CUADRICE

1. SFERA

Fie $C(x_0, y_0, z_0)$ un punct fix și $R>0$ un număr real fixat. Mulțimea punctelor $M(x,y,z)$ cu proprietatea că distanța de la aceste puncte la punctul fix C este egală cu R, deci $d(C,M)=R$ este o suprafață numită <u>sferă de centru C și rază R</u>

Folosind expresia analitică a distanței dintre două puncte, rezultă:

$$(1.1) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

și, în acest fel, sfera notată cu S este mulțimea:

$$S=\{M(x,y,z) \mid (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2\}$$

<u>Definiția 1</u>: Ecuația (1.1) se numește <u>ecuația carteziană implicită a sferei de centru C și rază R</u>.

Ecuația (1.1) este echivalentă cu trei ecuații parametrice în $\mathbb{R}^3$:

$$(1.2) \qquad \begin{cases} x=x_0+R\cos u \sin v \\ y=y_0+R\sin u \cdot \sin v \\ z=z_0+R\cos v \end{cases}, \quad u\in[0,2\pi],\ v\in[0,\pi]$$

sau cu ecuația vectorială:

$$(1.3) \qquad \bar{r}=\bar{r}_0+R(\cos u \sin v\,\bar{i}+\sin u \sin v\,\bar{j}+\cos v\cdot\bar{k})$$

Observăm că membrul stâng al ecuației carteziene (1.1) este un polinom de gradul al doilea în x, y, z și considerăm mulțimea:

$$(1.4) \qquad S_1: x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0,\ x,y,z\in\mathbb{R}$$

Deoarece ecuația lui S_1 se scrie sub forma:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2-d, \text{ rezultă:}$$

(i) dacă $a^2+b^2+c^2-d>0$, atunci S_1 este o sferă cu centrul în punctul $C_1(a,b,c)$ și de rază $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

(ii) dacă $a^2+b^2+c^2-d=0$, atunci $S_1=\{(a,b,c)\}$

(iii) dacă $a^2+b^2+c^2-d<0$, atunci $S_1=\phi$.

<u>Definiția 2</u>: Ecuația (1.4), unde $a^2+b^2+c^2-d>0$ se numește <u>ecuația carteziană generală a sferei</u>.

În continuare considerăm sfera $S: x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, cu $a^2+b^2+c^2-d>0$ și planul $(P): Ax+By+Cz+D=0$

Deoarece $C(a,b,c)$ este centrul sferei, $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$ raza ei, iar $d(C,(P))$ este distanța de la centrul sferei la planul (P), avem:

ii) dacă $d(C,(P)) < R$, intersecția dintre sfera S și planul (P) este un cerc. $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0 \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$
numit "cerc în spațiu"

ii) dacă $d(C,(P))=R$, atunci planul (P) este tangent la sfera S

iii) dacă $d(C,(P)) > R$, atunci $S \cap (P) = \emptyset$, adică planul (P) nu intersectează sfera S.

Observația 1. Dacă centrul sferei C coincide cu O, originea reperului, atunci avem $S: x^2+y^2+z^2=R^2$ (sfera cu centrul în origine) $\to$ ecuația canonică a sferei

Exemplul 1: Să se scrie ecuația sferei cu centrul pe dreapta $(\Delta): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$, având raza $R=\sqrt{5}$ și care trece prin punctul $A(0,2,-1)$.

Soluție: Centrul sferei aparține dreptei (Δ), deci are coordonatele $C(t, 1-t, t-2)$. (din: $\frac{x}{1} = t \Rightarrow x=t$

$\frac{y-1}{-1} = t \Rightarrow y-1=-t \Rightarrow y=1-t$

$\frac{z+2}{1} = t \Rightarrow z = t-2$)

Celelalte condiții se exprimă sub forma: $R = \|\overline{CA}\| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t+0)^2+(2-1+t)^2+(-1-t+2)^2=(\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow t^2+(1+t)^2+(1-t)^2=5$

$\Leftrightarrow t_1=-1, t_2=1$

Centrele corespunzătoare sunt: $C_1(-1,2,-3)$ (pt. $t=-1$) și $C_2(1,0,-1)$ (pt. $t=1$)

iar ecuațiile sferelor sunt:

$S_1: (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=5$, respectiv

$S_2: (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=5$.

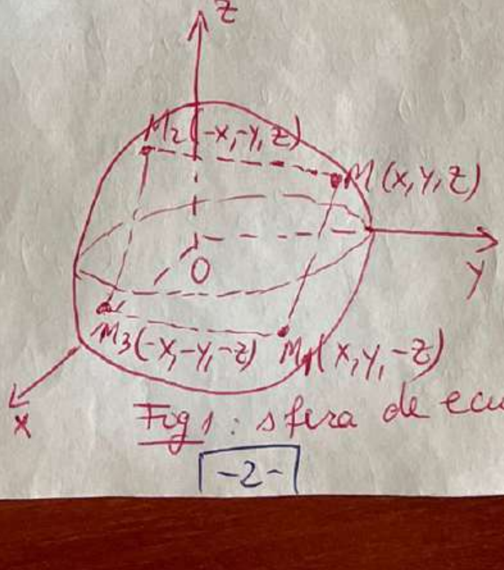

Fig 1: sfera de ecuație canonică: $x^2+y^2+z^2=R^2$

Observație 2: Pentru sfera de ecuație canonică $S: x^2+y^2+z^2=R^2$:

(i) Un plan de simetrie al sferei S este planul xOy deoarece dacă $M(x,y,z)\in S$ atunci și $M_1(x,y,-z)\in S$. Într-adevăr, dacă $x^2+y^2+z^2=R^2$, atunci $x^2+y^2+(-z)^2=R^2$

Toate planele de coordonate sunt planele de simetrie ale sferei

ii) O dreaptă de simetrie a sferei S este axa Oz deoarece dacă $M(x,y,z)\in S$ atunci și $M_2(-x,-y,z)\in S$. Într-adevăr, dacă $x^2+y^2+z^2=R^2$, atunci $(-x)^2+(-y)^2+z^2=R^2$

iii) Punctul de simetrie (numit și centru) al sferei S este originea O a reperului deoarece dacă $M(x,y,z)\in S$ atunci și $M_3(-x,-y,-z)\in S$.

2. ELIPSOIDUL

Definiția 2: Se numește elipsoid o suprafață (cuadrică) E pentru care există un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ față de care ecuația suprafeței este

$$E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \quad , a,b,c>0 \tag{1.5}$$

Ecuația (1.5) se numește ecuația canonică a cuadricei de tip elipsoid.

Observație 3

Deoarece $(x,y,z)\in E \Rightarrow (-x,y,z),(x,-y,z),(-x,-y,z),(-x,-y,-z)\in E$, deducem că elipsoidul admite planele xOy, xOz, yOz ca plane de simetrie. De asemenea, intersecțiile acestor plane, adică axele de coordonate Ox, Oy, Oz sunt axe de simetrie ale elipsoidului, iar originea O a reperului este centrul de simetrie al elipsoidului.

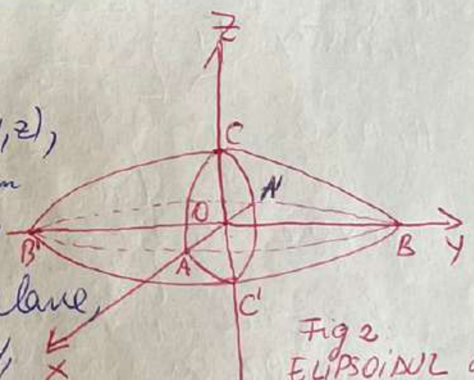

Fig 2
ELIPSOIDUL de ecuație canonică $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$

Intersecția lui E cu planul xOy este elipsa:

$$\Gamma_1: \begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \end{cases}$$

și analog intersecția cu celelalte două plane de simetrie:

$$E\cap yOz: \Gamma_2: \begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}; \quad E\cap xOz: \Gamma_3: \begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

Intersecțiile elipsoidului E cu axele de simetrie sunt punctele A, A', B, B', C, C' care se numesc vârfurile elipsoidului.
De exemplu $E \cap Ox$: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-1=0 \Leftrightarrow x^2=a^2 \Leftrightarrow x=\pm a \end{cases}$ $A(a,0,0)$, $A'(-a,0,0)$.

Ecuația carteziană (1.5) este echivalentă cu ecuațiile parametrice:

(1.6) $\begin{cases} x=a\cos u \sin v \\ y=b\sin u \sin v \\ z=c\cos v \end{cases}$, $u\in[0,\pi], v\in[0,\pi]$.

3. HIPERBOLOIDUL

Definiția 3. O suprafață H_1 se numește hiperboloid cu o pânză, dacă există un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ față de care ecuația sa are forma:

(1.7) $H_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$

Ecuația (1.7) se numește ecuația canonică a cuadricei de tip hiperboloid cu o pânză.

H_1 are planele de coordonate, axele și originea ca plane de simetrie, axe de simetrie și respectiv centru de simetrie.

$H_1 \cap xOy : \Gamma_1 : \begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \end{cases}$ ELIPSĂ

$H_1 \cap xOz : \Gamma_2 : \begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$ HIPERBOLĂ

$H_1 \cap yOz : \Gamma_3 : \begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$ HIPERBOLĂ

Hiperboloidul H_1 se mai numește și hiperboloid cu o pânză cu Oz ca axă netransversală.

Similar $H_1': -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ și $H_1'': \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ sunt hiperboloizi cu o pânză cu axe netransversale Ox și respectiv Oy.

Definiția 4: Suprafața $\Sigma_1 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ este un con numit conul asimptotic al hiperboloidului cu o pânză H_1

Definiția 5: Suprafața H_2 se numește hiperboloid cu două pânze dacă există un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ față de care ecuația ei este

$$(1.8) \quad H_2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

Ecuația (1.8) este ecuația canonică a cuadricei de tip hiperboloid cu două pânze.

Această suprafață are aceleași simetrii ca și hiperboloidul cu o pânză.

$$H_2 \cap xOy: \Gamma_1: \begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0 \end{cases} \rightarrow \text{mulțimea vidă}$$

$$H_2 \cap xOz: \Gamma_2: \begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0 \end{cases} \rightarrow \text{HIPERBOLĂ}$$

$$H_2 \cap yOz: \Gamma_3: \begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0 \end{cases} \rightarrow \text{HIPERBOLĂ}$$

Suprafața H_2 se mai numește și hiperboloidul cu două pânze cu axe transversală axa Oz.

Similar: $H_2': -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$ și $H_2'': \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$ reprezintă hiperboloizi cu două pânze dar cu axele Ox și respectiv Oy ca axe transversale.

Definiția 6: Suprafața $\Sigma_2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ este conul asimptotic al hiperboloidului H_2

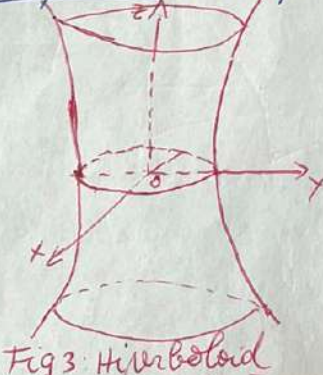

Fig3: Hiperboloid cu o pânză

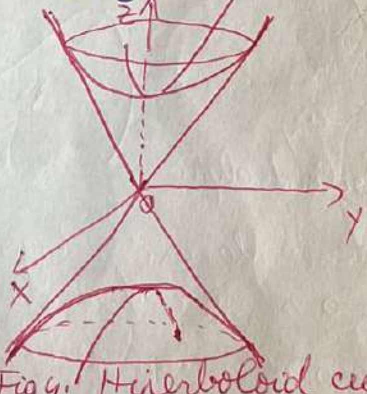

Fig4: Hiperboloid cu două pânze

4. PARABOLOIDUL

Definiția 7: O suprafață P_1 se numește paraboloid eliptic dacă există un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ față de care ecuația sa are forma

$$(1.9) \quad P_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z, \; a>0, b>0$$

Ecuația (1.9) se numește ecuația canonică a cuadricei de tip paraboloid eliptic

P_1 are planele xOz și yOz ca plane de simetrie, iar axa Oz - axa de simetrie

$P_1 \cap yOz : \Gamma_1 : \begin{cases} x=0 \\ z=\frac{y^2}{b^2} \end{cases}$ → PARABOLĂ

$P_1 \cap xOz : \Gamma_2 : \begin{cases} y=0 \\ z=\frac{x^2}{a^2} \end{cases}$ → PARABOLĂ

Similar $P_1' : \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=x$ și $P_1'' : \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=y$, $a, b, c>0$ sunt tot paraboloizi eliptici.

Definiția 8: Suprafața P_2 se numește paraboloid hiperbolic dacă există un sistem de axe ortogonale față de care ecuația sa este de forma:

$$(1.10) \quad P_2 : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z, \ a>0, b>0$$

Ecuația (1.10) se numește ecuația canonică a cuadricei de tip paraboloid hiperbolic. P_2 este simetric față de xOz și yOz și axa Oz, de aceea este numit și paraboloid hiperbolic cu axa de simetrie Oz.

Similar și $P_2' : \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=y$ și $P_2'' : \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=x$ sunt tot paraboloizi hiperbolici dar cu axa de simetrie Oy, respectiv Ox

$P_2 \cap xOz : \Gamma_1 : \begin{cases} y=0 \\ z=\frac{x^2}{a^2} \end{cases}$ → PARABOLĂ ; $P_2 \cap yOz : \Gamma_2 : \begin{cases} x=0 \\ z=-\frac{y^2}{b^2} \end{cases}$ → PARABOLĂ

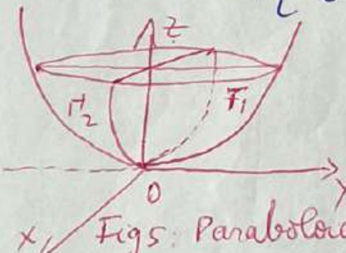

Fig5: Paraboloid eliptic.

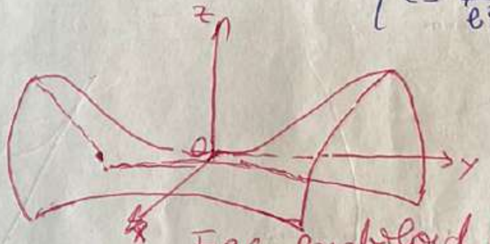

Fig6: Paraboloid hiperbolic

Față de un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ suprafața de ecuație,

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ se numește cilindru eliptic

b) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ se numește cilindru hiperbolic

c) $y^2=2px$ sau $x^2=2py$ se numește cilindru parabolic

d) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ se numește pereche de plane concurente

e) $x^2-a^2=0$ se numește pereche de plane paralele

f) $x^2=0$ se numește pereche de plane confundate.