Cursul 7 Bazele Electrotehnicii & Electrotehnică

3.6 Metode de rezolvare a circuitelor de c.c. cu obţinerea răspunsului pe toate laturile

Aceste metode se bazează pe teoremele lui Kirchhoff şi realizează doar artificii şi sistematizări care simplifică calculul, prin introducerea unor necunoscute auxiliare sau prin realizarea unui calcul din aproape în aproape.

a. Teorema superpoziţiei (a suprapunerii efectelor)

Enunţ. Curentul electric dintr-o latură a unui circuit, în care există mai multe surse, este egal cu suma algebrică a curenţilor produşi în acea latură de fiecare sursă în parte, dacă ar acţiona singură în circuit, celelalte fiind scurtcircuitate sau înlocuite cu rezistenţa lor interioară ($r_i \neq 0$).

$$I_j = \sum_{k=1}^{l} \pm I_{jk}, \quad j = \overline{1,l} \tag{3.66}$$

Demonstraţie:

Dacă G_{jk} este conductanţa de transfer între latura *j* şi *k*, nefiind o mărime măsurabilă ci o mărime cu dimensiunea unei conductanţe, se fac următoarele notaţii:

$$I_{j1} = I_j \Big|_{\substack{E_1 \neq 0 \\ E_2 = 0 \\ \vdots \\ E_l = 0}} = G_{j1} E_1$$

$$I_{j2} = I_j \Big|_{\substack{E_1 = 0 \\ E_2 \neq 0 \\ \vdots \\ E_l = 0}} = G_{j2} E_2$$

. (3.67)

.

.

$$I_{jl} = I_j \Big|_{\substack{E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \\ \vdots \\ E_l \neq 0}} = G_{jl} E_l$$

Se consideră un circuit cu *l* laturi şi *n* noduri în care se scriu teoremele lui Kirchhoff:

$$\sum_{k \in q} \pm I_k = 0, \qquad q = \overline{1, n-1}$$

$$\sum_{k \in O} \pm E_k = \sum_{k \in O} \pm R_k I_k, \quad p = \overline{1,o}$$

Observaţie: Teorema este valabilă numai în circuite liniare.

Deoarece sistemul de ecuaţii de mai sus este liniar, rezolvându-l se obţin ecuaţii sub forma:

$$I_{jk} = \sum_{k=1}^{l} G_{jk} E_k, \quad j = \overline{1,l} \tag{3.68}$$

Conform notaţiilor (3.65) şi ţinând seama că $G_{jk} = G_{kj}$ se obţine:

$$I_j = I_{j1} + I_{j2} + \ldots + I_{jl} = \sum_{k=1}^{l} \pm I_{jk}, \quad j = \overline{1,l}$$

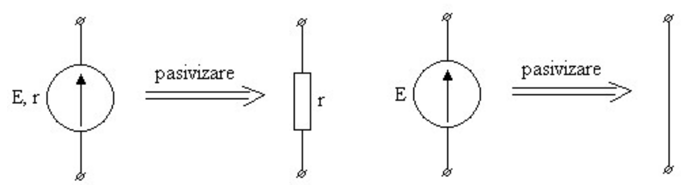
Se ia semnul + dacă sensul curentului I_{jk}, $j = \overline{1,l}$ coincide cu cel al curentului I_j şi - în caz contrar.

Observaţie:

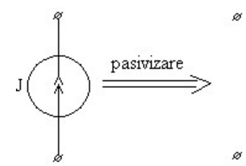
Această teoremă este avantajoasă să se aplice în cazul circuitelor cu multe surse de energie.

Generalizare:

Enunţ. Curentul electric dintr-o latură a unui circuit, în care există mai multe surse de energie, este egal cu suma algebrică a curenţilor produşi în acea latură de fiecare sursă în parte, dacă ar acţiona singură în circuit, celelalte fiind pasivizate (scurtcircuitate sau înlocuite cu rezistenţa lor interioară ($r_i \neq 0$), respectiv în gol sau înlocuite cu conductanța lor internă ($g_i \neq 0$)).



a.



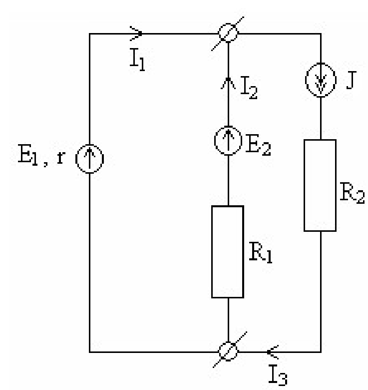
b.

Fig. 2.21 a – pasivizarea unei surse de tensiune reală și ideală; b – pasivizarea unei surse de curent ideale

Obs. Sursele comandate nu se pasivizează!

