Cursul 12 Electrotehnică, C2

CAPITOLUL 5
REGIMUL TRANZITORIU AL CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE

5.1 Considerații generale. Condiții inițiale

În studiul circuitelor liniare s-au considerat până aici numai cazurile regimurilor permanente, adică acelea în care mărimile de intrare (tensiuni electromotoare ale surselor de tensiune sau intensități de curent ale surselor de curent) și mărimile de ieșire (curenți în circuit sau căderi de tensiune la bornele surselor de curent) erau constante (c.c.) sau erau funcții periodice de timp cu amplitudini constante (c.a.). Obținerea unui anumit regim permanent într-un circuit electric nu se poate face instantaneu, deoarece acumularea energiei magnetice sau electrice de către diversele elemente reactive de circuit (bobine sau condensatoare) se produce într-un anumit timp.

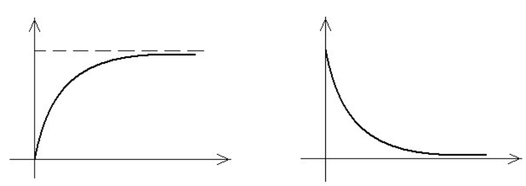
Regimul electrocinetic nestaționar, corespunzător trecerii circuitului electric de la un regim permanent la un alt regim permanent se numește ***regim tranzitoriu.***

Teoretic, regimul tranzitoriu durează un timp infinit lung, însă practic el poate fi considerat egal cu $3 \div 4$ constante de timp (sutimi sau zecimi de secundă, în funcție de parametrii circuitului și excepțional secunde sau minute).

Deoarece valorile curenților și ale tensiunilor pe durata regimului tranzitoriu pot atinge valori periculoase, pentru siguranța în funcționare a circuitului, trebuie să se țină seama de acest regim în proiectarea și dimensionarea aparaturii de comutație.

După modul în care se stabilește regimul permanent al unui circuit, regimul tranzitoriu poate fi: ***aperiodic*** sau ***oscilant.***

Regimul se numește ***aperiodic*** dacă mărimea ce variază în circuit (curentul sau tensiunea) se modifică unidirecțional spre valoarea regimului permanent către care tinde să se stabilizeze – fig. 5.1. a, b.



a. b.

Fig.5.1 Regimuri aperiodice de variație

Regimul se numește ***oscilant*** dacă mărimea ce variază în circuit (curentul sau tensiunea) se modifică bidirecțional față de valoarea regimului permanent către care tinde să se stabilizeze – fig. 5.2.

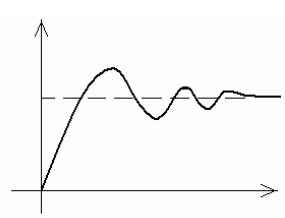
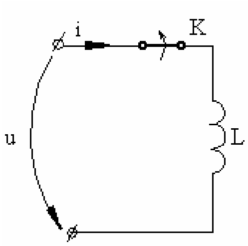


Fig. 5.2.

Indiferent de natura regimului prin care se ajunge la valoarea de regim permanent, amortizarea se produce datorită pierderilor de energie prin efect Joule-Lenz în rezistențele circuitului.

Metoda generală de studiu a regimurilor tranzitorii constă în scrierea ecuațiilor integro-diferențiale ale circuitului și rezolvarea lor. Pentru aceasta este necesar să se cunoască, pentru elementele acumulatoare de energie (bobine, condensatoare) ***condițiile inițiale***.

a). Bobina



$$\left.\begin{array}{l} u_L = L\dfrac{di}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\Phi) \\ \Phi = Li, \quad \text{fluxul magnetic} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathit{conditia\ initiala\ care\ se\ impune\ este:}$$

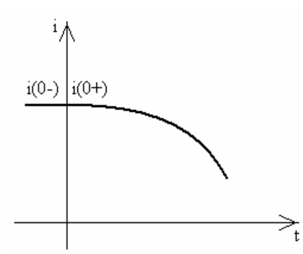
$$\Phi(0-) = \Phi(0+) \tag{7.1}$$

Fig. 5.3 Bobina electrică în comutație

Momentul *t=0-* este cu o fracțiune de secundă înainte de regimul tranzitoriu iar *t=0+* este cu o fracțiune de secundă după începerea regimului tranzitoriu.

