1. <u>Conţinut aplicaţie</u>: **Modele liniare. Descrierea matriceală a sistemelor liniare. Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare. Modele simulative liniare.**

2. <u>Obiective</u>:
- **Funcții pentru anliza matriceală**
- **Rezolvarea sistemelor de ecuatii liniare**
- **Conditionarea matricelor**
- **Modele Simulink cu functii de transfer**

(Se vor efectua exemplele și exercițiile din manual [1]: Cap.5.2.4 și Cap.5.3)

3. **Introducere**

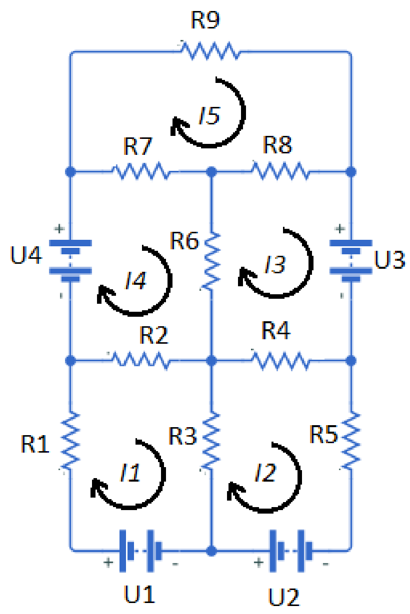
Există o mare varietate de sisteme fizice care pot fi modelate cu ajutorul *algebrei liniare*. Exemple de probleme care se reduc (prin liniarizare) la sisteme de ecuații algebrice liniare sunt:
- Analiza sistemelor cu număr finit de grade de libertate,
- Rețele de current alternative sau continuu,
- Transfer căldură și echilibru termic,
- Rețele hidraulice,
- Transportul gazelor prin conducte,
- Rețele de transport a energiei electrice.

4. **Aplicații**

4.1. Se vor testa **funcțiile Matlab** pentru **analiza matriceală**: `det, inv, rank, rcond`.
(vezi exemplificat mai jos la punctul **4.2 (c)**).

4.2. Problema

Fie un sistem fizic constituit dintr-o rețea electrică cu parametrii distribuiți formați dintr-un număr finit de rezistențe (sarcini sau consumatori electrici) conectate la diferite surse de alimentare, ca în schema de mai jos:



a) **<u>Modelarea matematică</u>** presupune aplicarea legii lui Ohm pentru fiecare ochi de circuit. Suma tensiunilor electrice pentru fiecare ochi de circuit este zero conform teoremei a doua a lui Kirchoff. Adică, în general:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

unde U_i, sunt toate căderile de tensiune pe componentele dintr-un circuit închis (ochi de circuit), inclusiv sursele. În cazul de față *i=1,…,5*, deoarece în rețeaua dată sunt 5 circuite închise.

Ținând cont de sensul curenților și de conectarea consumatorilor rezultă următorul **sistem omogen de ecuații liniare**, care reprezintă modelul rețelei date:

$$
\begin{aligned}
&U1 - R1 \times I1 - R2 \times (I1-I4) - R3 \times (I1-I2) = 0\\
&U2 - R3 \times (I2-I1) - R4 \times (I2-I3) - R5 \times I2 = 0\\
&U3 - R4 \times (I3-I2) - R6 \times (I3-I4) - R8 \times (I3-I5) = 0\\
&U4 - R7 \times (I4-I5) - R6 \times (I4-I3) - R2 \times (I4-I1) = 0\\
&- R9 \times I5 - R8 \times (I5-I3) - R7 \times (I5-I4) = 0
\end{aligned}
$$

Se cunosc tensiunile U_i și rezistențele consumatorilor R_j, iar **necunoscutele** sunt curenții I_k.

Se aduce sistemul la *forma standard*:

$$
\begin{aligned}
&(R1+R2+R3) \times I1 - R3 \times I2 - R2 \times I4 = U1\\
&R3 \times I1 + (R3+R4+R5) \times I2 - R4 \times I3 = U2\\
&- R4 \times I2 + (R4+R6+R8) \times I3 - R6 \times I4 - R8 \times I5 = U3\\
&-R2 \times I1 - R6 \times I3 + (R2+R6+R7) \times I4 - R7 \times I5 = U4\\
&R8 \times I3 + R7 \times I4 - (R7+R8+R9) \times I5 = 0
\end{aligned}
$$

În care se pun în evidență:

- Matricea sistemului, notată cu A,
- Matricea (vectorul) termenilor liberi, notată cu B,
- Matricea (vectorul) necunoscutelor, notată cu X.

