FILTRY ZE SKOŃCZONĄ ODPOWIEDZIĄ IMPULSOWĄ (SOI)

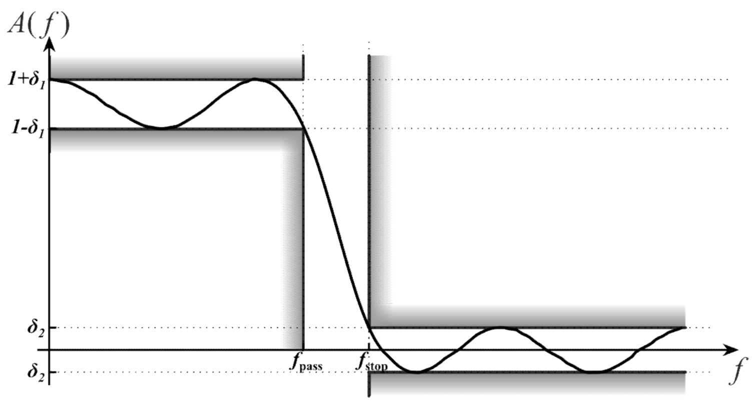
ang. Finite Impulse Response (FIR)

Spis treści

Projektowanie filtrów typu FIR

Założenia projektowe w dziedzinie częstotliwości

Pasmo przepustowe | Pasmo przejściowe | Pasmo zaporowe



Metoda okna

1. Wybór rodzaju filtru (dolnoprzepustowy, górnoprzepustowy) oraz znormalizowanej częstotliwości granicznej (odcięcia) $\underline{f_g} \in [0,1]$ Dla filtru rzędu *N* mamy *N+1* współczynników.

2. Analityczne wyznaczenie idealnej odpowiedzi impulsowej dla filtru. Filtr dolnoprzepustowy (DP) jest tu zawsze filtrem bazowym

$$\boxed{h_{DP}(m) = \begin{cases} 2\underline{f_g}\dfrac{\sin(2\pi \underline{f_g} m)}{2\pi \underline{f_g} m} & , m = -\dfrac{(N+1)-1}{2},\ldots,0,\ldots,\dfrac{(N+1)-1}{2} \\ 2\underline{f_g} & , m = 0 \end{cases}}$$

3. Przesunięcie w prawo współczynników o *M=(N+1-1)/2*, tzn. zamiast indeksów *m=–(N+1-1)/2,…, 0,…, (N+1-1)/2* mamy nowe indeksy *n= 0, …, N* $\quad h(n) = h(m)$

4. Dodatkowo: tak otrzymane współczynniki filtru h(n) można przemnożyć przez wybraną funkcję okna czasowego

Metoda okna

1. W przypadku filtru górnoprzepustowego rzędu N (N+1 współczyn-ników) oraz znormalizowanej częstotliwości granicznej $\underline{f_g} \in [0,1]$ analityczne wyznaczenie idealnej odpowiedzi impulsowej poprzez:

$$\boxed{h_{GP}(m) = \delta(m) - h_{DP}(m)}$$

$$h_{GP}(m) = \begin{cases} -2\underline{f_g}\dfrac{\sin(2\pi \underline{f_g} m)}{2\pi \underline{f_g} m} & , m = -\dfrac{(N+1)-1}{2},\ldots,0,\ldots,\dfrac{(N+1)-1}{2} \\ 1-2\underline{f_g} & , m = 0 \end{cases}$$

2. Przesunięcie w prawo współczynników o *M=(N+1-1)/2*, tzn. zamiast indeksów *m=–(N+1-1)/2,…, 0,…, (N+1-1)/2* mamy nowe indeksy *n= 0, …, N* $\quad h(n) = h(m)$

3. Dodatkowo: tak otrzymane współczynniki filtru h(n) można przemnożyć przez wybraną funkcję okna czasowego

Zastosowanie funkcji okna czasowego

Mając współczynniki filtru typu FIR h(n) rzędu N zaprojektowanego przy pomocy dowolnej z podanych na wykładzie metody projektowania filtru,

możemy przemnożyć współczynniki filtru przez funkcję okna czasowego (Blackman, Hamminga, Hanninga, itp.) w celu zmiany charakterystyki częstotliwościowej filtru (przede wszystkim w paśmie zaporowym)

$$\boxed{h_w(n) = w(n)h(n)}$$

Np. okno Blackmana: $w(n) = \alpha_0 - \alpha_1 \cos\left(\frac{2\pi \mathrm{n}}{\mathrm{M}}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{4\pi \mathrm{n}}{\mathrm{M}}\right)$

gdzie $M = N/2$ $\quad \alpha_0 = \frac{1-\alpha}{2} \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \quad \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$

