

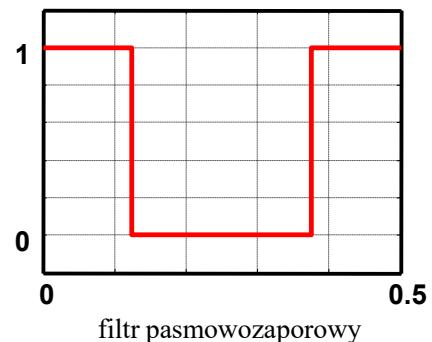
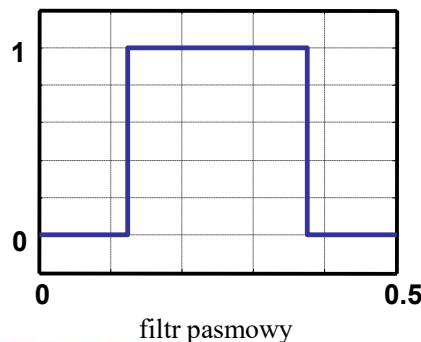
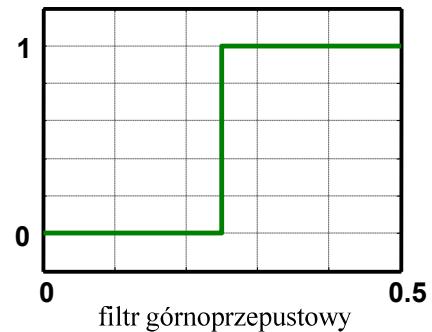
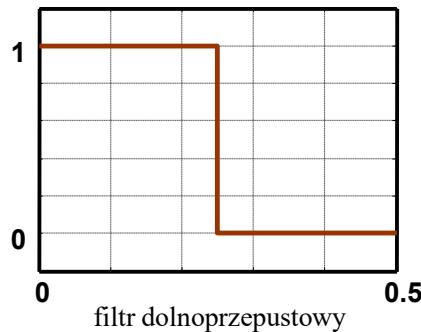
# FILTRY O NIESKOŃCZONEJ ODPOWIEDZI IMPULSOWEJ - IIR

ang. Infinite Impulse Response (IIR)

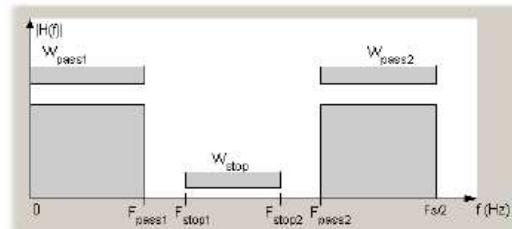
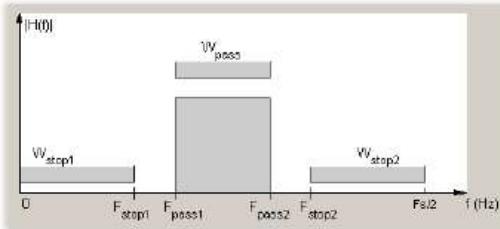
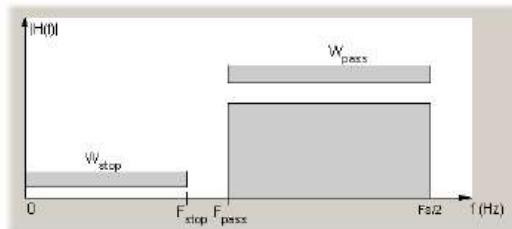
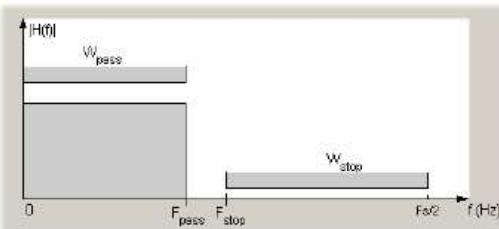
## Spis treści

1. Definicja filtru IIR
2. Stabilność filtrów IIR
3. Metody projektowania filtrów IIR
4. Przykłady projektowania
5. Dwuwymiarowe filtry rekursywne
6. Optymalizacyjna metoda projektowania filtrów 2-D IIR

# Filtre: dolnoprzepustowe, górnoprzepustowe, pasmowe i pasmowozaporowe

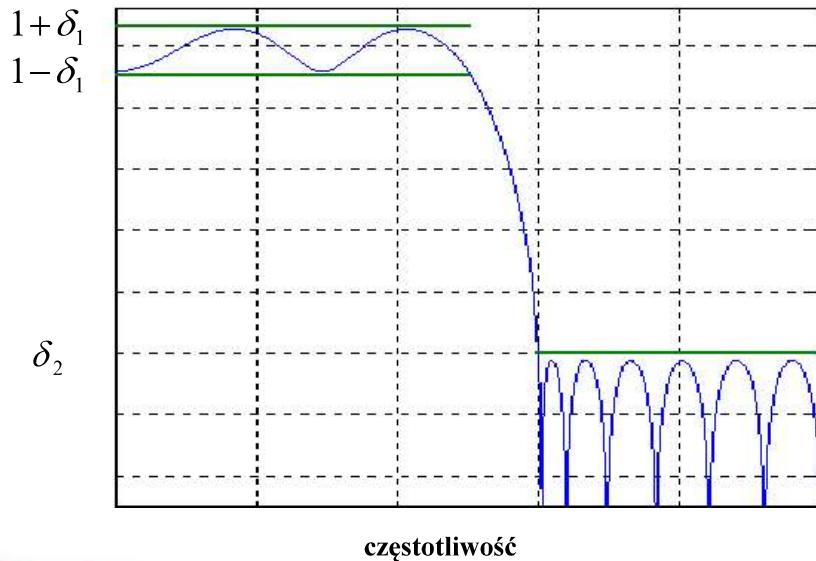


# Filtre: dolnoprzepustowe, górnoprzepustowe, pasmowe i pasmowozaporowe



## Rzeczywisty filtr dolnoprzepustowy

$$\begin{aligned} 1 - \delta_1 &\leq A(f) \leq 1 + \delta_1 & \text{dla } f < f_c \\ |A(f)| &\leq \delta_2 & \text{dla } f > f_r \end{aligned}$$



5

## Założenia projektowe dla filtrów

$\delta_1$  - dopuszczalna odchyłka charakterystyki w paśmie przewodzenia,

$\delta_2$  - dopuszczalna odchyłka w paśmie tłumienia,

$f_c$  - końcowa częstotliwość pasma przewodzenia,

$f_r$  - początkowa częstotliwość pasma tłumienia.

## Metody projektowania filtrów typu IIR

## Metoda 1: Projektowanie filtrów IIR w oparciu o filtry analogowe

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M \alpha_m s^m}{\sum_{m=0}^N \beta_m s^m}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

$$s = 2\pi j f$$

$$s = \frac{z - 1}{z + 1}$$

$$z = e^{2\pi j f}$$

$$\underline{f} = f \Delta t$$

$$2\pi j f = \frac{e^{2\pi j \underline{f}} - 1}{e^{2\pi j \underline{f}} + 1}$$

## Powtórka z trygonometrii



$$e^{2\pi j \underline{f}} = \cos(2\pi \underline{f}) + j \sin(2\pi \underline{f})$$

$$1 - \cos(2\pi \underline{f}) = 2 \sin^2(\pi \underline{f})$$

$$1 + \cos(2\pi \underline{f}) = 2 \cos^2(\pi \underline{f})$$

$$\sin(2\pi \underline{f}) = 2 \sin(\pi \underline{f}) \cos(\pi \underline{f})$$

9

## Zależność pomiędzy argumentami charakterystyk filtrów analogowych i cyfrowych

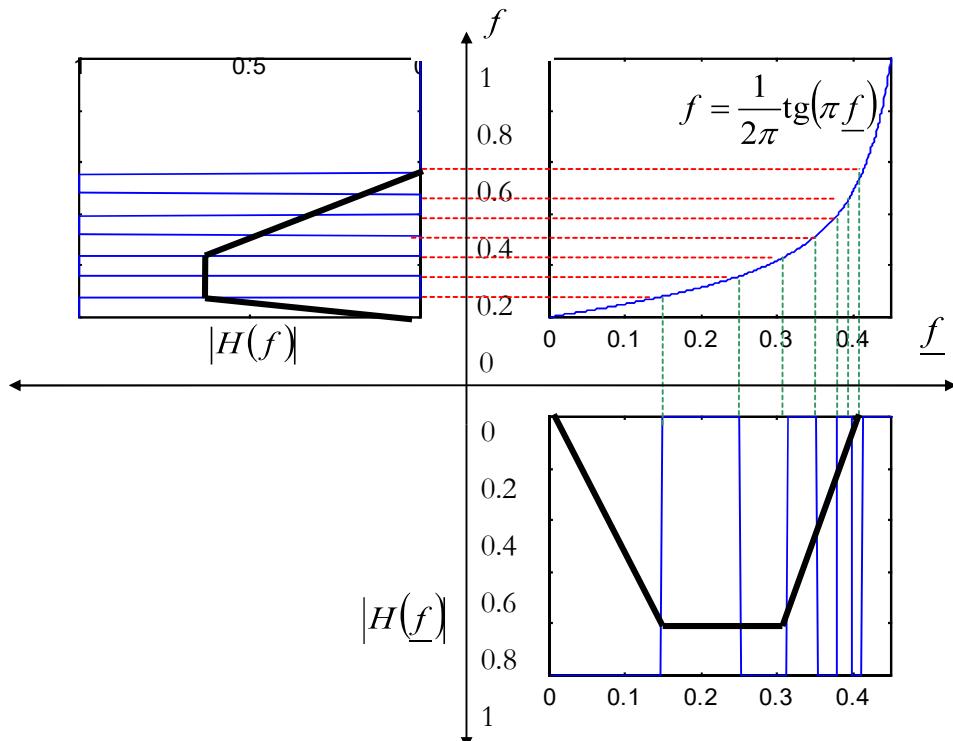
$$\begin{aligned}
 2\pi j f &= \frac{\cos(2\pi \underline{f}) + j \sin(2\pi \underline{f}) - 1}{\cos(2\pi \underline{f}) + j \sin(2\pi \underline{f}) + 1} = \\
 &= \frac{-2 \sin^2(\pi \underline{f}) + 2j \sin(\pi \underline{f}) \cos(\pi \underline{f})}{2 \cos^2(\pi \underline{f}) + 2j \sin(\pi \underline{f}) \cos(\pi \underline{f})} = \\
 &= \frac{\sin(\pi \underline{f}) [j \cos(\pi \underline{f}) - \sin(\pi \underline{f})]}{\cos(\pi \underline{f}) [\cos(\pi \underline{f}) + j \sin(\pi \underline{f})]} = j \operatorname{tg}(\pi \underline{f})
 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow 2\pi j f = j \operatorname{tg}(\pi \underline{f}) \longrightarrow$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}(\pi \underline{f})$$

