PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW CYFROWYCH

(ang. DIGITAL SIGNAL PROCESSING)

dr hab. inż. Konrad Kowalczyk, prof. AGH

Pawilon C-2 pok. 420

Tel. (12) 617-3639

Email: konrad.kowalczyk@agh.edu.pl

sp.agh.edu.pl

Wykłady dostępne na UPEL:

Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów – EiT

Grupa: CPS_2020_2021 Hasło: CPS_2021

Ćwiczenia laboratoryjne

Laboratoria prowadzone w trybie zdalnym:

- Ćwiczenia laboratoryjne: Notebooki w języku Python
- Przez udostępniony serwis na serwerach zespołu DSP AGH

Prowadzący laboratoria:

mgr inż. Szymon Woźniak (główna osoba kontaktowa)

mgr inż. Mieszko Fraś

mgr inż. Mateusz Guzik

Pawilon C-2 pok. 418

Email: szymon.wozniak@agh.edu.pl

Literatura

1. Alan V. Oppenheim, Ronald W.Schafer: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 1979.

2. Richard G. Lyons: Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, WKŁ 1999, 2003.

3. Jacek Izydorczyk, Jacek Konopacki: Filtry analogowe i cyfrowe. 2004.

4.Tomasz Zieliński: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. WKŁ 2005.

5. Jacek Izydorczyk, Grzegorz Płonka, Grzegorz Tyma: Teoria Sygnałów. Helion 1999.

6. Jerzy Szabatin: Podstawy teorii sygnałów. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 1982.

7. Marian Pasko, Janusz Walczak: Teoria sygnałów. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1999.

8. Włodzimierz Kwiatkowski: Wstęp do cyfrowego przetwarzania sygnałów. Warszawa 2003.

9. Dag Stranneby: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. BTC 2004.

10. Kajetana M. Snopek, Jacek M. Wojciechowski: Sygnały i systemy: zbiór zadań. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej 2010.

11. Bartosz Ziółko, Mariusz Ziółko: Przetwarzanie mowy. AGH 2011.

12. Tomasz Zieliński, Przemysław Korohoda, Roman Rumian (Red): Cyfrowe przetwarzanie sygnałów w telekomunikacji PODSTAWY - MULTIMEDIA – TRANSMISJA. Warszawa 2014.

Ocena końcowa

Warunkiem uzyskania pozytywnej oceny końcowej jest uzyskanie pozytywnej oceny z laboratorium oraz z egzaminu.

Warunkiem przystąpienia do egzaminu jest uzyskanie pozytywnej oceny z laboratorium.

Ocena końcowa jest średnią arytmetyczną oceny z laboratorium i egzaminu.

Jeżeli wartość średnia nie odpowiada obowiązującej skali ocen, ocena końcowa jest zaokrągleniem wartości średniej w kierunku oceny z egzaminu.

Przetwarzanie sygnałów cyfrowych

Lista tematów:

1. Przetwarzanie sygnałów analogowych na cyfrowe
2. Dyskretna transformacja Fouriera
3. Szybka transformacja Fouriera
4. Okna oraz analiza krótko-czasowa
5. Z-transformacja
6. Filtry cyfrowe typu FIR
7. Filtry cyfrowe typu IIR
8. Filtracja pod-pasmowa
9. Rodzaje transformacji (np. kosinusowa, falkowa, Hilberta)
10. Kompresja sygnałów 1-D lub statystyczne przetwarzanie sygnałów

Przykład zastosowania DSP

Kompresja obrazu

Przykład zastosowania DSP

Kompresja audio - wideo

PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW ANALOGOWYCH NA SYGNAŁY CYFROWE

Spis treści

1. Definicja próbkowania sygnału
2. Twierdzenie Shannona
3. Aliasing czyli utożsamianie
4. Przetwarzanie obrazów analogowych na dyskretne

Klasyfikacja sygnałów

Sygnały deterministyczne:

- Okresowe
- Zmodulowane
- Impulsowe o ograniczonej energii
- O nieskończonym czasie trwania i ograniczonej energii

Sygnały losowe (stochastyczne):

- stacjonarne
- niestacjonarne

Klasyfikacja sygnałów

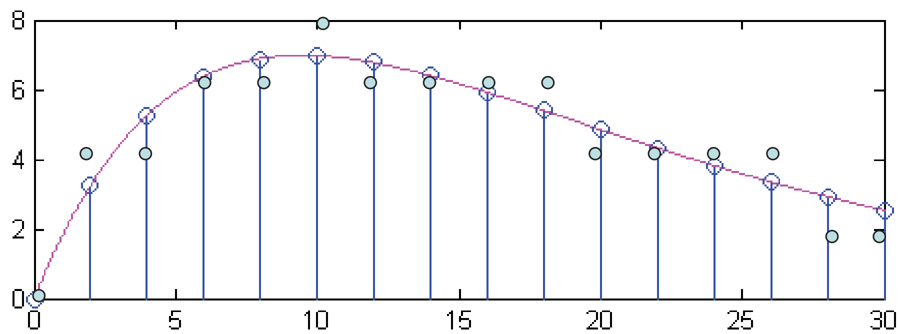
Modele matematyczne sygnałów:

- Funkcje rzeczywiste (1D, 2D, 3D, MD)
- Funkcje zespolone
- Dystrybucje sygnałów

Ciągłe/dyskretne:

- Sygnały ciągłe czasu ciągłego
- Sygnały dyskretne czasu ciągłego
- Sygnały ciągłe czasu dyskretnego
- Sygnały cyfrowe

Próbkowanie sygnałów (ang. sampling)



Dyskretyzacja czyli próbkowanie

Sygnał dyskretny

+

Kwantyzacja

Sygnał cyfrowy

Czy znając dyskretne wartości sygnału można z nich odtworzyć sygnał analogowy?

