Cursul 8 Bazele Electrotehnicii & Electrotehnică

3.7 Metode de rezolvare a circuitelor de c.c. cu obţinerea răspunsului pe o singură latură

Foarte frecvent, în circuitele electrice complexe, interesează determinarea curentului sau a tensiunii numai pe o singură latură sau la bornele unei singure laturi a circuitului.

Pentru aceasta se recurge la metode care determină numai un curent sau numai o tensiune din circuit, aceste metode fiind bazate pe teoremele generatoarelor echivalente (de tensiune – Thevenin sau de curent – Norton).

a. Teorema generatorului echivalent de tensiune (Thevenin)

Enunţ: Intensitatea curentului dintr-o latură pasivă de circuit este egală cu raportul dintre tensiunea de la bornele laturii la mers în gol şi suma dintre rezistenţa laturii şi rezistenţa circuitului pasivizat.

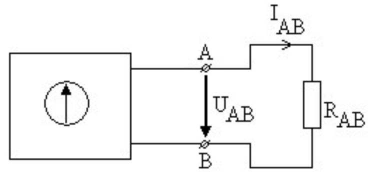


Fig. 3.24

$$I_{AB} = \frac{U_{AB_0}}{R_{AB} + R_{AB_0}} \tag{3.85}$$

R_{AB} - rezistenţa laturii; R_{AB_0} - rezistenţa reţelei pasivizate

U_{AB_0} - tensiunea între bornele A şi B în ipoteza că $R_{AB} \to \infty$.

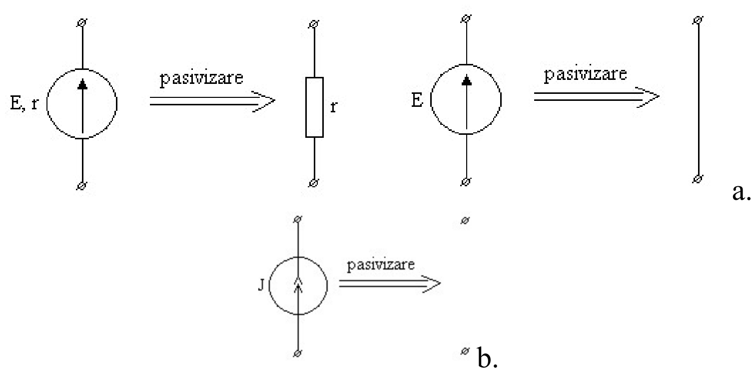


Fig. 3.25 a – pasivizarea unei surse de tensiune reală şi ideală; b – pasivizarea unei surse de curent ideale

Demonstraţie:

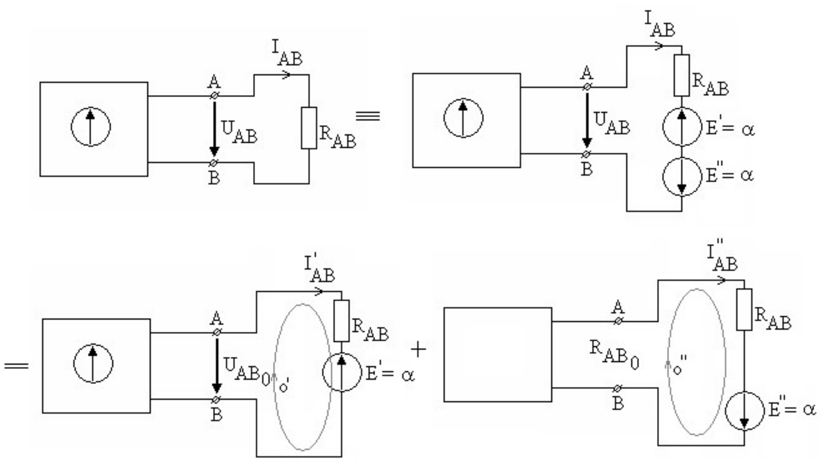


Fig. 3.26

$I_{AB} = I'_{AB} + I''_{AB}$ (Teorema superpoziţiei) (3.86)

Se reglează valoarea lui α astfel încât : $I'_{AB} = 0$

Aplicând:

TK II pe ochiul *(o')*: $-E' = -U_{AB_0} \Rightarrow U_{AB_0} = \alpha$ (3.87)

TK II pe ochiul *(o'')*: $E'' = (R_{AB} + R_{AB_0})I''_{AB} \Rightarrow I''_{AB} = \dfrac{E''}{R_{AB} + R_{AB_0}}$ (3.88)

Prin urmare din relaţiile (3.85) şi (3.86) rezultă:

$$I''_{AB} = \frac{\alpha}{R_{AB} + R_{AB_0}} = \frac{U_{AB_0}}{R_{AB} + R_{AB_0}} \quad (3.89)$$

Din relaţiile (3.84) şi (3.87) se deduce: $I_{AB} = \dfrac{U_{AB_0}}{R_{AB} + R_{AB_0}}$.