10

## Graficzna prezentacja zależności między częstotliwościami



11

## Metoda I: Algorytm projektowania

1. Przyjąć założenia projektowe
 

$$H(\underline{f}) = A(\underline{f}) e^{j\theta(\underline{f})}$$
  2. Zmodyfikować założenia projektowe posługując się  
zależnością
 

$$\underline{f} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(2\pi f)$$
  3. Zaprojektować filtr analogowy
 

$$H(s) = \frac{\sum_{n=0}^M \alpha_n s^n}{\sum_{n=0}^N \beta_n s^n}$$
  4. W oparciu o powyższy filtr,  
wyliczyć  $\tilde{z}$ -transmitancję
 

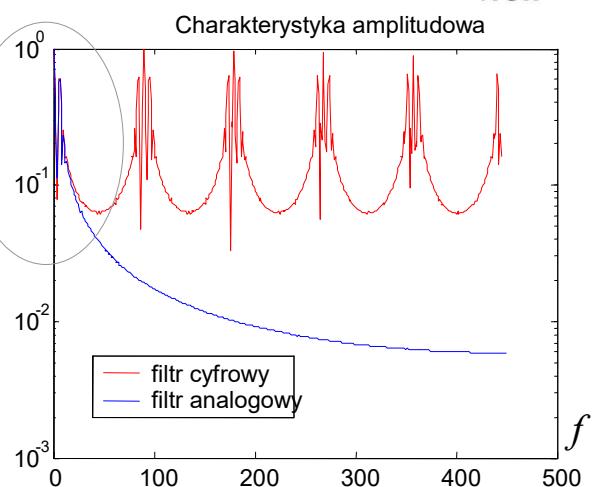
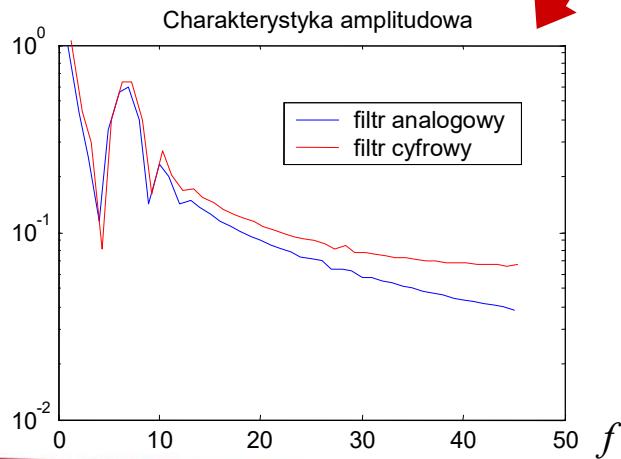
$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M \alpha_n (z-1)^n (z+1)^{N-n}}{\sum_{n=0}^N \beta_n (z-1)^n (z+1)^{N-n}}$$
- posługując się podstawieniem
- $$s = \frac{z-1}{z+1}$$

12

## Zależność między częstotliwościami

$$H(f) = \frac{\sum_{m=0}^M \alpha_m (2\pi f)^m}{\sum_{m=0}^N \beta_m (2\pi f)^m}$$

$$H(f) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n e^{-2\pi jnf}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n e^{-2\pi jnf}}$$

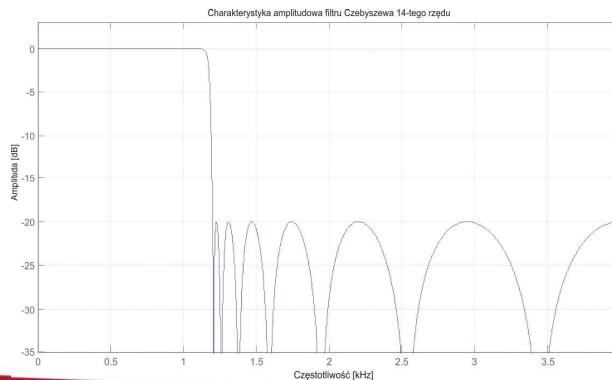
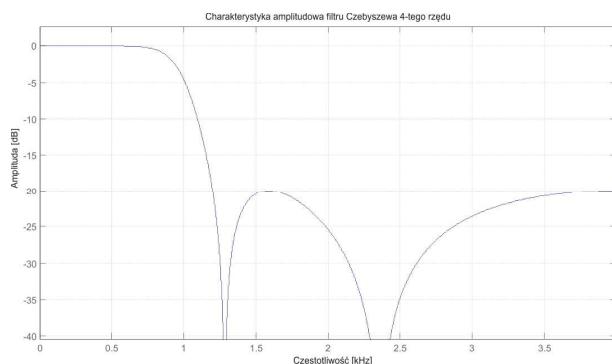


Charakterystyka amplitudowa otrzymanego filtra cyfrowego jest okresowa i różni się od charakterystyki filtra analogowego.

13

## Przykład 1: filtr Czebyszewa 4-tego i 14-tego rzędu

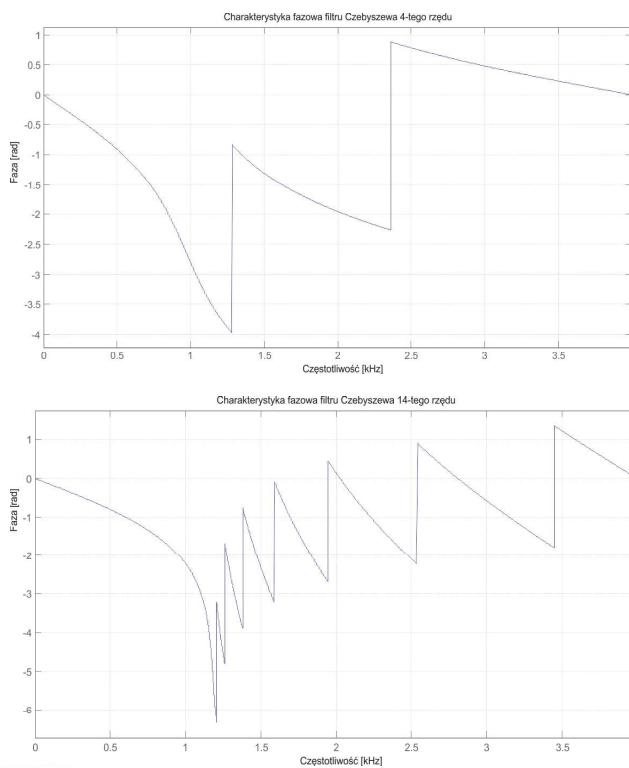
Charakterystyki amplitudowe



14

## Przykład 1: filtr Czebyszewa 4-tego i 14-tego rzędu

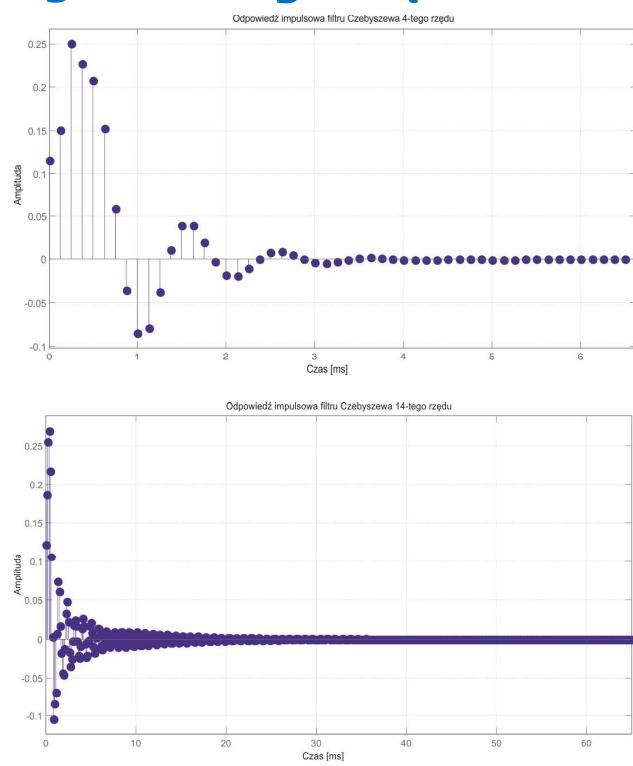
Charakterystyki fazowe



15

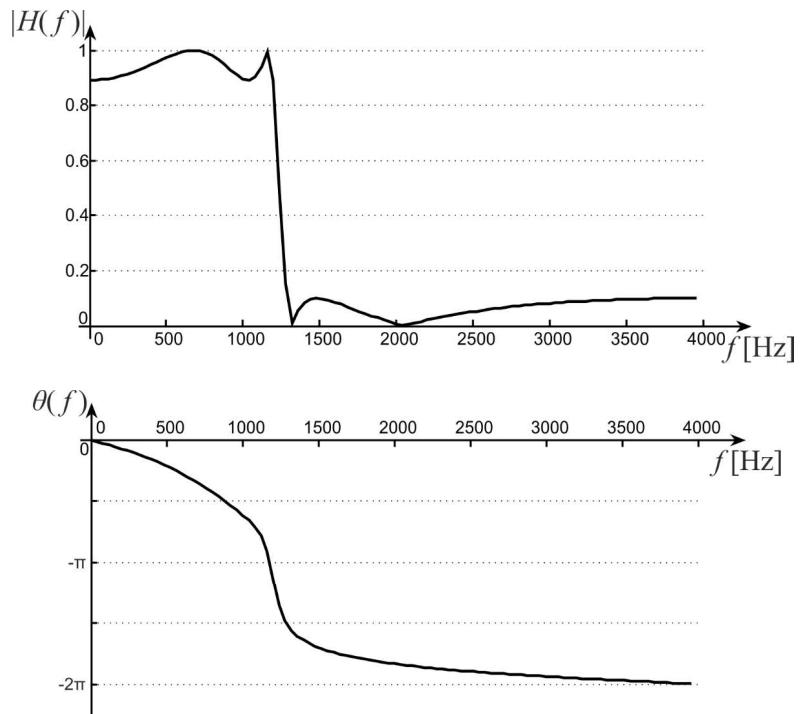
## Przykład 1: filtr Czebyszewa 4-tego i 14-tego rzędu