Atunci $Li(0-) = Li(0+) \quad \Rightarrow \quad i(0-) = i(0+)$ (5.2)

adică, intensitatea curentului electric prin bobină în momentul comutației este o funcție continuă.



$$\Rightarrow \quad \left.\frac{di}{dt}\right|_0 = 0$$

Fig. 5.4 Continuitatea curentului în momentul comutației

Dacă $i(0-) \neq i(0+)$

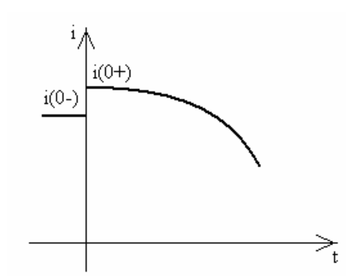
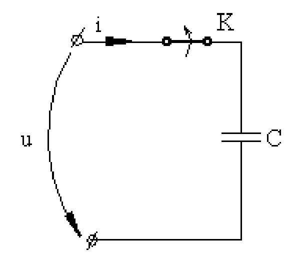


Fig. 5.5

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{di}{dt}\right|_0 = \infty, \quad \Rightarrow u_L \to \infty$$, ceea ce nu este posibil.

b). Condensatorul electric



$$\left.\begin{array}{l} i = C\dfrac{du}{dt} = \dfrac{dq}{dt} \\ q = Cu_C \end{array}\right\} \Rightarrow conditia\ initiala\ care\ se\ impune\ este:$$

$$q(0-) = q(0+) \tag{7.3}$$

Fig. 5.6 Condensatorul electric în comutație

Atunci $Cu_C(0-) = Cu_C(0+) \quad \Rightarrow \quad u_C(0-) = u_C(0+)$ (5.4)

adică, tensiunea la bornele unui condensator în momentul comutației este o funcție continuă.

Dacă $u_C(0-) \neq u_C(0+) \Rightarrow \left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_0 = \infty, \quad \Rightarrow i \to \infty$ și condensatorul s-ar distruge.

5.2 Metoda directă de rezolvare a circuitelor în regim tranzitoriu

5.2.1 Circuitul serie R, L

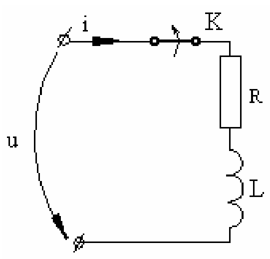


Fig. 5.7 Circuitul R, L serie în regim tranzitoriu

Ecuația circuitului serie R, L căruia i se aplică o tensiune oarecare $u(t)$ este:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u(t) \tag{5.5}$$

Soluția acestei ecuații se obține ca o sumă dintre soluția generală a ecuației omogene (fără membrul drept) - i_l - și o soluție particulară a ecuației - i_p - de aceeași formă cu membrul drept.

i_l - componenta liberă;

i_p - componenta de regim permanent.

$$i = i_l + i_p \tag{5.6}$$

$$L\frac{di_l}{dt} + Ri_l = 0 \tag{5.7}$$

Observație: Pentru orice mărime *x* se notează $\dfrac{d^n x}{dt^n} = p^n$, $n \in N$

Ecuația caracteristică a ecuației diferențiale omogene de ordinul I (5.7) este:

$Lp + R = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -\dfrac{R}{L}$, cu soluția $i_l = A \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ (5.8)

Atunci $i = A \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + i_p$ (5.9)

Pentru $t = 0 \quad \Rightarrow \quad i = i_0, \quad i_p = i_{p0}$ (5.10)