Schema electrică echivalentă corespunzătoare relaţiei (3.83) este prezentată în Fig. 3.29:

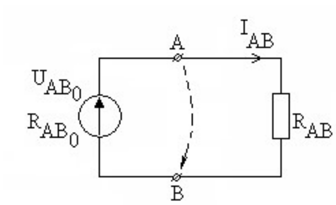


Fig. 3.27

b) Teorema generatorului echivalent de curent (Teorema lui Norton)

Enunţ: Tensiunea la bornele unei laturi pasive de circuit este egală cu raportul dintre intensitatea curentului de scurtcircuit din acea latură şi suma dintre conductanţa laturii şi conductanţa circuitului pasivizat.

$$U_{AB} = \frac{I^s_{AB}}{G_{AB} + G_{AB_0}} \quad (3.90)$$

Demonstraţie:

$$I_{AB}^{s} = I_{AB}\Big|_{R_{AB}=0} = \frac{U_{AB_0}}{R_{AB_0}} \tag{3.91}$$

$$G_{AB} = \frac{1}{R_{AB}} \tag{3.92}$$

$$G_{AB_0} = \frac{1}{R_{AB_0}} \tag{3.93}$$

$$I_{AB} = \frac{U_{AB_0}}{R_{AB} + R_{AB_0}} \quad \Big| \cdot R_{AB} \Rightarrow \underbrace{R_{AB} I_{AB}}_{U_{AB}} = \frac{U_{AB_0} \cdot R_{AB}}{R_{AB} + R_{AB_0}} \quad \Big| \begin{matrix} : R_{AB}R_{AB_0} \\ : R_{AB}R_{AB_0} \end{matrix}$$

$$U_{AB} = \frac{\dfrac{U_{AB_0}}{R_{AB_0}}}{\dfrac{1}{R_{AB_0}} + \dfrac{1}{R_{AB}}} = \frac{I_{AB}^{s}}{G_{AB} + G_{AB_0}}$$

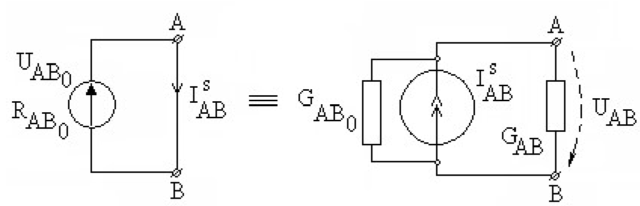


Fig. 3.28

APLICAȚII CIRCUITE DE CURENT CONTINUU
Metoda potențialelor la noduri (MPN)

Algoritm practic de rezolvare a circuitelor de curent continuu utilizând metoda potențialelor la noduri

1° - se stabilește numărul de noduri ale circuitului și fiecărui nod i se atribuie un potențial V_1, ..., Vn;

2° - se alege ca potențial de referință potențialul unui nod (de preferință cel mai încărcat);

3° - se aleg sensuri arbitrare ale curenților prin laturile circuitului;

Varianta A. Pentru circuite ce nu conțin laturi formate numai din surse ideale de tensiune, algoritmul se continuă astfel:

4° - se aplică *T1K* în *n-1* noduri;

5° - se explicitează curenții din laturi în funcție de potențiale cu relația (2.73), în care I_k și E_j au același sens de la nodul *j* la *k* (în caz contrar se adoptă un semn corespunzător pentru mărimile electrice);

$$I_k = \frac{E_k + V_j - V_k}{R_k} \tag{2.73}$$

6° - se rezolvă sistemul de *n-1* ecuații cu *n-1* necunoscute, în care necunoscutele sunt potențialele și apoi se determină curenții din laturi.

Varianta B. Pentru circuite ce conțin și laturi formate numai din surse ideale de tensiune, metoda de rezolvare se numește metoda nodală modificată (MNM).

