**Problema III.1**

Să se determine numărul gradelor de libertate

a.) pentru un sistem fizic format din două puncte materiale cărora li se impune condiţia ca distanţa dintre ele să rămână constantă;

b.) pentru un sistem fizic format din trei puncte materiale poziţionate în vârfurile unui triunghi;

c.) pentru un sistem fizic format din opt puncte materiale supuse la opt legături;

d.) pentru un sistem fizic format din două puncte materiale, plasate pe o suprafaţă plană, cărora li se impune condiţia ca distanţa dintre ele să rămână constantă;

e.) pentru un sistem fizic format din şase puncte materiale plasate pe o suprafaţă plană şi supuse la şase legături;

f.) pentru un sistem fizic format din opt puncte materiale, plasate pe o dreaptă şi supuse la patru legături;

g.) pentru un sistem fizic format din două puncte materiale, plasate pe o dreaptă, cărora li se impune condiţia ca distanţa dintre ele să rămână constantă.

**R:**

Formula care dă numărul gradelor de libertate $s$ ale unui sistem de puncte materiale este:

$$s = \alpha N - \ell, \tag{1}$$

unde $N$ reprezintă numărul de puncte materiale componente ale sistemului, (fiecare având $\alpha$ grade de libertate, $\alpha = 1, 2, 3$), iar $\ell$ este numărul de legături.

Evident, dacă sistemul este liber, adică dacă el nu este supus la legături, cu $\ell = 0$, vom avea

$$s = \alpha N. \tag{1'}$$

Studiem următoarele cazuri, particularizând

- pentru $\alpha = 3$ (punctele materiale componente ale sistemului au fiecare câte trei grade de libertate),

$$s = 3N - \ell; \tag{2}$$

- pentru $\alpha = 2$ (punctele materiale componente ale sistemului au fiecare câte două grade de libertate),

$$s = 2N - \ell; \tag{3}$$

- pentru $\alpha = 1$ (fiecare punct material component al sistemului are un singur grad de libertate),

$$s = N - \ell. \tag{4}$$

Conform relaţiilor (2), (3) şi (4),

a.) dacă $N = 2, \ell = 1$, atunci

$$s = 3 \cdot 2 - 1 = 5; \tag{5}$$

b.) dacă $N = 3, \ell = 3$, atunci

$$s = 3 \cdot 3 - 3 = 6; \tag{6}$$

c.) dacă $N = 8, \ell = 8$, atunci

$$s = 3 \cdot 8 - 8 = 16; \tag{7}$$

d.) dacă $N = 2, \ell = 1$, atunci

$$s = 2 \cdot 2 - 1 = 3; \tag{8}$$

e.) dacă $N = 6, \ell = 6$, atunci

$$s = 2 \cdot 6 - 6 = 6; \tag{9}$$

f.) dacă $N = 8, \ell = 4$, atunci

$$s = 8 - 4 = 4; \tag{10}$$

g.) dacă $N = 2, \ell = 1$, atunci

$$s = 2 - 1 = 1. \tag{11}$$

**Problema III.2**

Să se găsească expresia funcţiilor lui Lagrange şi Hamilton pentru un punct material liber, de masă $m$, în coordonate carteziene $(x, y, z)$, polare plane $(\rho, \varphi)$, cilindrice $(\rho, \varphi, z)$, sferice $(r, \theta, \varphi)$.

**R:**

În primul rând vor trebui identificate coordonatele, vitezele şi impulsurile generalizate pentru fiecare din cazurile menţionate în enunţ.

Dacă $q_i$ sunt *coordonatele generalizate*, cu $i = \overline{1, s}$, iar $s = 3N - \ell$, unde N reprezintă numărul de puncte materiale componente ale sistemului (fiecare având 3 grade de libertate), $\ell$ este numărul de legături la care acestea sunt supuse şi $s$ numărul gradelor de libertate ale sistemului de puncte materiale, atunci *vitezele generalizate* sunt $\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt}$, iar *impulsurile generalizate* (sau *impulsurile conjugate* coordonatelor $q_i$) se definesc ca fiind $p_i = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$.

Dacă coordonata generalizată este o lungime – notată de exemplu $r$, viteza generalizată este $\dot{r} = \dfrac{dr}{dt}$, iar impulsul generalizat corespunzător va fi $p_r = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{r}}$ (impuls); $[r]_{SI} = m$, $[\dot{r}]_{SI} = m/s$, $[p_r]_{SI} = N \cdot s$.

