Seminarul 1 Electrotehnică, C2

Noțiuni introductive

1. Mărimi fizice

....

2. Noțiuni de calcul vectorial (algebra vectorială)

....

3. Noțiuni elementare de algebră

3.1 Ecuații

Să se determine necunoscutele din ecuațiile:

1. $5x+7=27$
2. $\frac{x+3}{5}=\frac{2}{9}$
3. $\frac{2x+5}{4}=\frac{3x}{5}$
4. $x^2-3x+2=0$
5. $2x^2+7x-5=0$

3.2 Sisteme liniare de ecuații

3.2.1 Sisteme de două ecuații cu două necunoscute

A rezolva sistemul de ecuații înseamnă a-i determina soluțiile.

METODA REDUCERII (METODA COMBINAȚIILOR LINIARE)

Se procedează astfel:

1. Se înmulțesc termenii unei ecuații cu un număr, iar termenii celeilalte ecuații cu un alt număr astfel încât prin adunarea sau scăderea egalităților sa se anuleze termenii ce conțin una din necunoscute (termenii se reduc).
2. Se rezolva ecuația cu o singura necunoscuta obținută.
3. Se introduce valoarea necunoscutei aflate într-una dintre ecuațiile sistemului și se rezolva ecuația obținută (sau se poate rezolva tot prin reducere pentru a afla a doua necunoscută).
4. Perechea de numere obținută este soluția sistemului.

EX.

1.

$$\begin{cases} 2x+3y-5=0 \rightarrow \bullet(-2) \\ 5x+2y+2=0 \rightarrow \bullet 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x-6y+10=0 \\ 15x+6y+6=0 \\ \end{cases} \Rightarrow 11x+16=0 \Rightarrow x=\frac{-16}{11}$$

$$\Rightarrow 2\bullet\left(-\frac{16}{11}\right)+3y=5 \Rightarrow 3y=5+\frac{32}{11} \Rightarrow 3y=\frac{55+32}{11} \Rightarrow 3y=\frac{87}{11} \Rightarrow y=\frac{87}{11}\bullet\frac{1}{3}=\frac{29}{11}$$

Sistemul are soluția: $\left(-\frac{16}{11};\frac{29}{11}\right)$

2.

$$\begin{cases}2x-3y=5\\ x+y=10\to\bullet 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-3y=5\\ 3x+3y=30\end{cases}\Rightarrow 5x=35\Rightarrow x=\frac{35}{5}=7\Rightarrow 2\bullet 7-3y=5\Rightarrow$$

$$14-3y=5\Rightarrow -3y=5-14\Rightarrow -3y=-9\Rightarrow y=3$$

Sistemul are soluția (7;3)

3.

$$\begin{cases}3x+4y=-6\to\bullet 5\\ -5x+7y=-31\to\bullet 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}15x+20y=-30\\ -15x+21y=-93\end{cases}\Rightarrow 41y=-123\Rightarrow y=-\frac{123}{41}=-3$$

$$\begin{cases}3x+4y=-6\to\bullet(-7)\\ -5x+7y=-31\to\bullet 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-21x-28y=42\\ -20x+28y=-124\end{cases}\Rightarrow -41x=-82\Rightarrow x=\frac{-82}{-41}=2$$

Sistemul are soluția (2; -3)

METODA SUBSTITUTIEI

Se procedează astfel:

1. Se scoate o necunoscută din una din ecuații.
2. Se introduce necunoscuta scoasă în a doua ecuație.
3. Se află necunoscuta.
4. Cu soluția aflată se revine la prima ecuație si se află a doua necunoscută.

EX.

1.

$$\begin{cases}2x-3y=5\\ x+y=10\Rightarrow x=10-y\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x-3y=5\Rightarrow 2(10-y)-3y=5\Rightarrow 20-2y-3y=5\Rightarrow -5y=-15\Rightarrow y=3$$

$$x=10-y\Rightarrow x=10-3=7\Rightarrow S=\{7;3\}$$

2.

$$\begin{cases}2x+3y=5\\ 5x+2y=-2\Rightarrow 5x=-2-2y\Rightarrow x=\dfrac{-2-2y}{5}\end{cases}$$

$$2x+3y=5\Rightarrow 2\left(-\frac{2+2y}{5}\right)+3y=5\Rightarrow -4-4y+15y=25\Rightarrow 11y=29\Rightarrow y=\frac{29}{11}$$

$$x=-\frac{2+2y}{5}\Rightarrow x=-\frac{2+2\cdot\frac{29}{11}}{5}=-\frac{22+58}{55}=-\frac{16}{11}$$

S= $\left\{-\frac{16}{11};\frac{29}{11}\right\}$

3.2.2 Sisteme cu mai multe ecuații

Se consideră un sistem de n ecuații cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Sistemul este **compatibil** dacă admite cel puțin o soluție.
Un sistem compatibil este **determinat** dacă admite soluție unică.
Un sistem este **compatibil determinat** dacă $\det A \neq 0$

$X = A^{-1}B$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$

Δ_i – este determinantul atașat matricei care se obține din matricea A, prin înlocuirea coloanei i, cu coloana termenilor liberi: $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute are forma $(S): \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

