Cursul 10 Bazele Electrotehnicii & Electrotehnică

4.3.3 Proprietăți ale calculului cu numere complexe

1°. Teorema combinațiilor liniare

Dacă x_1, x_2 sunt funcții armonice și c_1, c_2 sunt două constante reale sau imaginare, rezultă imaginea în complex:

$$C\{c_1x_1 + c_2x_2\} = c_1\underline{X}_1 + c_2\underline{X}_2 \tag{4.50}$$

2°. Teorema derivatei

Dacă $x = X\sqrt{2}\,sin(\omega t + \gamma)$ este o funcție armonică, $\underline{X} = X \cdot e^{j\gamma} \Rightarrow$

$$C\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = j\omega\underline{X} \tag{4.51}$$

Demonstrație: $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}X\omega\,sin(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow C\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = C\left\{\sqrt{2}X\omega\sin(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2})\right\} = \omega X e^{j(\gamma+\frac{\pi}{2})} = \omega X e^{j\gamma}e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega\underline{X}j = j\omega\underline{X}$$

3°. Teorema integralei:

$$C\left\{\int xdt\right\} = \frac{\underline{X}}{j\omega} \tag{4.52}$$

Demonstrație:

$$\int xdt = \int\sqrt{2}X\sin(\omega t + \gamma)dt = \sqrt{2}X\frac{1}{\omega}[-\cos(\omega t + \gamma)] = \sqrt{2}X\frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2})$$

$$C\left\{\int xdt\right\} = C\left\{\sqrt{2}X\frac{1}{\omega}\sin\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \frac{X}{\omega}e^{j\left(\gamma-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\omega}Xe^{j\gamma}e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j\omega}\underline{X}$$

4.4 Circuite simple în regim armonic permanent. Rezolvare metoda directă și în complex simplificat

Se consideră o serie de circuite simple (neramificate), liniare și pasive cărora li se aplică la borne tensiunea sinusoidală (luată după convenția de asociere a sensurilor de referință de la receptoare):

$$u = U\sqrt{2}\,sin(\omega t + \gamma_u) \tag{4.27}$$

Scriind ecuația integro-diferențială a circuitului, prin metoda directă se va căuta o soluție particulară a acesteia, de aceeași formă cu tensiunea aplicată:

$$i = I\sqrt{2}\,sin(\omega t + \gamma_i) \tag{4.28}$$

Dacă $\varphi = \gamma_u - \gamma_i$ este defazajul dintre tensiune și curent și $Z = \frac{U}{I}$ - impedanța circuitului, $Z > 0$, atunci:

$i = \frac{U}{Z}\sqrt{2}\,sin(\omega t + \gamma_u - \varphi)$. Se urmărește determinarea impedanței Z și a defazajului φ.

a1) Rezistorul ideal - rezolvare prin metoda directă

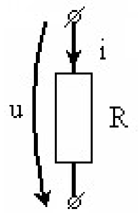


Fig. 4.10

Se dau: $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_u)$, R

Se cer: i, Z_R, φ_R

Pornind de la ecuația de funcționare a circuitului, dată de teorema lui Ohm, $u = Ri$.

Dacă se înlocuiesc *u* și *i* prin expresiile lor în forma armonică rezultă:

$U\sqrt{2}\, sin(\omega t + \gamma_u) = RI\sqrt{2}\, sin(\omega t + \gamma_i)$

Prin identificare $\Rightarrow I = \dfrac{U}{R}$, $\gamma_i = \gamma_u$, $Z_R = R$, $\qquad \varphi_R = 0$