Próbkowanie sygnału akustycznego

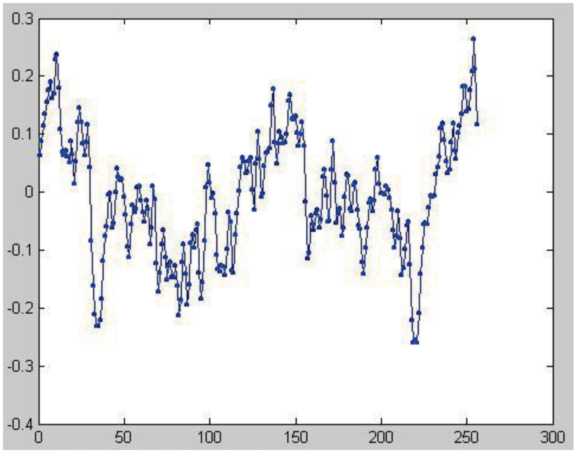
Sygnał dyskretny powstaje z sygnału analogowego zgodnie ze wzorem

$$s(i) = s_a(i\Delta t)$$

przy czym Δt jest odstępem między próbkami, czyli okresem próbkowania.

Odwrotność okresu próbkowania jest częstotliwością próbkowania $f_p = \dfrac{1}{\Delta t}$

Sygnał dyskretny można zapisać w postaci wektorowej $s = [s(0), s(1), \ldots, s(M-1)]^T \in \Re^M$



Przykład M=256 próbek sygnału Starwars

$$f_p = \frac{1}{\Delta t} = 44100\,[Hz]$$

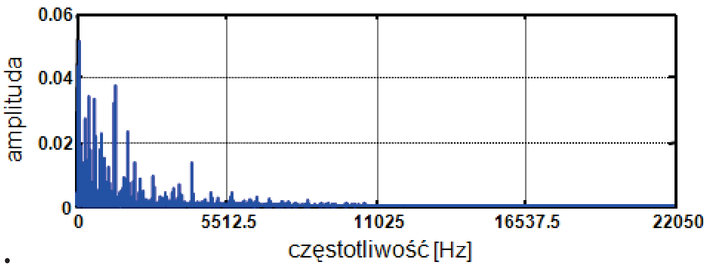
czyli

$$\Delta t = \frac{1}{44100}[s] = 2268 \cdot 10^{-8}[s] = 22{,}68\,[\mu s]$$

Twierdzenie Shannona

Kotielnikow 1933 rok

Shannon 1949 rok



Jeżeli spełnione są warunki:

1) nośnik widma sygnału $\hat{s} \in L^2(\Re)$ jest ograniczony, tzn. istnieje $f_m > 0$ takie, że $\boxed{\hat{s}(f) = 0}$ dla $\boxed{|f| \geq f_m}$,

2) próbki $\{s(n\Delta t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sygnału są pobierane w odstępach czasu Δt

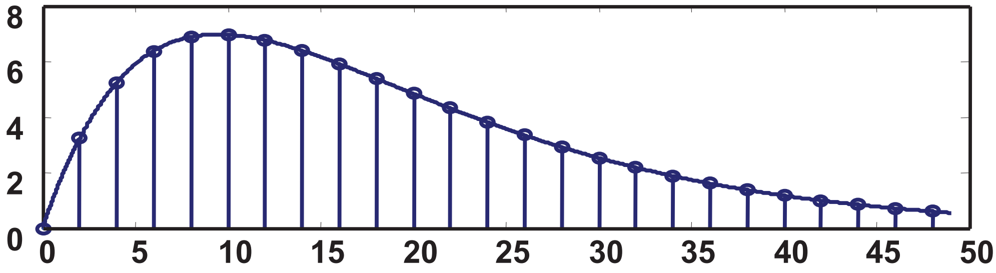
takich, że $\boxed{\dfrac{1}{\Delta t} \stackrel{\text{df}}{=} f_p \geq 2 f_m,}$

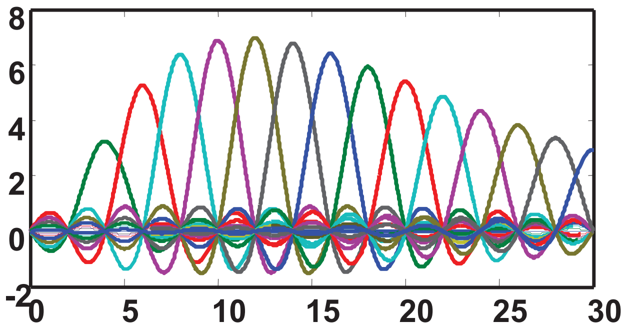
to wtedy sygnał $s(t)$ może być odtworzony z ciągu próbek za pomocą szeregu

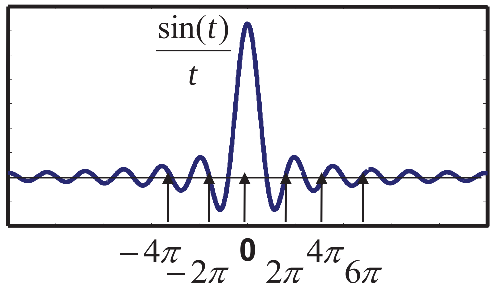
$$\boxed{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) \frac{\sin(\pi(t - n\Delta t)/\Delta t)}{\pi(t - n\Delta t)/\Delta t}.}$$

Przykład odtwarzania sygnału

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t)\frac{\sin\left(\pi(t-n\Delta t)/\Delta t\right)}{\pi(t-n\Delta t)/\Delta t}$$



