## Metoda Backtracking. Algoritmul greedy.

### 1. Obiectivele lucrării

În această lucrare se vor studia aspecte legate de metoda backtracking și algoritmul greedy. Se vor prezenta probleme tipice în care se aplică aceste metode.

### 2. Breviar teoretic

**Metoda backtracking** se aplică la probleme în care soluția se poate reprezenta sub forma unui vector. Dacă notăm acest vector cu X ( $X = X_0, X_1, X_2, ..., X_{n-1}$ ), atunci fiecare componentă  $X_k$  a soluției poate să ia valori într-o multime finită  $S_k$ .

În general, în problemele în care se aplică această metodă, se cer fie toate soluțiile posibile (fiecare soluție fiind un vector cu N componente), fie o singură soluție: cea mai bună, după un anumit criteriu.

Sunt doua variante de implementare a acestei metode:

- 1. Varianta iterativa
- 2. Varianta recursiva (mai usor de implementat).

Prin *metoda backtracking iterativă*, orice vector solutie este construit progresiv, incepand cu prima componenta si mergand catre ultima, cu eventuale reveniri. Odata, stabilită valoarea curenta atribuita lui  $X_k$ , din multimea de valori  $S_k$ , nu se trece direct la atribuirea unei valori urmatoarei componente  $X_{k+i}$ , ci se verifica daca solutia partiala gasita  $(X_0, X_1, X_2, ..., X_k)$  este buna. Daca este buna, se trece la urmatoarea atribuire pentru  $X_{k+1}$ . Daca nu este buna, se revine asupra lui  $X_k$  incercandu-se o noua atribuire din multimea valorilor necunoscute din  $S_k$ . Daca toata multimea  $S_k$  este consumata (toate valorile posibile din  $S_k$  au fost atribuite lui  $X_k$ ), se revine cu noi atribuiri componentei anterioare  $X_{k-1}$ . Dupa ce s-a atribuit si ultimei componente  $X_{n-1}$  o valoare, se afiseaza solutia gasita (vectorul X) și apoi procesul se reia, incercand o noua atribuire din multimea de valori posibile ramase, pentru ultima componenta.

Astfel, aplicand aceasta metoda pentru a genera toate permutarile multimii {1,2,3}, se obtin, in ordine, urmatoarele solutii:

- {1,2,3}
- {1,3,2}
- {2,1,3}
- {2,3,1}
- {3,1,2}
- {3,2,1}

Prin *metoda backtracking recursivă* se construieste complet vectorul solutie (toate cele n componente) si in final se verifica daca este o solutie valida. Verificarea validitatii nu se face dupa fiecare noua componenta adaugata, ca la metoda backtracking iterativa, ci doar in final, cand au fost construite toate cele n componente. Generarea soluțiilor prin metoda recursivă consumă mai mult timp decât prin metoda iterativă, însă varianta recursivă se transpune mai ușor în limbajul de programare.

Algoritmul greedy (greedy = lacom) este un concept folosit pentru a desemna o multime finita de operatii, complet ordonata in timp, care pornind de la date de intrare produce intr-un timp finit date de ieşire. Cu alte cuvinte, algoritmul reda metoda de rezolvare a unei probleme intr-un numar finit de paşi. Strategia Greedy este strategia in care optimul local se consideră, optim general. Este o strategie constructiva prin adaugarea treptata de solutii locale care construiesc solutia finala. Așadar, la Greedy\_se cere o multime a datelor de intrare care sa indeplineasca niste conditii. Daca sunt mai multe soluții posibile metoda gaseste optimul (orice cale spre solutie se accepta imediat).

#### **Observatie:**

Algoritmul de tip greedy nu garanteaza obtinerea celei mai bune solutii.

### 3. Probleme rezolvate

Se vor edita și apoi executa programele descrise în continuare.

1. Afișarea tuturor permutărilor mulțimii  $A = \{1, 2, 3, ..., N\}$ . Rezolvare folosind metoda backtracking **recursivă**.

$$P = n!$$

### Sursa programului:

#include <stdio.h>

```
#include <conio.h>
#include<iostream.h>
#define N 3 //dimensiunea vectorului de elemente a
int a[N]={10,5,15};
int x[N]; //vectorul solutie
int esteSol(int k)
//x[0], ..., x[k-1] sunt valide. Adaugam si x[k].
//Pentru a fi valida trebuie ca x[k] sa fie diferit
//de celelalte componente ale solutiei.
     int i;
     for (i=0;i<=k-1;i++)</pre>
           if(x[k]==x[i]) return 0;
     return 1;
void afisare()
     cout << endl;
     for(int i=0;i<N;i++)</pre>
           cout<<a[x[i]]<<" ";
     cout << endl;
void bk(int k)
     if(k==N)
           afisare();
     else
           for(int i=0;i<N;i++)</pre>
                 x[k]=i;
                 if(esteSol(k))
                      bk(k+1);
}
void main()
     clrscr();
     bk(0);
     getch();
```

**2.** Afișarea tuturor permutărilor mulțimii  $A = \{1, 2, 3, ..., N\}$ . Rezolvare folosind metoda backtracking **iterativă.** 

 $P_n = n!$ 

```
Sursa programului:
#include <stdio.h>
```

```
#include <conio.h>
#define N 3 //numarul de componente
int X[N]; //X[k]=1 sau 2 sau 3 sau ... sau N
//prototipuri functii
void afisare();
int esteSol(int k); //testeaza daca elementul X[k]
//este bun pentru solutia finala
void back();
void main()
     clrscr();
     back();
     getch();
void back()
     //Initializare vector X cu solutia vida
     int i,k;
     for (i=0;i<N;i++)X[i]=0;</pre>
     k=0;
     while (k \ge 0) {
           //s-a completat vectorul X?
           if(k==N) //s-a construit o solutie
                 afisare();
                 k=N-1;//se revine la utima
//componenta
           else{
//Nu s-a completat. Sunt 2 posibilitati: sunt / nu
//sunt valori disponibile pt. X[k]
                 if(X[k]+1 \le N) {
                      //sunt valori disponibile.
```

```
X[k] = X[k] + 1;
                       if(esteSol(k) == 1)k++;//da
//valori urmatoarei componente
//daca nu este buna se ramane tot la X[k]
                 }
                 else{
//daca nu mai sunt valori disponibile, face pasul
//inapoi:
                       X[k]=0; //se atribuie lui
//X[k] valoarea imposibila - valoarea de start
                       k = k - 1;
           }//else
      }//while
}//back()
int esteSol(int k)
     int i;
     for(i=0;i<k;i++) //componenta X[k] este buna</pre>
daca este diferita de X[0], de //X[1], de ..., de
X[k-1].
           if(X[k]==X[i])return 0; //nu este buna
     return 1;
void afisare()
{
     int i;
     for (i=0;i<N;i++)</pre>
           printf("%d ",X[i]);
     printf("\n");
```

3. Se citește un cuvânt de la tastatură. Să se afișeze toate anagramările posibile ale cuvântului.

**Observație:** În unele situații, mulțimea X construită prin metoda backtracking, nu este soluția propriu-zisă, ci conține doar indecșii soluției. Această aplicație exemplifică acest lucru.

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include<iostream.h>
#include<string.h>
```

```
//variabile globale
int N;//lungimea cuvantului tastat
int x[20];//indecsii solutiei, deci X[k] este din
//multimea {0,1,...,N-1}
//vectorul X este o permutare a numerelor 0, 1, N-1
char cuvant[21];//cuvantul citit de la tastatura
int esteSol(int k)
      int i;
      for (i=0;i<=k-1;i++)</pre>
            if(x[k]==x[i]) return 0; //nu sunt
//distincte
//daca se ajunge aici atunci vectorul X contine o
//permutare valida
     return 1;
void afisare()
{
      cout << endl;
      for (int i=0;i<N;i++)</pre>
            cout << cuvant[x[i]];</pre>
      cout << endl;
void bk(int k)
      if(k==N)
            afisare();
      else
            for (int i=0;i<N;i++)</pre>
            {
                 x[k]=i;
                 if (esteSol(k))
                       bk(k+1);
            }
void main()
      clrscr();
```

```
cout<<"Tastati un cuvant:"<<endl;
gets(cuvant);
N=strlen(cuvant);
bk(0);
getch();
}</pre>
```

4. Afișarea tuturor aranjamentelor mulțimii  $A = \{1, 2, 3, ..., N\}$ . Rezolvare folosind metoda backtracking **recursivă**.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include<iostream.h>
#define N 3 //dimensiunea vectorului de elemente a
int p; //nr. de elemente din grupa, luate din cele
//N ale multimii a
int a[N]={10,5,15};
int x[N]; //vectorul solutie
int esteSol(int k)
//x[0], ..., x[k-1] sunt valide. Adaugam si x[k].
//Pentru a fi valida trebuie ca x[k] sa fie diferit
//de celelalte componente ale solutiei.
     int i;
     for (i=0;i<=k-1;i++)</pre>
           if(x[k]==x[i]) return 0;
     return 1;
void afisare()
     cout << endl;
     for(int i=0;i<p;i++)</pre>
           cout<<a[x[i]]<<" ";
     cout << endl;
void bk(int k)
```

5. Afișarea tuturor combinărilor mulțimii  $A = \{1, 2, 3, ..., N\}$ . Rezolvare folosind metoda backtracking **recursivă**.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include<iostream.h>
#define N 3 //dimensiunea vectorului de elemente a
int p; //nr. de elemente din grupa, luate din cele
//N ale multimii a
int a[N]={10,5,15};
int x[N]; //vectorul solutie
int esteSol(int k)
{
//x[0], ..., x[k-1] sunt valide. Adaugam si x[k].
//Pentru a fi valida trebuie ca x[k] sa fie diferit
//de celelalte componente ale solutiei.
     int i;
     for (i=0;i<=k-1;i++)</pre>
           if (x[k] <= x[i]) return 0;</pre>
```

```
return 1;
}
void afisare()
      cout << endl;
      for(int i=0;i<p;i++)</pre>
            cout << a[x[i]] << " ";
      cout << endl;
}
void bk(int k)
      if(k==p)
            afisare();
      else
            for(int i=0;i<N;i++)</pre>
            {
                  x[k]=i;
                  if (esteSol(k))
                        bk(k+1);
void main()
      clrscr();
      cout<<"p=";
      cin>>p;
      bk(0);
      getch();
```

6. Fiind dată o hartă cu N țări, se cer toate soluțiile de colorare a hărții, utilizând cel mult 4 culori, astfel încât oricare două țări, ce au frontiera comună, să fie colorate diferit.

**Observație:** Pentru memorarea informațiilor despre frontierele comune dintre oricare două țări, folosim ca structură de date, matricea esteFrontiera. Astfel: esteFrontiera[i][j]=1 – dacă există frontieră între țara i și țara j. Dacă nu există, esteFrotiera [i][j]=0.

### Sursa programului:

#include<stdio.h>

```
#include<conio.h>
#include<iostream.h>
#include<string.h>
#define NR TARI 6//numarul de tari
#define NR_CULORI 4
typedef char stringCuloare[10];
//variabile globale
int esteFrontiera[NR TARI][NR TARI];
stringCuloare
culori[NR CULORI]={"rosu", "galben", "albatru", "verde
"};
stringCuloare x[NR CULORI]; //vectorul solutie X
//este un vector de stringuri
int esteSol()
     int i,j;
     for (i=0;i<NR_TARI;i++)</pre>
           for(j=i+1;j<NR TARI;j++)</pre>
                 if (esteFrontiera[i][j]==1) //daca
//tarile i si j au granita comuna
                 if(strcmp(x[i],x[j])==0)//daca au
//aceeasi culoare
                            return 0;//fals, nu este
//solutie
//daca se ajunge aici atunci avem o permutare valida
     return 1;
void afisare()
     cout<<endl;
     for(int i=0;i<NR_TARI;i++)</pre>
           cout<<i<<" = "<<x[i];
     cout<<endl;
}
void BkRecursiv(int k)
     if(k==NR TARI)
           if (esteSol()) {afisare();}
```

