Capitolul II

Funcții de mai multe variabile.

II.1 Funcții de mai multe variabile: limite și continuitate

II.1.1 Topologie pe $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$.

- Fie planul $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$. Definim *bila* centrată în punctul $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de rază $r > 0$ astfel:

$$B((a,b),r) \stackrel{def}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \|(x,y)-(a,b)\|_2 < r\right\},$$

  unde $\|(x,y)-(a,b)\|_2 \stackrel{def}{=} \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ se numește *norma euclidiană* pe $\mathbb{R}^2$.

- Considerăm planul $\mathbb{R}^2$ și fie punctul $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ fixat. O mulțime $V \subset \mathbb{R}^2$ se numește *vecinătate* a punctului a dacă $\exists r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset V$.

- O mulțime $D \subset \mathbb{R}^2$ se numește mulțimea *deschisă* dacă este vecinătate pentru orice punct al ei.

- Complementara unei mulțimi deschise se numește mulțimea *închisă*.

- O mulțime $M \subset \mathbb{R}^2$ se numește *mărginită* dacă există un număr $d > 0$ astfel încât, $\forall x \in M$, $x = (x_1, x_2)$ avem: $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \leq d$.

- $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime închisă și mărginită se numește mulțime *compactă*.

- Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime și $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ se numește punct *interior* al lui D dacă $\exists r_0 > 0$ astfel încât $B(a, r_0) \subset D$. Mulțimea punctelor interioare lui D formează *interiorul* lui D, notat cu $\overset{\circ}{D}$.

- $a \in \mathbb{R}^2$ se numește punct de *acumulare* pentru $D \subset \mathbb{R}^2$, dacă $\forall r > 0$ avem $B(a,r) \setminus \{a\} \cap D \neq \emptyset$. Mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii D se numește mulțimea *derivată* a lui D, notată cu D'.

- $a \in \mathbb{R}^2$ se numește punct de *aderență* pentru $D \subset \mathbb{R}^2$ dacă $\forall r > 0$ avem $B(a,r) \cap D \neq \emptyset$. Mulțimea punctelor de aderență pentru D se numește $\bar{D}$-aderență sau închiderea lui D.

- Se numește *frontiera* lui $D \subset \mathbb{R}^2$ mulțimea notată prin FrD sau ∂D egală cu: $FrD = \bar{D} \setminus \overset{\circ}{D} = \bar{D} \cap \overline{CD}$.

- Fie $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ și $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Numim distanța de la a la b, numărul pozitiv definit prin

$$d(a,b) = \|a-b\|_2 = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2} = \|(a_1,a_2) - (b_1,b_2)\|_2.$$

II.1.2 Proprietățile distanței (metricei)

i) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \equiv b \Leftrightarrow a_1 = b_1$ și $a_2 = b_2$.

ii) $d(a,b) \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^2$.

iii) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}^2$-inegalitatea triunghiului.

- $(\mathbb{R}^2, d)$ se numește *spațiu metric.*

- Numim *topologie* pe $\mathbb{R}^2$ și o notăm cu $\mathcal{T}$, o familie de mulțimi deschise $\mathcal{T} = (D_i)_{i\in I}$ cu $D_i \subset \mathbb{R}^2$ care îndeplinește următoarele condiții: i) $\emptyset$ și $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$; ii) $\bigcup\limits_{i\in I} D_i \in \mathcal{T}$; iii) $\bigcap\limits_{j\in J} D_j \in \mathcal{T}$ cu J finită. $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ se numește *spațiu topologic.*

- Metrica pe $\mathbb{R}^2$ induce o topologie pe $\mathbb{R}^2$.

- Definim bila pe $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$.

Fie $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $r > 0 \Rightarrow$

$$B(a,r) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2} < r\right\}$$

$a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ și $r > 0$:

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x-a\|_2 < r\}$$

unde $\|x-a\|_2 \overset{def}{=} \sqrt{(x_1-a_1)^2 + \dots (x_n-a_n)^2}$. Celelalte definiții se păstrează.