Odpowiedzi impulsowe



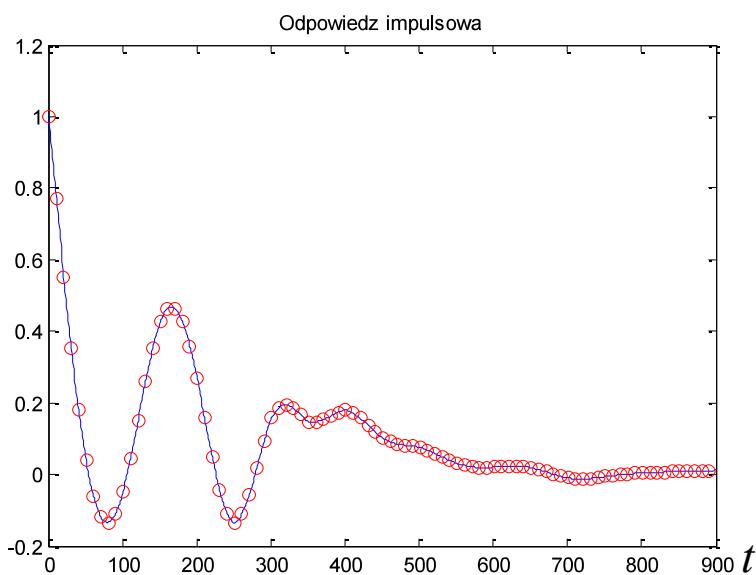
16

## Przykład 2: charakterystyki filtru eliptycznego 4-tego rzędu



17

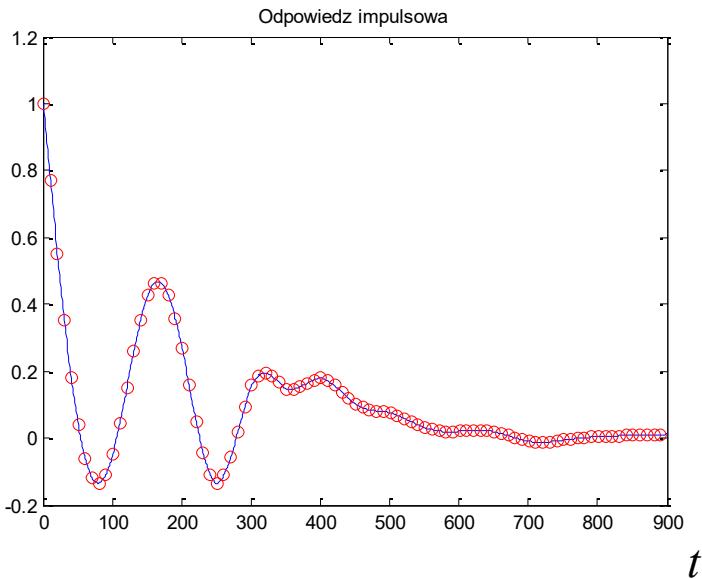
## Metoda II: Projektowanie metodą niezmienności odpowiedzi impulsowej



Ciągła odpowiedź impulsowa projektowanego filtru oraz jej wersja dyskretna

18

## Metoda II: Projektowanie metodą niezmienności odpowiedzi impulsowej



$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n \Delta t) z^{-n}$$

Czerwone kółeczka wyznaczają wartości  
 $h(n \Delta t)$

19

## Metoda II: Projektowanie metodą niezmienności odpowiedzi impulsowej

Niech zadana charakterystyka częstotliwościowa ma postać

$$H(f) = \frac{\sum_{m=0}^M \alpha_m j^m f^m}{\sum_{m=0}^N \beta_m j^m f^m} = \sum_{m=0}^N \frac{\eta_m}{j f - \xi_m} \quad \text{gdzie } M < N.$$

Ponieważ  $H(f) \leftrightarrow h(t)$  otrzymujemy

$$h(n \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^N \frac{\eta_m}{j(f + j \xi_m)} e^{2\pi j f n \Delta t} df \quad \text{gdzie } n \geq 0.$$

## Metoda II: Projektowanie metodą niezmienności odpowiedzi impulsowej



Korzystając z transformaty skoku jednostkowego  $\frac{1}{j f} \Leftrightarrow 2\pi \mathbf{1}(t)$

i przesunięcia w dziedzinie częstotliwości  $j\xi_m \Leftrightarrow \exp(2\pi\xi_m n\Delta t)$   
pozbędziemy się całki

$$h(n\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^N \frac{\eta_m}{j(f + j\xi_m)} e^{2\pi j f n\Delta t} df = 2\pi \sum_{m=0}^N \eta_m e^{2\pi \xi_m n\Delta t}$$

Zależność pomiędzy  $z$ -transmitancją a odpowiedzią impulsową

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n\Delta t) z^{-n}$$

Z obu równań otrzymujemy

$$H(z) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^N \eta_m e^{2\pi \xi_m n\Delta t} z^{-n} = 2\pi \sum_{m=0}^N \frac{\eta_m}{1 - e^{2\pi \xi_m \Delta t} z^{-1}}$$

wyznaczając sumę nieskończonego szeregu geometrycznego.

21

## Powtórka z szeregu geometrycznego



$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{b_0}{1-q} \quad \begin{cases} |q| < 1 \\ b_0 = 1 \\ q = e^{2\pi \xi_m \Delta t} z^{-1} \end{cases}$$

## Stabilność filtru zaprojektowanego metodą niezmienniczej odpowiedzi impulsowej

$$\xi_m = \delta_m + j f_m$$

$$z_m = e^{2\pi\xi_m \Delta t} \longrightarrow z_m = e^{2\pi\delta_m \Delta t} e^{2\pi j f_m \Delta t}$$

$$\delta_m < 0 \longrightarrow |z_m| = |e^{2\pi\delta_m \Delta t}| < 1$$

Czyli ze stabilności filtru analogowego  
**wynika** stabilność filtru cyfrowego.

23

## Metoda III: Optymalizacyjne metody projektowania filtrów IIR

Podstawiając  $z = e^{2\pi j f}$  otrzymujemy

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

$$H(f) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n e^{-2\pi n j f}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n e^{-2\pi n j f}}$$

Kryterium oceniające jakość filtru może być w postaci

$$Q = \int_0^{0,5} |H(f) - A(f)e^{j\theta(f)}|^2 df$$

24

## Inne możliwe kryteria

Kryterium amplitudowe

$$Q = \int_0^{0,5} [H(\underline{f}) - |A(\underline{f})|]^2 d\underline{f}$$

Kryterium łączące wcześniejsze kryteria z wagami

$$Q = \alpha \int_0^{0,5} w_1(\underline{f}) |H(\underline{f}) - A(\underline{f}) e^{j\theta(\underline{f})}|^2 d\underline{f} + (1-\alpha) \int_0^{0,5} w_2(\underline{f}) [H(\underline{f}) - |A(\underline{f})|]^2 d\underline{f}$$

gdzie  $\alpha \in [0 \quad 1]$

25

## Przykład 3

Minimalizując powyższe kryterium zaprojektować filtr 3-go rzędu dolnoprzepustowy z częstotliwością odcięcia 3 kHz i liniową charakterystyką fazową  $\theta(f) = -2\pi f$

$\Delta t = 0,0001$  sek jest zadaną gęstością próbkowania sygnału.

Czyli częstotliwość Nyquista  
(tzn. połowa częstotliwości próbkowania)  $f_{\max} = 5\text{kHz}$

26

## c.d przykładu 3

Zgodnie z tematem zadania projektowany filtr ma postać

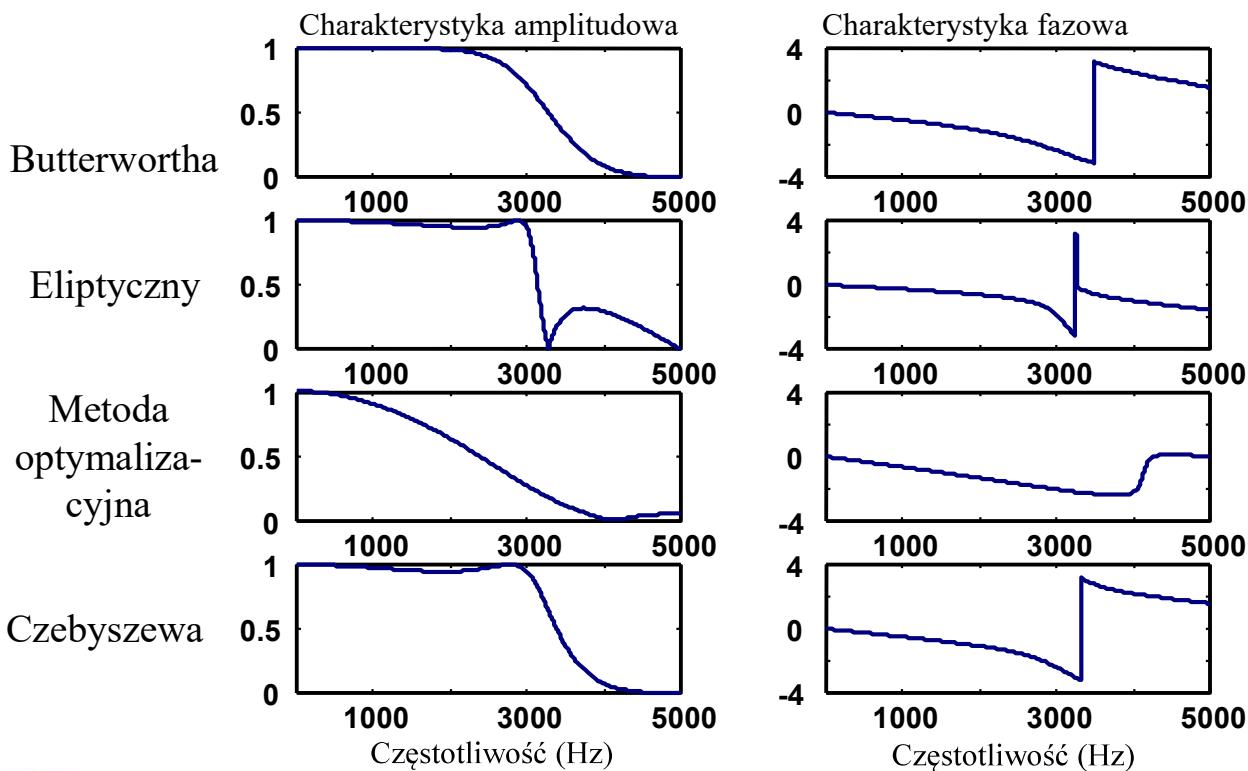
$$s^{wy}(n) = b_0 s^{we}(n) + b_1 s^{we}(n-1) + b_2 s^{we}(n-2) + b_3 s^{we}(n-3) \\ - a_1 s^{wy}(n-1) - a_2 s^{wy}(n-2) - a_3 s^{wy}(n-3)$$

