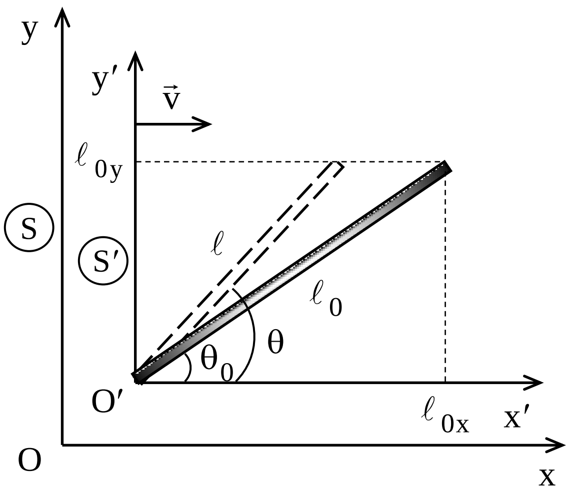
Problema V.1

O bară cilindrică de lungime ℓ_0 se află în planul $x'O'y'$ al sistemului de referinţă propriu S' şi face un unghi θ_0 cu axa $O'x'$. Să se determine lungimea şi orientarea barei în planul xOy al sistemului de referinţă S, faţă de care S' se deplasează cu viteza constantă v în sensul pozitiv al axei Ox (*aplicaţie numerică*: $v = \frac{1}{2}c$, $\ell_0 = 1\,\text{m}$, $\theta_0 = 45°$).

R:



În planul $x'O'y'$ al sistemului de referinţă propriu S', faţă de care bara este în repaus, vom descompune şi avem:

$O'x'$: $\ell_{0x} = \ell_0 \cos\theta_0$ (1)

$O'y'$: $\ell_{0y} = \ell_0 \sin\theta_0$ (2)

iar în sistemul de referinţă S, în planul xOy, aplicând formula pentru *contracţia longitudinală Lorentz-Fitzgerald a lungimilor*

$\ell(S) = \ell'(S')\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < \ell'(S')$, potrivit căreia lungimea proprie a barei $\ell'(S')$ este maximă, utilizăm notaţiile din problemă şi pentru cele două componente ale barei aflăm

$$\text{Ox:}\quad \ell_x = \ell_{0x}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \ell_0 \cos\theta_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{3}$$

$$\text{Oy:}\quad \ell_y = \ell_{0y} = \ell_0 \sin\theta_0 . \tag{4}$$

În sistemul imobil S, conform teoremei lui Pitagora, lungimea barei este:

$$\ell = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2} = \sqrt{\ell_0^2 \cos^2\theta_0 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + \ell_0^2 \sin^2\theta_0} =$$

$$= \sqrt{\ell_0^2(\sin^2\theta_0 + \cos^2\theta_0) - \ell_0^2 \frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta_0} =$$

$$= \sqrt{\ell_0^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta_0\right)} = \ell_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta_0} ,$$

aşadar

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta_0} < \ell_0 . \tag{5}$$

Pentru volumul barei se determină o formulă similară, întrucât se are în vedere faptul că celelalte dimensiuni ale barei, fiind perpendiculare pe direcţia de mişcare, nu suferă nici o modificare adică, cu $V = S\ell$, respectiv $V_0 = S\ell_0$, avem

$$V = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta_0} , \tag{6}$$

prin urmare, pentru $v \to c$, rezultă $\ell < \ell_0$, totodată şi $V < V_0$.

În sistemul de referinţă S, orientarea barei este dată de relaţia:

$$\text{tg } \theta = \frac{\ell_y}{\ell_x} = \frac{\ell_0 \sin \theta_0}{\ell_0 \cos \theta_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\text{tg } \theta_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \text{tg } \theta_0 \tag{7}$$

şi deci

$$\theta = \text{arctg } \frac{\text{tg } \theta_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \theta_0 , \tag{8}$$

astfel că în acest caz am obţinut că unghiul de înclinare faţă de axa orizontală creşte.

Înlocuind valorile numerice din enunţul problemei în relaţiile (5), (7) şi (8), $v = \frac{1}{2} c$, $\ell_0 = 1\text{m}$ şi $\theta_0 = 45°$, vom determina $\ell = 0{,}94\,\text{m}$ şi respectiv $\text{tg } \theta = 1{,}15$, de unde $\theta = 49°$.

