

Zmiana częstotliwości próbkowania

(ang. Resampling)

Zmiana częstotliwości próbkowania

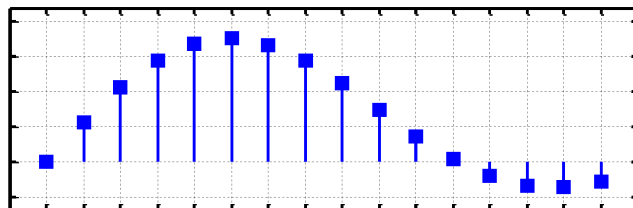
Spis treści:

1. Podpróbkowanie
2. Nadpróbkowanie
3. Decymator i interpolator
4. Przykłady zmiany częstotliwości próbkowania

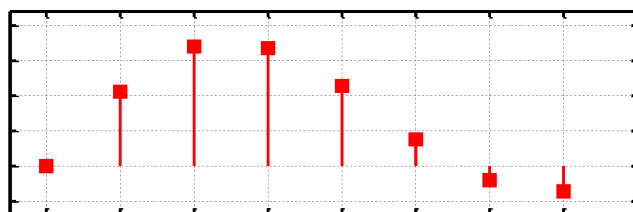
Rysunek podpróbkowania ze stałą 2

(ang. subsampling, down-sampling, decimation)

Sygnał oryginalny

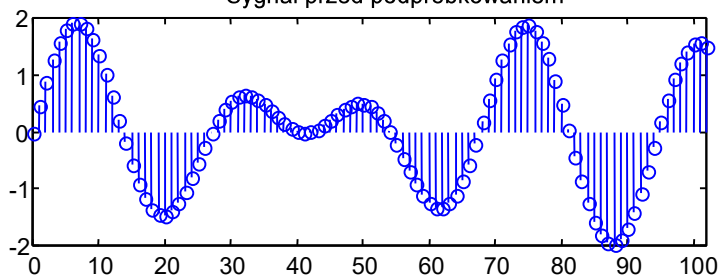


Sygnał po podpróbkowaniu

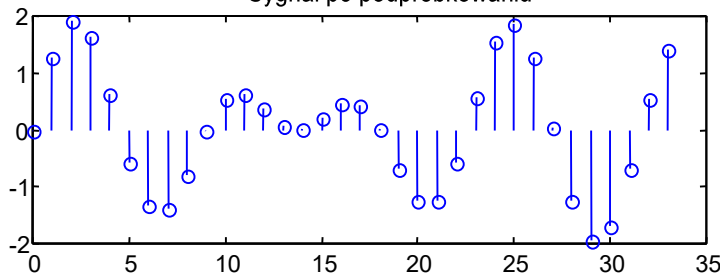


Rysunek podpróbkowania ze stałą $M=3$

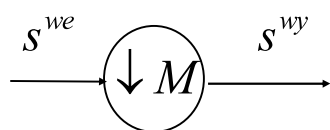
Sygnał przed podpróbkowaniem



Sygnał po podpróbkowaniu



Model matematyczny podpróbkowania ze stałą M



$$s^{wy}(n) = s^{we}(nM)$$

$$\Delta t^{wy} = M \Delta t^{we}$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \bar{s}^{we}(z^{1/M} w_M^m)$$

$$z = e^{2\pi j \underline{f}}$$

$$\text{gdzie } w_M = e^{-2\pi j / M}$$

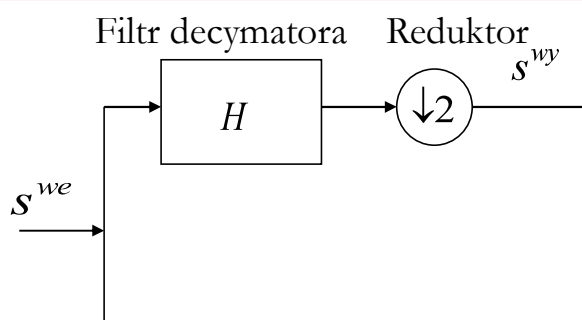
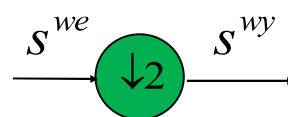
$$\hat{s}^{wy}(\underline{f}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{s}^{we}((\underline{f} - m) / M)$$

$$\underline{f} = \frac{f}{f_p} \in [0, 0.5]$$

Sprawdzenie modelu $\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \bar{s}^{we}(z^{1/M} w_M^m)$ przy podpróbkowaniu 2x

$$w_2 = e^{-\pi j} = -1$$

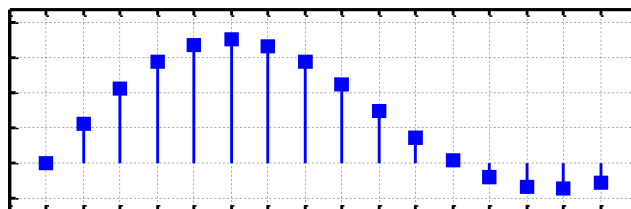
$$\bar{s}^{wy}(z) = 0,5 [\bar{s}^{we}(z^{0,5}) + \bar{s}^{we}(-z^{0,5})]$$