## Rozwiązańa przykładu 3

Tab.1 Parametry filtru cyfrowego IIR

	Butterwortha	Eliptyczny	Metoda optymalizacyjna	Czebyszewa typu I
$b_0$	0.2569	0.3651	0.2574	0.2489
$b_1$	0.7707	0.8405	0.4208	0.7466
$b_2$	0.7707	0.8405	0.2349	0.7466
$b_3$	0.2569	0.3651	-0.0029	0.2489
$a_1$	0.5772	0.6676	-0.1735	0.5043
$a_2$	0.4218	0.7141	0.0962	0.5289
$a_3$	0.0563	0.0296	-0.0236	-0.0423

## Graficzna prezentacja rozwiązania przykładu 3



29

## Przykład 4

Stosując następujące kryterium:

$$Q = \int_0^{0,5} w(\underline{f}) \cdot \left[ |H^{\text{zad}}(\underline{f})| - |H(\underline{f})| \right]^2 d\underline{f}$$

przy funkcji wagowej w równej 1, zaprojektować filtr IIR dolnoprzepustowy 3. rzędu ( $N=3$ ) z górną częstotliwością graniczną 2kHz, dla częstotliwości próbkowania:

$$f_p = 10\text{kHz}$$

Otrzymany filtr należy porównać z wynikiem projektowania za pomocą transformacji biliniowej dla filtrów typu: Butterwortha, Czebyszewa (typ I) oraz filtru eliptycznego.

30

## c.d. przykładu 4

Maksymalna częstotliwość (częstotliwość Nyquista)

$$f_{\max} = 5 \text{kHz}$$

Znormalizowana częstotliwość graniczna:

$$\underline{f}_g = \frac{f_g}{f_p} = \frac{2000}{10000} = 0,2$$

Zgodnie z tematem zadania projektowany filtr ma postać

$$s^{wy}(n) = b_0 s^{we}(n) + b_1 s^{we}(n-1) + b_2 s^{we}(n-2) + b_3 s^{we}(n-3) - \\ - a_1 s^{wy}(n-1) - a_2 s^{wy}(n-2) - a_3 s^{wy}(n-3)$$

31

## Rozwiązania przykładu 4

Współczynniki filtra Butterwortha:

$n$	0	1	2	3
$b_n$	0,0985	0,2956	0,2956	0,0985
$a_n$	1	- 0,5772	0,4218	- 0,0563

Współczynniki filtra Czebyszewa (I):

$n$	0	1	2	3
$b_n$	0,0476	0,1427	0,1427	0,0476
$a_n$	1	- 1,3146	1,1704	- 0,4752

Współczynniki filtra eliptycznego:

$n$	0	1	2	3
$b_n$	0,0722	0,1378	0,1378	0,0722
$a_n$	1	- 1,2793	1,1729	- 0,4736

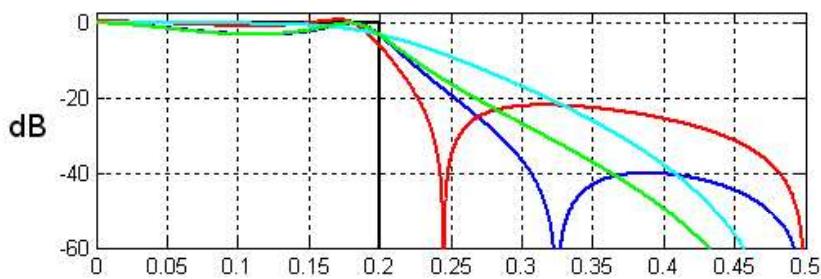
Współczynniki filtra optymalnego:

$n$	0	1	2	3
$b_n$	0,1547	0,1456	0,1455	0,1547
$a_n$	1	- 1,1727	1,0877	- 0,3470

32

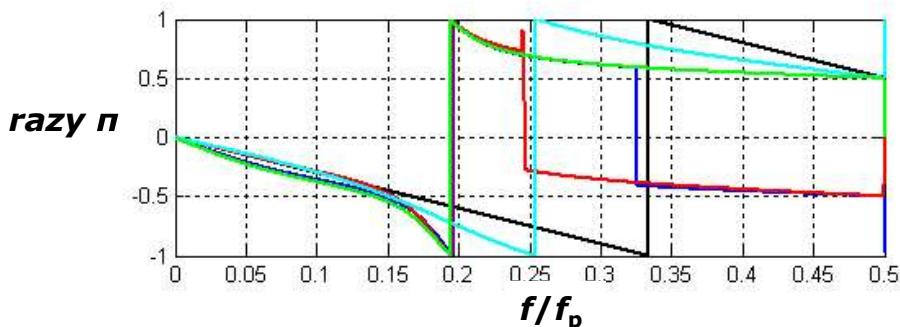
## Przykład 4: charakterystyki częstotliwościowe filtrów IIR

### Amplitudowe



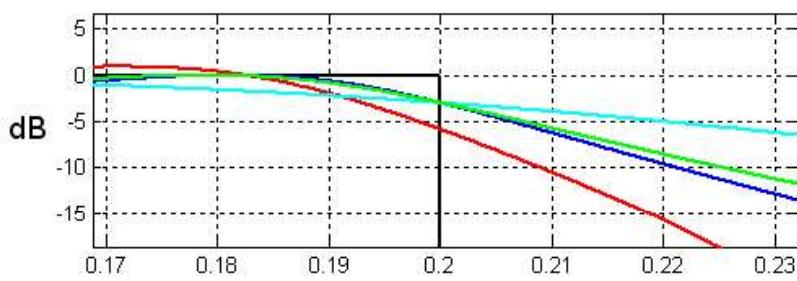
Filtryle:  
**zadany wzorzec**  
**Butterwortha**  
**Czebyszewa (I)**  
**eliptyczny**  
**optymalny**

### Fazowe



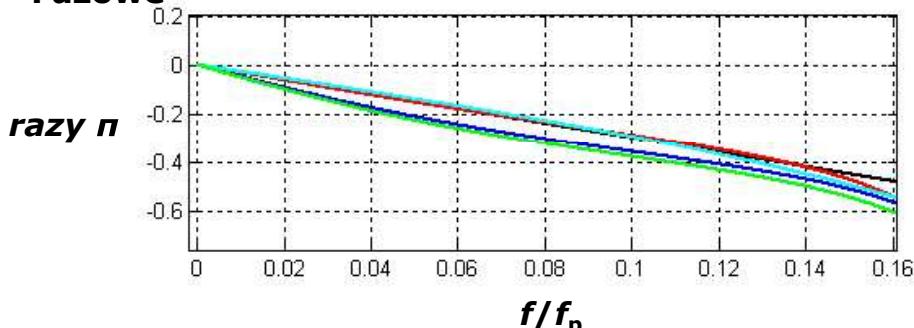
## Przykład 4: charakterystyki częstotliwościowe w powiększeniu

### Amplitudowe

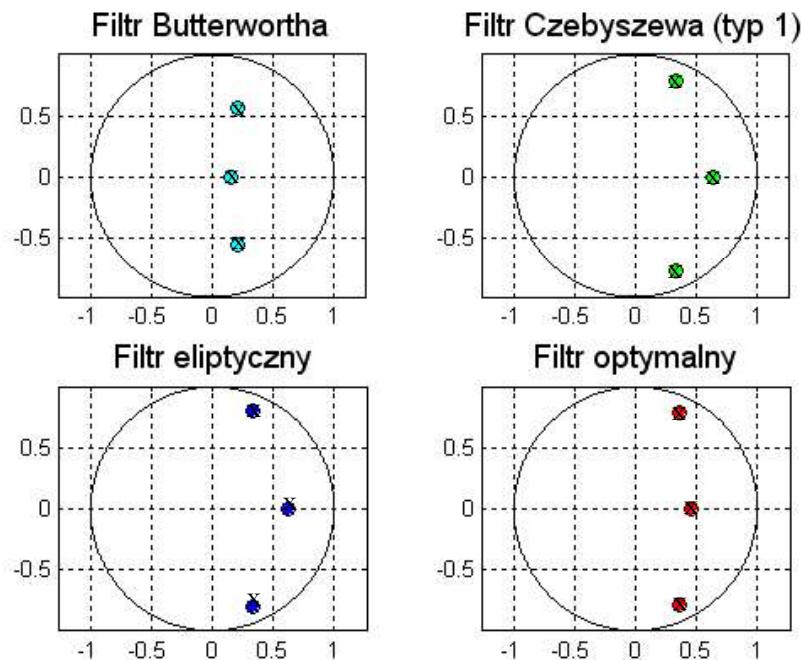


Filtryle:  
**zadany wzorzec**  
**Butterwortha**  
**Czebyszewa (I)**  
**eliptyczny**  
**optymalny**

### Fazowe



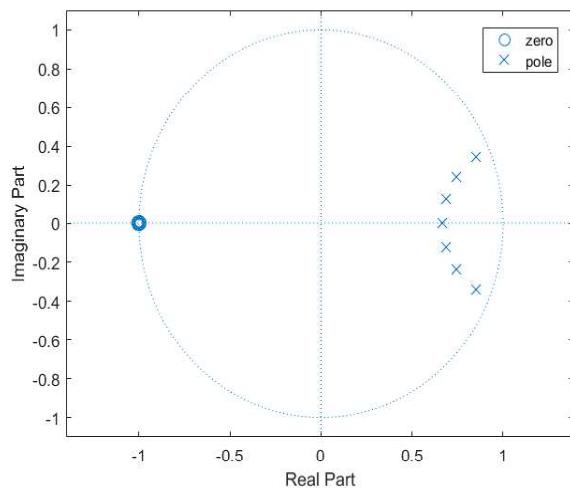
## Przykład 4: Biegunki na płaszczyźnie zespolonej



