Z-TRANSFORMACJA

Spis treści

Definicja z-transformacji

Z-transformata jest szeregiem Laurenta

$$\boxed{\bar{s}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\, z^{-n}}$$

gdzie:

$s(n)$ są wartościami dyskretnego sygnału,

z jest zmienną zespoloną, tzn. $\boxed{z \in \Im}$

Ideę *z*-transformacji znał Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827).

W roku 1947 transformatę wykorzystywał Witold Hurewicz (Łódź 1904 – zmarł w Meksyku 1956).

W roku 1952 John Ragazzini i Lofti Zadeh nadali jej obecną nazwę.

Odwrotna z-transformacja

Mnożąc obustronnie $\boxed{\bar{s}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\, z^{-n}}$

przez z^{k-1} i licząc całkę okrężną po dowolnym zamkniętym konturze K zawierającym wewnątrz 0, otrzymujemy

$$\oint_K \bar{s}(z) z^{k-1} dz = \oint_K \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) z^{k-1-n} dz.$$

Zmieniając kolejność całkowania i sumowania otrzymujemy

$$\oint_K \bar{s}(z) z^{k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \oint_K z^{k-1-n} dz.$$

Wykorzystując zależność

$$\oint_K z^{k-1-n} dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{gdy} \quad k = n \\ 0 & \text{gdy} \quad k \neq n \end{cases}$$

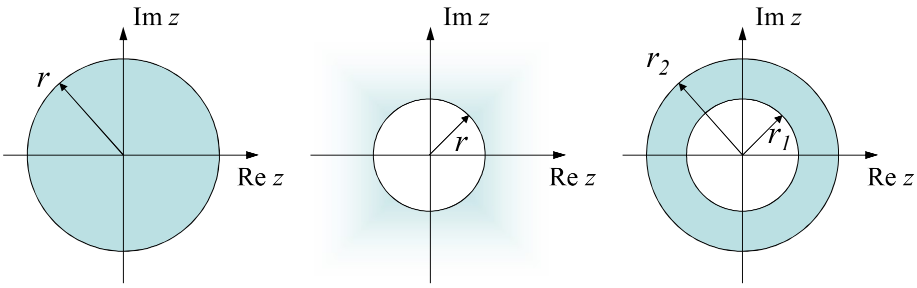
otrzymujemy ostatecznie

$$\boxed{s(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_K \bar{s}(z) z^{n-1} dz.}$$

Obszar zbieżności z-transformaty

Zbieżność szeregu $\boxed{\bar{s}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\, z^{-n}}$ jest zależna od wartości sygnału.

Najczęściej dla przykładów podaje się następujące obszary zbieżności:



$|z|<r$ $\quad$ $|z|>r$ $\quad$ $r_1<|z|<r_2$

Praktyka odtwarzania sygnału

W praktyce trudno jest posługiwać się wzorem

$$\boxed{s(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_K \bar{s}(z) z^{n-1} dz}$$

definiującym przekształcenie odwrotne. Łatwiej jest obliczać kolejne współczynniki szeregu Laurenta

$$\bar{s}(z) = \cdots + s(-2)z^2 + s(-1)z + s(0) + s(1)z^{-1} + s(2)z^{-2} + \cdots,$$

czyli korzystać z definicji $\boxed{\bar{s}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\, z^{-n}.}$

Przykład 1: z-transformata impulsu Diraca

Korzystając z definicji $\boxed{\bar{s}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\, z^{-n},}$

można wyliczyć z-transformatę dla dyskretnego impulsu Diraca

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & \text{dla} \quad n=0\\ 0 & \text{dla} \quad n\neq 0\end{cases}.$$