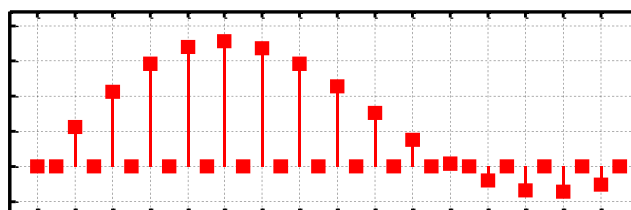
$$\bar{s}^{wy}(z) = 0,5 [H(z^{0,5}) \bar{s}^{we}(z^{0,5}) + H(-z^{0,5}) \bar{s}^{we}(-z^{0,5})]$$

Rysunek nadpróbkowania ze stałą 2 (ang. up-sampling)

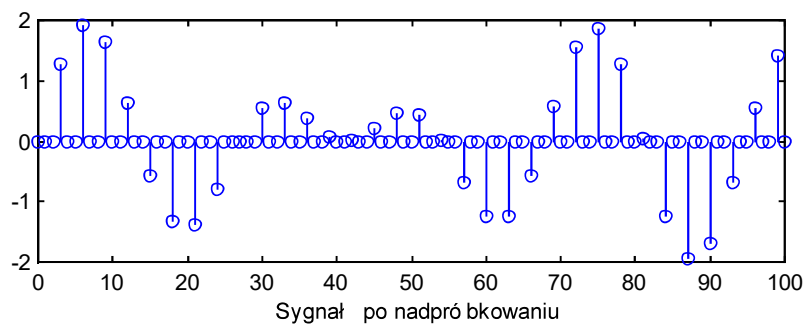
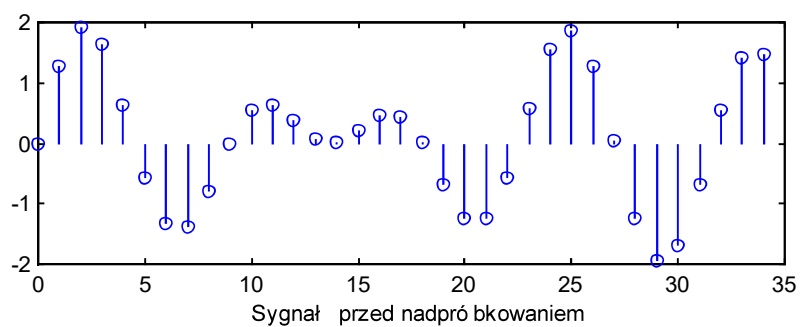
Sygnał oryginalny



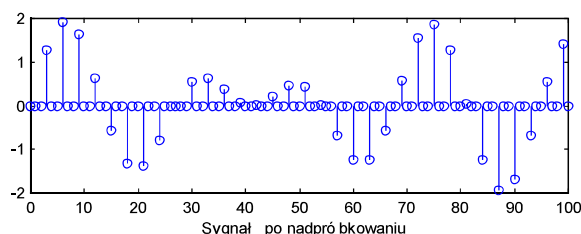
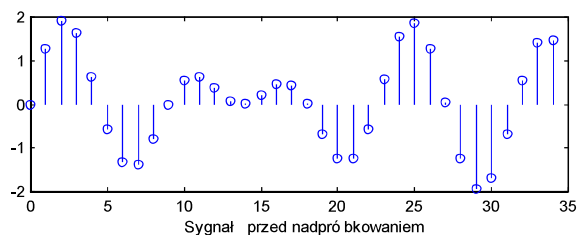
Sygnał po nadpróbkowaniu



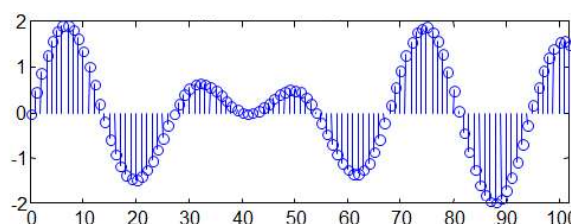
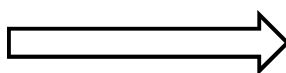
Rysunek nadpróbkowania ze stałą $M=3$



Rysunek nadpróbkowania ze stałą $M=3$



Czy możemy otrzymać
leśszy sygnał z wartościami
niezerowymi?



