3. Elemente de geometrie computaţională 2D

FORMULE ANALITICE PENTRU MODELAREA MATEMATICĂ ÎN GRAFICA PE CALCULATOR

1. Coordonate rectangulare în plan

1) Distanţa dintre două puncte $P_1(X_1,Y_1)$ şi $P_2(X_2,Y_2)$ este:

$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

2) Panta dreptei AB, unde $A(X_1,Y_1)$, $B(X_2,Y_2)$ este:

$$tg\theta = m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{m_2}{m_1}$$

3) Suprafaţa triunghiului ABC, unde $A(X_1,Y_1)$, $B(X_2,Y_2)$, $C(X_3,Y_3)$ este:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix}$$

4) Condiţia de coliniaritate a trei puncte $A(X_1,Y_1)$, $B(X_2,Y_2)$, $C(X_3,Y_3)$ se exprimă:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = 0$$

2. Coordonate oblice în plan

Unghiul dintre direcţia poyitivă a axei X cu direcţia poyitivă a axei Y nu mai este de 90°, ci un unghi oarecare ω, (figura 1).

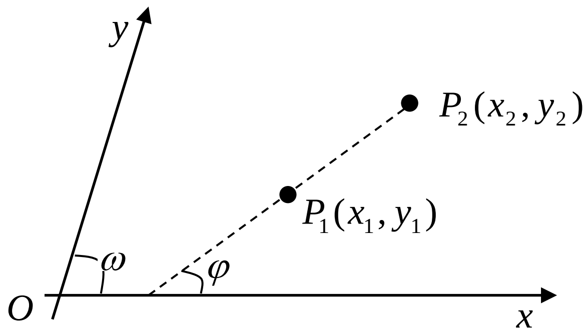


Figura 1. Sistem de coordonate oblice în plan.

Distanţa dintre două puncte $P_1(X_1, Y_1)$ şi $P_2(X_2, Y_2)$ este:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + 2 \cdot (X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) \cdot \cos\omega}$$

2) Panta dreptei AB, unde $A(X_1, Y_1)$, $B(X_2, Y_2)$ este:

$$tg\varphi = \frac{(Y_2 - Y_1) \cdot \sin\omega}{(X_2 - X_1) + (Y_2 - Y_1) \cdot \cos\omega}$$

3) Suprafaţa triunghiului ABC, unde $A(X_1, Y_1)$, $B(X_2, Y_2)$, $C(X_3, Y_3)$ este:

$$S = \frac{\sin\omega}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix}$$

4) Condiţia de coliniaritate a trei puncte $A(X_1, Y_1)$, $B(X_2, Y_2)$, $C(X_3, Y_3)$ se exprimă:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = 0$$

3. Coordonate polare

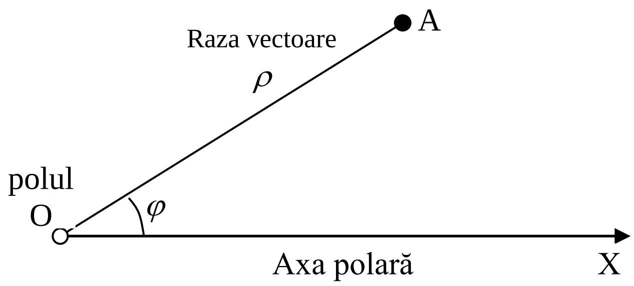


Figura 2. Sistem de coordonate polare.

1) Distanţa dintre două puncte $P_1(\rho_1, \varphi_1)$ şi $P_2(\rho_2, \varphi_2)$ este:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

4. Transformarea coordonatelor în plan

1) Relaţiile dintre coordonatele carteziene şi cele polare:

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

şi invers

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$$

2) Translaţia axelor din O în $O'(a, b)$:

$$x = X' + a$$
$$y = Y' + b$$

3) Rotaţia axelor (cu unghiul α):

- în coordonate carteziene:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$

$$X = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

- în coordonate oblice

$$x = \frac{X\sin(\omega - \alpha) - Y\sin\alpha}{\sin\omega}$$
$$y = \frac{X\sin\alpha + Y\sin(\omega + \alpha)}{\sin\omega}$$

