Cursul 11 Bazele Electrotehnicii & Electrotehnică

4.6 Caracterizarea în complex a circuitelor liniare aflate în regim armonic permanent

Circuitele liniare de c.a. au fost caracterizate în paragrafele anterioare prin parametrii reali (impedanța Z, admitanța Y), iar din punct de vedere energetic prin puterile reale P, Q și S.

4.6.1 Impedanța și admitanța complexă

Se definește ***impedanța complexă*** a unui circuit ca fiind raportul dintre tensiunea complexă și curentul complex.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{j\gamma_u}}{I \cdot e^{j\gamma_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\gamma_u - \gamma_i)} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} \tag{4.53}$$

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} cos\varphi + j\frac{U}{I} sin\varphi$$

Cum $\frac{U}{I} cos\varphi = R$ și $\frac{U}{I} sin\varphi = X \Rightarrow$

$$\underline{Z} = R + jX \tag{4.54}$$

cu modulul $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$

Observație: Impedanța complexă a unui circuit nu depinde de valoarea curentului sau a tensiunii, are modulul egal cu impedanța reală, argumentul egal cu defazajul circuitului, partea reală egală cu rezistența circuitului și cea imaginară egală cu reactanța circuitului.

Se definește **admitanța complexă** a unui circuit ca fiind raportul dintre curentul complex și tensiunea complexă dintr-o ramură de circuit.

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I \cdot e^{j\gamma_i}}{U \cdot e^{j\gamma_u}} = \frac{I}{U} e^{j(\gamma_i - \gamma_u)} = \frac{I}{U} e^{-j\varphi} \tag{4.55}$$

$$\underline{Y} = \frac{I}{U} cos\varphi - j\frac{I}{U} sin\varphi$$

Cum $\frac{I}{U} cos\varphi = G$ și $\frac{I}{U} sin\varphi = B \Rightarrow$

$$\underline{Y} = G - jB \tag{4.56}$$

cu $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$

Observație: Admitanța complexă a unui circuit nu depinde de valoarea curentului sau a tensiunii, are modulul egal cu admitanța reală, argumentul egal cu defazajul cu semn schimbat, partea reală egală cu conductanța circuitului și partea imaginară egală cu susceptanța cu semn schimbat.

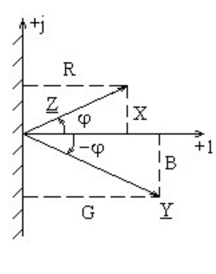
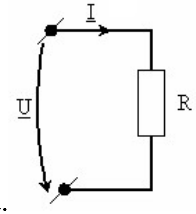


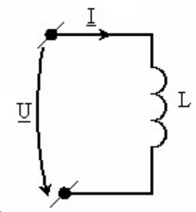
Fig. 4.22

Exemple. Să se precizeze impedanțele și admitanțele complexe precum și modulele lor pentru următoarele elemente ideale de circuit:

a. 

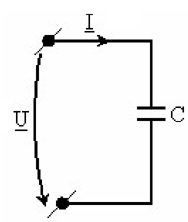
Rezistor ideal

$$R = 10\ \Omega$$
$$X = 0\ \Omega$$
$$\Rightarrow \underline{Z} = R = 10;\ Z = 10\ \Omega$$
$$G = \frac{1}{R} = 0{,}1\ S$$
$$B = 0\ S$$
$$\Rightarrow \underline{Y} = G = 0{,}1\ ;\ Y = 0{,}1\ S$$

b. 

Bobină ideală

$$L = \frac{0{,}4}{\pi} H,\ R = 0\ \Omega,\ f = 50\ Hz$$
$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 100\pi \frac{0{,}4}{\pi} = 40\Omega$$
$$\Rightarrow \underline{Z} = jX_L = 40j;\ Z = 40\ \Omega$$
$$B = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{40} = 0{,}025\ S;\ G = 0\ S$$
$$\Rightarrow \underline{Y} = -jB = -0{,}025j;\ Y = 0{,}025\ S$$

c. 

Condensator ideal

$$C = \frac{2000}{\pi} \mu F,\ R = 0\ \Omega,\ f = 50\ Hz$$
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{100\pi \frac{2000}{\pi} 10^{-6}} = 5\ \Omega$$
$$\Rightarrow \underline{Z} = -jX_C = -5j,\ Z = 5\ \Omega$$
$$B = -\frac{1}{X_C} = -\omega C = -\frac{1}{5} = -0{,}2\ S;\ G = 0\ S$$
$$\Rightarrow \underline{Y} = -jB = 0{,}2j;\ Y = 0{,}2\ S$$

