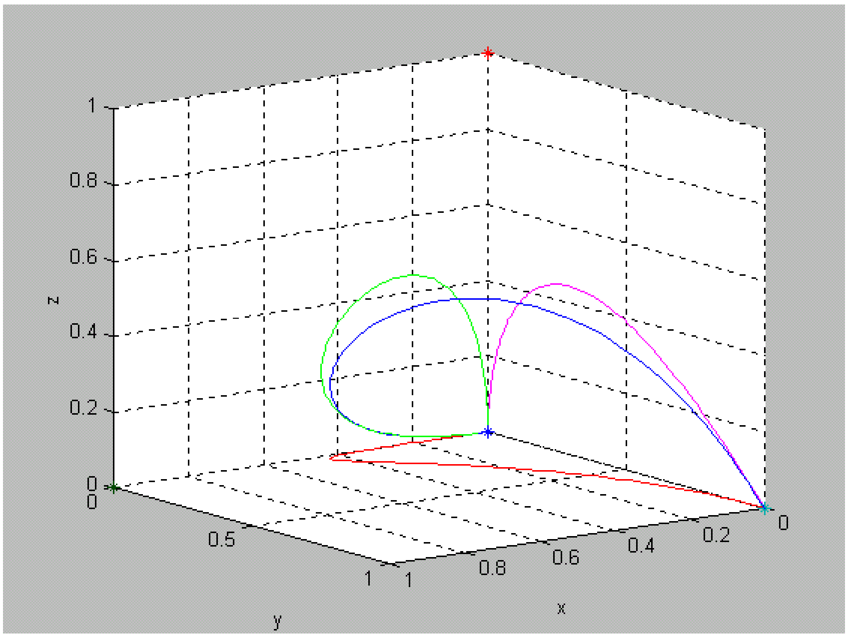
Datele problemei se aranjează în formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}$$

Codul sursă al programului

```
%curba Bezier
clear
%varfuri  olygon director
v1=[0 0 0];
v2=[1 0 0];
v3=[0 0 1];
v4=[0 1 0];
%vectorul parametrului u
i=1;
for u=0:0.01:1
%vectorul functiilor
b=[((1-u)^2) (3*u*(1-u)^2) ((3*u^2)*(1-u)) (u^3)]'
P=[v1; v2; v3; v4]';
%ecuatiile parametrice
xyz=P*b
x(i)=xyz(1)
y(i)=xyz(2)
z(i)=xyz(3)
i=i+1;
end
%trasare grafica
plot3(x, y, z)
xlabel('x')
```

```
ylabel('y')
zlabel('z')
grid
%punctele conturului director
hold on
plot3(v1(1),v1(2),v1(3),'*',v2(1),v2(2),v2(3),'*',...
   v3(1),v3(2),v3(3),'*',v4(1),v4(2),v4(3),'*')
%proiectiile curbei pe planele triedrului
vzero=zeros(1,i-1);
hold on
plot3(x,y,vzero,'r')
hold on
plot3(x,vzero,z,'g')
hold on
plot3(vzero,y,z,'m')
end
```



Curbă Bezier (cu albastru) şi proiecţiile sale

3. Cubica Coons

<u>Aplicaţie</u>.
Să se determine cubica Coons definită de **poligonul director** cu vârfurile $V_1(0,0,0)$ $V_2(1,0,0)$, $V_3(0,0,1)$ $V_4(0,1,0)$.

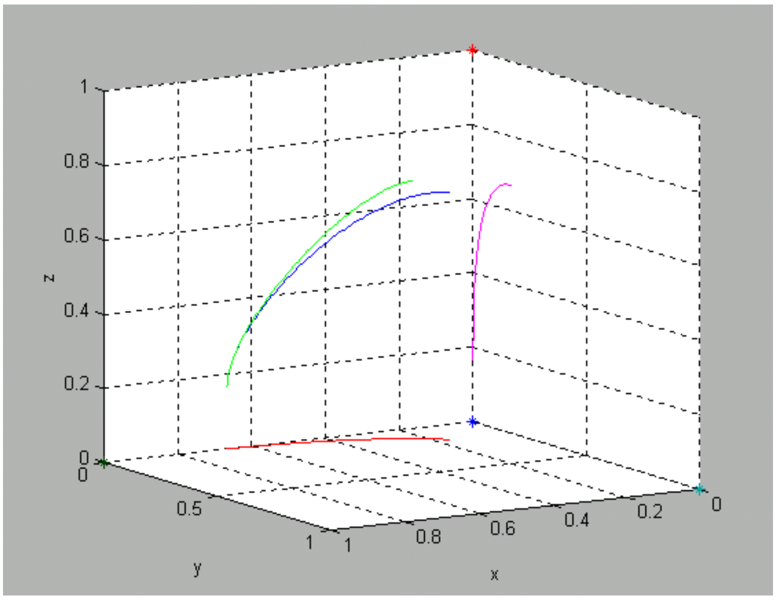
<u>Soluţie</u>.