Natychmiast otrzymujemy

$$\bar{\delta}(z)=1$$

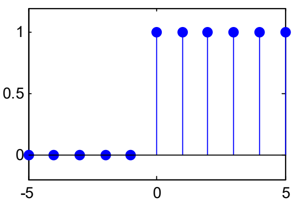
a obszar zbieżności jest zbiorem liczb zespolonych, czyli

$$z\in C.$$

Przykład 2: z-transformata skoku jednostkowego

Aby obliczyć z-transformatę skoku jednostkowego

$$u(n)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad n<0\\ 1 & \text{dla} \quad n\geq 0\end{cases}$$



skorzystamy z definicji $\boxed{\bar{s}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\, z^{-n},}$

otrzymując szereg geometryczny

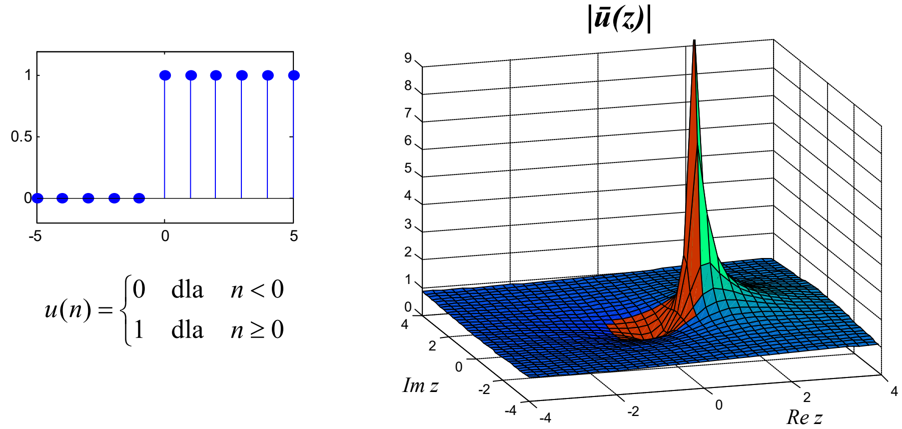
$$\bar{u}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots,$$

którego pierwszym wyrazem jest $a_1=1$ a ilorazem $q=z^{-1}$.

Szereg ten jest zbieżny do $\bar{u}(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} z^{-n}=\frac{a_1}{1-q}=\frac{z}{z-1}.$

Warunek zbieżności $|q|<1$ wyznacza obszar zbieżności $|z|>1$.

Graficzna prezentacja z-transformaty skoku jednostkowego



$$u(n)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad n<0\\ 1 & \text{dla} \quad n\ge 0\end{cases}$$

$$\bar{u}(z)=\frac{z}{z-1} \quad \text{dla} \quad |z|>1$$

Przykład 3: z-transformata sygnału wykładniczego

Do obliczenia z-transformaty dla sygnału

$$s(n)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad n<0\\ a^n & \text{dla} \quad n\ge 0\end{cases} \quad = \quad a^n u(n)$$

posłużymy się definicją $\boxed{\bar{s}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\, z^{-n},}$

otrzymując $\bar{s}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^n.$

Jest to szereg geometryczny zbieżny do

$$\bar{s}(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}.$$

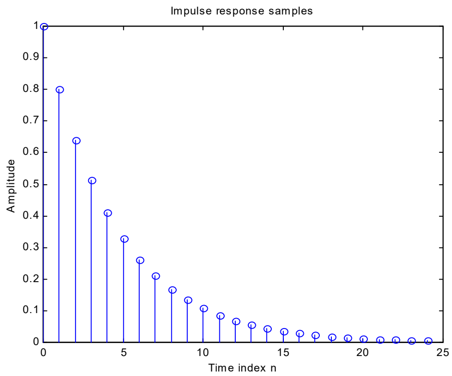
Z warunku zbieżności $q=a/z$ wynika obszar zbieżności $|z|>|a|.$

Szczególny przypadek poprzedniego przykładu

Szczególnym przypadkiem sygnału

$$s(n)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad n<0 \\ a^n & \text{dla} \quad n\geq 0\end{cases} \quad = \quad a^n u(n)$$

jest $s(n)=0{,}8^n$ dla $n=0, 1, 2, ...$



Korzystając z otrzymanego wzoru

$$\bar{s}(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

otrzymujemy

$$\bar{s}(z)=\frac{z}{z-0{,}8}=\frac{1}{1-0{,}8z^{-1}}$$

z obszarem zbieżności $|z|>0{,}8.$

Liniowość z-transformacji

Z-transformacja $\boxed{\bar{s}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\, z^{-n}}$ jest operacją liniową, bo dla liniowej kombinacji dwóch sygnałów $s(n)=as_1(n)+bs_2(n)$ otrzymujemy taką samą liniową kombinację transformat $\bar{s}(z)=a\bar{s}_1(z)+b\bar{s}_2(z)$ z obszarem zbieżności $z\in R_1\cap R_2$ gdzie R_1 jest obszarem zbieżności transformaty pierwszego, a R_2 drugiego sygnału.

