SERII DE PUTERI

- **Să se determine raza de convergență și mulțimea de convergență a următoarelor serii:**

1. $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

2. $\sum_{n\geq 1}\frac{n^n x^n}{n!}$

3. $\sum_{n\geq 0}\left[2+(-1)^n\right]x^n$

4. $\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}}\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^n$, $x\neq -\frac{3}{2}$

5. $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}\left(\frac{4x-1}{x+3}\right)^n$

6. $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3^{\frac{n}{2}}\cdot\sqrt{1+n^2}}\cdot tg^n x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

7. $\sum_{n\geq 1}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot x^n$

8. $\sum_{n\geq 1}\frac{n+2}{n^2+1}(x-2)^n$

- **Să se determine mulțimea de convergență și suma seriilor:**

9. $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

10. $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\cdot\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^{2n-1}$

11. $\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{2n+1}\cdot x^n$

12. $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n+1}\cdot x^n$, $x\in\mathbb{R}$

- **Cu ajutorul seriilor de puteri studiați convergența seriilor numerice și determinați suma lor:**

13. $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}$

14. $\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}$

15. $\sum_{n\geq 1}\frac{n^2\left(3^n-2^n\right)}{6^n}$

16. $\sum_{n\geq 0}\frac{3n^3-n^2+1}{n!}$

- **Arătați că funcțiile următoare sunt dezvoltabile în serie de puteri și găsiți această dezvoltare:**

17. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $x\in(-1,1)$

18. $f(x)=\frac{3x}{x^2+5x+6}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-3\}$

19. $f(x)=\int_0^x\frac{\operatorname{arctg} t}{t}dt$, $x\in[-1,1]$

20. $f(x)=\frac{1}{2x-3}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$

21. Calculați $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ cu 4 zecimale exacte

22. Calculați $\int_0^1\sin(x^3)dx$ cu 3 zecimale exacte

23. Calculați $\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$ cu 4 zecimale exacte

24. Calculați $\int_0^{1/2}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$ cu 3 zecimale exacte

Indicații și răspunsuri

1. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ și $R=1$; pentru $x=-1$ seria $\sum_{n\geq 1} \frac{-1}{n}$ este divergentă iar pentru $x=1$ seria $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ este convergentă (se arată cu criteriul lui Leibniz). Mulțimea de convergență este $(-1,1]$.

2. $a_n = \frac{n^n}{n!}$ și $R=\frac{1}{e}$; Mulțimea de absolut convergență este $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ (pentru punctele $x=-\frac{1}{e}$ și $x=\frac{1}{e}$ ar trebui folosit criteriul Raabe-Duhamel. Seriile numerice respective sunt divergente).

3. $a_n = 2+(-1)^n$ și $R=1$; pentru $x=1$ seria $\sum_{n\geq 0}\left(2+(-1)^n\right)$ este divergentă (criteriul necesar de convergență) iar pentru $x=-1$ seria $\sum_{n\geq 0}\left(2\cdot(-1)^n+1\right)$ este divergentă (criteriul necesar de convergență). Mulțimea de convergență este $(-1,1)$.

4. Notăm $y=\frac{x+1}{2x+3}$ și studiem convergența seriei de puteri $\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}}y^n$, cu $a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}}$. Pentru seria în y obținem $R=1$; pentru $y=1$ seria $\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}}$ este divergentă (criteriul de comparație la limită) iar pentru $y=-1$ seria $\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}}(-1)^n$ este convergentă (criteriul lui Leibniz). Mulțimea de convergență pentru seria în y este $[-1,1)$ iar pentru mulțimea de convergență a seriei în x se rezolvă inecuația $-1\leq \frac{x+1}{2x+3}<1$ și se obține $x\in(-\infty,-2)\cup\left[-\frac{4}{3},+\infty\right)$.

5. Notăm $y=\frac{4x-1}{x+3}$ și studiem convergența seriei de puteri $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}y^n$, cu $a_n=(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$. Pentru seria în y obținem $R=1$; pentru $y=1$ seria $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$ este convergentă (criteriul lui Leibniz) iar pentru $y=-1$ seria $\sum_{n\geq 0}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$ este divergentă (criteriul de comparație la limită). Mulțimea de convergență pentru seria în y este $(-1,1]$ iar pentru mulțimea de convergență a seriei în x se rezolvă inecuația $-1<\frac{4x-1}{x+3}\leq 1$ și se obține $x\in\left(-3,\frac{4}{3}\right]$.

