Card T46

Задача: Точки A_1, B_1, C_1 на сторонах остроугольного треугольника ABC выбраны так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересеклись в точке O, а углы AA_1C, BB_1A, CC_1B оказываютсяались равными. Докажите, что эти отрезки являются высотами треугольника $\triangle ABC$.

Подсказка:

Доказательство: Нетрудно доказать, что около четырехугольников AC_1OB_1 и CA_1OB_1 можно описать окружности. По теореме о секущей и касательной имеем равенство: $BB_1 \cdot BO = BC \cdot BA_1 = BA \cdot BC_1$ или $BC : BA = BC_1 : BA_1$.

Из последнего равенства следует, что $\triangle BCC_1 \sim \triangle BAA_1$, т.е., $\angle BA_1A = \angle BC_1C = \angle AA_1C = 90°$, т.к. углы BA_1A и $\angle AA_1C$ являются смежными.

Card T47

1. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

   Подсказка: $\sin\alpha = \pm\frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \pm\frac{12}{13}$.

2. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$ Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

   Подсказка: $\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{4}$ Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

   Подсказка: $\sin\alpha = \pm\frac{7}{5}$, $\cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$.

4. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$ Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

   Подсказка: $\sin\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}$.

Card T48

Задача: Найти $\cos(\vec{a} \cdot \vec{b})$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы векторами:

1. $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-2, 1)$

   Подсказка: $\cos(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$.

2. $\vec{a} = (-3, 2)$, $\vec{b} = (2, 3)$

   Подсказка: $\cos(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$.

3. $\vec{a} = (4, 4)$, $\vec{b} = (-4, -4)$

   Подсказка: $\cos(\vec{a} \cdot \vec{b}) = -1$.

4. $\vec{a} = (-5, -5)$, $\vec{b} = (5, 5)$

   Подсказка: $\cos(\vec{a} \cdot \vec{b}) = -1$.

Card T53

1. $|x + 2| = 2(3 - x)$;
2. $|3x - 2| + x = 10$;
3. $|5x - 4| = 4 - 5x$;
4. $|2x - 3| = 3 - 2x$;

Подсказка:

$$\begin{array}{ll} 8, & \frac{4}{3}; \\ -4, & 3; \\ \frac{4}{5}, & 0.8; \\ \frac{3}{2}, & 1.5 \end{array}$$

Card T55

Найдите все натуральные числа в десятичной записи, которые уменьшаются до 1996 при вычитании из них этого числа без последней цифры.

Подсказка:

Пусть число имеет вид $\overline{abc\ldots mn}$, тогда:

$$\overline{abc\ldots mn} - \overline{abc\ldots m} = 1996 \implies 10x + n - x = 1996 \implies 9x + n = 1996 \implies$$

$$\implies x = \frac{1996 - n}{9}, \quad \text{где} \quad n \in \{0, 1, \ldots, 9\} \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 7 \\ x = 221 \end{array} \right.$$

Ответ: $\overline{abc\ldots mn} = 2217$.

Card T59

Докажите неравенство:

$$(1 + a + a^2 + a^3)^2 \leq 4(1 + a^2 + a^4 + a^6)$$

Подсказка:

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ 3a^6-2a^5+a^4-4a^3+a^2-2a+3\geq 0\ \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow\ a^4(a^2-2a+1)+(a^2-2a+1)+2(a^6-2a^3+1)=\\
&=(a^4+1)(a-1)^2+2(a^3-1)^2\geq 0.
\end{aligned}$$

Card TD 04 (Demidova)

Ученики Петя, Коля, Вася, Иван, Миша по очереди выполнили по одному примеру из таблицы умножения. При этом, у каждого последующего получился результат в полтора раза больший, чем у предыдущего. Какие числа перемножил Иван?

Подсказка:

$$x, \frac{3x}{2}, \frac{9x}{4}, \frac{27x}{8}, \frac{81x}{16} \Longrightarrow x=16$$
$$16, 24, 36, 54, 81$$

Card TD 20 (Demidova)

Два брата продали n цыплят по n лей. Деньги делили так. 10 лей взял старший брат, 10 лей младший, опять 10 лей старший и т.д. В конце меньшему брату не хватило денег до 10 лей. Он взял остаток и ножик старшего брата, после чего они согласились, что деление было правильным. Сколько стоит ножик?

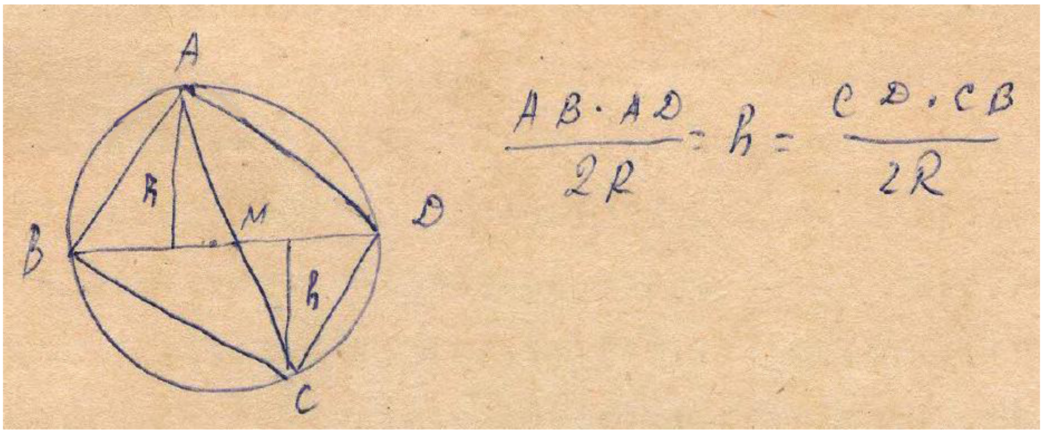
Подсказка:

Ясно, что выручка была n^2, причем, $n^2>30$. Пусть $n=10a+b$. Тогда $n^2=100a^2+20ab+b^2=20a(5a+b)+b^2$. Но число десяток в n^2 должно быть нечетным. Это возможно тогда и только тогда, когда $b^2=16$ или 36. Значит, остаток равен 6. Значит, ножик стоит 2 лея. (???4 - ред.)