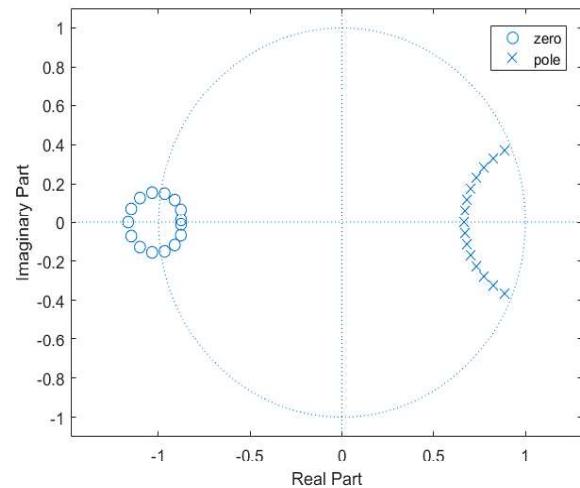
## Przykład 5: Rozmieszczenie biegunków filtrów typu IIR

Filtr dolno-przepustowy Butterworth'a o częstotliwości odcięcia 1/16

Filtr rzędu 7



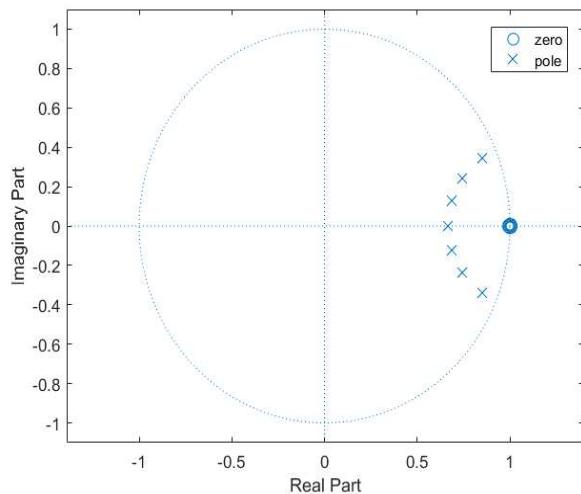
Filtr rzędu 15



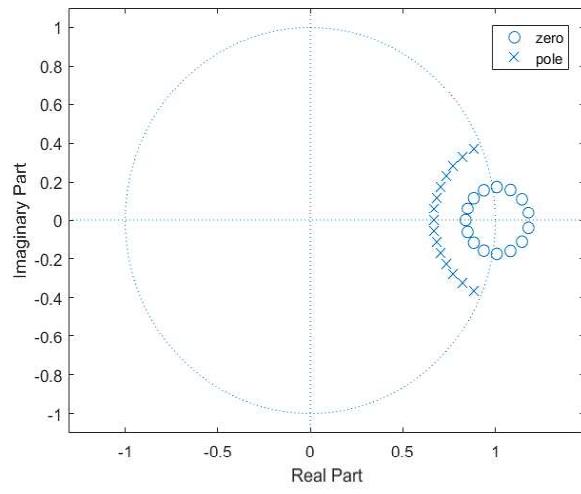
## Przykład 5: Rozmieszczenie biegunów filtrów typu IIR

Filtr górnoprzepustowy Butterworth'a o częstotliwości odcięcia 1/16

Filtr rzędu 7



Filtr rzędu 15

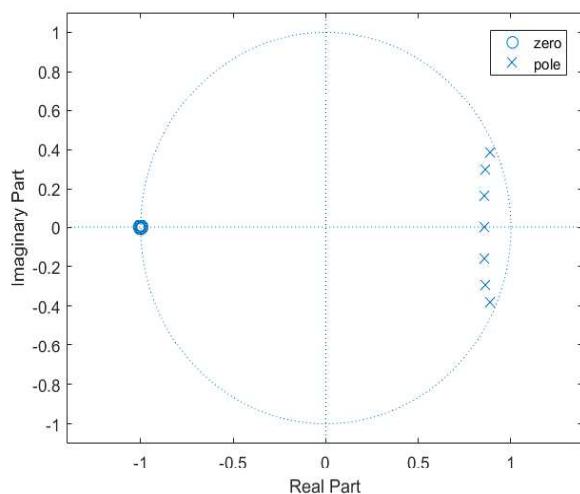


37

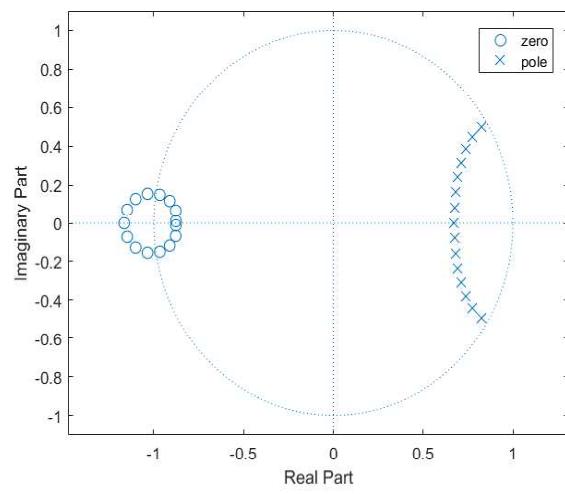
## Przykład 5: Rozmieszczenie biegunów filtrów typu IIR

Filtr dolno-przepustowy Czebyszewa typu I o częstotliwości odcięcia 1/16

Filtr rzędu 7



Filtr rzędu 15

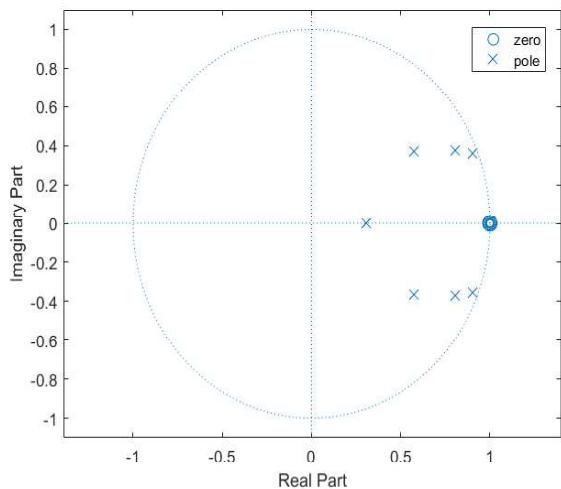


38

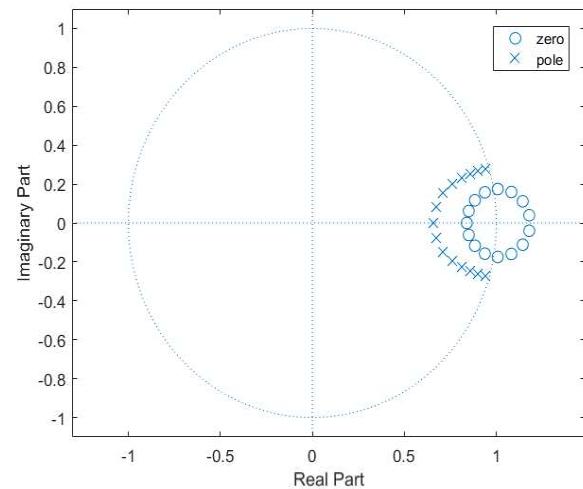
## Przykład 5: Rozmieszczenie biegunów filtrów typu IIR

Filtr górnoprzepustowy Czebyszewa typu I o częstotliwości odcięcia 1/16

Filtr rzędu 7



Filtr rzędu 15

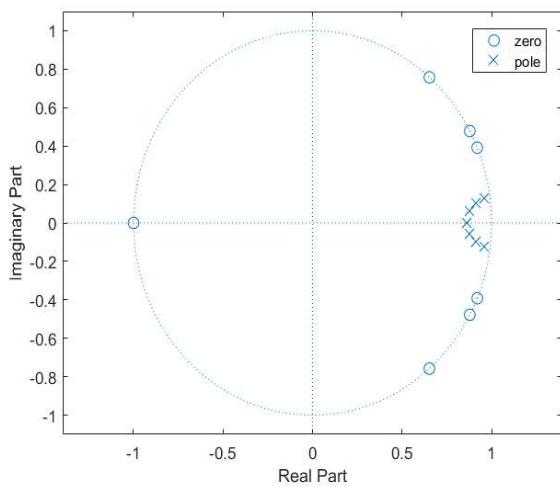


39

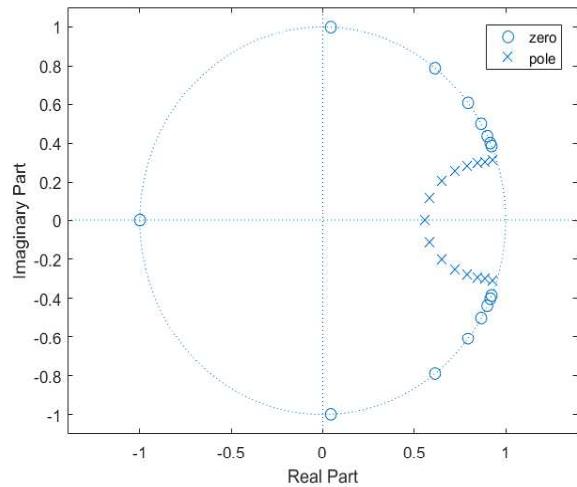
## Przykład 5: Rozmieszczenie biegunów filtrów typu IIR

Filtr dolno-przepustowy Czebyszewa typu II o częstotliwości odcięcia 1/16

Filtr rzędu 7



Filtr rzędu 15

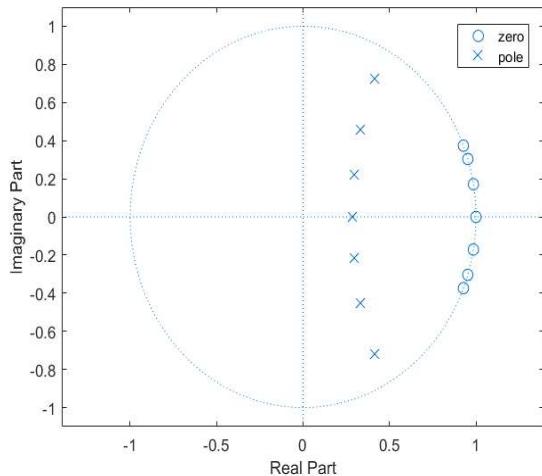


40

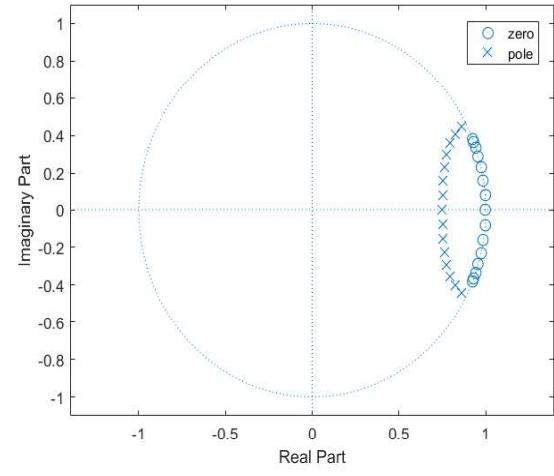
## Przykład 5: Rozmieszczenie biegunów filtrów typu IIR