De asemenea, dacă coordonata generalizată este un unghi – de exemplu $\theta$, viteza generalizată este $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ (viteză unghiulară), iar impulsul conjugat coordonatei generalizate $\theta$ – notat $p_\theta$, va fi $p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}$ (moment cinetic); $[\theta]_{SI} = \text{rad}$, $[\dot{\theta}]_{SI} = \text{rad/s} = s^{-1}$, $[p_\theta]_{SI} = J \cdot s$.

Pentru un punct material liber, energia potenţială este nulă şi deci, cu $U = 0$, *funcţia lui Lagrange* (care în unele lucrări poartă numele de *lagrangeiană* sau *lagrangeian*) va fi

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - U = T \tag{1}$$

iar *funcţia lui Hamilton* (numită şi *hamiltoniană* sau *hamiltonian*)

$$H(q_i, p_i, t) = T + U = T, \tag{2}$$

formula energiei cinetice a unui punct material de masă m, aflat în mişcare de translaţie şi care se deplasează cu viteza v, fiind $T = \frac{mv^2}{2}$.

Unitatea de măsură, în S.I., pentru funcţiile lui Lagrange şi Hamilton, precum şi pentru energia cinetică şi cea potenţială, este *joule*

$$[T]_{SI} = [U]_{SI} = [L]_{SI} = [H]_{SI} = J.$$

**a.)** În coordonate carteziene $(x, y, z)$, avem

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \tag{3}$$

iar coordonatele generalizate $q_i$ şi vitezele generalizate $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ sunt:

$$q_i \rightarrow x, y, z \quad \text{şi} \quad \dot{q}_i \rightarrow \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}.$$

Energia cinetică este

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = L(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \tag{4}$$

care reprezintă expresia funcţiei lui Lagrange.

Definim impulsurile generalizate $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, cu $p_i \rightarrow p_x, p_y, p_z$:

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \tag{5}$$

Transformăm expresia energiei cinetice astfel:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} = \frac{1}{2m}(m^2\dot{x}^2 + m^2\dot{y}^2 + m^2\dot{z}^2) =$$

$$= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = H(p_x, p_y, p_z), \tag{6}$$

care reprezintă expresia funcţiei lui Hamilton.

**b.)** În coordonate polare plane $(\rho, \varphi)$, avem

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 \tag{7}$$

iar coordonatele generalizate şi vitezele generalizate vor fi

$$q_i \to \rho, \varphi \quad \text{şi} \quad \dot{q}_i \to \dot{\rho}, \dot{\varphi}.$$

Scriem energia cinetică

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) = L(\rho, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) \text{ – funcţia lui Lagrange.} \tag{8}$$

Dacă impulsurile generalizate, $p_i \to p_\rho, p_\varphi$, sunt:

$$p_\rho = \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \quad \text{şi} \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}, \tag{9}$$

expresia energiei cinetice devine

$$T = \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{m\rho^2\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{1}{2m}(m^2\dot{\rho}^2 + m^2\rho^2\dot{\varphi}^2) =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right) = H(\rho, p_\rho, p_\varphi) \text{ – funcţia lui Hamilton.} \tag{10}$$

**c.)** În coordonate cilindrice $(\rho, \varphi, z)$, avem

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \tag{11}$$

iar coordonatele generalizate şi vitezele generalizate vor fi

$$q_i \to \rho, \varphi, z \quad \text{şi} \quad \dot{q}_i \to \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}.$$

Scriem energia cinetică

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = L(\rho, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}) \text{ – funcţia lui Lagrange.} \tag{12}$$

Dacă impulsurile generalizate, $p_i \to p_\rho, p_\varphi, p_z$, sunt:

$$p_\rho = \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}, \quad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \tag{13}$$

expresia energiei cinetice devine

$$T = \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{m\rho^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2m}(m^2\dot{\rho}^2 + m^2\rho^2\dot{\varphi}^2 + m^2\dot{z}^2) = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right) =$$

$$= H(\rho, p_\rho, p_\varphi, p_z) \text{ – funcţia lui Hamilton.} \tag{14}$$

**d.)** În coordonate sferice $(r, \theta, \varphi)$, avem

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 \tag{15}$$

iar coordonatele generalizate şi vitezele generalizate vor fi

$q_i \to r, \theta, \varphi$ şi $\dot{q}_i \to \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$.

