EXTREMELE FUNCȚIILOR DE DOUĂ VARIABILE

1. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y + 3$. Determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte.

2. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte ;

b) Pentru $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 5\right\}$ determinați valoarea minimă și maximă a funcției .

3. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$.

a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte ;

b) Pentru $D = [-4,4] \times [-3,3]$ determinați valoarea minimă și maximă a funcției .

4. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$.

a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte ;

b) Pentru $D = [-1,2] \times [0,2]$ determinați valoarea minimă și maximă a funcției .

5. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$.

a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte ;

b) Pentru $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3y + x \leq 3\right\}$ determinați valoarea minimă și maximă a funcției .

6. Fie $f: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy(1 - x - y)$. Să se determine valoarea minimă și maximă a funcției pe domeniul dat.

7. Fie $f: (-\infty,0) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. Determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte.

8. Fie $f: (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 4x^2 + \dfrac{2}{xy^2} + y^2$. Determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte.

9. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 2xy$. Pentru $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ y + 2x \leq 2\right\}$ determinați valoarea minimă și maximă a funcției .

10. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^3 - 3y^2 + 3y$. Pentru $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\right\}$ determinați punctele de extrem ale funcției.

Indicații și soluții

1. Se impun condiții de existență pentru logaritmi și se stabilește $D=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$. Se determină punctele critice, rezolvând sistemul: $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ care conduce la ecuația bipătrată $3y^4-37y^2+100=0$, cu soluțiile (în D) $y=2$ și $y=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$; Se obține un singur punct critic în D, $(x_0,y_0)=(1,2)$. Elementele matricei hessiene sunt $r_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2+\dfrac{4}{x^2}$, $t_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2+\dfrac{10}{y^2}$ și $s_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$; Pentru punctul $(x_0,y_0)=(1,2)$ obținem $r_0=6>0$ și $r_0t_0-s_0^2=26>0$, deci punctul critic $(x_0,y_0)=(1,2)$ este punct de minim local și $f(1,2)=10(1-\ln 2)$.

2a. Se determină punctele critice, rezolvând sistemul: $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ care conduce la ecuația $y\left(\dfrac{1}{4}y^3-2\right)=0$, cu soluțiile $y=0$ și $y=2$; Se obțin punctele critice $(x_0,y_0)=(0,0)$ și $(x_1,y_1)=(2,2)$. Elementele matricei hessiene sunt $r_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $t_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$ și $s_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-6$; Pentru punctul $(x_0,y_0)=(0,0)$ avem $r_0=0$ și $r_0t_0-s_0^2=-36<0$, deci $(x_0,y_0)=(0,0)$ nu e punct de extrem. Pentru $(x_1,y_1)=(2,2)$ avem $r_0=12>0$ și $r_0t_0-s_0^2=108>0$, deci $(x_1,y_1)=(2,2)$ este punct de minim local și $f(2,2)=-8$.

2b. Reprezentați grafic domeniul D. Pentru $\text{Int}(D)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0,\ x+y<5\right\}$, folosim **2a.** și $(x_0,y_0)=(0,0)\notin \text{Int}\,D$ iar $(x_1,y_1)=(2,2)\in\text{Int}(D)$ este punct de minim, cu $f(2,2)=-8$.

Pentru $y=0$ și $x\in[0,5]$ studiem variația funcției $f(x,0)=g_1(x)=x^3$; Se obține $f(0,0)=g_1(0)=0$ și $f(5,0)=g_1(5)=125$.

Pentru $x=0$ și $y\in[0,5]$ studiem variația funcției $f(0,y)=g_2(y)=y^3$; Se obține $f(0,0)=g_2(0)=0$ și $f(0,5)=g_2(5)=125$.

Pentru $x\geq 0$, $y\geq 0$ și $x+y=5$ studiem variația funcției $f(x,5-x)=g_3(x)=21x^2-105x+125$; Se obține $f(0,5)=g_3(0)=125$, $f(2.5,2.5)=g_3(2.5)=-6.25$ și $f(5,0)=g_3(5)=125$.

Obținem rezultatul final: $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)=125$ și $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)=-8$.

3a. Se determină punctele critice, rezolvând sistemul: $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ care conduce la ecuația bipătrată $y^4-5y^2-36=0$, cu soluțiile $y=3$ și $y=-3$; Obținem punctele critice $(x_0,y_0)=(2,3)$ și $(x_1,y_1)=(-2,-3)$. Elementele matricei hessiene: $r_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $t_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x$ și $s_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6y$;

Pentru $(x_0,y_0)=(2,3)$ avem $r_0=12>0$ și $r_0t_0-s_0^2<0$, deci $(x_0,y_0)=(2,3)$ nu e punct de extrem. Pentru $(x_1,y_1)=(-2,-3)$ avem $r_0=-12<0$ și $r_0t_0-s_0^2<0$, deci $(x_1,y_1)=(-2,-3)$ nu este punct de extrem.