Filtr górnoprzepustowy Czebyszewa typu II o częstotliwości odcięcia 1/16

Filtr rzędu 7



Filtr rzędu 15

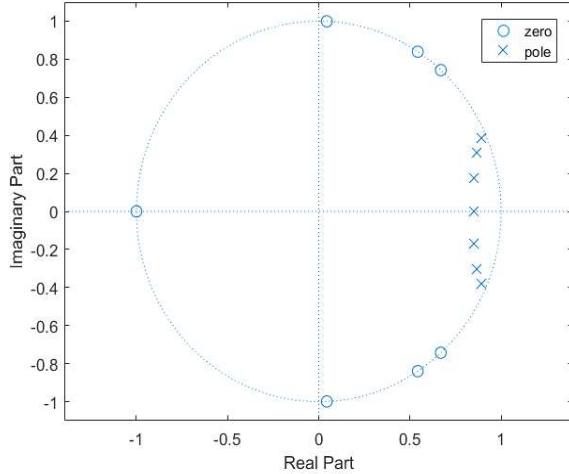


41

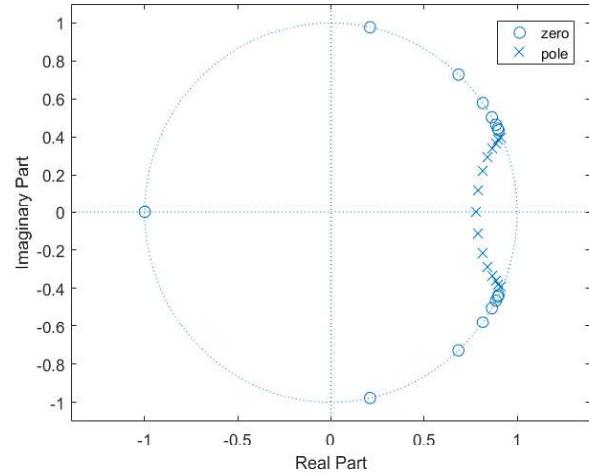
## Przykład 5: Rozmieszczenie biegunów filtrów typu IIR

Filtr dolno-przepustowy eliptyczny o częstotliwości odcięcia 1/16

Filtr rzędu 7



Filtr rzędu 15

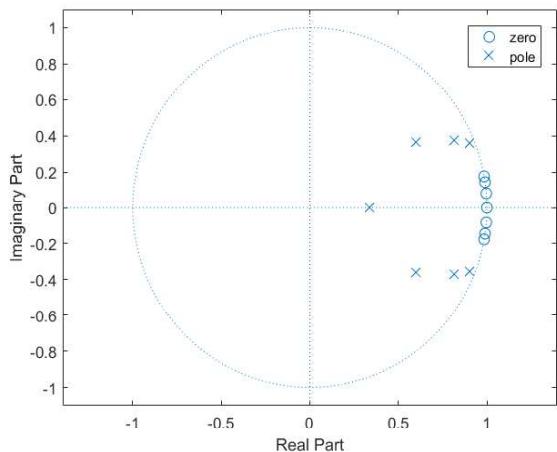


42

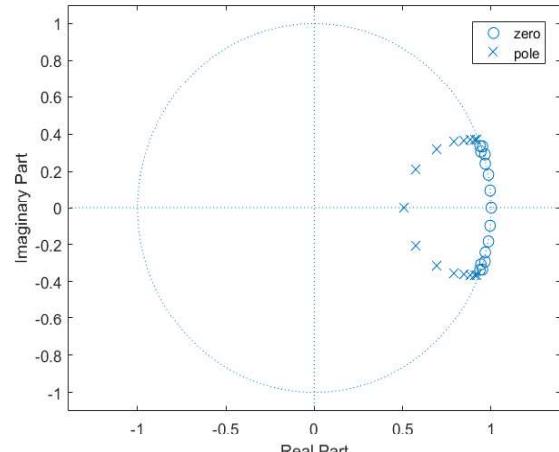
## Przykład 5: Rozmieszczenie biegunów filtrów typu IIR

Filtr górnoprzepustowy eliptyczny o częstotliwości odcięcia 1/16

Filtr rzędu 7



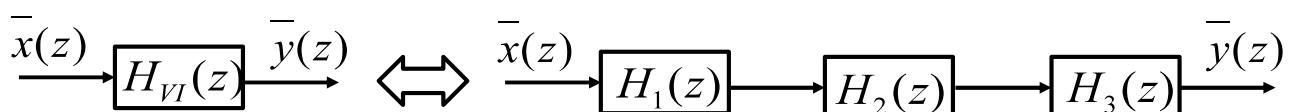
Filtr rzędu 15



## Stosowanie struktur kaskadowych

- Motywacja: ze względu na błędy przepełnienia (ang. overflow errors) oraz błędy zaokrąglenia (ang. round-off errors), możliwa jest niestabilność filtrów typu IIR zwłaszcza w przypadku filtrów wysokiego rzędu
- Stąd w praktyce często stosowane są tzw. struktury kaskadowe, w których zamiast jednego filtru wysokiego rzędu stosuje się kaskadę kilku filtrów niższego rzędu (często II rzędu)
- Np. zamiast filtru typu IIR VI rzędu o transmitancji

$$H_{VI}(z) = H_1(z)H_2(z)H_3(z)$$



## 2D filtry typu IIR

45

[www.agh.edu.pl](http://www.agh.edu.pl)

## Filtracja 2-D IIR



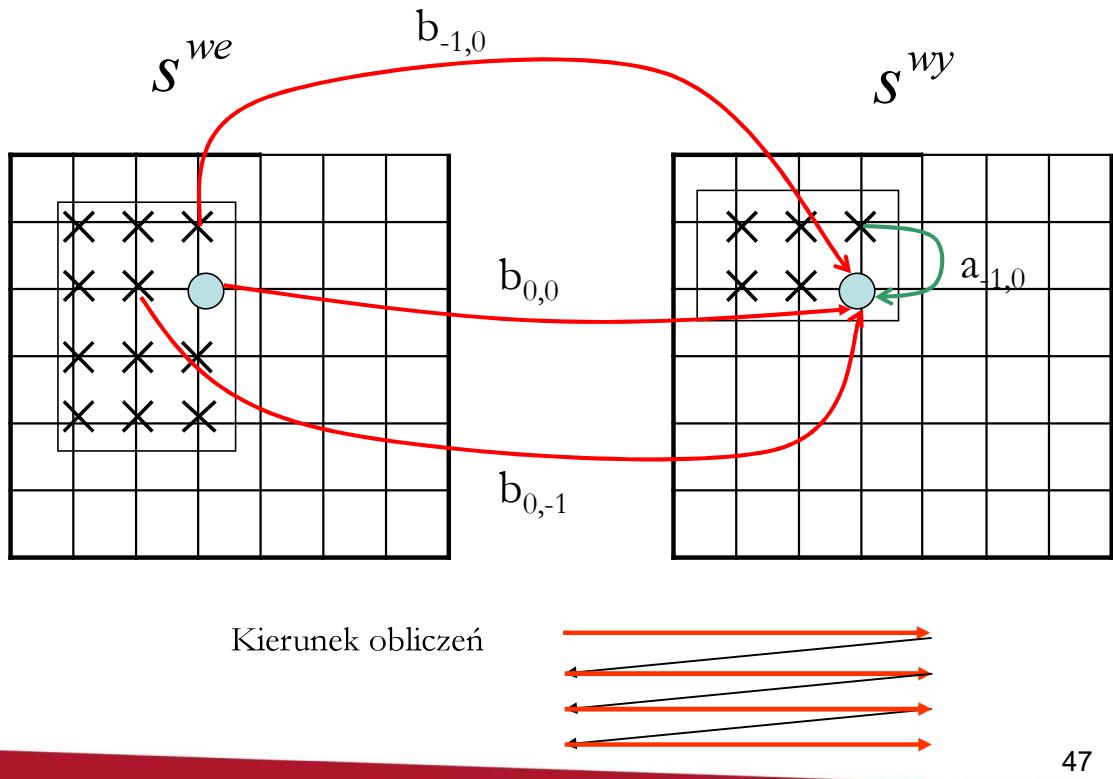
→ FILTR →



[www.agh.edu.pl](http://www.agh.edu.pl)

46

## Graficzna prezentacja filtru 2-D IIR



## Dwuwymiarowe filtry z nieskończoną odpowiedzią impulsową

$$s^{wy}(k, l) = \sum_{(m,n) \in R^{we}} \sum b_{m,n} s^{we}(k-m, l-n) - \sum_{(m,n) \in R^{wy}} \sum a_{m,n} s^{wy}(k-m, l-n)$$

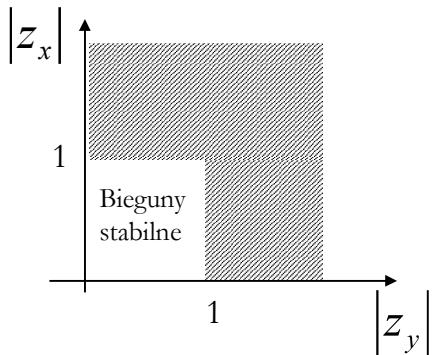
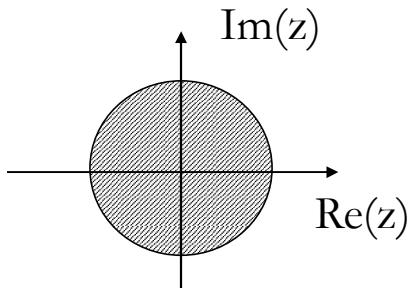
$$H(z_x, z_y) = \frac{\sum_{(m,n) \in R^{wy}} \sum b_{m,n} z_x^{-m} z_y^{-n}}{1 + \sum_{(m,n) \in R^{we}} \sum a_{m,n} z_x^{-m} z_y^{-n}}$$

$$z_x = e^{2\pi j f_x}$$

$$z_y = e^{2\pi j f_y}$$

## Stabilność filtrów 2-D IIR

$$1D \begin{cases} \text{Pierwiastki } M(z) = 0 \text{ wewnatrz } |z| = 1 \\ \text{Stabilność} \Leftrightarrow M(z) \neq 0 \text{ dla } |z| \geq 1 \end{cases}$$



$$2D \begin{cases} \text{Biegunki } H(z_x, z_y) \text{ czyli zera } M(z_x, z_y) = 0 \text{ wewnatrz } |z_x| = 1 \text{ i } |z_y| = 1 \\ \text{Stabilność} \Leftrightarrow M(z_x, z_y) \neq 0 \text{ dla } \forall |z_x| \geq 1 \text{ lub } |z_y| \geq 1 \end{cases}$$