TAK, poprzez zastosowanie tzw. filtra interpolującego
(omówionego na dalszych slajdach)

9

Model matematyczny M -nadpróbkowania

$$s^{we} \xrightarrow{\uparrow M} s^{wy} \quad s^{wy}(n) = \begin{cases} s^{we}(n/M) & \text{gdy } n \bmod M = 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases}$$

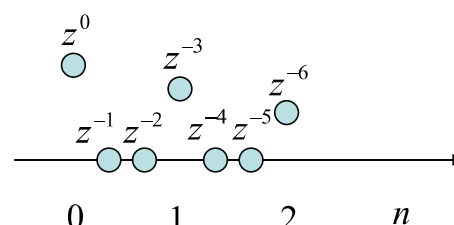
$$\sum_n s^{wy}(n) z^{-n} = \sum_n s^{we}(n) z^{-nM}$$

$$\Delta t^{wy} = \Delta t^{we} / M$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \bar{s}^{we}(z^M)$$

$$z = e^{2\pi j f}$$

$$\hat{s}^{wy}(f) = \hat{s}^{we}(M f)$$

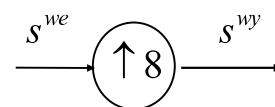


Wyjaśnienie wzoru dla $M = 3$

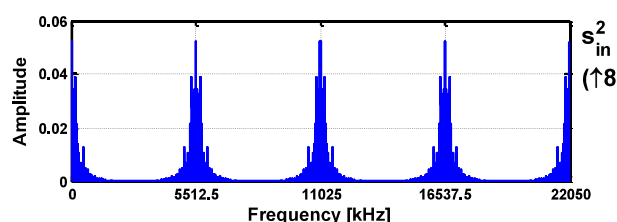
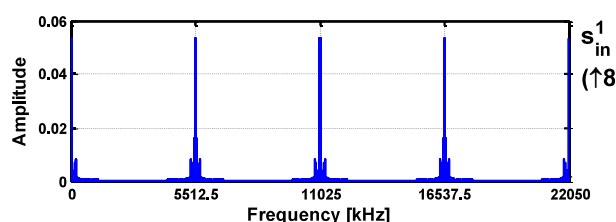
● wartości sygnału s^{wy}

10

Widmo sygnału nadpróbkowanego ze stałą $M=8$



Artefakty pojawiające się po nadpróbkowaniu (jedynie ekspander)



$$\hat{s}^{wy}(\underline{f}) = \hat{s}^{we}(8\underline{f}) \quad \Rightarrow \text{potrzebny jest filtr który usunie powtórzenia widma wejściowego}$$

11

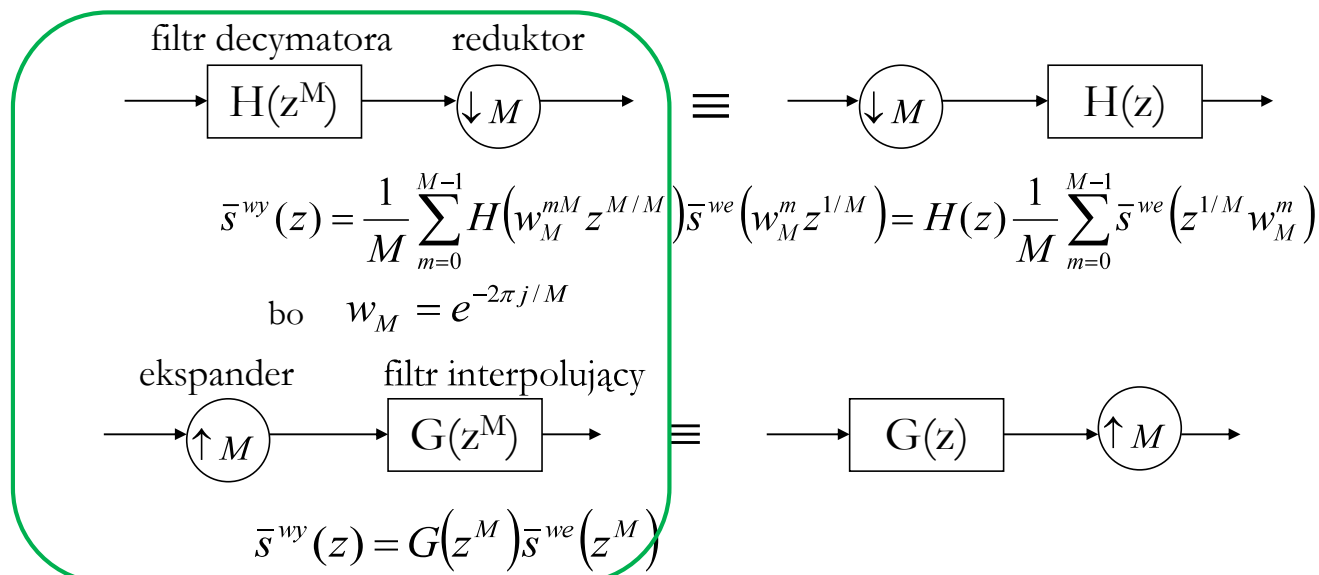
Przemienność filtracji z pod- i nadpróbkowaniem