În acest caz numărul de potențiale necunoscute se micșorează cu numărul de laturi ideale.

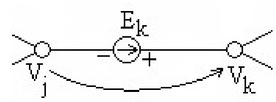


Fig.2.24

$$E_k = V_k - V_j \Rightarrow V_k = E_k + V_j \tag{2.82}$$

iar algoritmul se continuă astfel:

4° - se aplică T1K în noduri ce pot fi înconjurate cu suprafețe care nu intersectează laturile ideale;

5° - se explicitează curenții din laturi în funcție de potențiale cu relația (2.73), în care I_k și E_j au același sens de la nodul j la k (în caz contrar se adoptă un semn corespunzător pentru mărimile electrice) și se determină potențialele necunoscute;

6° – pentru determinarea curenților din laturile ideale se aplică T1K în noduri în care converg și laturi ideale de circuit.

Aplicația 1.

Pentru circuitul de curent continuu din figură, se cunosc:

$E_1 = 18,5V, \quad E_2 = r_{23} I_3, \quad E_3 = 4V,$

$I_s = 3A, \quad r_{23} = 5\Omega, \quad R_1 = 2,5\Omega, \quad R_2 = 5\Omega,$

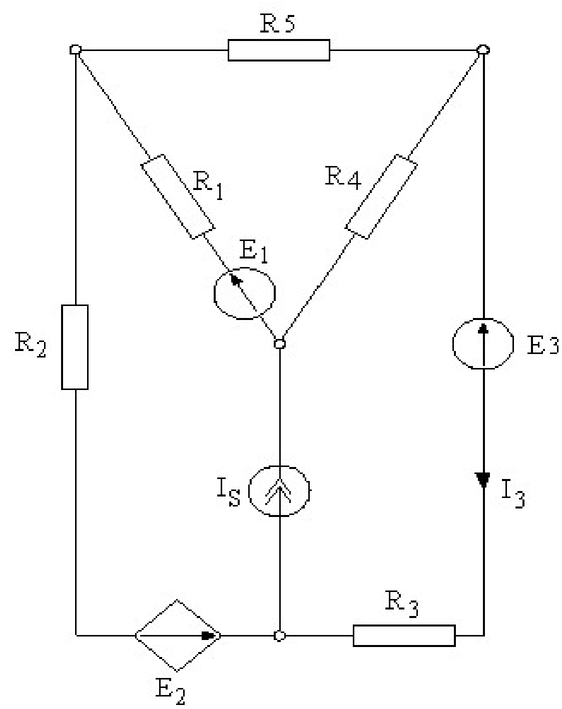
$R_3 = 2\Omega, \quad R_4 = 0,5\Omega, \quad R_5 = 2\Omega$

Se cer:

a) Să se scrie ecuațiile de rezolvare utilizând TK;

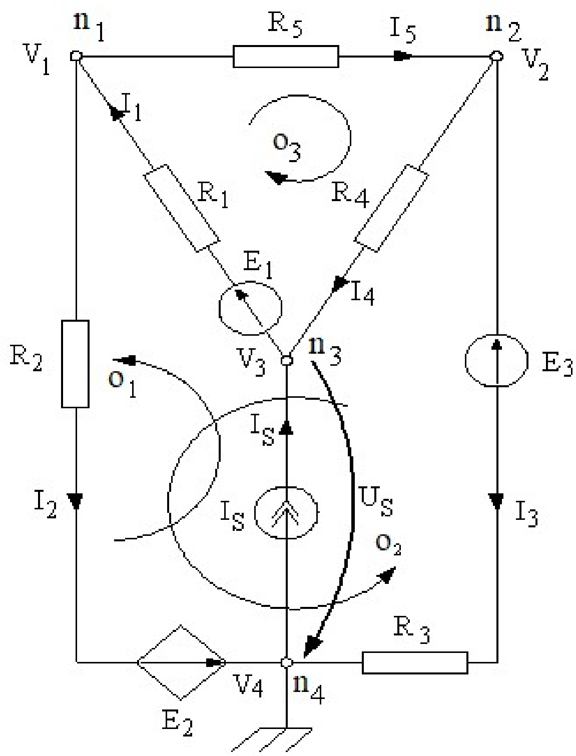
b) Să se rezolve utilizând MPN;

c) Să se verifice soluțiile obținute (B.P) și să se interpreteze.