```
}
     else
      {
           for(int i=0;i<NR CULORI;i++)</pre>
                 strcpy(x[k],culori[i]);
                 BkRecursiv(k+1);
}
void main()
{
     int i,j;
               clrscr();
//citire informatii despre frontiere intre tari
     for (i=0;i<NR TARI;i++)</pre>
           for(j=i+1;j<NR TARI;j++){</pre>
                 cout << "Este frontiera intre "<<i<<"
si "<<j<<"? 0 - nu ; 1 - da";
                 cin>>esteFrontiera[i][j]; }
//datorita simetriei, nu a fost necesara decat
initializarea pe jumatate a matricii esteFrontiera
           BkRecursiv(0);
           getch();
}
```

7. Se dau N tipuri de monede. Să se plătească o sumă dată S, folosind un număr total de monede, minim. Se consideră că există un număr suficient de monezi din fiecare tip.

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<iostream.h>

#define N 4//numarul de monezi distincte
int S;//suma data
int valoareMonezi[N]={100,50,20,10};//prima moneda
//are valoarea 100, a doua 50, s.a.m.d.
int x[N];//solutia curenta. Astfel x[0]=numar de
//monezi luate din tipul //valoareMoneda[0]
int xOptim[N];
int nrminmonezi;
int semafor=0;//sa vad daca suma se poate calcula
//exact cu monezile pe care le avem la dispozitie
```

```
int esteSolutie()
     int i, sumacrt;
     //este solutie? Este daca se realizeaza plata
//exacta a sumei S cu vectorul x
     sumacrt=0;
     for (i=0; i<N; i++)</pre>
           sumacrt=sumacrt+x[i]*valoareMonezi[i];
     if (sumacrt==S) return 1;//se realizeaza plata
//exacta
     return 0;
void BkRecursiv(int k)
       int i, nrcrtmonezi;
if(k==N) {
     if (esteSolutie()) {
           //comparare cu cea mai buna solutie
           nrcrtmonezi=0;
           for(i=0;i<N;i++) nrcrtmonezi+=x[i];</pre>
           if (nrcrtmonezi<nrminmonezi) {</pre>
                 //solutia curenta este mai buna
                 nrminmonezi=nrcrtmonezi;
                 for (i=0;i<N;i++) xOptim[i]=x[i];</pre>
}
else
for(i=0;i<=S/valoareMonezi[k];i++)</pre>
\{//i \text{ parcurge valorile posib. ale componentei } x[k]
     x[k]=i;
     BkRecursiv(k+1);
}
void main()
{
     int i;
     clrscr();
     cout<<"Introduceti valoarea sumei de bani:";</pre>
     cin>>S;
     //initializare nrminmonezi cu cel mai mare
//numar de monezi cu care
```

```
//se poate plati suma S
//presupunem, pentru simplificarea codului, ca
//cea mai mica moneda
    //este ultima din vectorul valoareMoneda
    nrminmonezi=S/valoareMonezi[N-1];
    //initializarea vectorului solutieOptima
    xOptim[N-1]=nrminmonezi;
    for(i=0;i<N-1;i++)xOptim[i]=0;
    BkRecursiv(0);
    printf("\nNr minim de monezi este: %d\n",
nrminmonezi);
    for(i=0;i<N;i++){
        cout<<endl<<xOptim[i]<<" monezi";
        cout<<" de valoare "<<valoareMonezi[i];
}
    getch();
}</pre>
```

8. Aceeași problemă ca la punctul precedent - (problema nr. 7) – utilizând însă un algoritm de tip Greedy.

Solutie:

- Se începe prin ordonarea descrescătoare a vectorului monezi.
- Se vede câte monezi din cea mai mare valoare se pot utiliza.
- Se merge descrescător până se completează toată suma.

**Observație:** Această tehnică, pentru acest tip de problemă, nu garantează găsirea celei mai bune soluții.

Ex:

Suma=111 – trebuie plătită având la dispoziție monezi de 100, 55, 1. Utilizând **algoritmul greedy** obținem soluția: S = 1\*100 + 11\*1 = 12 **monezi.** 

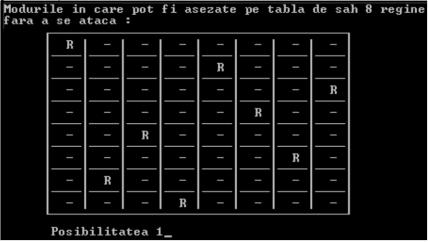
Utilizând **metoda Backtracking** obținem soluția optimă: S = 2\*55 + 1\*1 = 3 monezi.