Ex. Impedanța complexă: $\underline{Z} = R + jX$, $X = X_L - X_C$

- caracter rezistiv: R≠0 (R>0), X=0; ex. $\underline{Z} = 10$
- caracter pur inductiv: R=0, X>0; ex. $\underline{Z} = j5$
- caracter inductiv: R≠0, X>0; ex. $\underline{Z} = 3 + j7$
- caracter pur capacitiv: R=0, X<0; ex. $\underline{Z} = -j15$
- caracter capacitiv: R≠0, X<0; ex. $\underline{Z} = 25 - j40$

4.6.2 Puterea complexă

Deoarece puterea instantanee nu este o mărime sinusoidală, ei nu i se poate asocia un simbol complex. Pentru a scrie însă într-o formă compactă cele trei puteri (P, Q, S) se folosește scrierea complexă a puterii aparente sub forma:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \tag{4.57}$$

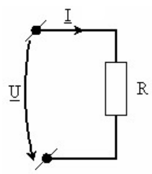
$$\underline{S} = U \cdot e^{j\gamma_u} I \cdot e^{-j\gamma_i} = UIe^{j(\gamma_u - \gamma_i)} = UIe^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ$$

$$\underline{S} = P + jQ \tag{4.58}$$

cu $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ (4.59)

Observație: Puterea complexă are modulul egal cu puterea aparentă, argumentul egal cu defazajul circuitului, partea reală egală cu puterea activă și partea imaginară egală cu puterea reactivă.

Exemple. Să se calculeze puterile absorbite de următoarele elemente ideale de circuit.



Rezistorul ideal

a) rezistorul ideal

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{U}{R}, \quad \underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \frac{U^2}{R} = RI^2$$

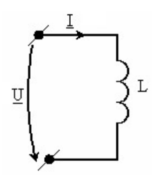
$\mathrm{Re}\{\underline{S}\} = P = RI^2$ şi $\mathrm{Im}\{\underline{S}\} = Q = 0$

$R = 100\ \Omega, I = 5\ A$

$P = 100 \cdot 5^2 = 2500\ W = 2{,}5\ kW$

$Q = 0\ VAr$

$\underline{S} = P + jQ = 2500;\ S = 2500\ VA$



Bobina ideală

b) bobina ideală

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{jX_L} = -j\frac{U}{X_L}$$

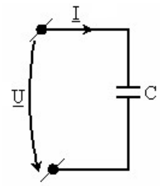
$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = U(j\frac{U}{X_L}) = j\frac{U^2}{X_L} = jX_L I^2$$

$\mathrm{Re}\{\underline{S}\} = P = 0$ şi $\mathrm{Im}\{\underline{S}\} = Q = X_L I^2$

$X_L = 20\ \Omega, I = 10\ A$

$P = 0\ W, Q = 20 \cdot 10^2 = 2000\ VAr$

$\underline{S} = P + jQ = 2000j;\ S = 2000\ VA$



Condensatorul ideal

Deoarece puterea reactivă absorbită de condensator este negativă rezultă că de fapt condensatorul generează putere reactivă.

c) condensatorul ideal

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{-jX_C} = j\frac{\underline{U}}{X_C}$$

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = U(-j\frac{U}{X_C}) = -j\frac{U^2}{X_C} = -jX_C I^2$$

$$\mathrm{Re}\{\underline{S}\} = P = 0 \quad \text{şi} \quad \mathrm{Im}\{\underline{S}\} = Q = -X_C I^2$$

$$X_C = 15\ \Omega, I = 10\ A$$

$$P = 0\ W, Q = -15 \cdot 10^2 = -1500\ VAr$$

$$\underline{S} = P + jQ = -1500\,j;\ S = 1500\ VA$$

4.7. Analogia dintre circuitele de curent continuu şi cele de curent alternativ (în complex simplificat)

În *tabelul următor* sunt prezentate analogiile circuitelor de curent continuu şi curent alternativ. Analogia este completă numai dacă nu există cuplaje inductive între laturile reţelei. Aceasta se poate realiza prin echivalarea cuplajelor cu sursele de tensiune electromotoare echivalente în complex simplificat.

Circuite de curent continuu	**Circuite de curent alternativ**
Rezistența, R	Impedanța, $\underline{Z}$
Tensiunea electrică, U	$\underline{U}$
Intensitatea curentului, I	$\underline{I}$
Tensiunea electromotoare, E	$\underline{E}$
Intensitatea surselor de curent, J, I_s	$\underline{J}$, $\underline{I}_s$
Teorema generatorului echivalent de tensiune: $I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB} + R_{AB0}}$	$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{AB0}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{AB0}}$
Teorema potențialelor la noduri, G, I_{sc}, V	$\underline{Y}$, $\underline{I}_{sc}$, $\underline{V}$
Teorema curenților de buclă, R, E_b, I_b	$\underline{Z}$, $\underline{E}_b$, $\underline{I}_b$

În baza echivalenţei dintre circuitele de curent continuu şi circuitele de curent alternativ toate teoremele referitoare la circuitele de curent continuu sunt valabile şi pentru circuitele de curent alternativ în complex simplificat.