II.1.3 Funcții de mai multe variabile. Limite și continuitate

Definiţia II.1.1. *Fie* $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D'$ *și* $f : D \to \mathbb{R}$. *Există* $l = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ *dacă:* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât* $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2 < \delta_\varepsilon$ *implică* $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

l *se numește* limita globală *a lui* f *în* (x_0, y_0).

Considerăm *limitele iterate*
$\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ și respectiv $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$.
Avem proprietățile:

1. Există l =limita globală, există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ și $\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ atunci există limitele iterate și acestea sunt egale cu l.

2. Dacă există limitele iterate și nu sunt egale atunci l nu există.

3. E posibil ca limitele iterate să fie egale, fără ca limita globală l să existe.

Se poate generaliza la funcție de n variabile.

Definiţia II.1.2. *Funcția* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *este continuă în* $(x_0, y_0) \in D$ *dacă există* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Teorema II.1.3. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *este continuă în* $(x_0, y_0) \in D$ *dacă oricare ar fi șirurile reale* $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *cu* $(x_n, y_n) \in D$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ *rezultă* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)$.

Definiţia II.1.4. *Fie* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *și* $(x_0, y_0) \in D$. *Funcția* f *este* continuă parțial *în raport cu variabila* x *dacă funcția* $f(x, y_0)$ *este continuă în punctul* x_0*; dacă este continuă* $f(x_0, y)$ *în punctul* y_0 *spunem că* f *este continuă parțial în raport cu variabila* y.

Definiţia II.1.5. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *se numește continuă pe* D *dacă este continuă în fiecare punct din* D.

Propoziţia II.1.6. *Dacă* f *este continuă atunci* f *continuă parțial în raport cu fiecare variabilă. Reciproc, nu.*

Definiţia II.1.7. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *se numește uniform continuă pe* D *dacă* $\forall \varepsilon$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât* $\forall (x_1, y_1)$ *și* $(x_2, y_2) \in D$ *cu* $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_2 < \delta_\varepsilon$ *rezultă* $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$.

Propoziţia II.1.8. *f uniform continuă pe D atunci f continuă pe D. Reciproc nu.*

Propoziţia II.1.9. *$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continuă pe D =mulțime închisă și mărginită (compactă) în $\mathbb{R}^2$. Atunci f este uniform continuă pe D.*

Observaţia II.1.10. Operațiile cu funcții continue de două variabile duc la funcții continue. Se poate generaliza pentru n variabile.

II.1.4 Aplicații

Studiati continuitatea următoarelor funcții:

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Soluție: $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\to} (0,0)$; $f(x_n,y_n) = 0 \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$(x_n', y_n') = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\to} (0,0)$ $f(x_n', y_n') = \dfrac{\frac{2}{n}}{\frac{2}{n^2}} = n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ atunci nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0} f(x,y)$, deci f continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. □

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Soluție: f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{x^3y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \leq \frac{|x^3|y^2}{x^2y^2} = |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$= \|(x,y)-(0,0)\|_2 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0 \Rightarrow f$ continuă pe $\{(0,0)\}$.

Deci f continuă pe $\mathbb{R}^2$. □

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Soluție: $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=mx^2}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx^4}{x^4+m^2x^4} = \dfrac{m}{m^2+1} \Rightarrow$ limita în (0,0) a lui f depinde de cum tinde (x,y) la $(0,0)$, deci nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, deci f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. □

4. $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluție:

$|f(x,y)|\leq(x^2+y^2)=\|(x,y)-(0,0)\|^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ continuă în $(0,0)\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}^2$. □

5. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluție:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx^2}} f(x,y)=\dfrac{m}{1+m^2}\Rightarrow$ nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, atunci f continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. □

6. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluție:

$|f(x,y)-f(0,0)|=\dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2}\leq\dfrac{x^2|y|}{|x||y|}=|x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)=0\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}^2$. □

7. $f(x,y)=\begin{cases} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, & x>0 \text{ și } y>0\\ 1, & x=0 \text{ și } y=0\end{cases}$

Soluție:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}=e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}$$

$$\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq\frac{xy}{\sqrt[4]{xy}}=x^{\frac{3}{4}}\cdot y^{\frac{3}{4}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=e^0=1$$

$=f(0,0)\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}^2$. □

II.2 Derivate parțiale. Diferențiabilitate.