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<iostream.h>

#define N 3//numarul de monezi distincte
int S;//suma data
```

```
int valoareMonezi[N]={100,55,1};//prima moneda are
//valoarea 100, a doua 50, s.a.m.d.
int solutie[N];
void main()
     int i;
     clrscr();
     cout<<"Introduceti valoarea sumei de bani:";</pre>
     cin>>S;
     for (i=0; i<N; i++)</pre>
            solutie[i]=S/valoareMonezi[i];
           S=S-solutie[i]*valoareMonezi[i];
     for (i=0;i<N;i++)</pre>
            cout << endl << " Din moneda
"<<valoareMonezi[i]<<" s-au folosit
"<<solutie[i]<<" bucati";
     getch();
}
```

9. Următoarea aplicație este o problemă clasică de backtracking, fiind cunoscută sub numele de "*Problema celor 8 regine*". Se cere să se afișeze toate posibilitățile de a aranja 8 regine pe o tablă de șah, astfel încât să nu se atace între ele. Se va afișa și numărul total de posibilități.



**Observație:** Este evident că pentru a nu se ataca, fiecare regină trebuie plasată într-o altă linie (nu pot fi 2 regine pe aceeași linie). De aceea vom afișa doar numerele coloanelor. Vom numerota cele 8 coloane ale tablei de șah cu: 0,1,2,3,4,5,6,7.

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
#define stsus 0xda
#define oriz 0xc4
#define drsus 0xbf
#define drjos 0xd9
#define stjos 0xc0
#define vert 0xb3
int v[8], m=0;//m este contorul pentru numarul de
//solutii gasite
void charxy(int x,int y,int c);
void linieh(int x1,int x2,int y,int c);
void liniev(int y1,int y2,int x,int c);
void drepts(int x1,int y1,int x2,int y2);
void determ(int k);
void charxy(int x,int y,int c)
{
     gotoxy(x,y);
     printf("%c",c);
}
void linieh(int x1,int x2,int y,int c)
     int i;
     for (i=x1;i<=x2;i++)</pre>
           charxy(i,y,c);
}
void liniev(int y1,int y2,int x,int c)
     int i;
```

```
for (i=y1;i<=y2;i++)</pre>
            charxy(x,i,c);
void drepts(int x1,int y1,int x2,int y2 )
     int i;
     charxy(x1,y1,stsus);
     linieh(x1+1,x2-1,y1,oriz);
     for (i=1;i<=7;i++)</pre>
           linieh(x1+1,x2-1,y1+2*i,oriz);
     charxy(x1,y2,stjos);
     linieh(x1+1,x2-1,y2,oriz);
     charxy(x2,y1,drsus);
     liniev(y1+1,y2-1,x1,vert);
     for (i=1;i<=7;i++)</pre>
            liniev(y1+1,y2-1,x1+5*i,vert);
     charxy(x2,y2,drjos);
     liniev(y1+1,y2-1,x2,vert);
}
int afisare(void)
     int 1,c;
     char p;
     for (c=0; c<8; c++)</pre>
           for (1=0;1<8;1++)</pre>
            {
                 gotoxy(20+5*1,5+2*c);
                 if(v[c]==1)
                       printf("R");
                 else
                       printf("-");
            }
            gotoxy(10,22);
           m++;
           printf("Posibilitatea %d",m);
           getch();
           p=getch();
           if(p=='x') exit(0);
           return 0;
}
```

```
int detect(int k)
{
      int q, y;
     y=1;
      for (q=0;q<k&&y!=0;q++)</pre>
           y=(abs(q-k)!=abs(v[q]-
v[k])) \&\& (v[q]!=v[k]);
      if(y \& \& k == 7)
           return afisare();
      else
           return y;
}
void determ(k)
      int i;
      for (i=0; i < 8; i++)</pre>
            v[k]=i;
           if (detect(k))
                 determ(k+1);
void main(void)
      int k;
      clrscr();
     printf("Modurile in care pot fi asezate pe
tabla de sah 8 regine \nfara a se ataca :");
      k=0;
     drepts(17,4,17+5*8,4+2*8);
      determ(k);
     printf("\nNr total de posibilitati
este:%d",m);
      getch();
}
```

10. Se citeşte o matrice pătrată de dimensiune M cunoscută. Să se calculeze și afișeze suma maximă ce constă din M valori, fiecare valoare fiind luată din matrice din linii și coloane diferite.

