FILTRACJA PODPASMOWA

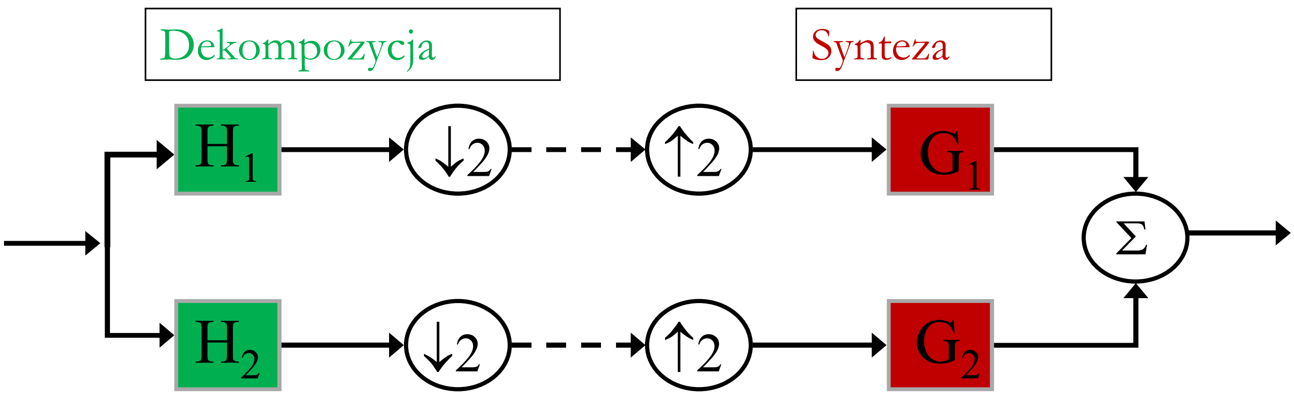
(ang. SUBBAND FILTERING)

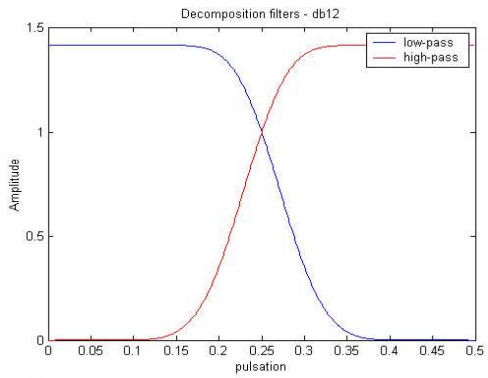
Filtracja podpasmowa

Spis treści:

Dwukanałowa filtracja podpasmowa

Schemat filtracji dwukanałowej

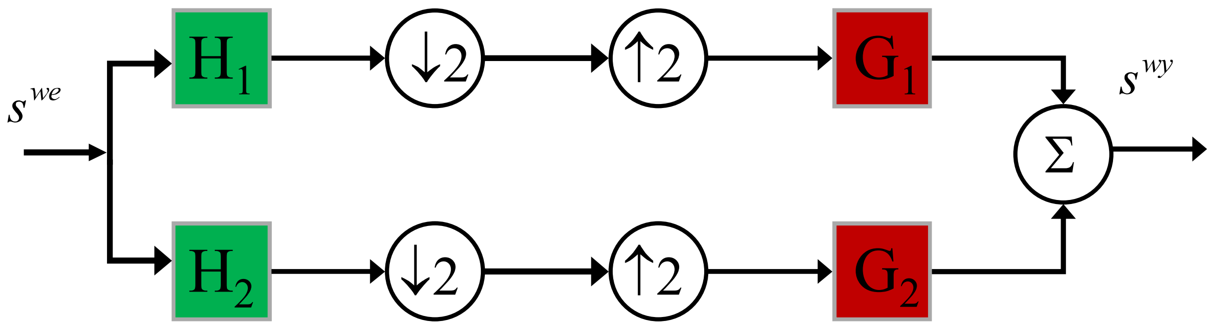




H_1, G_1 - filtry dolnoprzepustowe

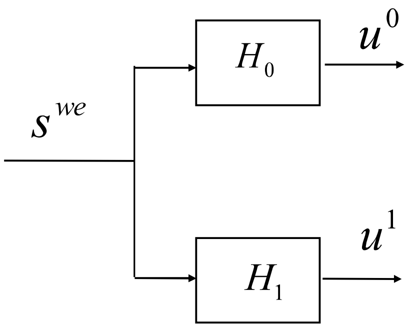
H_2, G_2 - filtry górnoprzepustowe

Perfekcyjna rekonstrukcja
(ang. perfect reconstruction)



$$\boxed{\bar{s}^{wy}(z) \overset{df}{=} cz^{-k}\bar{s}^{we}(z)}$$

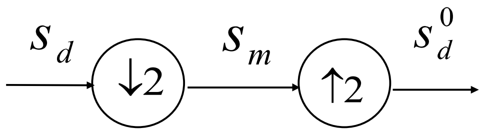
Model dekompozycji sygnału



$$\begin{cases} \bar{u}^0(z) = H_0(z)\bar{s}^{we}(z) \\ \bar{u}^1(z) = H_1(z)\bar{s}^{we}(z) \end{cases}$$

Model sekwencji pod- i nadpróbkowania

$$\boxed{s_d^0(n)=\frac{1}{2}\left[1+(-1)^n\right]s_d(n)}$$



Mnożąc obustronnie przez z^{-n} otrzymujemy

$$s_d^0(n)z^{-n}=\frac{1}{2}\left[s_d(n)z^{-n}+s_d(n)(-1)^{-n}z^{-n}\right] \quad \text{dla} \quad n\in\Im$$