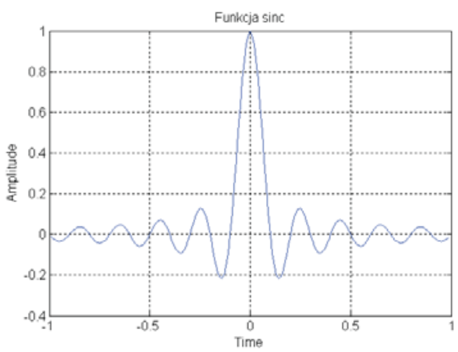


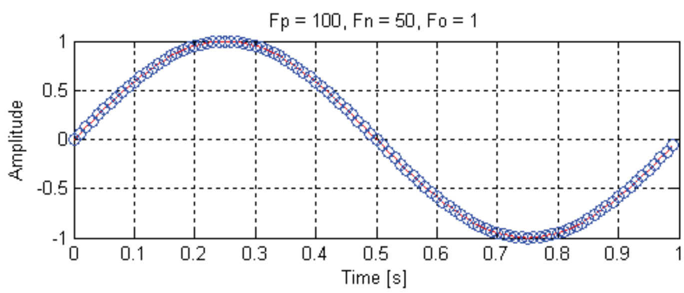


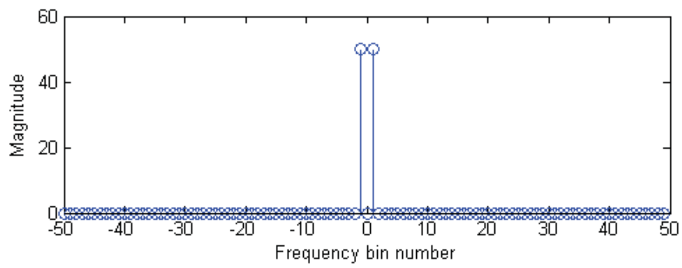
Przykład odtworzenia sygnału

Przykład odtwarzania sygnału sinus

używając co 10 próbki sygnału przy Fp=100 Hz z sinusa o częstotliwości Fo=1 Hz

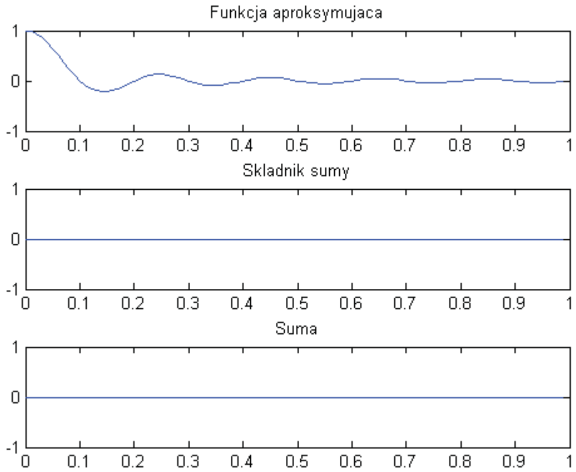


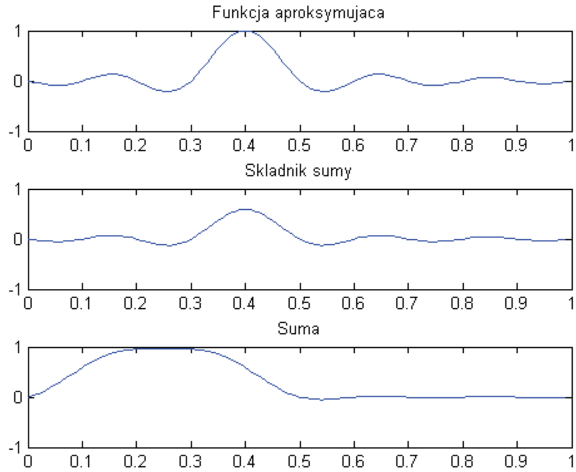




Przykład odtworzenia sygnału

Kolejne kroki odtwarzania sygnału

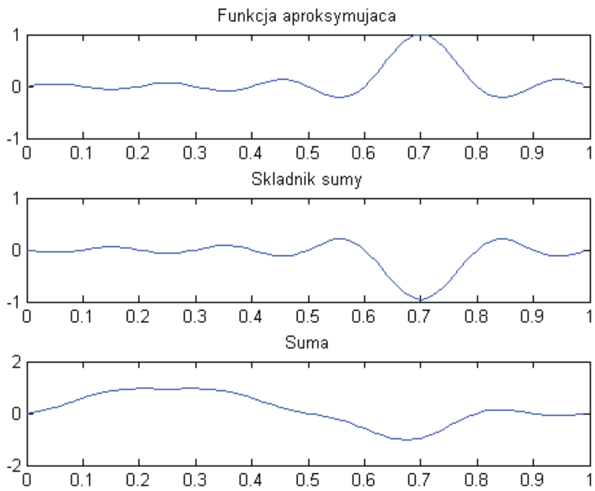


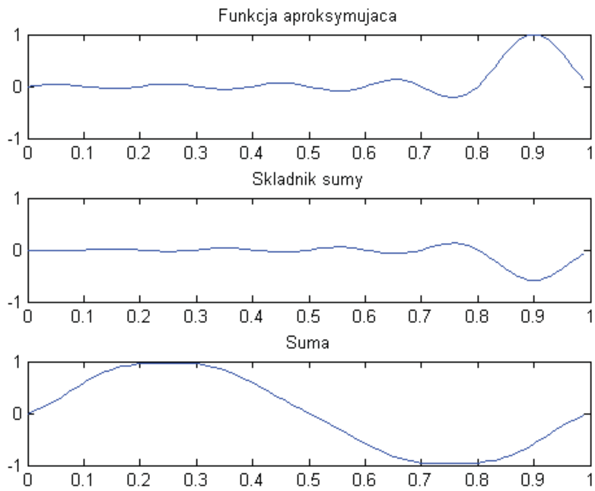


Przykład odtworzenia sygnału

W kolejnych krokach …

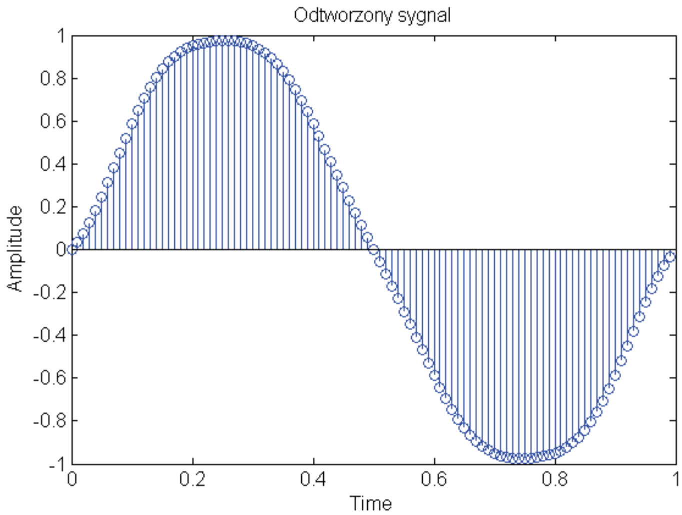
ostatni krok





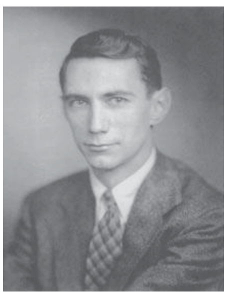
Przykład odtworzenia sygnału

Ostatecznie otrzymany sygnał po zmniejszeniu częstotliwości próbkowania 10x



Ciekawostka z historii

Harry Nyquist
1889-1976



Claude Shannon
1916-2001

Kryterium Nyquista "Certain topics in telegraph transmission theory", 1928 r.

