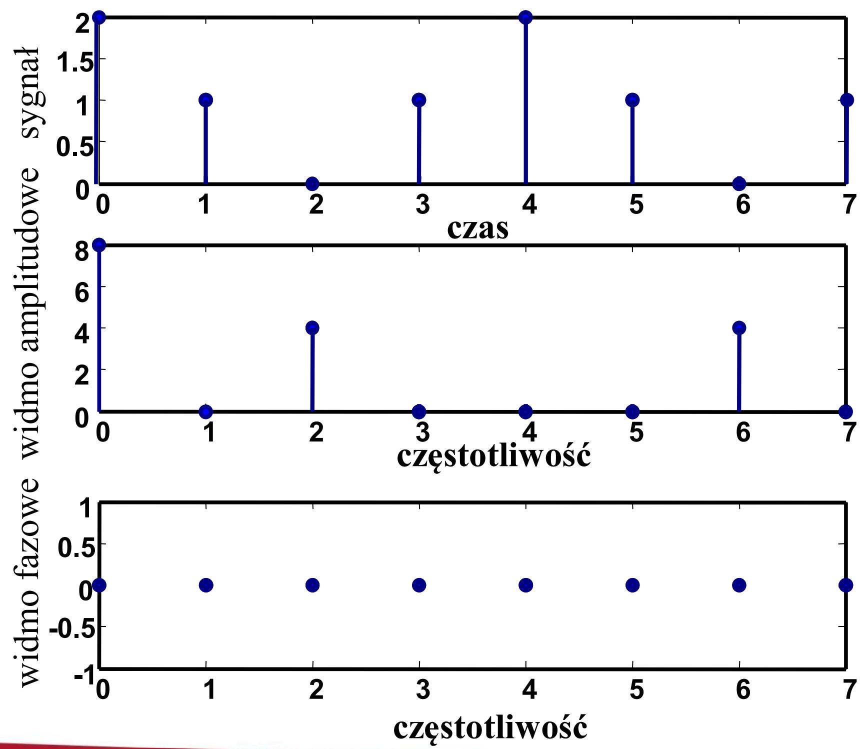
ANALIZA CZĘSTOTLIWOŚCIOWA SYGNAŁÓW DYSKRETNYCH

Spis treści

1. Zależności pomiędzy analizą częstotliwościową sygnałów analogowych i dyskretnych
2. Definicja i własności dyskretnej transformacji Fouriera
3. Analiza częstotliwościowa dyskretnych obrazów

Dyskretna transformacja Fouriera

ang. **D**iscrete **F**ourier **T**ransform **DFT**



Biografia

Baron Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768-1830)

Z wyróżnieniem ukończył szkolę wojskową w Auxerre.

Został nauczycielem Ecole Normal a potem Politechniki w Paryżu.

Napoleon mianował go zarządcą Dolnego Egiptu w 1798 roku.

Po powrocie do Francji został prefektem w Grenoble. Baronem został w 1809 roku. Ostatecznie w 1816 roku został sekretarzem Akademii Nauk a następnie jej członkiem w 1817.

W okresie od 1808 roku do 1825 roku napisał 21 tomowy Opis Egiptu.

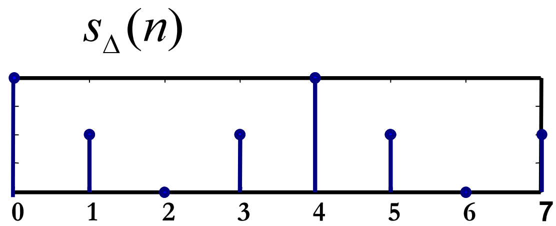
Równaniem ciepła zainteresował się w 1807 roku. W opublikowanej w 1822 roku pracy pokazał jak szereg zbudowany z sinusów i kosinusów można wykorzystać do analizy przewodnictwa ciepła w ciałach stałych. Nad szeregami trygonometrycznymi pracował do końca życia, rozszerzając tę problematykę na transformację całkową.

Geneza transformacji sygnału jednowymiarowego

Widmo sygnału analogowego

$$\boxed{\hat{s}_a(f) = \int_0^T s_a(t) e^{-2\pi j f t} dt}$$

gdzie T jest czasem trwania sygnału.



Wprowadźmy dyskretyzację $s_\Delta(n) = s_a(n\Delta t)$
gdzie: $n = 0, 1, \ldots, N-1$

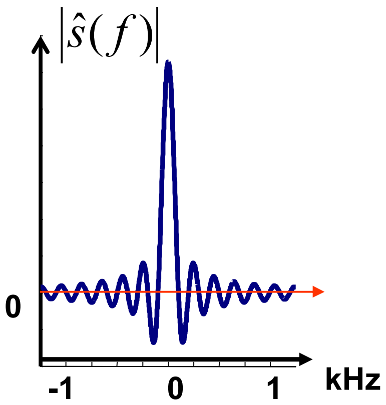
N – liczba próbek

gęstość dyskretyzacji $\Delta t = T/(N-1)$

Wartość całki oznaczonej aproksymujemy „metodą prostokątów”

$$\hat{s}_a(f) \approx \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_\Delta(n)\, e^{-2\pi j f n \Delta t}$$

Dyskretyzacja w dziedzinie częstotliwości



Dyskretne widmo wyznaczamy w punktach

$$f_k = k\,\Delta f$$

Aby były rozłożone równomiernie i obejmowały zarówno dodatnie jak i ujemne wartości

$$k \in \{-(N-1)/2, -(N-3)/2, \ldots, (N-3)/2, (N-1)/2\}$$

Położenie skrajnych punktów musi: uwzględniać założenia tw. Shannona i wynikać z powyższych założeń. Otrzymamy zatem dwa warunki:

$$\begin{cases} f_{(N-1)/2} = \dfrac{N-1}{2\Delta t N} < f_m = f_p/2 \\ f_{(N-1)/2} = \dfrac{N-1}{2}\Delta f \end{cases}$$

a z nich wynika

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{1}{T + \Delta t}}$$

Prototyp DFT

Przybliżone wartości widma analogowego $\hat{s}_a(f) \approx \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_\Delta(n)\, e^{-2\pi j f n \Delta t}$

obliczamy dla wybranych częstotliwości $\boxed{f_k = k\,\Delta f = \frac{k}{N\Delta t}}$

otrzymując $\hat{s}_a(f_k) \approx \hat{s}_\Delta(k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_\Delta(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

Wprowadzając oznaczenie

$$\boxed{w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos(2\pi/N) - j\sin(2\pi/N)}$$

otrzymujemy wartości widma dyskretnego

$$\boxed{\hat{s}_\Delta(k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_\Delta(n)\, w^{kn}}$$

Odwrotna dyskretna transformacja Fouriera

ang. Inverse Discrete Fourier Transform **IDFT**

Z widma ciągłego odtwarzamy sygnał analogowy

$$\boxed{s_a(t) = \int_{-f_m}^{f_m} \hat{s}_a(f) e^{2\pi j f t}\, df}$$

Aproksymując wartość całki „metodą prostokątów” spodziewamy się otrzymać dyskretne wartości sygnału

$$\boxed{s_\Delta(n) = \Delta f \sum_k \hat{s}_\Delta(k)\, w^{-kn}}$$

gdzie $\boxed{w = e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$

Wzajemna jednoznaczność transformacji

DFT

$$\boxed{\hat{s}_\Delta(k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_\Delta(n)\, w^{kn}}$$

IDFT

$$\boxed{s_\Delta(n) = \Delta f \sum_{k} \hat{s}_\Delta(k)\, w^{-kn}}$$

Rozpoczynając od definicji DFT i podstawiając do niej IDFT otrzymujemy:

$$s_\Delta(n) = \frac{1}{N\,\Delta t}\sum_k \hat{s}_\Delta(k)\, w^{-kn} = \frac{1}{N\,\Delta t}\sum_k w^{-kn}\Delta t\left(\sum_{m=0}^{N-1} s_\Delta(m)\, w^{km}\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} s_\Delta(m)\sum_k w^{k(m-n)} = s_\Delta(n)$$

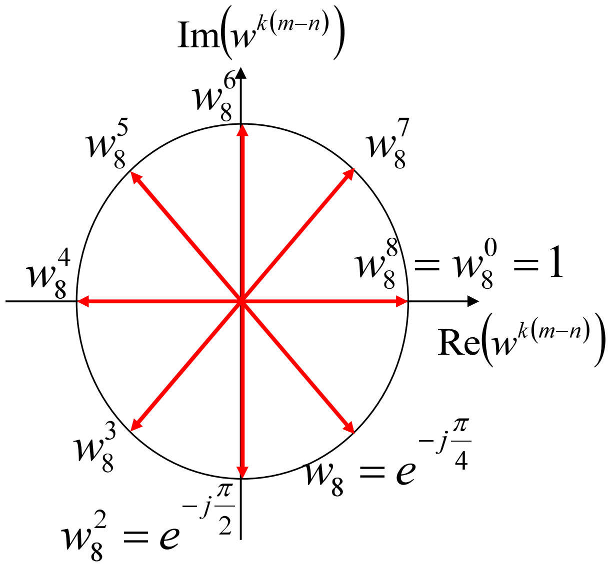
Wektory o długości 1, stąd $\displaystyle\sum_k w^{k(m-n)} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad m \neq n \\ N & \text{dla} \quad m = n \end{cases}$