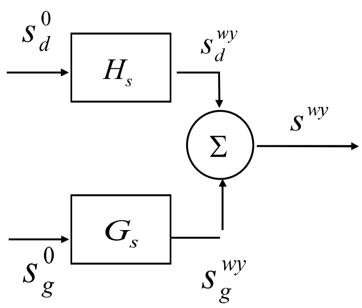
Sumując po wszystkich n dostajemy

$$\sum_n s_d^0(n)z^{-n}=\frac{1}{2}\left[\sum_n s_d(n)z^{-n}+\sum_n s_d(n)(-1)^{-n}z^{-n}\right]$$

$$\boxed{\bar{s}_d^0(z)=\frac{1}{2}\left[\bar{s}_d(z)+\bar{s}_d(-z)\right]}$$

Model syntezy sygnału

$$\bar{s}^{wy}(z)=H_s(z)\bar{s}_d^0(z)+G_s(z)\bar{s}_g^0(z)$$



gdzie
$$\begin{cases}\bar{s}_d^0(z)=\frac{1}{2}\left[\bar{s}_d(z)+\bar{s}_d(-z)\right]\\ \bar{s}_g^0(z)=\frac{1}{2}\left[\bar{s}_g(z)+\bar{s}_g(-z)\right]\end{cases}$$

$$\bar{s}^{wy}(z)=\frac{1}{2}H_s(z)\left[\bar{s}_d(z)+\bar{s}_d(-z)\right]+\frac{1}{2}G_s(z)\left[\bar{s}_g(z)+\bar{s}_g(-z)\right]$$

Model całego systemu

$$\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{2} H_s(z)\left[H_d(z)\,\bar{s}^{we}(z) + H_d(-z)\,\bar{s}^{we}(-z)\right]$$
$$+\frac{1}{2} G_s(z)\left[G_d(z)\,\bar{s}^{we}(z) + G_d(-z)\,\bar{s}^{we}(-z)\right]$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{2}\left[H_s(z)H_d(z) + G_s(z)G_d(z)\right]\bar{s}^{we}(z)$$
$$+\frac{1}{2}\left[H_s(z)H_d(-z) + G_s(z)G_d(-z)\right]\bar{s}^{we}(-z)$$

W zapisie macierzowym

$$\boxed{\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{2}\left[H_s(z) \quad G_s(z)\right]\begin{bmatrix} H_d(z) & H_d(-z) \\ G_d(z) & G_d(-z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{s}^{we}(z) \\ \bar{s}^{we}(-z) \end{bmatrix}}$$

Warunki perfekcyjnej rekonstrukcji

$$\boxed{\bar{s}^{wy}(z) = cz^{-k}\bar{s}^{we}(z)}$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{2}\left[H_s(z)H_d(z) + G_s(z)G_d(z)\right]\bar{s}^{we}(z)$$
$$+\frac{1}{2}\left[H_s(z)H_d(-z) + G_s(z)G_d(-z)\right]\bar{s}^{we}(-z)$$

$$\Downarrow$$

$$H_s(z)H_d(-z) + G_s(z)G_d(-z) = 0$$

$$H_s(z)H_d(z) + G_s(z)G_d(z) = 2cz^{-k}$$

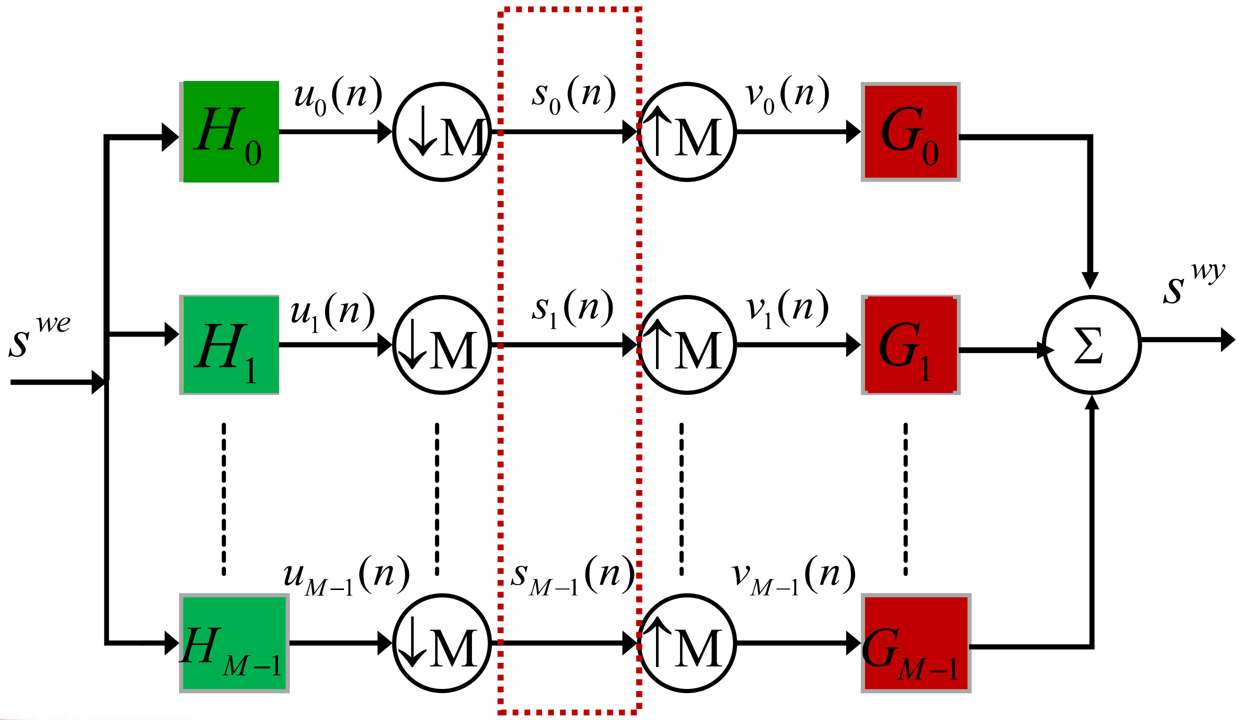
Perfekcyjna rekonstrukcja przy pomocy filtrów typu FIR