## Normalizacja częstotliwości

Gęstość próbkowania

$$\Delta x = X / (M - 1)$$

$$\Delta y = Y / (N - 1)$$

Wniosek z twierdzenia o próbkowaniu

$$f_x^{\max} = 0,5 / \Delta x$$

$$f_y^{\max} = 0,5 / \Delta y$$

Normowanie częstotliwości

$$\underline{f}_x = f_x \Delta x$$

$$\underline{f}_y = f_y \Delta y$$

# Przykładowe kryterium dla optymalizacyjnej metody projektowania filtrów 2-D IIR

$$Q = \int_0^{0,5} \int_0^{0,5} \left\{ \gamma \left| \frac{\sum_{(m,n) \in R^{we}} b_{m,n} e^{-2\pi j(\underline{f}_x m + \underline{f}_y n)}}{1 + \sum_{(m,n) \in R^{wy}} a_{m,n} e^{-2\pi j(\underline{f}_x m + \underline{f}_y n)}} - A(\underline{f}_x, \underline{f}_y) e^{j\theta(\underline{f}_x, \underline{f}_y)} \right|^2 \right. \right. \\ \left. \left. + (1-\gamma) \left[ \left| \frac{\sum_{(m,n) \in R^{we}} b_{m,n} e^{-2\pi j(\underline{f}_x m + \underline{f}_y n)}}{1 + \sum_{(m,n) \in R^{wy}} a_{m,n} e^{-2\pi j(\underline{f}_x m + \underline{f}_y n)}} \right|^2 - |A(\underline{f}_x, \underline{f}_y)|^2 \right] \right] d\underline{f}_y d\underline{f}_x \right\}$$

gdzie  $\gamma \in [0, 1]$

51

[www.agh.edu.pl](http://www.agh.edu.pl)

# Inne przykładowe kryterium dla optymalizacyjnej metody projektowania filtrów 2-D IIR

$$s^{wy}(k, l) = \sum_{(m,n) \in R^{we}} b_{m,n} s^{we}(k-m, l-n) - \sum_{(m,n) \in R^{wy}} a_{m,n} s^{wy}(k-m, l-n)$$

Funkcja kosztu:

$$Q = (1-\gamma)Q_{amp} + \gamma Q_{ph}$$

$$H(\underline{f}_x, \underline{f}_y) = \frac{\sum_{(m,n) \in R^{we}} b_{m,n} e^{-j(m\underline{f}_x + n\underline{f}_y)}}{1 + \sum_{(m,n) \in R^{wy}} a_{m,n} e^{-j(m\underline{f}_x + n\underline{f}_y)}}$$

$$Q_{amp} = \int_0^{0,5} \int_0^{0,5} \left( |H(\underline{f}_x, \underline{f}_y)| - A(\underline{f}_x, \underline{f}_y) \right)^2 d\underline{f}_y d\underline{f}_x$$

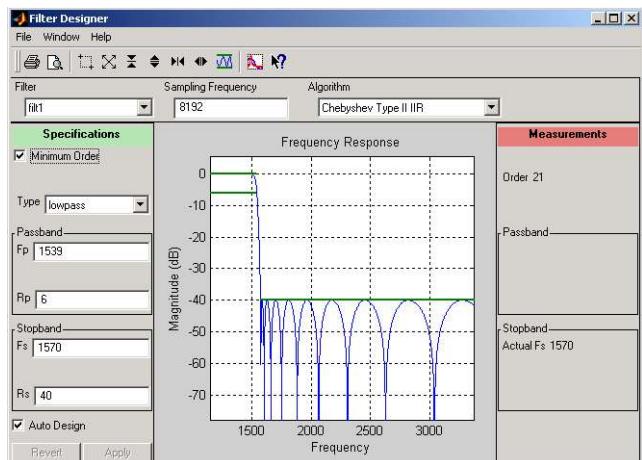
$$Q_{ph} = \int_0^{0,5} \int_0^{0,5} \left| H(\underline{f}_x, \underline{f}_y) - A(\underline{f}_x, \underline{f}_y) e^{j\theta(\underline{f}_x, \underline{f}_y)} \right|^2 d\underline{f}_y d\underline{f}_x$$

$$\theta(\underline{f}_x, \underline{f}_y) = \pi - \underline{f}_x - \underline{f}_y \quad \text{gdzie } \gamma = 0,1$$

52

[www.agh.edu.pl](http://www.agh.edu.pl)

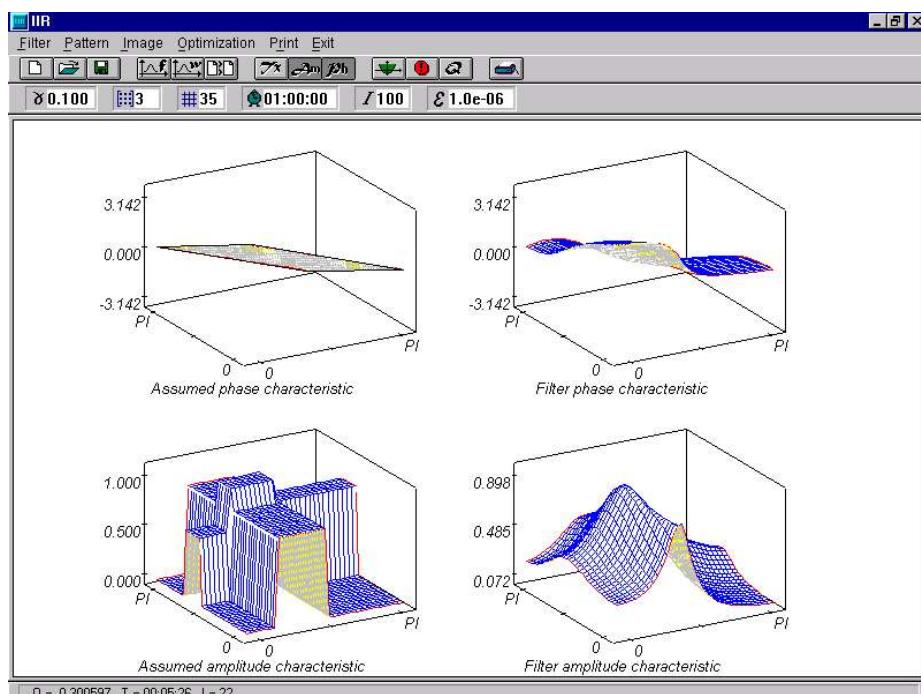
## Projektowanie filtrów IIR w środowisku MATLAB



53

[www.agh.edu.pl](http://www.agh.edu.pl)

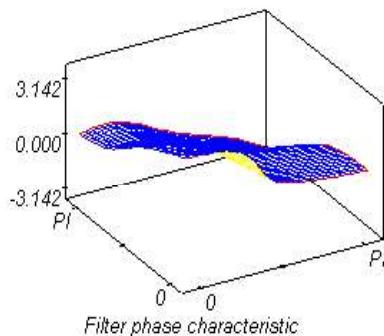
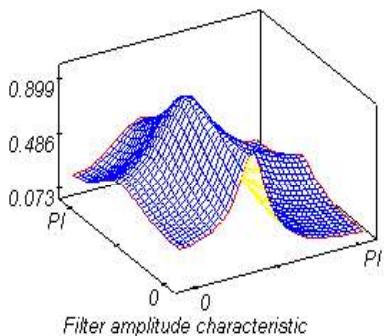
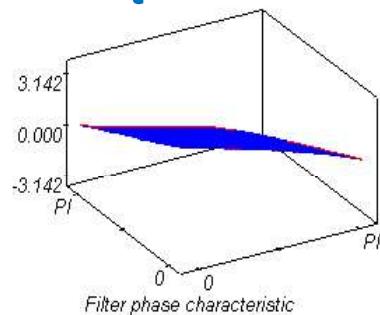
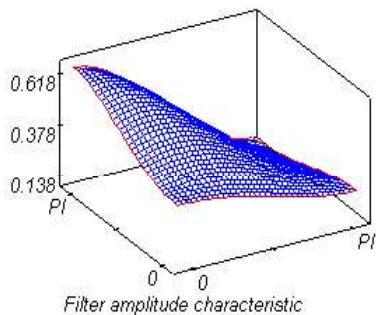
## Projektowanie filtrów 2D IIR



54

[www.agh.edu.pl](http://www.agh.edu.pl)

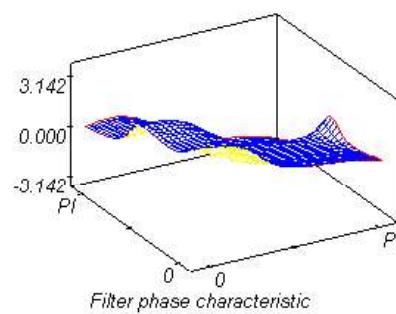
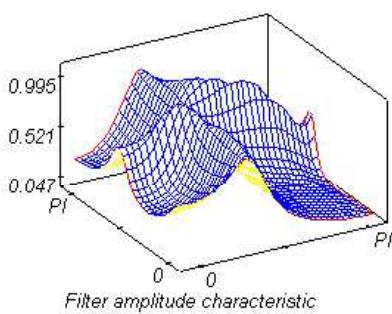
## Efekty projektowania w zależności od rzędu filtru