Definiţia II.2.1. *$f:U=\overset{\circ}{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ și $(a,b)\in U$ fixat. Dacă există limitele și sunt finite*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=f'_x(a,b)$$

$$\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=f'_y(a,b)$$

atunci f are derivate parțiale de ordinul unu în (a,b) în raport cu x, respectiv y.

Definiţia II.2.2. *Dacă f are derivate parțiale de ordinul unu în orice punct $(a,b)\in U$, atunci există $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}:U\to\mathbb{R}$.*

Observaţia II.2.3. Regulile de calcul pentru f'_x și f'_y sunt aceleași ca regulile de calcul din $\mathbb{R}$.

Definiţia II.2.4. *$f:U=\overset{\circ}{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ și $(a,b)\in U$ fixat. Atunci f este diferențiabilă în (a,b) dacă există $df(a):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ liniară și continuă astfel încât*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-f(a,b)-df(a)(x-a,y-b)}{\|(x,y)-(a,b)\|_2}=0.$$

Propoziţia II.2.5. *i) $df(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,\mathrm{d}\,x+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,\mathrm{d}\,y$, unde $\mathrm{d}\,x,\mathrm{d}\,y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sunt proiecțiile canonice liniare și continue.*

ii) $df(a,b)(x-a,y-b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$.

iii) f diferențiabilă în (a,b) atunci f continuă în (a,b)

Observaţia II.2.6. f diferențiabilă pe U dacă f diferențiabilă în orice punct și operațiile cu funcții diferentiabile duc la funcții diferențiabile pe U.

Definiţia II.2.7. *Fie $f:U=\overset{\circ}{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ care are $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ definite într-o vecinătate deschisă $\subset U$ a lui (a,b) punct fixat în U. Atunci f are derivate parțiale de ordinul 2 în (a,b) dacă există*

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{x-a}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)=f''_{x^2}(a,b)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b);$$

$$\lim_{y\to b}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{y-b}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)=f''_{y^2}(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b);$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,b)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{x-a}=f''_{xy}(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b).$$

$$\lim_{y\to b}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{y-b}=f''_{xy}(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b).$$

Definiţia II.2.8. *f este de două ori diferențiabilă dacă f este diferențiabilă într-o vecinătate V a lui (a,b) și $\mathrm{d}\,f : V = \overset{\circ}{V} \subset U \to L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ este diferențiabilă în (a,b), unde $L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ este spațiul aplicațiilor liniare și continue de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}$.*

Observaţia II.2.9. Fie $d^2f(a,b)$ o aplicație biliniară, continuă și $d^2f(a,b) = f''_{x^2}(a,b)\,\mathrm{d}\,x^2 + f''_{xy}(a,b)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + f''_{yx}(a,b)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x + f''_{y^2}(a,b)\,\mathrm{d}\,y^2$.

Observaţia II.2.10. $\mathrm{d}\,x^2(x-a,y-b)^2=(x-a)^2$, $\mathrm{d}\,x^2((a,b),(c,d))=ac$, $\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y(x-a,y-b)^2=(x-a)(y-b)$, $\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x(x-a,y-b)^2=(y-b)(x-a)$ și

$$\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y((a,b),(c,d))=\mathrm{d}\,x(a,b)\cdot\mathrm{d}\,y(c,d)=ad.$$

Generalizare $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ are derivate parțiale de ordinul unu dacă există și este finită

$$\lim_{x_i\to a_i}=\frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)-f(a)}{x_i-a_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=f'_{x_i}(a),\ i=\overline{1,n},$$

$$\text{și }\ \mathrm{d}\,f(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,\mathrm{d}\,x_i.$$