$$
A = \begin{vmatrix}
(R1+R2+R3) & -R3 & 0 & -R2 & 0\\
-R3 & (R3+R4+R5) & -R4 & 0 & 0\\
0 & -R4 & (R4+R6+R8) & -R6 & -R8\\
-R2 & 0 & -R6 & (R2+R6+R7) & -R7\\
0 & 0 & -R8 & -R7 & (R7+R8+R9)
\end{vmatrix}
$$

$$
B = \begin{vmatrix} U1\\ U2\\ U3\\ U4\\ 0 \end{vmatrix}
\qquad
X = \begin{vmatrix} I1\\ I2\\ I3\\ I4\\ I5 \end{vmatrix}
$$

Forma matriceală a sistemului de ecuații liniare este:

$$A \times X = B$$

b) **Se va rezolva sistemul** de ecuații pentru diferite valori numerice.

Vectorul necunoscutelor rezultă astfel:

$$X = A \backslash B$$ (*împărțirea la stânga a matricelor*),

sau

$$X = A^{-1} \times B$$ (*folosirea matricii inverse*, calculată cu funcția `inv(A)`)

Presupunem că valorile rezistențelor sunt raportate la o valoare de referință *R*, după cum urmează:

R1=2R, R2=8R, R3=4R, R4=2R, R5=6R, R6=10R, R7=4R, R8=2R, R9=5R,

Iar tensiunile sunt date în funcție de o valoare *U*, astfel:

U1=U, U2=4U, U3=2U, U4=3U.

Matricile A și B devin:

$$A = \begin{vmatrix} 14R & -4R & 0 & -8R & 0 \\ -4R & 12R & -2R & 0 & 0 \\ 0 & -2R & 14R & -10R & -2R \\ -8R & 0 & -10R & 22R & -4R \\ 0 & 0 & -2R & -4R & 11R \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} U \\ 4U \\ 2U \\ 3U \\ 0 \end{vmatrix}$$

Fie R=30 Ω și U=12V

```
>> A=30.*[14 -4 0 -8 0;-4 12 -2 0 0;0 -2 14 -10 -2;-8 0 -10 22 -4;0 0 -2 -4 11]

A =
   420  -120     0  -240     0
  -120   360   -60     0     0
     0   -60   420  -300   -60
  -240     0  -300   660  -120
     0     0   -60  -120   330
```

```
>> B=12.*[1;4;2;3;0]

B =
   12
   48
   24
   36
    0
```

```
>> X=A\B
X =
   0.3790
   0.3360
   0.4582
   0.4452
   0.2452

>> X=inv(A)*B
X =
   0.3790
   0.3360
   0.4582
   0.4452
   0.2452
```

Fie acum R=30 Ω si U=220V

```
>> B=220.*[1;4;2;3;0]

B =
  220
  880
  440
  660
    0
```

```
>> X=A\B
X =
   6.9478
   6.1603
   8.3997
   8.1618
   4.4952

>> X=inv(A)*B
X =
   6.9478
   6.1603
   8.3997
   8.1618
   4.4952
```

Verificarea corectitudinii rezultatelor se poate face prin înmulțirea matriceală A x X :

```
>> A*X

ans =
   220.0000
   880.0000
   440.0000
   660.0000
      0.0000
```

S-au obținut, tocmai valorile vectorului termenilor liberi B (de la ultima execuție), deci rezultatul este validat.

c) Analiza matricii A

```
>> d=det(A)
d =
  3.3021e+12


>> iv=inv(A)
iv =
   0.0051   0.0022   0.0032   0.0037   0.0019
   0.0022   0.0039   0.0021   0.0020   0.0011
   0.0032   0.0021   0.0064   0.0046   0.0028
   0.0037   0.0020   0.0046   0.0054   0.0028
   0.0019   0.0011   0.0028   0.0028   0.0046


>> rk=rank(A)
rk =
    5


>> c=rcond(A)
c =
   0.0397
```

Referințe bibliografice

[1] Silviu Ionita, Petre Anghelescu, Adrian Teodor Stănescu, *Calcul Numeric Ingineresc. Mediul Matlab*, Ed. MatrixRom, Buc. 2007.

[2] Gheorghe Dodescu, Ion Odăgescu, Ștefania Scheianu, Pavel Năstase, *Simularea sistemelor*, Ed. Militară, Buc. 1986.

[3] https://www.mathworks.com/academia/students.html?s_tid=acb_stp