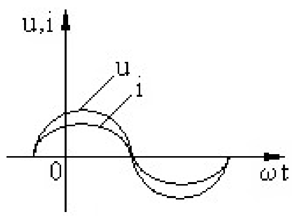


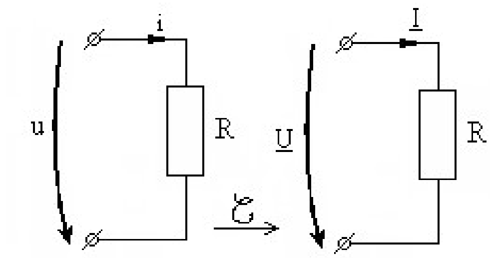
Fig.4.11

$$i = \frac{U}{R}\sqrt{2}\, sin(\omega t + \gamma_u) \qquad (4.29)$$

Concluzie: Curentul printr-un rezistor ideal este în fază cu tensiunea aplicată și are valoarea efectivă proporțională cu a tensiunii aplicate și independentă de frecvență.

a2). Rezistorul ideal - rezolvare în complex simplificat

Se cunosc $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ și *R*. Se cere intensitatea curentului *i*.



a. b.

Fig. 4.23 a. Schema electrică a unui circuit pur rezistiv în instantaneu;
b. Schema electrică a unui circuit pur rezistiv în complex simplificat.

Conform teoremei lui Ohm ecuația de funcționare a circuitului este: $u = R \cdot i$

Reprezentând în complex simplificat această ecuație și ținând cont de *teorema combinațiilor liniare* rezultă:

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} \qquad (4.60)$$

Pe baza relației (4.60) se deduce schema electrică a unui circuit pur rezistiv în complex simplificat (Fig.4.23b).

Atunci rezultă ***valoarea efectivă complexă*** a curentului: $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{U}{R}$. Se notează cu $I = \frac{U}{R}$ ***valoarea efectivă*** a curentului.

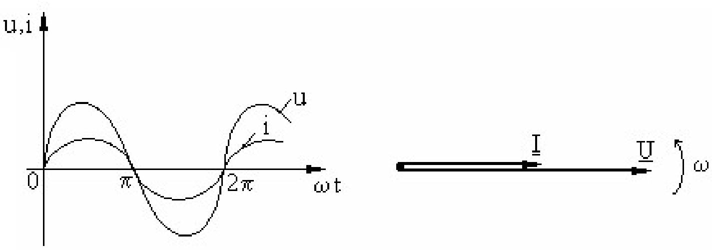
Rezultă că valoarea efectivă complexă a intensității curentului absorbit de rezistor este:

$\underline{I} = I$ și ***valoarea instantanee*** va fi:

$i(t) = \mathrm{Im}\{\sqrt{2}\underline{I}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Im}\{\sqrt{2}Ie^{j\omega t}\} = \sqrt{2}I\, sin\,\omega t$, deci:

$$i = \sqrt{2}I\, sin\,\omega t \qquad (4.61)$$

Observație: *Intensitatea curentul printr-un rezistor ideal este în fază cu tensiunea la bornele acestuia.*



a. b.

Fig. 4.24 Reprezentarea grafică a tensiunii și curentului pentru un circuit pur rezistiv în instantaneu (a) și fazorial - diagrama fazorială - (b).

b1) Bobina ideală - rezolvare prin metoda directă

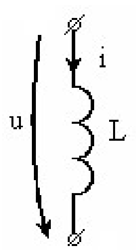


Fig. 4.12

Se dau: $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_u)$, L

Se cer: i, Z_L, φ_L

Ecuaţia de funcţionare a circuitului este:

$$u = L\frac{di}{dt}$$

Înlocuind cu expresiile în forma armonică:

$U\sqrt{2}\, sin(\omega t + \gamma_u) = L\varpi I\sqrt{2}\, sin\left(\omega t + \gamma_i + \frac{\pi}{2}\right)$, iar prin identificare se obține:

$I = \frac{U}{\omega L}$, $\gamma_i = \gamma_u - \frac{\pi}{2}$, $Z_L = \omega L$ și $\varphi_L = \frac{\pi}{2}$.