6. Notăm $y=\operatorname{tg} x$ și studiem convergența seriei de puteri $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3^{\frac{n}{2}}\cdot\sqrt{1+n^2}}y^n$, cu $a_n=(-1)^n\frac{1}{3^{\frac{n}{2}}\cdot\sqrt{1+n^2}}$. Pentru seria în y obținem $R=\sqrt{3}$; pentru $y=\sqrt{3}$ seria $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ este convergentă (criteriul lui Leibniz) iar pentru $y=-\sqrt{3}$ seria $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ este divergentă (criteriul de comparație la limită). Mulțimea de convergență pentru seria în y este $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ iar pentru mulțimea de convergență a seriei în x se rezolvă inecuația $-\sqrt{3}<\operatorname{tg} x\leq\sqrt{3}$ și se obține $x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$.

7. $R=1$; pentru $x=-1$ și $x=1$ seria numerică corespunzătoare este divergentă (criteriul necesar de convergență). Mulțimea de convergență este $(-1,1)$.

8. Notăm $y=x-2$ și studiem convergența seriei de puteri $\sum_{n\geq 1}\frac{n+2}{n^2+1}y^n$, cu $a_n=\frac{n+2}{n^2+1}$. Pentru seria în y obținem $R=1$; pentru $y=1$ seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n+2}{n^2+1}$ este divergentă (criteriul de comparație la limită) iar pentru $y=-1$ seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n+2}{n^2+1}$ este convergentă (criteriul lui Leibniz). Mulțimea de convergență pentru seria în y este $[-1,1)$ iar pentru mulțimea de convergență a seriei în x se rezolvă inecuația $-1\leq x-2<1$ și se obține $x\in[1,3)$.

9. $R=1$ și mulțimea de convergență este $[-1,1]$. Suma seriei este $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; Se derivează termen cu termen și se obține $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Se integrează și se obține $f(x)=\operatorname{arctg}x+C$ (se determină $C=0$).

10. Notăm $y=\frac{1-x}{1-2x}$ și pentru seria de puteri în y avem $R=1$ și mulțimea de convergență este $[-1,1]$ pentru seria în y și $x\in(-\infty,0]\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ pentru seria în x. Suma seriei în y este $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(y)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\cdot y^{2n-1}$; Se derivează termen cu termen, se înmulțește cu y^2 și se derivează din nou termen cu termen. Se obține $\left(y^2\cdot f'(y)\right)'=\sum_{n\geq 1}2\cdot(-1)^{n-1}\cdot y^{2n-1}$ și se prelucrează termenul general al seriei pentru a se putea folosi suma seriei geometrice: $2\cdot(-1)^{n-1}\cdot y^{2n-1}=2\cdot(-1)^{n-1}\cdot y\cdot y^{2n-2}=2y\cdot(-1)^{n-1}\cdot\left(y^2\right)^{n-1}$, deci $\left(y^2\cdot f'(y)\right)'=2y\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\cdot\left(y^2\right)^{n-1}$, adică $\left(y^2\cdot f'(y)\right)'=\frac{2y}{1+y^2}$. Se integrează și se obține $y^2\cdot f'(y)=\ln\left(1+y^2\right)+C$ (se determină $C=0$) și apoi se integrează $f'(y)=\frac{\ln\left(1+y^2\right)}{y^2}$ și se obține $f(y)=-\frac{1}{y}\ln\left(1+y^2\right)+2\operatorname{arctg}y+K$ (se determină $K=0$). Suma corespunzătoare în x este $f(x)=\frac{1-2x}{x-1}\ln\left(\frac{5x^2-6x+2}{(1-2x)^2}\right)+2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)$, cu $x\in(-\infty,0]\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