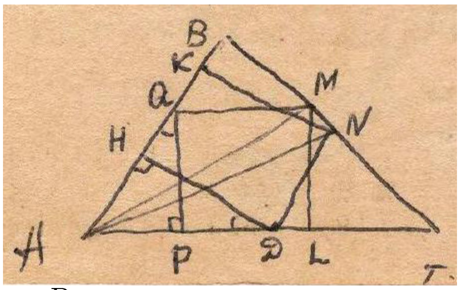
Card T Fig 01

Окружность, описанная около треугольника ABC, пересекает продолжение медианы BM в точке D. Докажите, что $AB\cdot AD=CB\cdot CD$.

Подсказка:



Card T Fig 06



Все квадраты, вписанные в треугольник (вершины на сторонах треугольника), оказались равными. Найдите углы треугольника.

Решение:

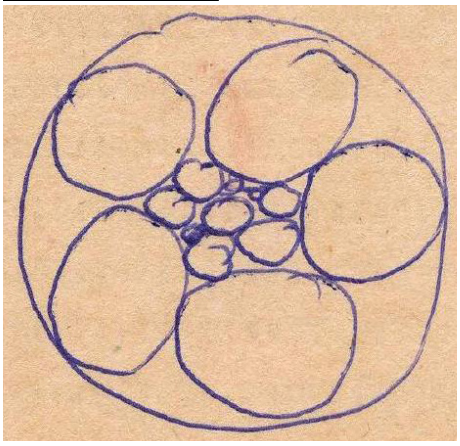
У каждого треугольниа ABC по крайней мере два острых угла. Покажем, что если угол A острый, то в условиях задачи $AB = AC$. Действительно, пусть $PQML$ и $HDNK$ – равные квадраты. Тогда $\triangle ADH = \triangle AQP$ и следовательно $\triangle ADN = \triangle AQM$ и $\angle NDC = \angle MQB$.

С другой стороны $\angle QMC = \angle DNB$, и значит $\angle DNC = \angle QM?$. Так как и $DN = MQ$, то $\triangle DNC = \triangle QMB$ и $AB = AC$. Если у треугольника ABC еще и угол C острый, то $AC =??$, т.е., треугольник равносторонний и все углы у него равны $60°$.

Card T Fig 07

Можно ли на плоскости нарисовать 12 окружностей так, чтобы каждая касалась ровно 5 окружностей?

Подсказка: Да.

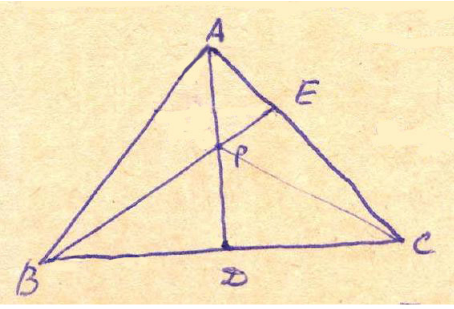


Card T Fig 08

Через произвольную точку P медианы AD треугольника $\triangle ABC$ проведена прямая BP, пересекающая сторону AC в точке E.

Докажите, что $AP : PD = 2 \cdot AE : EC$.

Подсказка:

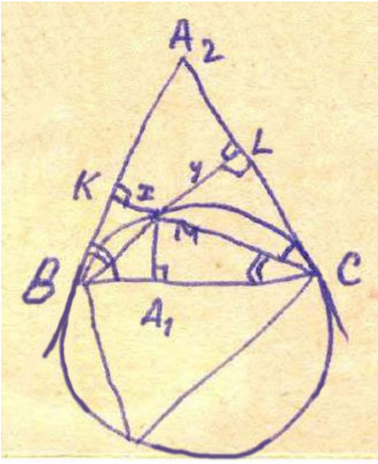


Проведем CP. Тогда $S_{ABP} = S_{ACP}$ и $AE : EC = \frac{S_{ABP}}{S_{BCP}} = \frac{S_{ACP}}{S_{BCP}} = \frac{S_{ACP}}{2S_{DPC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AP}{PD}$
ч. и т.д.

Card T Fig 10

Через вершины треугольника проведены касательные к описанной около него окружности. Расстояния от произвольной точки окружности до прямых, содержащих стороны треугольника, обозначены через a, b, c, а до касательных – x, y, z. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 = xy + yz + zx$.

Подсказка:



Пусть M – точка на описанной окружности: $MK \perp BA_2$, $ML \perp CA_2$, $MA_1 \perp BC$ и $MK = x$, $ML = y$, $MA_1 = a$. Покажем, что $a^2 = xy$. Действительно, $\triangle BMA_1 \sim \triangle CML \Rightarrow \frac{a}{y} = \frac{BM}{MC}$. Из $\triangle CMA_1 \sim \triangle BMK \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{BM}{MC}$. Поэтому, $\frac{a}{y} = \frac{x}{a} \Rightarrow a^2 = xy$. Аналогично $b^2 = yz$ и $c^2 = zx$ и

$a^2 + b^2 + c^2 = xy + yz + zx$ ч. и т.д.