Scriem energia cinetică

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2) =$$

$$= L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) \ - \text{funcţia lui Lagrange.} \tag{16}$$

Dacă impulsurile generalizate, $p_i \to p_r, p_\theta, p_\varphi$, sunt:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}, \tag{17}$$

expresia energiei cinetice devine:

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{mr^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2m}(m^2\dot{r}^2 + m^2r^2\dot{\theta}^2 + m^2r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2) =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) =$$

$$= H(r, \theta, p_r, p_\theta, p_\varphi) \ - \text{funcţia lui Hamilton.} \tag{18}$$

**Tema III.3**

Determinarea ecuaţiei de mişcare şi calculul perioadei de oscilaţie a unui punct material care execută o mişcare periodică sub acţiunea greutăţii sau a unei forţe elastice, obţinute prin aplicarea ecuaţiilor lui Lagrange sau a ecuaţiilor canonice Hamilton – etape de lucru

**R:**

Schema de rezolvare a unei probleme care necesită pentru descrierea evoluţiei unui sistem mecanic (găsirea ecuaţiei de mişcare şi calculul perioadei de oscilaţie) o rezolvare bazată pe utilizarea *ecuaţiilor lui Lagrange*, respectiv a *ecuaţiilor canonice Hamilton* implică parcurgerea în ordine a următoarelor etape:

<table>
<tr><th>FORMALISMUL LAGRANGEIAN</th><th>FORMALISMUL HAMILTONIAN</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. stabilirea numărului total de grade de libertate s ale sistemului mecanic considerat;</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">2. identificarea coordonatelor generalizate $q_i$, al căror număr este egal cu cel al gradelor de libertate ale sistemului şi identificarea vitezelor generalizate corespunzătoare $\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt}$;</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. construirea expresiei energiei cinetice $T = \dfrac{mv^2}{2}$ şi respectiv a celei potenţiale U (elastice $U_{el}$ şi / sau gravitaţionale $U_{grav}$) a sistemului;</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4. determinarea expresiei funcţiei lui Lagrange $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$,<br>$L = T - U$;</td><td>4. aflarea expresiei energiei mecanice<br>$E = T + U$;</td></tr>
<tr><td>4′. găsirea impulsurilor generalizate $p_i = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, corespunzătoare coordonatelor generalizate $q_i$;</td></tr>
<tr><td>4″. determinarea expresiei funcţiei lui Hamilton $H = H(q_i, p_i, t)$,<br>$H = T + U$;</td></tr>
<tr><td>5. scrierea ecuaţiei lui Lagrange pentru fiecare dintre coordonatele generalizate $q_i$,<br>$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$;</td><td>5. scrierea ecuaţiilor canonice Hamilton $\dot{p}_i$ pentru fiecare dintre coordonatele generalizate $q_i$,<br>$\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$;</td></tr>
<tr><td>6. calculul fiecărui termen din ecuaţia lui Lagrange, adică $\dfrac{\partial L}{\partial q_i}$, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ şi $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$, urmată apoi de rescrierea acesteia;</td><td>6. derivarea în raport cu timpul a relaţiei de definiţie a impulsului generalizat, $\dot{p}_i = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)$, şi egalarea rezultatului obţinut cu termenul din dreapta al ecuaţiei canonice Hamilton;</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. aflarea ecuaţiei de mişcare (oscilaţie) a sistemului $C_1\ddot{q}_i + C_2 q_i = 0$ şi ulterior transcrierea acesteia sub forma $\ddot{q}_i + \dfrac{C_2}{C_1} q_i = 0$;</td></tr>
</table>

**8.** efectuarea notaţiei $\frac{C_2}{C_1} = \omega_0^2$, unde $\omega_0$ reprezintă pulsaţia proprie de oscilaţie, şi scrierea formei finale a ecuaţiei de mişcare, $\ddot{q}_i + \omega_0^2 q_i = 0$;

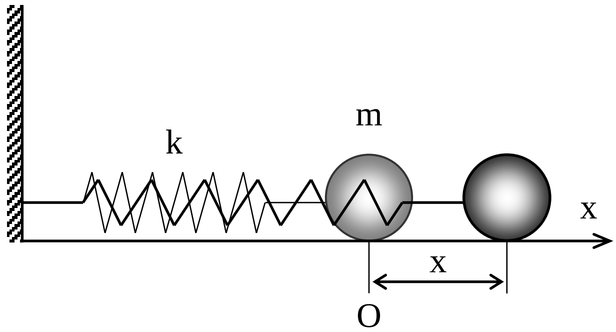
**9.** calculul perioadei proprii de oscilaţie $T_0$, scop în care, după egalarea relaţiilor $\omega_0 = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$ şi $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, obţinem $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$.