Avem:

$$\mathrm{d}\,f : U\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\Rightarrow \mathrm{d}\,f(a)(x-a)=\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}(a)(x_i-a_i).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\lim_{x_i\to a_i}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)-\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)}{x_i-a_i},$$

$\forall i,j=\overline{1,n}$. Avem

$$d^2f(a)=\sum_{i,l=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\,\mathrm{d}\,x_i\,\mathrm{d}\,x_j;$$

$$d^2f(a)(x-a)^2=\sum_{i,j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(a)(x_i-a_i)(x_j-a_j)$$

unde $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ există pe o vecinătate a lui a;

Teorema II.2.11. ***Teorema lui Schwarz*** *(simetria derivatelor parțiale mixte).* $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de două ori diferențiabilă în* $a \in U$ *astfel încât există* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\forall i \neq j$ *pe o vecinătate a lui* a *și sunt continue în* a. *Atunci* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $\forall i \neq j$ $i, j = \overline{1, u}$.

Observaţia II.2.12. În cazul $n = 2$

$$d^2 f(a, b) = f''_{x^2}(a, b)\,\mathrm{d}\,x^2 + 2f''_{xy}(a, b)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + f''_{y^2}(a, b)\,\mathrm{d}\,y^2.$$

Observaţia II.2.13. Derivate parțiale de ordin m în raport cu $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ în $a \in U$. Presupunem că există derivate parțiale de ordinul $m - 1$ într-o vecinătate a lui a. Dacă există și este finită

$$\begin{aligned}\lim_{x_{i_1} \to a_{i_1}} &= \frac{\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}(a_1, \ldots, x_{i_1}, \ldots, a_m) - \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}(a)}{x_{i_1} - a_{i_1}} \\ &= \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(a).\end{aligned}$$

Definiţia II.2.14. *Fie* $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*; funcția* f *este de* $(m - 1)$ *ori diferențiabilă într-o vecinătatea a lui* $a \in U$ *și* $\mathrm{d}^{m-1} f$ *este diferențiabilă în* a. *Atunci spunem că* f *este de* m *ori diferențiabilă în* a.

Teorema II.2.15. $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funcția este de* m *ori diferențiabilă în* $a \in U$ *astfel încât există derivate parțiale de ordin* m *mixte definite într-o vecinătate a lui* a *și sunt continue în* a. *Atunci:*

$$d^m f(a) = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}(a)\,\mathrm{d}\,x_{i_1} \ldots \mathrm{d}\,x_{i_m}$$

și

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}(a) = \frac{\partial^m f}{\partial x_{\sigma(i_1)} \partial x_{\sigma(i_2)} \ldots \partial x_{\sigma(i_m)}}(a),$$

oricare ar fi σ *permutare a mulțimii* $\{i_1, \ldots, i_m\}$.

Generalizare

Observaţia II.2.16. Cu Schwarz avem

$$\mathrm{d}^2 f(a, b) = f''_{x^2}(a, b)\,\mathrm{d}\,x^2 + 2f''_{xy}(a, b)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + f''_{y^2}(a, b)\,\mathrm{d}\,y^2.$$

$$\mathrm{d}^2 f(a,b,c) = f''_{x^2}(a,b,c)\,\mathrm{d}\,x^2 + f''_{y^2}(a,b,c)\,\mathrm{d}\,y^2 + f''_{z^2}(a,b,c)dz^2$$
$$+2f''_{xy}(a,b,c)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + 2f''_{yz}(a,b,c)\,\mathrm{d}\,ydz + 2f''_{zx}(a,b,c)dz\,\mathrm{d}\,x.$$

$$\mathrm{d}^3 f(a,b) = f'''_{x^3}(a,b)\,\mathrm{d}\,x^3 + 3f'''_{x^2y}(a,b)\,\mathrm{d}\,x^2\,\mathrm{d}\,y + 3f'''_{xy^2}(a,b)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y^2 + f'''_{y^3}(a,b)\,\mathrm{d}\,y^3$$