„Up to 2B independent pulse samples could be sent through a system of bandwidth B; but he did not explicitly consider the problem of sampling and reconstruction of continuous signals."

Twierdzenie Shannona "Communication in the Presence of Noise", 1949 r.

„If a function contains no frequencies higher than Ω_{max} (in radians per second), it is completely determined by giving its cordinates at a series of points spaced $T=\pi/\ \Omega_{max}$ seconds apart."

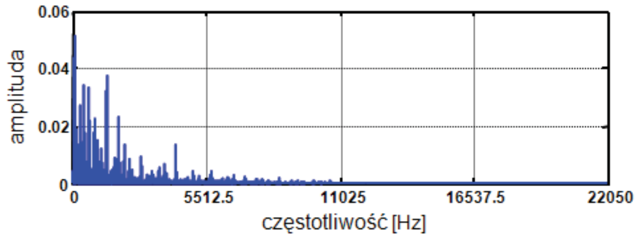
Wstęp do dowodu tw. Shannona

We wzorze na odwrotną transformację Fouriera

$$s(t)=\int_{-f_m}^{f_m}\hat{s}(f)\,e^{2\pi j f t}df$$

możemy zmienić granice całkowania otrzymując

$$s(t)=\int_{-f_p/2}^{f_p/2}\hat{s}(f)\,e^{2\pi j f t}df$$



Obie całki są jednakowe bo jeżeli $f_p/2 > f_m$

to musi być spełniony warunek $\hat{s}(f)=0$

na odcinkach $\lfloor -f_p/2, -f_m \rfloor$ i $\lfloor f_m, f_p/2 \rfloor$

f_m oznacza maksymalną częstotliwość sygnału

Początek dowodu tw. Shannona

Ze wzoru na odwrotną transformację Fouriera

$$s(t)=\int_{-f_p/2}^{f_p/2}\hat{s}(f)\,e^{2\pi j f t}df$$

wyrugujemy $\hat{s}(f)$ wstawiając szereg Fouriera

$$\hat{s}(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_n e^{-2\pi j n f/f_p}$$ zbieżny na odcinku $\lfloor -0{,}5\,f_p,\quad 0{,}5\,f_p \rfloor$

Przy okazji zauważmy, że współczynniki tego szeregu dane są wzorem

$$s_n=\frac{1}{f_p}\int_{-f_p/2}^{f_p/2}\hat{s}(f)\,e^{2\pi j n f/f_p}df \qquad \text{czyli} \qquad s_n=\frac{1}{f_p}s(n/f_p)$$

Otrzymujemy zatem

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_n\int_{-f_p/2}^{f_p/2}e^{2\pi j\left(t-\frac{n}{f_p}\right)f}df$$

Kontynuacja dowodu tw. Shannona

Dla otrzymanego wzoru

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \int_{-f_p/2}^{f_p/2} e^{2\pi j\left(t-\frac{n}{f_p}\right)f}\,df$$

wyliczmy występującą w nim całkę

$$\int_{-f_p/2}^{f_p/2} e^{2\pi j\left(t-\frac{n}{f_p}\right)f}\,df = \int_{-f_p/2}^{f_p/2}\left[\cos\left(2\pi\left(t-\frac{n}{f_p}\right)f\right)+j\sin\left(2\pi\left(t-\frac{n}{f_p}\right)f\right)\right]df = \frac{\sin\left(\pi(f_p t-n)\right)}{\pi(t-n/f_p)}$$

Uwaga! Po podstawieniu granic całkowania funkcja cosinus znikła bo jest funkcją parzystą!

Zakończenie dowodu

Do wzoru

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \int_{-f_p/2}^{f_p/2} e^{2\pi j\left(t-\frac{n}{f_p}\right)f}\,df$$

podstawiamy

$$\int_{-f_p/2}^{f_p/2} e^{2\pi j\left(t-\frac{n}{f_p}\right)f}\,df = \frac{\sin\left(\pi(f_p t-n)\right)}{\pi(t-n/f_p)} \qquad \text{oraz} \qquad s_n=\frac{1}{f_p}s\left(n/f_p\right)$$

otrzymując

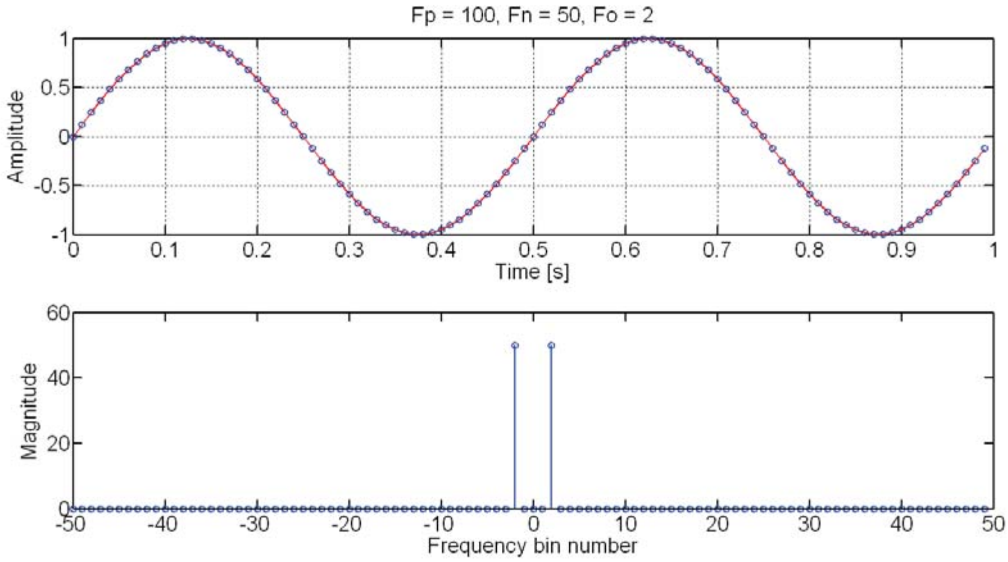
$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(n/f_p\right)\frac{\sin\left(\pi\left(f_p t-n\right)\right)}{\pi\left(f_p t-n\right)}$$