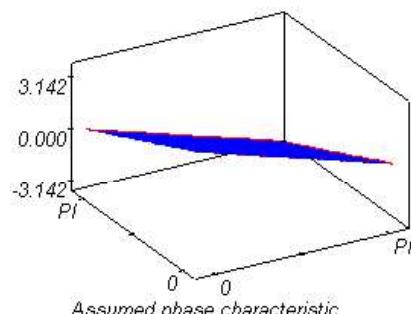
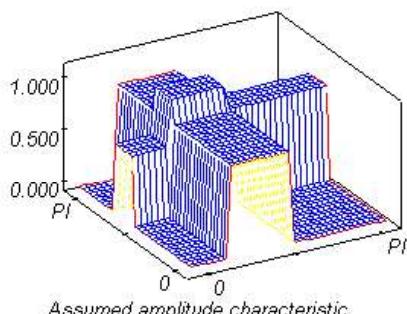
Tylko  $4+3=7$   
współczynników  
było do wyznaczenia

Do wyznaczenia  
było  $9+8=17$   
współczynników

## Efekty projektowania w zależności od rzędu filtru

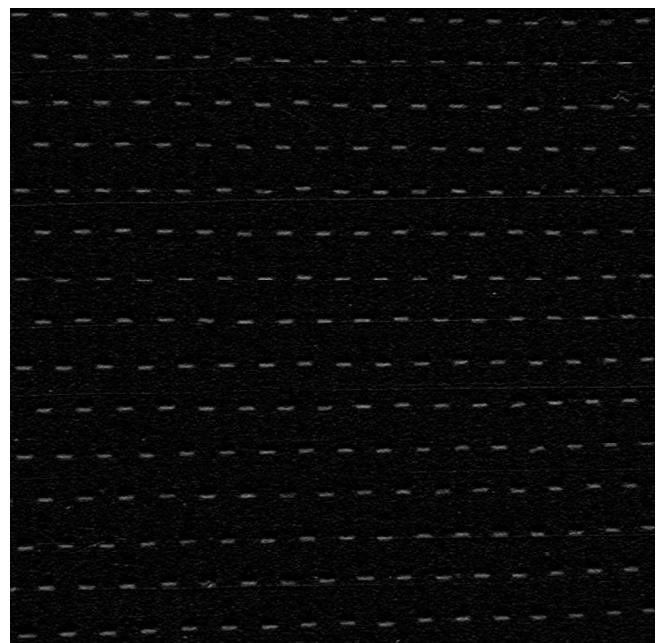
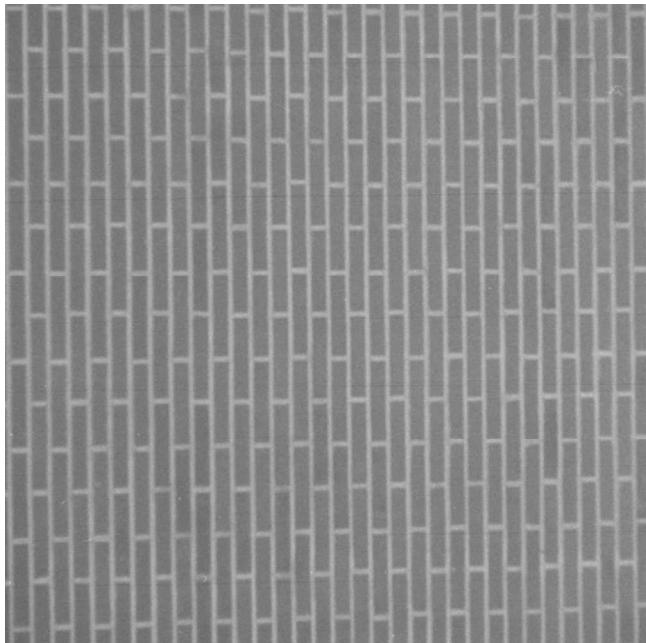


Aż  $16+15=31$   
współczynników  
było do wyznaczenia



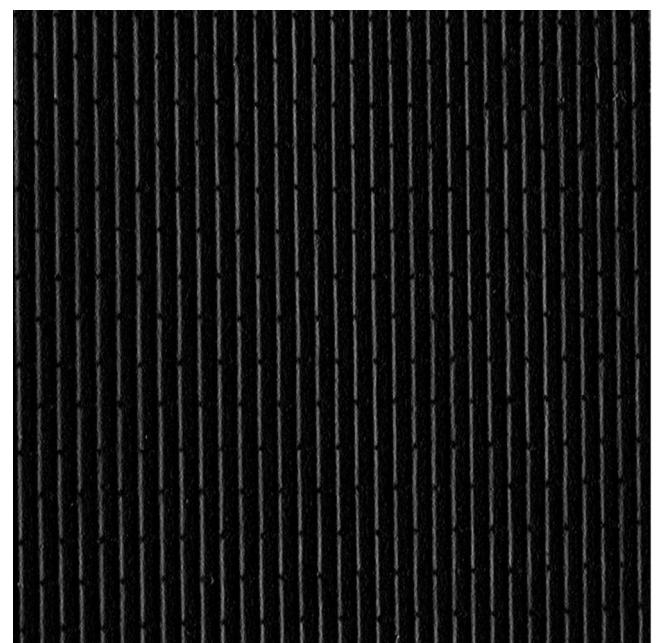
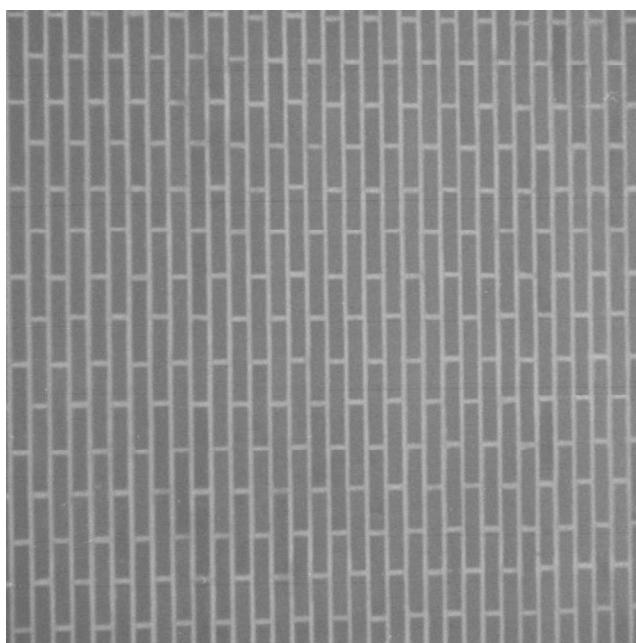
Założenia  
projektowe

## Filtracja obrazów – przykład krawędzie (linie) poziome



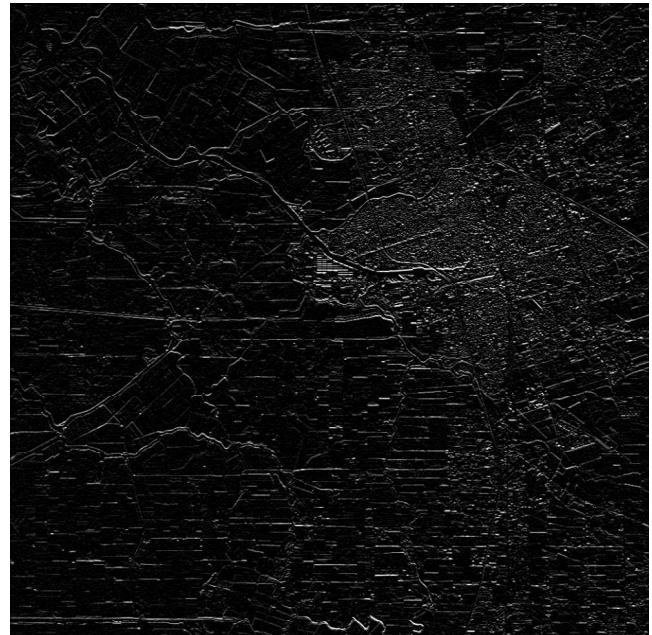
57

## Filtracja obrazów – przykład krawędzie (linie) pionowe



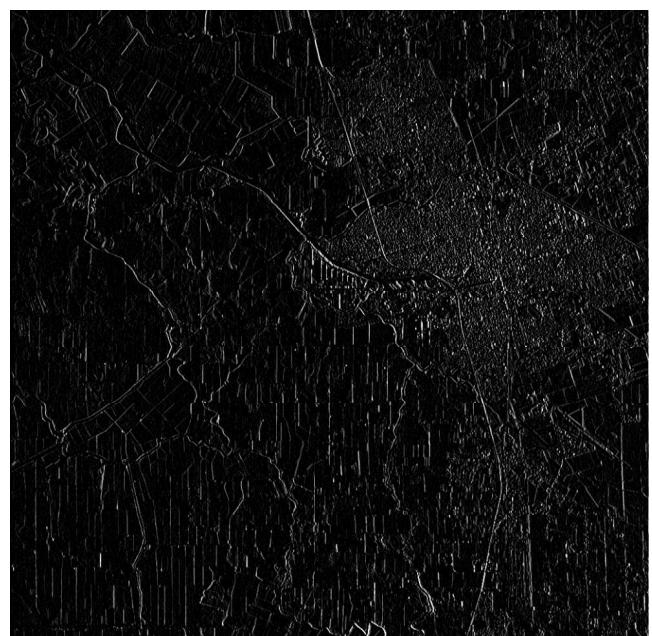
58

## Filtracja obrazów – przykład 2 krawędzie (linie) poziome



59

## Filtracja obrazów – przykład 2 krawędzie (linie) pionowe



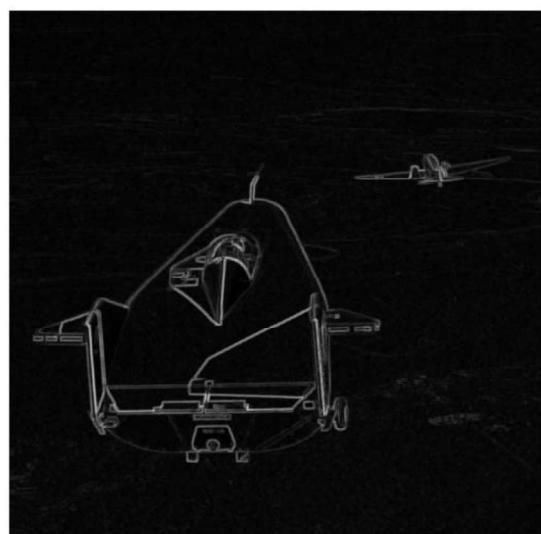
60

## Filtracja obrazów – przykład „unsharp mask”



61

## Filtracja obrazów – przykład „range filter”



62