Se parcurg etapele de la aplicaţia precedentă (curba Bezier), ţinând cont de ecuaţia curbei Coons $\overline{P}(u)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{4}\overline{V_i}\cdot C_i(u)$, respectiv de formele particulare ale funcţiilor cubice C_i :

$$C_1(u)=(1-u)^2$$
$$C_2(u)=3u^3-6u^2+4$$
$$C_3(u)=-3u^3+3u^2+3u+1$$
$$C_4(u)=u^3$$

În *programul sursă* al aplicaţiei se modifică cel mult două instrucţiuni.

```
%curba Coons
clear
%varfuri poligon director
v1=[0 0 0];
v2=[1 0 0];
v3=[0 0 1];
v4=[0 1 0];
%vectorul parametrului
i=1;
for u=0:0.01:1
%vectorul functiilor
c=[((1-u)^3) (3*u^3-6*u^2+4) (-3*u^3+3*u^2+3*u+1) (u^3)]'
P=[v1; v2; v3; v4]';
%ecuatiile parametrice
xyz=(1/6).*P*c
x(i)=xyz(1)
y(i)=xyz(2)
z(i)=xyz(3)
i=i+1;
end
%trasare grafica
plot3(x, y, z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
grid
%punctele conturului director
hold on
plot3(v1(1),v1(2),v1(3),'*',v2(1),v2(2),v2(3),'*',...
   v3(1),v3(2),v3(3),'*',v4(1),v4(2),v4(3),'*')
%proiectiile curbei pe planele triedrului
vzero=zeros(1,i-1);
hold on
plot3(x,y,vzero,'r')
hold on
plot3(x,vzero,z,'g')
hold on
plot3(vzero,y,z,'m')
end
```



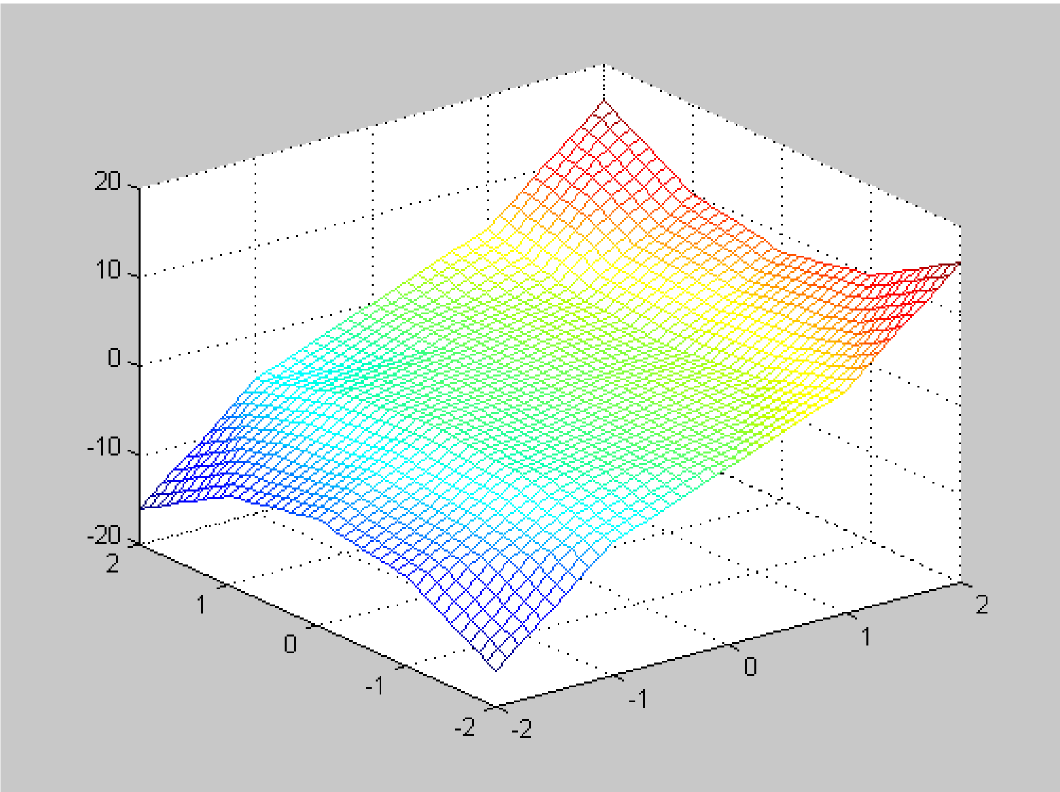
Curbă Coons (cu albastru) şi proiecţiile sale.