Din relațiile (5.9) și (5.10) rezultă:

$i_0 = A + i_{p0} \quad \Rightarrow \quad A = i_0 - i_{p0}$

Prin urmare: $i = (i_0 - i_{p0})e^{-\frac{R}{L}t} + i_p$ (5.11)

Unitatea de măsură pentru mărimea $\frac{L}{R}$, $\left[\frac{L}{R}\right]_{SI} = \frac{1H}{1\Omega} = \frac{\frac{1V \cdot 1s}{1A}}{1\Omega} = 1s$. Deoarece aceasta are dimensiunea de timp se numește constantă de timp a circuitului.

$\frac{L}{R} = \tau$ - constanta de timp a circuitului (5.12)

Prin urmare soluția de regim tranzitoriu a ecuației (5.5) se poate scrie:

$i = (i_0 - i_{p0})e^{-\frac{t}{\tau}} + i_p$ (5.13)

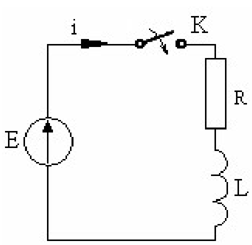
unde: i_0 - valoarea curentului prin bobină, înainte de comutație;

i_p - valoarea curentului de regim permanent, de aceeași formă cu tensiunea aplicată (determinat cu metodele de rezolvare din c.c. sau c.a.);

i_{p0} - valoarea lui i_p la *t=0*.

Aplicația 1.

Conectarea circuitului R, L serie la o sursă de tensiune continuă E.



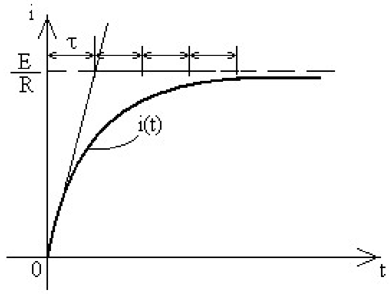
$$i = (i_0 - i_{p0})e^{-\frac{t}{\tau}} + i_p$$

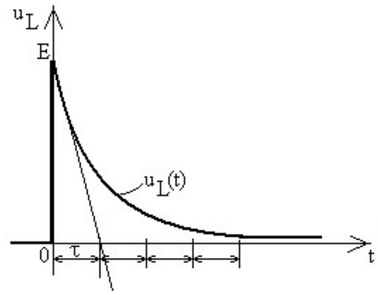
Deoarece înainte de comutație curentul prin bobină era zero, $i_0 = 0$.

Valoarea curentului de regim permanent (curentul din circuit după un timp foarte lung de la închiderea întrerupătorului K) este: $i_p = \frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad i_{p0} = \frac{E}{R}$.

Atunci: $i = (0 - \frac{E}{R})e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, cu $\tau = \frac{L}{R}$.

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L \cdot \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$





Ex. numeric

Să se determine curentul printr-o bobină reală, conectată la o sursă de tensiune continuă, precum și căderea de tensiune pe inductanța acesteia, $E = 12\,V$, $R = 2\,\Omega$, $L = 10\,mH$.

Soluție:

$$i = (i_0 - i_{p0})e^{-\frac{t}{\tau}} + i_p$$

Deoarece înainte de comutație curentul prin bobină era zero, $i_0 = 0$.

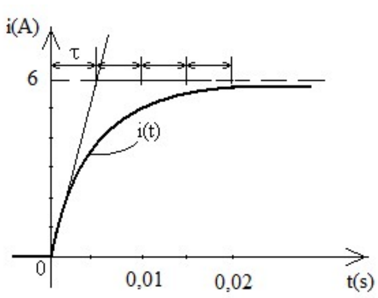
Valoarea curentului de regim permanent (curentul din circuit după un timp foarte lung de la închiderea întrerupătorului K) este: $i_p = \dfrac{E}{R} = \dfrac{12}{2} = 6\ A \Rightarrow \quad i_{p0} = \dfrac{E}{R} = \dfrac{12}{2} = 6\ A$.