Metoda: Projektowanie filtrów przy pomocy szeregów Fouriera

Współczynniki szeregu trygonometrycznego Fouriera

$$H^{zad}(\underline{f}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-2\pi j \underline{f} n}$$

oblicza się ze wzoru

$$h_n = \int_{-1/2}^{1/2} H^{zad}(\underline{f})\, e^{2\pi j \underline{f} n}\, d\underline{f}$$

Ten wzór jest odwrotną transformacją Fouriera !

Charakterystyki częstotliwościowe spełniają warunki

$$\begin{cases} \left|H^{zad}(\underline{f})\right| = \left|H^{zad}(-\underline{f})\right| \\ \theta^{zad}(\underline{f}) = -\theta^{zad}(-\underline{f}) \end{cases}$$

Zespolona charakterystyka częstotliwościowa filtru ma postać

$$\boxed{H(\underline{f}) = \sum_{n=0}^{N} h_n e^{-2\pi j \underline{f} n}}$$

Metoda: Projektowanie filtrów przy pomocy szeregów Fouriera

Współczynniki szeregu trygonometrycznego Fouriera

$$H^{zad}(\underline{f}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-2\pi j \underline{f} n}$$

oblicza się ze wzoru

$$h_n = \int_{-1/2}^{1/2} H^{zad}(\underline{f})\, e^{2\pi j \underline{f} n}\, d\underline{f}$$

Ten wzór jest odwrotną transformacją Fouriera !

Odpowiedź impulsowa spełnia warunki $h_n = 0$ dla:

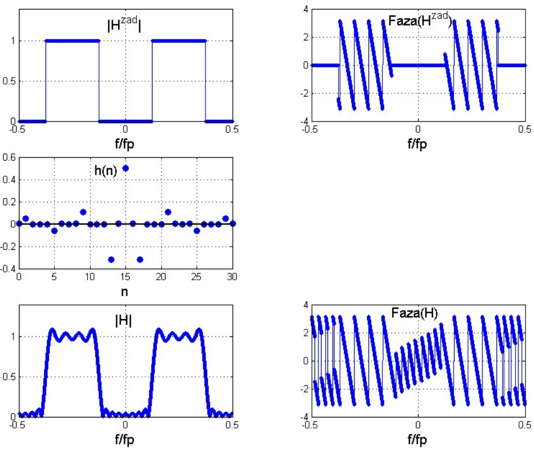
$n < 0$ bo filtr ma być przyczynowy

$n > N$ bo filtr ma być skończonego rzędu

Zespolona charakterystyka częstotliwościowa filtru ma postać

$$\boxed{H(\underline{f}) = \sum_{n=0}^{N} h_n e^{-2\pi j \underline{f} n}}$$

Metoda: Projektowanie filtrów przy pomocy szeregów Fouriera



Metoda próbkowania w dziedzinie częstotliwości - Projektowanie filtrów przy pomocy odwrotnej DFT

Skoro

$$h_n = \int_{-1/2}^{1/2} H^{zad}(\underline{f}) e^{2\pi j \underline{f} n} d\underline{f}$$

to

$$\boxed{h_n = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} H^{zad}\left(k/(N+1)\right) w_{N+1}^{-kn}}$$

$$n = 0, \ldots, N \qquad w_{N+1} = e^{-j\frac{2\pi}{N+1}}$$

Metoda próbkowania w dziedzinie częstotliwości - Projektowanie filtrów przy pomocy odwrotnej DFT

1. Zadanie charakterystyki częstotliwościowej filtru

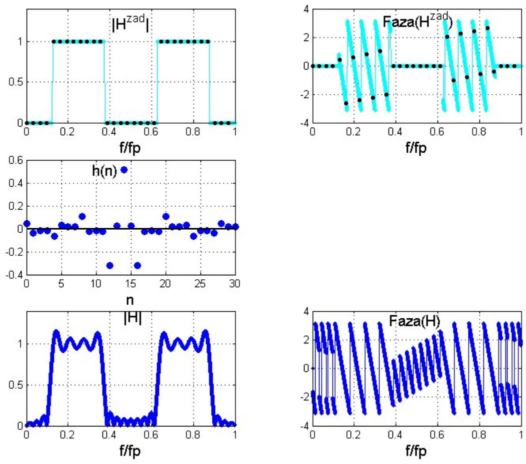
$$\left|H^{zad}(\underline{f})\right| = \left|H^{zad}(-\underline{f})\right| \qquad \theta^{zad}(\underline{f}) = -\theta^{zad}(-\underline{f})$$