Wyznaczanie wektorów macierzy DFT

Dla N-punktowej DFT mamy: $W = \left[w_N{}^{kn} \right] \in C^{N\times N}$

Kolejne wektor wyznaczamy jako:

gdzie $\boxed{w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$



Wektor przyjmuje wartości:

$$w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos(2\pi/N) - j\sin(2\pi/N)$$

Przykład - zadanie 1

Treść zadania: Jakie jest widmo dyskretne sygnału

$$s_{\Delta} = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$$

jeśli gęstość próbkowania wynosi

$$\Delta t = 10^{-3}[s]?$$

Sygnał posiada N=6 próbek. Spodziewamy się, że reprezentuje drgania kosinusoidalne o okresie

$$\tau = 4\,\Delta t = 4 \cdot 10^{-3}[s]$$

czyli o częstotliwości

$$f = 250[Hz].$$

Przykład - zadanie 1

Rozwiązanie:

Numery próbek $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Dyskretne widmo ma numerację $k \in \{-2{,}5; -1{,}5; -0{,}5; 0{,}5; 1{,}5; 2{,}5\}$

Gęstość dyskretyzacji w dziedzinie częstotliwości

$$\Delta f = \frac{1}{N\,\Delta t} = \frac{1}{6 \cdot 10^{-3}} = 500/3[Hz]$$

Zatem widmo dyskretne jest obliczane dla częstotliwości [Hz]

$$\{-1250/3, -250, -250/3, 250/3, 250, 1250/3\}$$

Przykład - zadanie 1

W oparciu o wzór $\boxed{\hat{s}_{\Delta}(k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_{\Delta}(n) w^{kn}}$

przy

$$w = e^{-j\frac{\pi}{3}} = \cos(\pi/3) - j\sin(\pi/3) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} j$$

otrzymujemy dyskretne widmo Fouriera

$$\hat{s}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 3\cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 3\cdot 10^{-3} & 0 \end{bmatrix}^T$$

Macierzowy zapis rozwiązania zadania 1

$\boxed{\hat{s} = \Delta t\, W s}$ gdzie $W = \left[w^{kn}\right] \in C^{N\times N}$

$\boxed{\hat{s}_{\Delta}(k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_{\Delta}(n)\, w^{kn}}$

Macierz współczynników

$$\begin{array}{cc} & n \rightarrow \\ k \downarrow & \\ [kn] = & \begin{bmatrix} 0 & -2{,}5 & -5 & -7{,}5 & -10 & -12{,}5 \\ 0 & -1{,}5 & -3 & -4{,}5 & -6 & -7{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & -1 & -1{,}5 & -2 & -2{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & 1{,}5 & 2 & 2{,}5 \\ 0 & 1{,}5 & 3 & 4{,}5 & 6 & 7{,}5 \\ 0 & 2{,}5 & 5 & 7{,}5 & 10 & 12{,}5 \end{bmatrix} \end{array}$$

wyznacza obroty wektora $w_6 = e^{-j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} j$

Numer wiersza $k \in \{-2{,}5; -1{,}5; -0{,}5; 0{,}5; 1{,}5; 2{,}5\}$

Numer kolumny $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Macierzowy zapis rozwiązania zadania 1

Dla rozważanego przykładu macierz przekształcenia ma postać

$$W=\left[w^{kn}\right]=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j & j & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2} \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j & j & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{j}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j & -j & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{j}{2} \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{j}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j & -j & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{j}{2} \end{bmatrix}$$

i otrzymujemy $\hat{s}_\Delta=\Delta t\, W s_\Delta=\left[0 \quad 3\cdot 10^{-3} \quad 0 \quad 0 \quad 3\cdot 10^{-3} \quad 0\right]^T$

dla częstotliwości $f=\left[-1250/3,\,-250,\,-250/3,\,250/3,\,250,\,1250/3\right]^T$