$$H_d(z)G_d(-z) - H_d(-z)G_d(z) = 2z^{-2k-1}$$

$$\begin{bmatrix} H_s(z) & G_s(z) \end{bmatrix} = cz^{-k}\begin{bmatrix} G_d(-z) & -H_d(-z) \end{bmatrix}$$

Wielokanałowa filtracja podpasmowa

Rysunek M-kanałowej dekompozycji i syntezy sygnału



Model M-kanałowej dekompozycji sygnału

$$\bar{s}_i(z) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} H_i\left(z^{1/M} w_M^m\right)\bar{s}^{we}\left(z^{1/M} w_M^m\right)$$

$$\underline{\bar{s}}(z) = \frac{1}{M}\mathbf{H}\left(z^{1/M}\right)\underline{\bar{s}}^{we}\left(z^{1/M}\right) \qquad w_M = e^{-2\pi j/M}$$

gdzie

$$\underline{\bar{s}}(z) = \left[\bar{s}_0(z) \quad \bar{s}_1(w_M z) \quad \cdots \quad \bar{s}_{M-1}(w_M^{M-1} z)\right]^T \in \Im^M$$

$$\underline{\bar{s}}^{we}(z) = \left[\bar{s}^{we}(z) \quad \bar{s}^{we}(w_M z) \quad \cdots \quad \bar{s}^{we}(w_M^{M-1} z)\right]^T \in \Im^M$$

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(w_M z) & \cdots & H_0(w_M^{M-1} z) \\ H_1(z) & H_1(w_M z) & \cdots & H_1(w_M^{M-1} z) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ H_{M-1}(z) & H_{M-1}(w_M z) & \cdots & H_{M-1}(w_M^{M-1} z) \end{bmatrix} \in \Im^{M\times M}$$

Model matematyczny M-kanałowej syntezy i dekompozycji sygnału

$$\bar{s}^{wy}(z) = \sum_{m=0}^{M-1} G_m(z)\,\bar{s}_m(z^M) = \underline{G}(z)\,\underline{\bar{s}}(z^M)$$

$$\text{gdzie} \quad \underline{G}(z) = \begin{bmatrix} G_0(z) & \cdots & G_{M-1}(z) \end{bmatrix} \in \Re^M$$

$$\underline{\bar{s}}(z) = \frac{1}{M}\mathbf{H}\left(z^{1/M}\right)\underline{\bar{s}}^{we}\left(z^{1/M}\right)$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{M}\underline{G}(z)\,\mathbf{H}(z)\,\underline{\bar{s}}^{we}(z)$$

Warunek perfekcyjnej rekonstrukcji w M-kanałowym systemie

$$\frac{1}{M}G(z)H(z) = \begin{bmatrix} cz^{-k} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{M}G(z)H(z)\underline{\bar{s}}^{we}(z)$$

czyli

$$\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} G_m(z)H_m(z) = cz^{-k}$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} G_m(z)H_m(w_M z) = 0$$

....

$$\sum_{m=0}^{M-1} G_m(z)H_m(w_M^{M-1} z) = 0$$

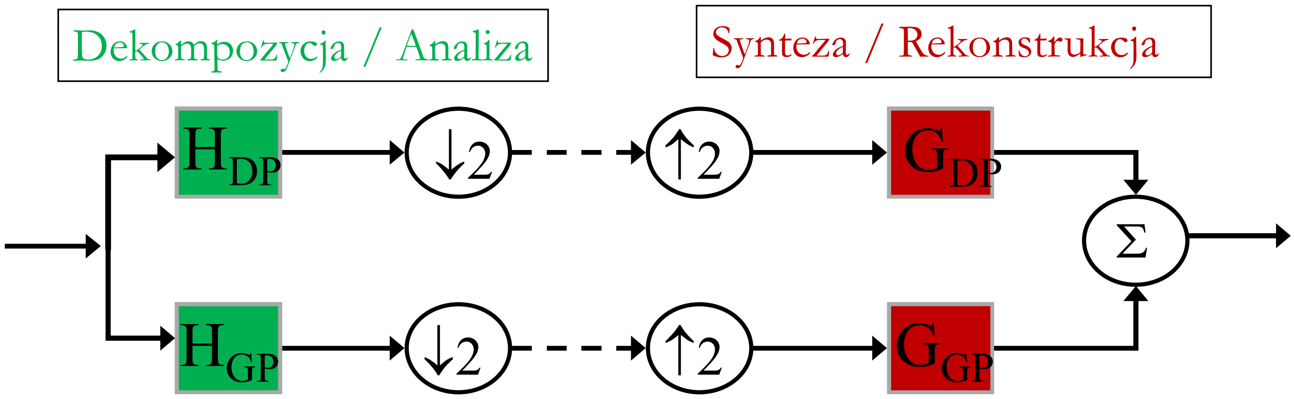
Banki filtrów - Kwadraturowe Filtry Zwierciadlane (ang. Quadrature Mirror Filters - QMF)

