Problema IV.1

Un mobil este constrâns să efectueze simultan două mişcări oscilatorii armonice după două direcţii perpendiculare. Astfel, dacă

a.) $x = a \sin \omega t$ şi $y = a \cos 2\omega t$, cu a = const.;

b.) $x = a \sin \omega t$ şi $y = a \sin 2\omega t$, cu a = const.;

c.) $x = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6} t + \frac{\pi}{2}\right)$ şi $y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} t\right)$;

d.) $x = A \cos \omega t$ şi $y = B \cos 2\omega t$, cu A, B = const.;

e.) $x = A \cos \omega t$ şi $y = B \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, cu A, B = const.,

să se găsească expresia traiectoriei mobilului.

R:

Expresia analitică a traiectoriei unui mobil se obţine prin eliminarea timpului din ecuaţiile parametrice, în cazurile date, pentru axele Ox şi Oy, $x = x(t)$ şi $y = y(t)$, iar mişcarea mobilului în planul xOy va fi caracterizată de o funcţie $f(x, y) = 0$.

a.) Dacă $x = a \sin \omega t$, $y = a \cos 2\omega t$, cu a = const., vom scrie

$$\frac{x}{a} = \sin \omega t \quad \text{şi} \quad \frac{y}{a} = \cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t. \qquad (1)\ (2)$$

Din prima relaţie, prin ridicare la pătrat, avem

$$\sin^2 \omega t = \frac{x^2}{a^2}, \qquad (3)$$

dar conform formulei fundamentale a trigonometriei, $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$,

$$\cos^2 \omega t = 1 - \sin^2 \omega t = 1 - \frac{x^2}{a^2} \qquad (4)$$

şi astfel, înlocuind relaţiile (3) şi (4) în (2), rezultă că traiectoria mobilului în acest caz este o parabolă, de ecuaţie

$$\frac{y}{a} = 1 - 2\frac{x^2}{a^2} \quad \text{sau} \quad y = a\left(1 - 2\frac{x^2}{a^2}\right). \qquad (5)$$

b.) Când $x = a \sin \omega t$ şi $y = a \sin 2\omega t$, a fiind o constantă, procedăm analog şi avem

$$\frac{x}{a} = \sin \omega t \quad \text{şi} \quad \frac{y}{a} = \sin 2\omega t = 2 \sin \omega t \cos \omega t, \qquad (6)\ (7)$$

din care, cum

$$\cos\,\omega t=\sqrt{1-\sin^2\omega t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,, \tag{8}$$

aflăm expresia traiectoriei mobilului în planul xOy:

$$y=2x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{sau} \quad y^2=4x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right). \tag{9}$$

c.) Dacă $x=3\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{2}\right)$, $y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$, scriem

$$\frac{x}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{şi} \quad \frac{y}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right). \qquad (10)\ (11)$$

Utilizând formula trigonometrică de reducere la un unghi ascuţit, $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$, relaţia (10) devine

$$\frac{x}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right). \tag{12}$$

Ridicăm la pătrat relaţiile (11) şi (12)

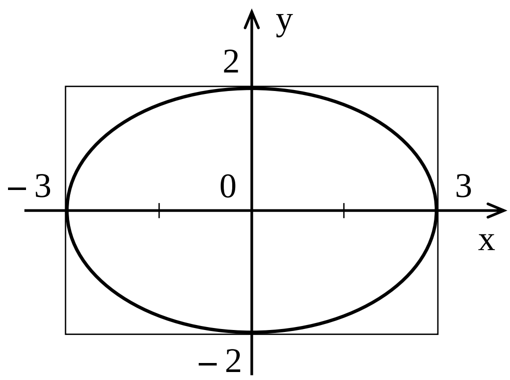
$$\frac{x^2}{9}=\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) \quad \text{şi} \quad \frac{y^2}{4}=\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right), \qquad (13)\ (14)$$

iar aplicând formula fundamentală a trigonometriei obţinem

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \tag{15}$$

traiectoria mobilului în planul xOy este o elipsă înscrisă într-un dreptunghi cu laturile:

$$2a\big|_{a=3}=6 \quad \text{şi} \quad 2b\big|_{b=2}=4\,.$$



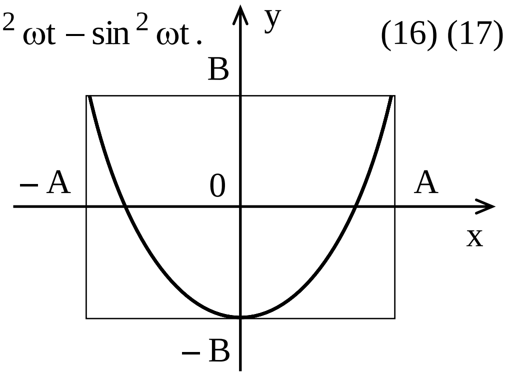
d.) Pentru $x=A\cos\omega t$, $y=B\cos 2\omega t$, cu A şi B constante, procedând analog, vom avea

$$\frac{x}{A}=\cos\omega t \quad \text{şi} \quad \frac{y}{B}=\cos 2\omega t=\cos^2\omega t-\sin^2\omega t\,. \qquad (16)\ (17)$$

Ridicând la pătrat relaţia (16) scriem

$$\cos^2\omega t=\frac{x^2}{A^2}, \tag{18}$$

dar potrivit formulei fundamentale a



trigonometriei $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ scriem:

$$\sin^2 \omega t = 1 - \cos^2 \omega t = 1 - \frac{x^2}{A^2}, \tag{19}$$

rezultat pe care îl înlocuim în relaţia (17),

$$\frac{y}{B} = \frac{x^2}{A^2} - \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) = 2\frac{x^2}{A^2} - 1, \tag{20}$$

şi obţinem că traiectoria mobilului este o parabolă, de ecuaţie:

$$y = B\left(2\frac{x^2}{A^2} - 1\right). \tag{21}$$

e.) Dacă $x = A\cos \omega t$ şi $y = B\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, cu A şi B constante, vom scrie

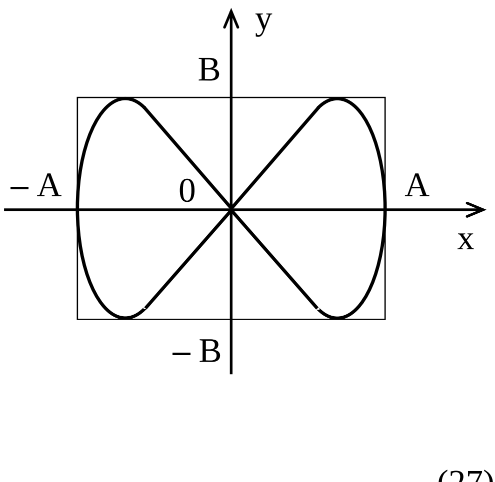
$$\frac{x}{A} = \cos \omega t \quad \text{şi} \quad \frac{y}{B} = \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{22) (23}$$

Utilizând formula trigonometrică de reducere la un unghi ascuţit, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$, cea de-a doua relaţie devine

$$\frac{y}{B} = \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2\omega t = -2\sin \omega t \cos \omega t. \tag{24}$$

Ridicând la pătrat relaţia (22)

$$\frac{x^2}{A^2} = \cos^2 \omega t \tag{25}$$



şi totodată, conform formulei fundamentale a trigonometriei, găsim

$$\sin^2 \omega t = 1 - \cos^2 \omega t =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{A^2}, \tag{26}$$

din care rezultă

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \tag{27}$$

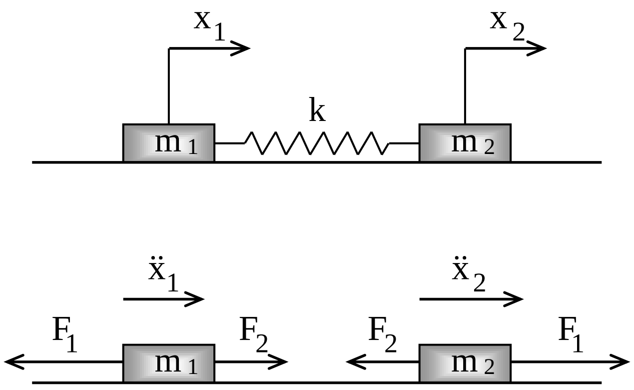
Prin înlocuirea relaţiilor (22) şi (27) în (24), obţinem ecuaţia traiectoriei descrise de mobil în planul xOy:

$$\frac{y}{B} = -2\frac{x}{A}\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \quad \text{sau} \quad y = -2\frac{B}{A}x\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \tag{28}$$

