DREAPTA ȘI PLANUL ÎN SPAȚIU

II

1 Dreapta ca intersecție a două plane

Două plane distincte π_1 și π_2 se află într-una din următoarele două situații: sunt paralele sau au o dreaptă comună. În geometria analitică, cele două situații sunt identificate din ecuațiile generale ale celor două plane. Astfel, fie π_1 și π_2 planele de ecuații

$$\pi_1 : a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$\pi_2 : a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

Vectorul $\bar{v}_1=(a_1,b_1,c_1)$ este perpendicular pe planul π_1, iar vectorul $\bar{v}_2=(a_2,b_2,c_2)$ este perpendicular pe planul π_2. Dacă există $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât $\bar{v}_2=\lambda\cdot\bar{v}_1$, adică $a_2=\lambda a_1$, $b_2=\lambda b_1$, $c_2=\lambda\cdot c_1$, atunci vectorii $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ au aceeași direcție și, în consecință, planele π_1 și π_2 sunt paralele. (Fig 1)

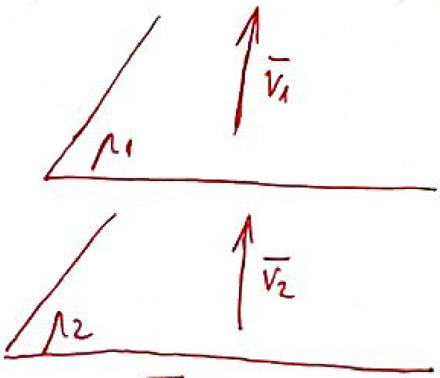

Fig 1

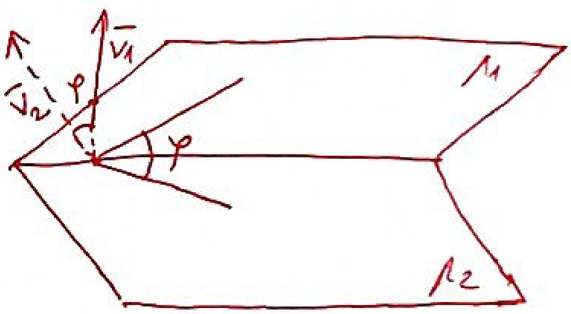

Fig 2.

Dacă vectorii $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ nu au aceeași direcție, adică $\bar{v}_2\neq\lambda\bar{v}_1$ pentru toți $\lambda\in\mathbb{R}$ (Fig 2), atunci planele π_1 și π_2 nu sunt paralele și fie d dreapta lor comună. Astfel spus, $d=\pi_1\cap\pi_2$. Ultima egalitate arată că

$$d=\{M(x,y,z)\in S_3 \mid M\in\pi_1 \text{ și } M\in\pi_2\}=$$
$$=\{M(x,y,z)\in S_3 \mid a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\}$$

Atunci, analitic dreapta d este prezentată scriind

$$d:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases} \qquad (1)$$

Să evidențiem un punct și direcția dreptei d dată prin relațiile (1).

(i) Ca să evidențiem un punct $M \in d$ să observăm că cel puțin unul dintre cei trei determinanți

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \text{ este nenul.}$$

Într-adevăr, dacă toți acești determinanți ar fi nuli, atunci: $a_1 b_2 = a_2 b_1$, $a_1 c_2 = a_2 c_1$, $b_1 c_2 = b_2 c_1$.
Cel puțin unul dintre numerele $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ este nenul deoarece condiția $\bar{v}_2 \neq \lambda \bar{v}_1$ pentru toți $\lambda \in \mathbb{R}$ conduce, pentru $\lambda = 1$, la $\bar{v}_2 \neq \bar{v}_1$, deci cel puțin un vector este nenul. Presupunem că $c_1 \neq 0$. Atunci

$$a_2 = \frac{c_2}{c_1} a_1, \quad b_2 = \frac{c_2}{c_1} \cdot b_1, \quad c_2 = \frac{c_2}{c_1} \cdot c_1$$

de unde $\bar{v}_2 = \frac{c_2}{c_1} \bar{v}_1$, contradicție cu ipoteza ($\bar{v}_2 \neq \lambda \bar{v}_1$).
Acum, să presupunem că: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Alegem o valoare $z_0 \in \mathbb{R}$ și rezolvând sistemul

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = d_1 - c_1 z_0 \\ a_2 x + b_2 y = d_2 - c_2 z_0 \end{cases}$$

se obțin soluțiile x_0, y_0. În consecință, punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in d$.

(ii) Din Fig 2, $d \perp \bar{v}_1$ și $d \perp \bar{v}_2$, deoarece $\bar{v}_1$ este normal lui π_1 și $\bar{v}_2$ este normal lui π_2. Deci $d \perp (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, unde $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ este planul vectorilor $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$.
Cum $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ este un vector normal planului $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ rezultă că direcția lui d este direcția vectorului $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$.
Efectuăm calculele și găsim direcția

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{k}$$

Așadar, dreapta d dată ca intersecția a două plane prin (1), poate fi descrisă folosind ecuația dreptei determinată de un punct și o direcție, respectiv

$$d: \frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad (2)$$

dacă toți determinanții sunt nenuli.

Exemplul 1: Fie d dreapta dată ca intersecția a două plane, respectiv $d: \begin{cases} 2x+4y-z+8=0 \\ x-y+3z+4=0 \end{cases}$

Considerând planele $\pi_1: 2x+4y-z+8=0$
$\pi_2: x-y+3z+4=0$, atunci $d=\pi_1\cap\pi_2$.

Aici $\bar v_1 = 2\bar i+4\bar j-\bar k$, iar $\bar v_2 = \bar i-\bar j+3\bar k$. Este clar că $\bar v_2$ nu este coliniar cu $\bar v_1$, deoarece $\frac{2}{1}\neq\frac{4}{-1}\neq\frac{-1}{3}$

Determinantul $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1\end{vmatrix} = -6\neq 0$

Pentru $z_0=0$, obținem: $\begin{cases} 2x+4y=-8 \\ x-y=-4 \mid\cdot 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y=-8 \\ 4x-4y=-16 \end{cases}$
$6x=-24 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0=-4$ și $-4-y=-4 \Rightarrow y_0=0$. Deci $M_0(-4,0,0)\in d$.

Folosind (2) ecuația lui d este:

$$d: \frac{x+4}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3\end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1\end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1\end{vmatrix}}$$, respectiv

$$d: \frac{x+4}{11} = \frac{y}{-7} = \frac{z}{-6}.$$

Exemplul 2: Fie d dreapta intersecție a planelor $\pi_1: 3x+4y-z+2=0$, $\pi_2: -x+3y+5z-7=0$.

Să determinăm parametrii directori ai lui d, un punct $M_0\in d$ și să scriem ecuația lui d ca ecuația dreptei ce conține un punct și are o direcție dată. Din enunț,

$$d: \begin{cases} 3x+4y-z+2=0 \\ -x+3y+5z-7=0 \end{cases}$$

Vectorii normali planelor π_1 și π_2 sunt $\bar v_1=(3,4,-1)$, respectiv $\bar v_2=(-1,3,5)$. Un vector director al lui d este

$$\bar v_1\times\bar v_2 = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 5\end{vmatrix} = 20\bar i+9\bar k+\bar j+4\bar k+3\bar i-15\bar j = \underset{l}{23\bar i}\underset{m}{-14\bar j}\underset{n}{+13\bar k}$$

deci parametrii directori sunt $(23,-14,13)$.

Pentru a obține un punct $M_0\in d$, se observă că $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3\end{vmatrix}\neq 0$, luăm $z_0=0$ și rezultă sistemul: $\begin{cases} 3x+4y=-2 \\ -x+3y=7 \mid\cdot 3\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x+4y=-2 \\ -3x+9y=21\end{cases} \Rightarrow y_0=\frac{19}{13}$ și $x_0=\frac{-34}{13} \Rightarrow M_0\left(-\frac{34}{13},\frac{19}{13},0\right)\in d$

$$d: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \Rightarrow d: \frac{x+\frac{34}{13}}{23} = \frac{y-\frac{19}{13}}{-14} = \frac{z}{13}$$

2 Unghiul a două drepte

Dacă d_1 și d_2 sunt două drepte în spațiu, atunci unghiul lor, notat $(\widehat{d_1, d_2})$ se determină astfel (vezi Fig 3):

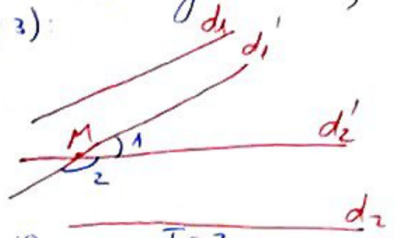

Fig 3

printr-un punct oarecare $M \in S_3$ se duc dreptele $d_1' \parallel d_1$ și $d_2' \parallel d_2$. Atunci

$$(\widehat{d_1, d_2}) = (\widehat{d_1', d_2'})$$

În figura 3 se observă că atât $\hat{M}_1$ cât și suplementul său $\hat{M}_2$ reprezintă unghiul dreptelor d_1' și d_2'

Acum, fie d_1, d_2 dreptele de ecuații $d_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$

$$d_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

Vectorii directori $\bar{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\bar{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ au aceeași direcție cu d_1 respectiv d_2

Atunci $(\widehat{d_1, d_2}) = (\widehat{\bar{v}_1, \bar{v}_2}) \Rightarrow \cos(\widehat{d_1, d_2}) = \dfrac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$

Exemplul 3:

Fie $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$; $d_2: \frac{x+2}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$

$$(l_1, m_1, n_1) = (2, 3, -1) ; (l_2, m_2, n_2) = (-4, 3, 2)$$

Atunci $\cos(\widehat{d_1, d_2}) = \dfrac{2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2+3^2+2^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{29}}$

3 Unghiul a două plane. Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Unghiul a două plane neparalele π_1 și π_2, notat $(\widehat{\pi_1, \pi_2})$ este unul din cele două unghiuri $\hat{M}_1$ sau $\hat{M}_2$ din Fig4.

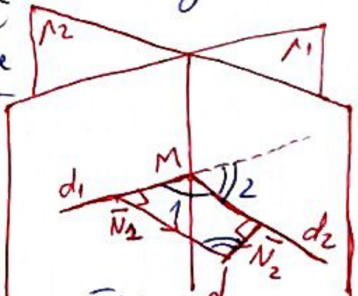

Fig4

Se consideră un punct M pe dreapta comună $d = \pi_1 \cap \pi_2$ celor două plane. Din M se duce în fiecare plan π_i câte o dreaptă d_i perpendiculară pe d, $i = 1, 2$. Atunci, $(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \hat{M}_1$ sau

$$(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \hat{M}_2$$

Se observă că, dacă N_1 și N_2 sunt doi vectori normali planelor π_1 și π_2, atunci $(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = (\widehat{N_1, N_2})$

Atunci, fie π_1, π_2 planele de ecuații

$$\pi_1: a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 ; \pi_2: a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

Deoarece vectorii normali celor două plane sunt $\vec{N}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ respectiv $\vec{N}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, rezultă

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

În mod similar, unghiul dintre dreapta $d: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ și planul $\rho: ax+by+cz+d=0$ este dat de:

$$\sin(\widehat{d,\rho}) = \frac{|a\cdot l+b\cdot m+c\cdot n|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Exemplul 4: Fie planele de ecuații $\rho_1: 2x-3y+z-5=0$; $\rho_2: -x+y+2z-3=0$ și dreapta de ecuație $d: \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-1}{2}$

Atunci $\cos(\widehat{\rho_1,\rho_2}) = \frac{2\cdot(-1)+(-3)\cdot 1+1\cdot 2}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}} = \frac{-3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = \frac{-3}{2\sqrt{21}}$

$$\sin(\widehat{d,\rho_1}) = \frac{|2\cdot 3+(-3)\cdot 5+1\cdot 2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+5^2+2^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{38}} = \frac{7}{2\sqrt{133}}$$

4 Distanța de la un punct la un plan

Dacă ρ este un plan și A un punct exterior planului ($A \notin \rho$), atunci $d(A,\rho)$ este lungimea segmentului $[AM]$, unde M este piciorul perpendicularei din A pe planul ρ.

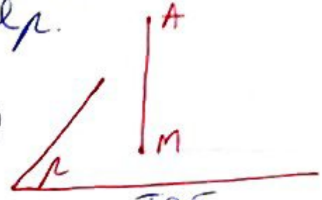

Fig 5.

