## Suport de curs Modelare si simulare #5

- ✓ Modelarea si simularea problemelor diferenţiale
- ✓ Probleme ce implica calculul derivatei si integralei

**Modele diferențiale**

- **Sunt modele matematice care țin seama de dinamica fenomenelor (procese si sisteme) – exprimate prin dependențe continue sau discontinue sub formă de funcții.**
- **Modelele diferențiale se reduc la modele algebrice prin transformare cu ajutorul unor operatori. Exemplu: diferențele finite Δ (de diferite ordine) transformata Laplace (transformare integrală).**
- **Calculul diferențial în general implică funcții: Newton și Leibniz sunt părinții calculului diferențial (introducând *conceptul de integral/calcul integral*).**

<u>Exemple</u> procese dinamice – miscarea obiectelor

(a) $s(t) = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ $\left\{ \begin{array}{l} a = ct. \\ v_0 = ct. \end{array} \right.$

viteza = variatia spatiului in timp.

$v(t) = \frac{ds}{dt} = v_0 + at$ $\quad v = \dot{s}$ $\quad$ | $f'(x)$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = a$ $\quad a = \dot{v} = \ddot{s}$

<u>GPS</u> → pozitii $(\lambda, \varphi, H)$

$(\dot{\lambda}, \dot{\varphi})$ → viteza de deplasare. Δt.

<u>INS</u> → acceleratii

$a \xrightarrow{\int} \dot{v} \xrightarrow{\int} (x, y)$ $\quad$ $s = \iint a\, dt.$

(b) Energia = integrala puterii in timp

$E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) \cdot dt$ $\quad$ $E = P \cdot \Delta t$

## (c) Modele multivariabilă

- $\underbrace{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\text{variabile independente (ireductibile)}}$ $x$
- $F(f''(x), f'(x), x)$ explicit/sau nu
- modele cu derivate parțiale

Gradientul unei funcții scalare $\varphi(x, y, z)$

$$\boxed{\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \bar{k}}$$

În modelele diferențiale se utilizează calculul variațional

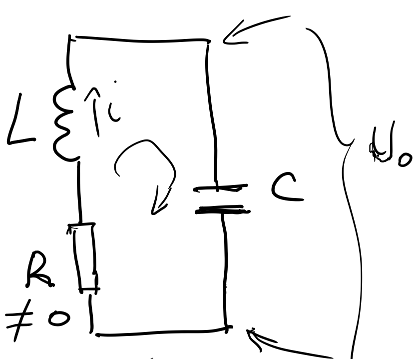
analiza matematică
- creșterea/descreșterea funct.
- căutarea min/max funct.
- determinarea trecerilor prin 0

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

---

## Ecuații diferențiale

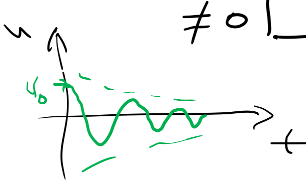
Exemplu oscilatorul < electric LCR; mecanic (pendulul)




$$-u_L - u_R + u_C = 0$$

$$-L \underbrace{\frac{d^2 q}{dt^2}}_{\ddot{i}} - R \underbrace{\frac{dq}{dt}}_{i} + \underbrace{\frac{q}{C}}_{u_C} = 0$$

$$\boxed{LC\ddot{u} + RC\dot{u} + u = 0}$$



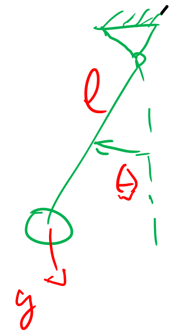

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

Se cere $u(t)$ pt. cond. inițiale $\begin{cases} u(t_0) = u_0 \\ t_0 = 0 \end{cases}$

Analog: oscilatorul mecanic (pendulul)

$$m\cdot l\,\ddot{\theta} + k\cdot l\,\dot{\theta} + mg\theta = 0$$

const. de amortizare




$$\theta(t) \longrightarrow \text{cond. inițiale} \begin{cases} \theta(t_0)=\theta_0 \\ t_0 = 0 \end{cases}$$

---

$$F_T = m\cdot a \Rightarrow a = \frac{F_t}{m} \Rightarrow \begin{cases} s = v_0 t + a\frac{t^2}{2} \\ v = v_0 + at \end{cases}$$

sistem de forțe

$$a = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} F_i \qquad F_i = \begin{cases} \text{Forțe de frecare cu aerul } F_R = \frac{\rho v^2}{2} S C_R \\ \text{Forțe de frecare cu solul (rostogolire)} \\ \text{Forțe gravitaționale (componente)} \end{cases}$$

$$\boxed{a(t) = \frac{1}{m}\left(F_T - F_R - F_f \pm F_G\right)}$$

depind de viteză!

α - panta drum

$m \neq ct \Rightarrow m(t)$