Problema IV.2

Să se calculeze perioada de oscilaţie a unui sistem format din două corpuri cu masele m_1 şi m_2, legate între ele printr-un resort de masă neglijabilă şi constantă de elasticitate k, sistemul oscilând liber, fără frecare, pe o suprafaţă orizontală.

R:



Ecuaţia de mişcare a sistemului se obţine utilizând *metoda separării* (sau *izolării*) *corpurilor*, potrivit căreia se va realiza o a doua reprezentare în care prezenţa resortului va fi înlocuită cu forţele care acţionează asupra fiecăruia din cele două corpuri.

Notând cu x_1 şi x_2 deplasările corpurilor cu masele m_1 şi m_2 faţă de poziţiile de echilibru când sistemul oscilează în lungul axei Ox, vom scrie pentru fiecare corp, separat, ecuaţia fundamentală a dinamicii:

$$m_1\ddot{x}_1 = F_2 - F_1 \tag{1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = F_1 - F_2, \tag{2}$$

unde F_1, respectiv F_2 reprezintă forţele cu care un corp acţionează asupra celuilalt datorită prezenţei resortului, iar $\ddot{x}_1$ şi $\ddot{x}_2$ acceleraţiile corpurilor.

Cu

$$F_1 = kx_1 \quad \text{şi} \quad F_2 = kx_2,$$

relaţiile (1) şi (2) devin

$$m_1\ddot{x}_1 = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1) \tag{3}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = kx_1 - kx_2 = -k(x_2 - x_1) \tag{4}$$

sau

$$m_1\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) = 0 \tag{5}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0. \tag{6}$$

Înmulţind relaţia (5) cu m_2, iar relaţia (6) cu m_1, avem

$$m_1m_2\ddot{x}_1 - km_2(x_2 - x_1) = 0 \tag{7}$$

$$m_1m_2\ddot{x}_2 + km_1(x_2 - x_1) = 0. \tag{8}$$

Efectuăm diferenţa relaţiilor (7) şi (8) şi obţinem

$$m_1m_2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + k(m_1 + m_2)(x_2 - x_1) = 0, \tag{9}$$

iar împărţind relaţia cu produsul $m_1 m_2$ scriem

$$(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + k\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\,(x_2 - x_1) = 0\,, \tag{10}$$

unde

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\,, \tag{11}$$

adică

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{11'}$$

care poartă numele de *masă redusă*.

Totodată deplasarea sistemului faţă de poziţia de echilibru va fi:

$$x = x_2 - x_1 \tag{12}$$

şi, în consecinţă,

$$\ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \tag{13}$$

este acceleraţia sistemului.

Înlocuind relaţiile (11), (12) şi (13) în (10), obţinem

$$\ddot{x} + \frac{k}{\mu}\,x = 0\,, \tag{14}$$

care reprezintă *ecuaţia de mişcare* a sistemului mecanic.

Efectuând notaţia $\frac{k}{\mu} = \omega^2$, unde ω este *pulsaţia proprie de oscilaţie* a sistemului, rezultă

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,. \tag{15}$$

Scriem

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} = \sqrt{\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}} = \sqrt{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}\,, \tag{16}$$

unde

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{şi} \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \qquad (17)\ (18)$$

sunt pulsaţiile proprii de oscilaţie a doi oscilatori liniari armonici formaţi dintr-un corp, de masă m_1 sau m_2, legat de un resort cu constanta de elasticitate k.

Cum $\omega = \frac{2\pi}{T}$, unde T este *perioada proprie de oscilaţie*, prin egalare, scriind $\sqrt{\frac{k}{\mu}} = \frac{2\pi}{T}$, obţinem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}}. \tag{19}$$

Problema IV.3

Fie două corpuri cu masele m_1 şi m_2, fixate de pereţii laterali prin intermediul a două resorturi cu constantele de elasticitate k_1 şi k_2, corpurile fiind legate între ele printr-un resort cu constanta de elasticitate k. Să se găsească ecuaţia de mişcare a sistemului mecanic format, pentru cazul în care $\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = \omega_0^2$, precum şi frecvenţa proprie de oscilaţie a sistemului.