unde

$$\mathrm{d}^3 f(a,b) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}\,x + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}\,y\right)^{(3)} f(a,b)$$

$$f'''_{x^2y}(a,b)\,\mathrm{d}\,x^2\,\mathrm{d}\,y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

$$f'''_{xy^2}(a,b)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Teorema II.2.17. *a) Fie $f \in C^1(U)$ - funcție diferențiabilă și $\mathrm{d}\,f$ continuă $\Leftrightarrow$ f funcție continuă și $\exists f'_x, f'_y$ continue pe U.*

b) Fie $f \in C^2(U)$ - funcție de două ori diferențiabilă cu $df, d^2 f$ continue (sau $f \in C^1(U)$ și de două ori diferențiabilă cu $\mathrm{d}^2\,f$ continuă) $\Leftrightarrow$ f continuă și $\exists f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$ continue pe U.

Definiţia II.2.18. *Fie $F : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ cu $x \in U$ și $f_i : U \to \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1,n}$ funcții care au derivate parțiale în raport cu fiecare variabilă în punctul $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$, fixat. Considerăm matricea $m \times n$ $J_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$ numită matricea Jacobi a lui F în a.*

Dacă $m = n$ avem $\det J_F(a) = \dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a)$ care se numește jacobianul *sau determinantul funcțional al funcțiilor $f_1, \ldots, f_n$ în punctul a.*

Definiţia II.2.19. *$F : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ cu $a \in U$. Atunci F este diferențiabilă în a dacă funcțiile $f_1, \ldots, f_m$ sunt diferențiabile în a și avem*

$$\mathrm{d}\,F(a) = (\mathrm{d}\,f_1(a), \ldots, \mathrm{d}\,f_m(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\,x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}\,x_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{d}\, f_1(a) \\ \vdots \\ \mathrm{d}\, f_m(a) \end{pmatrix}.$$

Teorema II.2.20. *$F : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to V = \overset{\circ}{V} \subset \mathbb{R}^m$, diferențiabilă în $a \in U$, $G : V = \overset{\circ}{V} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, diferențiabilă în $b = F(a)$. Atunci $G \circ F : U \to \mathbb{R}^p$ este diferențiabilă în a și avem relațiile:*

i) $\mathrm{d}(G \circ F)(a) = \mathrm{d}\, G(b) \circ \mathrm{d}\, F(a)$*;*

ii) $J_{G\circ F}(a) = J_G(b) \cdot J_F(a)$.

Teorema II.2.21. *$F : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diferențiabilă în $a \in U$ atunci f este continuă în a. Reciproc nu.*

Definiţia II.2.22. *Fie $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diferențiabilă în $a \in U$. Atunci oricare ar fi vectorul $\overline{v} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$* avem derivata lui f în a după direcția $\overline{v}$ *definită prin:*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{v}}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\|\overline{v}\|} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Avem $\frac{s_i}{\|\overline{v}\|} = \cos d_i$, $i = \overline{1,n}$ cosinusurile directoare ale lui $\overline{v}$.

Observaţia II.2.23. Regulile de derivare parțială sunt aceleași cu regulile de derivare pentru funcții reale.

De reținut.

Fie $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Avem
- f este de clasă $C^0(U)$ dacă este continuă pe U;
- f este de clasă $C^1(U)$ dacă f este continuă pe U, există funcții $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1,n}$ funcții continue pe U;
- f este de clasă $C^2(U)$ dacă $f \in C^1(U)$ și $\forall i = \overline{1,n}$ avem $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1(U) \Leftrightarrow$ există $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, $\forall i, j = \overline{1,n}$ funcții continue pe U.

Notăm: $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \overset{not}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ derivata parțială de ordinul doi în raport cu x_i și x_j, $\forall 1 \le i, j \le n$.

Observații.

