SPAȚII EUCLIDIENE
PRODUS SCALAR. ORTOGONALITATE.

1 În spațiul euclidian $(\mathbb{R}^3, <,>)$, unde $<,>$ este produsul scalar uzual, se consideră vectorii $x=(3,1,2)$ și $y=(1,-5,1)$. Să se arate că aceștia sunt ortogonali și să se determine vectorul $z\in\mathbb{R}^3$ astfel încât $\{x,y,z\}$ să constituie o bază ortogonală în $\mathbb{R}^3$.

<u>Soluție</u>: $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
$y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$

Produsul scalar $<x,y> = x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$

$x=(\underset{x_1}{3},\underset{x_2}{1},\underset{x_3}{2})\in\mathbb{R}^n$; $y=(\underset{y_1}{1},\underset{y_2}{-5},\underset{y_3}{1})\in\mathbb{R}^3$

$<x,y> = <(3,1,2),(1,-5,1)> = 3\cdot1+1\cdot(-5)+2\cdot1 = 3-5+2=0$

Cum $<x,y>=0 \Rightarrow x\perp y$ (adică x și y sunt ortogonali)

Deoarece x,y sunt ortogonali, ei sunt liniar independenți.

În consecință $\{x,y\}$ poate fi completată până la o bază, cu un vector $z=(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{R}^3$, $z\neq0$.

Din condiția ca această bază să fie ortogonală, rezultă

$<x,z>=0$ și $<y,z>=0$

$<x,z> = <(3,1,2),(z_1,z_2,z_3)> = 3z_1+z_2+2z_3$

$<y,z> = <(1,-5,1),(z_1,z_2,z_3)> = z_1-5z_2+z_3$

Se obține sistemul:

$$\begin{cases}3z_1+z_2+2z_3=0\\ z_1-5z_2+z_3=0\end{cases} \qquad A=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}z_1 & z_2 & z_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & -5 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

$\Delta_p = \begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -5\end{vmatrix} = -15-1=-16\neq0$ minor principal

z_1, z_2 necunoscute principale, z_3 necunoscută secundară

$z_3=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$

$$\begin{cases}3z_1+z_2=-2\alpha\\ z_1-5z_2=-\alpha \mid(-3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3z_1+z_2=-2\alpha\\ -3z_1+15z_2=3\alpha\end{cases}$$

$/ \quad 16z_2=\alpha \Rightarrow z_2=\frac{\alpha}{16}$

$z_1-5\cdot\frac{\alpha}{16}=-\alpha \Rightarrow$

$z_1=-\alpha+\frac{5\alpha}{16} \Rightarrow z_1=\frac{-11\alpha}{16}$

$\Rightarrow z=(z_1,z_2,z_3)=\left(\frac{-11\alpha}{16},\frac{\alpha}{16},\alpha\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

Atunci pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}^*$, mulțimea:
$\{x,y,z=\left(-\frac{11\alpha}{16},\frac{\alpha}{16},\alpha\right)\}$ constituie o bază ortogonală în $\mathbb{R}^3$.

2 a) Determinați unghiul vectorilor $x = (2,-1,3)$ și $y = (-2,4,1)$ în $\mathbb{R}^3$, cu produsul scalar uzual:

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

b) Determinați produsul scalar și lungimile vectorilor $x=(1+i,2-3i)$ și $y=(3-i,2+i)$ în $\mathbb{C}^2$ cu produsul scalar uzual $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1\cdot\overline{y_1}+x_2\cdot\overline{y_2}$.

Soluție: a) Calculăm valoarea cosinusului acestui unghi, care îl determină unic în intervalul $[0,\pi]$

$$\cos(x,y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

$$\langle x,y\rangle = \langle (2,-1,3),(-2,4,1)\rangle = 2\cdot(-2)+(-1)\cdot 4+3\cdot 1 = -4-4+3=-5$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\langle (2,-1,3),(2,-1,3)\rangle} = \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\|y\| = \sqrt{\langle y,y\rangle} = \sqrt{\langle (-2,4,1),(-2,4,1)\rangle} = \sqrt{(-2)^2+4^2+1^2} = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$$

Atunci: $\cos(x,y) = \dfrac{-5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}} = \dfrac{-5}{7\sqrt{6}} = \dfrac{-5\sqrt{6}}{42}$.