Să se afle ecuaţia de mişcare şi perioada de oscilaţie pentru un sistem format din două corpuri cu mase identice m, legate între ele printr-un resort şi de asemenea fixate de pereţii laterali prin intermediul a două resorturi, toate având aceeaşi constantă de elasticitate k, sistemul oscilând liber, fără frecare, pe o suprafaţă orizontală.

R:

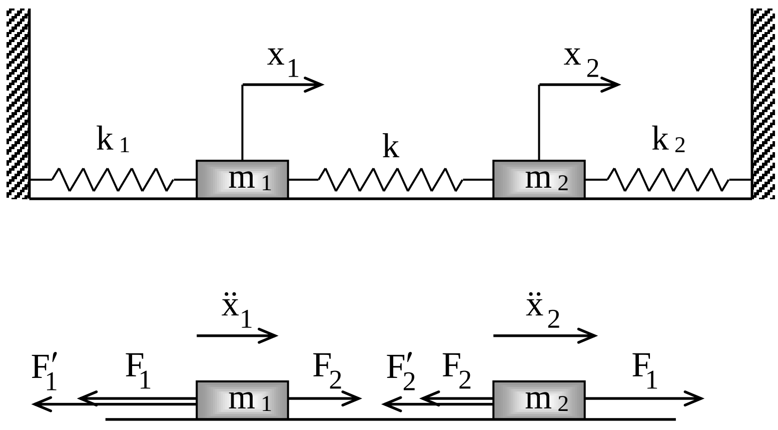
Ecuaţia de mişcare a sistemului se obţine utilizând *metoda separării corpurilor*, făcând deci reprezentarea forţelor care acţionează asupra corpurilor datorită prezenţei celor trei resorturi.

Sistemul oscilând în lungul axei Ox, notăm cu x_1 şi x_2 deplasările corpurilor cu masele m_1 şi respectiv m_2 faţă de poziţiile de echilibru şi scriem pentru fiecare corp ecuaţia fundamentală a dinamicii:

$$m_1\ddot{x}_1 = F_2 - F_1 - F_1' \tag{1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = F_1 - F_2 - F_2', \tag{2}$$

unde F_1, F_2 şi F_1', F_2' reprezintă forţele care acţionează asupra corpurilor datorită prezenţei resorturilor şi configuraţiei date, iar $\ddot{x}_1$ şi $\ddot{x}_2$ sunt acceleraţiile celor două corpuri.



Cu

$$F_1 = kx_1, \quad F_2 = kx_2 \quad \text{şi} \quad F_1' = k_1 x_1, \quad F_2' = k_2 x_2,$$

relaţiile (1) şi (2) devin

$$m_1 \ddot{x}_1 = kx_2 - kx_1 - k_1 x_1 = -k(x_1 - x_2) - k_1 x_1 \tag{3}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = kx_1 - kx_2 - k_2 x_2 = k(x_1 - x_2) - k_2 x_2 \tag{4}$$

sau

$$m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + k_1 x_1 = 0 \tag{5}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) + k_2 x_2 = 0, \tag{6}$$

pe care le scriem sub forma:

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m_1}(x_1 - x_2) + \frac{k_1}{m_1} x_1 = 0 \tag{7}$$

$$\ddot{x}_2 - \frac{k}{m_2}(x_1 - x_2) + \frac{k_2}{m_2} x_2 = 0. \tag{8}$$

Conform enunţului problemei cu $\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = \omega_0^2$, relaţiile (7) şi (8) devin:

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m_1}(x_1 - x_2) + \omega_0^2 x_1 = 0 \tag{9}$$

$$\ddot{x}_2 - \frac{k}{m_2}(x_1 - x_2) + \omega_0^2 x_2 = 0. \tag{10}$$

Efectuând diferenţa relaţiilor (9) şi (10), obţinem

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(x_1 - x_2) + \omega_0^2 (x_1 - x_2) = 0. \tag{11}$$