Problema V.2

Să se afle, în sistemul de referinţă inerţial S, distanţa parcursă de o particulă instabilă din momentul creării până în momentul dezintegrării sale, dacă în acest sistem durata sa de viaţă are valoarea $\Delta t = 20\,\text{ns}$, iar durata proprie de viaţă este $\Delta t_0 = 10\,\text{ns}$.

R:

În sistemul de referinţă inerţial S, distanţa parcursă de particula aflată în mişcare rectilinie uniformă şi care vom presupune că se deplasează cu viteza constantă v este:

$$d = v \cdot \Delta t . \tag{1}$$

Considerăm că sistemul de referinţă inerţial S′ este sistemul propriu al particulei, adică faţă de acesta particula rămâne imobilă. Vom aplica formula ce demonstrează *dilatarea timpului* $\Delta t'(S') = \Delta t(S)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < \Delta t(S)$ şi, potrivit acesteia, intervalul de timp dintre două evenimente în sistemul de referinţă propriu $\Delta t'(S')$ este minim. Transcriind această relaţie cu notaţiile din enunţul problemei, avem

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{2}$$

după care calculăm

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}; \quad \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2 = 1-\frac{v^2}{c^2}; \quad v^2 = c^2\left[1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2\right]$$

şi obţinem

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}. \tag{3}$$

Înlocuind în relaţia (1), rezultă

$$d = c\cdot\Delta t\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}, \tag{4}$$

iar cu valorile numerice date în enunţul problemei, adică $c = 3\cdot 10^8$ m/s, respectiv $\Delta t = 20\cdot 10^{-9}$ s şi $\Delta t_0 = 10\cdot 10^{-9}$ s, găsim $d = 3\sqrt{3}$ m.

Problema V.3

Dacă durata de viaţă a unei particule care se deplasează cu viteza $v = 0{,}99\,c$ este $\Delta t_0 = 2{,}5\cdot 10^{-8}$ s în referenţialul propriu, să se afle distanţa pe care o poate parcurge particula în aceste condiţii, dar şi care ar fi valoarea acestei distanţe dacă nu am ţine seama de dilatarea relativistă a timpului.

R:

Utilizând formula ce exprimă *dilatarea timpului*, vom scrie durata de viaţă a particulei în referenţialul imobil S, faţă de care particula şi referenţialul său propriu S′ se deplasează cu viteza v:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1}$$

Distanţa d parcursă de particula relativistă aflată în mişcare rectilinie uniformă în acest timp, în referenţialul S va fi:

$$d = v\cdot\Delta t, \tag{2}$$

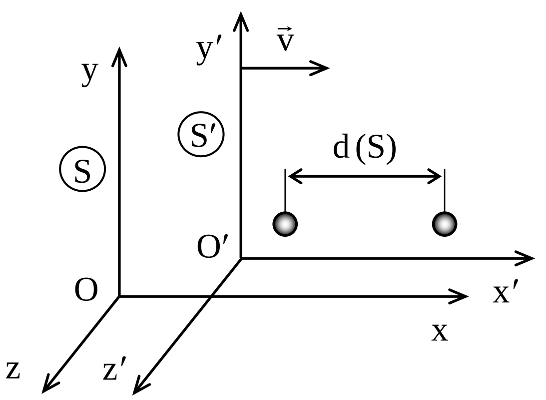
ce diferă evident de distanţa d_0 care ar fi parcursă de particulă dacă nu ar exista dilatarea relativistă a timpului,

$$d_0 = v \cdot \Delta t_0, \tag{3}$$

sau, cu valorile numerice date, avem $\Delta t = 17{,}7 \cdot 10^{-8}\,s$ şi rezultă $d = 52{,}6\,m$ respectiv $d_0 = 7{,}4\,m$, deci $d_0 < d$.

Problema V.4

Două particule instabile se deplasează în sistemul de referinţă S de-a lungul unei drepte, în acelaşi sens, cu viteza $v = 0{,}99\,c$, distanţa dintre cele două particule fiind $d = 12\,m$. La un moment dat particulele se dezintegrează simultan în sistemul de referinţă propriu S′. Să se calculeze intervalul de timp, măsurat în sistemul de referinţă S, între momentele dezintegrării celor două particule.



R:

Deoarece, în sistemul de referinţă propriu S′, particulele se dezintegrează simultan, vom avea pentru momentele dezintegrării următoarea egalitate:

$$t'_1 = t'_2, \tag{1}$$

dar, conform relaţiilor de transformare Lorentz-Einstein, în sistemul de referinţă S, cu $t = \dfrac{t' + \dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, scriem

$$t_1 = \frac{t'_1 + \dfrac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \quad \text{şi} \quad t_2 = \frac{t'_2 + \dfrac{v}{c^2}x'_2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{2) (3}$$

Efectuând diferenţa celor două relaţii, obţinem

$$t_1 - t_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\left[(t'_1 - t'_2) + \frac{v}{c^2}(x'_1 - x'_2)\right], \tag{4}$$

dar $t'_1 - t'_2 = 0$, iar utilizând relaţia Lorentz-Fitzgerald pentru contracţia longitudinală a lungimilor:

$$d' = x'_1 - x'_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{d}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (5)$$

rezultă expresia intervalului de timp dintre momentele dezintegrării celor două particule, în sistemul de referinţă inerţial S,

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{v}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} d \neq 0 \qquad (6)$$

şi, cum $d \neq 0$, dezintegrarea particulelor în sistemul imobil S nu este simultană, momentul dezintegrării primei particule fiind ulterior celui de-a doua.

Cu valorile numerice date în enunţul problemei, calculând, se obţine $\Delta t = 1{,}989 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} \approx 2\,\mu\mathrm{s}$ şi deci, în sistemul de referinţă inerţial S, întrucât $\Delta t = t_1 - t_2 > 0$ (adică $t_1 > t_2$) înseamnă că prima particulă se dezintegrează mai târziu decât cea de-a doua.

Problema V.5

a.) Să se determine energia cinetică T a unei particule relativiste, dacă masa sa de mişcare este de n ori mai mare decât masa de repaus m_0 $(n > 1)$ şi apoi să se exprime raportul dintre energia cinetică şi energia de repaus a particulei relativiste, particularizând pentru o masă de mişcare a.) de două ori mai mare; b.) de trei ori mai mare; c.) de patru ori mai mare decât masa de repaus.

R:

Definim *energia de mişcare* a unei particule relativiste

$$E = mc^2,$$

în care m reprezintă *masa de mişcare* (sau *masa relativistă*), şi *energia de repaus*

$$E_0 = m_0 c^2,$$

unde m_0 poartă numele de *masă de repaus* (sau *masă proprie*).

Energia cinetică a unei particule relativiste, pentru care

$$m = nm_0, \qquad (1)$$

este

$$T = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = nm_0c^2 - m_0c^2 = m_0c^2(n-1), \qquad (2)$$

iar de aici scriem

$$\frac{T}{m_0c^2} = n - 1, \qquad (3)$$

relaţie din care

a.) dacă $m = 2m_0$, $n = 2$, aflăm $\dfrac{T}{m_0c^2} = 1$; (4)

b.) dacă $m = 3m_0$, $n = 3$, obţinem $\dfrac{T}{m_0c^2} = 2$; (5)

c.) dacă $m = 4m_0$, $n = 4$, rezultă $\dfrac{T}{m_0c^2} = 3$. (6)

b.) Să se afle viteza unei particule relativiste, dacă energia sa cinetică este egală cu a.) energia de repaus; b.) un sfert din energia de repaus; c.) o treime din energia de repaus; d.) jumătate din energia de repaus.

R:

În dinamica relativistă, energia cinetică a unei particule,

$$T = E - E_0, \tag{1}$$

cu $E = mc^2$, $E_0 = m_0c^2$ şi cunoscând relaţia dintre masa de mişcare m şi masa de repaus m_0:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{2}$$

se scrie

$$T = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \tag{3}$$

a.) Din enunţul problemei, condiţia este:

$$T = E_0. \tag{4}$$

Calculăm,

$$m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = m_0c^2; \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 = 1; \quad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2};$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}; \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4}; \quad v^2 = \frac{3}{4}c^2,$$

şi obţinem

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c \quad \text{sau} \quad v = 0{,}866\,c \tag{5}$$

iar înlocuind $c = 3 \cdot 10^8$ m/s rezultă $v = 2{,}598 \cdot 10^8$ m/s.

Procedăm similar în vederea rezolvării şi a subpunctelor b.), c.), d.). După ce vom impune condiţia din enunţul problemei privind relaţia dintre energia cinetică şi energia de repaus, calculăm şi avem:

b.) pentru $T = \frac{1}{4}E_0$, atunci $v = \frac{3}{5}c$ sau $v = 0{,}6\,c$; (6)

c.) pentru $T = \frac{1}{3}E_0$, atunci $v = \frac{\sqrt{7}}{4}c$ sau $v = 0{,}661\,c$; (7)

d.) pentru $T = \frac{1}{2}E_0$, atunci $v = \frac{\sqrt{5}}{3}c$ sau $v = 0{,}745\,c$. (8)

c.) Dacă viteza unei particule relativiste cu masa proprie m_0 este nc (n < 1), să se determine de câte ori creşte masa particulei (*aplicaţie numerică*: n = 0,6; n = 0,75; n = 0,8).

R:

Scriem expresia relativistă a masei particulei, relaţie în care introducem valoarea vitezei $v = nc$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{n^2c^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - n^2}} \tag{1}$$

şi deci variaţia masei particulei este

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - n^2}}. \tag{2}$$

Particularizând,

- pentru $n = 0{,}6$ se obţine $\frac{m}{m_0} = 1{,}25$;

- pentru $n = 0{,}75$ aflăm $\frac{m}{m_0} \approx 1{,}52$;

- pentru $n = 0{,}8$ rezultă $\frac{m}{m_0} = 1{,}66$.

d.) Cu ajutorul energiei cinetice T, să se exprime variaţia relativă a masei unei particule relativiste a cărei masă de repaus este m_0 (sau pentru care se cunoaşte energia de repaus E_0).

R:

Variaţia absolută a masei unei particule este

$$\Delta m = m - m_0, \qquad (1)$$

iar variaţia relativă va fi scrisă

$$\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{m - m_0}{m_0} = \frac{m}{m_0} - 1. \qquad (2)$$

Întrucât $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, cu $\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, găsim

$$\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - 1. \qquad (3)$$

Totodată,

$$T = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)\, c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \qquad (4)$$

şi deci

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - 1 = \frac{T}{m_0c^2}, \qquad (5)$$

iar înlocuind rezultă

$$\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{T}{m_0c^2}. \qquad (6)$$

Dacă se cunoaşte energia de repaus, înlocuind în relaţia (6) m_0c^2 cu E_0, obţinem

$$\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{T}{E_0}. \qquad (7)$$

Mai simplu, înmulţind variaţia relativă a masei cu c^2, se putea scrie:

$$\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{m - m_0}{m_0} = \frac{mc^2 - m_0c^2}{m_0c^2} = \frac{T}{m_0c^2} = \frac{T}{E_0}, \qquad (8)$$

unde $E = mc^2$, $E_0 = m_0c^2$ şi $T = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2$.

e.) Să se găsească expresia tensiunii de accelerare U ce trebuie aplicată pentru ca o particulă cu sarcina electrică q şi masa de repaus m_0 să poată atinge viteza relativistă v.

R:

Exprimăm energia cinetică a particulei relativiste astfel:

$$T = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 . \tag{1}$$

De asemenea,

$$T = qU , \tag{2}$$

iar egalând cele două relaţii, (1) şi (2), obţinem

$$m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = qU , \tag{3}$$

din care rezultă expresia tensiunii de accelerare

$$U = \frac{m_0c^2}{q}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \tag{4}$$

f.) Să se afle expresia vitezei unei particule relativiste, dacă se cunosc energia sa cinetică T şi energia de repaus E_0 (sau masa de repaus m_0).

R:

Între masa de mişcare m şi masa de repaus m_0 există relaţia:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} , \tag{1}$$

din care, înmulţind cu c^2, întrucât $E = mc^2$ reprezintă energia de mişcare şi $E_0 = m_0c^2$ energia de repaus, rezultă

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} . \tag{2}$$

Energia de mişcare a protonului relativist este

$$E = E_0 + T , \tag{3}$$

iar prin egalarea relaţiilor (2) şi (3) avem

$$E = E_0 + T = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4}$$

Calculând

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{E_0}{E_0+T}; \quad 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{E_0^2}{(E_0+T)^2};$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{E_0^2}{(E_0+T)^2} = \frac{(E_0+T)^2 - E_0^2}{(E_0+T)^2} = \frac{E_0^2 + 2E_0T + T^2 - E_0^2}{(E_0+T)^2} =$$

$$= \frac{T(2E_0+T)}{(E_0+T)^2},$$

obţinem

$$v = c\,\frac{\sqrt{T(2E_0+T)}}{E_0+T}, \tag{5}$$

pe care o putem exprima ţinând seama că energia de repaus poate fi scrisă (în funcţie de masa de repaus m_0) sub forma m_0c^2, iar înlocuind direct în relaţia (5) $E_0 = m_0c^2$ avem:

$$v = c\,\frac{\sqrt{T(2m_0c^2+T)}}{m_0c^2+T}. \tag{6}$$

g.) Să se determine viteza particulei relativiste în funcţie de energiile de mişcare E şi de repaus E_0. Să se găsească apoi viteza unei particule relativiste a cărei energie de mişcare este de K ori mai mare decât energia de repaus (*aplicaţie numerică*: K = 10, respectiv K = 4).

R:

Scriem relaţia dintre energia de mişcare şi energia de repaus:

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > E_0, \tag{1}$$

din care avem succesiv

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{E_0}{E}; \quad 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{E_0^2}{E^2}; \quad \frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{E_0^2}{E^2}; \quad v^2 = c^2\left(1-\frac{E_0^2}{E^2}\right)$$

şi astfel aflăm expresia vitezei particulei relativiste:

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2}\,. \tag{2}$$

Notând

$$K = \frac{E}{E_0} \tag{3}$$

($K > 1$), relaţia anterioară devine

$$v = c\sqrt{1-\frac{1}{K^2}} = c\,\frac{\sqrt{K^2-1}}{K}\,, \tag{4}$$

iar particularizând

- pentru $K = 10$, adică $E = 10\,E_0$, se obţine

$$v = \frac{\sqrt{99}}{10}\,c \approx 0{,}995\,c \quad \text{sau} \quad v = 2{,}985\cdot 10^8\ \text{m/s}\,;$$

- pentru $K = 4$, adică $E = 4E_0$, rezultă

$$v = \frac{\sqrt{15}}{4}\,c \approx 0{,}968\,c \quad \text{sau} \quad v = 2{,}905\cdot 10^8\ \text{m/s}\,.$$

h.) Să se determine viteza v a unei particule relativiste a cărei energie cinetică este de K ori mai mare decât energia sa de repaus (*aplicaţie numerică*: K = 10).

R:

Egalând expresiile energiei de mişcare a particulei relativiste

$$E = mc^2 \quad \text{şi} \quad E = m_0c^2 + T \tag{1) (2}$$

şi impunând condiţia din enunţul problemei

$$T = Km_0c^2,\ \text{cu}\ K > 1, \tag{3}$$

scriem

$$mc^2 = m_0c^2 + Km_0c^2\,. \tag{4}$$

Ţinând seama că $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, avem

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = m_0c^2 + Km_0c^2 \quad \text{sau} \quad \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 1 + K \tag{5}$$

şi calculăm

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1+K}\,; \quad 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{(1+K)^2}\,; \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{K(2+K)}{(1+K)^2}\,.$$

De aici obţinem

$$v = c\frac{\sqrt{K(2+K)}}{1+K}, \qquad (6)$$

expresie pe care am fi găsit-o şi utilizând rezultatul de la subpunctul anterior în care am fi impus condiţia din enunţ.

Dacă energia cinetică a particulei relativiste este de 10 ori mai mare decât energia sa de repaus, adică $K = \dfrac{T}{m_0c^2} = 10$, atunci înlocuind în relaţia (6) rezultă $v = c\sqrt{\dfrac{120}{121}} = 2{,}987\cdot 10^8\ \text{m/s}$.

i.) Să se găsească expresia masei unei particule relativiste (cu masa de repaus m_0), dacă ea are energia de repaus E_0 şi energia cinetică T (*aplicaţie numerică*: $E_0 = 0{,}938\,\text{GeV}$, $T = 76\,\text{GeV}$).

R:

Exprimăm energia de mişcare a particulei relativiste scriind

$$E = mc^2 \qquad (1)$$

şi respectiv

$$E = E_0 + T. \qquad (2)$$

Egalăm relaţiile (1) şi (2):

$$mc^2 = E_0 + T, \qquad (3)$$

apoi, cum energia de repaus este

$$E_0 = m_0c^2, \qquad (4)$$

prin împărţirea relaţiilor (3) şi (4), avem

$$\frac{mc^2}{m_0c^2} = \frac{E_0 + T}{E_0}; \quad \frac{m}{m_0} = 1 + \frac{T}{E_0},$$

de unde aflăm expresia masei de mişcare a particulei având masa de repaus m_0:

$$m = m_0\left(1 + \frac{T}{E_0}\right). \qquad (5)$$

Utilizând valorile numerice $E_0 = 0{,}938\,\text{GeV}$ şi $T = 76\,\text{GeV}$, obţinem $m \approx 82\,m_0$.

j.) Să se determine viteza unei particule relativiste, dacă se cunosc energia cinetică T, energia de repaus E_0 şi impulsul său p (*aplicaţie numerică*: $T = 215\,\text{MeV}$, $E_0 = 138\,\text{MeV}$, $p = 325\,\text{MeV/c}$).

R:

Scriem energia de mişcare E în funcţie de energia de repaus E_0 şi de energia cinetică T:

$$E = E_0 + T, \tag{1}$$

dar totodată, cum impulsul particulei relativiste este $p = mv$, avem $m = \frac{p}{v}$, şi deci

$$E = mc^2 = \frac{p}{v}c^2. \tag{2}$$

Egalând relaţiile (1) şi (2), rezultă

$$E_0 + T = \frac{pc^2}{v}, \tag{3}$$

de unde expresia vitezei particulei relativiste este:

$$v = \frac{pc^2}{E_0 + T}, \tag{4}$$

relaţie din care, înlocuind valorile numerice, aflăm $v = 2{,}76 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

k.) Să se găsească masa de repaus m_0 şi energia de repaus E_0 a unei particule relativiste, dacă se cunosc energia sa cinetică T şi impulsul său p (*aplicaţie numerică*: $T = 50\,\text{MeV}$, $p = 130\,\text{MeV/c}$).

R:

Pentru particula relativistă, avem

$$E = m_0c^2 + T, \tag{1}$$

apoi ridicând la pătrat

$$E^2 = (m_0c^2 + T)^2 = m_0^2c^4 + 2m_0c^2T + T^2. \tag{2}$$

De asemenea, relaţia dintre energia şi impulsul particulei este:

$$E^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4. \tag{3}$$

Prin egalarea ultimelor două relaţii, (2) şi (3), obţinem

$$m_0^2c^4 + 2m_0c^2T + T^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4; \quad 2m_0c^2T + T^2 = c^2p^2,$$

din care rezultă masa de repaus a particulei relativiste având impulsul p şi energia cinetică T:

$$m_0 = \frac{c^2p^2 - T^2}{2c^2T} \tag{4}$$

sau respectiv energia de repaus:

$$E_0 = \frac{c^2p^2 - T^2}{2T}. \tag{5}$$

Cu valorile numerice date $T = 50\,\text{MeV}$, $p = 130\,\text{MeV/c}$, calculăm şi aflăm $m_0 = 2{,}56 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{kg} \approx 284\, m_e$, rezultat exprimat în mase electronice ($m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ este masa de repaus a electronului, iar $1\,\mathrm{MeV} = 10^6\,\mathrm{eV}$ şi $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$) sau $m_0 = \dfrac{144}{c^2}\,\mathrm{MeV}$ şi $E_0 = 144\,\mathrm{MeV}$.

I.) Pentru o particulă relativistă cu energia de repaus E_0 să se determine expresia generală a lungimii de undă asociată λ, în funcţie de energia cinetică T (*aplicaţie numerică*: $E_0 = 0{,}51\,\mathrm{MeV}$, $T = 1\,\mathrm{MeV}$).

R:

Conform relaţiei lui de Broglie, lungimea de undă asociată unei particule în mişcare se scrie:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \tag{1}$$

în care h reprezintă constanta lui Planck ($h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$), iar p este impulsul particulei.

Pentru particula relativistă avem

$$E = E_0 + T \tag{2}$$

şi deci, prin ridicare la pătrat,

$$E^2 = (E_0 + T)^2 = E_0^2 + 2E_0 T + T^2. \tag{3}$$

Scriem şi relaţia dintre energia şi impulsul particulei:

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2, \tag{4}$$

după care, prin egalarea relaţiilor (3) şi (4), obţinem

$$E_0^2 + 2E_0 T + T^2 = c^2 p^2 + E_0^2 \quad \text{sau} \quad 2E_0 T + T^2 = c^2 p^2, \tag{5}$$

din care rezultă

$$p^2 = \frac{T(2E_0 + T)}{c^2} \tag{6}$$

şi deci expresia impulsului particulei relativiste, cu energia de repaus E_0 şi energia cinetică T, va fi:

$$p = \frac{\sqrt{T(2E_0 + T)}}{c}. \tag{7}$$

Înlocuind în relaţia lui de Broglie, găsim expresia lungimii de undă asociată particulei relativiste:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(2E_0 + T)}}. \tag{8}$$

Introducând valorile numerice $E_0 = 0{,}51\,\mathrm{MeV}$ şi $T = 1\,\mathrm{MeV}$ în relaţia (8), aflăm $\lambda = 8{,}8 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m}$.

m.) Să se determine energia de repaus E_0 şi viteza unei particule relativiste în funcţie de energia cinetică T şi impulsul său p.