Okresowość widma DFT

Otrzymaliśmy wzór $\boxed{\hat{s}_\Delta(k)=\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}s_\Delta(n)w_N{}^{kn}}$

gdzie $\boxed{w_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}=\cos(2\pi/N)-j\sin(2\pi/N)}$

czyli $$\hat{s}_\Delta(k)=\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}s_\Delta(n)\left[\cos(2\pi nk/N)-j\sin(2\pi nk/N)\right]$$

Funkcje trygonometryczne powodują, że widmo jest funkcją o okresie *N*, tzn.

$$\hat{s}_\Delta(k+N)=\hat{s}_\Delta(k)$$

bo

$$\hat{s}_\Delta(k)=\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}s_\Delta(n)\left[\cos(2\pi nk/N+2\pi n)-j\sin(2\pi nk/N+2\pi n)\right]$$

Racjonalizacja DFT

Przyjmujemy $k = 0,1,2,\ldots,N-1$

Skoro dyskretne częstotliwości $\boxed{f_k = k\,\Delta f}$

to $[f_k] = [0,\Delta f, 2\Delta f, \ldots, (N-1)\Delta f]^T \in \Re^N$

Wprowadzamy nową funkcję dyskretną $\hat{s}(k) = \dfrac{\hat{s}_\Delta(k)}{\Delta t}$

Przy tych dwóch założeniach wzór

$$\hat{s}_\Delta(k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_\Delta(n)\, w^{kn}$$

przyjmie ostateczną postać dyskretnej transformacji Fouriera.

Definicja DFT oraz IDFT

Dyskretna transformacja Fouriera (DFT) zdefiniowana jest wzorem

$$\boxed{\hat{s}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) w^{kn}}$$

a odwrotna dyskretna transformacja Fouriera (IDFT) wzorem

$$\boxed{s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{s}(k)\, w^{-kn}}$$

Definicja DFT oraz IDFT

Przekształcenie DFT można zapisać macierzowo

$$\boxed{\hat{s} = Ws}$$

gdzie $W = \left[w^{kn} \right] \in C^{N \times N}$

Elementy macierzy W powstają przez podniesienie do potęgi kn wartości zespolonej

$$w = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos(2\pi / N) - j\sin(2\pi / N)$$

przy czym k jest numerem wiersza a n numerem kolumny. Numeracja rozpoczyna się od zera bo $k, n \in \{0,1,2,\ldots, N-1\}$

Macierz przekształcenia w odwrotnej dyskretnej transformacji Fouriera (IDFT) ma postać

$$\boxed{s = \frac{1}{N} W^{-1} \hat{s}}$$

gdzie $\boxed{W^{-1} = \left[w^{-kn} \right] = W^{H} = (W^{*})^{T} \in C^{N \times N}}$

Transpozycja zespolona (ang. Hermitian conjugate) to transpozycja + sprzężenie

Własności DFT

1. Zależność pomiędzy widmem dyskretnym a widmem sygnału analogowego

$$\hat{s}(k)\,\Delta t \approx \hat{s}_a(k\Delta f) \qquad \text{dla} \qquad k \le N/2$$

2. **Ilość dyskretnych wartości widma jest równa ilości próbek czasowych sygnału.**

3. Gęstość dyskretyzacji widma

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{N\,\Delta t} = (T + \Delta t)^{-1}}$$

gdzie $\Delta t = T / (N-1)$

Częstotliwość cyfrowa: $\boxed{\underline{f} = \frac{f}{f_p} = \frac{k}{N}}$

Własności DFT

4. Szerokość widma:

Dla nieparzystej ilości próbek

$$f_{\max} = f_{\frac{N-1}{2}} = \frac{N-1}{2\Delta t\, N} = f_p \frac{N-1}{2N} = \frac{(N-1)^2}{2TN} \qquad \text{bo} \quad f_p = \frac{N-1}{T}$$

Dla $N \to \infty$ otrzymujemy

$$\boxed{f_{\max} \to f_p / 2}$$

Dla parzystej ilości próbek

$$f_{\max} = f_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{f_p}{2} = \frac{N-1}{2T}$$

Własności DFT

5. Macierz W jest nieosobliwa i symetryczna, jej elementy są na ogół zespolone a ich moduły są zawsze równe 1. Macierz odwrotna do niej

$$\boxed{W^{-1} = W^H = (W^*)^T}$$

6. Liniowość DFT, tzn. $\boxed{as_1(n) + bs_2(n) \Leftrightarrow a\hat{s}_1(k) + b\hat{s}_2(k)}$

bo $W(as_1 + bs_2) = aWs_1 + bWs_2$

7. Zachowanie energii czyli dyskretna postać twierdzenia Parsevala

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} s^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{s}(k)|^2}$$