**Problema III.4**

Cu ajutorul a.) ecuaţiilor lui Lagrange; b.) ecuaţiilor canonice Hamilton, să se găsească ecuaţia de mişcare şi perioada pendulului elastic (k, m).

**R:**

*Pendulul elastic* reprezintă ansamblul format dintr-un corp (punct material) de masă $m$, legat de un resort cu constanta de elasticitate $k$, care efectuează o mişcare oscilatorie armonică unidirecţională (de exemplu, în lungul axei Ox) sub acţiunea unei forţe elastice (de forma $F_{el} = -kx$, forţă proporţională, în modul, cu distanţa corpului faţă de poziţia de echilibru – poziţia în care resortul este nedeformat iar energia potenţială este nulă, şi îndreptată totdeauna către aceasta).




Pendulul elastic se poate studia în două variante. Se fixează resortul orizontal, corpul efectuând oscilaţii pe o dreaptă orizontală (poziţia de echilibru corespunde resortului nedeformat) sau corpul poate fi suspendat de resort, caz în care el efectuează oscilaţii pe verticală (poziţia de echilibru va corespunde acum resortului alungit cu $x_0 = \frac{mg}{k}$).

Sistemul considerat – *oscilatorul liniar armonic,* are un singur grad de libertate, iar coordonata generalizată este $x$ $(q = x)$, unde $x$ reprezintă deplasarea corpului faţă de poziţia de echilibru O (elongaţia), viteza generalizată corespunzătoare fiind $\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \dot{x}$.

Energia cinetică este $T = \dfrac{mv^2}{2}$, dar cum $v \equiv v_x = \dot{x}$, obţinem

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}. \tag{1}$$

Energia potenţială elastică este

$$U_{el} = -\int_0^x F_{el}\,dx = -\int_0^x (-kx)\,dx = k\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}kx^2$$

şi deci energia potenţială a sistemului va fi

$$U \equiv U_{el} = \frac{kx^2}{2}. \tag{2}$$

a.) Scriem expresia funcţiei lui Lagrange:

$$L = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \equiv L(x, \dot{x}), \tag{3}$$

iar, cum funcţia lui Lagrange nu depinde explicit de timp, energia mecanică se conservă.

În continuare, scriem forma generală a ecuaţiei lui Lagrange pentru cazul în care $q = x$ şi $\dot{q} = \dot{x}$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

Calculând separat fiecare termen

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \text{şi} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x},$$

rezultă

$$m\ddot{x} + kx = 0. \tag{5}$$

b.) Scriem energia mecanică

$$E = T + U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \equiv E(x, \dot{x}). \tag{6}$$

Dacă funcţia lui Lagrange nu depinde explicit de timp, energia mecanică a oscilatorului liniar armonic se conservă, adică E = const.

Impulsul generalizat corespunzător coordonatei generalizate $x$ este

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \tag{7}$$

Înlocuind expresia impulsului generalizat în relaţia (6), energia mecanică devine

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \equiv H(x, p_x), \tag{8}$$

ce reprezintă funcţia lui Hamilton.

Scriem ecuaţia canonică a lui Hamilton:

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx. \tag{9}$$

Din relaţia (7), derivând în raport cu timpul, obţinem

$$\dot{p}_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} \tag{10}$$

iar prin egalare cu relaţia (9) găsim

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{sau} \quad m\ddot{x} + kx = 0. \tag{11}$$

Deci, utilizând ambele metode am găsit aceeaşi relaţie, (5) ≡ (11), pe care, împărţind cu $m$, o rescriem sub forma:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{12}$$

şi aceasta reprezintă *ecuaţia de mişcare* a pendulului elastic.