Uwzględniając $\frac{1}{f_p}=\Delta t$ dostajemy ostatecznie

$$\boxed{s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t)\frac{\sin\left(\pi(t-n\Delta t)/\Delta t\right)}{\pi(t-n\Delta t)/\Delta t}}$$

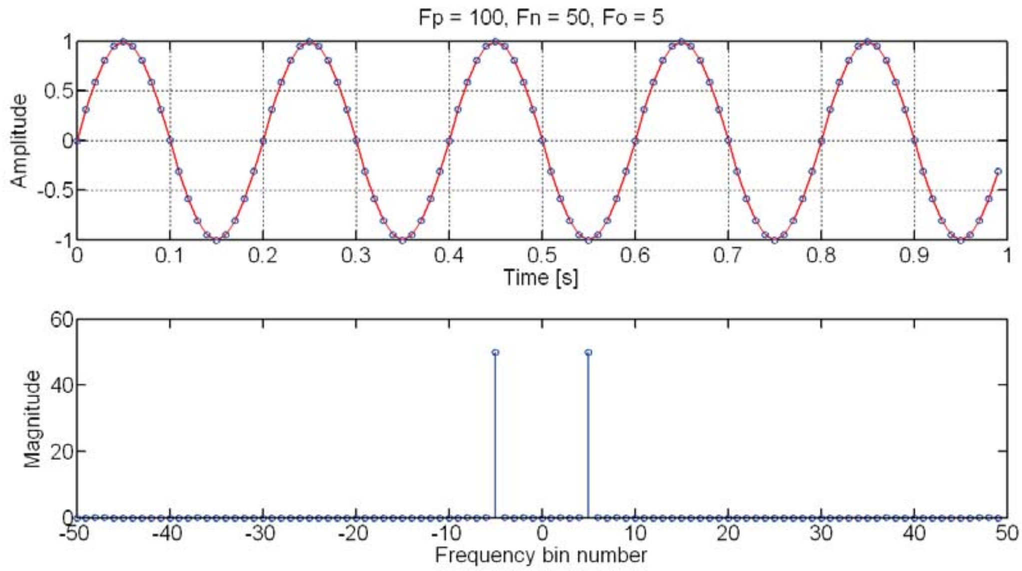
Widmo sygnału próbkowanego

Sygnał sinus o częstotliwości 2 Hz i jego widmo amplitudowe przy częstotliwości próbkowania 100 Hz



Widmo sygnału próbkowanego

Sygnał sinus o częstotliwości 5 Hz i jego widmo amplitudowe przy częstotliwości próbkowania 100 Hz

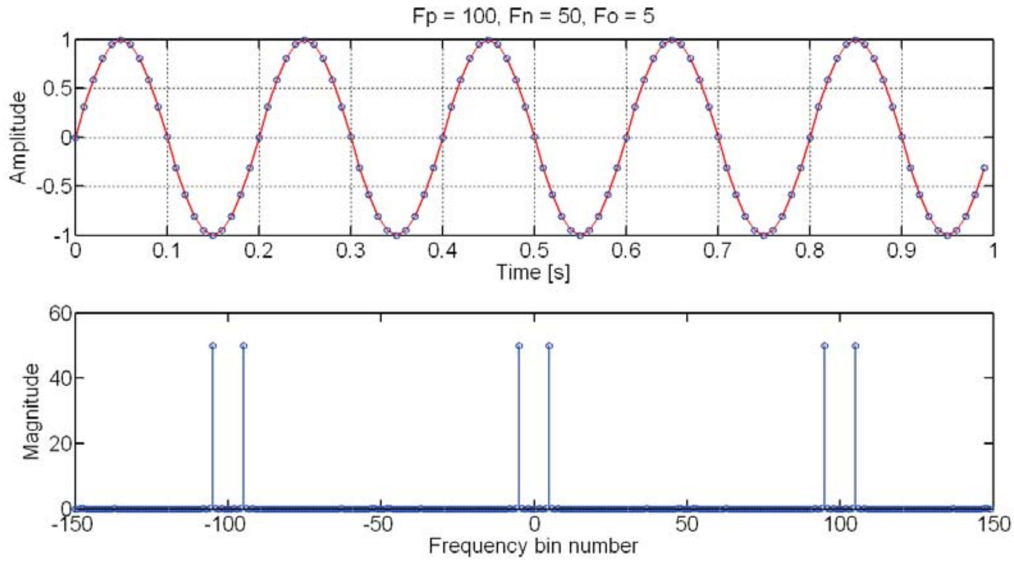


Widmo sygnału próbkowanego

AGH

Czy pokazane widmo amplitudowe jest poprawne?

Z czego wynika takie widmo?



Zmiany częstotliwości próbkowania

AGH

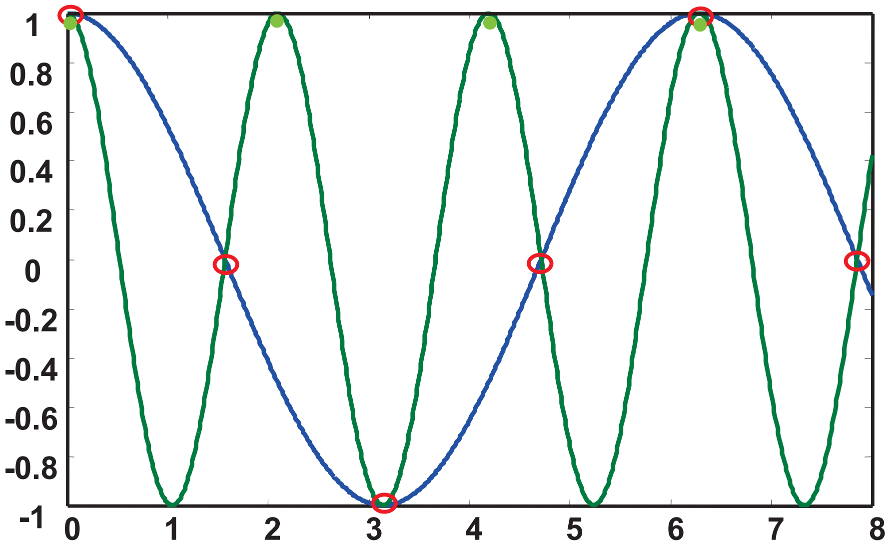
Z twierdzenia Shannona wiemy, że

$$\boxed{\frac{1}{\Delta t} \overset{\mathrm{df}}{=} f_p \geq 2 f_m \,,}$$

Zatem częstotliwość próbkowania może być dowolnie duża.