Własności DFT

8. Przesunięcie w dziedzinie czasu $s(n-n_0) \Leftrightarrow \hat{s}(k)\, w^{kn_0}$

bo $$\sum_{n=0}^{N-1} s(n-n_0)\, w^{kn} = w^{kn_0} \sum_{m=-n_0}^{N-n_0-1} s(m)\, w^{km}$$

9. Modulacja

$$s_1(n)\, s_2(n) \Leftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \hat{s}_1(m)\, \hat{s}_2(k-m)$$

Przykład zadania 2

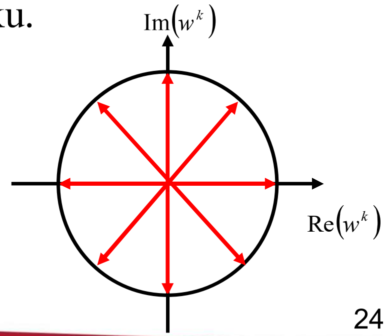
Treść zadania:

Gęstość próbkowania wynosi $\Delta t = 0{,}001\ [s]$. Jakie jest widmo dyskretne sygnału $s = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$?

Rozwiązanie:

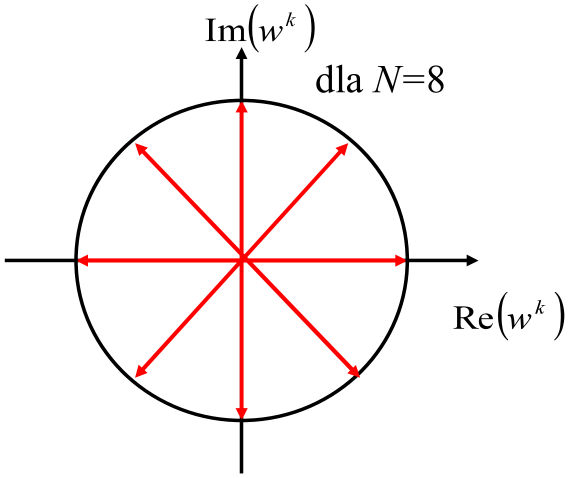
Obliczamy $$w_8 = e^{-\frac{2\pi}{8}j} = \cos(\pi/4) - j\sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}$$

Podnosząc tę liczbę do potęgi całkowitej otrzymamy tylko jedną z ośmiu możliwości przedstawionych na poniższym rysunku.



Przykład zadania 2

Podnosząc tę liczbę do potęgi całkowitej otrzymamy tylko jedną z ośmiu możliwości przedstawionych na poniższym rysunku.



$$\searrow = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}$$

$$\swarrow = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}$$

$$\nwarrow = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}}$$

$$\nearrow = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}}$$

Przykład zadania 2 – zapis macierzowy

$$\begin{bmatrix} \hat{s}(0) \\ \hat{s}(1) \\ \hat{s}(2) \\ \hat{s}(3) \\ \hat{s}(4) \\ \hat{s}(5) \\ \hat{s}(6) \\ \hat{s}(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \rightarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \nwarrow & \uparrow & \nearrow \\ \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow \\ \rightarrow & \swarrow & \uparrow & \searrow & \leftarrow & \nearrow & \downarrow & \nwarrow \\ \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & \nwarrow & \downarrow & \nearrow & \leftarrow & \searrow & \uparrow & \swarrow \\ \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow \\ \rightarrow & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \leftarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \\ s(3) \\ s(4) \\ s(5) \\ s(6) \\ s(7) \end{bmatrix}$$

Przykład zadania 2

Wyliczamy ze wzoru $\hat{s} = W s$

Otrzymując N wartości widma

$$\hat{s} = [8 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad \mathbf{0} \quad 0 \quad 4 \quad 0]^T$$

Próbkowanie (rozdzielczość) częstotliwości $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} = 125\,[Hz]$

Sygnał ma składową stałą i drgania o częstotliwości $2\,\Delta f = 250[Hz]$

Szerokość widma wynosi $f_{\max} = f_4 = 500\,[Hz]$

czyli jest równa *częstotliwości Nyquista*

Przykład zadania 3

Treść zadania:

Jakie jest widmo dyskretne sygnału $s_\Delta = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$

jeśli gęstość próbkowania wynosi $\Delta t = 10^{-3}[s]$?