11. $R=\frac{1}{2}$ și mulțimea de convergență este $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Suma seriei este $f:\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2n+1}(2x)^n$; Pentru $x\geq 0$, se notează $2x=t^2$, cu $t\in(0,1)$ și determinăm suma $f(t)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2n+1}\cdot t^{2n}$; se înmulțește cu t apoi se derivează termen cu termen și se obține $\left(t\cdot f(t)\right)'=\frac{1}{1-t^2}$. Se integrează și se obține $f(t)=\frac{1}{2t}\ln\frac{1+t}{1-t}$, cu $t\in(0,1)$. Suma corespunzătoare în x

este $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x}}\ln\frac{1+\sqrt{2x}}{1-\sqrt{2x}}$, cu $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$. Pentru $x<0$, se notează $2x=-t^2$, cu $t\in(-1,0)$ și determinăm suma $f(t)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot t^{2n}$; se înmulțește cu t apoi se derivează termen cu termen și se obține $\left(t\cdot f(t)\right)'=\frac{1}{1+t^2}$. Se integrează și se obține $f(t)=\frac{1}{t}\operatorname{arctg} t$, cu $t\in(-1,0)$. Suma corespunzătoare în x este $f(x)=\frac{1}{\sqrt{-2x}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{-2x}\right)$, cu $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right)$.

12. $R=1$ și mulțimea de convergență este $(-1,1)$. Suma seriei este $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n+1}x^n=\sum_{n\geq 1}x^n-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+1}x^n$; Se înmulțește cu x, se derivează termen cu termen și se obține $\left(x\cdot f(x)\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}$. Se integrează și se obține:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x(1-x)}+\frac{1}{x}\left[\ln(1-x)-1\right], & x\in(-1,1)\setminus\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases}$$

13. Seria numerică este convergentă (criteriul Leibniz), deci are sumă. Se consideră seria de puteri: $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3n+1}\cdot x^{3n+1}$ care are raza de convergență $R=1$ și mulțimea de convergență $(-1,1)$. Suma seriei de puteri este $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3n+1}\cdot x^{3n+1}$; se derivează termen cu termen și se obține $f'(x)=\frac{1}{1+x^3}$. Se integrează și se obține $f(x)=\frac{1}{6}\ln\left[\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1}\right]+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$ (se determină $C=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$). Seria numerică inițială se obține pentru $x=1$:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}=f(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\frac{1}{6}\ln 2^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

14. Seria numerică este convergentă (criteriul raportului). Se consideră dezvoltarea $e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ care se înmulțește cu x și apoi se derivează termen cu termen (se repetă procedeul de 2 ori) și se obține: $\left(1+3x+x^2\right)e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$. Pentru $x=1$ se obține: $\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}=5e$.

15. Seria numerică este convergentă (criteriul raportului). Scriem seria inițială ca sumă de două serii: $\sum_{n\geq 1}n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n\geq 1}n^2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ și se consideră seria de puteri $\sum_{n\geq 1}n^2x^n$. Aceasta are $R=1$, mulțimea de convergență $(-1,1)$; Se ”formează” seria $\sum_{n\geq 1}n^2x^n$ pornind de la seria de puteri (cunoscută) $\sum_{n\geq 1}x^n=\frac{1}{1-x}$, cu $|x|<1$. Se derivează termen cu termen și se înmulțește cu x (se repetă procedeul de 2 ori) și se obține

$\sum_{n\geq 1} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$. Pentru $x=\frac{1}{2}$ obținem $\sum_{n\geq 1} n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 6$ iar pentru $x=\frac{1}{3}$ obținem $\sum_{n\geq 1} n^2\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}$.

Suma seriei numerice inițiale este $6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$.

16. Seria numerică este convergentă (criteriul raportului). Seria numerică se desface în trei serii numerice: $S=\sum_{n\geq 0}\frac{3n^3-n^2+1}{n!}=3\sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!}-\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{n!}+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}=3S_1-S_2+S_3$. Formăm seriile S_1, S_2 și S_3 cu ajutorul seriei (cunoscute) $e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$. Pentru S_1 derivăm termen cu termen și înmulțim cu x (se repetă procedeul de 3 ori) și se obține $\left(x^3+3x^2+x\right)e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!}x^n$, iar pentru $x=1$ avem: $S_1=5e$. Pentru S_2 avem din deducerea lui S_1 relația: $\left(x^2+x\right)e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{n!}x^n$ în care facem $x=1$ și avem: $S_2=2e$. Pentru S_3 facem direct $x=1$ în dezvoltarea $e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ și avem $S_3=e$. Se obține în final $S=14e$.