3b. Reprezentați grafic domeniul D. Pentru $\mathrm{Int}(D)=(-4,4)\times(-3,3)$, folosim **3a.** și nu avem puncte de extrem în interiorul domeniului.

Pentru $y=-3$ și $x\in[-4,4]$ studiem variația funcției $f(x,-3)=g_1(x)=-x^3+12x+117$; Se obține $f(-4,-3)=g_1(-4)=133$, $f(-2,-3)=g_1(-2)=101$, $f(2,-3)=g_1(2)=133$ și $f(4,-3)=g_1(4)=101$.

Pentru $x=4$ și $y\in[-3,3]$ studiem variația funcției $f(4,y)=g_2(y)=12y^2-36y-115$; Se obține $f(4,-3)=g_2(-3)=101$, $f\left(4,\frac{3}{2}\right)=g_2\left(\frac{3}{2}\right)=-142$ și $f(4,3)=g_2(3)=-115$.

Pentru $y=3$ și $x\in[-4,4]$ studiem variația funcției $f(x,3)=g_3(x)=-x^3+12x-99$; Se obține $f(-4,3)=g_3(-4)=-83$, $f(-2,3)=g_3(-2)=-115$, $f(2,3)=g_3(2)=-83$ și $f(4,3)=g_3(4)=-115$.

Pentru $x=-4$ și $y\in[-3,3]$ studiem variația funcției $f(-4,y)=g_4(y)=-12y^2-36y+133$; Se obține $f(-4,-3)=g_4(-3)=133$, $f\left(-4,-\frac{3}{2}\right)=g_4\left(-\frac{3}{2}\right)=160$ și $f(-4,3)=g_4(3)=-83$.

Obținem ca rezultat final: $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)=160$ și $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)=-142$.

4a. Se determină punctele critice, rezolvând sistemul: $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ care conduce la ecuația $x(1-x^8)=0$, cu soluțiile $x=0$, $x=1$ și $x=-1$; Se obțin punctele critice $(x_0,y_0)=(0,0)$, $(x_1,y_1)=(-1,-1)$ și $(x_2,y_2)=(1,1)$. Elementele matricei hessiene: $r_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-12x^2$, $t_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-12y^2$ și $s_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4$;

Pentru $(x_0,y_0)=(0,0)$ avem $r_0=0$ și $r_0t_0-s_0^2<0$, deci $(x_0,y_0)=(0,0)$ nu e punct de extrem. Pentru $(x_1,y_1)=(-1,-1)$ avem $r_0=-12<0$ și $r_0t_0-s_0^2=128>0$, deci $(x_1,y_1)=(-1,-1)$ este punct de maxim local și $f(-1,-1)=2$. Pentru $(x_2,y_2)=(1,1)$ avem $r_0=-12<0$ și $r_0t_0-s_0^2=128>0$, deci $(x_2,y_2)=(1,1)$ este punct de maxim local și $f(1,1)=2$.

4b. Reprezentați grafic domeniul D. Pentru $\mathrm{Int}(D)=(-1,2)\times(0,2)$, folosim **4a.** și avem $(x_2,y_2)=(1,1)$ punct de extrem (maxim) în interiorul domeniului, cu $f(1,1)=2$.

Pentru $y=0$ și $x\in[-1,2]$ studiem variația funcției $f(x,0)=g_1(x)=-x^4$; Se obține $f(-1,0)=g_1(-1)=-1$, $f(0,0)=g_1(0)=0$ și $f(2,0)=g_1(2)=-16$;

Pentru $x=2$ și $y\in[0,2]$ studiem variația funcției $f(2,y)=g_2(y)=-y^4+8y-16$; Se obține $f(2,0)=g_2(0)=-16$, $f\left(2,\sqrt[3]{2}\right)=g_2\left(\sqrt[3]{2}\right)=6\sqrt[3]{2}-16$ și $f(2,2)=g_2(3)=-16$;

Pentru $y=2$ și $x\in[-1,2]$ studiem variația funcției $f(x,2)=g_3(x)=-x^4+8x-16$; Se obține $f(0,2)=g_3(0)=-16$, $f\left(\sqrt[3]{2},2\right)=g_3\left(\sqrt[3]{2}\right)=6\sqrt[3]{2}-16$ și $f(2,2)=g_3(2)=-16$;

Pentru $x=-1$ și $y\in[0,2]$ studiem variația funcției $f(-1,y)=g_4(y)=-y^4-4y-1$; Se obține $f(-1,0)=g_4(0)=-1$ și $f(-1,2)=g_4(2)=-25$.