APLICATII Nr.6: Modelarea suprafeţelor în grafica pe calculator

Aplicaţie 1.

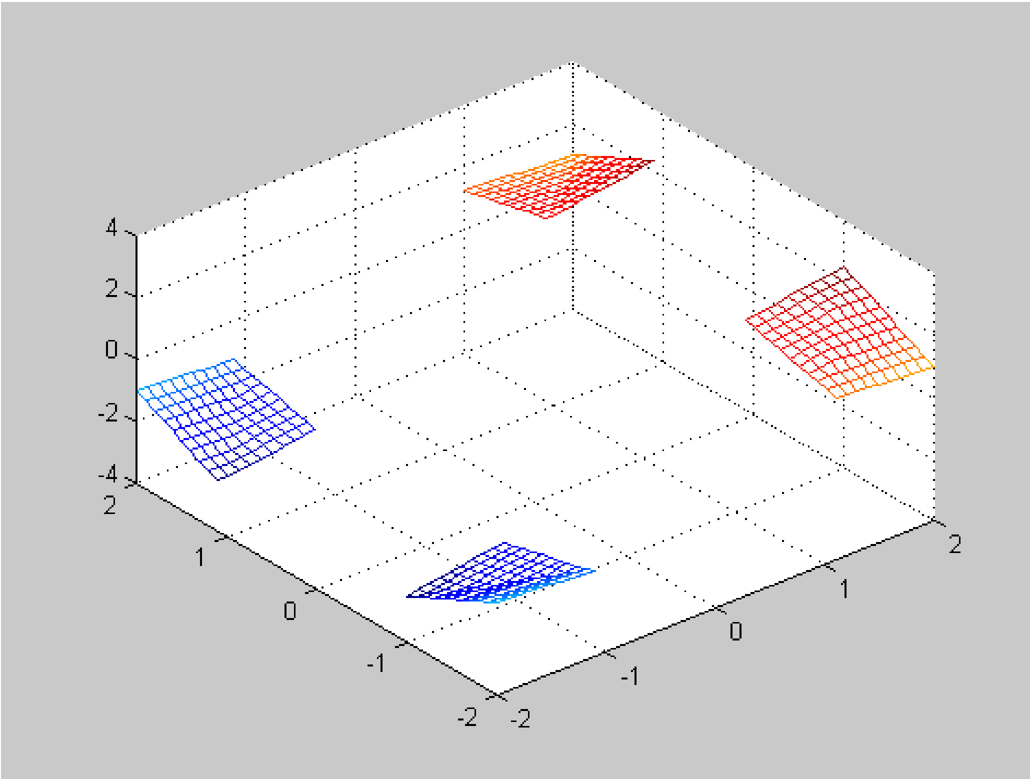
Să se determine suprafaţa definită explicit prin ecuaţia $z=x(x^2+y^2)$.

```
%program suprafata
%reprezentare grafica a suprafetei
%definire a domeniului de reprezentare
x=-2:2
y=-2:2
%transpunere vector y
y=y'
%reteaua de puncte asociata domeniului
[x,y]=meshgrid(x,y)
%ecuatia suprafetei
z=x.*(x.^2+y.^2)
%reteaua punctelor intermediare de reprezentare
xi=-2:.1:2
yi=-2:.1:2
[xr,yr]=meshgrid(xi,yi)
%interpolarea (in punctele intermediare)
zi=griddata(x,y,z,xr,yr)
%reprezentarea grafica
mesh(xr,yr,zi)
```



Aplicaţie 2.

Să se determine suprafaţa definită explicit prin ecuaţia `z=x(x^(1/2)+y^(1/2))` — $z=x(x^{1/2}+y^{1/2})$.