Dowód opiera się na podstawieniu kombinacji dwóch sygnałów do wzoru $\boxed{\bar{s}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\, z^{-n}}$ definiującego *z*-transformację, czyli

$$\bar{s}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\big(as_1(n)+bs_2(n)\big)\, z^{-n}=a\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_1(n)z^{-n}+b\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_2(n)z^{-n}.$$

z-transformata sygnału przesuniętego

Oznaczmy parę sygnał-transformata w następujący sposób $s(n) \Leftrightarrow \bar{s}(z)$

wtedy parę sygnał przesunięty i jego z-transformatę można zapisać w postaci

$$\boxed{s(n-n_0) \Leftrightarrow z^{-n_0}\bar{s}(z).}$$

Przesunięcie sygnału w dziedzinie czasu oznacza pomnożenie z-transformaty przez $\boxed{z^{-n_0}.}$

Dowód opiera się na podstawieniu sygnału przesuniętego do wzoru $\boxed{\bar{s}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)z^{-n}}$ definiującego z-transformację, czyli

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n-n_0)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)z^{-m-n_0} = z^{-n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)z^{-m} = \bar{s}(z)z^{-n_0}.$$

z-transformacja splotu

Zależność pomiędzy splotem dwóch sygnałów a jego z-transformatą ma postać

$$\boxed{s(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(k)s_2(n-k) \Leftrightarrow \bar{s}(z) = \bar{s}_1(z)\bar{s}_2(z).}$$

Obszar zbieżności jest częścią wspólną obszarów zbieżności transformat obu splatanych sygnałów, tzn. $z \in R_1 \cap R_2$

Dowód opiera się na podstawieniu splotu dwóch sygnałów do wzoru definiującego z-transformację i odpowiednich przekształceniach

$$\bar{s}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(k)s(n-k)z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2(n-k)z^{-n} =$$

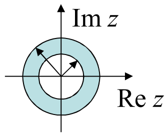
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(k)z^{-k}\bar{s}_2(z) = \bar{s}_1(z)\bar{s}_2(z).$$

Skalowanie w z-dziedzinie

Jeżeli w z-transformacie zmienimy zmienną z na zmienną z/a to w dziedzinie czasu odpowiada to pomnożeniu sygnału przez a^n, czyli

$$\boxed{a^n s(n) \Leftrightarrow \bar{s}(z/a).}$$

Stała a może być dowolną liczbą zespoloną, tzn. $a \in C$



$r_1 < |z| < r_2$

Dowód
$$\bar{s}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n s(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)(z/a)^{-n}.$$

Jeżeli obszar zbieżności z-transformaty sygnału $s(n)$ jest pierścieniem

$$r_1 < |z| < r_2\,,$$

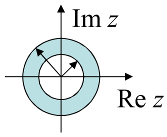
to obszar zbieżności z-transformaty w wyniku skalowania ulega zmianie

$$|a| r_1 < |z| < |a| r_2\,.$$

z-transformata sygnału z odwróconym czasem

Odwrócenie kierunku zmiany czasu odpowiada odwrotności zmiennej z w jego z-transformacie, tzn.

$$\boxed{s(-n) \Leftrightarrow \bar{s}\left(z^{-1}\right).}$$



Dowód
$$\bar{s}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(-n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) z^{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)(z^{-1})^{-n}.$$

$r_1 < |z| < r_2$

Jeżeli obszar zbieżności z-transformaty sygnału $s(n)$ jest pierścieniem

$$r_1 < |z| < r_2\,,$$

to obszar zbieżności z-transformaty w wyniku odwrócenia czasu jest zdefiniowany nierównościami

$$1/r_2 < |z| < 1/r_1\,.$$

Różniczkowanie transformaty

Zróżniczkowanie z-transformaty i pomnożenie jej przez $-z$ odpowiada pomnożeniu próbek sygnału dyskretnego przez wartości czasu dyskretnego. Otrzymujemy zatem parę

$$ns(n) \Leftrightarrow -z\frac{d\bar{s}}{dz}.$$

Transformata korelacji sygnałów

Sygnał powstały jako korelacja dwóch sygnałów posiada z-transformatę będącą iloczynem transformat obu sygnałów, przy czym argument jednej z nich jest odwrotnością zmiennej z, czyli

$$\boxed{s(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(k)s_2(k-n) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{s}(z) = \bar{s}_1(z)\bar{s}_2(z^{-1}).}$$