Podpróbkowanie:

$$\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \bar{s}^{we}(z^{1/M} w_M^m)$$

Nadpróbkowanie:

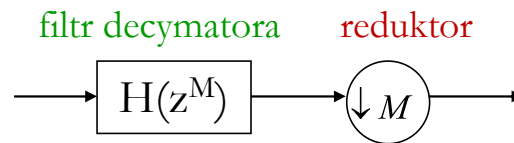
$$\bar{s}^{wy}(z) = \bar{s}^{we}(z^M)$$



12

Decymator

- Dokonuje operacji podpróbkowania

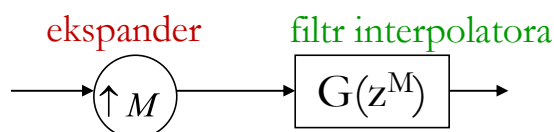


- Reduktor** – pozostawia jedynie co M-tą próbkę (odrzuca M-1 próbek), zmniejsza częstotliwość próbkowania M-krotnie
- Filtr decymatora – filtr dolnoprzepustowy, który ogranicza pasmo M-krotnie w celu odfiltrowania składowych widma znajdujących się powyżej nowej częstotliwości Nyquista (a więc jest to filtr górnopasmowy o częstotliwości odcięcia równiej częstotliwości Nyquista po reduktorze)
- W decymatorze, najpierw odfiltrowujemy a potem zmniejszamy częstotliwość próbkowania

13

Interpolator

- Dokonuje operacji nadpróbkowania

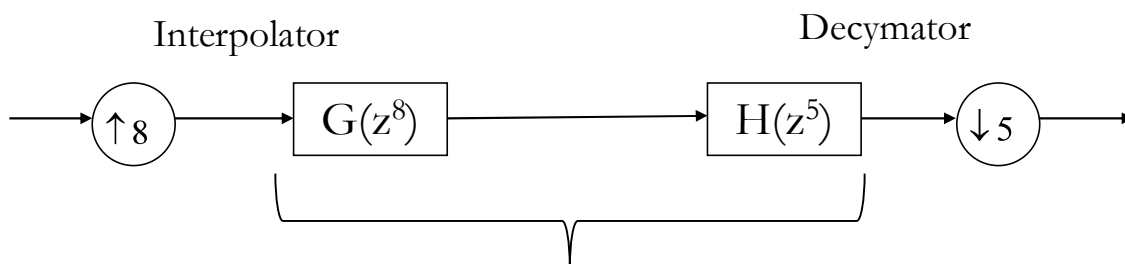


- Ekspander** – wstawia M-1 wartości zerowych pomiędzy każde dwie próbki sygnału wejściowego, zwiększając M-krotnie częstotliwość próbkowania
- Filtr interpolatora** – filtr dolnoprzepustowy, którego celem jest i) odfiltrowanie powtórzonego M-krotnie widma w nowym przedziale częstotliwości $(0, M f_p)$ oraz ii) interpolacja wartości sygnału w wyniku czego otrzymujemy sygnał, gdzie zamiast wstawionych wartości zerowych mamy wartości zinterpolowane z sygnału wejściowego (zwykle filtrem typu FIR)
- W interpolatorze, najpierw zwiększamy częstotliwość próbkowania, a potem interpolujemy wartości i odfiltrowujemy powtórzone widmo

