Transformări în 2D

Algoritmi pentru reprezentari grafice elementare

Transformarea prin scalare și efectul său

- Modificarea marimii obiectului desenat

$$Scara = \frac{\dim\_desen}{\dim\_obiect\_real}$$

•Se aplica sub forma de factor multiplicativ
•De regula se masoara in [pixeli/m]

Problematica!

- Scalarea produce si alte *transformari* asupra obiectului desenat?

Argumente matematice și exemplificare pe tableta grafică

(I)Exemplu de scalare a unui segment de dreaptă |AB| **faţă de origine**:

a) Dacă sx = sy = s

$$r_A^{'} = s\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = s \cdot r_A$$

$$r_B^{'} = s\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = s \cdot r_B$$

Se produce o *transformare liniară* a vectorilor de poziţie

b) Presupunem factori de scară diferiţi pe cele două direcţii: sx ≠ sy.

$$r_A = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \xrightarrow{s_x, s_y} r_A^{'} = \sqrt{(x_1 s_x)^2 + (y_1 s_y)^2}$$

$$r_B = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \xrightarrow{s_x, s_y} r_B^{'} = \sqrt{(x_2 s_x)^2 + (y_2 s_y)^2}$$

Adică:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \xrightarrow{s_x, s_y} |A'B'| = \sqrt{s_x^2 (x_2 - x_1)^2 + s_y^2 (y_2 - y_1)^2}$$

Efectul scalării este în acest caz ***o transformare neliniară***, segmentul scalat nefiind paralel cu cel original.

Scalarea faţă de origine se poate exprima ca transformare matriceala astfel:

$$\begin{cases} x' = x \cdot s_x \\ y' = y \cdot s_y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

sau

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

(II) Exemplu de scalare a unui segment faţă de un punct al obiectului desenat:

Fie segmentul de dreaptă |AB| şi fie punctul de scalare A(x1,y1).

$$r_A \longrightarrow r_A$$

$$r_A' \Leftrightarrow r_A$$

$$r_B = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \xrightarrow{s_x, s_y} r_B' = \sqrt{(x_2 s_x)^2 + (y_2 s_y)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \xrightarrow{s_x, s_y} |A'B'| = \sqrt{(x_2 s_x - x_1)^2 + (y_2 s_y - y_1)^2}$$

In general, pentru oricare punct de scalare ales, matriceal avem:

$$\begin{cases} x' = (x - x_{ps}) \cdot s_x + x_{ps} \\ y' = (y - y_{ps}) \cdot s_y + y_{ps} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x_{ps} \\ y & y_{ps} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & s_y \\ 1 - s_x & 1 - s_y \end{bmatrix} \qquad \text{...............(2)}$$

TRANSLATIA (2D)

operatia de translatie

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \text{...............(3)}$$

ROTATIA (2D)

operatia de rotatie

Transformare specificată printr-un unghi (***u***), convenţional notată ***Ru*.** Se poate aplica în raport cu originea sau faţă de un punct aparţinând elementului care se roteşte.

Rotaţia unui punct A(x_1,y_1) **în raport cu originea**:

$$\begin{cases} x_1 = r_A \cos\alpha_1 \\ y_1 = r_A \sin\alpha_1 \end{cases} \xrightarrow{R_u} \begin{cases} x_1^{'} = r_A \cos(\alpha_1 + u) \\ y_1^{'} = r_A \sin(\alpha_1 + u) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1^{'} = r_A(\cos\alpha_1 \cos u - \sin\alpha_1 \sin u) \\ y_1^{'} = r_A(\sin\alpha_1 \cos u + \cos\alpha_1 \sin u) \end{cases}$$

explicitând, rezulă:

$$\begin{cases} x_1^{'} = x_1 \cos u - y_1 \sin u) \\ y_1^{'} = x_1 \sin u + y_1 \cos u) \end{cases}$$

care se exprimă matriceal:

$$\begin{bmatrix} x_1^{'} \\ y_1^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

unde, convenţional se notează matricea pătrată :

$$R_u = \begin{bmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{bmatrix}$$

Exemplu: Rotaţia unui segment de dreaptă AB cu unghiul *u* faţă de origine se obţine aplicând operatorul matriceal Ru pentru punctele A(x1,y1) respectiv B(x2,y2), care vor deveni A'(x'1,y'1) respectiv B'(x'2,y'2),

astfel:

$$\begin{bmatrix} x_1^{'} \\ y_1^{'} \end{bmatrix} = R_u \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \qquad \text{..............(4)}$$

$$\begin{bmatrix} x_2^{'} \\ y_2^{'} \end{bmatrix} = R_u \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{..............(5)}$$

Observaţie. Dacă rotaţia are loc în raport cu un punct aparţinând segmentului de dreaptă, fie acesta A(x1,y1), atunci în relaţia (4) vom avea

$$R_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concluzii

1. Scalarea produce transformare liniara cand sx=sy
2. Scalarea produce transformare neliniara cand sx diferit de sy
3. Scalarea produce efect de deplasare (translatie) atunci cand este efectuata in raport cu originea (sau cu un punct exterior obiectului grafic)
4. Scalarea produce doar modificarea dimensiunilor atunci cand este aplicata in raport cu un punct apartinand obiectului grafic.

1. Rotatia produce efect de translatie atunci cand se aplica in raport cu un punct exterior obiectului grafic
2. Rotatia este proprie doar atunci cand se aplica in raport cu un punct apartinand obiectului grafic.
3. Rotatia proprie pura se produce doar cand punctul de rotatie este centrul de simetrie al obiectului grafic (centrul geometric).