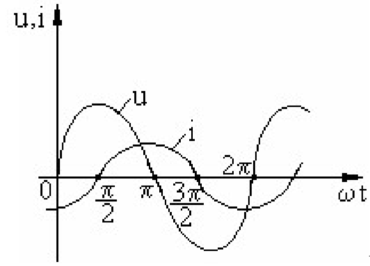


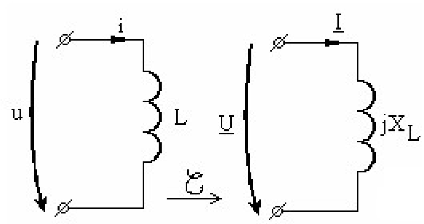
Fig. 4.13

$$i = \frac{U}{\omega L}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma_u - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (4.30)$$

Concluzie: Curentul unei bobine ideale este defazat în urma tensiunii aplicate cu $\pi/2$ și are valoarea efectivă proporțională cu a tensiunii aplicate și invers proporțională cu frecvența.

b2). Bobina ideală - rezolvare în complex simplificat

Se cunosc $u = \sqrt{2}U\sin\omega t$ și L. Se cere intensitatea curentului *i*.



a. b.

Fig. 4.25 a. Schema electrică a unui circuit pur inductiv în instantaneu;
b. Schema electrică a unui circuit pur inductiv în complex simplificat.

Ecuația de funcționare a circuitului este: $u = L\dfrac{di}{dt}$

Reprezentând în complex această ecuație și ținând cont de *teorema derivatei* rezultă:

$\underline{U} = L \cdot j\omega\underline{I} = j\omega L \cdot \underline{I}$

Se notează cu $X_L = \omega L$ ***reactanța inductivă***, atunci:

$$\underline{U} = jX_L \cdot \underline{I} \qquad (4.62)$$

Pe baza relației (4.62) se deduce schema electrică a unui circuit pur inductiv în complex simplificat (Fig.4.25b).

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{jX_L} = -j\frac{U}{X_L}$$

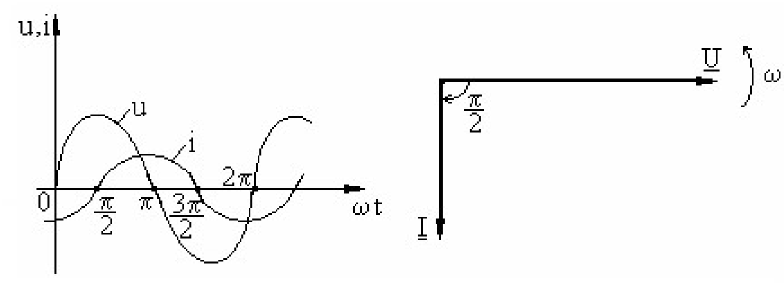
Notând cu $I = \dfrac{U}{X_L}$ ***valoarea efectivă*** a intensității curentului, rezultă $\underline{I} = -jI = Ie^{-j\frac{\pi}{2}}$

Valoarea instantanee va fi:

$i(t) = \mathrm{Im}\{\sqrt{2}\underline{I}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Im}\{\sqrt{2}Ie^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\omega t}\} = \sqrt{2}I\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$, deci:

$$i = \sqrt{2}I\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \qquad (4.63)$$

Observație: *Intensitatea curentul printr-o bobină ideală este defazată cu* $\pi/2$ *în urma tensiunii de la bornele acesteia.*



a. b.