Soluție:

a) n=4; l=6 ⇒ o=6–4+1=3



$$\text{T1K}\quad\begin{cases}(\text{n}\,1): I_5 - I_1 + I_2 = 0\\(\text{n}\,2): I_4 - I_5 + I_3 = 0\\(\text{n}\,3): I_1 - I_4 - I_s = 0\end{cases}$$

$$\text{T2K}\quad\begin{cases}(o_1): E_1 + E_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 - U_s\\(o_2): E_1 + E_2 + E_3 = R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4\\(o_3): E_1 = R_1 I_1 + R_5 I_5 + R_4 I_4\end{cases}$$

b) Rezolvare cu metoda potențialelor la noduri (MPN):

MPN (A)

$$\text{T1K}\quad\begin{cases}(\text{n}\,1): I_5 - I_1 + I_2 = 0\\(\text{n}\,2): I_4 - I_5 + I_3 = 0\\(\text{n}\,3): I_1 - I_4 - I_s = 0\end{cases}$$

Explicitarea curenților din laturi, în funcție de potențiale:

$$\mathrm{I}_1 = \frac{\mathrm{E}_1 + \mathrm{V}_3 - \mathrm{V}_1}{\mathrm{R}_1}$$

$$I_2 = \frac{E_2 + V_1 - 0}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{-E_3 + V_2 - 0}{R_3}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{E_2 + V_1}{R_2} = \frac{5\frac{-E_3 + V_2}{R_3} + V_1}{R_2}$$

$$I_4 = \frac{0 + V_2 - V_3}{R_4}$$

$$I_5 = \frac{0 + V_1 - V_2}{R_5}$$

$$\begin{cases} \frac{V_1 - V_2}{R_5} - \frac{E_1 + V_3 - V1}{R_1} + \frac{5\frac{-E_3 + V_2}{R_3} + V_1}{R_2} = 0 \\ \frac{V_2 - V_3}{R_4} - \frac{V_1 - V_2}{R_5} + \frac{-E_3 + V_2}{R_3} = 0 \\ \frac{E_1 + V_3 - V1}{R_1} - \frac{V_2 - V_3}{R_4} - I_S = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{V_1 - V_2}{2} - \frac{18,5 + V_3 - V_1}{2,5} + \frac{5\frac{-4 + V_2}{2} + V_1}{5} = 0 \\ \frac{V_2 - V_3}{0,5} - \frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{-4 + V_2}{2} = 0 \\ \frac{18,5 + V_3 - V1}{2,5} - 3 - \frac{V_2 - V_3}{0,5} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 5\mathrm{V}_1 - 5\mathrm{V}_2 - 74 - 4\mathrm{V}_3 + 4\mathrm{V}_1 - 20 + 5\mathrm{V}_2 + 2\mathrm{V}_1 = 0 \\ 4\mathrm{V}_2 - 4\mathrm{V}_3 - \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 - 4 + \mathrm{V}_2 = 0 \\ 18{,}5 + \mathrm{V}_3 - \mathrm{V}_1 - 7{,}5 - 5\mathrm{V}_2 + 5\mathrm{V}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11\mathrm{V}_1 - 4\mathrm{V}_3 = 94 \\ -\mathrm{V}_1 + 6\mathrm{V}_2 - 4\mathrm{V}_3 = 4 \\ -\mathrm{V}_1 - 5\mathrm{V}_2 + 6\mathrm{V}_3 = -11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \mathrm{V}_3 = \frac{11\mathrm{V}_1 - 94}{4} \\ -\mathrm{V}_1 + 6\mathrm{V}_2 - 11\mathrm{V}_1 + 94 = 4 \\ -\mathrm{V}_1 - 5\mathrm{V}_2 + 6\frac{11\mathrm{V}_1 - 94}{4} = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{V}_3 = \frac{11\mathrm{V}_1 - 94}{4} \\ -12\mathrm{V}_1 + 6\mathrm{V}_2 = -90 \\ -2\mathrm{V}_1 - 10\mathrm{V}_2 + 33\mathrm{V}_1 - 282 = -22 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \mathrm{V}_3 = \frac{11\mathrm{V}_1 - 94}{4} \\ \mathrm{V}_2 = \frac{12\mathrm{V}_1 - 90}{6} \\ -2\mathrm{V}_1 - 10\mathrm{V}_2 + 33\mathrm{V}_1 - 282 = -22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{V}_3 = \frac{11\mathrm{V}_1 - 94}{4} \\ \mathrm{V}_2 = 2\mathrm{V}_1 - 15 \\ -2\mathrm{V}_1 - 10(2\mathrm{V}_1 - 15) + 33\mathrm{V}_1 = 260 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V_3 = \dfrac{11V_1 - 94}{4} \\ V_2 = 2V_1 - 15 \\ -2V_1 - 10(2V_1 - 15) + 33V_1 = -260 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_3 = \dfrac{11V_1 - 94}{4} \\ V_2 = 2V_1 - 15 \\ 31V_1 - 20V_1 + 150 = 260 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V_3 = \dfrac{11V_1 - 94}{4} \\ V_2 = 2V_1 - 15 \\ 11V_1 = 110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_3 = \dfrac{110 - 94}{4} \\ V_2 = 5 \\ V_1 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_3 = 4\,V \\ V_2 = 5\,V \\ V_1 = 10\,V \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{18{,}5 + 4 - 10}{2{,}5} = \dfrac{12{,}5}{2{,}5}\,\text{A} \\ I_2 = \dfrac{5\dfrac{-4+5}{2} + 10}{5} = \dfrac{5}{2}\,\text{A} \\ I_3 = \dfrac{-4+5}{2} = \dfrac{1}{2}\,\text{A} \\ I_4 = \dfrac{5-4}{0{,}5} = \dfrac{1}{0{,}5}\,\text{A} \\ I_5 = \dfrac{10-5}{2} = \dfrac{5}{2}\,\text{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 5\,A \\ I_2 = 2{,}5\,A \\ I_3 = \dfrac{1}{2} = 0{,}5\,A \\ I_4 = 2\,A \\ I_5 = 2{,}5\,A \end{cases}$$