Co się jednak stanie jeżeli częstotliwość próbkowania będzie za mała?

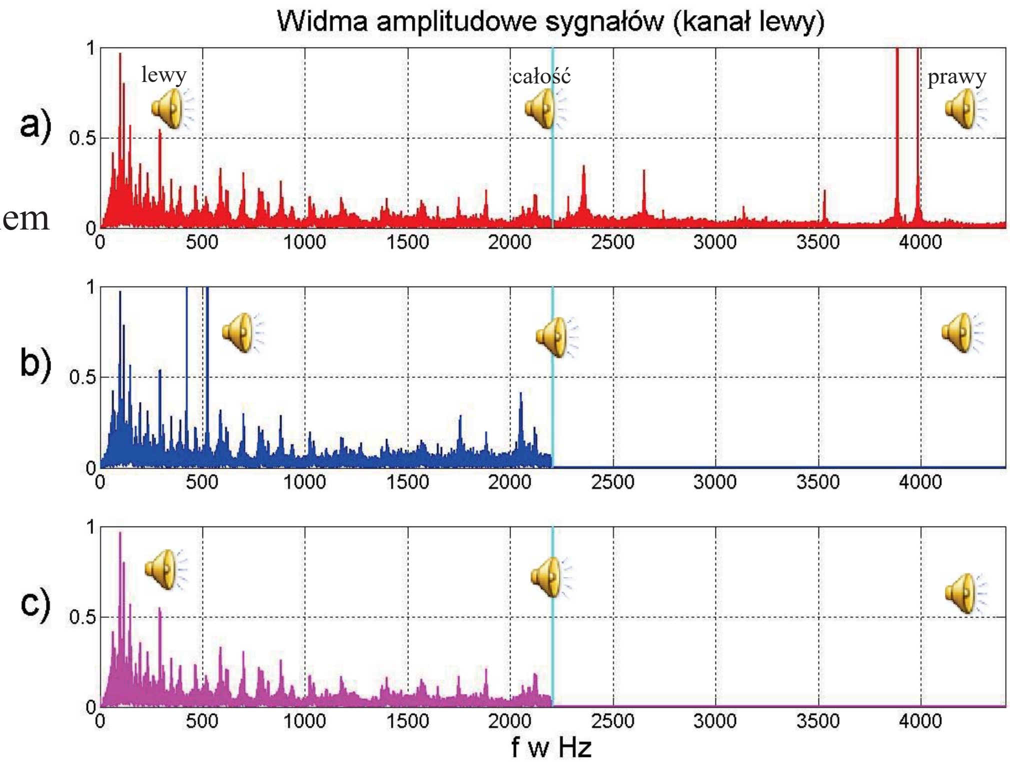
Aliasing czyli utożsamianie



Przyjęta gęstość dyskretyzacji oznacza, że próbki ○ mają takie same wartości dla dwóch różnych sygnałów.

Przykład 1

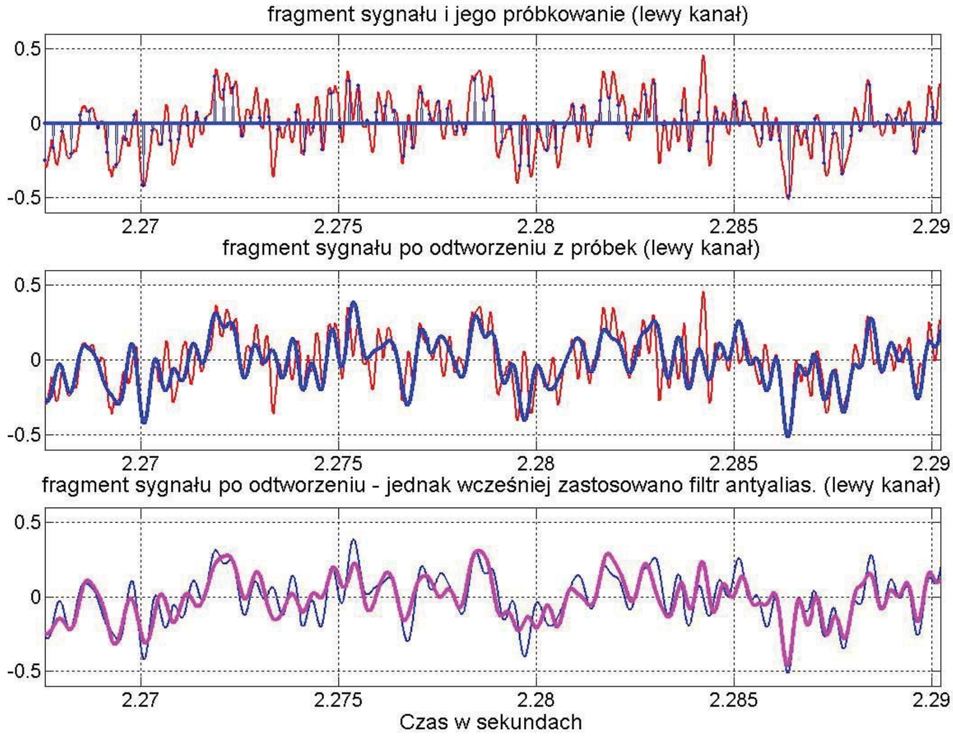
a) przed próbkowaniem
b) po próbkowaniu z aliasingiem
c) po próbkowaniu poprzedzonym filtracją antyaliasingową



Zakłócenie dodano tylko do kanału lewego

f_p= 44100 Hz zamieniamy na 4410 Hz (10x)