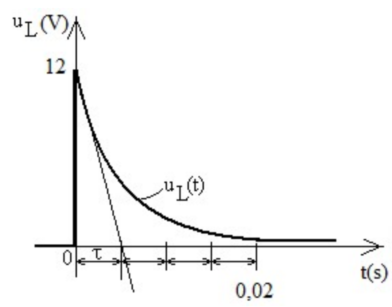
Atunci: $i = (0 - \dfrac{E}{R})e^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{E}{R} = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, cu $\tau = \dfrac{L}{R}$.

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{2} = 5 \cdot 10^{-3} = 0{,}005\ s = 5\ ms,$$

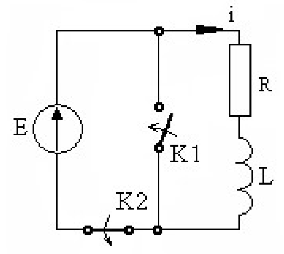
$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{12}{2}(1 - e^{-\frac{t}{5 \cdot 10^{-3}}}) = 6(1 - e^{-200t})\ A$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L \cdot \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 12e^{-200t}\ V$$

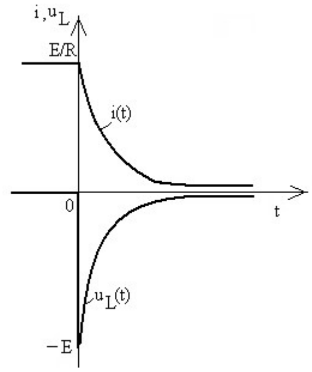




Aplicația 2.
Scurtcircuitarea unui circuit R, L serie care a funcționat în regim staționar cu tensiunea *E* la borne.



În momentul scurtcircuitării elementelor de circuit R, L (închiderea lui K1) la momentul $t=0$ se realizează şi decuplarea automată a sursei de tensiune E (deschiderea lui K2).



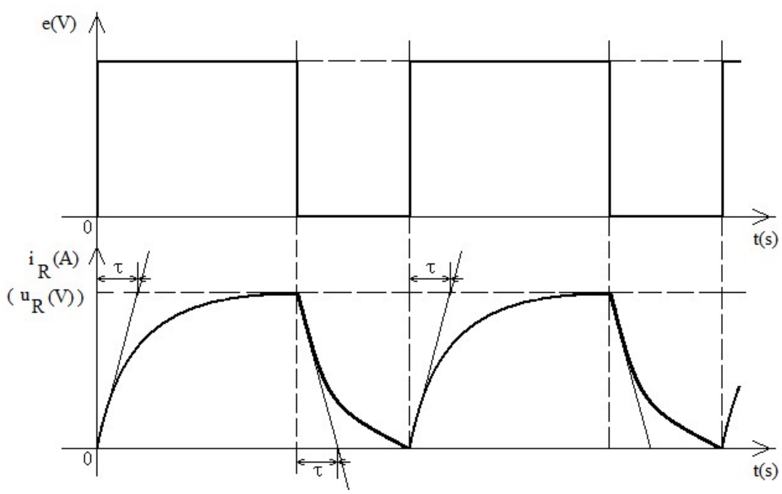
$$i = (i_0 - i_{p0})e^{-\frac{t}{\tau}} + i_p$$

$$i_0 = \frac{E}{R},\ i_p = 0 \text{ și } i_{p0} = 0$$

$$\Rightarrow\ i = \frac{E}{R}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}},\ u_L = L\frac{di}{dt} = -E\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Observație:

În figura următoare se poate urmări variația curentului printr-un circuit R,L serie, sau, la altă scară, a căderii de tensiune pe rezistor (ce se poate vizualiza pe un osciloscop), când circuitul are la borne o sursă de tensiune – semnal dreptunghiular (ex. de la un generator de semnal).