Deoarece

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad \text{sau} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (12)\ (12')$$

este *masa redusă* şi cum

$$x = x_1 - x_2 \tag{13}$$

reprezintă deplasarea sistemului faţă de poziţia de echilibru, iar

$$\dot{x} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \tag{14}$$

este viteza, iar

$$\ddot{x} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 \tag{15}$$

acceleraţia sistemului, înlocuind în relaţia (11) rezultă

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{\mu} + \omega_0^2\right)x = 0, \qquad (16)$$

care constituie *ecuaţia de mişcare* a sistemului dat.

Efectuând notaţia $\frac{k}{\mu} + \omega_0^2 = \omega^2$, unde ω este *pulsaţia proprie de oscilaţie*, obţinem

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \qquad (17)$$

Cum

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu} + \omega_0^2} \qquad (18)$$

şi totodată întrucât

$$\omega = 2\pi\nu, \qquad (19)$$

unde ν este *frecvenţa proprie de oscilaţie* a sistemului mecanic considerat, prin egalare $\sqrt{\frac{k}{\mu} + \omega_0^2} = 2\pi\nu$, vom găsi

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu} + \omega_0^2}. \qquad (20)$$

În cazul particular când cele două corpuri au masa identică, notată m, şi sunt legate atât între ele, cât şi de pereţii laterali prin resorturi cu aceeaşi constantă de elasticitate k vom afla direct, din relaţiile deduse anterior, ecuaţia de mişcare şi perioada de oscilaţie a sistemului.

Utilizând relaţiile (12′), (16) şi (18) în care înlocuim

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{şi} \quad \mu = \frac{m}{2} \qquad (21)\ (22)$$

găsim *ecuaţia de mişcare* a sistemului considerat:

$$\ddot{x} + \frac{3k}{m}x = 0 \quad \text{sau} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (23)\ (23')$$

unde s-a utilizat notaţia $\omega^2 = \frac{3k}{m}$, ω fiind pulsaţia proprie de oscilaţie în acest caz.

Cum $\omega = \frac{2\pi}{T}$, unde T este *perioada proprie de oscilaţie,* prin egalare $\sqrt{\frac{3k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$, rezultă

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}. \qquad (24)$$

Problema IV.4

Să se găsească ecuaţia de mişcare pentru un sistem format din două corpuri identice, cu masa m, prinse între ele prin două resorturi, legate fie în serie, fie în paralel şi având fiecare constanta de elasticitate k, dacă asupra unuia dintre corpuri acţionează o forţă excitatoare de forma $F_0 \cos \varpi t$.

R:

În scopul aflării ecuaţiei de mişcare a sistemului se utilizează *metoda separării corpurilor*.

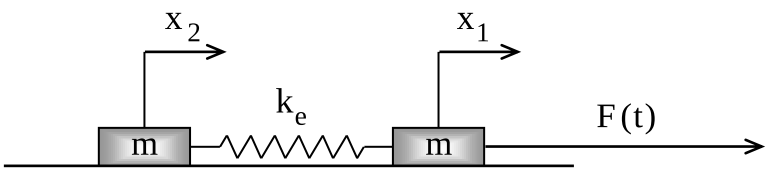
Considerăm că sistemul oscilează în lungul axei Ox şi, notând cu x_1 şi x_2 deplasările corpurilor faţă de poziţiile lor de echilibru, scriem pentru fiecare corp ecuaţia fundamentală a dinamicii.

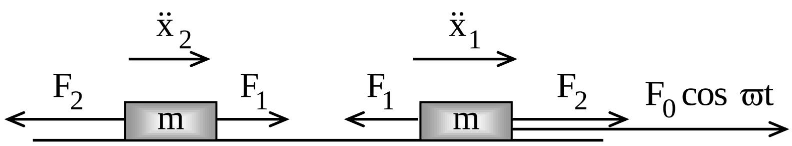
Astfel, avem

$$m\ddot{x}_1 = F_2 - F_1 + F_0 \cos \varpi t \qquad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 = F_1 - F_2, \qquad (2)$$

unde $F(t) = F_0 \cos \varpi t$ este forţa excitatoare periodică care variază armonic în timp, F_1, respectiv F_2 reprezintă forţele cu care un corp acţionează asupra celuilalt datorită prezenţei resortului, iar $\ddot{x}_1$ şi $\ddot{x}_2$ acceleraţiile corpurilor.