Efectuând notaţia $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, unde $\omega_0$ este pulsaţia proprie de oscilaţie a pendulului elastic, obţinem

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{13}$$

Deoarece

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14}$$

şi totodată cum $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, unde $T_0$ este *perioada proprie de oscilaţie,* prin

egalare $\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_0}$, găsim

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{15}$$

Deci, *perioada oscilatorului liniar armonic* depinde atât de proprietăţile sale inerţiale (prin masa sa $m$) cât şi de cele elastice (prin constanta de elasticitate $k$), dar este independentă de condiţiile iniţiale în care se găseşte oscilatorul.

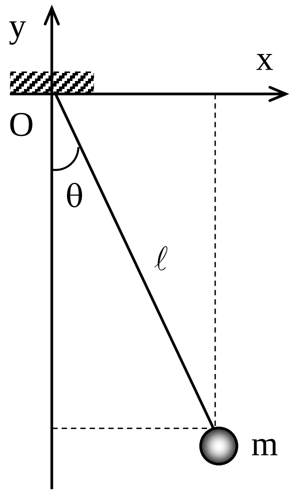
**Problema III.5**

Cu ajutorul a.) ecuaţiilor lui Lagrange; b.) ecuaţiilor canonice Hamilton, să se găsească ecuaţia de mişcare şi perioada pendulului gravitaţional $(\ell, g)$.

**R:**

*Pendulul gravitaţional* (*simplu* sau *matematic*) reprezintă ansamblul format dintr-un punct material de masă $m$, suspendat de un fir inextensibil, cu masa neglijabilă, de lungime $\ell$. Dacă pendulul este scos din poziţia de echilibru şi este lăsat liber, el oscilează în plan vertical sub acţiunea propriei greutăţi.

Pentru unghiuri mici, $\theta < 4 - 5°$ (când $\sin\theta \approx \theta$, în radiani), perioada pendulului gravitaţional este independentă de amplitudine, oscilaţiile sunt izocrone, iar mişcarea pendulului poate fi considerată în acest caz o mişcare oscilatorie armonică.




Sistemul considerat are un singur grad de libertate iar coordonata generalizată este $\theta$ ($q = \theta$), unde $\theta$ se numeşte elongaţie unghiulară şi reprezintă unghiul pe care firul îl face la un moment dat cu direcţia verticală (axa Oy), viteza generalizată corespunzătoare fiind $\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \dot{\theta}$.

Energia cinetică este $T = \frac{mv^2}{2}$, dar cum $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, unde

$$x = \ell \sin\theta \quad \text{şi} \quad y = -\ell\cos\theta, \tag{1) (2}$$

derivând relaţiile (1) şi (2)

$$\dot{x} = \ell\dot{\theta}\cos\theta \quad \text{şi} \quad \dot{y} = \ell\dot{\theta}\sin\theta, \tag{3) (4}$$

iar prin ridicare la pătrat şi însumare obţinem

$$v^2 = (\ell\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (\ell\dot{\theta}\sin\theta)^2 = \ell^2\dot{\theta}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \ell^2\dot{\theta}^2 \tag{5}$$

şi astfel găsim

$$T = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2}. \tag{6}$$

Energia potenţială gravitaţională este

$$U_{grav} = -\int_0^y (-mg)\,dy = mg\int_0^y dy = mgy$$

şi deci energia potenţială a sistemului va fi

$$U \equiv U_{grav} = mgy = mg(-\ell\cos\theta) = -mg\ell\cos\theta. \tag{7}$$

a.) Scriem expresia funcţiei lui Lagrange:

$$L = T - U = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2} + mg\ell\cos\theta \equiv L(\theta, \dot{\theta}), \tag{8}$$

iar, cum funcţia lui Lagrange nu depinde explicit de timp, energia mecanică se conservă.