Banki filtrów

Podsumowanie wcześniejszych pojęć:

- Próbkowanie krytyczne (ang. critical sampling) – jeśli bank filtrów dzieli pasmo sygnału wejściowego na M podpasm to sygnał w każdym podpaśmie jest podpróbkowany M-krotnie. W rezultacie nie zmienia się rozmiar danych
- Perfekcyjna rekonstrukcja (ang. perfect reconstruction) – jeśli sygnał nie zostaje dodatkowo zmieniony w podpasmach, to taki sygnał zostanie zrekonstruowany przez bank filtrów syntezujących a sygnał wyjściowy nie będzie zawierał błędów aliasingu
- W bankach filtrów z krytycznym próbkowaniem mogą pojawić się błędy aliasingu gdy filtry nie są idealne (np. występuje szerokie pasmo przejściowe)
- Z reguły banki filtrów są projektowane tak by bank filtrów syntezy eliminował aliasing występujący po filtrach analizy

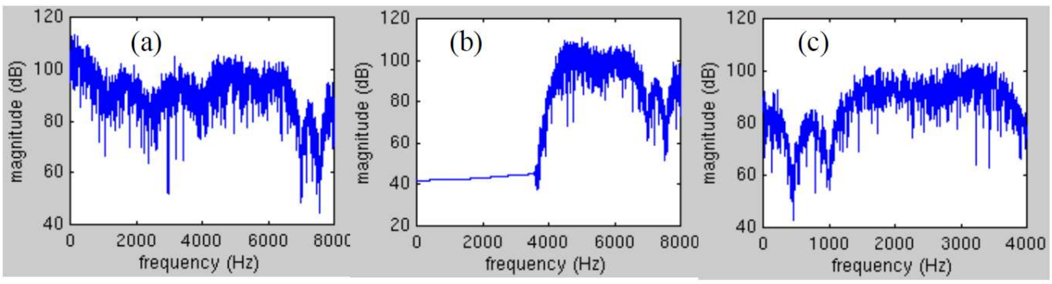
Krytyczne próbkowanie dla dwóch podpasm



Krytyczne próbkowanie dla dwóch podpasm

W banku filtrów analizy (dekompozycji):

- Kiedy górna połowa pasma oryginalnego $[f_p/4, f_p/2]$ zostaje poddana decymacji (bierzemy tylko co drugą próbkę), zostaje ona odbita (odbicie lustrzane) do dolnej połowy pasma oryginalnego $[0, f_p/4]$

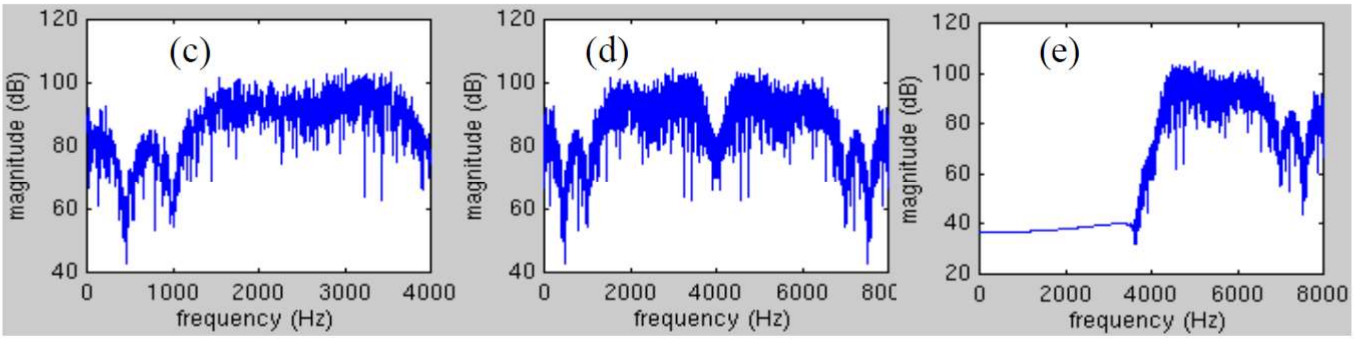


a) Spektrum oryginalnego sygnału, b) spektrum po filtracji filtrem górno-przepustowym, c) spektrum po filtracji filtrem górno-przepustowym i decymacji

Oryginalna $f_N = 8kHz$ a po analizie wynosi $f_N = 4kHz$

Krytyczne próbkowanie dla dwóch podpasm

W banku filtrów syntezy (rekonstrukcji):



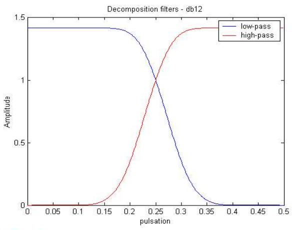
c) spektrum po filtracji filtrem górno-przepustowym i decymacji po przejściu przez bank filtrów analizy, d) spektrum po ekspanderze (wstawieniu zer), e) spektrum po ekspanderze i filtrze górnoprzepustowym (dla sygnalu z c))

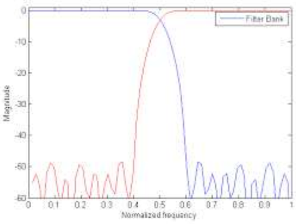
Kwadraturowe filtry zwierciadlane (ang. Quadrature Mirrow Filter QMF)