Fig. 4.26 Reprezentarea grafică a tensiunii și curentului pentru un circuit pur inductiv în instantaneu (a) și fazorial - diagrama fazorială - (b).

c1) Condensatorul ideal - rezolvare prin metoda directă

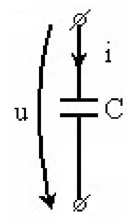


Fig. 4.14

Se dau: $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_u)$, C

Se cer: i, Z_C, φ_C

Ecuaţia de funcţionare a circuitului este:

$$u = \frac{1}{C}\int i dt$$

Înlocuind cu expresiile în forma armonică:

$U\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_u) = \frac{1}{C}\frac{I}{\omega}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma_i - \frac{\pi}{2}\right)$, iar prin identificare se obține:

$I = \omega CU = \dfrac{U}{\dfrac{1}{\omega C}}$, $\gamma_i = \gamma_u + \dfrac{\pi}{2}$, $Z_c = \dfrac{1}{\omega C}$ și $\varphi_C = -\dfrac{\pi}{2}$.

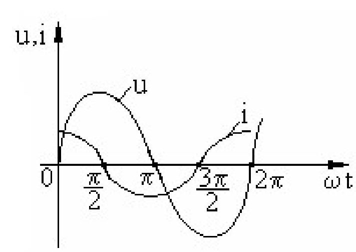


Fig.4.15

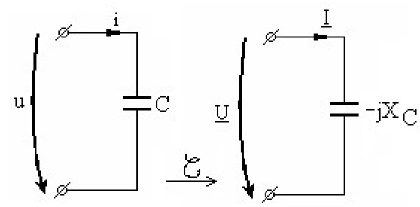
$$i = \omega CU\sqrt{2}\, sin\left(\omega t + \gamma_u + \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.31}$$

Concluzie: Curentul unui condensator ideal este defazat înaintea tensiunii aplicate cu $\frac{\pi}{2}$ și are valoarea efectivă proporțională cu a tensiunii și proporțională cu frecvența.

Observație: La frecvențe înalte, o bobină blochează trecerea curentului ($I = \dfrac{U}{\omega L} \to 0$) iar un condensator reprezintă un scurtcircuit. La frecvențe joase, o bobină reprezintă un scurtcircuit iar un condensator blochează trecerea curentului (de ex. la $f = 0$, c.c.).

c). Condensatorul ideal - rezolvare în complex simplificat

Se cunosc $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ și C. Se cere intensitatea curentului *i*.



a. b.

Fig. 4.27 a. Schema electrică a unui circuit pur capacitiv în instantaneu;
b. Schema electrică a unui circuit pur capacitiv în complex simplificat.

Ecuația de funcționare a circuitului este: $u = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$

Reprezentând în complex această ecuație și ținând cont de *teorema integralei* rezultă:

$$\underline{U} = \frac{1}{C}\frac{\underline{I}}{j\omega}$$

Se notează cu $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$, ***reactanța capacitivă***, atunci:

$$\underline{U} = -jX_C \cdot \underline{I} \qquad (4.64)$$

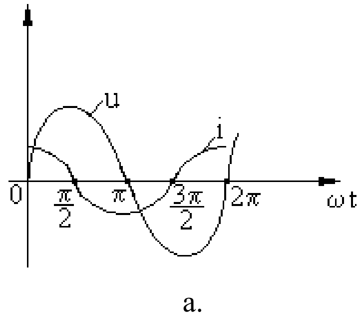
Pe baza relației (4.64) se deduce schema electrică a unui circuit pur capacitiv în complex simplificat (Fig.4.27b).

$\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{-jX_C} = j\dfrac{U}{X_C}$, cu $I = \dfrac{U}{X_C}$, ***valoarea efectivă.*** Rezultă $\underline{I} = Ie^{j\frac{\pi}{2}}$ și ***valoarea instantanee*** va fi:

$$i(t) = \mathrm{Im}\{\sqrt{2}\,\underline{I}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Im}\{\sqrt{2}Ie^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\omega t}\} = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})\text{, deci:}$$

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad (4.65)$$

Observație: Curentul electric printr-un condensator este defazat cu $\dfrac{\pi}{2}$ *înaintea tensiunii de la bornele sale.*



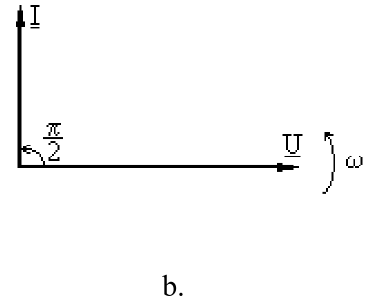


Fig. 4.28 Reprezentarea grafică a tensiunii şi curentului pentru un circuit pur capacitiv în instantaneu (a) şi fazorial - diagrama fazorială - (b).