Dowód opiera się na transformacie splotu dwóch sygnałów i transformacie sygnału z odwróconym czasem.

Transformacja sygnału zmodulowanego

Sygnał zmodulowany amplitudowo jest iloczynem sygnału niosącego informację i sygnału nośnego. Zależności pomiędzy z-transformatami sygnałów przedstawia następująca zależność

$$\boxed{s(n) = s_1(n)s_2(n) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{s}(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_K \bar{s}_1(v)\bar{s}_2(z/v)v^{-1}dv.}$$

Jeden jest sygnałem modulowanym a drugi sygnałem modulującym.

Zachowanie iloczynu skalarnego

Iloczyn skalarny dwóch sygnałów jest w dziedzinie zmiennej z równy ważonej całce okrężnej z iloczynu dwóch funkcji powstałych z z-transformat sygnałów. Zależność tę prezentuje tzw. równanie Parsevala

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1(n)s_2(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_K \bar{s}_1(z)\,\bar{s}_2(1/z^*)\frac{dz}{z}.$$

Związek z-transformacji z transformacją Fouriera

Transformacja ciągła | dyskretna

$$\bar{s}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\, z^{-n}$$

$$\boxed{\hat{s}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2\pi j f t}\,dt}$$

$$\hat{s}(f)\approx \Delta t\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)e^{-2\pi j f n\Delta t}$$

$$\boxed{\bar{s}(z)\Big|_{z=e^{2\pi j f \Delta t}} \approx \frac{\hat{s}(f)}{\Delta t}}$$

$$f_p=\frac{1}{\Delta t}\Rightarrow \underline{f}=\frac{f}{f_p}=f\Delta t$$

$$|z|=1 \Leftrightarrow \boxed{z=e^{2\pi j f\Delta t}=e^{2\pi j \underline{f}}}$$

Skończony czas trwania sygnału

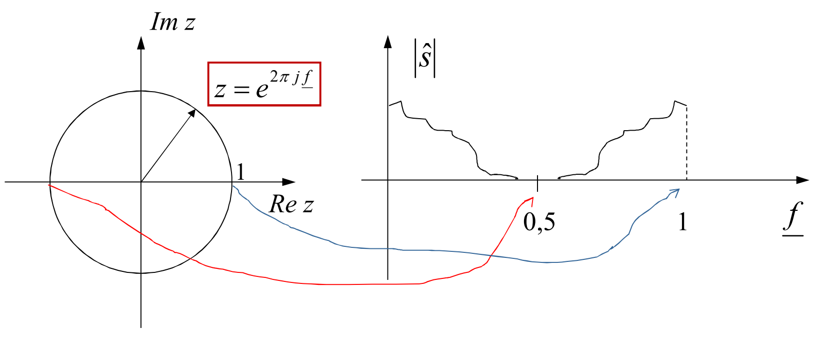
$$\boxed{\hat{s}(k)=\sum_{n=0}^{N-1} s(n)w^{kn}} \quad \text{gdzie} \quad w=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

czyli $\boxed{z=w^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$

Zatem

$$\boxed{\hat{s}(k)=\bar{s}(z)\Big|_{z=e^{2\pi jk/N}}}$$

Związek z-transformaty z transformatą Fouriera



z- transformacja

transformacja Fouriera

Z-transformacja sygnału dwuwymiarowego

$$\boxed{\bar{s}(z_x, z_y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(m,n) z_x^{-m} z_y^{-n}}$$

$$(z_x, z_y) \in C^2$$

Powyższe sumy są zbieżne w punkcie (z_x, z_y) jeżeli

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(m,n)| |z_x|^{-m} |z_y|^{-n} < \infty.$$