5.2.2 Circuitul serie R, C– *rezolvare prin metoda directă*

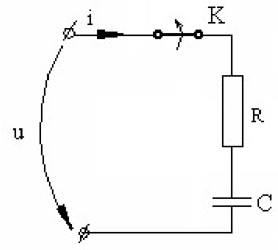


Fig. 5.8 Circuitul R, C serie în regim tranzitoriu

Ecuația circuitului serie R, C căruia i se aplică o tensiune oarecare $u(t)$ este:

$$Ri+\frac{1}{C}\int idt=u(t) \tag{5.14}$$

Dacă se înlocuiește $i=\frac{dq}{dt}$ și $q=\int idt$ rezultă:

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=u(t) \tag{5.15}$$

$$q=q_l+q_p \tag{5.16}$$

$$R\frac{dq_l}{dt}+\frac{1}{C}q_l=0 \tag{5.17}$$

Ecuația caracteristică a ecuației diferențiale omogene de ordinul I (5.17) este:

$$Rp+\frac{1}{C}=0 \quad \Rightarrow \quad p=-\frac{1}{RC}\text{, cu soluția } q_l=A\cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \tag{5.18}$$

Atunci $q=A\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}+q_p$ (5.19)

Pentru $t=0 \quad \Rightarrow \quad q=q_0, \quad q_p=q_{p0}$ (5.20)

Din relațiile (5.19) și (5.20) rezultă:

$q_0=A+q_{p0} \quad \Rightarrow \quad A=q_0-q_{p0}$

Prin urmare: $q=(q_0-q_{p0})e^{-\frac{1}{RC}t}+q_p$ (5.21)

Unitatea de măsură pentru mărimea RC, $\left[RC\right]_{SI}=1\Omega\cdot 1F=1\Omega\cdot\frac{1A\cdot 1s}{1V}=1s$.

$RC=\tau$ - constanta de timp a circuitului (5.22)

Prin urmare soluția de regim tranzitoriu a ecuației (5.15) se poate scrie:

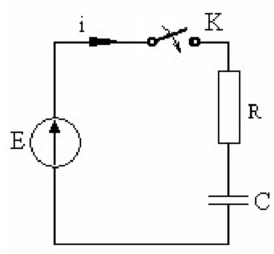
$$q=(q_0-q_{p0})e^{-\frac{t}{\tau}}+q_p \tag{5.23}$$

unde: q_0 - valoarea sarcinii de pe armătura pozitivă a condensatorului imediat înainte de a se produce comutația;

q_p - sarcina de regim permanent, adică sarcina de pe armătura condensatorului la un timp foarte lung după comutație;

q_{p0} - valoarea lui q_p la momentul *t=0*.

Aplicația 1.
Conectarea circuitului R, C serie la o sursă de tensiune continuă E.



$$q = (q_0 - q_{p0})e^{-\frac{t}{\tau}} + q_p$$

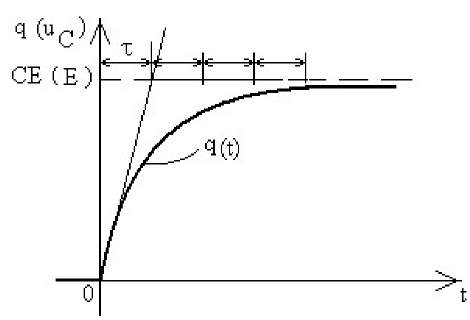
Deoarece înainte de comutație condensatorul nu era încărcat, $q_0 = 0$.

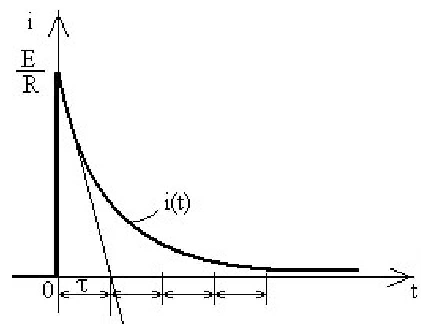
Valoarea sarcinii de regim permanent (sarcina e pe armătura condensatorului după un timp foarte lung de la închiderea întrerupătorului K) este: $q_p = CE \;\Rightarrow\; q_{p0} = CE$.