Obținem ca rezultat final: $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)=2$ și $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)=-25$.

5a. Se determină punctele critice, rezolvând sistemul: $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ care conduce la ecuația $x^2=4$, cu soluțiile

$x=2$ și $x=-2$; Se obțin punctele critice $(x_0,y_0)=\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$ și $(x_1,y_1)=\left(-2,-\dfrac{1}{4}\right)$. Elementele matricei hessiene: $r_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x+6y$, $t_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ și $s_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6x$; Pentru $(x_0,y_0)=\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$ avem $r_0=\dfrac{27}{2}>0$ și $r_0t_0-s_0^2=-144<0$, deci $(x_0,y_0)=\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$ nu e punct de extrem. Pentru $(x_1,y_1)=\left(-2,-\dfrac{1}{4}\right)$ avem $r_0=-\dfrac{27}{2}<0$ și $r_0t_0-s_0^2=-144<0$, deci $(x_1,y_1)=\left(-2,-\dfrac{1}{4}\right)$ nu este punct de extrem.

5b. Reprezentați grafic domeniul D. Pentru $\mathrm{Int}(D)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\, y>0,\, 3y+x<3\right\}$, folosim **5a.** și nu avem puncte de extrem în interiorul domeniului.

Pentru $y=0$ și $x\in[0,3]$ studiem variația funcției $f(x,0)=g_1(x)=x^3-15x$; Se obține $f(0,0)=g_1(0)=0$, $f\left(\sqrt{5},0\right)=g_1\left(\sqrt{5}\right)=-10\sqrt{5}$ și $f(3,0)=g_1(3)=-18$.

Pentru $x=0$ și $y\in[0,1]$ studiem variația funcției $f(0,y)=g_2(y)=-12y$; Se obține $f(0,0)=g_2(0)=0$ și $f(0,1)=g_2(1)=-12$.

Pentru $x\geq 0$, $y\geq 0$ și $3y+x=3$ studiem variația funcției $f\left(x,-\dfrac{1}{3}x+1\right)=g_3(x)=3x^2-11x-12$; Se obține $f(0,1)=g_3(0)=-12$, $f\left(\dfrac{11}{6},\dfrac{7}{18}\right)=g_3\left(\dfrac{11}{6}\right)=-\dfrac{265}{12}\simeq-22.083$ și $f(3,0)=g_3(3)=-18$.

Obținem rezultatul final: $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)=0$ și $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)=-10\sqrt{5}\simeq-22.360$.

6. Reprezentați grafic domeniul D.

Pentru $\mathrm{Int}(D)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in(0,1),\, y\in(0,1)\right\}$, se determină punctele critice, rezolvând sistemul:

$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ care conduce la ecuațiile $3x=1$ și $y=1-2x$ (atenție! Soluțiile $x=0$ și $y=0$ nu aparțin $\mathrm{Int}\,D$)

Se obține punctul critic $(x_0,y_0)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)\in\mathrm{Int}\,D$. Elementele matricei hessiene: $r_0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2y$,

$t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x$ și $s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 - 2x - 2y$; Pentru $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ avem $r_0 = -\frac{2}{3} < 0$ și $r_0 t_0 - s_0^2 = \frac{1}{3} > 0$, deci $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ este punct de maxim local și $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$.

Pentru $x = 0$ și $y \in [0,1]$ avem $f(0, y) = 0$;

Pentru $x = 1$ și $y \in [0,1]$ studiem variația funcției $f(1, y) = g_1(y) = -y^2$; Se obține $f(1,0) = g_1(0) = 0$ și $f(1,1) = g_1(1) = -1$;

Pentru $x \in [0,1]$ și $y = 0$ avem $f(x, 0) = 0$;

Pentru $x \in [0,1]$ și $y = 1$ studiem variația funcției $f(x,1) = g_2(x) = -x^2$; Se obține $f(0,1) = g_2(0) = 0$ și $f(1,1) = g_2(1) = -1$;

Obținem rezultatul final: $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x, y) = \frac{1}{27}$ și $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x, y) = -1$.

7. Se determină punctele critice, rezolvând sistemul: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ care conduce la ecuațiile $y = x - x^3$ și $x^3\left(2 - 3x^2 + 3x^4 - x^6\right) = 0$; O soluție este $x = 0$ iar ecuația bipătrată se rezolvă folosind notația $x^2 = t > 0$ și schema lui Horner pentru determinarea soluției $x = 2$; Celelalte soluții sunt $x = -\sqrt{2}$ și $x = \sqrt{2}$; Se obțin punctele critice $(x_0, y_0) = (0,0) \notin D$, $(x_1, y_1) = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \notin D$ și $(x_2, y_2) = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \in D$. Elementele matricei hessiene: $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4$, $t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4$ și $s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$; Pentru $(x_2, y_2) = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ avem $r_0 = 20 > 0$ și $r_0 t_0 - s_0^2 = 384 > 0$, deci $(x_2, y_2) = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ este punct de minim local și $f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -8$.