14

Zmiana częstotliwości próbkowania o wartość niecałkowitą

- Aby uzyskać przetwornik szybkości próbkowania o liczbę niecałkowitą, stosujemy kaskadę interpolatora (interpolatorów) a następnie kaskadę decymatora (decymatorów)
- Przykład: zwiększenie częstotliwości próbkowania o 1.6 można uzyskać poprzez zastosowanie 8-krotnego interpolatora w kaskadzie z 5-krotnym decymatorem, wynika to z równania $8/5=1.6$



oba filtry można połączyć w jeden filtr dolnoprzepustowy

Przykłady dźwiękowe

Oryginał:



Nadpróbkowanie 3x, podpróbkowanie 3x:



Nadpróbkowanie 3x, podpróbkowanie 3x, brak filtrów:



Nadpróbkowanie 3x, podpróbkowanie 7x:



Nadpróbkowanie 3x, podpróbkowanie 7x, brak filtrów:



Nadpróbkowanie 2x, podpróbkowanie 15x:

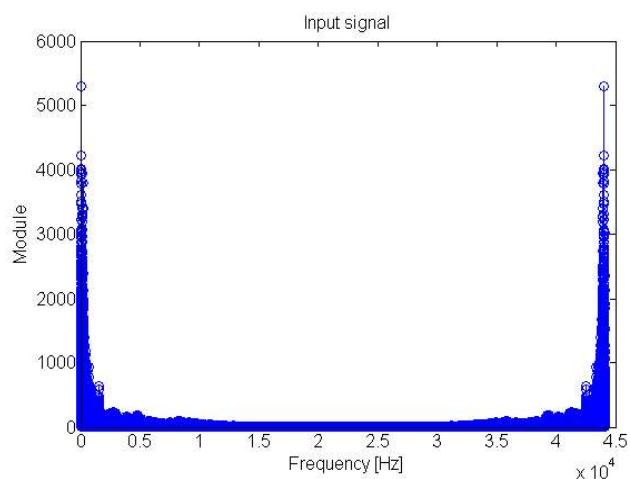


Nadpróbkowanie 2x, podpróbkowanie 15x, brak filtrów:

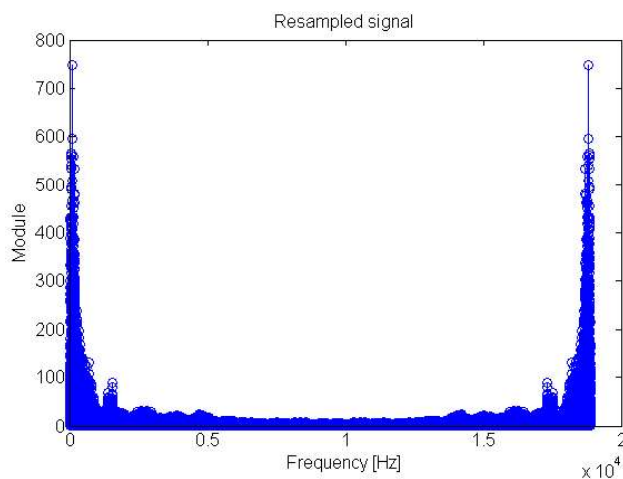


Przykłady dźwiękowe

Oryginał:

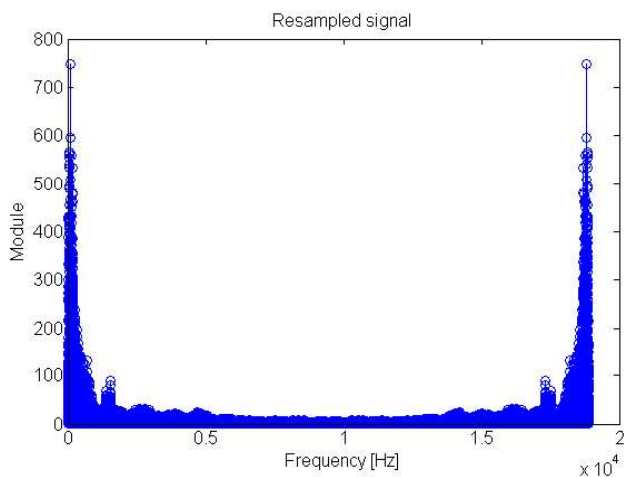


Nadpróbkowanie 3x,
podpróbkowanie 7x:



Przykłady dźwiękowe

Nadpróbkowanie 3x,
podpróbkowanie 7x
z filtracją:



Nadpróbkowanie 3x,
podpróbkowanie 7x
bez filtracji:

