8. COORDONATE OMOGENE. TRANSFORMĂRI ÎN SPAŢIUL 2D si 3D

1. Introducerea coordonatelor omogene

Rolul coordonatelor omogene este de a crea *operatori matriceali* (multiplicativi) inclusiv pentru translaţie. În spatiul bidimensional orice punct se poate exprima:

P(x,y) →P(xo, yo, o),

Unde:

$$xo = x \cdot o$$
$$yo = y \cdot o \text{ ,}$$

o- factor de proporţionalitate

Astfel, vectorul $[a,b,c]$ cu $c \neq 0$ reprezintă punctul de coordonate $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$.

În particular, vectorul de componente $[a,b,0]$ reprezintă un punct de la infinit situat pe dreapta $ay - bx = 0$.

Exemplu:
M(2,3)→M(2,3,1) sau M(4,6,2), sau M(8,12,4).

2. Operatori matriceali în coordonate omogene pentru transformări în 2D

A) Translaţia: $\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$

B) Scalarea în raport cu originea: $\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C) Scalarea în raport cu un punct P(x_p,y_p):

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_p & -y_p & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_p & y_p & 1 \end{bmatrix}$$

D) Rotaţia în raport cu originea: $\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

E) Rotaţia în raport cu un punct P(x_r,y_r):

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_r & -y_r & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_r & y_r & 1 \end{bmatrix}$$

F) Alte transformări exprimate în coordonate omogene:

a) Oglindirea (reflexia):

- faţă de axa Ox $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \rightarrow [x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

- faţă de axa Oy $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \rightarrow [x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

- faţă de origine $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \rightarrow [x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

- faţă de dreapta x=y $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \rightarrow [x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

b) Forfecarea

Are ca efect deformarea figurilor geometrice. Se aplică pe baza factorilor de forfecare f_x -pe axa Ox, respectiv f_y -pe axa Oy.

-pe axa Ox $\begin{cases} x' = x + f_x y \\ y' = y \end{cases} \rightarrow [x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

-pe axa Oy $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + f_y x \end{cases} \rightarrow [x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & f_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

-pe ambele axe $\begin{cases} x' = x + f_x y \\ y' = y + f_y x \end{cases} \rightarrow [x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & f_y & 0 \\ f_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

Definiţie.

Se numeşte transformare de instanţiere, **compunerea a mai multe transformări** pentru a defini *o instanţă* a unui obiect grafic format din mai multe subobiecte şi/sau elemente geometrice.

3. Transformări T și R în 3D în coordonate omogene

Formularea matriceală a transformărilor din spaţiul bidimensional, poate fi extinsă şi la spaţiul tridimensional. Se utilizează coordonatele omogene pentru a reprezenta matricele de transformare.

- **Translaţia (T)** unui punct (X, Y, Z) spre un nou punct (X_1,Y_1, Z_1) este:

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix},$$

în care T_x, T_y, T_z sunt componente ale translației pe direcţiile axelor de coordonate.

- **Rotaţia (R)** în spațiul tridimensional este o transformare mai complexă în comparaţie cu spaţiul bidimensional, prin faptul că este necesară determinarea unei axe de rotaţie, aplicând transformări elementare de rotaţie în raport cu cele trei axe ale sistemului de coordonate.

Rotaţia elementară în jurul axei Ox (Rx) este descrisă de transformarea următoare:

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotaţia elementară în jurul axei Oy (Ry) este descrisă de transformarea următoare:

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotaţia elementară în jurul axei Oz (Rz) este descrisă de transformarea următoare:

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operatorii matriceali de rotație Rx, Ry, Rz depind de unghiurile de rotație θ, φ, ψ. Rotația compusă este dependentă de ordinea de înmulțire a matricelor (care nu este comutativă!).

- **Schimbarea scării (scalarea)**, cu factorii de scară pe fiecare axă S_x, S_y, respectiv S_z:

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observaţie.
- dacă factorul de scară are valori în intervalul deschis (0,1), imaginea se micşorează;
- dacă factorul de scară este 1 imaginea nu se schimbă;
- dacă factorul de scală aparţine intervalului deschis (1,∞), imaginea se măreşte.

- **Juxtapunerea (compunerea)** transformărilor se realizează prin aplicarea succesivă a două sau mai multe transformări. Aceasta se reduce la operaţii de înmulţire a matricelor, păstrând ordinea de aplicare a transformărilor.

Temă:

Scrieți programe (funcții) în limbaj de nivel înalt (de exemplu C++) folosind primitive grafice, pentru realizarea transformărilor 2D și 3D studiate.