8. Se determină punctele critice, rezolvând sistemul: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ care conduce la ecuațiile $x = \frac{2}{y^4}$ și $x^3 y^2 = \frac{1}{4}$ cu soluțiile $y = -\sqrt{2}$ și $y = \sqrt{2}$; Se obțin punctele critice $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right) \notin D$ și $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) \in D$. Elementele matricei hessiene: $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8 + \frac{4}{x^2 y^3}$, $t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{12}{xy^4} + 2$ și $s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4}{x^2 y^3}$; Pentru $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ avem $r_0 = 24 > 0$ și $r_0 t_0 - s_0^2 = 160 > 0$, deci $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ este punct de minim local și $f\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) = 5$.

9. Reprezentați grafic domeniul D.

Pentru $\mathrm{Int}(D) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, y + 2x < 2\right\}$, se determină punctele critice, rezolvând sistemul:

$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ care conduce la ecuațiile $x = 12y^2$ și $2y\left(216y^3 - 1\right) = 0$ cu soluțiile $y = 0$ și $y = \dfrac{1}{6}$. Se obțin punctele critice $\left(x_0, y_0\right) = \left(0,0\right) \notin \operatorname{Int} D$ și $\left(x_1, y_1\right) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}\right) \in \operatorname{Int} D$. Elementele matricei hessiene: $r_0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $t_0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y$ și $s_0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$; Pentru $\left(x_1, y_1\right) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}\right)$ avem $r_0 = 2 > 0$ și $r_0 t_0 - s_0^2 = 12 > 0$, deci $\left(x_1, y_1\right) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}\right)$ este punct de minim local și $f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}\right) = -\dfrac{1}{27}$.

Pentru $y = 0$ și $x \in \left[0,1\right]$ studiem variația funcției $f\left(x,0\right) = g_1\left(x\right) = x^3$; Se obține $f\left(0,0\right) = g_1\left(0\right) = 0$ și $f\left(1,0\right) = g_1\left(1\right) = 1$;

Pentru $x = 0$ și $y \in \left[0,2\right]$ studiem variația funcției $f\left(0,y\right) = g_2\left(y\right) = 8y^3$; Se obține $f\left(0,0\right) = g_2\left(0\right) = 0$ și $f\left(0,2\right) = g_2\left(2\right) = 64$;

Pentru $x \in \left[0,1\right]$ și $y = -2x + 2$ studiem variația funcției $f\left(x, -2x+2\right) = g_3\left(x\right) = -63x^3 + 196x^2 - 196x + 64$; $g_3'\left(x\right) = -189x^2 + 392x - 196$ și are soluțiile (aproximate) $x_1 \simeq 0,84$ și $x_2 \simeq 1,23$. Se obține $f\left(0,2\right) = g_3\left(0\right) = 64$, $f\left(1,0\right) = g_3\left(1\right) = 1$ și $f\left(0.84, 0.32\right) = g_3\left(0.84\right) \simeq 0.32$;

Obținem rezultatul final: $\max\limits_{(x,y)\in D} f\left(x,y\right) = 64$ și $\min\limits_{(x,y)\in D} f\left(x,y\right) = -\dfrac{1}{27}$.

10. Domeniul D este mulțime deschisă (interiorul discului centrat în origine și de rază 2). Se determină punctele critice, rezolvând sistemul: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ care conduce la ecuațiile $4x^3 - 12x^2 = 0$ și $3y^2 - 6y + 3 = 0$;

Se obțin punctele critice $\left(x_0, y_0\right) = \left(0,1\right) \in D$ și $\left(x_1, y_1\right) = \left(3,1\right) \notin D$. Elementele matricei hessiene: $r_0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 24x$, $t_0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 6$ și $s_0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$; Pentru $\left(x_0, y_0\right) = \left(0,1\right)$ avem $r_0 = 0$ și $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$, deci se va studia semnul diferenței $f\left(x,y\right) - f\left(0,1\right)$ într-o vecinătate a punctului $\left(0,1\right)$. Notăm $g\left(x,y\right) = f\left(x,y\right) - f\left(0,1\right) = x^3\left(x-4\right) + \left(y-1\right)^3$; Funcția $g\left(0,y\right) = \left(y-1\right)^3$ își schimbă semnul în jurul lui $y = 1$, deci funcția $g\left(x,y\right)$ nu păstrează semn constant într-o vecinătate a punctului $\left(x_0, y_0\right) = \left(0,1\right)$, deci acesta NU este punct de extrem. Concluzia este că funcția dată nu are puncte de extrem pe domeniul dat.