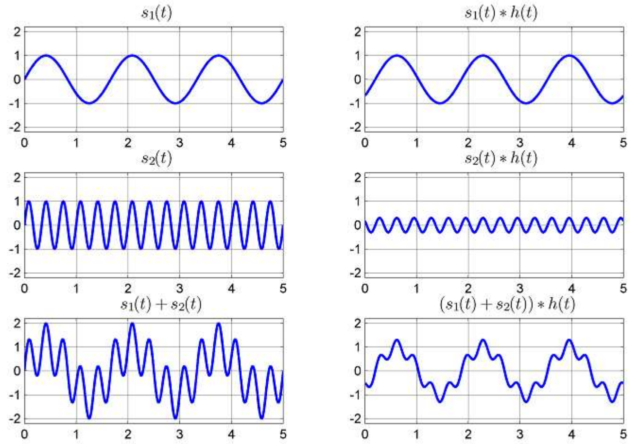
FILTRY ZE SKOŃCZONĄ ODPOWIEDZIĄ IMPULSOWĄ (SOI)

ang. Finite Impulse Response (FIR)

Spis treści

1. Definicja filtru FIR
2. Charakterystyki częstotliwościowe
3. Filtry FIR z liniową charakterystyką fazową
4. Definicja filtru 2-D FIR
5. Filtry 2-D FIR z liniową charakterystyką fazową
6. Projektowanie filtrów – metoda okna
7. Projektowanie filtrów – metodą próbkowania w dziedzinie częstotliwości
8. Optymalizacyjne metody projektowania filtrów FIR

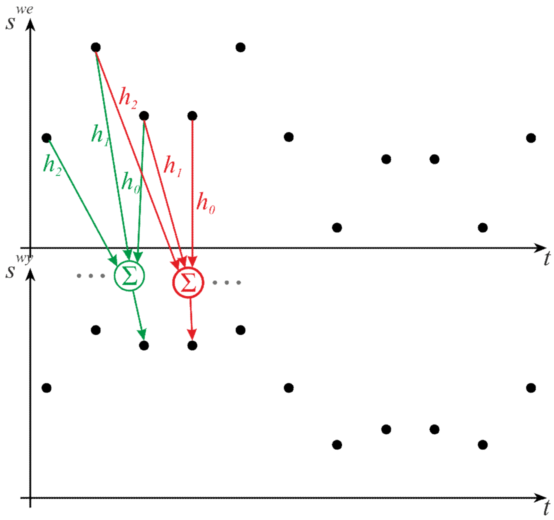
Przykład filtracji dolnoprzepustowej



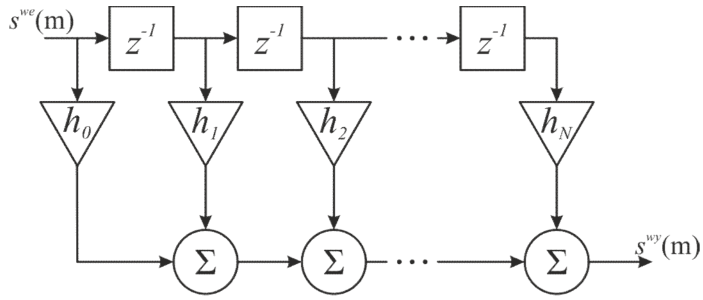
Graficzna prezentacja filtracji

$$
\boxed{s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^{N} h_n s^{we}(m-n)}
$$

N – rząd filtru



Graficzna prezentacja filtracji

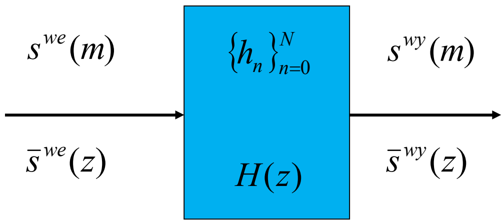


N – rząd filtru

$N+1$ – liczba współczynników filtru

$$\boxed{s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^{N} h_n s^{we}(m-n)}$$

Definicja filtru FIR w dziedzinie czasu



$$s^{wy}(m) = h_m * s^{we}(m)$$

$H(z)$ - transmitancja filtru

$$\boxed{s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^{N} h_n s^{we}(m-n)}$$ - równanie różnicowe filtru