$E_1 + E_2 = R_1I_1 + R_2I_2 - U_s \Rightarrow U_s = R_1I_1 + R_2I_2 - E_1 - E_2 = 2{,}5\cdot 5 + 5\cdot 2{,}5 - 18{,}5 - 5\cdot 0{,}5 = 4\,V$

sau $U_s = V_3 - V_4 = 4\,V$, sursa de curent fiind singură pe latură, între cele două noduri.

c) B.P.

$P_g = E_1I_1 + E_2I_2 - E_3I_3 + U_sI_s = 18{,}5\cdot 5 + (5\cdot 0{,}5)\cdot 2{,}5 - 4\cdot 0{,}5 + 4\cdot 3 = 108{,}75\,W$

$P_c = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2 + R_4I_4^2 + R_5I_5^2 = 2{,}5\cdot 5^2 + 5\cdot 2{,}5^2 + 2\cdot 0{,}5^2 + 0{,}5\cdot 2^2 + 2\cdot 2{,}5^2 = 108{,}75\,W$

$\Rightarrow P_g = P_c$

Aplicația 2.

Pentru circuitul de curent continuu din figură, se cunosc:

$E_1 = 20V;\ r_1 = 2\Omega;\ E_2 = 15V;\ E_3 = r_{31}\cdot I_1;\ r_{31} = 3\Omega;$

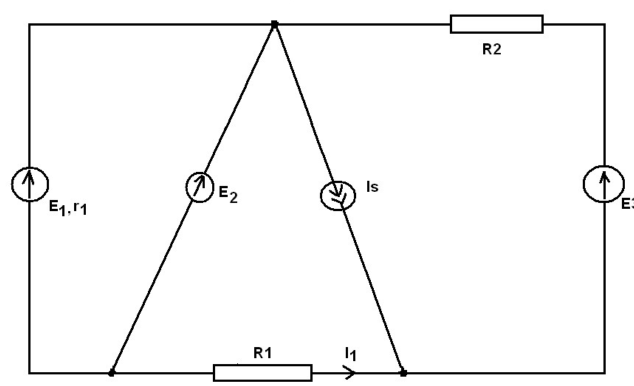
$R_1 = 4\Omega;\ R_2 = 6\Omega;\ I_s = 5A$

Se cer:

a) Să se scrie ecuațiile de rezolvare utilizând TK;

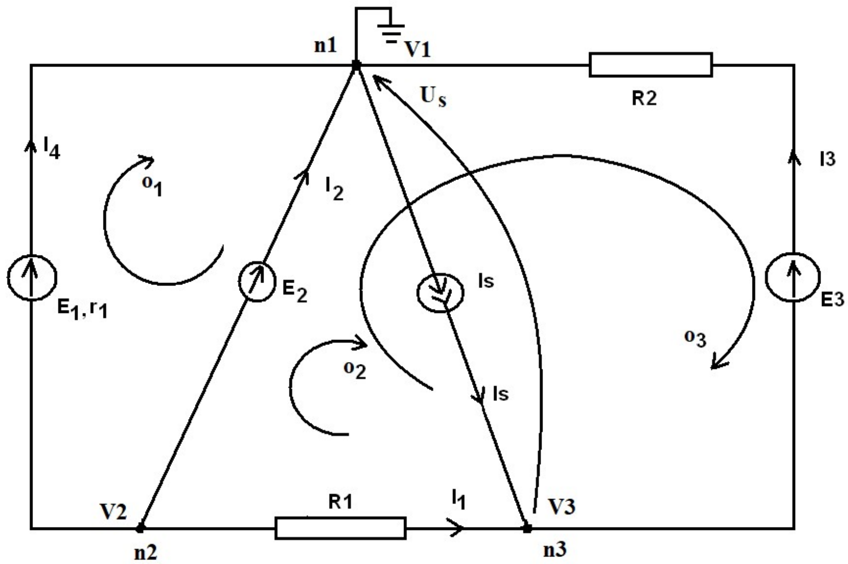
b) Să se rezolve utilizând MPN;

c) Să se verifice soluțiile obținute (B.P) și să se interpreteze.



Soluție:

a) n=3; l=5 $\Rightarrow$ o=5–3+1=3



T1K: (n1): $-I_4 - I_2 + I_s - I_3 = 0$

(n3): $I_3 - I_s - I_1 = 0$

T2K: (o_1): $E_1 - E_2 = r_1 \cdot I_4$

(o_2) : $E_2 = -R_1 \cdot I_1 - U_s$

(o_3): $E_2 - E_3 = -R_2 \cdot I_3 - R_1 \cdot I_1$

b) Rezolvare cu metoda nodală modificată (MNM)

n=3 => V_1, V_2, V_3 ; V_1=0

$E_2 = V_1 - V_2 = 0 - V_2 = -V_2 \Rightarrow V_2 = -E_2 = -15\,V$

$$I_1 = \frac{0 + V2 - V_3}{R_1} = \frac{-E_2 - V_3}{R_1}$$

$$I_3 = \frac{E_3 + V_3 - 0}{R_2} = \frac{\mathrm{r}_{31}\,\frac{-E_2 - V_3}{\mathrm{R}_1} + V_3}{R_2}$$

$$I_4 = \frac{E_1 + V_2 - 0}{r_1}$$

Se înlocuiesc curenții în ecuația scrisă cu T1K, pentru nodurile ce nu conțin latura ideală, adică n3.

$$\frac{\mathrm{r}_{31}\,\frac{-E_2 - V_3}{\mathrm{R}_1} + V_3}{R_2} - I_s - \frac{-E_2 - V_3}{R_1} = 0$$

$$\frac{3\frac{-15-V_3}{4}+V_3}{6}-5-\frac{-15-V_3}{4}=0$$

$$\frac{-45-3V_3+4V_3}{24}-5-\frac{-15-V_3}{4}=0$$

$$-45+V_3-120+90+6V_3=0$$

$$7V_3=75 \Rightarrow V_3=\frac{75}{7}=10,71\,V$$

$$I_1=\frac{-15-10,71}{4}=-6,42\ A$$

$$I_3=\frac{-45+V_3}{24}=\frac{-45+10,71}{24}=-1,42\ A$$

$$I_4=\frac{E_1+V_2}{r_1}=\frac{20-15}{2}=2,5\ A$$

$$\Rightarrow I_2=-I_4+I_s-I_3=-2,5+5+1,42=3,92\ A$$

$$U_s=V_3-V_1=10,71\,V$$

c) B.P.

$$P_g=E_1I_4+E_2I_2+E_3I_3+U_sI_s=20\cdot 2,5+15\cdot 3,92+3\cdot(-6,42)(-1,42)+10,71\cdot 5=189,69\,W$$

$$P_c=R_1I_1^2+R_2I_3^2+r_1I_4^2=4\cdot(-6,42)^2+6\cdot(-1,42)^2+2\cdot 2,5^2=189,69\,W$$

$$\Rightarrow P_g=P_c$$

Interpretare:

Sensurile reale ale curenților I_1 *și* I_3 *sunt opuse celor alese în mod arbitrar.*