Cursul 13 Electrotehnică

CAPITOLUL 5
REGIMUL TRANZITORIU AL CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE

..

5.3. Metoda operațională de analiză a circuitelor electrice liniare în regim tranzitoriu

Metoda operațională de calcul a regimului tranzitoriu a fost imaginată de Heaviside. În principiu ea constă în înlocuirea derivatei $\frac{d}{dt}$ cu operatorul s și a integralei $\int dt$ cu $\frac{1}{s}$.

Fundamentul matematic al acestei metode constă în aplicarea transformatei Laplace. Aplicând transformata Laplace unei ecuații integro-diferențiale, ea devine o ecuație algebrică de variabilă s. Se rezolvă ecuația în s și, aplicând apoi transformata Laplace inversă, se obține soluția generală în timp a ecuației integro-diferențiale.

5.3.1 Transformatele Laplace ale unor funcții uzuale

Transformata Laplace a unei funcții $f(t)$, notată cu simbolul $L[f(t)]$ sau $F(s)$, este definită cu ajutorul integralei:

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt$$

unde operatorul s este un număr complex de forma:

$$s=\sigma+j\omega$$

Pentru simplificare, deși s este un număr complex, el nu se reprezintă subliniat.

$f(t)$ - funcție original.

$F(s)$ - imagine

Pentru a putea aplica transformata Laplace unei funcții $f(t)$, funcția trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

- să fie netedă pe porțiuni
- să crească mai lent decât funcția $e^{-\sigma t}$, deoarece în caz contrar integrala ($F(s)$) nu are limită.
- $f(t)=0$ pentru $t<0$.

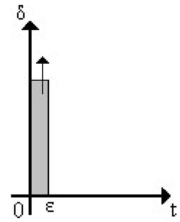
În general, toate funcțiile din electrotehnică satisfac primele două condiții. A treia condiție nu este satisfăcută de tensiunea la bornele unui condensator și atunci se procedează astfel:

$$u_c=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(t)dt=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0}i(t)dt+\frac{1}{C}\int_{0}^{t}i(t)dt=U_{C_0}+\frac{1}{C}\int_0^t idt$$

a). Funcții original $f(t)$ și transformatele Laplace (imaginile $F(s)$) ale acestora, utilizate mai frecvent în electrotehnică

Nr.	*f(t)*	*F(s)*
1	$\delta(t)$	1
2	$\gamma(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$
4	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
7	$\sin(\omega t+\varphi)$	$\frac{s\sin\varphi+\omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}$
8	$\cos(\omega t+\varphi)$	$\frac{s\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$
9	$shat$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
10	$chat$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
11	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
12	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
13	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
14	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at}-be^{bt}\right)$	$\frac{a}{(s-a)(s-b)}$
15	$f'(t)$	$sL[f(t)]-f(0)$
16	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}L[f(t)]$

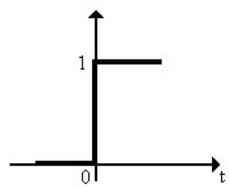
$\delta(t)$ **- funcția impuls unitate** a lui Dirac



$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \infty, & t=0\\ 0, & t>0\end{cases}$$

$$\int_0^{\varepsilon}\delta(t)dt=1,\ \ \varepsilon\to 0\,.$$

$\gamma(t)$ **- funcția treaptă unitate**



$$\gamma(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

a). Teorema combinațiilor liniare:

$$f(t)=A\cdot f_1(t)+B\cdot f_2(t)$$

$$\Rightarrow\quad F(s)=A\cdot F_1(s)+B\cdot F_2(s)$$

Operatorul Laplace este distributiv față de adunare.

b). Teorema derivatei:

$$L\left[\frac{df}{dt}\right]=s\cdot F(s)-f(0-)\,.$$

c). Teorema integralei:

$$L\left[\int f dt\right]=\frac{F(s)}{s}$$

5.3.2 Determinarea funcției original când se cunoaște imaginea sa - teoremele dezvoltării ale lui Heaviside

În principiu, cunoscând funcția imagine, pentru a obține funcția original, se urmărește scrierea funcției imagine într-una din formele date în tabelul anterior, iar originalul se obține prin identificarea din acest table.

În majoritatea cazurilor întâlnite în electrotehnică, funcția imagine rezultă sub forma unei fracții raționale (raportul a două polinoame) în s, de forma.

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)};\qquad gradB>gradA\,.$$

a). Dacă $B(s)=\prod_{k=1}^{n}(s-s_k)$, adică polinomul de la numitor are n rădăcini reale și distincte, atunci funcția original va avea expresia:

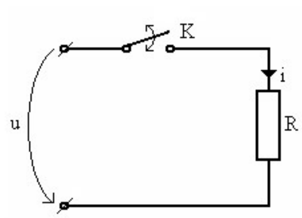
$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}\cdot e^{s_k t}$$

b). Dacă $B(s)=s\cdot C(s)$, $C(s)=\prod_{k=2}^{n}(s-s_k)$, adică $C(s)$ are n-1 rădăcini reale și distincte, iar $B(s)$ are o rădăcină nulă, atunci rezultă:

$$f(t)=\frac{A(0)}{C(0)}+\sum_{k=2}^{n}\frac{A(s_k)}{s_k\cdot C'(s_k)}\cdot e^{s_k t}$$

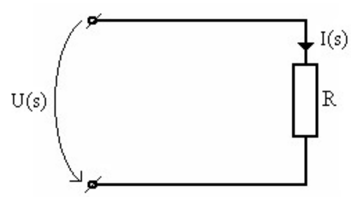
5.3.3 Utilizarea transformatei Laplace la studiul unor circuite în regim tranzitoriu

a).Rezistorul ideal:



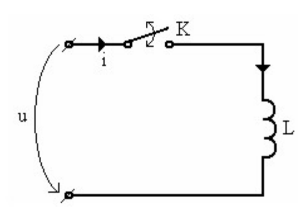
$u=R\cdot i\xrightarrow{L}U(s)=R\cdot I(s)$

Din această relație rezultă schema electrică echivalentă în operațional:



$Z_R(s)=R$

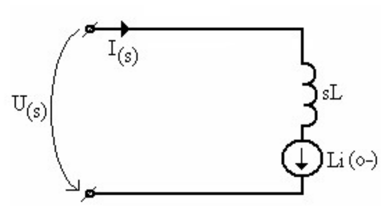
b). Bobină ideală:



$u=L\dfrac{di}{dt}\xrightarrow{L}U(s)=L\left[s\cdot I(s)-i(0^-)\right]$

$U(s)=sL\cdot I(s)-Li(0^-)$

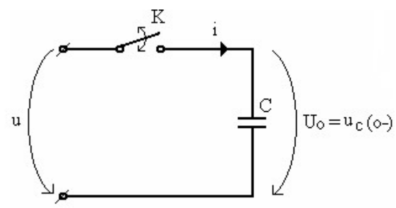
Din această relație rezultă schema electrică echivalentă în operațional:



$Z_L(s) = sL$

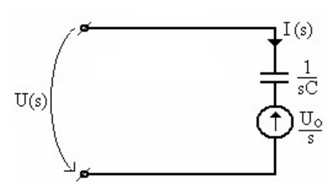
$Li(0-) = \phi(0-)$

c). Condensatorul ideal:



$$u = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + U_0 \xrightarrow{L} U(s) = \frac{1}{C}\cdot\frac{I(s)}{s} + U_0\frac{1}{s}$$

$$U(s) = \frac{1}{sC}\cdot I(s) + \frac{U_0}{s}$$



$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$

$U_0 = u_C(0-)$

Observație: Folosind metoda transformatei Laplace și schemele electrice echivalente în operațional, circuitele în regim tranzitoriu pot fi rezolvate prin aceleași metode ca și circuitele în regim armonic sau cele în regim de c.c. ținând cont de particularități.

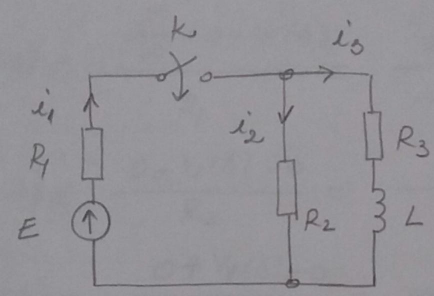
Concluzie:

Rezolvarea circuitelor electrice ramificate aflate în regim tranzitoriu, în operațional, presupune parcurgerea următorilor pași:

- Se desenează schema electrică echivalentă, la t=0-, și se determină condițiile inițiale pentru elementele reactive;
- Se desenează schema electrică echivalentă, în operațional, la t=0+, se determină funcțiile imagine ale mărimilor de ieșire și apoi funcțiile original ale acestora.
- Se efectuează verificări la comutație și în noul regim permanent.

Circuite electrice în regim tranzitoriu
– rezolvare utilizând metoda operațională –

Pr. 1



$E = 24V$, $R_1 = 2\Omega$

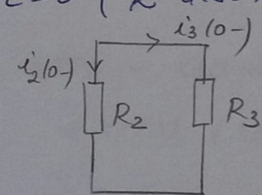
$R_2 = R_3 = 20\Omega$

$L = 10\,mH$

La $t=0$, K se închide.
Să se calculeze curenții din laturile circuitului (determinare, verificare la comutație și pentru noul regim permanent). $i_3(t) = ?$

Soluție:

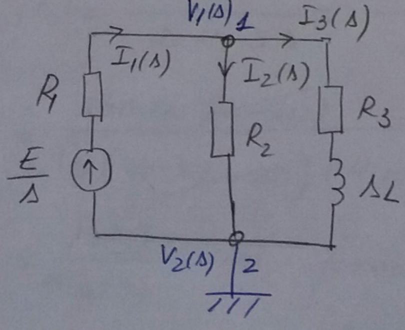
$t = 0-$ (k deschis) => sch. el. echiv. în c.c.



$$i_2(0-) = -i_3(0-) = 0$$

=> bobina se află în condiții inițiale nule

$t = 0+$ (K închis) => sch. el. echiv. în operațional



$n = 2 \Rightarrow V_1(s), V_2(s)$;

$V_2(s) = 0$

– 1 –

TIK (n_1): $-I_1(s)+I_2(s)+I_3(s)=0$

$$I_1(s)=\frac{\frac{E}{s}+0-V_1(s)}{R_1}=\frac{\frac{24}{s}-V_1(s)}{2}=\frac{24-sV_1(s)}{2s}$$

$$I_2(s)=\frac{0+V_1(s)-0}{R_2}=\frac{V_1(s)}{20}$$

$$I_3(s)=\frac{0+V_1(s)-0}{R_3+sL}=\frac{V_1(s)}{20+10^{-3}s}$$

$$\Rightarrow -\frac{\overset{10(20+10^{-3}s)}{}24-sV_1(s)}{2s}+\frac{\overset{s(20+10^{-3}s)}{}V_1(s)}{20}+\frac{\overset{20s}{}V_1(s)}{20+10^{-3}s}=0$$

$$-(24-sV_1(s))(200+10\cdot10^{-3}s)+V_1(s)(20s+10^{-3}s^2)+$$
$$+20sV_1(s)=0$$

$$-4800-240\cdot10^{-3}s+V_1(s)(200s+10\cdot10^{-3}s^2)+$$
$$+V_1(s)(20s+10^{-3}s^2+20s)=0$$

$$\Rightarrow V_1(s)=\frac{240\cdot10^{-3}s+4800}{11\cdot10^{-3}s^2+240s}\Rightarrow$$

$$I_3(s)=\frac{V_1(s)}{20+10^{-3}s}=\frac{240\cdot10^{-3}s+4800}{s(20+10^{-3}s)(11\cdot10^{-3}s+240)}=$$

$$=\frac{240\cancel{(10^{-3}s+20)}}{s\cancel{(10^{-3}s+20)}(11\cdot10^{-3}s+240)}=\frac{240}{s(11\cdot10^{-3}s+240)}=$$

$$=\frac{P_1(s)}{sP_3(s)}$$ $\rightarrow$ forma a II-a Heaviside

-2-

$s P_3(s) = 0 \Rightarrow s_1 = 0$

$P_3(s) = 0 \Rightarrow 11\cdot 10^{-3} s_2 + 240 = 0$

$\Rightarrow s_2 = -\frac{240}{11\cdot 10^{-3}} = -\frac{240\cdot 10^{3}}{11} = -\frac{24}{11}\cdot 10^{4}$

$$i_3(t) = \frac{P_1(0)}{P_3(0)} + \frac{P_1(s_2)}{s_2 P_3'(s_2)} e^{s_2 t}$$

$P_1(s) = 240 \Rightarrow P_1(s_2) = 240$

$P_3(s) = 11\cdot 10^{-3} s + 240 \Rightarrow P_3'(s) = 11\cdot 10^{-3}$

$\Rightarrow P_3'(s_2) = 11\cdot 10^{-3}$

$P_1(0) = 240, \quad P_3(0) = 240$

$$\Rightarrow i_3(t) = \frac{240}{240} + \frac{240}{-\frac{24\cdot 10^{4}}{11}\cdot 11\cdot 10^{-3}} e^{-\frac{24\cdot 10^{4}}{11} t} \Rightarrow$$

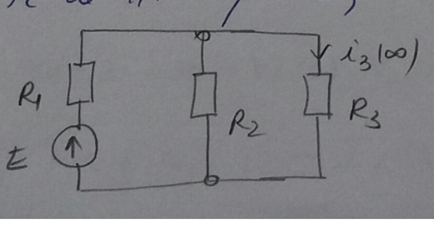
$$\Rightarrow \boxed{i_3(t) = 1 - 1\, e^{-\frac{240000}{11} t} \quad (A)}$$

$i_3(0+) = i_3(t)\big|_{t=0} = 1 - 1\cdot e^{0} = 1 - 1 = 0$ (A)

$\Rightarrow i_3(0+) = i_3(0-)$

$t \to \infty \Rightarrow i_3(t)\big|_{t\to\infty} = 1 - 1e^{-\infty} = 1$ A

Pe de altă parte, din sch. el. echiv. la $t \to \infty$ (K închis)



$$i_3(\infty) = \frac{R_2}{R_2+R_3}\cdot\frac{E}{R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}} = \frac{20}{40}\cdot\frac{24}{2+10} = 1A \quad (A)$$

$\Rightarrow$ soluția obținută este corectă

-3-