R:

Utilizând relaţia dintre energia şi impulsul unei particule relativiste, scriem:

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2 \quad (1)$$

şi, de asemenea, întrucât

$$E = E_0 + T, \quad (2)$$

ridicând la pătrat, avem

$$E^2 = (E_0 + T)^2 = E_0^2 + 2E_0T + T^2 \quad (3)$$

iar egalând,

$$E_0^2 + 2E_0T + T^2 = c^2p^2 + E_0^2; \quad 2E_0T + T^2 = c^2p^2,$$

rezultă expresia energiei de repaus:

$$E_0 = \frac{c^2p^2 - T^2}{2T}. \quad (4)$$

Înlocuind relaţia (4) în formula (2), energia de mişcare devine

$$E = \frac{c^2p^2 - T^2}{2T} + T = \frac{c^2p^2 + T^2}{2T}. \quad (5)$$

Totodată, cum

$$p = mv, \quad (6)$$

avem $m = \frac{p}{v}$ şi exprimăm energia de mişcare astfel:

$$E = mc^2 = \frac{p}{v}c^2. \quad (7)$$

Prin egalarea relaţiilor (5) şi (7), scriind

$$\frac{c^2p^2 + T^2}{2T} = \frac{p}{v}c^2, \quad (8)$$

se determină

$$v = \frac{2pc^2T}{c^2p^2 + T^2}. \quad (9)$$

Problema V.6

O particulă-proiectil cu masa de repaus m_0, care se deplasează cu viteza $v = \frac{4}{5}c$, se ciocneşte inelastic cu o particulă-ţintă identică, aflată în repaus. Să se calculeze viteza particulei compuse, precum şi masa de repaus a acesteia.

R:

Aplicăm legea conservării energiei şi cea a conservării impulsului în procesul de ciocnire inelastică.

Scriem conservarea energiei, notând cu E_1 energia particulei-proiectil, cu E_2 energia particulei-ţintă şi cu E energia particulei compuse

$$E_1 + E_2 = E \tag{1}$$

sub forma:

$$mc^2 + m_0c^2 = Mc^2, \tag{2}$$

unde mc^2 reprezintă energia de mişcare a particulei-proiectil, m_0c^2 energia de repaus a particulei-ţintă, iar Mc^2 este energia de mişcare a particulei compuse.

Întrucât $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, transcriem relaţia (2)

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_0c^2 = Mc^2, \tag{3}$$

simplificăm şi obţinem masa de mişcare a particulei compuse:

$$M = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_0 = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + 1\right), \tag{4}$$

iar cu $v = \frac{4}{5}c$ rezultă $M = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}}} + m_0 = \frac{5}{3}m_0 + m_0 = \frac{8}{3}m_0$, deci

$$m = \frac{5}{3}m_0 \quad \text{şi} \quad M = \frac{8}{3}m_0. \tag{5) (6}$$

Aplicând legea conservării impulsului:

$$\vec{p} + \vec{P} = 0, \tag{7}$$

în care am notat cu $\vec{p}$ impulsul particulei-proiectil şi cu $\vec{P}$ impulsul particulei compuse, scriem

$$mv = MV, \tag{8}$$

unde $p = mv$ şi $P = MV$, iar viteza particulei compuse va fi:

$$V = \frac{m}{M}v \tag{9}$$

din care, cu $v = \frac{4}{5}c$ şi $m = \frac{5}{3}m_0$, avem $V = \frac{5m_0}{3} \cdot \frac{3}{8m_0} \cdot \frac{4}{5}c = \frac{1}{2}c$, deci

$$V = \frac{1}{2}c. \tag{10}$$

Cum relaţia dintre masa de mişcare M şi masa de repaus M_0 a particulei compuse este:

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{11}$$

rezultă

$$M_0 = M\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \tag{12}$$

de unde, cu $M = \frac{8}{3}m_0$ şi $V = \frac{1}{2}c$, vom obţine masa de repaus a particulei compuse

$$M_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3}m_0. \tag{13}$$

Problema V.7

Un proton relativist cu energia cinetică T suferă o ciocnire elastică cu un proton în repaus, energia sa de repaus fiind E_0. Ca rezultat cei doi protoni au fost proiectaţi simetric în raport cu direcţia iniţială de mişcare. Să se calculeze unghiul θ dintre direcţiile de mişcare ale protonilor după ciocnire.