Sygnał posiada N=6 próbek. Reprezentuje drgania kosinusoidalne o okresie

$$\tau = 4\,\Delta t = 4 \cdot 10^{-3}[s]$$

czyli o częstotliwości $f = \frac{1}{4\Delta t} = 250[Hz].$

Przykład zadania 3

Rozwiązanie:

Gęstość dyskretyzacji w dziedzinie częstotliwości wynosi

$$\Delta f = \frac{1}{N\,\Delta t} = \frac{1}{6\cdot 10^{-3}} = 500/3\,[Hz]$$

czyli widmo będzie wyliczane dla częstotliwości

$$0, \quad \frac{1}{6\,\Delta t} = 500/3, \quad \frac{1}{3\,\Delta t} = 1000/3$$

Zatem, nie trafiamy w częstotliwość $f = 250\,[Hz]$

A przecież z zadania 2 wiemy, że sygnał zawiera składową stałą i drgania o okresie 4 [ms], czyli o częstotliwości $f = 250\,[Hz]$

Przykład zadania 3

Korzystając z zapisu macierzowego DFT

$$\hat{s} = Ws \qquad \text{gdzie} \qquad w_6 = e^{-j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,5 - j\sqrt{3}/2 & -0,5 - j\sqrt{3}/2 & -1 & -0,5 + j\sqrt{3}/2 & 0,5 + j\sqrt{3}/2 \\ 1 & -0,5 - j\sqrt{3}/2 & -0,5 + j\sqrt{3}/2 & 1 & -0,5 - j\sqrt{3}/2 & -0,5 + j\sqrt{3}/2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -0,5 + j\sqrt{3}/2 & -0,5 - j\sqrt{3}/2 & 1 & -0,5 + j\sqrt{3}/2 & -0,5 - j\sqrt{3}/2 \\ 1 & 0,5 + j\sqrt{3}/2 & -0,5 + j\sqrt{3}/2 & -1 & -0,5 - j\sqrt{3}/2 & 0,5 - j\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Przykład zadania 3

Wyliczając widmo sygnału

$$\hat{s} = \begin{bmatrix} 1 & 1+j\sqrt{3} & 1-j\sqrt{3} & 1 & 1+j\sqrt{3} & 1-j\sqrt{3} \end{bmatrix}^T$$

Oraz widmo amplitudowe

$$|\hat{s}| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$$

A przecież składowej stałej i częstotliwości 167 [Hz] oraz 333 [Hz] nie ma w sygnale! Jest tylko 250 [Hz].

Czy otrzymaliśmy poprawny wynik?

Dwuwymiarowa ciągła transformacja Fouriera - revised

Widmo częstotliwościowe obrazu analogowego zdefiniowane jest wzorem

$$\boxed{\hat{s}(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x,y) e^{-2\pi j (f_x x + f_y y)} dxdy}$$

$$\boxed{\hat{s}(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x,y)\cos\big(2\pi(f_x x + f_y y)\big) dxdy - j\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x,y)\sin\big(2\pi(f_x x + f_y y)\big) dxdy}$$

Widmo rzeczywiste w trzeciej ćwiartce jest kopią widma z pierwszej i podobnie z czwartej jest kopią z drugiej. Widmo urojone w trzeciej ćwiartce ma przeciwny znak niż widmo z pierwszej i podobnie z czwartej, przeciwny znak niż w drugiej.

Odtwarzanie obrazu analogowego z jego widma częstotliwościowego dokonywane jest przy pomocy wzoru

$$s(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f_x, f_y) e^{2\pi j (f_x x + f_y y)} df_x\, df_y$$

Wzory analogowe wykorzystamy do wyprowadzenia dyskretnej transformacji sygnałów dwuwymiarowych, czyli 2-D DFT.