Przykład 1



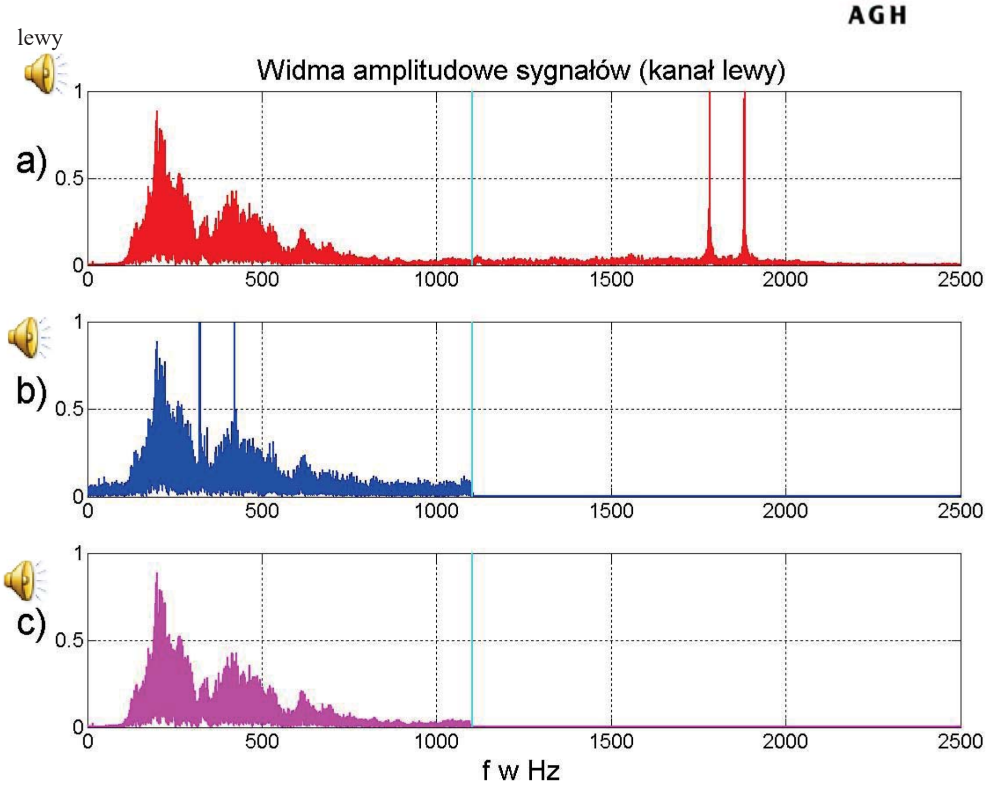
f_p= 44100 Hz zamieniamy na 4410 Hz (10x)

Przykład 1

Z aliasingiem

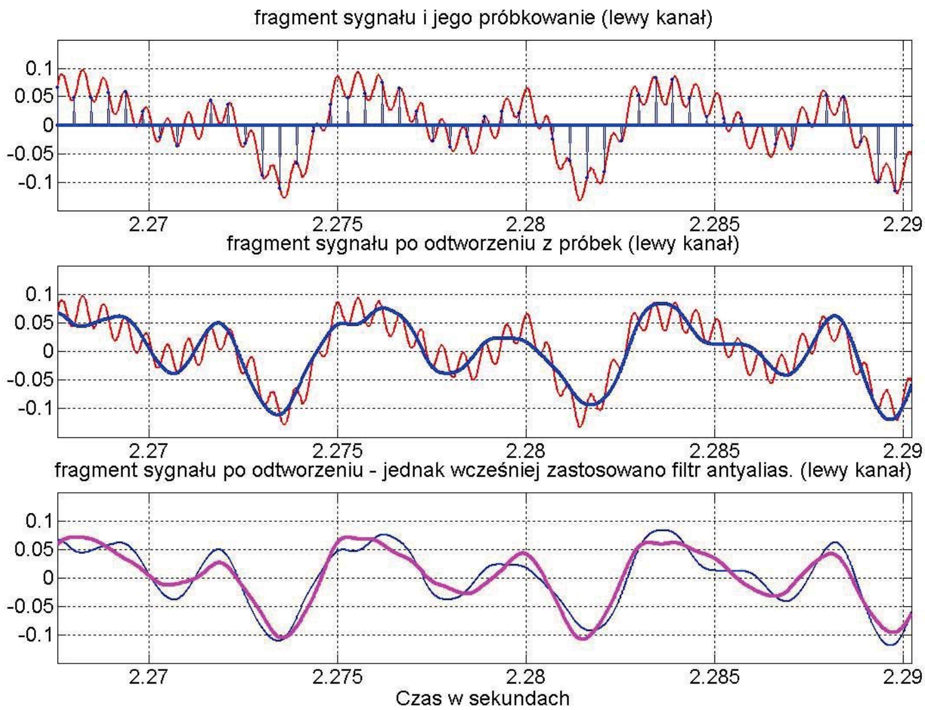
f_p= 44100 Hz zamieniamy na 4410 Hz (10x)