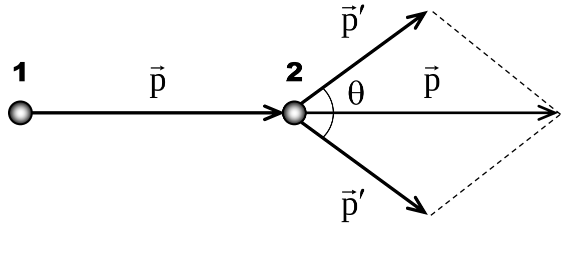
R:

Vom ţine seama că cei doi protoni relativişti sunt proiectaţi simetric în raport cu direcţia iniţială de mişcare şi astfel, datorită simetriei, modulele impulsurilor, ca şi energiile celor doi protoni după ciocnire sunt egale.

Legea conservării impulsului se scrie:

$$\vec{p} = \vec{p}\,' + \vec{p}\,', \tag{1}$$

unde $\vec{p}$ reprezintă impulsul protonului aflat în mişcare înainte de ciocnire şi $\vec{p}\,'$ este impulsul protonilor după ciocnire, iar transcriind relaţia (1) în formă scalară vom avea:



$$p^2 = p'^2 + p'^2 + 2p'^2\cos\theta = 2p'^2(1 + \cos\theta), \tag{2}$$

din care

$$1 + \cos\theta = \frac{p^2}{2p'^2} \tag{3}$$

şi rezultă

$$\cos\theta = \frac{p^2}{2p'^2} - 1. \tag{4}$$

Vom calcula pătratul impulsului protonului incident, utilizând relaţia impuls-energie:

$$E^2 = c^2p^2 + E_0^2 \tag{5}$$

precum şi formula:

$$E = E_0 + T, \quad \text{din care} \quad E^2 = (E_0 + T)^2 = E_0^2 + 2E_0T + T^2 \tag{6}$$

iar prin egalare,

$$c^2p^2 + E_0^2 = E_0^2 + 2E_0T + T^2 \quad \text{sau} \quad c^2p^2 = 2E_0T + T^2, \tag{7}$$

aflăm

$$p^2 = \frac{T(2E_0 + T)}{c^2}. \tag{8}$$

Procedând analog, calculăm pătratul impulsului protonilor după ciocnire

$$E'^2 = c^2p'^2 + E_0^2 \tag{9}$$

şi respectiv

$$E' = E_0 + T', \quad \text{de unde} \quad E'^2 = (E_0 + T')^2 = E_0^2 + 2E_0T' + T'^2. \tag{10}$$

Egalăm cele două relaţii,

$$c^2p'^2 + E_0^2 = E_0^2 + 2E_0T' + T'^2 \quad \text{sau} \quad c^2p'^2 = 2E_0T' + T'^2, \tag{11}$$

şi obţinem

$$p'^2 = \frac{T'(2E_0 + T')}{c^2}. \tag{12}$$

Conservarea energiei în procesul de ciocnire implică egalitatea energiei înainte şi după ciocnire, adică

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2', \tag{13}$$

altfel scris

$$(E_0 + T)_1 + (E_0)_2 = (E_0 + T')_1 + (E_0 + T')_2, \tag{14}$$

unde $(E_0 + T)_1$ este energia de mişcare a protonului incident, $(E_0)_2$ energia protonului în repaus, $(E_0 + T')_1$ şi $(E_0 + T')_2$ energiile de mişcare ale protonilor după ciocnire, sau

$$2E_0 + T = 2E_0 + 2T',$$

relaţie din care rezultă $T = 2T'$, deci

$$T' = \frac{T}{2}. \tag{15}$$

Revenind la relaţia (12), găsim

$$p'^2 = \frac{\frac{T}{2}\left(2E_0 + \frac{T}{2}\right)}{c^2} = \frac{T(4E_0 + T)}{4c^2}. \tag{16}$$

Introducem relaţiile (8) şi (16) în (4) şi calculăm

$$\frac{p^2}{2p'^2} = \frac{1}{2}\frac{T(2E_0 + T)}{c^2} \cdot \frac{4c^2}{T(4E_0 + T)} = \frac{2(2E_0 + T)}{4E_0 + T}, \tag{17}$$

apoi

$$\cos\theta = \frac{2(2E_0 + T)}{4E_0 + T} - 1 = \frac{4E_0 + 2T - 4E_0 - T}{4E_0 + T} = \frac{T}{4E_0 + T}. \tag{18}$$

Prin urmare, unghiul dintre direcţiile de mişcare ale protonilor după ciocnire este:

$$\theta = \arccos\left(\frac{T}{4E_0 + T}\right). \tag{19}$$