Atunci: $q = (0 - CE)e^{-\frac{t}{\tau}} + CE = CE(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, cu $\tau = RC$.

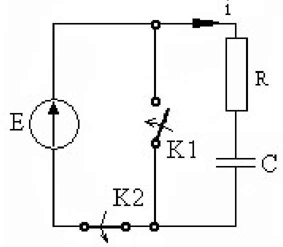
și $i = \dfrac{dq}{dt} = CE \cdot \dfrac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \dfrac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ curentul din circuit în regim tranzitoriu

$$u_C = \frac{q}{C} = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$





Aplicația 2.
Scurtcircuitarea unui circuit R, C serie care a funcționat în regim staționar cu tensiunea *E* la borne.



În momentul scurtcircuitării elementelor de circuit R, C (închiderea lui K1) la momentul *t=0* se realizează şi decuplarea automată a sursei de tensiune *E* (deschiderea lui K2).

$$q = (q_0 - q_{p0})e^{-\frac{t}{\tau}} + q_p$$

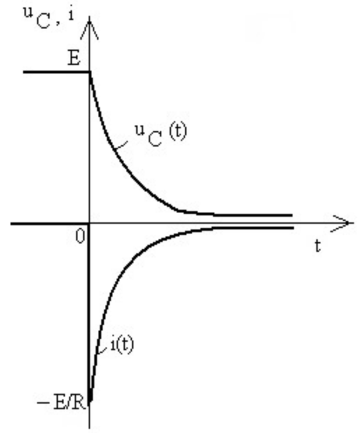
$$q_0 = CE\,,\ q_p = 0 \text{ şi } q_{p0} = 0$$

$$\Rightarrow\ q = (CE - 0)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 0 = CE\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\,,$$

$$q = CE\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\,,\ \tau = RC$$

$$u_C = \frac{q}{C} = E\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}\cdot CE\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Ex. numeric

Să se determine curentul printr-un circuit R, C serie, precum şi căderea de tensiune pe condensator, dacă circuitul este scurtcircuitat, după funcționarea la o sursă de tensiune continuă, $E = 20\,V$, $R = 100\,\Omega$, $C = 2\,\mu F$.

Obs. În momentul scurtcircuitării, închiderea lui K1, la momentul *t=0* se realizează şi decuplarea automată a sursei de tensiune *E*, deschiderea lui K2.

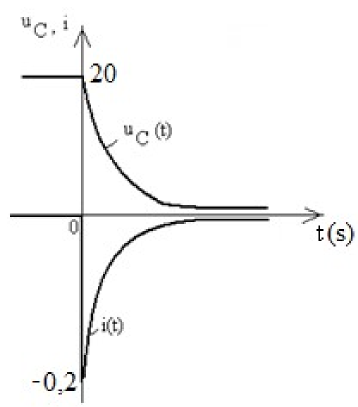
Soluție:

$$q = (q_0 - q_{p0})e^{-\frac{t}{\tau}} + q_p\,,\ q_0 = CE\,,\ q_p = 0 \text{ şi } q_{p0} = 0$$

$$\Rightarrow\ q = (CE - 0)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 0 = CE\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\,,\ q = CE\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\,,\ \tau = RC$$

$$u_C = \frac{q}{C} = E\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 20e^{-500t}\ V$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}\cdot CE\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = -0{,}2e^{-500t}\ A$$



Observație:

În figura următoare se poate urmări variația căderii de tensiune pe condensator (ce se poate vizualiza pe un osciloscop), când circuitul are la borne o sursă de tensiune – semnal dreptunghiular (ex. de la un generator de semnal).