5. Elemente de geometrie computațională 3D

FORMULE ANALITICE PENTRU MODELAREA MATEMATICĂ ÎN GRAFICA PE CALCULATOR

1. Coordonate rectangulare în plan
2. Coordonate oblice în plan
3. Coordonate polare
4. Transformarea coordonatelor în plan
5. Dreapta în plan
6. Coordonate şi transformări de coordonate în spaţiu
7. Planul
8. **Dreapta în spaţiu**
9. **Cercul**
10. **Sfera**
11. **Conul**
12. **Cilindrul**
13. **Curbe şi suprafeţe**

8. Dreapta în spaţiu

1) Dreapta obţinută prin intersecţia dintre două plane:

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$$
$$A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$$

sau $\begin{cases} x = m \cdot z + n \\ y = p \cdot z + q \end{cases}$

2) Dreapta care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are parametrii directori (a, b, c) este descrisă de ecuaţiile:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t$$

sau în formă parametrică $\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \\ z = z_0 + c \cdot t \end{cases}$

Relaţii între parametrii directori şi cosinuşii directori:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{cases}$$

3) Dreapta care trece prin două puncte $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ este:

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}$$

4) Condiţii cu privire la poziţia a două drepte în spaţiu definite sub forma:

$$\frac{x-p}{\alpha} = \frac{y-q}{\beta} = \frac{z-r}{\gamma}, \quad \frac{x-p'}{\alpha_1} = \frac{y-q'}{\beta_1} = \frac{z-r'}{\gamma_1}$$

Poziţia dreptelor	Condiţia
concurente	$\begin{vmatrix} p-p' & \alpha & \alpha_1 \\ q-q' & \beta & \beta_1 \\ r-r' & \gamma & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0$
paralele	$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1}$
ortogonale	$\alpha \cdot \alpha_1 + \beta \cdot \beta_1 + \gamma \cdot \gamma_1 = 0$

5) Unghiul dintre două drepte:

$$\cos V = \pm \frac{\alpha \cdot \alpha_1 + \beta \cdot \beta_1 + \gamma \cdot \gamma_1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cdot \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}}$$

6) Unghiul unei drepte cu planul $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$:

$$\sin V = \frac{A\alpha + B\beta + \cdot C\gamma}{\pm\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2) \cdot (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)}}$$

7) Intersecţia dreptei cu un plan:

$A \cdot \alpha + B \cdot \beta + C \cdot \gamma + D \neq 0$, (un punct de intersecţie).

$A \cdot p + B \cdot q + C \cdot r + D = 0$, (dreapta conţinută în plan).

$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}$, (dreapta perpendiculară pe un plan).

9. Cercul

1) Ecuaţia cercului într-un sistem de axe rectangulare:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

sau

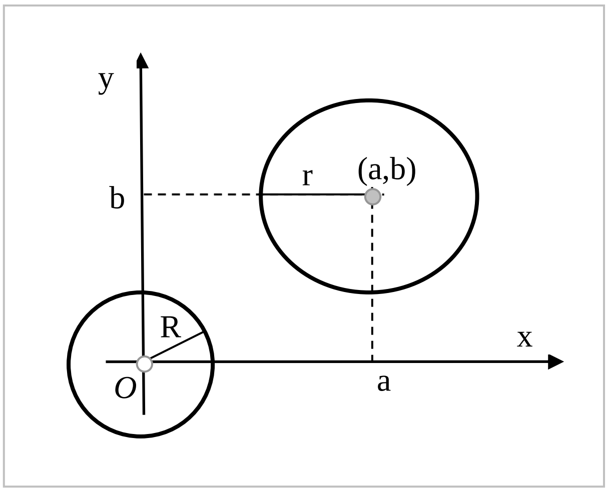
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$

unde $c = a^2 + b^2 - r^2$,

sau în general $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ (ecuaţia normală a cercului), în care coordonatele centrului sunt: $x_0 = -\frac{m}{2}$, $y_0 = -\frac{n}{2}$,

iar raza cercului $r = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p}$.

Dacă centrul cercului se află în origine: $x^2 + y^2 = R^2$.



2) Ecuaţia cercului care trece prin trei puncte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3) Ecuaţia cercului în coordonate polare:

$$r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2 = R^2$$

unde: r_0 este raya vectoare a centrului, φ_0 este unghiul polar al centrului, R este raza centrului.

4) Reprezentarea parametrică a cercului:

- cu centrul în origine $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$

- cu centrul în (a,b) $\begin{cases} x = a + r\cos\alpha \\ y = b + r\sin\alpha \end{cases}$

5) Ecuaţia tangentei în $P_0(x_0, y_0)$ se obţine prin polarizarea (dedublarea) ecuaţiei cercului:

- la cercul cu centrul în origine: $x_0 x - y_0 y - r^2 = 0$,
- la cercul cu centrul în (a,b): $x_0 x + y_0 y + a(x_0 + x) + b(y_0 + y) + c = 0$

5) Ecuaţia tangentei de direcţie dată *m*:

- la cercul cu centrul în origine: $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$,
- la cercul cu centrul în (a,b): $y = m(x-a) + b \pm r\sqrt{1+m^2}$.

10. Sfera

1) Ecuaţia sferei cu centrul în punctul (a,b,c):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

sau

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

unde $d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$

Ecuaţia sferei cu centrul în origine: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

2) Planul tangent sferei în punctul de coordonate (x_1,y_1,z_1) este:

$$(x_1 - a)(x-a) + (y_1 - b)(y-b) + (z_1 - c)(z-c) = r^2$$

3) Extremităţile diametrului ale cărui cosinusuri directoare sunt *m, n, p*, pentru o sferă cu centrul în (*a, b, c*) şi raza *R* sunt:

$$A_1(a+mR\ ,\ b+nR\ ,\ c+pR)$$
$$A_2(a-mR\ ,\ b-nR\ ,\ c-pR)$$

11. Conul

1) Ecuaţia omogenă a conului cu vârful în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ este:

$$f(x-x_o\ , y-y_0\ , z-z_0) = 0$$

2) Ecuaţia conului având vârful în punctul (*a, b, c*) şi curba directoare $f(x,y) = 0$, $z = 0$ este:

$$f\left(\frac{c\cdot z-a\cdot z}{c-z}\ ,\ \frac{c\cdot y-b\cdot z}{c-z}\right)=0$$

3) Ecuaţia unui con de gradul al doilea raportat la axele sale de simetrie (cu vârful în origine) este:

$$ax^2+by^2+cz^2=0$$

14. Cilindrul

1) Ecuaţia cilindrului a cărui curbă directoare este $f(x,y)=0$, $z=0$ şi ale cărui generatoare au parametrii directori (*a*,*b*,*c*) este:

$$f\left(\frac{c\cdot z-a\cdot z}{c}\ ,\ \frac{c\cdot y-b\cdot z}{c}\right)=0$$

13. Curbe şi suprafeţe

2) Ecuaţiile parametrice ale unei curbe strâmbe sunt:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$$

3) Ecuaţiile tangentei la curba dată parametric, în punctul $M(x_0,y_0,z_0)$ sunt:

$$\frac{x-x_0}{x'}=\frac{y-y_0}{y'}=\frac{z-z_0}{z'}$$

4) Ecuaţiile unei suprafeţe:

Tip ecuaţie	Forma analitică	Ecuaţia planului tangent
Parametric	$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$	- în punctul *M(u , v)* $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ y_v & y_v & z_v \end{vmatrix}=0$
Implicit	$f(x,y,z)=0$	-în punctul $M(x_0,y_0,z_0)$ $(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}=0$, unde $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$ sunt parametrii directori ai normalei la suprafaţă
Explicit	$z=z(x,y)$	-în punctul $M(x_0,y_0,z_0)$ $z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0$, unde $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ (notaţia lui *Monge*)