b) $\langle x,y\rangle = \langle (1+i,2-3i),(3-i,2+i)\rangle =$

$$= (1+i)\cdot\overline{(3-i)} + (2-3i)\overline{(2+i)} = (1+i)(3+i)+(2-3i)(2-i)$$

$$= 3+i+3i+i^2+4-2i-6i+3i^2=$$

$$= 3+4i-1+4-2i-6i-3 = 3-4i$$

Lungimea lui x:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\langle (1+i,2-3i),(1+i,2-3i)\rangle} =$$

$$= \sqrt{(1+i)\overline{(1+i)}+(2-3i)\overline{(2-3i)}} = \sqrt{(1+i)(1-i)+(2-3i)(2+3i)}$$

$$= \sqrt{1-i^2+4-9i^2} = \sqrt{1+1+4+9} = \sqrt{15}$$

$$\|y\| = \sqrt{\langle y,y\rangle} = \sqrt{\langle (3-i,2+i),(3-i,2+i)\rangle} =$$

$$= \sqrt{(3-i)\overline{(3-i)}+(2+i)\overline{(2+i)}} = \sqrt{(3-i)(3+i)+(2+i)(2-i)}$$

$$= \sqrt{9-i^2+4-i^2} = \sqrt{9+1+4+1} = \sqrt{15}.$$

3 În spațiul vectorial $\mathbb{R}^2|\mathbb{R}$ se definește

$$(u,v) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2, \text{ unde}$$

$$u=(x_1,x_2),\ v=(y_1,y_2)$$

a) Arătați că aplicația $(\cdot,\cdot): \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este un produs scalar în $\mathbb{R}^2$

b) Calculați $\|v\|$, unde $v=(-3,4)$ în raport cu produsul scalar $(\cdot,\cdot)$ și în raport cu produsul scalar uzual:

$\langle u,v\rangle = x_1y_1+x_2y_2$

c) Normalizați vectorul $v=(-3,4)$ în raport cu cele două produse scalare

d) Verificați ortogonalitatea vectorilor $u=(1,2)$ și $v=(5,1)$ în raport cu cele două produse scalare de mai sus.

Soluție:

a) $(u,v)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$ produs scalar dacă verifică:

i) $(u,v)=(v,u),\ \forall u,v\in\mathbb{R}^2$

ii) $(u+v,w)=(u,w)+(v,w),\ \forall u,v,w\in\mathbb{R}^2$

iii) $(\alpha u,v)=\alpha\cdot(u,v),\ \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \forall u\in\mathbb{R}^2$

iv) $(u,u)\geq 0,\ (u,u)=0 \Rightarrow u=0$

i) $\left.\begin{array}{l}(u,v)=((x_1,x_2),(y_1,y_2))=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2\\ (v,u)=((y_1,y_2),(x_1,x_2))=y_1x_1-y_1x_2-y_2x_1+3y_2x_2\end{array}\right|\Rightarrow$

$\Rightarrow (u,v)=(v,u)$

ii) $u=(x_1,x_2),\ v=(y_1,y_2),\ w=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$

$u+v=(x_1+y_1,x_2+y_2)\in\mathbb{R}^2$

$(u+v,w)=((x_1+y_1,x_2+y_2),(z_1,z_2))=(x_1+y_1)\cdot z_1-(x_1+y_1)\cdot z_2-(x_2+y_2)\cdot z_1+3(x_2+y_2)\cdot z_2=x_1z_1+y_1z_1-x_1z_2-y_1z_2-x_2z_1-y_2z_1+3x_2z_2+3y_2z_2$

$(u,w)+(v,w)=((x_1,x_2),(z_1,z_2))+((y_1,y_2),(z_1,z_2))=$

$=x_1z_1-x_1z_2-x_2z_1+3x_2z_2+y_1z_1-y_1z_2-y_2z_1+3y_2z_2$

$(u+v,w)=(u,w)+(v,w),\ \forall u,v,w\in\mathbb{R}^2$

iii) $u=(x_1,x_2),\ v=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$\alpha u=(\alpha x_1,\alpha x_2),\ \alpha\in\mathbb{R}$

$(\alpha u,v)=((\alpha x_1,\alpha x_2),(y_1,y_2))=\alpha x_1y_1-\alpha x_1y_2-\alpha x_2y_1+3\alpha x_2y_2=\alpha(x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2)$

$=\alpha\cdot(u,v),\ \forall u,v\in\mathbb{R}^2,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$

iv) $u=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

$(u,u)=((x_1,x_2),(x_1,x_2))=x_1x_1-x_1x_2-x_2x_1+3x_2x_2=$

$=x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+2x_2^2=$

$=(x_1-x_2)^2+2x_2^2\geq 0$

$(u,u)=0 \Rightarrow (x_1-x_2)^2+2x_2^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1-x_2=0 \\ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=x_2=0 \Rightarrow u=(0,0)$

Deoarece s-au verificat condițiile i, ii, iii, iv, rezultă că $(u,v)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$ este un produs scalar.

b) $v=(-3,4)$

$\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$ în raport cu produsul scalar uzual: $\langle u,v\rangle=x_1y_1+x_2y_2$

$$\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}=\sqrt{\langle(-3,4),(-3,4)\rangle}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$\|v\|=\sqrt{(v,v)}$ în raport cu produsul scalar din problemă: $(u,v)=x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+3x_2y_2$

$$\|v\|=\sqrt{(v,v)}=\sqrt{((-3,4),(-3,4))}=\sqrt{-3\cdot(-3)-(-3)\cdot 4-4\cdot(-3)+3\cdot 4\cdot 4}=$$
$$=\sqrt{9+12+12+48}=\sqrt{81}=9$$

c) Normalizarea vectorului $v=(-3,4)$ în raport cu cele două produse scalare

Normalizăm pe $v=(-3,4)$ în raport cu produsul scalar uzual: $\langle u,v\rangle=x_1y_1+x_2y_2$

$$w=\frac{v}{\|v\|}=\frac{(-3,4)}{5}=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right);\ \|w\|=\sqrt{\langle w,w\rangle}=$$
$$=\sqrt{\left\langle\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right),\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\right\rangle}=$$
$$=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=1$$

($\|v\|=5$ conform b))

Normalizăm pe $v=(-3,4)$ în raport cu produsul scalar din problemă. $(u,v)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$

$$w=\frac{v}{\|v\|}=\frac{(3,4)}{9}=\left(-\frac{3}{9},\frac{4}{9}\right);\ \|w\|=\sqrt{\left(\left(-\frac{3}{9},\frac{4}{9}\right),\left(-\frac{3}{9},\frac{4}{9}\right)\right)}=$$
$$=\sqrt{-\frac{3}{9}\cdot\left(-\frac{3}{9}\right)-\left(-\frac{3}{9}\right)\cdot\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{3}{9}\right)+3\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}}$$
$$=\sqrt{\frac{9}{81}+\frac{12}{81}+\frac{12}{81}+\frac{48}{81}}=\sqrt{\frac{81}{81}}=1$$

($\|v\|=9$ conform b))

d) $u=(1,2)$, $v=(5,1)$

Verificăm ortogonalitatea lui u și v în raport cu produsul scalar uzual $\langle u,v\rangle=x_1y_1+x_2y_2$

$\langle u,v\rangle=\langle(1,2),(5,1)\rangle=1\cdot 5+2\cdot 1=7\neq 0 \Rightarrow u \not\perp v$ (u și v nu sunt ortogonali în raport cu produsul scalar uzual

Verificăm ortogonalitatea lui u și v în raport cu produsul scalar din problemă: $(u,v)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$

$$(u,v)=((\underset{x_1}{1},\underset{x_2}{2}),(\underset{y_1}{5},\underset{y_2}{1}))=1\cdot5-1\cdot1-2\cdot5+3\cdot2\cdot1=5-1-10+6=0$$

$\Rightarrow u\perp v$ (u și v sunt ortogonali în raport cu produsul scalar din problemă)

4) În $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii $x=(1,0,1)$, $y=(-1,2,1)$, $z=(1,2,3)$. Să se determine subspațiul ortogonal subspațiului generat de $\{x,y,z\}$ și să se descompună vectorul $v=(8,5,10)$ după cele două subspații.

Soluție: Verificăm liniar independența vectorilor x, y, z:

$\alpha x+\beta y+\gamma z=0 \Rightarrow \alpha(1,0,1)+\beta(-1,2,1)+\gamma(1,2,3)=(0,0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha,0,\alpha)+(-\beta,2\beta,\beta)+(\gamma,2\gamma,3\gamma)=(0,0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha-\beta+\gamma,\ 2\beta+2\gamma,\ \alpha+\beta+3\gamma)=(0,0,0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha-\beta+\gamma=0\\ 2\beta+2\gamma=0\\ \alpha+\beta+3\gamma=0\end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

$\det A=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&2&2\\1&1&3\end{vmatrix}=6-2-2-2=0 \Rightarrow$ sistemul (liniar și omogen) este compatibil nedeterminat (are o infinitate de soluții, adică ex cel puțin unul din α,β,γ nenul). Deci x, y, z sunt liniar dependenți

$\Rightarrow z=ax+by \Leftrightarrow z=a(1,0,1)+b(-1,2,1) \Leftrightarrow (1,2,3)=(a,0,a)+(-b,2b,b) \Leftrightarrow (1,2,3)=(a-b,2b,a+b) \Leftrightarrow \begin{cases}a-b=1\\2b=2\\a+b=3\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}b=1\\a=2\end{cases}$. Deci $z=2x+y$.

Astfel subspațiul generat de x,y,z este:

$S=L(\{x,y,z\})=L(\{x,y\})=\{ax+by \mid a,b\in\mathbb{R}\}=$

$=\{(a-b,2b,a+b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$

$(a-b,2b,a+b)=a(1,0,1)+b(-1,2,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{(1,0,1),(-1,2,1)\}$ o bază pentru S. $\Rightarrow \dim S=2$

Deci ortogonalul lui S va avea dimensiunea 1, deci va fi generat de un vector $u=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3$ cu proprietatea:

$\begin{cases} \langle x,u\rangle = 0 \\ \langle y,u\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle (1,0,1),(u_1,u_2,u_3)\rangle = 0 \\ \langle (-1,2,1),(u_1,u_2,u_3)\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1+u_3=0 \\ -u_1+2u_2+u_3=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} u_3=-u_1 \\ -u_1+2u_2-u_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3=-u_1 \\ 2u_2=2u_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3=-u_1 \\ u_2=u_1 \end{cases}$. Fie $u_1=\alpha\in\mathbb{R}$, $u_2=\alpha$, $u_3=-\alpha$

Deci $S^{\perp}=\{(\alpha,\alpha,-\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}=\{\alpha(1,1,-1)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$

Descompunerea vectorului $v=(8,5,10)$ în raport cu cele două subspații, care va fi unică deoarece $S\oplus S^{\perp}=\mathbb{R}^3$, se obține scriind $(8,5,10)=\underbrace{(a-b,2b,a+b)}_{\in S}+\underbrace{(\alpha,\alpha,-\alpha)}_{\in S^{\perp}} \Rightarrow$

$\Rightarrow (8,5,10)=(a-b+\alpha,2b+\alpha,a+b-\alpha) \Rightarrow \begin{cases} a-b+\alpha=8 \\ 2b+\alpha=5 \\ a+b-\alpha=10 \quad (+) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a=18 \Rightarrow a=9 \Rightarrow \begin{cases} -b+\alpha=-1 \\ 2b+\alpha=5 \quad (-) \end{cases} \Rightarrow 3b=6 \Rightarrow b=2$, $\alpha=-1+b=1$

Deci $v=(8,5,10)=(a-b,2b,a+b)+(\alpha,\alpha,-\alpha)$
$=(9-2,2\cdot 2,9+2)+(1,1,-1)=(7,4,11)+(1,1,-1)$

$v=(8,5,10)=(7,4,11)+(1,1,-1)$ reprezintă descompunerea lui v după cele două subspații

TEMĂ

1 În $(\mathbb{R}^3,\langle,\rangle)$, unde $\langle,\rangle$ e produsul scalar uzual, se consideră vectorii $x=(2,1,-1)$ și $y=(1,3,5)$. Să se arate că x și y sunt ortogonali și să se determine vectorul $z\in\mathbb{R}^3$ astfel încât $\{x,y,z\}$ să constituie o bază ortogonală în $\mathbb{R}^3$.

2 a) Determinați unghiul vectorilor $x=(3,1,-2)$ și $y=(1,0,4)$ în $\mathbb{R}^3$ cu produsul scalar uzual $\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

b) Determinați produsul scalar și lungimile vectorilor $x=(1-2i,3-i)$ și $y=(2+4i,1-i)$ în $\mathbb{C}^2$ cu produsul scalar uzual $\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}$

3 În $\mathbb{R}^2|\mathbb{R}$ se definește $(u,v)=2x_1y_1-x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$ unde $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$

a) Arătați că aplicația $(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este un produs scalar

b) Calculați $\|v\|$, unde $v=(2,-1)$ în raport cu produsul scalar $(\cdot,\cdot)$ din problemă și în raport cu produsul scalar uzual $\langle u,v\rangle=x_1y_1+x_2y_2$ și normalizați vectorul v în raport cu cele două produse scalare

c) Verificați ortogonalitatea lui $u=(1,3)$, $v=(2,-1)$ în raport cu cele două produse scalare de mai sus