Definicja filtru FIR w z-dziedzinie

$$\boxed{s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^{N} h_n s^{we}(m-n)}$$

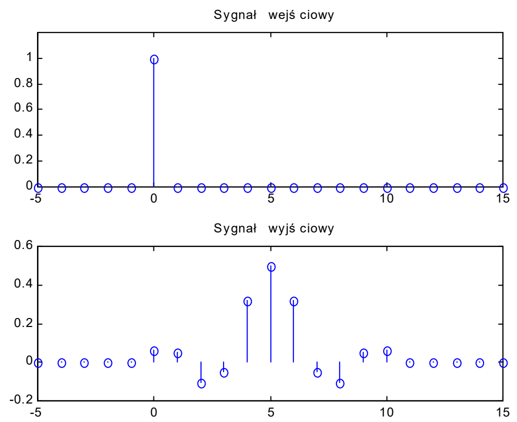
$$\bar{s}^{wy}(z) = \sum_m s^{wy}(m) z^{-m} = \sum_m \sum_{n=0}^{N} h_n s^{we}(m-n) z^{-m} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} h_n \sum_m s^{we}(m-n) z^{-m} = \sum_{n=0}^{N} h_n z^{-n} \bar{s}^{we}(z) = \bar{s}^{we}(z) \sum_{n=0}^{N} h_n z^{-n}$$

$$\boxed{\bar{s}^{wy}(z) = H(z)\,\bar{s}^{we}(z)}$$

$$\boxed{H(z) = \frac{\bar{s}^{wy}(z)}{\bar{s}^{we}(z)}} \qquad \boxed{H(z) = \sum_{n=0}^{N} h_n z^{-n}}$$

Filtracja dyskretnego impulsu Diraca



$$\boxed{s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^{N} h_n s^{we}(m-n)}$$

Stąd h_n to tzw. odpowiedź impulsowa filtru

Dyskretny impuls Diraca $\Rightarrow$ $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_N, 0, 0, \ldots$

Liniowość filtrów FIR

$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^{N} h_n s^{we}(m-n)$$

$$\boxed{s^{we}(m) = \alpha\, s_1^{we}(m) + \beta s_2^{we}(m)}$$

$$s^{wy}(m) = \sum_n h_n \left[\alpha\, s_1^{we}(m-n) + \beta\, s_2^{we}(m-n)\right]$$

$$= \alpha \sum_n h_n s_1^{we}(m-n) + \beta \sum_n h_n s_2^{we}(m-n)$$

$$\boxed{s^{wy}(m) = \alpha\, s_1^{wy}(m) + \beta s_2^{wy}(m)}$$

Charakterystyki częstotliwościowe filtrów FIR

$$s^{wy}(t) = \sum_{n=0}^{N} h_n s^{we}(t - n\Delta t)$$

$$\hat{s}^{wy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s^{wy}(t) e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} h_n s^{we}(t - n\Delta t) e^{-2\pi j f t} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{N} h_n \hat{s}^{we}(f) e^{-2\pi j f n \Delta t}$$

$$\underline{f} = f \Delta t = f / f_p$$

$$\boxed{H(\underline{f}) = \frac{\hat{s}^{wy}(\underline{f})}{\hat{s}^{we}(\underline{f})} = \sum_{n=0}^{N} h_n e^{-2\pi j \underline{f} n}}$$

$$\boxed{H(\underline{f}) = A(\underline{f}) e^{j\theta(\underline{f})}}$$

$$H(\underline{f}) \;\Rightarrow\; \left|H(\underline{f})\right| \;\text{ i }\; e^{j\theta(\underline{f})}$$

$$\boxed{tg(\theta(\underline{f})) = \frac{\mathrm{Im}(H(\underline{f}))}{\mathrm{Re}(H(\underline{f}))}}$$

$$\boxed{z = e^{2\pi j \underline{f}}}$$

$$\boxed{H(z) = \sum_{n=0}^{N} h_n z^{-n}}$$

$$\boxed{\theta(\underline{f}) = \mathrm{arc\,tg} \frac{\mathrm{Im}(H(\underline{f}))}{\mathrm{Re}(H(\underline{f}))}}$$