Cu

$$F_1 = k_e x_1 \quad \text{şi} \quad F_2 = k_e x_2,$$

relaţiile (1) şi (2) devin

$$m\ddot{x}_1 = k_e x_2 - k_e x_1 + F_0 \cos \varpi t = -k_e (x_1 - x_2) + F_0 \cos \varpi t \qquad (3)$$

$$m\ddot{x}_2 = k_e x_1 - k_e x_2 = k_e (x_1 - x_2) \qquad (4)$$

sau

$$m\ddot{x}_1 + k_e (x_1 - x_2) = F_0 \cos \varpi t \qquad (5)$$

$$m\ddot{x}_2 - k_e (x_1 - x_2) = 0. \qquad (6)$$

Efectuând diferenţa relaţiilor (5) şi (6), obţinem

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 2k_e(x_1 - x_2) = F_0 \cos \varpi t, \tag{7}$$

iar împărţind relaţia cu m scriem

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \frac{2k_e}{m}(x_1 - x_2) = \frac{F_0}{m} \cos \varpi t. \tag{8}$$

Deplasarea sistemului faţă de poziţia de echilibru va fi:

$$x = x_1 - x_2 \tag{9}$$

şi, în consecinţă, $\dot{x} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$ este viteza, iar

$$\ddot{x} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 \tag{10}$$

este acceleraţia sistemului.

Înlocuind relaţia (10) în (8), obţinem

$$\ddot{x} + \frac{2k_e}{m} x = q \cos \varpi t, \tag{11}$$

cu $q = \frac{F_0}{m}$, care reprezintă *ecuaţia de mişcare* a sistemului considerat.

În general, pentru legarea în serie, respectiv pentru legarea în paralel a n resorturi avem formulele:

$$\frac{1}{k_s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} \quad \text{şi} \quad k_p = \sum_{i=1}^{n} k_i, \tag{12) (13}$$

şi pentru n = 2

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \text{şi} \quad k_p = k_1 + k_2, \tag{14) (15}$$

iar când $k_1 = k_2 = k$ obţinem

$$\frac{1}{k_s} = \frac{2}{k} \quad \text{şi deci} \quad k_s = \frac{k}{2} \tag{16) (16'}$$

$$k_p = 2k. \tag{17}$$

Prin urmare, constanta de elasticitate echivalentă a legării resorturilor în serie sau în paralel va fi notată k_{es} sau k_{ep}, unde

$$k_{es} = \frac{k}{2} \quad \text{şi} \quad k_{ep} = 2k. \tag{18) (19}$$

Revenind la relaţia (11), efectuăm următoarele notaţii în care înlocuim şi expresiile (18) şi (19):

$$\omega_{0s}^2 = \frac{2k_{es}}{m} = \frac{k}{m} \quad \text{şi} \quad \omega_{0p}^2 = \frac{2k_{ep}}{m} = \frac{4k}{m}, \tag{20) (21}$$

deci

$$\omega_{0p}^2 = 4\frac{k}{m} = 4\omega_{0s}^2, \quad \text{deci} \quad \omega_{0p} = 2\omega_{0s}, \qquad (22)\ (23)$$

cu $\omega_{0p} > \omega_{0s}$, unde ω_{0s} şi ω_{0p} sunt *pulsaţiile proprii de oscilaţie* a sistemului când cele două corpuri având masa m sunt prinse între ele prin două resorturi identice, cu constanta de elasticitate k, legate fie în serie, fie în paralel.

Astfel, pentru fiecare din cele două cazuri, rezultă *ecuaţia de mişcare a oscilatorului neamortizat care efectuează oscilaţii forţate*:

$$\ddot{x} + \omega_{0s}^2 x = q \cos \varpi t, \qquad (24)$$

respectiv

$$\ddot{x} + \omega_{0p}^2 x = q \cos \varpi t. \qquad (25)$$