Geneza dyskretnej transformacji obrazów

Obliczając przybliżone wartości całek oznaczonych

$$\hat{s}(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y)\, e^{-2\pi j (f_x x + f_y y)} dx\, dy$$

$$s(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f_x, f_y)\, e^{2\pi j (f_x x + f_y y)} df_x\, df_y$$

otrzymujemy

$$\hat{s}_\Delta(k_x, k_y) = \Delta x \Delta y \sum_{n_x}\sum_{n_y} s_\Delta(n_x, n_y)\, w_x^{k_x n_x} w_y^{k_y n_y}$$

$$s_\Delta(n_x, n_y) = \Delta f_x \Delta f_y \sum_{k_x}\sum_{k_y} \hat{s}_\Delta(k_x, k_y)\, w_x^{-k_x n_x} w_y^{-k_y n_y}$$

Przyjmujemy $k_x = 0,1,2,\ldots,N_x - 1$ oraz $k_y = 0,1,2,\ldots,N_y - 1$

i wprowadzamy nową funkcję dyskretną $\hat{s}(k_x, k_y) = \dfrac{\hat{s}_\Delta(k_x, k_y)}{\Delta x \Delta y} \approx \dfrac{\hat{s}(k_x \Delta f_x, k_y \Delta f_y)}{\Delta x \Delta y}$

Dyskretna transformacja sygnału dwuwymiarowego

Przy tych dwóch założeniach otrzymujemy następujące wzory

Dyskretna transformacji Fouriera obrazów (DFT 2D)

$$\hat{s}(k_x, k_y) = \sum_{n_x=0}^{N_x-1}\sum_{n_y=0}^{N_y-1} s(n_x, n_y)\, w_x^{n_x k_x}\, w_y^{n_y k_y}$$

Odwrotna dyskretna transformacji Fouriera obrazów (IDFT 2D)

$$s(n_x, n_y) = \frac{1}{N_x N_y}\sum_{k_x=0}^{N_x-1}\sum_{k_y=0}^{N_y-1} \hat{s}(k_x, k_y)\, w_x^{-n_x k_x}\, w_y^{-n_y k_y}$$

gdzie $w_x = e^{-j\frac{2\pi}{N_x}}$ $\quad w_y = e^{-j\frac{2\pi}{N_y}}$

Macierzowy zapis 2-D DFT

$$\boxed{\hat{s} = W_x \, s \, W_y}$$

$$\hat{s} = W_x \; s \; W_y$$

gdzie $s = \left[s(n_x, n_y) \right] \in \Re^{N_x \times N_y}$ $\qquad \hat{s} = \left[\hat{s}(k_x, k_y) \right] \in C^{N_x \times N_y}$

$W_x = \left\lfloor w_x^{n_x k_x} \right\rfloor \in C^{N_x \times N_x}$ $\qquad W_y = \left\lfloor w_y^{n_y k_y} \right\rfloor \in C^{N_y \times N_y}$

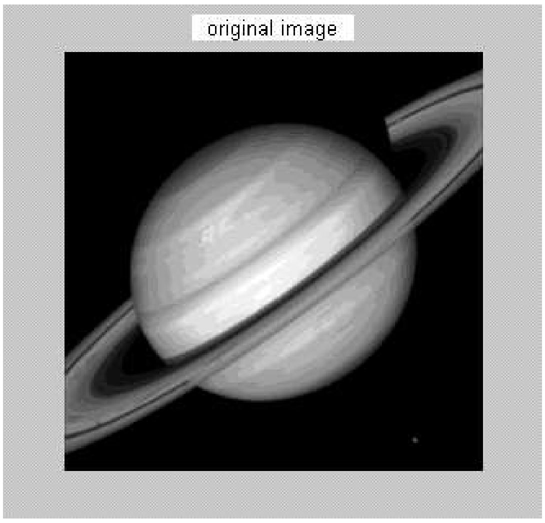
$k_x, n_x = 0, \ldots, N_x - 1$ $\qquad k_y, n_y = 0, \ldots, N_y - 1$

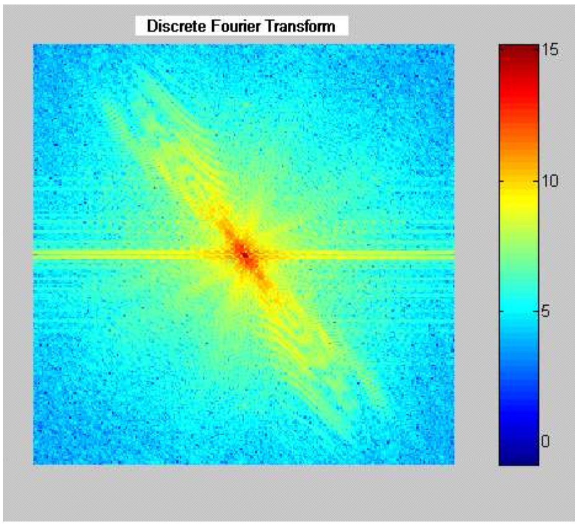
k_x numer kolumny macierzy $\qquad n_y$ numer kolumny