- Fie $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Atunci: $f \in C^2(U) \Leftrightarrow$ f continuă pe U, $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ continue pe U, $\forall i = \overline{1,n}$, $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ continue, $\forall 1 \leq i, j \leq n$.
- $f \in C^k(U)$ $(k \geq 3)$ dacă f diferențiabilă de (k) ori și $\mathrm{d}\, f, \dots, \mathrm{d}^k\, f$ continue pe U $\Leftrightarrow$ f continuă pe U și există $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}$, $\forall 1 \leq m \leq k$ continue pe U.

Teorema lui Schwartz. $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasă $C^1(U)$. Dacă f este de două ori diferențiabilă pe U și derivatele mixte sunt continue pe U, atunci pentru oricare $a \in U$ avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \text{ pentru orice } 1 \leq i, j \leq n.$$

II.2.1 Exemple

1. Folosind definiția calculați:

   i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, \dfrac{\pi}{2})$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$ pentru $f(x, y) = e^{\sin xy}$;

   ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1)$ pentru $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   Soluție:

   i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x, \frac{\pi}{2}) - f(1, \frac{\pi}{2})}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{\sin \frac{\pi x}{2}} - e}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \cdot e^{\sin \frac{\pi x}{2}} = 0.$

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(1, y) - f(1, 0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{e^{\sin y} - 1}{y} = \lim_{y \to 0} \cos y e^{\sin y} = 1$$

   ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(1, 1) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)}{x - 1}$

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 1) = \lim_{y \to 1} \frac{f(x, y) - f(x, 1)}{y - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + 1}}{y - 1}$$

   $$= \lim_{y \to 1} \frac{(y - 1)(y + 1)}{(y - 1)\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + 1}\right)} = \frac{2}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}}{(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{2(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{4} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1}{x+1)} x - 1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

□

2. Calculați derivata funcției $f(x,y,z) = 2x^2 - 3y^2 + 6xyz$ în punctul $M(1,1,0)$ după direcția $\overrightarrow{MN}$, $N(4,-2,3)$.

Soluție: $\overrightarrow{MN} = \overline{v} = (3,-3,3) \Rightarrow \|\overline{v}\| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ cosinusurile directoare ale direcției MN.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 6yz,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -6y + 6xz,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 6xy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0) = 6,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0) = -6,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0) = 6.$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0)\cos\gamma$$

$$= \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}.$$

□

3. Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi pentru

$$f(x,y) = xy \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \text{ cu } xy \neq 1$$

.

Soluție: $$\frac{\partial f}{\partial x} = y \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + xy \frac{\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}$$

$$= y \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + xy \frac{\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}}{\frac{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2}{(1-xy)^2}}$$

$$= y \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \frac{xy(1+y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \frac{xy}{1+y^2}.$$

Înlocuim y prin x și x prin y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \frac{xy}{1+x^2}.$$

□

4. Derivatele parțiale de ordinul doi pentru $f(x, y) = \ln(x + y^2)$.

Soluție: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{x+y^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{-1}{(x+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\dfrac{2y}{x+y^2}\right)'_x = \dfrac{-2y}{(x+y^2)^2}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\dfrac{2y}{x+y^2}\right)'_y = \dfrac{2(x+y^2)-4y^2}{(x+y^2)^2} = \dfrac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$. □

5. Calculați $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ și $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ pentru $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ unde $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = e^{xy}$. Calculați $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Soluție: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} = ye^{xy}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = xe^{xy}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} 2x + ye^{xy} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + xe^{xy} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + ye^{xy} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + 2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + y^2 e^{xy} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$

$= 2x\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} 2x + ye^{xy} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}\right) + ye^{xy}\left(2x \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + ye^{xy} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right) + 2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} +$
$+ y^2 e^{xy} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4x^2 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 4xye^{xy} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + y^2 e^{2xy} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + 2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + y^2 e^{xy} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-2y \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + xe^{xy} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = -2y\left(2x \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + ye^{xy} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}\right)$