În continuare, scriem forma generală a ecuaţiei lui Lagrange pentru cazul în care $q = \theta$ şi $\dot{q} = \dot{\theta}$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \tag{9}$$

Calculând separat fiecare termen

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\, mg\ell \sin\, \theta; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2 \dot{\theta} \quad \text{şi} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}(m\ell^2 \dot{\theta}) = m\ell^2 \ddot{\theta},$$

rezultă

$$m\ell^2 \ddot{\theta} + mg\ell \sin\, \theta = 0. \tag{10}$$

b.) Scriem energia mecanică

$$E = T + U = \frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2} - mg\ell \cos\, \theta \equiv E(\theta, \dot{\theta}). \tag{11}$$

Întrucât funcţia lui Lagrange nu depinde explicit de timp, avem integrala primă $E = \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L$, energia mecanică a sistemului se conservă, adică $E = \text{const.}$

Impulsul generalizat corespunzător coordonatei generalizate $\theta$ este

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2 \dot{\theta} \tag{12}$$

iar, înlocuind în relaţia (11) impulsul generalizat, energia mecanică devine

$$E = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - mg\ell \cos\, \theta \equiv H(\theta, p_\theta), \tag{13}$$

ce reprezintă funcţia lui Hamilton.

Scriem ecuaţia canonică a lui Hamilton:

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\, mg\ell \sin\, \theta. \tag{14}$$

Din relaţia (12), derivând în raport cu timpul, obţinem

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}(m\ell^2 \dot{\theta}) = m\ell^2 \ddot{\theta}, \tag{15}$$

iar prin egalare cu relaţia (14) găsim

$$m\ell^2 \ddot{\theta} = -\, mg\ell \sin\, \theta \quad \text{sau} \quad m\ell^2 \ddot{\theta} + mg\ell \sin\, \theta = 0. \tag{16}$$

Deci, folosind ambele metode am găsit aceeaşi relaţie, (10) ≡ (16), pe care, după simplificare şi împărţind cu $\ell$, o rescriem sub forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\, \theta = 0 \tag{17}$$

şi care, pentru unghiuri mici, cu $\sin\, \theta \approx \theta$, devine

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\theta = 0, \tag{18}$$

ce reprezintă *ecuaţia de mişcare* a pendulului gravitaţional.

Efectuând notaţia $\frac{g}{\ell} = \omega_0^2$, unde cu $\omega_0$ am notat pulsaţia proprie de oscilaţie a pendulului gravitaţional, obţinem

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0. \tag{19}$$

Deoarece

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{20}$$

şi totodată cum $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, unde $T_0$ este *perioada proprie de oscilaţie*, prin egalare $\sqrt{\frac{g}{\ell}} = \frac{2\pi}{T_0}$, găsim

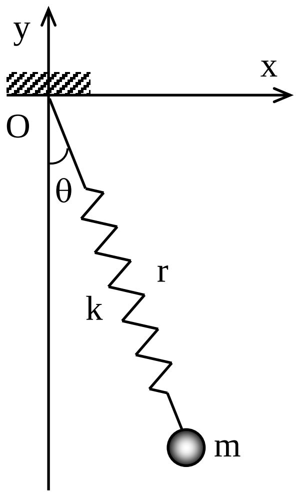
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{21}$$

Deci, *perioada pendulului gravitaţional* depinde numai de lungimea firului $\ell$ şi de valoarea acceleraţiei gravitaţionale $g$, fiind independentă de masa corpului.

**Problema III.6**

Să se găsească expresiile funcţiilor lui Lagrange şi Hamilton pentru un punct material de masă m, suspendat de un resort cu constanta de elasticitate k şi lungime $r_0$ care oscilează în plan vertical.

**R:**




Sistemul are două grade de libertate, iar coordonatele generalizate sunt r şi θ ($q_1 = r, q_2 = \theta$), unde r reprezintă lungimea resortului deformat şi θ elongaţia unghiulară, adică unghiul pe care firul îl face cu axa verticală Oy, la un moment dat.

Vitezele generalizate corespunzătoare celor două coordonate generalizate sunt:

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt} = \dot{r} \quad \text{şi} \quad \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt} = \dot{\theta}.$$

Energia cinetică este $T = \frac{mv^2}{2}$, cu

$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2.$

Deoarece

$$x = r\sin\theta \quad \text{şi} \quad y = -r\cos\theta, \qquad (1)\ (2)$$

derivând în raport cu timpul, rezultă

$$\dot{x} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \qquad (3)$$

$$\dot{y} = -\dot{r}\cos\theta + r\dot{\theta}\sin\theta. \qquad (4)$$

Prin ridicarea la pătrat şi însumarea celor două relaţii şi ţinând seama de formula fundamentală a trigonometriei, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, avem

$$v^2 = (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (-\dot{r}\cos\theta + r\dot{\theta}\sin\theta)^2 =$$

$$= \dot{r}^2\sin^2\theta + 2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \dot{r}^2\cos^2\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta +$$

$$+ r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta = \dot{r}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + r^2\dot{\theta}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) =$$

$$= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2. \qquad (5)$$

Obţinem expresia energiei cinetice:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \qquad (6)$$