2. Obliczenie odwrotnej cyfrowej transformaty Fouriera

$$\boxed{h_n = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} H^{zad}\left(k/(N+1)\right) w_{N+1}^{-kn}} \qquad n = 0, \ldots, N \quad k = 0, \ldots, N$$

3. Przesunięcie cykliczne (kołowe) o M=(N-1)/2 próbek
4. Dodatkowo: tak otrzymane współczynniki filtru h_n można przemnożyć przez wybraną funkcję okna czasowego

Metoda próbkowania w dziedzinie częstotliwości - Projektowanie filtrów przy pomocy odwrotnej DFT



Metody optymalizacyjne

Przykład: Algorytm Remeza

Kryterium w przestrzeni

$$H(\underline{f}) = \sum_{n=0}^{N} h_n e^{-2\pi j \underline{f} n}$$

AGH

PROJEKTOWANIE $\Longleftrightarrow$ $Q^{opt} = \min_{h} Q$ $\qquad L_W^2(0, 1/2)$

$$Q(h_0, \cdots, h_N) = \int_0^{1/2} W(\underline{f}) \left| H^{zad}(\underline{f}) - H(\underline{f}) \right|^2 d\underline{f}$$

$$W(\underline{f}) \geq 0$$

$$Q(h_0, \ldots, h_{(N-1)/2}) = \int_0^{1/2} W(\underline{f}) \left| H^{zad}(\underline{f}) - 2e^{-\pi j \underline{f} N} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} h_n \cos\left(\pi \underline{f}(2n+1)\right) \right|^2 d\underline{f}$$

$$h = \left\{ h_n : n = 0, \ldots, (N-1)/2 \right\}$$

$$H(\underline{f}) = A(\underline{f})\, e^{j\theta(\underline{f})}$$

$$Q = \int_0^{1/2} \left\{ \alpha \left[A(\underline{f}) - A^{zad}(\underline{f}) \right]^2 + (1-\alpha) \left[\theta(\underline{f}) - \theta^{zad}(\underline{f}) \right]^2 \right\} d\underline{f}$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

Kryterium w przestrzeni

AGH

$$E(\underline{f}) = W(\underline{f}) \left(A^{zad}(\underline{f}) - A(\underline{f}) \right)$$

$$C_W(0, 1/2)$$

$$Q = \max_{\underline{f}} \left| E(\underline{f}) \right|$$

PROJEKTOWANIE $\Longleftrightarrow$ $Q^{opt} = \min_{h} \max_{\underline{f}} \left| E(\underline{f}) \right|$

Przykład metody Parks-McClellan 1972 rok

AGH

$$\boxed{E(\underline{f}) = W(\underline{f})\left(A^{zad}(\underline{f}) - A(\underline{f})\right)}$$

$$Q^{opt} = \min_{h} \max_{\underline{f}} \left| E(\underline{f}) \right|$$

Algorytm Remeza 1957 rok

Evgeny Yakovlevich Remez

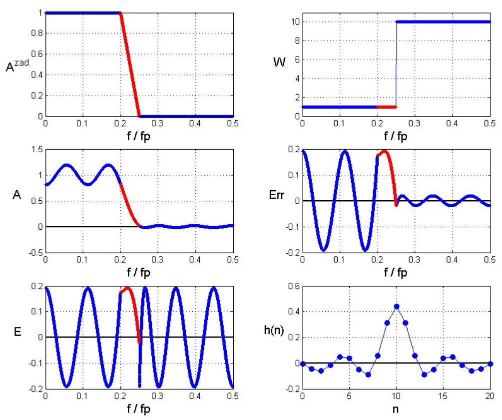
(1895 na Białorusi 1975 w Kijowie)

odchyłki δ=0,18

Przykład metody Parks-McClellan 1972 rok

AGH

$$Q^{opt} = \min_{h} \max_{\underline{f}} \left| E(\underline{f}) \right| \qquad \boxed{E(\underline{f}) = W(\underline{f})\left(A^{zad}(\underline{f}) - A(\underline{f})\right)}$$