5. Dreapta în plan

1) Ecuaţia dreptei

- Dreapta care trece prin două puncte $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$ este:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Dreapta cu coeficientul unghiular *m* şi care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

- Dreapta cu coeficientul unghiular *m* şi ordonata la origine *n*:

$$y = m \cdot x + n$$

- Dreapta cu *tăieturile* a şi b pe axele de coordonate:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

2) Ecuaţia canonică a dreptei

În coordonate rectangulare	În coordonate oblice
$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B}$	$\frac{x - x_1}{A - B\cos\omega} = \frac{y - y_1}{B - A\cos\omega}$

3) Distanţa de la un punct $M(X_1, Y_1)$ la o dreaptă

În coordonate rectangulare	În coordonate oblice
$d = \left\lvert \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right\rvert$	$d = \left\lvert \frac{(Ax_1 + By_1 + C)\sin\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} \right\rvert$

4) Bisectoarele a două drepte care fac între ele unghiul θ

Ecuaţia bisectoarei unghiului θ	
În coordonate rectangulare	În coordonate oblice
$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\frac{A_1x + B_1y + C}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2}}}$	$\frac{(Ax + By + C)\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} = \pm\frac{(A_1x + B_1y + C_1)}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2} - 2A_1B_1\cos\omega}}$

5) Unghiul dintre două drepte

În coordonate rectangulare	În coordonate oblice
$tg\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$	$tg\theta = \frac{(m_1 - m_2)\sin\omega}{1 + m_1m_2 + (m_1 + m_2)\cos\omega} = \frac{(A_1B_2 - A_2B_1)\sin\omega}{A_1A_2 + B_1B_2 - (A_1B_2 + B_1A_2)\cos\omega}$

6) Condiţia de paralelism a dreptelor (D1) şi (D2):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \quad sau \quad m_1 = m_2$$

7) Condiţia de perpendicularitate

În coordonate rectangulare	În coordonate oblice
$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ sau $m_1m_2 = -1 \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$	$A_1A_2 + B_1B_2 - (A_1B_2 + A_2B_1)\cos\omega = 0$

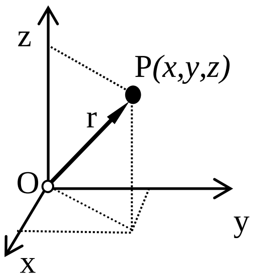
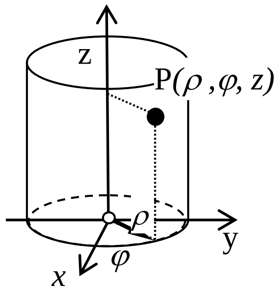
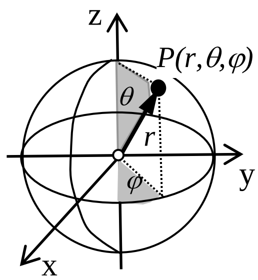
8) Poziţia relativă a două drepte

Condiţia	**Poziţia**
$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$	Drepte <u>concurente</u> în punctul de coordonate $x = \frac{B_1C_2 - C_1B_2}{D}, \quad y = \frac{C_1A_2 - A_1C_2}{D}$
$D = 0 \quad si$ $B_1C_2 - C_1B_2 \neq 0 \quad si$ $C_1A_2 - A_1C_2 \neq 0$	Dreptele sunt <u>paralele</u>
$D = 0 \quad si$ $B_1C_2 - C_1B_2 = 0$ atunci $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \qquad C_1A_2 - A_1C_2 = 0$	Dreptele sunt <u>confundate</u>

9) Perpendiculara dusă din punctul $P_1(X_1, Y_1)$ pe o dreaptă de coeficient unghiular *m*:

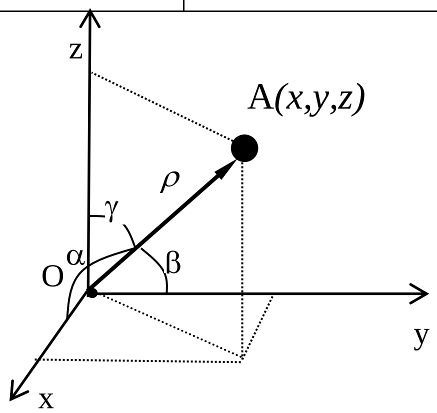
În coordonate rectangulare	În coordonate oblice
$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$	$y - y_1 = -\frac{1 + m\cos\omega}{m + \cos\omega}(x - x_1)$