Energia potenţială este

$$U = U_{grav} + U_{el}, \qquad (7)$$

în care

$$U_{grav} = mgy = mg(-r\cos\theta) = -mgr\cos\theta, \qquad (8)$$

$$U_{el} = \frac{k}{2}(r - r_0)^2, \qquad (9)$$

unde diferenţa $r - r_0$ reprezintă alungirea resortului.

Prin urmare, expresia energiei potenţiale este

$$U = -mgr\cos\theta + \frac{k}{2}(r - r_0)^2. \qquad (10)$$

Astfel, găsim funcţia lui Lagrange

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - \frac{k}{2}(r - r_0)^2, \qquad (11)$$

unde $L \equiv L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$.

Expresia funcţiei lui Hamilton o vom obţine scriind mai întâi impulsurile generalizate:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \text{şi} \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \qquad (12)\ (13)$$

adică energia cinetică devine

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) \tag{14}$$

şi deci funcţia lui Hamilton va fi

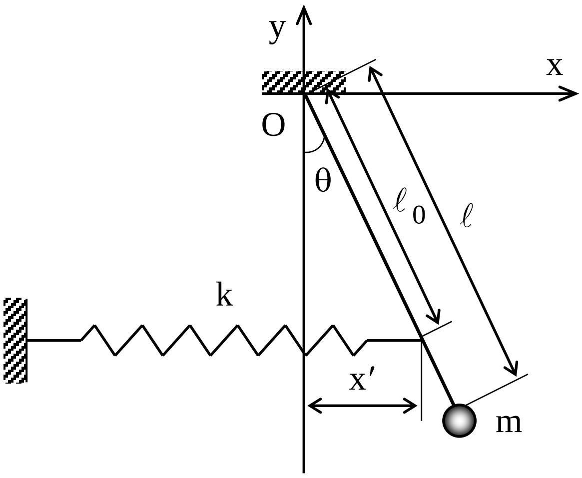
$$H = T + U = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - mgr\cos\theta + \frac{k}{2}(r - r_0)^2, \tag{15}$$

unde $H \equiv H(r, \theta, p_r, p_\theta)$.

**Problema III.7**

Cu ajutorul a.) ecuaţiilor lui Lagrange; b.) ecuaţiilor canonice Hamilton, să se obţină ecuaţia de mişcare şi perioada micilor oscilaţii ale unui sistem format dintr-un pendul gravitaţional $(m, \ell, g)$ şi un resort cu constanta de elasticitate k, poziţionat pe orizontală şi legat la distanţa $\ell_0$ de punctul în care se suspendă pendulul.

Să se studieze şi cazul în care $\ell = \ell_0$.




**R:**

Sistemul considerat are un singur grad de libertate, coordonata generalizată este θ (q = θ), unde θ reprezintă elongaţia unghiulară, unghiul pe care firul îl face la un moment dat cu axa Oy, viteza generalizată corespunzătoare fiind $\dot{q} = \dot{\theta}$.

Energia cinetică este

$$T = \frac{mv^2}{2}, \tag{1}$$

cu $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, unde

$$x = \ell \sin\theta \quad \text{şi} \quad y = -\ell\cos\theta, \tag{2) (3}$$

iar derivând în raport cu timpul relaţiile (2) şi (3) avem

$$\dot{x} = \ell\dot{\theta}\cos\theta \quad \text{şi} \quad \dot{y} = \ell\dot{\theta}\sin\theta. \tag{4) (5}$$

Prin ridicare la pătrat şi însumare, obţinem

$$v^2 = (\ell\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (\ell\dot{\theta}\sin\theta)^2 = \ell^2\dot{\theta}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \ell^2\dot{\theta}^2. \tag{6}$$

Astfel, conform relaţiei (1), găsim

$$T = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2}. \tag{7}$$

Energia potenţială este

$$U = U_{grav} + U_{el}, \tag{8}$$

unde

$$U_{grav} = mgy = mg(-\ell\cos\theta) = -mg\ell\cos\theta, \tag{9}$$

$$U_{el} = \frac{kx'^2}{2}, \quad \text{cu} \quad x' = \ell_0 \sin\theta, \quad \text{deci} \quad U_{el} = \frac{k}{2}\ell_0^2 \sin^2\theta. \tag{10}$$