Przykład 2



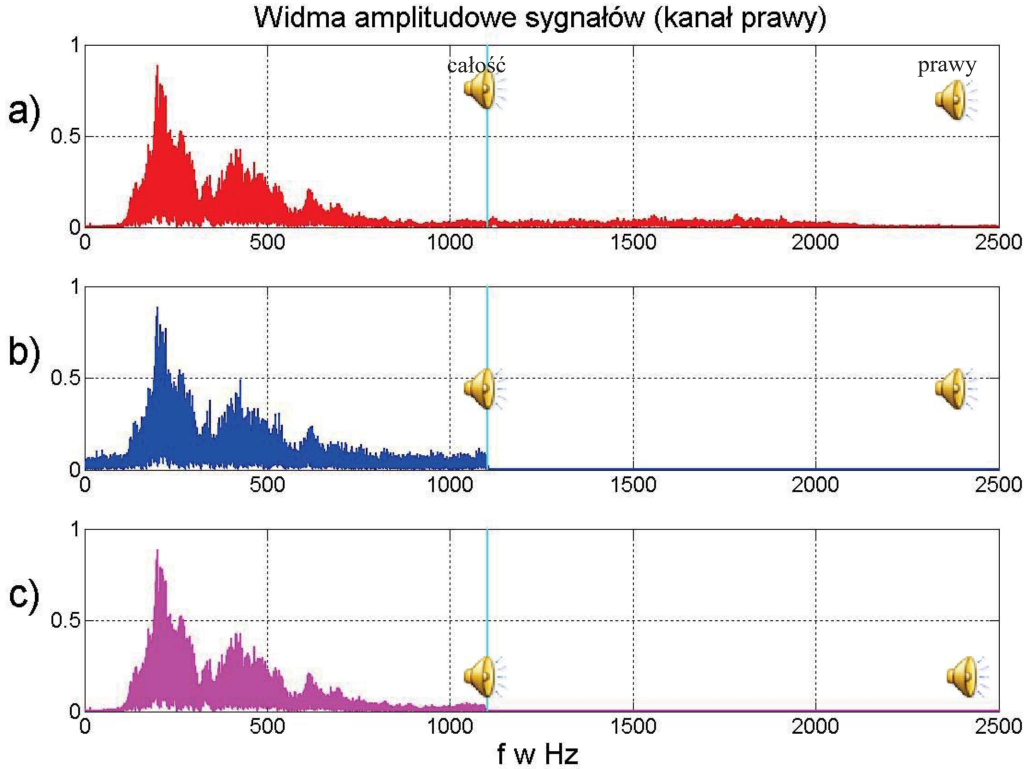
f_p= 44100 Hz zamieniamy na 2205 Hz (20x)

Przykład 2



f_p= 44100 Hz zamieniamy na 2205 Hz (20x)

Przykład 2



f_p = 44100 Hz zamieniamy na 2205 Hz (20x)

Przykład 2

Z aliasingiem

Przykład sygnału dwuwymiarowego

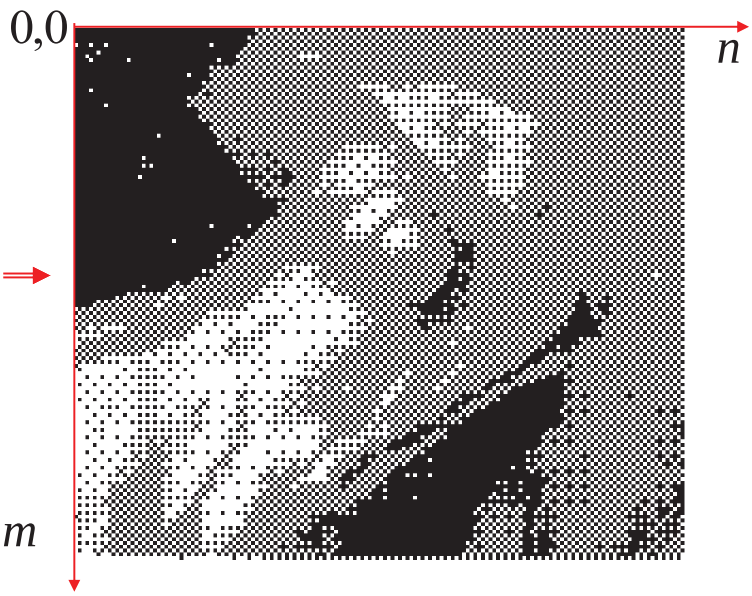
Model matematyczny obrazu analogowego jest odwzorowaniem $s : \Re^2 \to \Re$

Obraz dyskretny jest zborem punktów $\{s(m,n)\}_{m,n}$

zdefiniowanych na dziedzinie $D = \{(m,n) : m, n \in Z\}$

Model matematyczny dyskretnego obrazu

x 8



$$D = \{(m,n) : m, n \in Z\}$$

$$\{s(m,n)\}_{m,n} \qquad s \in \Re^{M \times N}$$

gdzie: M - ilość linii, N - ilość punktów (pikseli) w linii

Twierdzenie Shannona dla sygnału 2-D

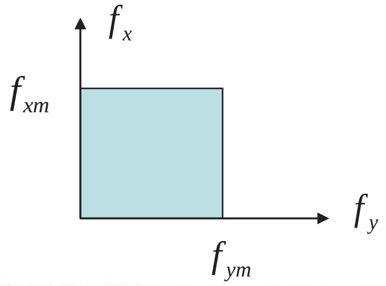
Jeżeli obraz analogowy $s(x,y)$ spełnia następujące warunki:

1) nośnik widma obrazu $\hat{s} \in L^2(\Re^2)$ jest ograniczony, tzn.

$\hat{s}(f_x, f_y) = 0$ jeśli $|f_x| \geq f_{xm}$ lub $|f_y| \geq f_{ym}$,

2) próbki obrazu $\{s(m\Delta x, n\Delta y)\}_{m,n=-\infty}^{\infty}$ są pobierane w odstępach Δx i Δy

takich, że $\frac{1}{\Delta x} \overset{\text{df}}{=} f_{xp} \geq 2 f_{xm}$ oraz $\frac{1}{\Delta y} \overset{\text{df}}{=} f_{yp} \geq 2 f_{ym}$,



Twierdzenie Shannona dla sygnału 2-D

Jeżeli obraz analogowy $s(x,y)$ spełnia następujące warunki:

1) nośnik widma obrazu $\hat{s} \in L^2(\Re^2)$ jest ograniczony, tzn.

$\hat{s}(f_x, f_y) = 0$ jeśli $|f_x| \geq f_{xm}$ lub $|f_y| \geq f_{ym}$,

2) próbki obrazu $\{s(m\Delta x, n\Delta y)\}_{m,n=-\infty}^{\infty}$ są pobierane w odstępach Δx i Δy

takich, że $\frac{1}{\Delta x} \overset{\text{df}}{=} f_{xp} \geq 2 f_{xm}$ oraz $\frac{1}{\Delta y} \overset{\text{df}}{=} f_{yp} \geq 2 f_{ym}$,

to wtedy obraz analogowy $s(x,y)$ może być zrekonstruowany z obrazu dyskretnego $\{s(m\Delta x, n\Delta y)\}_{m,n=-\infty}^{\infty}$ przy pomocy szeregu

$$s(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(m\Delta x, n\Delta y) \frac{\sin(\pi(x/\Delta x - m))\sin(\pi(y/\Delta y - n))}{\pi^2 (x/\Delta x - m)(y/\Delta y - n)}.$$