17. $f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$, pentru $x\in(-1,1)$ și se poate scrie sub forma: $f'(x)=\left(1+\left(-x^2\right)\right)^{-1}$, adică funcție binomială de forma $(1+y)^\alpha$, cu $\alpha\in\mathbb{R}$, adică este de clasă C^∞, deci dezvoltabilă în serie de puteri. Conform seriei binomiale, pentru $y=-x^2$ și $\alpha=-1$ avem: $f'(x)=\sum_{n\geq 0}x^{2n}$. Integrăm termen cu termen pe intervalul $[0,t]$ cu $|t|<1$ și obținem $f(t)=\sum_{n\geq 0}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}$, adică $f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, deci $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

18. $f(x)=\frac{3x}{x^2+5x+6}$ este de clasă C^∞ pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-3\}$, deci dezvoltabilă în serie de puteri. Se desface $f(x)$ în fracții simple: $f(x)=-\frac{6}{x+2}+\frac{9}{x+3}$. Pentru a putea folosi seria binomială se scrie $f(x)$ în forma: $f(x)=-3\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}+3\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}$. Mai departe avem $-3\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}=-3\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$, pentru $|x|<2$ și $-3\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}=3\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^n}{3^n}$ pentru $|x|<3$.

Se obține în final $f(x)=3\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)x^n$, pentru $|x|<2$.

19. $(\operatorname{arctg} t)'=\frac{1}{1+t^2}$ și se poate scrie sub forma: $(\operatorname{arctg} t)'=\left(1+\left(t^2\right)\right)^{-1}$, adică funcție binomială de forma $(1+y)^\alpha$, cu $\alpha\in\mathbb{R}$, adică este de clasă C^∞, deci dezvoltabilă în serie de puteri. Conform seriei binomiale, pentru $y=t^2$ și $\alpha=-1$ avem: $\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n t^{2n}$. Integrăm termen cu termen și obținem

$\operatorname{arctg} t = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + C$ (determinăm $C = 0$), înmulțim cu $\frac{1}{t}$ și apoi integrăm pe $[0, x]$ cu $|x| \leq 1$ și obținem: $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, pentru $|x| \leq 1$.

20. $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ se poate scrie sub forma: $f(x) = -[1 + 2(1-x)]^{-1}$, adică funcție binomială de forma $(1+y)^{\alpha}$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$, adică este de clasă C^{∞}, deci dezvoltabilă în serie de puteri. Conform seriei binomiale, pentru $y = 2(1-x)$ și $\alpha = -1$ avem: $f(x) = -\sum_{n\geq 0} (-1)^n [2(1-x)]^n = -\sum_{n\geq 0} 2^n (x-1)^n$, pentru $|x-1| < 1$ adică $0 < x < 2$.

Dacă se consideră o altă scriere a lui $f(x)$ cu ajutorul funcției binomiale, de exemplu $f(x) = -\frac{1}{3}\left[1 + \left(\frac{-2x}{3}\right)\right]^{-1}$ vom avea, conform seriei binomiale pentru $y = \frac{-2x}{3}$ și $\alpha = -1$: $f(x) = -\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2x}{3}\right)^n$, pentru $\left|\frac{2x}{3}\right| < 1$, adică $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$. În concluzie, putem avea dezvoltări diferite pe intervale diferite !!

21. În dezvoltarea $e^y = \sum_{n\geq 0} \frac{y^n}{n!}$ se ia $y = -x^2$, se integrează termen cu termen pe $[0,1]$ și se obține $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)}$. Seria numerică este convergentă (se arată folosind criteriul lui Leibniz, cu $a_n = \frac{1}{n!(2n+1)}$), deci are sumă. Notăm suma acestei serii numerice cu $S = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ și șirul sumelor parțiale cu S_n. Pentru a obține 4 zecimale exacte în aproximarea sumei, determinăm $n \in \mathbb{N}$ pentru care sunt îndeplinite condițiile: $|S - S_n| < a_{n+1}$ și $a_{n+1} \leq \frac{1}{10^5}$. Calculăm primii termeni ai șirului a_n, până când este îndeplinită condiția $a_{n+1} \leq \frac{1}{10^5}$: $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{10}$, $a_3 = \frac{1}{42}$, $a_4 = \frac{1}{216}$, $a_5 = \frac{1}{1320}$, $a_6 = \frac{1}{9360}$, $a_7 = \frac{1}{75600}$ și $a_8 = \frac{1}{685440} < \frac{1}{10^5}$, deci $a_8 = a_{n+1}$ și $n = 7$. Rezultă că $|S - S_7| < a_8$, ceea ce este echivalent cu $-a_8 + S_7 < S < a_8 + S_7$. Calculăm:
$S_7 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 = 0.4682280...$ și obținem: $0.74682... < S < 0.746824...$, adică $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.7468$ (cu 4 zecimale exacte).