Prin urmare, expresia energiei potenţiale devine

$$U = -mg\ell\cos\theta + \frac{k}{2}\ell_0^2\sin^2\theta. \tag{11}$$

a.) Scriem expresia funcţiei lui Lagrange

$$L = T - U = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2} + mg\ell\cos\theta - \frac{k}{2}\ell_0^2\sin^2\theta \equiv L(\theta, \dot{\theta}), \tag{12}$$

iar apoi forma generală a ecuaţiei lui Lagrange pentru cazul în care $q = \theta$ şi $\dot{q} = \dot{\theta}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \tag{13}$$

Calculând fiecare termen în parte

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell\sin\theta - k\ell_0^2\sin\theta\cos\theta = -(mg\ell + k\ell_0^2\cos\theta)\sin\theta;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta} \quad \text{şi} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}) = m\ell^2\ddot{\theta},$$

rezultă ecuaţia de mişcare

$$m\ell^2\ddot{\theta} + (mg\ell + k\ell_0^2\cos\theta)\sin\theta = 0. \tag{14}$$

b.) Scriem energia mecanică

$$E = T + U = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2} - mg\ell\cos\theta + \frac{k}{2}\ell_0^2\sin^2\theta. \tag{15}$$

Impulsul generalizat corespunzător coordonatei generalizate $\theta$ este

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta} \tag{16}$$

iar, înlocuind în relaţia (15) impulsul generalizat, energia mecanică se scrie

$$E = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - mg\ell\cos\theta + \frac{k}{2}\ell_0^2\sin^2\theta \equiv H(\theta, p_\theta), \tag{17}$$

aceasta reprezentând expresia funcţiei lui Hamilton.

Scriem ecuaţia canonică Hamilton

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\,mg\ell \sin\theta - k\,\ell_0^2 \sin\theta \cos\theta =$$

$$= -\,(mg\ell + k\,\ell_0^2 \cos\theta)\sin\theta. \tag{18}$$

Din relaţia (16), derivând în raport cu timpul, obţinem

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}) = m\ell^2\ddot{\theta}, \tag{19}$$

iar prin egalare cu relaţia (18) găsim

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -\,(mg\ell + k\,\ell_0^2 \cos\theta)\sin\theta$$

sau

$$m\ell^2\ddot{\theta} + (mg\ell + k\,\ell_0^2 \cos\theta)\sin\theta = 0. \tag{20}$$

Deci, utilizând ambele metode am aflat aceeaşi relaţie, (14) ≡ (20), pe care, împărţind cu $m\ell^2$, o rescriem sub forma:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{k\,\ell_0^2}{m\ell^2}\cos\theta\right)\sin\theta = 0 \tag{21}$$

şi care pentru unghiuri mici $\theta < 4 - 5°$, cu $\sin\theta \approx \theta$ (în radiani) şi respectiv $\cos\theta \approx 1$, devine

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{k\,\ell_0^2}{m\ell^2}\right)\theta = 0 \tag{22}$$

şi aceasta reprezintă *ecuaţia de mişcare* a sistemului mecanic considerat.

Efectuând notaţia $\frac{g}{\ell} + \frac{k\,\ell_0^2}{m\ell^2} = \omega_0^2$, unde $\omega_0$ este pulsaţia proprie de oscilaţie, obţinem

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0. \tag{23}$$

Având

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{k\,\ell_0^2}{m\ell^2}} \tag{24}$$

şi totodată cum $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, unde $T_0$ este *perioada proprie de oscilaţie,* prin egalare $\sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{k\,\ell_0^2}{m\ell^2}} = \frac{2\pi}{T_0}$, rezultă

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{k\ell_0^2}{m\ell^2}}}\,. \qquad (25)$$

În cazul particular când $\ell = \ell_0$, utilizând rezultatele obţinute anterior, conform relaţiilor (22) şi (25), găsim ecuaţia de mişcare a sistemului mecanic:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m}\right)\theta = 0 \qquad (26)$$

şi expresia perioadei proprii de oscilaţie

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m}}}\,. \qquad (27)$$