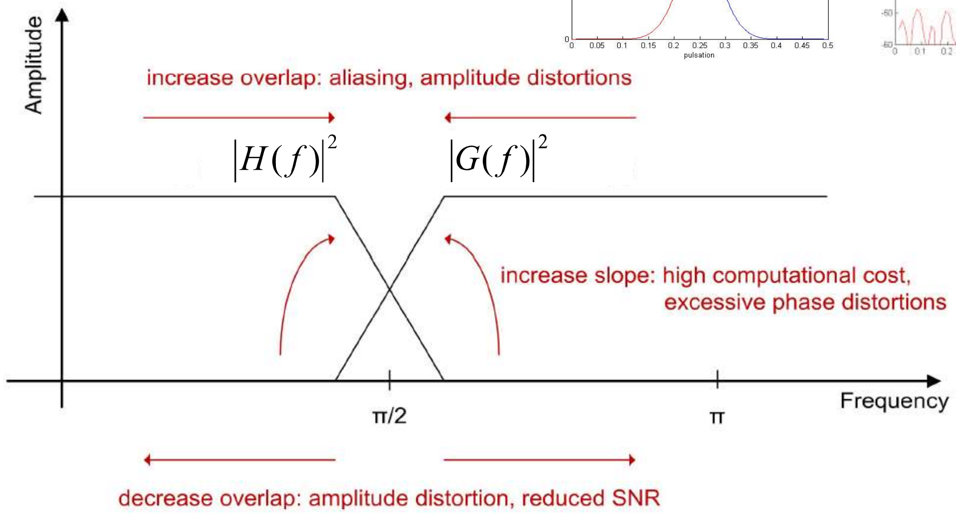
- QMF: filtry są zaprojektowane w taki sposób by aliasing występujący po banku filtrów analizy został wyeliminowany w banku filtrów syntezy, a w rezultacie by osiągnąć perfekcyjną rekonstrukcję (w przypadku braku dodatkowych modyfikacji sygnału w podpasmach).
- W tym banku filtrów pasmo dolne sukcesywnie rozbijane jest na górne i dolne pasmo częstotliwości, w każdym dokonujemy 2-krotnej decymacji
- Ten sam filtr prototypowy może być użyty w podziałach na dolne i górne pasma częstotliwości

Kwadraturowe filtry zwierciadlane (ang. Quadrature Mirrow Filter QMF)

$$\boxed{|H(f)|^2 + |G(f)|^2 = 1}$$





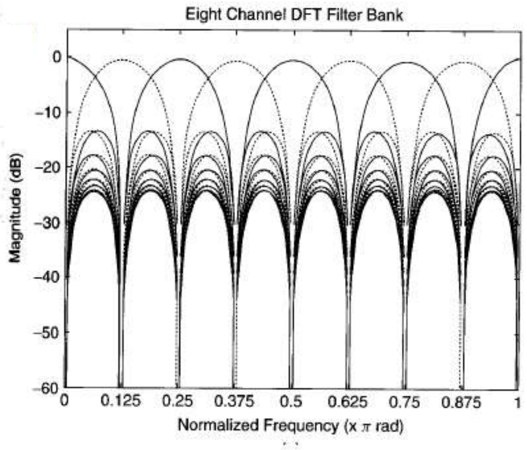


Banki filtrów a transformacje

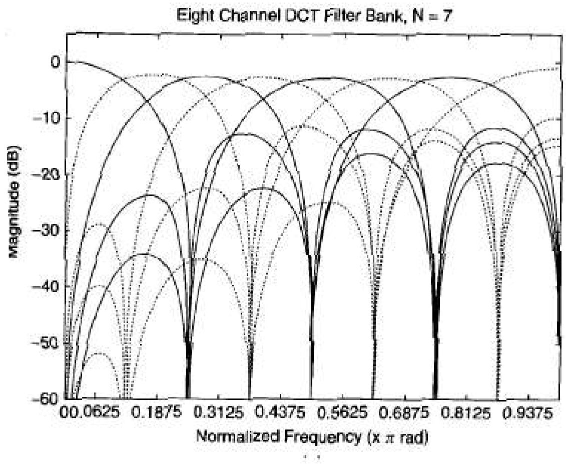
- W przypadku banków filtrów, sygnał w m-tym podpaśmie otrzymujemy poprzez splot sygnału wejściowego z filtrem dla danego podpasma, po czym następuje podpróbkowanie
- W przypadku transformat, współczynniki odpowiadające funkcjom bazowym dla indeksu częstotliwości k otrzymujemy jako iloczyn skalarny sygnału wejściowego przemnożonego przez okno and funkcji bazowej dla indeksu częstotliwości k.
- Natomiast bank filtrów umożliwia uzyskanie nierównomiernej rozdzielczości częstotliwościowej oraz zaprojektowanie filtrów niezależnie dla każdego z podpasm