Ex. *Determinarea reactanţelor pentru următoarele elemente reactive, la frecvenţa industrială.*

$$L_1 = \frac{0,05}{\pi} H, \quad C_1 = \frac{2000}{\pi} \mu F, \; L_2 = \frac{0,2}{\pi} H, C_2 = \frac{500}{\pi} \mu F$$

4.5 Puteri definite în regim armonic permanent

Dacă se consideră un circuit la bornele căruia se aplică o tensiune $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_u)$ şi care absoarbe un curent $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_i)$ se poate scrie puterea instantanee la borne:

$$p = u \cdot i = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_u) I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_i) = UI \cdot 2\sin(\omega t + \gamma_u)\sin(\omega t + \gamma_i) =$$
$$= UI[\cos(\omega t + \gamma_u - \omega t - \gamma_i) - UI\cos(2\omega t + \gamma_u + \gamma_i)] = UI\cos\phi - UI\cos(2\omega t + \gamma_u + \gamma_i)$$
$$p = UI\, cos\,\varphi - UI\, cos(2\omega t + \gamma_u + \gamma_i) \tag{4.32}$$

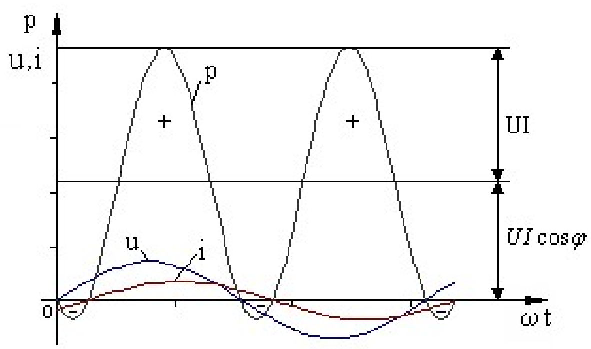


Fig.4.16

Observaţie: Puterea instantanee este o mărime periodică având o componentă constantă $UI\cos\varphi$ şi o componentă de frecvenţă dublă. Amplitudinea de variaţie a puterii este UI.

a). Puterea activă

În procesele periodice interesează de regulă energia consumată în circuit în intervalul unei perioade întregi, *T*, şi corespunzător acesteia interesează valoarea medie a puterii instantanee pentru o perioadă întreagă.

Se numeşte **putere activă** valoarea medie a puterii instantanee absorbită într-o perioadă.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T pdt = \frac{1}{T} \cdot UI\cos\varphi \cdot T = UI\cos\varphi \tag{4.33}$$

$$P = UI\cos\varphi \,,\; P \geq 0 \tag{4.34}$$

$\langle P \rangle_{SI} = 1\,W$ (watt)

Corespunzător acestei puteri active, în curent alternativ, se definește rezistența astfel:

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{UI\cos\varphi}{I^2} = \frac{U}{I}\cos\varphi \tag{4.35}$$

În mod similar, conductanța în curent alternativ este definită prin relația:

$$G = \frac{P}{U^2} = \frac{UI\cos\varphi}{U^2} = \frac{I}{U}\cos\varphi \tag{4.36}$$

Se observă că în curent alternativ $R \neq \frac{1}{G}$ (spre deosebire de curentul continuu unde $R = \frac{1}{G}$) cu excepția cazului când $\varphi = 0$.