4.8 Teoremele circuitelor liniare sub formă complexă

..

4.8.2. Forma complexă a teoremelor lui Kirchhoff

a). Teorema I.(TK.I)

Se consideră un nod q în care se intersectează *n* laturi de circuit:

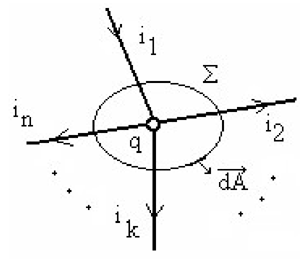


Fig. 4.30

$$-i_1 + i_2 + \ldots + i_k + \ldots + i_n = 0 \xrightarrow{C} -\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \ldots + \underline{I}_k + \ldots + \underline{I}_n = 0$$

$$\sum_{k \in q} \pm i_k = 0 \xrightarrow{C} \sum_{k \in q} \pm \underline{I}_k = 0 \qquad (4.75)$$

Enunț:*Suma algebrică a imaginilor în complex a intensităților curenților dintr-un nod este nulă.*

Observație: Relația (4.75) nu este valabilă pentru modulele (valorile efective) ale curenților și anume $\sum_{k \in q} \pm I_k \neq 0$ *!!!*

b). Teorema a II-a (TK.II)

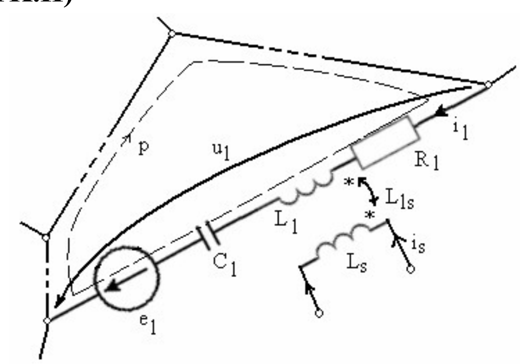


Fig. 4.31

....

$$\sum_{l \in p} \underline{E}_l = \sum_{l \in p} (\underline{Z}_{ll} \cdot \underline{I}_l + \sum_{l \neq s} \underline{Z}_{ls} \underline{I}_s) \qquad (4.81)$$

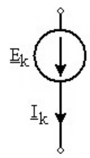
Enunț: *Suma algebrică a imaginilor în complex ale tensiunilor electromotoare dintr-un ochi de rețea este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune complexe din acel ochi.*

4.9 Teorema conservării puterilor în circuite de curent alternativ

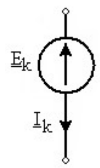
..

Observații: Convenții de semne

1. După cum sursele de tensiune electromotoare sunt generatoare sau receptoare, puterea complexă generată se poate scrie:



a) Dacă $\underline{E}_k \; si \; \underline{I}_k$ au acelaşi sens $\underline{S}_g = \underline{E}_k \underline{I}_k^*$.

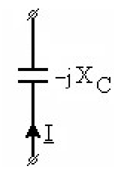


b) Dacă $\underline{E}_k \; si \; \underline{I}_k$ au sensuri contrare $\underline{S}_g = -\underline{E}_k \underline{I}_k^*$.

....

4. Puterile reactive ala bobinei ideale şi condensatorului ideal:

$Q_c = X_L I^2$



$Q_c = -X_C I^2$

De reţinut:

Pentru a efectua bilanţul puterilor active şi reactive dintr-un circuit dat se calculează mai întâi puterea complexă generată (ţinând cont de sursele de tensiune sau de curent care pot fi în circuit şi de regimul lor de funcţionare), de forma generală:

$\underline{S}_g = \sum \pm \underline{E}_l \underline{I}_l^* + \sum \pm \underline{U}_{gl} \underline{I}_{sl}^*$, din care se deduc ***puterile activă şi reactivă generate***, $P_g \; si \; Q_g$

$\underline{S}_g = P_g + jQ_g$

Se calculează apoi ***puterile activă şi reactivă consumate*** în circuit, ţinând cont de componentele pasive din circuit şi de cuplaje, de forma generală:

$$P_c = \sum R_l I_l^2$$

$$Q_c = \sum X_{L_l} I_l^2 - \sum X_{C_l} I_l^2 \pm \sum 2 X_{M_{ls}} I_l I_s \cos(\gamma_l - \gamma_s)$$