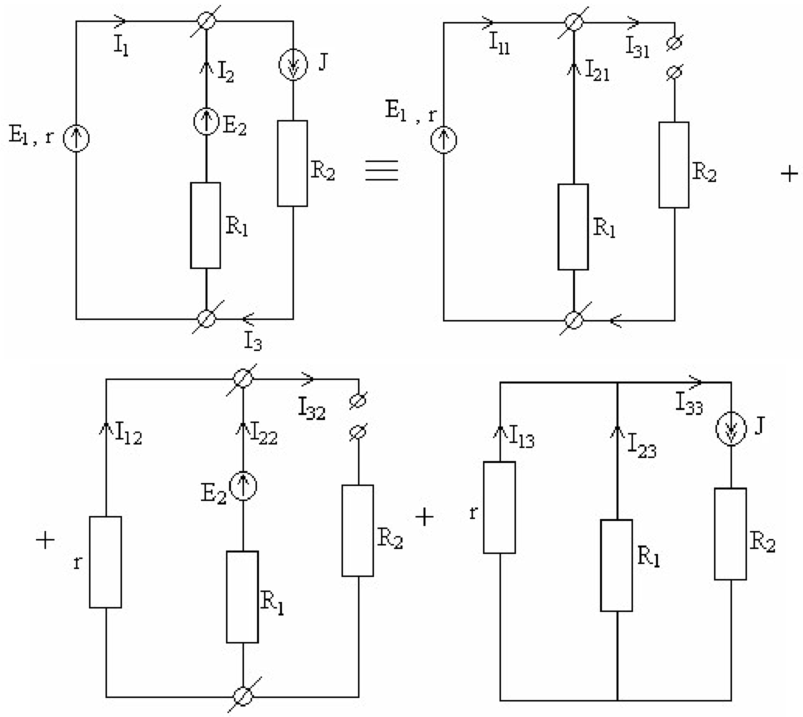
Aplicaţie.

Pentru circuitul de c.c. din figură se cunosc: E_1=24V, r=2Ω, E_2=48V, J=6A, R_1=R_2=10Ω.
Să se determine curenţii din laturile circuitului.



Soluţie:

Deoarece în circuit există 3 surse de energie electrică: două surse de tensiune (una reală E_1 şi alta ideală E_2) şi o sursă de curent ideală (I_s), circuitul iniţial poate fi echivalat cu o sumă de 3 circuite în care este activă pe rând numai câte o sursă, celelalte fiind pasivizate.



Atunci:

$I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13}$

$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23}$

$I_3 = I_{31} + I_{32} + I_{33}$

În circuitul în care este activă sursa E_1 se poate scrie:

$$I_{31} = 0\,,\ I_{11} = -I_{21} = \frac{E_1}{r + R_1} = \frac{24}{2+10} = 2A$$

În circuitul în care este activă sursa E_2 se poate scrie:

$$I_{32} = 0\,,\ I_{22} = -I_{12} = \frac{E_2}{r + R_1} = \frac{48}{2+10} = 4A$$

În circuitul în care este activă sursa I_s se poate scrie:

$$I_{33} = J = 6A\,,\ I_{23} = \frac{r}{r + R_1} \cdot I_{33} = \frac{2}{2+10} \cdot 6 = 1A\,,$$

$$I_{13} = \frac{R_1}{r + R_1} \cdot I_{33} = \frac{10}{2+10} \cdot 6 = 5A$$

$I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13} = 2 - 4 + 5 = 3A$

$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23} = -2 + 4 + 1 = 3A$

$I_3 = I_{31} + I_{32} + I_{33} = 0 + 0 + 6 = 6A$

b. Metoda potențialelor la noduri

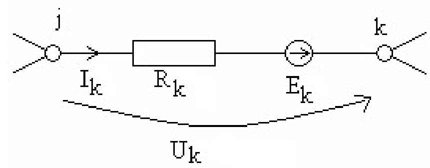


Fig. 3.22

Conform legii conducţiei electrice:

$$E_k + U_k = R_k I_k \quad (3.73)$$

$$U_k = V_j - V_k \quad (3.74)$$

$$I_k = \frac{E_k + V_j - V_k}{R_k} \quad (3.75)$$

$$\frac{1}{R_k} = G_k \quad (3.76)$$

$$I_k = G_k(E_k + V_j - V_k) = I_{k\_sc} + G_k(V_j - V_k) \quad (3.77)$$

Se urmăreşte să se determine sistemul de ecuaţii care să permită determinarea potenţialelor nodurilor.

TK I (j): $\sum\limits_{k \in j} \pm I_k = 0\,,\ j = \overline{1, n-1}$ (3.78)

$$\sum_{k \in j} G_k(E_k + V_j - V_k) = 0 \quad (3.79)$$

$k \in j$ - k laturi ce se intersectează în nodul j

Pentru nodul j:

$$\sum_{k \in j} G_k E_k + V_j \sum_{k \in j} G_k - \sum_{k \in j} G_k V_k = 0 \quad (3.80)$$

$G_k E_k = I_{k_{sc}}$ - curent de scurtcircuit al laturii k

$$\sum_{k \in j} I_{k_{sc}} + V_j \sum_{k \in j} G_k - \sum_{k \in j} G_k V_k = 0 \quad (3.81)$$

Dacă se notează:

$\sum\limits_{k \in j} I_{k_{sc}} = -I_{sc_j}$ - suma curenţilor de scurtcircuit cu semn schimbat ce ies din nodul j

$\sum\limits_{\substack{k \in j \\ k = j}} G_k = G_{jj}$ - suma conductanţelor laturilor ce converg în nodul j

$-\sum\limits_{k \in j} G_k V_k = \sum\limits_{\substack{k \in j \\ k \neq j}} G_{jk} V_k$ - suma negativă a conductanţelor laturilor care leagă direct nodul j cu nodul k

$$\sum_{k=1}^{n-1} G_{jk} V_k = I_{sc_j}, \quad j = \overline{1, n-1} \quad (3.82)$$

Dacă se explicitează relaţia (3.80) pentru toate nodurile reţelei se obţine:

$$\begin{cases} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + \ldots + G_{1n-1}V_{n-1} = I_{sc_1} \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + \ldots + G_{2n-1}V_{n-1} = I_{sc_2} \\ \vdots \\ G_{n-11}V_1 + G_{n-12}V_2 + \ldots + G_{n-1n-1}V_{n-1} = I_{sc_{n-1}} \end{cases} \tag{3.83}$$

Observaţie:

Întrucât potenţialul este o mărime determinată cu aproximaţia unei constante, unul din noduri se alege ca potenţial de referinţă (potenţial nul) – de ex. $V_n=0$. Prin urmare numărul de potenţiale necunoscute într-o reţea este $n-1$.

Algoritm practic de rezolvare a circuitelor de curent continuu utilizând metoda potenţialelor la noduri

1° - se stabileşte numărul de noduri ale circuitului şi fiecărui nod i se atribuie un potenţial V_1, ..., Vn;

2° - se alege ca potenţial de referinţă potenţialul unui nod (de preferinţă cel mai încărcat);

3° - se aleg sensuri arbitrare ale curenţilor prin laturile circuitului;

Varianta A. Pentru circuite ce nu conţin laturi formate numai din surse ideale de tensiune, algoritmul se continuă astfel:

4° - se aplică *TK I* în *n-1* noduri;

5° - se explicitează curenţii din laturi în funcţie de potenţiale cu relaţia (3.73), în care I_k şi E_j au acelaşi sens de la nodul *j* la *k* (în caz contrar se adoptă un semn corespunzător pentru mărimile electrice);

6° - se rezolvă sistemul de *n-1* ecuaţii cu *n-1* necunoscute, în care necunoscutele sunt potenţialele şi apoi se determină curenţii din laturi.

Varianta B. Pentru circuite ce conţin şi laturi formate numai din surse ideale de tensiune, metoda de rezolvare se numeşte ***metoda nodală modificată.***

În acest caz numărul de potenţiale necunoscute se micşorează cu numărul de laturi ideale.

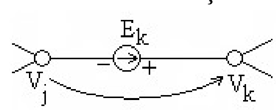


Fig. 3.23

$$E_k = V_k - V_j \Rightarrow V_k = E_k + V_j \tag{3.84}$$

iar algoritmul se continuă astfel:

4° - se aplică *TK I* în noduri ce pot fi înconjurate cu suprafeţe care nu intersectează laturile ideale;

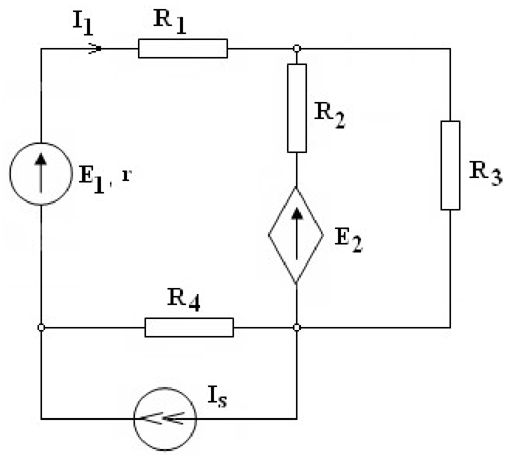
5° - se explicitează curenţii din laturi în funcţie de potenţiale cu relaţia (3.73), în care I_k şi E_j au acelaşi sens de la nodul *j* la *k* (în caz contrar se adoptă un semn corespunzător pentru mărimile electrice) şi se determină potenţialele necunoscute;

6° – pentru determinarea curenţilor din laturile ideale se aplică TK I în noduri în care converg şi laturi ideale de circuit.

Observaţie:

Această metodă este avantajoasă să se aplice în cazul circuitelor cu număr mic de noduri.

A3. Pentru circuitul de cc din fig. se cunosc:
$E_1 = 40V, r = 2\,\Omega, E_2 = r_{21}I_1\,[V], \mathrm{r}_{21} = 2\,\Omega,\ I_s = 5\ A,$
$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10\ \Omega$



a) Să se scrie ecuațiile de rezolvare utilizând TK;
b) Să se rezolve utilizând MPN;
c) Să se verifice soluțiile obținute (B.P) și să se interpreteze.