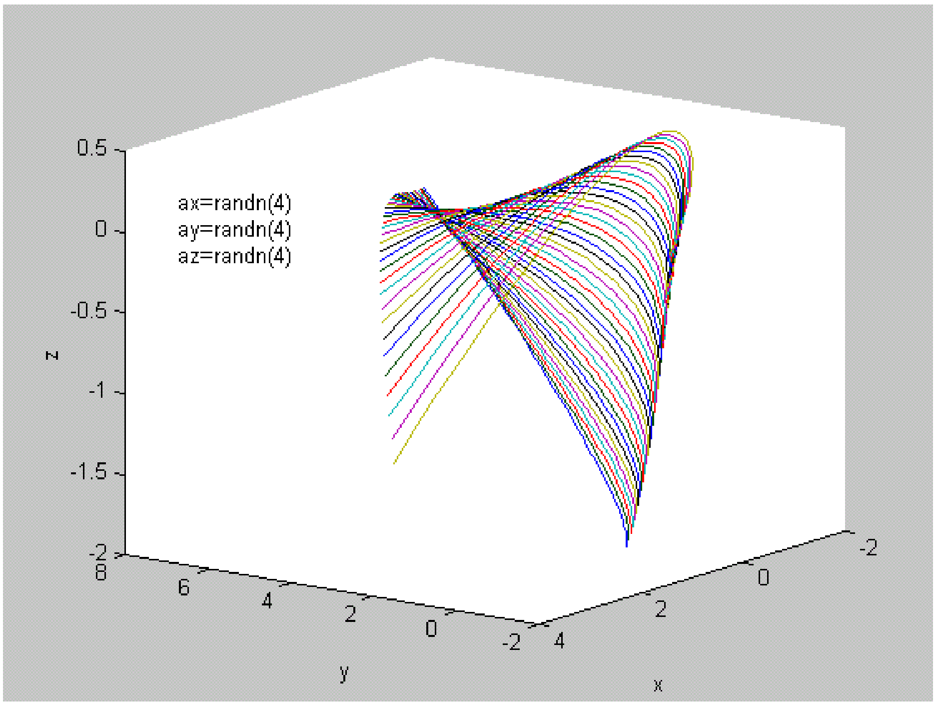
<u>Observaţie</u>:
Programul afişază doar porţiunile de suprafaţă din intervalele în care funcţia este determinată numeric. Pe domeniul în care funcţia nu este reprezentată, valorile numerice depăşesc limitele admise în Matlab (sunt inf sau NaN).

Aplicaţie 3.

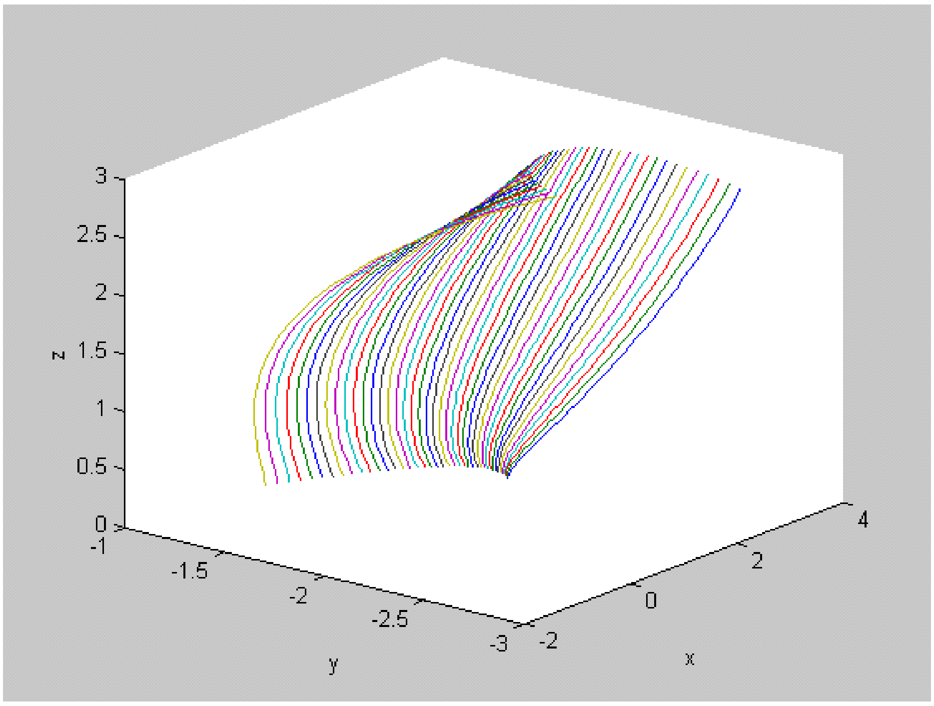
Să se determine suprafaţa Ferguson pentru **matricea "amprentă"** conţinând *valori aleatoare*, pentru <u>trei rulări succesive</u>. La fiecare rulare, coeficienţii din matricea amprentă, fiind generaşi aleator vor avea valori diferite, deci se vor obţine suprafeţe diferite.
Algoritmul de rezolvare se bazează pe ecuaţia matriceală vectorială:

$$\bar{r}(u,v) = \left[1, u, u^2, u^3\right] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{a}_{00} & \bar{a}_{01} & \bar{a}_{02} & \bar{a}_{03} \\ \bar{a}_{10} & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{20} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{30} & \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matricea "amprentă"} \\ \text{a suprafeţei având elementele} \\ \text{vectori tridimensionali}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

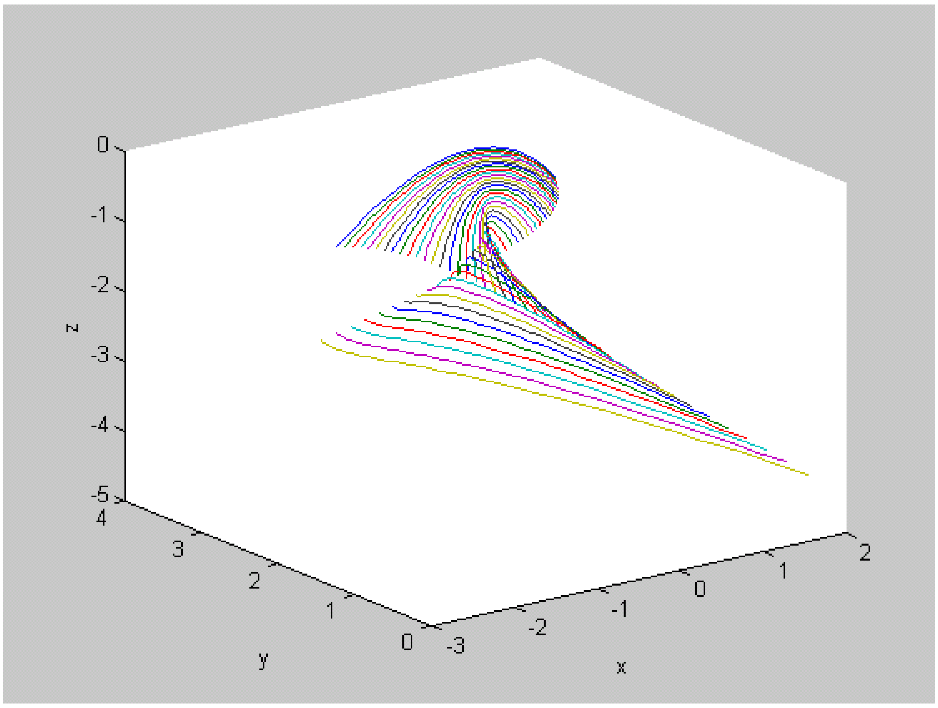
```
%Program pentru generarea libera a suprafetelor
%bazate pe cubice Ferguson
%suprafata Ferguson
clear
%vectorii parametrilor
u=0:0.025:1
v=0:0.025:1
%matricea amprenta (generata cu numere aleatoare)
ax=randn(4)
ay=randn(4)
az=randn(4)
%matricile parametrilor
for i=1:length(u)
   for j=1:length(v)
 up=[1 u(i) u(i).^2 u(i).^3];
 vp=[1 v(j) v(j).^2 v(j).^3];
 x(i,j)=up*ax*vp';
 y(i,j)=up*ay*vp';
 z(i,j)=up*az*vp';
end
%trasare grafica
plot3(x,y,z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
end
```



Suprafaţă Ferguson având ca amprentă o matrice aleatoare cu distribuţie normală (*rularea 1*).



Suprafaţă Ferguson (*rulare 2*)



Suprafaţă Ferguson (*rulare 3*)

Exerciţii.

1. Generaţi suprafeţe Ferguson utilizând matrice amprentă definite prin introducerea manuală a elementelor. Observaţi cum se shimbă forma suprafeţei modificând valorile elementelor matricei amprentă.
2. Folosiţi matrice amprentă remarcabile, definite în Matlab (de exemplu cu funcţiile: hilb, pascal, wilkinson, etc.).