6. Coordonate şi transformări de coordonate în spaţiu

Coordonate rectangulare	Coordonate cilindrice	Coordonate sferice
		
x, y –coordonate de poziţie în plan z- cota	$\rho = \frac{x}{\cos\varphi}$ $\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$ $z = z$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$ $\theta = \arccos\frac{z}{r}$
	$x = \rho\cos\varphi$ $y = \rho\sin\varphi$ $z = z$	$x = r\sin\theta\cos\varphi$ $y = r\sin\theta\sin\varphi$ $z = r\cos\theta$

1) Definirea poziţiei unui punct în spaţiu

O metodă frecvent folosită este utilizarea *razei vectoare* şi a *cosinuşilor directori* ai acesteia	
Raza vectoare	Cosinuşii directori
Se defineşte ca distanţa ρ de la origine la punctul $A(x, y, z)$: $\rho = x^2 + y^2 + z^2$	Se determină din expresiile coordonatelor punctului A: $x = \rho\cdot\cos\alpha$ $y = \rho\cdot\cos\beta$ $z = \rho\cdot\cos\gamma$ din care rezultă: $\cos\alpha = \frac{x}{\rho},\quad \cos\beta = \frac{\beta}{\rho},\quad \cos\gamma = \frac{\gamma}{\rho},$ cu proprietatea că: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$



2) Trecerea de la sistemul **Oxyz** la **$O_1x_1y_1z_1$**

Prin translaţie	Prin rotaţie
$x = x_0 + x_1$ $y = y_0 + y_1$ $z = z_0 + z_1$	$x = a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1$ $y = b_1x_1 + b_2y_1 + b_3z_1$ $z = c_1x_1 + c_2y_1 + c_3z_1$ si reciproc $x_1 = a_1x + b_1y + c_1z$ $y_1 = a_2x + b_2y + c_2z$ $z_1 = a_3x + b_3y + c_3z$ Unde: $a_1,\ldots a_3$ $b_1,\ldots b_3$ $c_1,\ldots c_3$ sunt cosinuşii directori care definesc poziţia sistemului $O_1x_1y_1z_1$ în raport cu primul.

3) Direcţia (în spaţiu) a segmentului $\overline{AB}$ este determinată de cosinuşii lui directori:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

4) Distanţa dintre două puncte:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

3) Unghiul dintre două drepte date prin cosinuşii lor directori:

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1$$

4) Condiţia de perpendicularitate rezultă din $\cos 90^\circ = 0$, adică:

$$\cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1 = 0$$

5) Coordonatele punctului care împarte segmentul $\overline{AB}$ în raportul λ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

7. Planul

1) Ecuaţia generală a planului: $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$.

2) Plane particulare:

- plan care trece prin O: $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z=0$;
- plan paralel cu Ox: $B\cdot y+C\cdot z+D=0$;
- plan paralel cu Oy: $A\cdot x+C\cdot z+D=0$;
- plan paralel cu Oz: $A\cdot x+B\cdot y+D=0$;
- plan paralel cu yOx: $z=c$ (plan de nivel);
- plan paralel cu yOz: $x=a$ (plan frontal);
- plan paralel cu xOz: $y=b$ (plan de profil).

3) Ecuaţia planului care trece prin trei puncte $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

4) Ecuaţia planului dat prin tăieturi pe axe:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

5) Distanţa de la un punct $P(x',y',z')$ la un plan:

$$d=\left|\frac{A\cdot x'+B\cdot y'+C\cdot z'+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|,$$

în care semnul radicalului este opus semnului coeficientului D.

6) Poziţia relativă a două plane $A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0$ şi $A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0$.

Poziţia	Condiţia
Plane confundate	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$
Plane paralele	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$
Plane perpendiculare	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
Plane la un unghi oarecare	Unghiul dintre două plane: $\cos V=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$