Algorytm Remeza 1957 rok

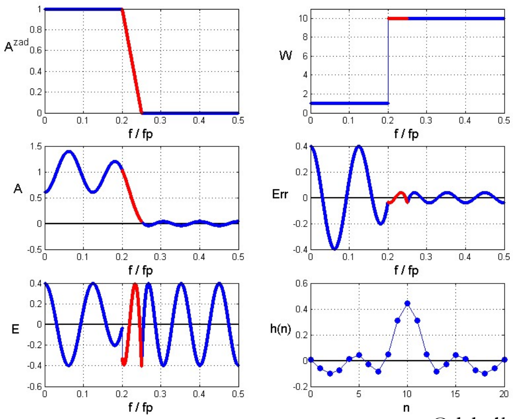
Na czerwono zaznaczono pasmo przejściowe - jego waga jest taka sama jak dla <u>pasma przepustowego</u>

Odchyłki E δ=0,194

Przykład metody Parks-McClellan 1972 rok

$$Q^{opt} = \min_{h} \max_{\underline{f}} \left| E(\underline{f}) \right|$$

$$\boxed{E(\underline{f}) = W(\underline{f}) \left(A^{zad}(\underline{f}) - A(\underline{f}) \right)}$$



Algorytm Remeza
1957 rok

Na czerwono zaznaczono pasmo przejściowe - jego waga jest taka sama jak dla pasma zaporowego

Odchyłki E δ=0,194

Twierdzenie Czebyszewa

Jeżeli $A(\underline{f}) = 2\sum_{n=0}^{M} h_n \cos\left((2n+1)\pi \underline{f}\right)$

i istnieje conajmniej $M+2$ częstotliwości

$$0 < \underline{f}_1 < \underline{f}_2 < \cdots < \underline{f}_{M+1} < \underline{f}_{M+2} < 0{,}5$$

takich, że

$$E(\underline{f}_i) = -E(\underline{f}_{i+1})$$

dla $i = 1, \ldots, M+1$ oraz

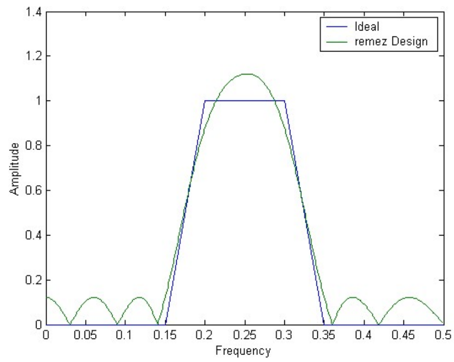
$$\left| E(\underline{f}_i) \right| = \delta = \max_{0 \le \underline{f} \le 0.5} \left| E(\underline{f}) \right|$$

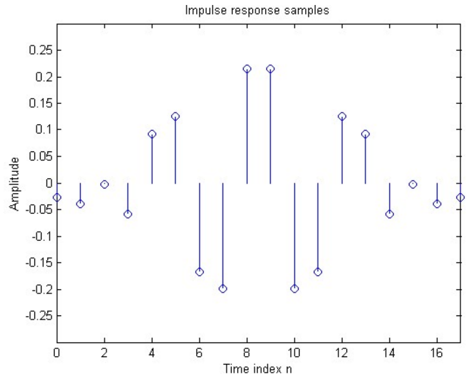
dla $i = 1, \ldots, M+2$,

to **wtedy i tylko wtedy istnieje jeden** zestaw współczynników $h_0, \cdots, h_M$ dla których δ osiąga najmniejszą wartość.

Przykład – FIR metodą Remeza

Filtr pasmowy zaprojektowany metodą *Remeza*





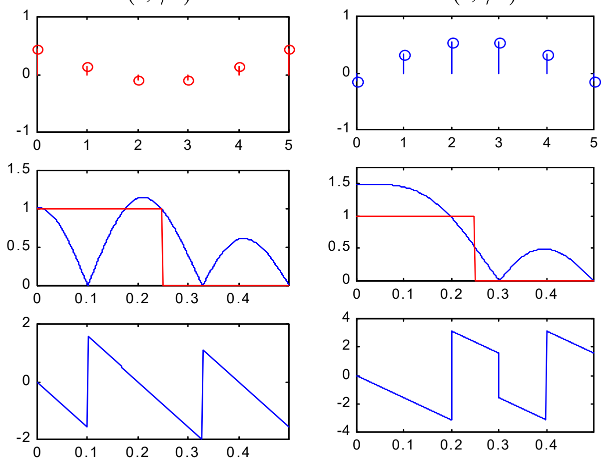
Optymalizacja w przestrzeni

$L^2(0,1/2)$ $C(0,1/2)$

Odpowiedź impulsowa

Ch-ka amplitud.