Banki filtrów a transformacje

Cyfrowa transformacja Fouriera
8-elementowe DFT



Cyfrowa transformacja kosinusowa
8-elementowe DCT



Dekompozycja i rekonstrukcja falkowa

Dyskretna transformacja falkowa

DWT od. ang. Discrete Wavelet Transform

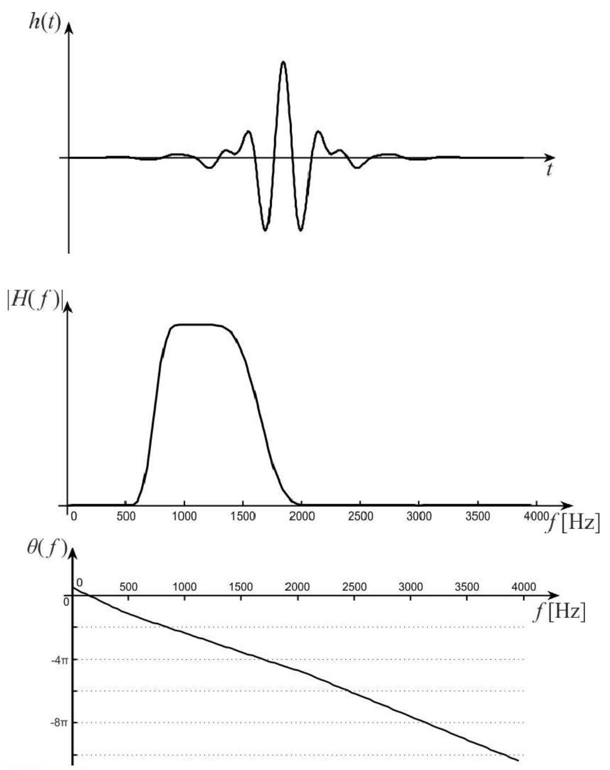
$$\boxed{c_{m+1,n} \Leftarrow s(n)} \qquad s_{m+1}(t) = \sum_n c_{m+1,n}\varphi_{m+1,n}(t)$$

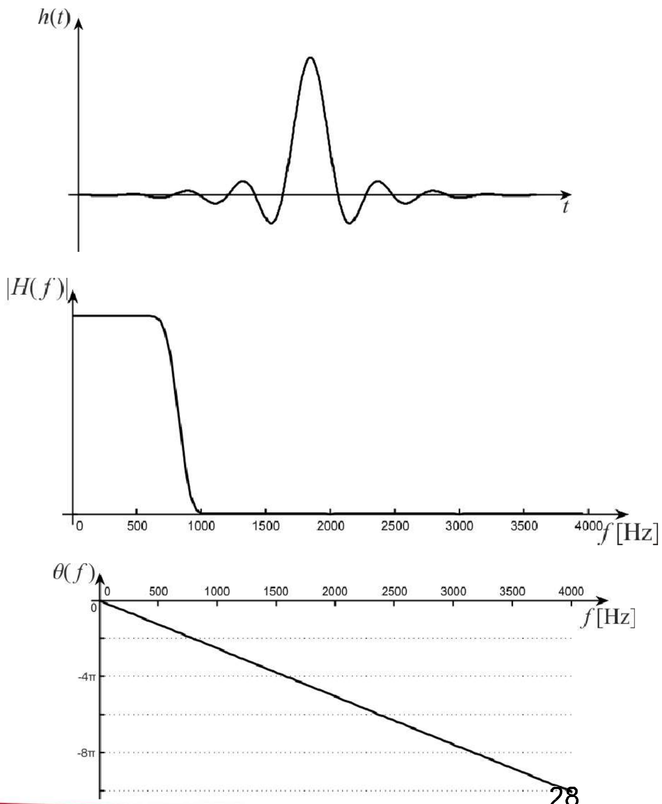
$$\boxed{c_{m,n} = \sum_k h_{k-2n} c_{m+1,k}} \qquad \boxed{d_{m,n} = \sum_k g_{k-2n} c_{m+1,k}}$$

Gdzie $c_{m,n}$ i $d_{m,n}$ są odpowiednio dobranymi współczynnikami aproksymacji i detali,

$$\boxed{\mathrm{DWT} = \left\{\{d_{m,n}\}_n, \{d_{m-1,n}\}_n, \ldots, \{d_{m-M,n}\}_n, \{c_{m-M,n}\}_n\right\}}$$

Falka i funkcja skalująca Meyera

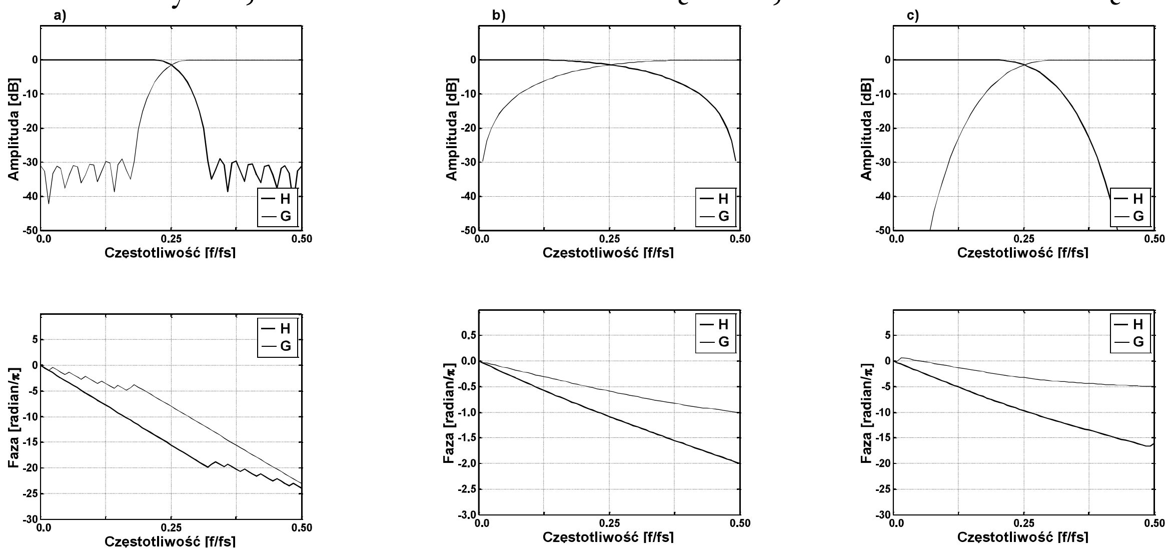




Porównanie filtrów zwierciadlanych

Dla falek:

Meyera, Daubechies rzędu 2, Daubechies rzędu 12



Kwadraturowe filtry zwierciadlane

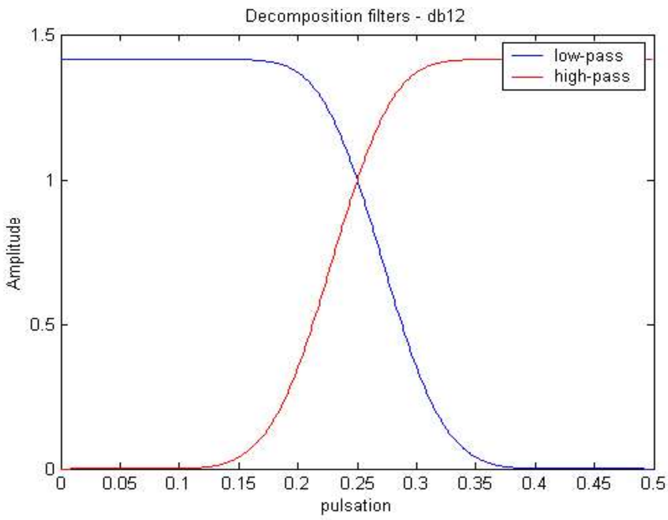
$$c_{m,n} = \sum_k h_{k-2n} c_{m+1,k} \quad \text{dla każdego} \quad m,n \in Z$$