b). Puterea aparentă. Factorul de putere

Se numește **putere aparentă** și se notează cu S, produsul valorilor efective ale tensiunii și intensității curentului. Practic ea reprezintă amplitudinea de variație a puterii instantanee dintr-un circuit electric.

$$S = U \cdot I \tag{4.37}$$

$\langle S \rangle_{SI} = 1\,VA$ (voltamper)

Raportul dintre puterea aparentă și pătratul valorii efective a curentului se numește **impedanță.**

$$Z = \frac{S}{I^2} = \frac{U}{I} \tag{4.38}$$

Valoarea reciprocă a impedanței se numește **admitanță:**

$$Y = \frac{S}{U^2} = \frac{UI}{U^2} = \frac{I}{U} = \frac{1}{Z} \tag{4.39}$$

Se numește **factor de putere** raportul pozitiv dintre puterea activă și cea aparentă:

$$k_P = \frac{P}{S} \geq 0 \tag{4.40}$$

În regim sinusoidal, factorul de putere este:

$$k_P = \frac{P}{S} = \frac{UI\cos\varphi}{UI} = \cos\varphi \tag{4.41}$$

c). **Puterea reactivă**

Prin analogie cu puterea activă se definește puterea reactivă a unui circuit prin relația:

$$Q = UI\sin\varphi \tag{4.42}$$

Aceasta se introduce ca o mărime complementară puterii active pentru a se obține puterea aparentă.

Între cele trei puteri există relația:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \tag{4.43}$$

$\langle Q \rangle_{SI} = 1\, VAr$ (voltamper reactiv)

Raportul dintre puterea reactivă și pătratul valorii efective a curentului se numește **reactanță**:

$$X = \frac{Q}{I^2} = \frac{U}{I} \sin\varphi \tag{4.44}$$

În mod similar se definește **susceptanța**, ca raportul dintre puterea reactivă și pătratul valorii efective a tensiunii:

$$B = \frac{Q}{U^2} = \frac{I}{U} \sin\varphi \tag{4.45}$$

În general $X \neq \frac{1}{B}$, dar pentru $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{X}$.

d). **Triunghiul puterilor, al impedanței și al admitanței**

Cum $S^2 = P^2 + Q^2$ rezultă că într-un circuit electric, puterilor li se poate asocia un triunghi dreptunghic ca în figură:

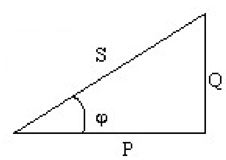


Fig. 4.17 Triunghiul puterilor

$$\cos\varphi = \frac{P}{S},\ \sin\varphi = \frac{Q}{S},\ tg\varphi = \frac{Q}{P}$$

$$\Rightarrow\ P = S\cos\varphi,\ Q = S\sin\varphi$$

Împărțind valorile tuturor laturilor triunghiului puterilor prin I^2 se obține triunghiul impedanței:

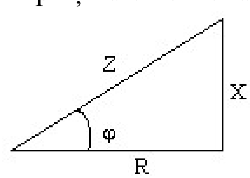


Fig. 4.18 Triunghiul impedanței

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z},\ \sin\varphi = \frac{X}{Z},\ tg\varphi = \frac{X}{R}$$

$$\Rightarrow\ R = Z\cos\varphi,\ X = Z\sin\varphi,\ Z^2 = R^2 + X^2$$

Împărțind valorile laturilor triunghiului puterilor prin U^2 se obține triunghiul admitanței:

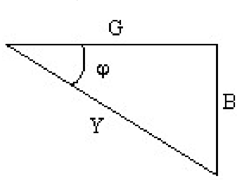


Fig. 4.19 Triunghiul admitanței

$$\cos\varphi = \frac{G}{Y},\ \sin\varphi = \frac{B}{Y},\ tg\varphi = \frac{B}{G} \Rightarrow\ G = Y\cos\varphi,\ B = Y\sin\varphi,\ Y^2 = G^2 + B^2$$