Filtry FIR z liniową charakterystyką fazową

$$\boxed{H(\underline{f}) = A(\underline{f})\, e^{j\theta(\underline{f})}}$$

dla $\boxed{\theta(\underline{f}) = -2\pi \underline{f}\, \tau}$ $\boxed{tg(\theta(\underline{f})) = \frac{\mathrm{Im}(H(\underline{f}))}{\mathrm{Re}(H(\underline{f}))}}$

$$H(\underline{f}) = \sum_{n=0}^{N} h_n e^{-2\pi j \underline{f} n} = \sum_{n=0}^{N} h_n \cos(2\pi \underline{f}\, n) - j \sum_{n=0}^{N} h_n \sin(2\pi \underline{f}\, n)$$

$$tg(\theta(\underline{f})) = \frac{-\sum_{n=0}^{N} h_n \sin(2\pi \underline{f}\, n)}{\sum_{n=0}^{N} h_n \cos(2\pi \underline{f}\, n)} \Rightarrow \frac{-\sin\left(2\pi \underline{f}\, \tau\right)}{\cos\left(2\pi \underline{f}\, \tau\right)} = \frac{-\sum_{n=0}^{N} h_n \sin(2\pi \underline{f}\, n)}{\sum_{n=0}^{N} h_n \cos(2\pi \underline{f}\, n)}$$

$$\forall \underline{f} \in [0, 1/2]$$

Filtry FIR z liniową charakterystyką fazową

$$\sum_{n=0}^{N} h_n \left[\sin(2\pi \underline{f}\, \tau)\cos(2\pi \underline{f}\, n) - \cos(2\pi \underline{f}\, \tau)\sin(2\pi \underline{f}\, n)\right] = 0$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \qquad \forall \underline{f} \in [0, 1/2]$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} h_n \sin\left(2\pi \underline{f}(\tau - n)\right) = 0} \qquad \forall \underline{f} \in [0, 1/2]$$

dla $\boxed{h_n = h_{N-n}}$ $\boxed{\tau = \frac{N}{2}}$

Czyli kąt nachylenia charakterystyki fazowej

$$\alpha = -\mathrm{arc\,tg}(2\pi\tau) = -\mathrm{arc\,tg}(\pi N)$$

Filtry FIR z liniową charakterystyką fazową

$$\sum_{n=0}^{N} h_n \left[\sin(2\pi \underline{f}\, \tau)\cos(2\pi \underline{f}\, n) - \cos(2\pi \underline{f}\, \tau)\sin(2\pi \underline{f}\, n) \right] = 0$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} h_n \sin\left(2\pi \underline{f}(\tau - n)\right) = 0} \qquad \forall \underline{f} \in [0, 1/2]$$

$$\text{dla} \quad \boxed{h_n = h_{N-n}} \qquad \boxed{\tau = \frac{N}{2}}$$

Sprawdzenie dla N parzystego

$$\sum_{n=0}^{N/2} \left[h_n \sin\left(2\pi \underline{f}(\tfrac{N}{2} - n)\right) + h_{N-n} \sin\left(2\pi \underline{f}(\tfrac{N}{2} - N + n)\right) \right] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N/2} \left[h_n \sin\left(2\pi \underline{f}(\tfrac{N}{2} - n)\right) - h_{N-n} \sin\left(2\pi \underline{f}(\tfrac{N}{2} - n)\right) \right] = 0$$

Filtr z liniową charakterystyką fazową dla *N* nieparzystego

$$\boxed{H(\underline{f}) = \sum_{n=0}^{N} h_n e^{-2\pi j \underline{f} n}}$$

$$\boxed{H(\underline{f}) = 2e^{-\pi j N \underline{f}} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h_n \cos\left((2n - N)\pi \underline{f}\right)}$$

$$\boxed{A(\underline{f}) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h_n \cos\left((2n - N)\pi \underline{f}\right)}$$

$$\boxed{\theta(\underline{f}) = -\pi N \underline{f}}$$

dla: $\underline{f} \in [\,0\,, 1/2\,]$

$$\boxed{H(\underline{f}) = A(\underline{f})\, e^{j\theta(\underline{f})}}$$

Filtr z liniową charakterystyką fazową dla *N* parzystego

$$H(\underline{f}) = e^{-\pi j N \underline{f}} \left[h_{N/2} + 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h_n \cos\left((2n-N)\pi \underline{f}\right) \right]$$

$$\theta(\underline{f}) = -\pi N \underline{f}$$

$$A(\underline{f}) = \left[h_{N/2} + 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h_n \cos\left((2n-N)\pi \underline{f}\right) \right]$$