$+ xe^{xy}\left(2x \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + ye^{xy} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right) + (1+xy)e^{xy} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 2(x^2-y^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + xye^{2xy}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + (1+xy)e^{xy}\frac{\partial \varphi}{\partial v}. \square$$

6. Calculați $\mathrm{d}\, f$ și $\mathrm{d}^2\, f$ pentru $f(x,y,z) = \cos(x+2y+3z)$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Soluție: $\mathrm{d}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}\, x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}\, y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}\, z$ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x+2y+3z)(\mathrm{d}\, x + 2\,\mathrm{d}\, y + 3\,\mathrm{d}\, z)$ în general $\mathrm{d}^2\, f(a) = \sum\limits_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\,\mathrm{d}\, x_i\,\mathrm{d}\, x_j \Rightarrow$

$$d^2 f(a) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,\mathrm{d}\, x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,\mathrm{d}\, x_n\right)^{(2)} f(a).$$

$n = 3 \Rightarrow \mathrm{d}^2\, f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\, x^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}\, y^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,\mathrm{d}\, z^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}\, x\,\mathrm{d}\, y + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\,\mathrm{d}\, y\,\mathrm{d}\, z + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\,\mathrm{d}\, z\,\mathrm{d}\, x = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}\, x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}\, y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^{(2)}.$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos(x+2y+3z)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\cos(x+2y+3z)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -9\cos(x+2y+3z)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2\cos(x+2y+3z)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -6\cos(x+2y+3z)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -3\cos(x+2y+3z)$.

$\mathrm{d}^2\, f = -\cos(x+2y+3z)(\mathrm{d}\, x^2 + 4\,\mathrm{d}\, y^2 + 9\,\mathrm{d}\, z^2 + 4\,\mathrm{d}\, x\,\mathrm{d}\, y + 12\,\mathrm{d}\, y\,\mathrm{d}\, z + 6\,\mathrm{d}\, z\,\mathrm{d}\, x) \Rightarrow$

$\mathrm{d}^2\, f = -\cos(x+2y+3z)(\mathrm{d}\, x + 2\,\mathrm{d}\, y + 3\,\mathrm{d}\, z)^2.$ $\square$

7. Să se afle matricea Jacobi pentru funcția $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x+y^2, xe^y)$. Calculați $\mathrm{d}\, F$.

Soluție: $f_1(x,y) = x+y^2$, $f_2(x,y) = xe^y$

$$J_F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ e^y & xe^y \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{d}\, F = J_F \begin{pmatrix} \mathrm{d}\, x \\ \mathrm{d}\, y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ e^y & xe^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\, x \\ \mathrm{d}\, y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\, x + 2y\,\mathrm{d}\, y \\ e^y\,\mathrm{d}\, x + xe^y\,\mathrm{d}\, y \end{pmatrix}. \square$$

8. Să se studieze diferențiabilitatea în $(0,0)$ a funcției

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x-y}{x+y}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

calculând $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ și verificând continuitatea în $(0,0)$ a celor două derivate parțiale de ordinul unu.

Soluție: $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow$
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(\dfrac{x^2y - xy^2}{x+y}\right)'_x = \dfrac{(2xy-y^2)(x+y) - x^2y + xy^2}{(x+y)^2}$
$= \dfrac{2x^2y + 2xy^2 - xy^2 - y^3 - x^2y + xy^2}{(x+y)^2}$

$$(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2y + 2xy^2 - y^4}{(x+y)^2} = y\frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0.$$

Deci: $\dfrac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y \cdot \frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{x^2y - xy^2}{x+y}\right)'_y = \frac{(x^2-2xy)(x+y) - x^2y + xy^2}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{x^3 + x^2y - 2x^2y - 2xy^2 - x^2y + xy^2}{(x+y)^2} = \frac{x^3 - 2x^2y - xy^2}{(x+y)^2}$$

$$= x\frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x+y)^2}.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x \cdot \frac{x^2-2xy-y^2}{(x+y)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Studiem continuitatea pentru $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ și $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Avem $|x^2 \pm 2xy - y^2| \leq M(x+y)^2$ cu M constantă pozitivă.

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = |y|\frac{|x^2+2yx-y^2|}{(x+y)^2} \leq M|y| \leq M\,\|(x,y)-(0,0)\|$
$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}$ continuă în $(0,0) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}$ continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Analog, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Deci f are *derivate parțiale de ordinul unu continue* pe $\mathbb{R}^2$; f este *continuă* pe $\mathbb{R}^2$.

$$|f(x,y)-f(0,0)| = |xy|\frac{|x-y|}{|x+y|} \approx |xy| \leq x^2+y^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0)$$

Atunci f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$ deci f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$. □

De reținut

- $f \in C^1(U)$ atunci f diferențiabilă pe U (în orice punct din U). Reciproc, nu.
- f este două diferențiabilă în a, dacă:

  - f diferențiabilă într-o vecinătate a lui a;

  - $\mathrm{d}\,f$ este diferențiabilă în a.
- f este de două ori diferențiabilă pe U dacă f diferențiabilă pe U și $\mathrm{d}\,f$ este diferențiabilă pe U; $\mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}\,f)$.
- $f \in C^2(U) \Rightarrow f$ este de două ori diferențiabilă pe U. Reciproc, nu.
- $\mathrm{d}\,f : U \to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $\mathrm{d}\,f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liniară, continuă.

  $\mathrm{d}^2 f : U \to L_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $\mathrm{d}^2 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ biliniară, continuă.
- Aproximarea prin diferențială:

$$f(x) \simeq f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot(x_i-a_i).$$

9. Cu ajutorul diferențialei unei funcții de mai multe variabile, calculați $(1.03)(2.02)^2(3.05)^3$

Soluție: $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $a = (a_1,a_2,a_3) = (1,2,3)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3$; $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) = 4 \cdot 27 = 108$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) = 2 \cdot 2 \cdot 27 = 108$; $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,2,3) = 3 \cdot 4 \cdot 9 = 108$.

$f(1.03, 2.02, 3.05) \approx f(1,2,3) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) \cdot (1.03-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) \cdot (2.02-1) + + \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,2,3) \cdot (3.05-1) = 108(1 + 0.03 + 0.02 + 0.05) = 108 \cdot 1.1 = 118.8$. □

II.3 Extreme locale pentru funcții de mai multe variabile. Funcții implicite.

Definiţia II.3.1. *Fie $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe U și fie $a \in U$. Spunem că punctul a este punct de* extrem local *pentru funcția f dacă există o bilă $B(a,r) = \{x \in U | \|x - a\|_2 < r\} \subset U$ astfel încât pentru orice $x \in B(a,r)$ avem relația $f(x) - f(a) \geq 0$ sau $f(x) - f(a) \leq 0$ ceea ce înseamnă că a este minim local sau maxim local.*

Teorema II.3.2. *Fie $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe U și a un punct de extrem local pentru f. Atunci* $\mathrm{d}\, f(a) = 0$.

Definiţia II.3.3. *Un punct $a \in U$ se numește punct* critic *sau* staționar *pentru funcția $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferențiabilă pe U dacă* $\mathrm{d}\, f(a) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \ldots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$.

Teorema II.3.4. *(Formula lui Taylor) Fie $f : U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $C^{n+1}(U)$ și fie $B(a,r) \subset U$. Atunci oricare ar fi $x \in B(a,r)$ există un punct intermediar ξ între a și x cu proprietatea*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\,\mathrm{d}\, f(a)(x-a) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(a)(x-a)^2 + \ldots$$

$$+\frac{1}{n!}\,\mathrm{d}^n f(a)(x-a)^n + \frac{1}{n+1!}\,\mathrm{d}^{n+1} f(\xi)(x-a)^{n+1}$$

unde primii $(n+1)$ termeni formează polinomul Taylor de ordinul n *în punctul a, iar ultimul termen este* restul *sub forma lui* Lagrange de ordinul n.