Ch-ka fazowa

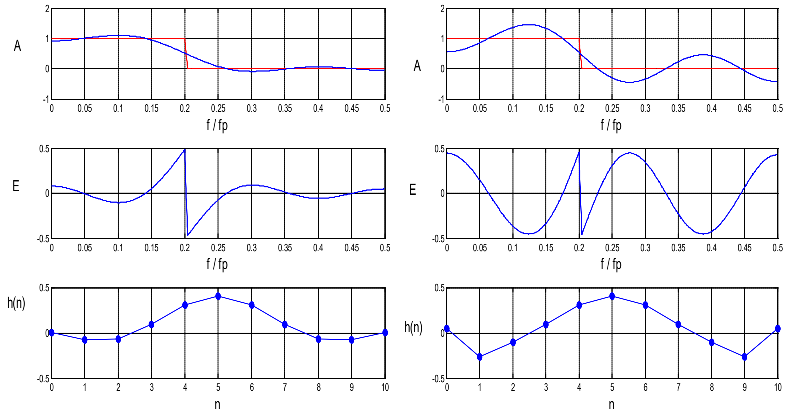


Częstotliwość f Częstotliwość f

Optymalizacja w przestrzeni

$$\boxed{E(\underline{f}) = A^{zad}(\underline{f}) - A(\underline{f})}$$

$L^2(0,1/2)$ $\qquad$ $C(0,1/2)$

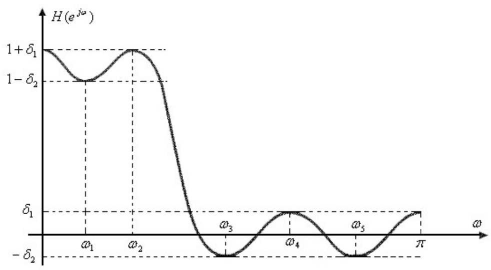


Projektowanie metodą programowania liniowego

$$A^{zad}(\underline{f}) - \delta \le A(\underline{f}) \le A^{zad}(\underline{f}) + \delta$$

$$\boxed{\begin{aligned} Ax &\ge b \\ Q &= c^T x \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{cases} A(\underline{f}) + \delta \ge A^{zad}(\underline{f}) \\ -A(\underline{f}) + \delta \ge -A^{zad}(\underline{f}) \end{cases}}$$



$\underline{f}_k \in [0 \quad 0{,}5]$ dla $k = 1,2,\ldots,K$

Macierzowy zapis programowania liniowego

$$\begin{cases} A(\underline{f}) + \delta \geq A^{zad}(\underline{f}) \\ -A(\underline{f}) + \delta \geq -A^{zad}(\underline{f}) \end{cases}$$

$$Ax \geq b \qquad Q = c^T x$$

$$2\begin{bmatrix} \cos(\pi \underline{f}_1) & \cos(3\pi \underline{f}_1) & \cdots & \cos(N\pi \underline{f}_1) & 1/2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(\pi \underline{f}_K) & \cos(3\pi \underline{f}_K) & \cdots & \cos(N\pi \underline{f}_K) & 1/2 \\ -\cos(\pi \underline{f}_1) & -\cos(3\pi \underline{f}_1) & \cdots & -\cos(N\pi \underline{f}_1) & 1/2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\cos(\pi \underline{f}_K) & -\cos(3\pi \underline{f}_K) & \cdots & -\cos(N\pi \underline{f}_K) & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{\frac{N-1}{2}} \\ \delta \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} A^{zad}(\underline{f}_1) \\ \cdots \\ A^{zad}(\underline{f}_K) \\ -A^{zad}(\underline{f}_1) \\ \cdots \\ -A^{zad}(\underline{f}_K) \end{bmatrix}$$

$$Q = \delta$$

Przykładowe odpowiedzi impulsowe filtrów

Dolnoprzepustowy (DP)

Górnoprzepustowy (GP)

Pasmowoprzepustowy (PP)