n_x numer wiersza macierzy $\qquad k_y$ numer wiersza

W_x oraz W_y są macierzami **symetrycznymi**

Przykład 2-D DFT

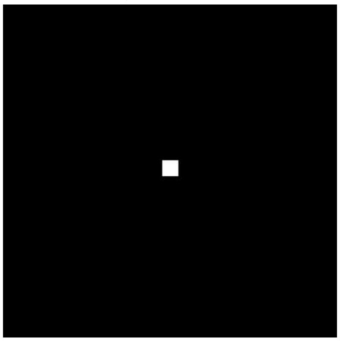




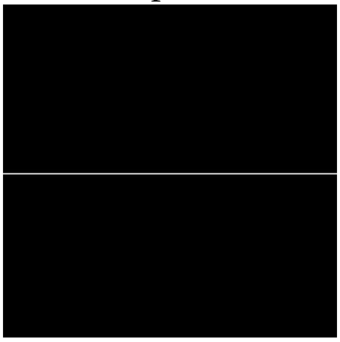
Widmo amplitudowe z pierwszej ćwiartki jest identyczne jak widmo z trzeciej i podobnie, w czwartej identyczne jak w drugiej.

Przykłady 2-D DFT

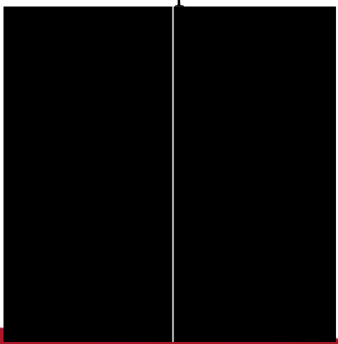
Obraz



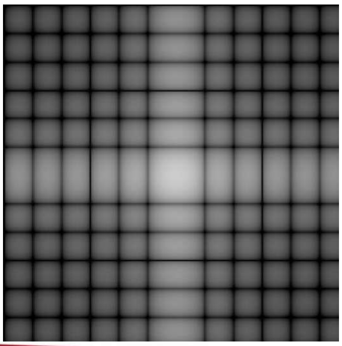
DFT po X



DFT po Y



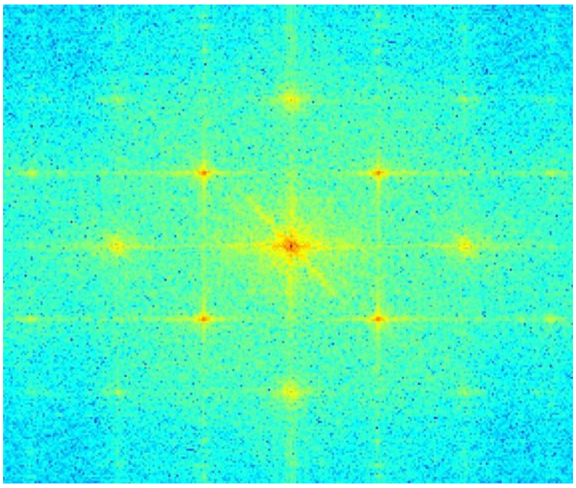
2D DFT



Przykłady 2-D DFT

Obraz

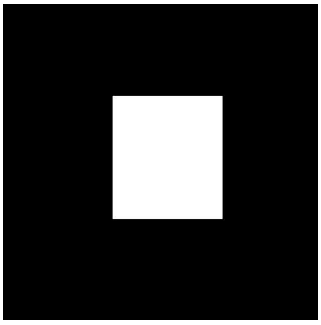
DFT obrazu



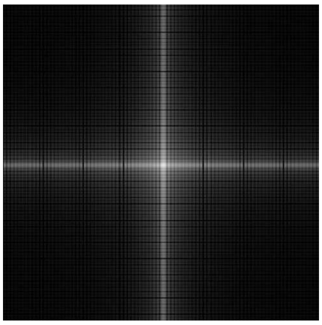
Obraz ma dodane zakłócenia sinusoidalne w obu kierunkach

Przykład 2-D DFT

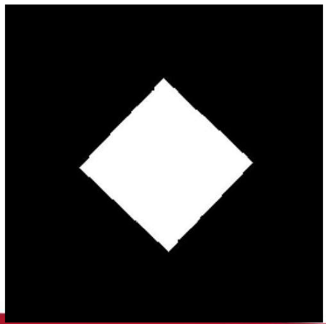
Obraz 1



DFT obrazu 1



Obraz 2



DFT obrazu 2