$$d_{m,n} = \sum_k g_{k-2n} c_{m+1,k} \quad \text{dla każdego} \quad m,n \in Z$$

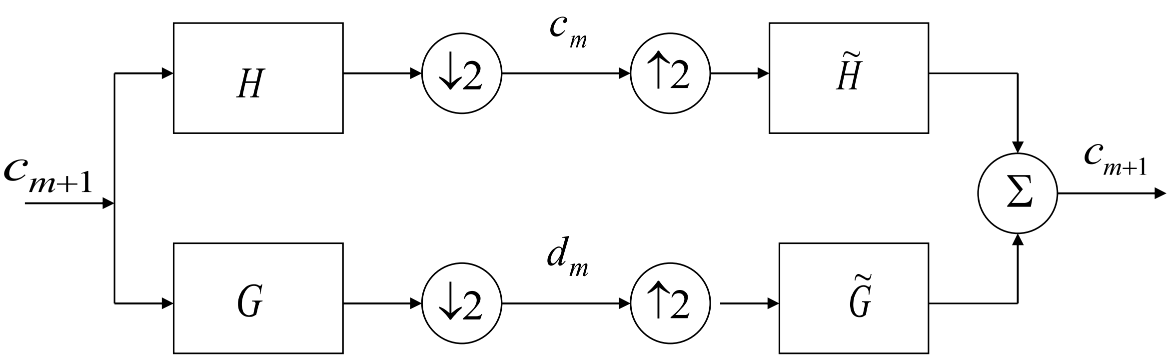
$$k^{nowe} = 2n + k^{stare}$$

Kwadraturowe filtry zwierciadlane

$$|H(f)|^2 + |G(f)|^2 = 1$$

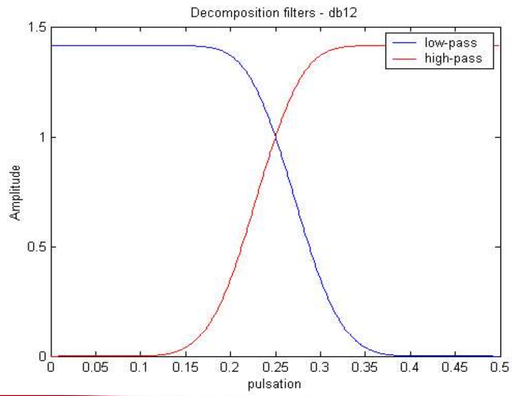


Przykład: dekompozycja i rekonstrukcja falkowa

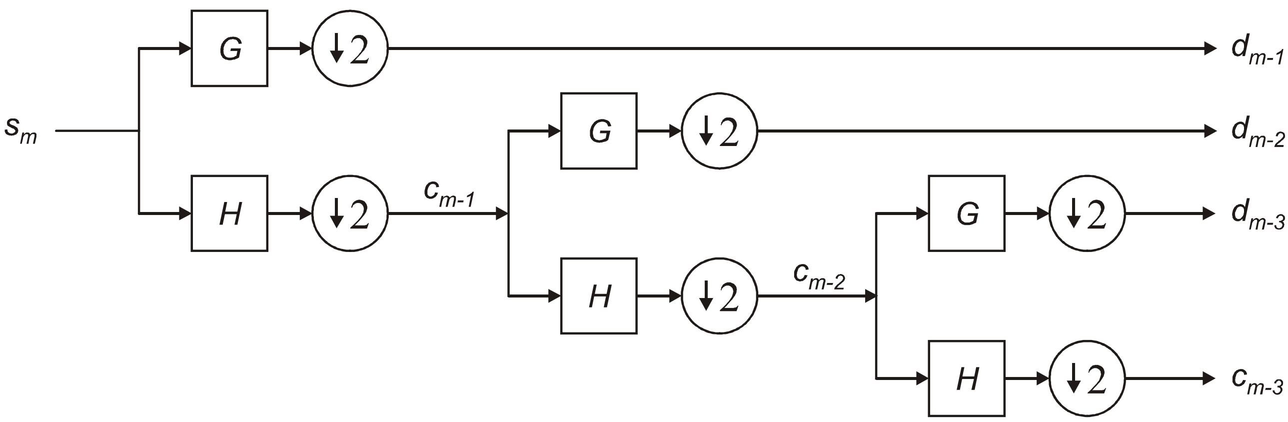


c_m - współczynniki zawierające informację z pasma dolnego

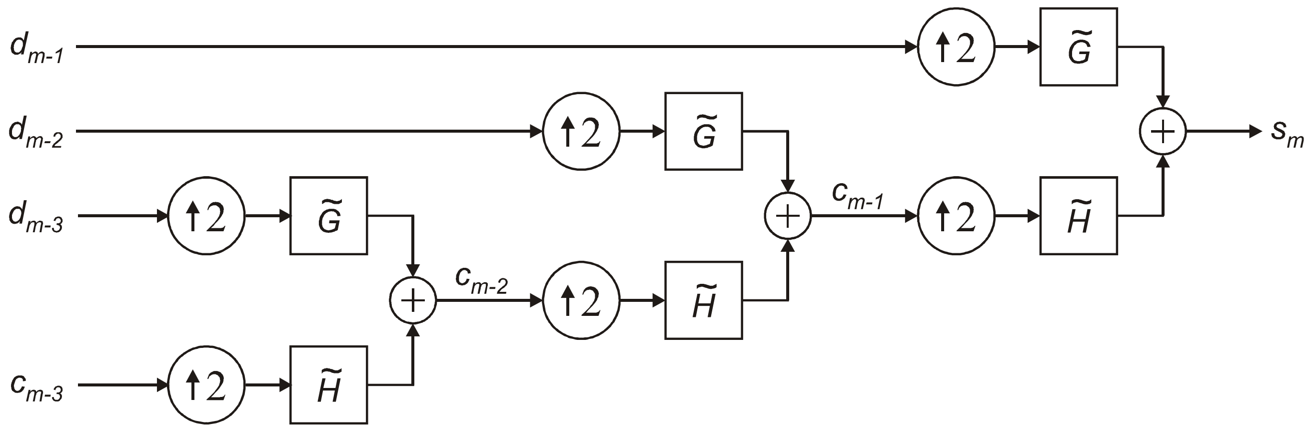
d_m - współczynniki zawierające informację z pasma górnego



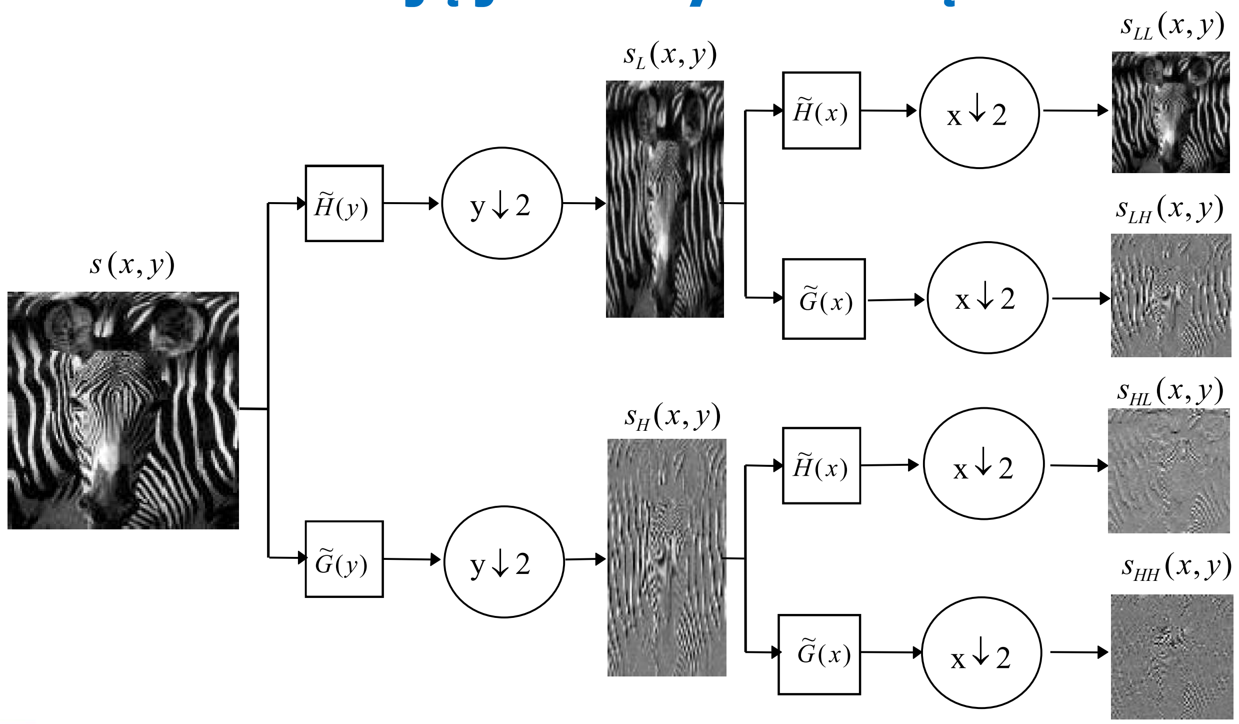
Przykład: schemat wielorozdzielczej dekompozycji falkowej (3 poziomy)



Przykład: schemat wielorozdzielczej rekonstrukcji falkowej (3 poziomy)



Dekompozycja obrazu wykorzystująca filtrację jednowymiarową



Rekonstrukcja obrazu