Puterile activă şi reactivă consumate se pot deduce şi din puterea complexă consumată în circuit, de forma generală:

$$\underline{S}_c = \sum \underline{Z}_l I_l^2 \pm j2 \sum_{\substack{l,s=1 \\ l \neq s}}^{L} X_{ls} I_s I_l \cos(\gamma_s - \gamma_l)] = P_c + jQ_c$$

Bilanţul de puteri active şi reactive presupune verificarea egalităţilor:

$$P_g = P_c \text{ şi } Q_g = Q_c . \tag{4.95}$$

4.10 Transferul maxim de putere activă în circuitele de curent alternativ monofazate

Se consideră un generator de tensiune cu tensiunea electromotoare complexă $\underline{E}_g$ şi impedanţa internă complexă $\underline{Z}_g = R_g + jX_g$, care debitează curentul $\underline{I}$ prin impedanţa receptorului $\underline{Z} = R + jX$. Impedanţa conductoarelor de legătură se neglijează sau se consideră inclusă în impedanţa internă a generatorului.

Se cere să se calculeze valoarea impedanţei $\underline{Z}$ a receptorului astfel încât puterea activă transferată acestuia să fie maximă.

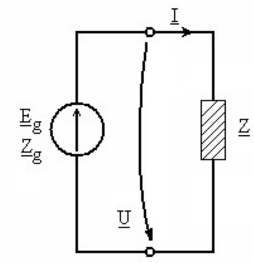


Fig. 4.35

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_g + \underline{Z}} = \frac{\underline{E}_g}{(R_g + R) + j(X_g + X)} \tag{4.96}$$

$$I = \frac{E_g}{\sqrt{(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2}} \tag{4.97}$$

Puterea activă a receptorului este:

$$P_R = RI^2 = R\frac{E_g^2}{(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2} \tag{4.98}$$

Maximul acestei puteri se obține pentru anumite valori ale lui R și X. În punctul de maxim, derivatele parțiale în raport cu R și X sunt nule, $\frac{\partial P_R}{\partial R} = 0$ și $\frac{\partial P_R}{\partial X} = 0$.

Dar $\frac{\partial P_R}{\partial R} = \frac{E_g^2\left[(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2\right] - RE_g^2 2(R_g + R)}{\left[(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2\right]^2}$

$$\Rightarrow (R_g + R)(R_g + R - 2R) + (X_g + X)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (R_g + R)(R_g - R) + (X_g + X)^2 = 0 \tag{4.99}$$

$$\frac{\partial P_R}{\partial X} = \frac{-RE_g^2 2(X_g + X)}{\left[(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2\right]^2}$$

$$\Rightarrow R(X_g + X) = 0$$

Cum $R \neq 0 \Rightarrow X_g + X = 0 \Rightarrow X = -X_g$ (4.100)

Din relațiile (4.100) și (4.99) $\Rightarrow R_g - R = 0$

$$\Rightarrow R = R_g \tag{4.101}$$

Atunci $\underline{Z} = R + jX = R_g - jX_g = \underline{Z}_g^*$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_g^* \tag{4.102}$$

Relația (4.102) se numește și ***condiția de adaptare a receptorului la generator*** pentru a obține transferul maxim de putere activă.

Cu aceste condiții:

- curentul prin receptor este: $\underline{I} = \dfrac{\underline{E}_g}{2R}$, $I = \dfrac{E_g}{2R}$ (4.103)

- tensiunea la bornele receptorului este: $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} = (R + jX)\dfrac{\underline{E}_g}{2R}$ (4.104)

- puterea activă maximă transmisă receptorului:

$$P_{R\,max} = RI^2\Big|_{\substack{R=R_g \\ X=-X_g}} = \frac{E_g^2}{4R} \tag{4.105}$$

- puterea activă produsă de generator în acest caz:

$$P_g = Re(\underline{E}_g \underline{I}^*) = P_c = (R_g + R)I^2 = \frac{E_g^2}{2R} \tag{4.106}$$

Randamentul electric al transferului de putere activă de la generator la receptor este:

$$\eta = \frac{P_R}{P_g} = \frac{R}{R_g + R} \tag{4.107}$$

În condițiile maximului de putere activă la bornele receptorului, randamentul are valoarea:

$$\eta = \frac{R}{2R} = 0{,}50 \;\Rightarrow\; \eta[\%] = 50\% \tag{4.108}$$

Observație: Această valoare a randamentului este mult prea scăzută pentru necesitățile transmisiei de energie. În electroenergetică, unde se cer randamente cât mai mari, se lucrează cu $R_g << R$, departe de condiția de adaptare. În electrocomunicații, unde aspectul energetic este secundar, interesează să se obțină maximul de putere activă dintr-un generator dat și, în acest caz, se caută satisfacerea condiției de adaptare.