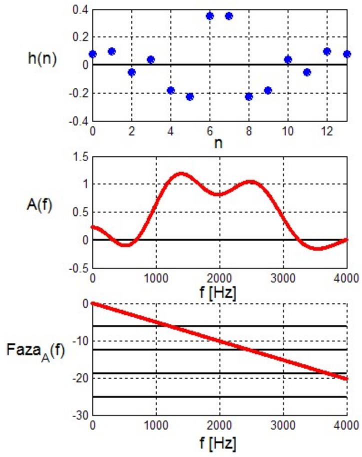
dla: $\underline{f} \in [\,0\,, 1/2\,]$

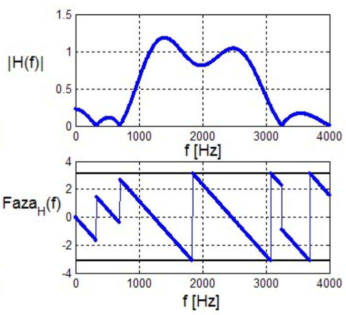
$$H(\underline{f}) = A(\underline{f})\, e^{j\theta(\underline{f})}$$

Przykład filtru z liniową charakterystyką fazową *N*-nieparzyste

$$H(\underline{f}) = A(\underline{f}) e^{jFaza_A(\underline{f})} = |H(\underline{f})| e^{jFaza_H(\underline{f})}$$

f_p=8kHz

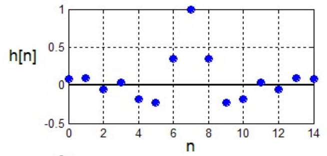




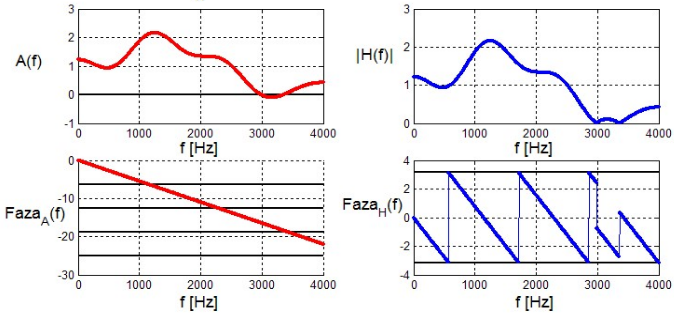
Na wykresie fazy czarne poziome linie oznaczają wielokrotność -2π

Na wykresie fazy czarne poziome linie oznaczają poziomy +π oraz -π

Przykład filtru z liniową charakterystyką fazową
N-parzyste



$$H(\underline{f}) = A(\underline{f})e^{jFaza_A(\underline{f})} = |H(\underline{f})|e^{jFaza_H(\underline{f})}$$



Filtry FIR z afiniczną charakterystyką fazową

$$\theta(\underline{f}) = -2\pi \underline{f}\tau + \alpha$$

$$\tau = \frac{N}{2}$$

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$h_n = -h_{N-n}$$

Filtr z afiniczną charakterystyką fazową dla N nieparzystego

$$\boxed{H(\underline{f}) = 2e^{-\pi j N \underline{f} - \pi j/2} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h_n \sin\left((2n-N)\pi \underline{f}\right)}$$ dla: $\underline{f} \in [\,0\,,1/2\,]$

$$\boxed{A(\underline{f}) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h_n \sin\left((2n-N)\pi \underline{f}\right)}$$

$\theta(\underline{f}) = -\pi N \underline{f} - \pi/2$ dla: $\underline{f} \in [\,0\,,1/2\,]$

$\theta(\underline{f}) = -\pi N \underline{f} + \pi/2$ dla: $\underline{f} \in [\,-1/2\,,0\,]$

$$\boxed{H(\underline{f}) = A(\underline{f})\, e^{j\theta(\underline{f})}}$$

Filtr z afiniczną charakterystyką fazową dla N parzystego

$$\boxed{H(\underline{f}) = 2e^{-\pi j N \underline{f} - \pi j/2} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} h_n \sin\left((2n-N)\pi \underline{f}\right)}$$ dla: $\underline{f} \in [\,0\,,1/2\,]$

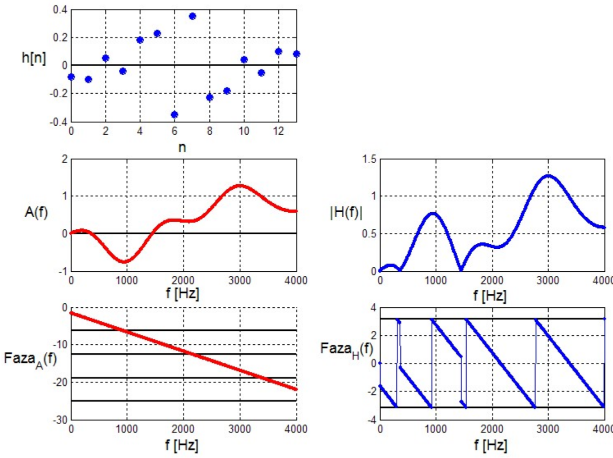
$$\boxed{A(\underline{f}) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} h_n \sin\left((2n-N)\pi \underline{f}\right)}$$

$\theta(\underline{f}) = -\pi N \underline{f} - \pi/2$ dla: $\underline{f} \in [\,0\,,1/2\,]$

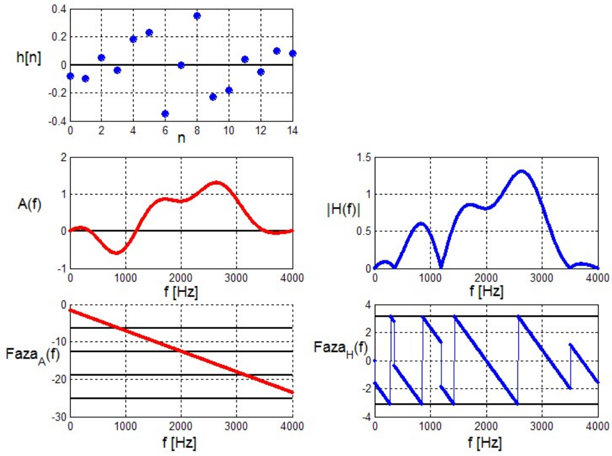
$\theta(\underline{f}) = -\pi N \underline{f} + \pi/2$ dla: $\underline{f} \in [\,-1/2\,,0\,]$

$$\boxed{H(\underline{f}) = A(\underline{f})\, e^{j\theta(\underline{f})}}$$

Przykład filtru z afiniczną charakterystyką fazową, *N*-nieparzyste

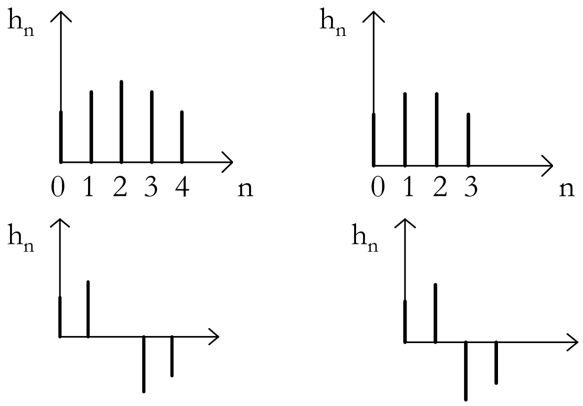


Przykład filtru z afiniczną charakterystyką fazową, *N*-parzyste



Cztery typy symetrii odpowiedzi impulsowych

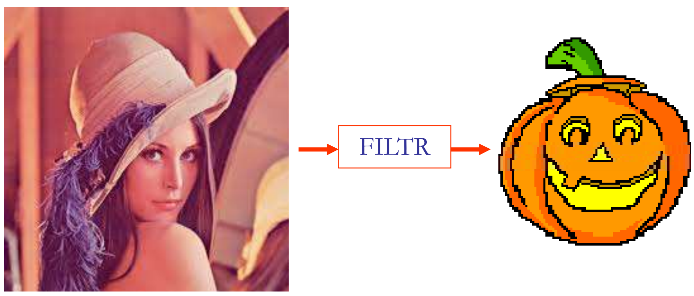
filtry rzędu parzystego | filtry rzędu nieparzystego



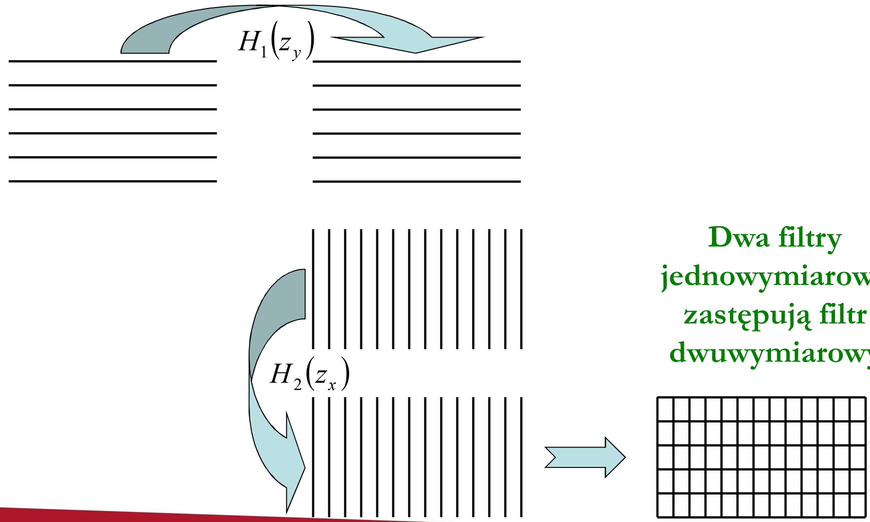
z liniową charakterystyką fazową

z afiniczną charakterystyką fazową

Filtracja 2-D FIR

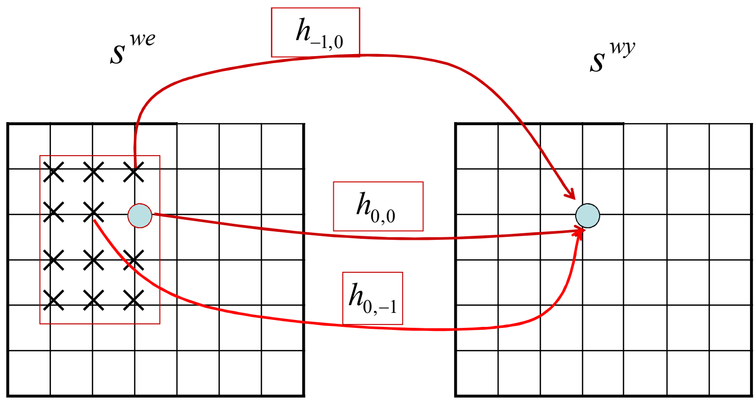


Praktyka filtracji 2-D



Dwa filtry jednowymiarowe zastępują filtr dwuwymiarowy

Graficzna prezentacja filtru 2-D FIR



Definicja filtru 2-D FIR

$$s^{wy}(k,l) = \sum_m \sum_n h_{m,n}\, s^{we}(k-m, l-n)$$

$$\bar{s}^{wy}(z_x, z_y) = \sum_k \sum_l s^{wy}(k,l) z_x^{-k} z_y^{-l}$$

$$\bar{s}^{wy}(z_x, z_y) = \sum_{(m,n)\in R_h} \sum h_{m,n} \sum_k \sum_l s^{we}(k-m, l-n) z_x^{-k} z_y^{-l}$$

$$\bar{s}^{wy}(z_x, z_y) = \sum_{(m,n)\in R_h} \sum h_{m,n} z_x^{-m} z_y^{-n} \bar{s}^{we}(z_x, z_y)$$

$$H(z_x, z_y) = \sum_{(m,n)\in M^{we}} \sum h_{m,n} z_x^{-m} z_y^{-n}$$

$$\bar{s}^{wy}(z_x, z_y) = H(z_x, z_y) \bar{s}^{we}(z_x, z_y)$$

Charakterystyki częstotliwościowe filtru 2-D FIR

$z_x = e^{2\pi j \underline{f_x}}$ oraz $z_y = e^{2\pi j \underline{f_y}}$ $\quad H(z_x, z_y) = \sum_{(m,n)\in M^{we}} \sum h_{m,n} z_x^{-m} z_y^{-n}$

$$H(\underline{f_x}, \underline{f_y}) = \sum_{(m,n)\in R_h} \sum h_{m,n} e^{-2\pi j(\underline{f_x} m + \underline{f_y} n)} = A(\underline{f_x}, \underline{f_y}) e^{j\theta(\underline{f_x}, \underline{f_y})}$$

$$\theta(\underline{f_x}, \underline{f_y}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}\left(H(\underline{f_x}, \underline{f_y})\right)}{\operatorname{Re}\left(H(\underline{f_x}, \underline{f_y})\right)} \right)$$

$$A(\underline{f_x}, \underline{f_y}) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Re}^2\left(H(\underline{f_x}, \underline{f_y})\right) + \operatorname{Im}^2\left(H(\underline{f_x}, \underline{f_y})\right)}{\operatorname{Im}\left(H(\underline{f_x}, \underline{f_y})\right)} \sin(\theta) & \text{dla} \quad \theta \neq 0 \\ \operatorname{Re}\left(H(\underline{f_x}, \underline{f_y})\right) & \text{dla} \quad \theta = 0 \end{cases}$$

Filtry 2-D FIR z liniową charakterystyką fazową

$$\boxed{\theta(\underline{f}_x, \underline{f}_y) = -2\pi(\underline{f}_x \tau_x + \underline{f}_y \tau_y)}$$

$$\mathrm{tg}\left(-2\pi(\underline{f}_x \tau_x + \underline{f}_y \tau_y)\right) = -\frac{\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} h_{m,n} \sin\left(2\pi(\underline{f}_x m + \underline{f}_y n)\right)}{\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} h_{m,n} \cos\left(2\pi(\underline{f}_x m + \underline{f}_y n)\right)}$$

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} h_{m,n} \sin\left(2\pi[\underline{f}_x(\tau_x - m) + \underline{f}_y(\tau_y - n)]\right) = 0 \qquad \forall\ \underline{f_x, f_y} \in [0, 1/2]$$

$$\boxed{\tau_y = N/2} \qquad \boxed{\tau_x = M/2}$$

$$\boxed{h_{m,n} = h_{M-m,N-n}}$$

Filtry 2-D FIR z afiniczną charakterystyką fazową

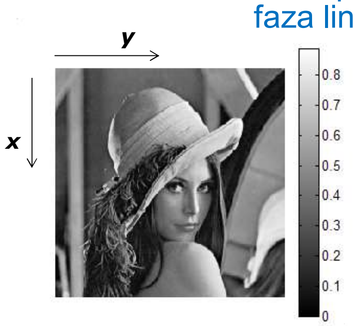
$$\boxed{\theta(\underline{f}_x, \underline{f}_y) = -2\pi(\underline{f}_x \tau_x + \underline{f}_y \tau_y) \pm \frac{\pi}{2}}$$

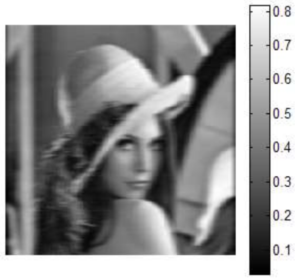
$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} h_{m,n} \cos\left(2\pi[\underline{f}_x(\tau_x - m) + \underline{f}_y(\tau_y - n)]\right) = 0$$

$$\boxed{\tau_x = M/2} \qquad \boxed{\tau_y = N/2} \qquad \forall\ \underline{f_x, f_y} \in [0, 1/2]$$

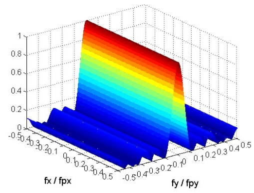
$$\boxed{h_{m,n} = -h_{M-m,N-n}}$$

Filtr dolnoprzepustowy w kierunku *y* wszechprzepustowy w kierunku *x* faza liniowa w obu kierunkach

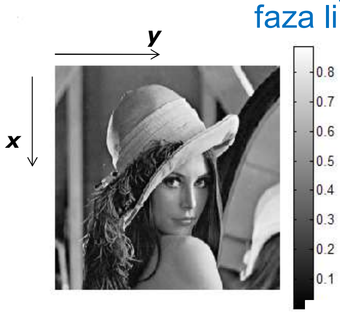


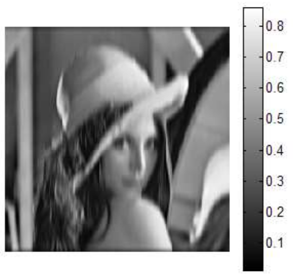


moduł

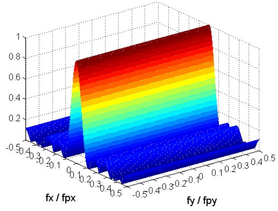


Filtr dolnoprzepustowy w kierunku *x* wszechprzepustowy w kierunku *y* faza liniowa w obu kierunkach



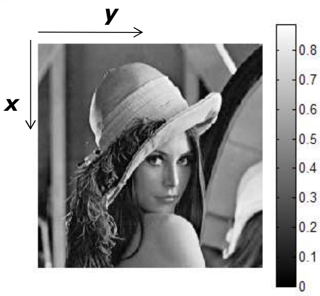


moduł

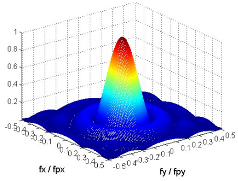


AGH

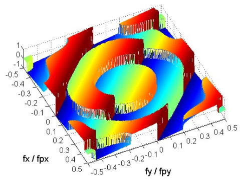
Filtr dolnoprzepustowy w obu kierunkach faza liniowa w obu kierunkach



moduł

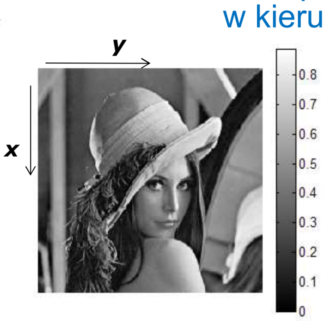


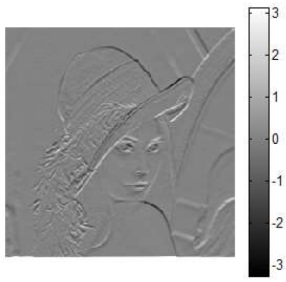
faza (dzielona przez π)



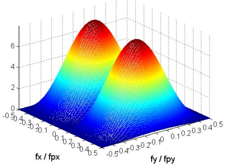
AGH

Filtr pasmowo-przepustowy w kierunku *x* dolnoprzepustowy w kierunku *y* w kierunku *x* faza jest afiniczna

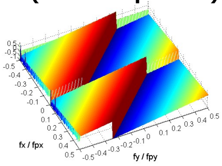




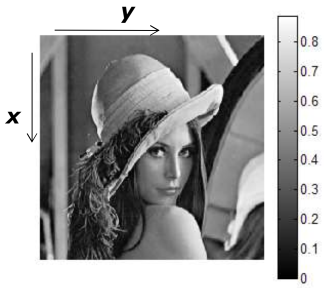
moduł

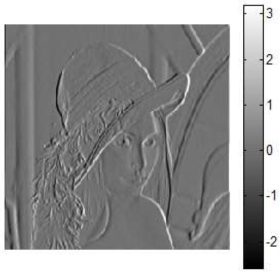


faza (dzielona przez π)



Filtr pasmowo-przepustowy w kierunku *y* dolnoprzepustowy w kierunku *x* w kierunku *y* faza jest afiniczna





moduł

faza (dzielona przez π)