- METODA REDUCERII (METODA COMBINAȚIILOR LINIARE)
- METODA SUBSTITUTIEI
....
- REGULA LUI CRAMER

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ **-** determinantul sistemului

$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (se obține din Δ înlocuind coeficienții lui x , prin coloana termenilor liberi)

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (se obține din Δ înlocuind coeficienții lui y , prin coloana termenilor liberi)

$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ (se obține din Δ înlocuind coeficienții lui z , prin coloana termenilor liberi)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Exemplu: $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 1 - 1 - 4 + 1 = -3$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 - 3 = -9$$

$\Rightarrow$ x = 1, y = 2, z = 3

$$AX = B,\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercițiu:

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 7 \\ 5x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Aplicații electrostatică - Forța lui Coulomb; Forța electrică;

Breviar teoretic:
Forța lui Coulomb

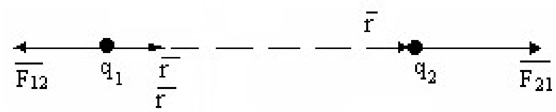


Figura 1. Forțele ce se exercită între două corpuri punctiforme încărcate cu sarcină pozitivă

Enunț: Forța $\overline{F}_{21}$ exercitată în vid de un mic corp încărcat cu sarcina electrică q_1 asupra unui mic corp încărcat cu q_2 este direct proporțională cu produsul sarcinilor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele, având direcția dreptei ce le unește.

$$\overline{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \frac{\overline{r}}{r} = -\overline{F}_{12}$$

$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$, permitivitatea electrică a vidului, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \; N \cdot m^2 / C^2$ vidului;

Observație: Direcția forțelor este dată de dreapta ce unește cele două corpuri iar sensul forțelor depinde de semnul sarcinilor (sarcinile de același semn se resping iar cele de semn contrar se atrag).

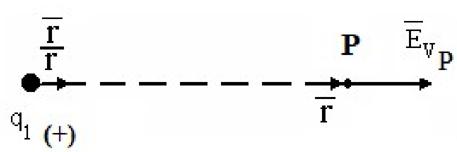
Forța electrică este forța exercitată asupra unui mic corp încărcat cu sarcină electrică și plasat într-un câmp electric.

$$\overline{F} = q \cdot \overline{E}$$

Pentru $q \geq 0 \;\Rightarrow\; \overline{F} \uparrow\uparrow \overline{E}$, forța este homoparalelă cu intensitatea câmpului electric (paralelă și de același sens).

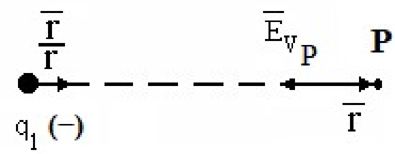
Pentru $q \leq 0 \;\Rightarrow\; \overline{F} \uparrow\downarrow \overline{E}$, forța este antiparalelă cu intensitatea câmpului electric (paralelă și de sens opus).

Intensitatea câmpului electric în vid, generat de o sarcină punctiformă, $\overline{E}_V [V/m]$

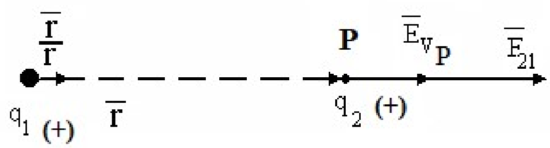


$$\overline{E}_{V_P} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \overline{u}_r$$

$\overline{E}_{V_P}$ - vectorul câmp electric în vid generat de un corp punctiform încărcat cu sarcină electrică într-un punct P, situat la distanța *r* de acesta.



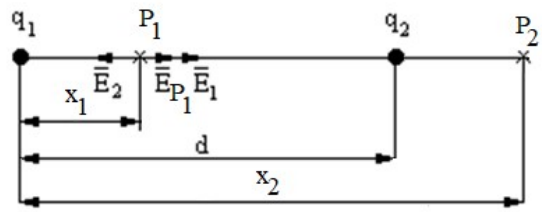
$\overline{F}_{21} = q_2 \cdot \overline{E}_{V_P}$



Potențialul electric, V[V], $V_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$

Probleme propuse:

P1. Se consideră trei corpuri punctiforme încărcate cu sarcinile $q_1 = 0,2\,\mu C$, $q_2 = 0,8\mu C$ situate în aer la distanța $d = 27cm$ ca în figură, și $q_3 = 0,4\mu C$.



a). Dacă $q_3 = 0,4\mu C$ se află în punctul P_1, x_1=5 cm, să se calculeze forța electrică ce acționează asupra sa, $\overline{F}_{q_3} = ?$;

b). Dacă q_3 se află în punctul P_2, x_2=30 cm, să se calculeze forța electrică ce acționează asupra sa, $\overline{F}'_{q_3} = ?$;

c). La ce distanță pe dreapta ce unește corpurile 1 și 2 trebuie plasat al 3-lea corp, astfel încât acesta să rămână în echilibru mecanic?

d). Cât este potențialul electric în punctul determinat la cerința c) ?

Indicații: