Capitolul 2

Funcţii analitice. Condiţiile Cauchy-Riemann.

2.1 Numere complexe. Funcţii analitice (olomorfe).

2.1.1 Numere complexe.

$$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta},$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2};\ \theta = \arg z = \arctan\frac{b}{a} + k\pi.$$

$$z^n = r^n e^{in\theta};\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z - z_0| < r\}.$$

Definiţia 2.1 Mulţimea V se numeşte *vecinătate a lui* z_0 dacă $\exists D_r(z_0) \subset V$.

Definiţia 2.2 G se numeşte *mulţime deschisă* dacă $\forall z_0 \in G$, $\exists D_r(z_0) \subset G$ (vecinătate pentru orice punct al ei).

Definiţia 2.3 A se numeşte *mulţime închisă* dacă complementara $\mathcal{C}A =$ este mulţime deschisă.

Definiţia 2.4 G se numeşte *mulţime convexă* dacă $\forall z_1, z_2 \in G, [z_1, z_2] \subset G$, unde

$$[z_1, z_2] = \{z \in \mathbb{C}|\ z = tz_1 + (1-t)z_2, t \in [0,1]\}.$$

Definiţia 2.5 $D \in \mathbb{C}$ se numeşte *domeniu* dacă D este mulţime deschisă şi convexă.

Definiţia 2.6 D domeniu se numeşte *simplu conex* dacă $FrD = \partial D$ este formată dintr-o singură curbă închisă, simplă, fără autointersecţii.

2.1.2 Funcţii analitice (olomorfe).

Fie funcţia

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

unde $u, v : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Ref(z) = u(x,y)$,$Imf(z) = v(x,y)$.

Definiţia 2.7 Funcţia $f : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ se numeşte funcţie *derivabilă* (monogenă) în z_0 dacă există

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

şi este finită.

Definiţia 2.8 Funcţia f se numeşte funcţie *analitică* (olomorfă) în z_0 dacă există V_δ vecinătate a lui z_0 astfel încât există $f'(z)$, în orice $z \in V_\delta$.

Definiţia 2.9 Funcţia f se numeşte funcţie *analitică* pe D dacă este analitică în orice punct din D (putem spune şi derivabilă).

Teorema 2.10 *(Cauchy-Riemann) Funcţia $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $z_0 = x_0 + iy_0$ este derivabilă în (x_0, y_0) dacă şi numai dacă u, v sunt diferenţiabile în (x_0, y_0) şi sunt îndeplinite condiţiile*

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases} \tag{2.1}$$

Relaţiile (2.1) se numesc condiţiile Cauchy-Riemann.

Teorema 2.11 *(Generalizare Cauchy-Riemann)*

i) Funcţia $f(z) = u + iv$ analitică rezultă:

1. u, v sunt diferenţiabile pe $D \subseteq \mathbb{C}$ şi

2. $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases}$

ii) Există u_x, u_y, v_x, v_y continue şi $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x, \end{cases}$ *atunci funcţia $f(z) = u + iv$ este analitică.*

Definiţia 2.12 Funcţia $g(x, y) \in C^1(D)$ *admite conjugată armonică* pe D dacă există $h(x, y) \in C^1(D)$ astfel încât

$$\begin{cases} g_x = h_y \\ g_y = -h_x. \end{cases}$$

Proprietatea 2.13 Dacă funcţia $f(z) = u + iv$ este analitică, atunci $u, v \in C^2(D)$ sunt armonice adică $\triangle u = \triangle v = 0$.

Proprietatea 2.14 Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ domeniu simplu conex ($\forall \Gamma \subset D$ curbă închisă, $\triangle$ domeniul delimitat de $\Gamma \Rightarrow \triangle \subset D$). Fie funcţia $g \in C^2(D)$ armonică, atunci ea admite conjugată armonică unic determinată până la o constantă, determinată prin condiţiile Cauchy-Riemann.

Definiţia 2.15 Perechea (g, h) poartă numele de *pereche de funcţii conjugate armonic.*

Teorema 2.16 *O pereche (g, h) de funcţii conjugate armonic determină o funcţie analitică $f = h + ih$ unic determinată până la o constantă.*

Observaţia 2.17 Regulile de derivare pentru funcţiile analitice: sumă, produs, raport, compunere sunt ca în $\mathbb{R}$.

2.2 Funcţii elementare complexe.

2.2.1 Funcţia polinomială.

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \forall \in \mathbb{N}^*.$$

Se aplică produsului $(z \cdot z \cdots z)$ regula de derivare de la produs. Polinomul

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

cu coeficienţi complecşi este sumă de funcţii analitice, deci este funcţie analitică şi

$$P'(z) = na_0 z^{n-1} + (n-1)a_1 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

2.2.2 Funcţia exponenţială.

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) =$$
$$= e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

unde

$$\mathrm{Re} e^z = e^x \cos y = u(x, y) \text{ şi } \mathrm{Im} e^z = e^x \sin y = v(x, y).$$

1. $f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y =$
   $= e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z;$

2. $(e^z)' = e^z, \forall z \in \mathbb{C};$

3. $|e^z| = |e^x \cdot e^{iy}| = e^x |\cos y + i \sin y| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} =$
   $= e^x;$

4. $\arg e^z = y;$

5. $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z, \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$
   $f(z) = e^z$ este funcţie periodică de perioadă 2π;

6. $e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2} \cdot e^{i(y_1+y_2)} =$
   $= e^{x_1} \cdot e^{x_2} [\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 +$
   $+ i(\sin y_1 \cos y_2 + \sin y_2 \cos y_1)] =$
   $= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$
   $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C};$

7. funcţiile trigonometrice reale în funcţie de e^{ix} şi e^{-ix} sunt

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, x \in \mathbb{R}.$$

2.2.3 Funcţia raţională.

Funcţia

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

este raport de polinoame (care sunt funcţii analitice), deci este funcţie analitică şi

$$f'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q^2(z)},$$

cu z diferit de rădăcinile lui $Q(z)$.

2.2.4 Funcţia multivocă.

Definiţia 2.18 *Funcţia multivocă* este funcţia care ia cel puţin două valori distincte pentru un singur z din domeniul de definiţie.

Exemplu de funcţie multivocă este funcţia logaritm dintr-un număr complex. Fie $z \in \mathbb{C}^*$, definim

$$\mathrm{Ln}z = \{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dacă îl fixăm pe $k \in \mathbb{Z}$ avem *ramura uniformă* sau determinată notată $\ln_k$ şi definită pe domeniul $D = \mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}z \leq 0, \mathrm{Im}z = 0\}$ dată de

$$\ln_k z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi).$$

Dacă avem $k = 0$, obţinem *ramura principală*

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ avem $\ln_k z$ analitică: cu condiţiile Cauchy-Riemann. Pentru $k = 0$ avem

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

$$z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \arg z = \arctan \frac{y}{x}.$$

$$\mathrm{Re}(\ln z) = u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2); v(x, y) = \arctan \frac{y}{x}.$$

Obţinem

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}; u_y = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$v_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2}; v_y = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{x^2}{y^2}}.$$

$$f'(z) = (\ln z)' = u_x + iv_x = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{1}{z}.$$

$$\mathrm{Ln} z = \{\ln z + i2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

2.2.5 Funcţia putere complexă (aplicaţie multivocă).

$$f(z) = z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Ln} z} = \{e^{\alpha[\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)]} | k \in \mathbb{Z}.\}$$

$$\alpha \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{Z}.$$

$$f_k(z) = e^{\alpha[\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)]}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$f_k'(z) = \frac{\alpha}{z} e^{\alpha[\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)]}, z \in \mathbb{C} \backslash \{z | \mathrm{Re}\ z \leq 0, \mathrm{Im} z = 0\}.$$

$$f_k(z) = e^{i\alpha 2k\pi} \cdot e^{[\ln |z| + i \arg z]} = e^{i\alpha 2k\pi} \cdot e^{\alpha \ln z} \Rightarrow$$

$$f_k'(z) = e^{i\alpha 2k\pi} \cdot \left(e^{\alpha \ln z}\right)' = \frac{\alpha}{z} e^{i\alpha 2k\pi} \cdot e^{\alpha[\ln |z| + i \arg z]} =$$

$$= \frac{\alpha}{z} e^{\alpha[\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)]} = \frac{\alpha}{z} z^\alpha = \alpha z^{\alpha - 1}.$$

Pentru $\alpha = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ avem ramura uniformă

$$f_k(z) = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, ..., n - 1\}.$$

Funcţia

$$f_k(z) = \sqrt[n]{z} = \{\sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}} | k \in \{0, 1, ..., n-1\}\}$$

are n ramuri (determinări).

2.2.6 Funcţiile trigonometrice complexe (circulare).

1. $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \Rightarrow$
   $e^{iz} = \cos z + i \sin z, z \in \mathbb{C}$

2. $(\cos z)' = i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = -\sin z; (\sin z)' = \cos z;$

3. Sunt periodice, de perioadă $T = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, deoarece e^{iz} este periodică de perioadă $2k\pi$;

4. $e^{i(z_1 \pm z_2)} = \cos(z_1 \pm z_2) + i \sin(z_1 \pm z_2) = e^{iz_1} \cdot e^{\pm iz_2} =$
   $= (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 \pm i \sin z_2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1, \\ \sin ix = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2i} = i \sinh x, \\ \cos ix = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \cosh x, \\ \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1, \\ \cosh^2 y + \sinh^2 y = \cosh 2y. \end{cases}$$

5. $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy =$
   $= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y;$

6. $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y;$

7. $|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y} \overset{\cosh^2 y = \sinh^2 y + 1}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$
   $= \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$. Cu relaţiile
   $$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \\ \sinh^2 y = \frac{\cosh 2y - 1}{2}, \end{cases}$$
   obţinem
8. $|\cos z|^2 = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cosh 2y) \xrightarrow{y\to\infty} +\infty$.
   Deci $\cos z$ pentru $y \to \infty$ este nemărginită.
9. $|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \overset{\cosh^2 y = \sinh^2 y + 1}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$
   $= \sin^2 x + \sinh^2 y = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x + \cosh 2y - 1) =$
   $= \frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x) \xrightarrow{y\to\infty} +\infty$.
   Deci $\sin z$ pentru $y \to \infty$ este nemărginită. Pentru y suficient de mare avem $|\sin z|^2 \simeq \frac{e^{2y}}{4}$.
10. Zerourile pentru $\sin z$ şi $\cos z$:
   $$\begin{cases} \sin z = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \\ \Rightarrow 2iz_k \in \mathrm{Ln}1 = \{i2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow z_k = k\pi, \\ \cos z = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 \\ \Rightarrow 2iz_k \in \mathrm{Ln}(-1) = \{i(\pi + 2k\pi) | k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

2.2.7 Funcţiile hiperbolice complexe.

1. $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C} \Rightarrow$
   $e^{-z} = \cosh z - \sinh z$, $e^z = \cosh z + \sinh z$;
2. $(\sinh z)' = \cosh z; (\cosh z)' = \sinh z$;
3. $e^{z+2\pi i} = e^z \Rightarrow \sinh(z + 2\pi i) = \sinh z$, $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z, \forall z \in \mathbb{C}$
   $T = 2\pi i$ perioada pricipală pentru sinh, cosh;

4. $e^{z_1+z_2} = \cosh(z_1+z_2) + \sinh(z_1+z_2) = e^{z_1}\cdot e^{z_2} =$
$= (\cosh z_1 + \sinh z_1)(\cosh z_1 + \sinh z_2)$

$$\begin{cases} \sin iz = \frac{e^{-z}-e^{z}}{2i} = i\sinh z, \\ \cos iz = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \cosh z, \\ \cosh(z_1+z_2) = \cos i(z_1+z_2) = \\ \qquad\qquad = \cos iz_1 \cos iz_2 - \sin iz_1 \sin iz_2 = \\ \qquad\qquad = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \\ \cosh(z_1-z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 - \sinh z_1 \sinh z_2, \\ \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_2 \cosh z_1, \\ \sinh 2z = 2\sinh z \cosh z, \\ \cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z. \end{cases}$$

5. $\cosh z = \cosh(x+iy) = \cosh x \cosh iy + \sinh x \sinh iy =$
$= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$;

6. $\sinh z = \sinh(x+iy) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh iy =$
$\sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$;

7. $|\cosh z|^2 = \cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y \overset{\cosh^2 y = 1+\sinh^2 y}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$
$= \cos^2 y + \sinh^2 x = \frac{1+\cos 2y}{2} + \frac{\cosh x - 1}{2} = \frac{1}{2}(\cosh 2x +$
$\cos 2y) \xrightarrow{x\to\infty} +\infty$.

8. $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \sin^2 y \overset{\cosh^2 y = 1+\sinh^2 y}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$
$= \sin^2 y + \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\sinh 2x - \cos 2y) \xrightarrow{y\to\infty} +\infty$.
Deci $\sin z$ pentru $y \to \infty$ este nemărginită. Pentru y suficient de mare avem $|\sin z|^2 \simeq \frac{e^{2y}}{4}$.

9. Zerourile pentru $\sinh z$ şi $\cosh z$:

$$\begin{cases} \sinh z = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \\ \Rightarrow 2z_k \in \mathrm{Ln}1 = \{2k\pi i | k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow z_k = k\pi i, \\ \cosh z = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \\ \Rightarrow 2z_k \in \mathrm{Ln}(-1) = \{(\pi + 2k\pi) i | k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow z_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i. \end{cases}$$

1. $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C} \Rightarrow$
   $e^{-z} = \cosh z - \sinh z$, $e^z = \cosh z + \sinh z$;

2. $(\sinh z)' = \cosh z; (\cosh z)' = \sinh z$;

3. $e^{z+2\pi i} = e^z \Rightarrow \sinh(z + 2\pi i) = \sinh z$, $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z, \forall z \in \mathbb{C}$
   $T = 2\pi i$ perioada pricipală pentru sinh, cosh;

4. $e^{z_1+z_2} = \cosh(z_1 + z_2) + \sinh(z_1 + z_2) = e^{z_1} \cdot e^{z_2} =$
   $= (\cosh z_1 + \sinh z_1)(\cosh z_1 + \sinh z_2)$

$$\begin{cases} \sin iz = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = i \sinh z, \\ \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z, \\ \cosh(z_1 + z_2) = \cos i(z_1 + z_2) = \\ \qquad = \cos iz_1 \cos iz_2 - \sin iz_1 \sin iz_2 = \\ \qquad = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \\ \cosh(z_1 - z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 - \sinh z_1 \sinh z_2, \\ \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_2 \cosh z_1, \\ \sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z, \\ \cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z. \end{cases}$$

5. $\cosh z = \cosh(x + iy) = \cosh x \cosh iy + \sinh x \sinh iy =$
   $= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$;

6. $\sinh z = \sinh(x + iy) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh iy = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$;

7. $|\cosh z|^2 = \cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y \overset{\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$
   $= \cos^2 y + \sinh^2 x = \frac{1+\cos 2y}{2} + \frac{\cosh x - 1}{2} = \frac{1}{2}(\cosh 2x + \cos 2y) \xrightarrow{x \to \infty} +\infty$.

8. $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \sin^2 y \overset{\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$
   $= \sin^2 y + \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\sinh 2x - \cos 2y) \xrightarrow{y \to \infty} +\infty$.

Tabela 2.1: Formule.

$e^{iz} = \cos z + i \sin z, z \in \mathbb{C};$	$e^z = \cosh z + \sinh z;$
$(\cos z)' = -\sin z;$	$(\cosh z)' = \sinh z;$
$T = 2k\pi;$	$T = 2k\pi i;$
$e^{i(z_1+z_2)} =$	$e^{z_1+z_2} =$
$= e^{iz_1} \cdot e^{iz_2};$	$= e^{z_1} \cdot e^{z_2};$
$\cos(z_1 \pm z_2) =$	$\cosh(z_1 \pm z_2) =$
$= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2;$	$= \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2;$
$\sin(z_1 \pm z_2) =$	$\sinh(z_1 \pm z_2) =$
$= \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1;$	$= \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_2 \cosh z_1;$
$\cos z =$	$\cosh z =$
$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y;$	$= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y;$
$\sin z =$	$\sinh z =$
$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y;$	$= \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y;$
$\|\cos z\| =$	$\|\cosh z\| =$
$= \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y};$	$= \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2x + \cos 2y)};$
$\|\sin z\| =$	$\|\sinh z\| =$
$= \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x)};$	$= \frac{1}{2}(\sinh 2x - \cos 2y);$
Zerourile:	Zerourile:
$z_k = k\pi, z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi;$	$z_k = k\pi i, z_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i;$
$\sin 2z = 2 \sin z \cos z;$	$\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z;$
$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z;$	$\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z;$
Domeniul pentru $\tan z$:	Domeniul pentru $\tanh z$:
$\mathbb{C} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi \| k \in \mathbb{Z}\};$	$\mathbb{C} \backslash \{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i \| k \in \mathbb{Z}\};$
$\cot z : \mathbb{C} \backslash \{k\pi \| k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C};$	$\coth z : \mathbb{C} \backslash \{k\pi i \| k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C};$
$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z};$	$\tanh = \frac{\sinh z}{\cosh z};$
$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z};$	$\coth = \frac{\cosh z}{\sinh z};$
$(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z};$	$(\tanh z)' = \frac{1}{\cosh^2 z};$
$(\cot z)' = \frac{-1}{\sin^2 z}.$	$(\coth z)' = \frac{-1}{\sinh^2 z}.$

Deci $\sin z$ pentru $y \to \infty$ este nemărginită. Pentru y suficient de mare avem $|\sin z|^2 \simeq \frac{e^{2y}}{4}$.

9. Zerourile pentru $\sinh z$ şi $\cosh z$:

$$\begin{cases} \sinh z = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \\ \Rightarrow 2z_k \in \mathrm{Ln}1 = \{2k\pi i | k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow z_k = k\pi i, \\ \cosh z = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \\ \Rightarrow 2z_k \in \mathrm{Ln}(-1) = \{(\pi + 2k\pi)i | k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow z_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i. \end{cases}$$

2.3 Exerciţii rezolvate.

Exerciţiul 2.19 Aflaţi funcţia analitică $f = u + iv$ dacă

$$u(x,y) = e^{x^2-y^2} \cos 2xy.$$

Soluţie. Arătăm că $\triangle u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

$$u_x = 2xe^{x^2-y^2} \cos 2xy - 2ye^{x^2-y^2} \sin 2xy;$$

$$u_y = -2ye^{x^2-y^2} \cos 2xy - 2xe^{x^2-y^2} \sin 2xy;$$

$$u_{xx} = (4x^2+2)e^{x^2-y^2} \cos 2xy - 8xye^{x^2-y^2} \sin 2xy - 4y^2 e^{x^2-y^2} \cos 2xy =$$

$$= (4x^2 - 4y^2 + 2)e^{x^2-y^2} \cos 2xy - 8xye^{x^2-y^2} \sin 2xy.$$

$$u_{yy} = (-4x^2 + 4y^2 - 2)e^{x^2-y^2} \cos 2xy + 8xye^{x^2-y^2} \sin 2xy.$$

Cum $\triangle u = 0 \Rightarrow u$ este armonică, rezultă că există v conjugată armonică a lui u, adică:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Deci

$$v_x = -u_y = 2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy + 2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

şi integrăm în raport cu x:

$$v(x,y) = \int v_x dx =$$

$$= \int 2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy dx + \int 2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy dx =$$

$$= \int e^{x^2-y^2}(\sin 2xy)_x dx + \int 2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy dx \overset{\text{int.părţi}}{=}$$

$$= e^{x^2-y^2}\sin 2xy dx - \int 2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy dx +$$

$$+ \int 2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy dx + K(y) =$$

$$= e^{x^2-y^2}\sin 2xy dx + K(y).$$

$$v_y = u_x \Leftrightarrow (e^{x^2-y^2}\sin 2xy)_y + K'(y) =$$

$$= 2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy - 2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

$$\Leftrightarrow -2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy + 2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy + K'(y) =$$

$$= 2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy - 2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy \Leftrightarrow$$

$$K'(y) = 0 \Rightarrow K(y) = k.$$

Deci

$$v(x,y) = e^{x^2-y^2}\sin 2xy + k,$$

de unde obţinem funcţia f:

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) =$$

$$= e^{x^2-y^2}\cos 2xy + ie^{x^2-y^2}\sin 2xy + ik =$$

$$= e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i\sin 2xy) + ik = e^{x^2-y^2}e^{i2xy} + ik =$$

$$= e^{x^2-y^2+i2xy} + ik = e^{(x+iy)^2} + ik \overset{z=x+iy}{=} e^{z^2} + ik.$$

Exerciţiul 2.20 Aflaţi funcţia analitică $f = u + iv$ dacă

$$v(x,y) = 3\cosh x \sin y + \cos x \sinh y.$$

Soluţie. Avem:

$$v_x = 3\sinh x \sin y - \sin x \sinh y;$$

$$v_y = 3\cosh x \cos y + \cos x \cosh y;$$

$$v_{xx} = 3\cosh x \sin y - \cos x \sinh y;$$

$$v_{yy} = -3\cosh x \sin y + \cos x \sinh y;$$

Cum $\triangle v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \Rightarrow v$ este armonică, rezultă că există u conjugată armonică a lui v, adică:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Deci

$$u_x = 3\cosh x \cos y + \cos x \cosh y$$

şi integrăm în raport cu x:

$$u(x,y) = \int u_x dx = 3\cos y \int \cosh x dx + \cosh y \int \cos x dx =$$

$$= 3\sinh x \cos y + \sin x \cosh y + K(y) \Rightarrow$$

$$u_y = -3\sinh x \sin y + \sin x \sinh y + K'(y) =$$

$$= -v_x = -3\sinh x \sin y + \sin x \sinh y \Rightarrow$$

$$K'(y) = 0 \Rightarrow K(y) = k.$$

Deci

$$u(x,y) = 3\sinh x \cos y + \sin x \cosh y + k,$$

şi

$$v(x,y) = 3\cosh x \sin y + \cos x \sinh y,$$

de unde obţinem funcţia f:

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) =$$

$$= 3(\sinh x \cos y + i\cosh x \sin y) + (\sin x \cosh y + i\cos x \sinh y) + k =$$

$$= 3\sinh z + \sin z + k.$$

Exerciţiul 2.21 Aflaţi funcţia analitică $f = u + iv$ dacă

$$u(x,y) = 2\sinh x \cos y + 3\sin x \cosh y.$$

Soluţie. Avem:

$$u_x = 2\cosh x \cos y + 3\cos x \cosh y;$$

$$u_y = -2\sinh x \sin y + 3\sin x \sinh y;$$

$$u_{xx} = 2\sinh x \cos y - 3\sin x \cosh y;$$

$$u_{yy} = -2\sinh x \cos y + 3\sin x \cosh y;$$

Cum $\triangle u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow u$ este armonică, rezultă că există v conjugată armonică a lui u, adică:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Deci
$$v_y = 2\cosh x \cos y + 3\cos x \cosh y$$
şi integrăm în raport cu y:
$$v(x,y) = \int v_y dy = 2\cosh x \int \cos y dy + 3\cos x \int \cosh y dy =$$
$$= 2\cosh x \sin y + 3\cos x \sinh y + K(x).$$

$$v_x = 2\sinh x \sin y - 3\sin x \sinh y + K'(x),$$
Dar
$$K'(y) = 0 \Rightarrow K(y) = k \Rightarrow$$
$$v_x = 2\sinh x \sin y - 3\sin x \sinh y + k$$

Deci
$$v(x,y) = 2\cosh x \sin y + 3\cos x \sinh y + k$$
şi
$$u(x,y) = 2\sinh x \cos y + 3\sin x \cosh y,$$
de unde obţinem funcţia f:
$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) =$$
$$= 2(\sinh x \cos y + i\cosh x \sin y) + 3(\sin x \cosh y + i\cos x \sinh y) + ik =$$
$$= 2\sinh z + 3\sin z + ik.$$

Exerciţiul 2.22 Să se găsească funcţia $f = u + iv$ analitică dacă se cunoaşte

a) $u(x,y) = \frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}$;

b) $v(x,y) = e^{-y}\sin x$;

c) $u(x, y) = \cosh x \cos y$.

Soluţie.
a) Avem:

$$u_x = \frac{-2x[(1+x)^2 + y^2] - 2(1+x)(1-x^2-y^2)}{[(1+x)^2+y^2]^2} =$$

$$= \frac{-2x(1+x)^2 - 2xy^2 - 2(1-x^2-y^2+x-x^3-xy^2)}{[(1+x)^2+y^2]^2} =$$

$$= \frac{-2x(1+2x+x^2) - 2xy^2 - 2 + 2x^2 + 2y^2 - 2x + 2x^3 + 2xy^2)}{[(1+x)^2+y^2]^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 - 4x - 2 + 2y^2}{[(1+x)^2+y^2]^2} = -2\frac{(1+x)^2 - y^2}{[(1+x)^2+y^2]^2}.$$

$$u_y = \frac{-2y(1+x)^2 - 2y^3 - 2y(1-x^2-y^2)}{[(1+x)^2+y^2]^2} =$$

$$= \frac{-2y - 4xy - 2yx^2 - 2y^3 - 2y + x^2y + 3y^3}{[(1+x)^2+y^2]^2} =$$

$$= -4\frac{y(x+1)}{[(1+x)^2+y^2]^2}.$$

La fel se calculează u_{xx}, $u_{yy} \Rightarrow \triangle u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow v$ este armonică, rezultă că există v conjugată armonică a lui u, adică:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Folosim o altă metodă

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = -2\frac{(1+x)^2 - y^2 - 2iy(x+1)}{[(1+x)^2+y^2]^2} =$$

$$= -2\frac{(x+1-iy)^2}{(x+1-iy)^2(x+1+iy)^2} = \frac{-2}{(x+iy+1)^2} \overset{z=x+iy}{=} \frac{-2}{(z+1)^2}.$$

Integrăm, ţinând cont că în complex avem aceleaşi primitive ca în real, şi obţinem

$$f(z) = -2\int \frac{dz}{(z+1)^2} = \frac{2}{(z+1)} + C.$$

b) Ştim că: $v(x,y) = e^{-y}\sin x$. Atunci

$$v_x = e^{-y}\cos x \Rightarrow v_{xx} = -e^{-y}\sin x$$

şi

$$v_y = -e^{-y}\sin x \Rightarrow v_{yy} = e^{-y}\sin x$$

deci $\triangle v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \Rightarrow v$ este armonică, rezultă că există u conjugată armonică a lui v, adică:

$$\begin{cases} u_x = v_y = -e^{-y}\sin x \\ u_y = -v_x = -e^{-y}\cos x. \end{cases}$$

Integrăm în raport cu x:

$$u(x,y) = -e^{-y}\int \sin x dx = e^{-y}\cos x + K(y) \Rightarrow$$

$$u_y = -e^{-y}\cos x + K'(y) = -v_x = -e^{-y}\cos x \Rightarrow$$

$$K'(y) = 0 \Rightarrow K(y) = k \Rightarrow u(x,y) = e^{-y}\cos x + k \Rightarrow$$

$$f(z) = u + iv = e^{-y}(\cos x + i\sin x) + k = e^{-y}e^{ix} + k =$$

$$= e^{ix+i^2y} + k = e^{i(x+iy)} + k \Rightarrow$$

$$f(z) = e^{iz} + k.$$

$c)$ Avem: $u(x, y) = \cosh x \cos y$. Atunci

$$u_x = \sinh x \cos y \Rightarrow u_{xx} = \cosh x \cos y$$

şi

$$u_y = -\cosh x \sin y \Rightarrow u_{yy} = -\cosh x \cos y$$

deci $\triangle u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow u$ este armonică, rezultă că există v conjugată armonică a lui u, adică:

$$\begin{cases} u_x = v_y = \sinh x \cos y \\ u_y = -v_x = -\cosh x \sin y. \end{cases}$$

Integrăm în raport cu y:

$$v(x, y) = \int v_y dy = \sinh x \int \cos y dy = \sinh x \sin y + K(x) \Rightarrow$$

$$v_x = \cosh x \sin y + K'(x) = -u_y = \cosh x \sin y \Rightarrow$$

$$K'(x) = 0 \Rightarrow K(x) = k \Rightarrow v(x, y) = \sinh x \sin y + k \Rightarrow$$

$$f(z) = u + iv = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y + ik =$$

$$= \cosh x \cosh iy + \sinh x \sinh iy + ik = \cosh(x + iy) + ik \Rightarrow$$

$$f(z) = \cosh z + ik.$$

Exerciţiul 2.23 (funcţii elementare complexe) Rezolvaţi ecuaţia

$$\sin z = 1 + i.$$

Soluţie.

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i(1 + i) = -2 + 2i = -2(1 - i)$$

Înmulţim relaţia cu e^{iz} şi găsim

$$(e^{iz})^2 - 1 = -2(1-i)e^{-iz} \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 1 + 2(1-i)e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{iz} = \frac{-2(1-i) \pm \sqrt{4(1-i)^2 + 4}}{2} = -1 + i \mp \sqrt{1-2i} \Rightarrow$$

$$iz_k \in Ln(-1 + i \pm \sqrt{1-2i}).$$

Calculăm $\sqrt{1-2i}$. Avem

$$\sqrt{1-2i} = a + ib \Leftrightarrow 1 - 2i = a^2 - b^2 + i2ab \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{a} \\ a^2 - \frac{1}{a^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - a^2 - 1 = 0 \\ a^2 = t \end{cases}$$

Rezultă ecuaţia în necunoscuta t:

$$t^2 - t - 1 = 0$$

cu soluţiile:

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

de unde obţinem

$$a^2 = t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0,$$

soluţia $t_2 < 0$ şi nu corespunde. Astfel

$$a_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ şi } b_{1,2} = \mp\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \mp\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Deci

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt{1-2i} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \end{cases} \\ \mathrm{Ln} z = \{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) | k \in \mathbb{Z}\} \\ \Rightarrow \mathrm{Ln} z = \{\ln z + i2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$z_k = -i\mathrm{Ln}\left[(-1+i\mp\sqrt{1-2i})\right] =$$

$$= -i\mathrm{Ln}\left[\left(-1\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)+i\left(1\mp\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)\right] =$$

$$= -i\left\{\ln\left(\left(-1\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)+i\left(1\mp\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+2k\pi i|k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\Rightarrow z_k = -i\ln\left(\left(-1\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)+i\left(1\mp\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)\right)+$$

$$+2k\pi|k\in\mathbb{Z}.$$

Exerciţiul 2.24 (funcţii elementare complexe) Să se determine mulţimea de definiţie pentru funcţia

$$f(z) = \ln\frac{z+1+i}{z+1-2i}.$$

Soluţie. Funcţia

$$\ln z : \mathbb{C}\backslash\{z\in\mathbb{C}|\mathrm{Re}z\le 0,\ \mathrm{Im}z=0\}\to\mathbb{R};$$

Deci

$$f(z) = \ln\frac{z+1+i}{z+1-2i}$$

este definită pe mulţimea

$$\mathbb{C}\backslash\{z\in\mathbb{C}|\mathrm{Re}\frac{z+1+i}{z+1-2i}\le 0,\ \mathrm{Im}\frac{z+1+i}{z+1-2i}=0\}.$$

Determinăm partea reală:

$$\mathrm{Re}\frac{z+1+i}{z+1-2i} = \mathrm{Re}\frac{(x+1)+i(y+1)}{(x+1)+i(y-2)} =$$

$$= \mathrm{Re}\frac{[(x+1)+i(y+1)][(x+1)-i(y-2)]}{(x+1)^2+(y-2)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)^2+(y+1)(y-2)}{(x+1)^2+(y-2)^2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+2x+1+y^2-y-2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

ecuaţie ce reprezintă interiorul cercului centrat în $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ şi de rază $\frac{3}{2}$ care în complex se scrie

$$\left|z+1-\frac{i}{2}\right| \leq \frac{3}{2}.$$

Determinăm partea imaginară:

$$\mathrm{Im}\frac{z+1+i}{z+1-2i} = 0 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)-(x+1)(y-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)(y+1-y+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}z = -1.$$

Deci, domeniul de definiţie pentru funcţia

$$f(z) = \ln\frac{z+1+i}{z+1-2i}$$

este domeniul

$$D = \mathbb{C}\backslash\left\{\left|z+1-\frac{i}{2}\right| \leq \frac{3}{2}, \mathrm{Re}z = -1\right\}.$$

Exerciţiul 2.25 (funcţii elementare complexe) Calculaţi $e^{\sqrt{i}}$.

Soluţie.

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}}, k \in \{0,1\} \Rightarrow$$

$$\sqrt{i} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \\ e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Deci

$$e^{\sqrt{i}} = \begin{cases} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{cases} = \begin{cases} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}} + i\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}} - i\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{cases}$$

Exerciţiul 2.26 (funcţii elementare complexe) Demonstraţi egalităţile următoare

a) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

b) $\sinh^2 z = \frac{\cosh 2z - 1}{2}, \forall z \in \mathbb{C}$;

Soluţie.

a) Avem:

$$e^{i(z_1 \pm z_2)} = e^{iz_1}e^{\pm iz_2} \overset{Euler}{=}$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) + i\sin(z_1 \pm z_2) = (\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 \mp i\sin z_2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2. \end{cases}$$

b) Calculăm:

$$\frac{\cosh 2z - 1}{2} = \frac{\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{2} - 1}{2} =$$

$$= \frac{(e^z)^2 + (e^{-z})^2 - 2e^z e^{-z}}{4} =$$

$$= \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \sinh^2 z, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Exerciţiul 2.27 (funcţii elementare complexe) Găsiţi mulţimea de definiţie pentru funcţia

$$f(z) = \ln \frac{z+i}{iz-1}.$$

Notăm Ln prin ln .

Soluţie.

$$D = \mathbb{C} \setminus \left\{ \mathrm{Re} \frac{z+i}{iz-1} \leq 0,\ \mathrm{Im} \frac{z+i}{iz-1} = 0 \right\}.$$

Deci

$$\frac{z+i}{iz-1} = \frac{x+1+iy}{i(x+iy)-1} = \frac{(x+1+iy)(-y-1-ix)}{(-y-1)^2+x^2}.$$

Determinăm partea reală:

$$\mathrm{Re} \frac{z+i}{iz-1} = (x+1)(-y-1) + xy \leq 0 \Leftrightarrow -x-y-1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x+y+1 \geq 0.$$

Determinăm partea imaginară:

$$\mathrm{Im} \frac{z+i}{iz-1} = 0 \Leftrightarrow -y(y+1) - x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2+x+y^2+y = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Adică domeniul de definiţie este

$$D = \mathbb{C}\backslash \left\{ \text{Re}z + \text{Im}z + 1 \geq 0, \left| z - \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Exerciţiul 2.28 (funcţii elementare complexe) Găsiţi soluţiile ecuaţiei:

$$\cos z = i.$$

Soluţie. Avem:

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2i \overset{e^{iz}=t}{=} t^2 - 2it + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$t_{1,2} = \frac{2i \mp \sqrt{-8}}{2} = i \mp \sqrt{2}i = i(1 \pm \sqrt{2}).$$

$$e^{iz} = i(1+\sqrt{2}) \Rightarrow iz_k \in \left\{ \ln(1+\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) | k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow$$

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(1+\sqrt{2}), k \in \mathbb{Z}$$

şi

$$e^{iz} = i(1-\sqrt{2}) \Rightarrow iz_k \in \left\{ \ln(\sqrt{2}-1) + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) | k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow$$

$$z_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1), k \in \mathbb{Z}.$$

2.4 Exerciţii propuse.

Exerciţiul 2.29 Determinaţi în fiecare din următoarele cazuri Rez, Imz, $|z|$ şi $\arg z$:

a) $z = \frac{1}{i}$;

b) $z = \frac{1-i}{1+i}$;

c) $z = \frac{2}{1-3i}$;

d) $z = (1 + i\sqrt{3})^3$;

e) $z = (1 + i\sqrt{3})^n$.

Exerciţiul 2.30 Determinaţi în fiecare din următoarele cazuri toţi $z \in \mathbb{C}$ pentru care:

a) $z^3 = 1$;

b) $z^3 = i$;

c) $z^4 = -1$;

d) $z^8 = 1$;

e) $z^2 = 1 - i$;

f) $z^2 = 3 + 4i$;

g) $z^3 = -2 + 2i$;

h) $z^5 = -4 + 3i$.

Exerciţiul 2.31 Explicaţi de ce pentru orice $z \in \mathbb{C}$ au loc relaţiile:

a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

b) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

Exerciţiul 2.32 Verificaţi prin calcul identitatea

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$$

şi descoperiţi semnificaţia ei geometrică.

Exerciţiul 2.33 Precizaţi, pentru fiecare din următoarele cazuri, ce mulţime de puncte $P(z)$ din planul complex verifică relaţia:

a) $|z - z_0| < 1$, $|z - z_0| = 1$ şi $|z - z_0| > 1$ pentru $z_0 \in \mathbb{C}$, fixat;

b) $1 < |z| < 2$;

c) $1 < \text{Re}z| < 2$;

d) $1 < \text{Im}z| < 2$;

e) $\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{2}$;

f) $|z + 3| = 5$;

g) $|z + 2 + i| < 2$;

h) $|z - 1 - i| > 3$;

i) $2 \le |z - 2 - 3i| < 4$;

j) $|z - 2| + |z + 2| = 5$;

k) $|z - 2| - |z + 2| > 3$;

l) $|z - i| = |z + 1|$;

m) $|z + 1| = |z - 3| = |z + 4i|$.

Exerciţiul 2.34 Determinaţi funcţiile $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pentru fiecare funcţie complexă $f(z)$ dată:

a) $f(z) = \overline{z}$;

b) $f(z) = z^2$;

c) $f(z) = \frac{z-1}{z+i}$;

d) $f(z) = e^z$;

e) $f(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$, notată $\cosh z$;

f) $f(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$, notată $\sinh z$;

g) $f(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, notată $\cos z$;

h) $f(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, notată $\sin z$;

i) $f(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$, notată $\tanh z$;

j) $f(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}$, notată $\tan z$.

Exerciţiul 2.35 Determinaţi expresia funcţiei $f(z)$ atunci când se cunosc funcţiile $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ (unde $z = x + iy$):

a) $u = x$, $v = -y$;

b) $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$;

c) $u = -2xy$, $v = x^2 - y^2$;

d) $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$;

e) $u = e^y \cos x$, $v = -e^y \sin x$;

f) $u = \cos x \sinh y$, $v = \sin x \cosh y$.

Exerciţiul 2.36 Calculaţi sub forma $u + iv$ următoarele expresii:

a) $e^{\pi i}$;

b) $\cos(1 + i)$;

c) $\sin 3i$;

d) $\cosh 3\pi i$;

e) $\ln(1 + i)$.

Exerciţiul 2.37 Determinaţi valorile lui $z \in \mathbb{C}$ $(z = x + iy)$ pentru care:

a) $z^2 + (2 - 3i)z - 5 - i = 0$;

b) $e^z = 4 - 3i$;

c) $\sin z = 10$;

d) $\cosh z = -1$.

Exerciţiul 2.38 Determinaţi funcţia analitică $f(z) = u + iv$ în următoarele cazuri:

a) $u = \cos x \cosh y$;

b) $v = \cos x \sinh y$;

c) $u = \sinh x \cos y$;

d) $v = \sinh x \sin y$;

e) $v = e^x \sin y$;

f) $v = \ln(x^2 + y^2)$;

g) $u = x^2 - y^2 + 3x$;

h) $u = 6x - 2y$;

i) $v = 6xy - 6y + 3$;

j) $u = x^2 - y^2 - y$;

k) $u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$;

l) $u = \frac{x}{2}\ln(x^2 + y^2) - y \arctan\frac{y}{x}$;

m) $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$;

n) $u = x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2+(y+1)^2}$;

o) $v = e^{-y}\sin x + x^2 + xy - y^2$;

p) $v = \arctan\frac{y}{x} + 2xy$.

Exerciţiul 2.39 (funcţii complexe elementare) Să se aducă la forma $A + iB$ expresiile:

a) e^i;

b) $\sinh 2i$;

c) $\cosh(2 + 3i)$;

d) $\cos(1 - i)$;

e) $\tan(1 - 2i)$;

f) $\ln(-2i)$;

g) $\ln(-3 + 4i)$;

h) $\ln\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.

Exerciţiul 2.40 (funcţii complexe elementare) Calculaţi:

a) i^{1-i};

b) $(1+i\sqrt{3})^i$;

c) 1^{-i};

d) $|\sin z|$.

Exerciţiul 2.41 (funcţii complexe elementare) Demonstraţi egalităţile:

a) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$;

b) $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$;

c) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$;

d) $\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$;

e) $\sinh^2 z = \frac{\cosh 2z - 1}{2}$;

f) $\cosh^2 z = \frac{\cosh 2z + 1}{2}$.

Exerciţiul 2.42 (funcţii complexe elementare) Să se rezolve ecuaţiile următoare:

a) $e^{i3z} = -1$;

b) $e^{\frac{1}{z^2}} = 1$;

c) $\sin z = 10$;

d) $\tanh z = 2$.