Fie planul $\rho: ax+by+cz+d=0$ și punctul $A(x_0,y_0,z_0)$. Deoarece vectorul (a,b,c) este normal planului ρ rezultă că parametrii directori ai dreptei AM sunt (a,b,c) și ecuația lui AM este

$$AM: \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \text{ sau } AM: \begin{cases} x=x_0+\lambda a \\ y=y_0+\lambda b \\ z=z_0+\lambda c;\ \lambda\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Deoarece $\{M\} = \rho \cap AM$, coordonatele lui M verifică sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ x=x_0+\lambda a \\ y=y_0+\lambda b \\ z=z_0+\lambda c\end{cases} \Rightarrow a(x_0+\lambda a)+b(y_0+\lambda b)+c(z_0+\lambda c)+d=0$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$$

Lungimea lui $AM = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = \sqrt{(\lambda a)^2+(\lambda b)^2+(\lambda c)^2}$

$\Rightarrow AM = |\lambda|\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow AM = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$$\Rightarrow d(A,\rho) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Exemplul 5: Fie planul de ecuație: $\rho: 3x+2y-5z+6=0$ și $A(0,2,1)\notin\rho$ $(3\cdot 0+2\cdot 2-5\cdot 1+6\neq 0)$

$$d(A,\rho) = \frac{|3\cdot 0+2\cdot 2-5\cdot 1+6|}{\sqrt{3^2+2^2+(-5)^2}} = \frac{5}{\sqrt{38}}$$

$\boxed{5}$ Distanța de la un punct la o dreaptă

Distanța de la un punct M_0 la o dreaptă d este numărul pozitiv, notat $d(M_0,d)$, egal cu lungimea segmentului $[M_0E]$ (fig 6), unde E este piciorul perpendicularei dusă din M_0 pe d, în planul determinat de punctul M_0 și dreapta d.

Fie $M_0(x_0,y_0,z_0)$ și dreapta $d: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$

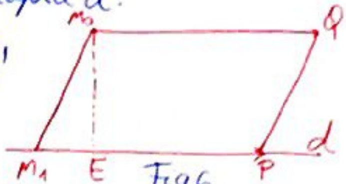

Fig 6

Fixăm un punct M_1 pe d.
Ecuația dreptei d evidențiază un astfel de punct, $M_1(x_1,y_1,z_1) \in d$.
Vectorul $\bar{v} = (l,m,n)$ fiind vector director al dreptei d, fie $P \in d$ astfel încât $\overrightarrow{M_1P} = \bar{v}$. Scriem aria paralelogramului M_1PQM_0 în două feluri și rezultă egalitatea:

$$\|\overline{M_1M_0} \times \overline{M_1P}\| = \|\overline{M_0E}\| \cdot \|\overline{M_1P}\|, \text{ altfel spus}$$

$$\|\overline{M_1M_0} \times \bar{v}\| = d(M_0,d) \cdot \|\bar{v}\|$$

Deci $d(M_0,d) = \frac{\|\overline{M_1M_0} \times \bar{v}\|}{\|\bar{v}\|}$, unde $M_1 \in d$.

Exemplul 6. Să determinăm distanța de la punctul $M_0(1,2,3)$ la dreapta $d: \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 4-5\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$

Din ecuațiile parametrice ale dreptei se obține:

$$d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-5}$$, deci un vector director al dreptei d este $\bar{v} = (3,1,-5)$. Un punct de pe d este $M_1(2,-1,4)$, adică punctul pentru care toate fracțiile din ecuația dreptei.

$$\overline{M_1M_0} = (x_{M_0} - x_{M_1})\bar{i} + (y_{M_0} - y_{M_1})\bar{j} + (z_{M_0} - z_{M_1})\bar{k} = (1-2)\bar{i} + (2+1)\bar{j} + (3-4)\bar{k} \Rightarrow \overline{M_1M_0} = -\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$$

$$\overline{M_1M_0} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -15\bar{i} - \bar{k} - 3\bar{j} - 9\bar{k} + \bar{i} - 5\bar{j} = -14\bar{i} - 8\bar{j} - 10\bar{k}$$

Atunci $d(M_0,d) = \frac{\|\overline{M_1M_0} \times \bar{v}\|}{\|\bar{v}\|} = \frac{\|-14\bar{i} - 8\bar{j} - 10\bar{k}\|}{\|3\bar{i} + \bar{j} - 5\bar{k}\|} = \frac{\sqrt{(-14)^2 + (-8)^2 + (-10)^2}}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-5)^2}}$

$$\Rightarrow d(M_0,d) = \frac{\sqrt{360}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{7}}.$$