22. În dezvoltarea $\sin y = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$ se ia $y = x^3$, se integrează termen cu termen pe $[0,1]$ și se obține $\int_0^1 \sin(x^3) dx = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(6n+4)}$. Seria numerică este convergentă (se arată folosind criteriul lui Leibniz, cu $a_n = \frac{1}{(2n+1)!(6n+4)}$), deci are sumă. Notăm suma acestei serii numerice cu $S = \int_0^1 \sin(x^3) dx$ și șirul sumelor parțiale cu S_n. Pentru a obține 3 zecimale exacte în aproximarea sumei, determinăm $n \in \mathbb{N}$ pentru care sunt îndeplinite condițiile: $|S - S_n| < a_{n+1}$ și $a_{n+1} \leq \frac{1}{10^4}$. Se procedează ca la exercițiul 21. și se obține: $-a_3+S_2<S<a_3+S_2$. Calculăm $S_2=a_0-a_1+a_2=0.2338541...$ și obținem: $0.2338451...<S<0.2338631...$, adică $\int_0^1 \sin\left(x^3\right)dx=0.233$ (cu 3 zecimale exacte).

23. Se folosește dezvoltarea binomială cu $y=x^4$ și $\alpha=-\frac{1}{2}$, deci $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}=1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{4n}$, cu $x\in(-1,1)$, adică $x^4\in[0,1)$. Intervalul de integrare $\left[0,\frac{1}{2}\right]\subset(-1,1)=(-R,R)$ (intervalul de convergență), deci putem integra termen cu termen și obținem: $\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx=\frac{1}{2}+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{5n+1}\cdot n!}\cdot\frac{1}{4n+1}$. Seria numerică este convergentă (se arată folosind criteriul lui Leibniz, cu $a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{5n+1}\cdot n!}\cdot\frac{1}{4n+1}$), deci are sumă. Notăm suma acestei serii numerice cu $S=\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$ și șirul sumelor parțiale cu S_n. Pentru a obține 4 zecimale exacte în aproximarea sumei, determinăm $n\in\mathbb{N}$ pentru care sunt îndeplinite condițiile: $\left|S-S_n\right|<a_{n+1}$ și $a_{n+1}\leq\frac{1}{10^5}$. Se procedează ca la exercițiul 21. și se obține: $-a_3+S_2<S<a_3+S_2$. Calculăm $S_2=a_0-a_1+a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{320}+\frac{1}{12288}=\ldots=0.4969...$ și obținem: $0.4969...<S<0.4969...$, adică $\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx=0.4969$ (cu 4 zecimale exacte).

24. $(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}=\left(1+\left(x^2\right)\right)^{-1}$, adică funcție binomială de forma $(1+y)^\alpha$, cu $\alpha\in\mathbb{R}$. Conform seriei binomiale, pentru $y=x^2$ și $\alpha=-1$ avem: $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$. Integrăm termen cu termen și obținem $\operatorname{arctg}x=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+C$ (determinăm $C=0$), înmulțim cu $\frac{1}{x}$ și apoi integrăm pe $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ și obținem: $\int_0^{1/2}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$. Seria numerică este convergentă (se arată folosind criteriul lui Leibniz, cu $a_n=\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$), deci are sumă. Notăm suma acestei serii numerice cu $S=\int_0^{1/2}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$ și șirul sumelor parțiale cu S_n. Pentru a obține 3 zecimale exacte în aproximarea sumei, determinăm $n\in\mathbb{N}$ pentru care sunt îndeplinite condițiile: $\left|S-S_n\right|<a_{n+1}$ și $a_{n+1}\leq\frac{1}{10^4}$. Se procedează ca la exercițiul 21. și se obține: $-a_4+S_3<S<a_4+S_3$. Calculăm $S_3=a_0-a_1+a_2-a_3=\frac{687539}{1411200}=0.4872016...$și obținem: $0.4871816...<S<0.4872216...$, adică $\int_1^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx=0.487$ (cu 3 zecimale exacte).