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
```

```
#include<iostream.h>
#define N 3//dimensiune matrice
int A[N][N] = \{2, 5, 1,
              1,3,6,
              4,5,2};
int sumaMax;
int x[N];//pentru rezolvare propunem utilizarea
unui vector cu N componente x[N]=0,1,2,...N si
//facem toate permutarile posibile pentru acest
//vector
void calcul maxim()
      int suma=0;
     for(int i=0;i<N;i++)</pre>
           suma+=A[x[i]][i];
     if (suma>sumaMax) sumaMax=suma;
int esteSolutie(int k)
      for (int i=0;i<=k-1;i++)</pre>
           if(x[k]==x[i]) return 0;
     return 1;
void BkRecursiv(int k)
{
      if(k==N)
           calcul maxim();
      else
            for (int i=0;i<N;i++)</pre>
            {
                 x[k]=i;
                 if (esteSolutie(k))
                      BkRecursiv(k+1);
            }
}
void main()
      int i;
      clrscr();
```

```
sumaMax=0;
BkRecursiv(0);
cout<<"Maximul este: "<<sumaMax;
getch();
}</pre>
```

# 4. Probleme propuse

- 1. Să se afișeze toate configurațiile posibile în care 8 ture așezate pe tabla de șah nu se atacă. De asemenea, să se afișeze și numărul total de soluții găsite.
- 2. Fie N şi p două constante definite cu directiva #define şi p<=N. Se citesc N caractere de la tastatură. Să se afişeze toate şirurile formate din p caractere dintre cele N citite ştiind că trebuie respectate simultan următoarele restricții:
  - a. Nu pot fi două vocale alăturate.
  - b. Nu trebuie să fie nici un caracter cifră.
- 3. Se dă un vector A cu N componente numere întregi. Să se determine o submulțime un subșir al lui A, ale cărui elemente sunt luate în ordine dintre componentele vectorului A dar nu obligatoriu elementele consecutive din A de lungime maximă, ale cărui componente sunt în ordine crescătoare. Ex.: Dacă A={4, 3, 1, 7, 2, 4, 5}, atunci submulțimea căutată este: B={1, 2, 4, 5}, deci lungimea maximă este 4.
- 4. Să se afișeze toate posibilitățile de a realiza perforarea unui bilet de autobuz și numărul total de posibilități, pornind de la următoarea figură:

0	1	2
x	x	x
3	4	5
x	x	x
6	7	8
x	x	x

X[k]=0 daca nu este perforat locul kX[k]=1 daca este perforat locul k.

5. Se dorește construirea unei țevi de lungime totală L știind că avem la dispoziție N tipuri de țevi. Toate țevile de tipul i au

aceeași lungime notată cu li. Pentru fiecare tip de țeavă avem la dispoziție un anumit număr de bucăți, notat cu bucăți[i].

a. Țeava de lungime L trebuie obținută prin folosirea cel puțin a unei țevi din fiecare tip. Să se afișeze toate variantele de obținere a țevii de lungime L.

*Ex.:* 

L=100m tip 0: 
$$l[0]=10$$
 tip 1:  $l[1]=20$  tip 2:  $l[2]=50$ 

N=3 bucăți $[0]=5$  bucăți $[1]=4$  bucăți $[2]=2$ 

Răspuns:  $100=3*10+1*20+1*50=1*10+2*20+1*50$ 

- b. Țeava de lungime L trebuie obținută prin folosirea unui număr cât mai mic de țevi. Să se afișeze toate variantele de obținere a țevii de lungime L.
- c. Țeava de lungime L trebuie obținută prin folosirea unui număr cât mai mic de țevi. Să se afișeze soluția obținută prin algoritmul Greedy.