

OKNA I ICH ZASTOSOWANIE W ANALIZIE KRÓTKOCZASOWEJ

1

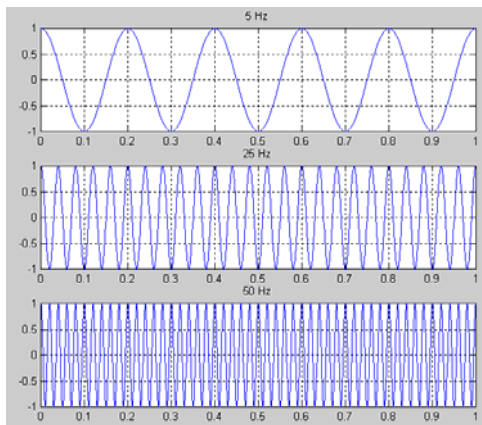
Spis treści

1. Rodzaje okien cyfrowych i ich widma częstotliwościowe
2. Zastosowanie okien w krótko-czasowej analizie częstotliwościowej

2

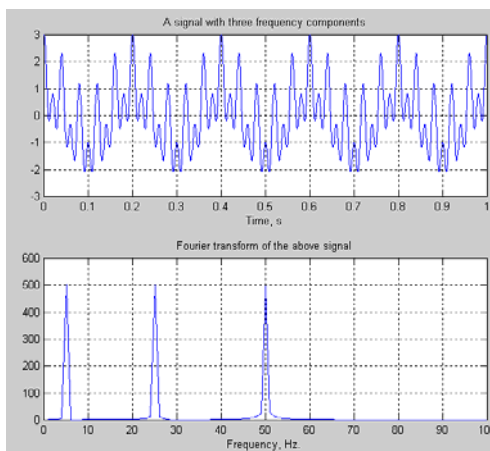
Przykład 1: Dlaczego stosujemy okna czasowe

Dane są 3 sygnały sinusoidalne o częstotliwościach $f_0 = 5, 25$ i 50 Hz.



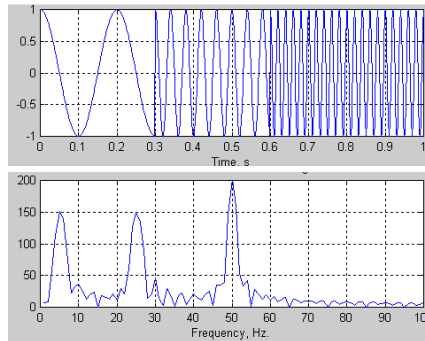
Przykład 1: Dlaczego stosujemy okna czasowe

Sumując te 3 sygnały sinusoidalne i obliczając ich widmo otrzymujemy



Przykład 1: Dlaczego stosujemy okna czasowe

1 sygnał sinusoidalny, który zmienia skokowo częstotliwość $f_0 = 5, 25$ i 50 Hz w ostępach czasowych co 0.3 s oraz jego widmo



Widmo amplitudowe z całego sygnału nie wskazuje na zachodzące zmiany w czasie

Krótko-czasowa transformacja Fouriera

ang. *short-time Fourier transform (STFT)*

Dyskretne widmo czasowo-częstotliwościowe można obliczyć posługując się wzorem

$$\hat{s}_{win}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s_{win}(n)w^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)win(n)w^{kn}$$

gdzie $W = [w^{kn}] \in \mathbb{C}^{N \times N}$

Przekształcenie STFT można zapisać macierzowo $\hat{s}_{win} = W s_{win}$

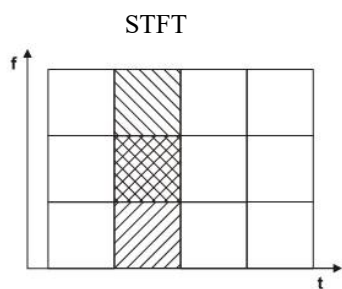
Elementy macierzy W powstają przez podniesienie do potęgi kn wartości zespolonej

$$w = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos(2\pi / N) - j \sin(2\pi / N)$$

przy czym k jest numerem wiersza a n numerem kolumny

$$k, n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

Krótko-czasowa transformata Fouriera

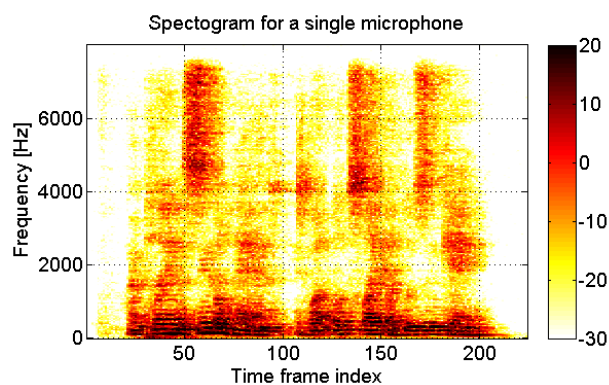


Zastosowanie okna Hanninga



W praktyce z reguły stosujemy zachodzące na siebie okna (np. 50% overlap) by nie utracić informacji z sygnału na granicy okien

Przykład 2: Krótko-czasowa transformata Fouriera - spektrogram



Widmo okna

Widmo okna obliczone przy pomocy DFT jest dane równaniem

$$\hat{win}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} win(n) w^{kn}$$

Okno z nośnikiem zwartym

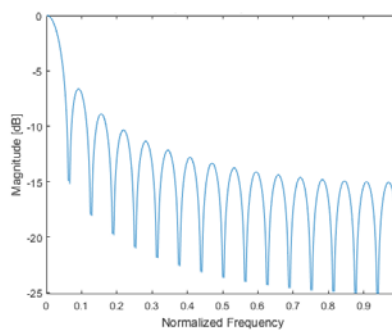
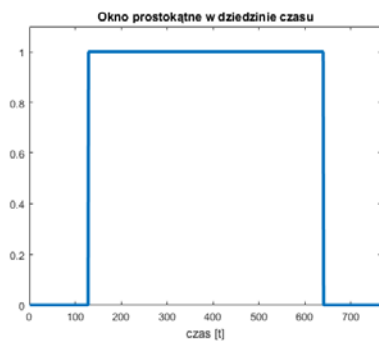
$$win(n) = 0 \quad \text{gdy} \quad |n\Delta T| > T_{win}$$

a długość $2T_{win}$ jest nazywana rozmiarem okna

Okno prostokątne

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t - a_0| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{dla } |t - a_0| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

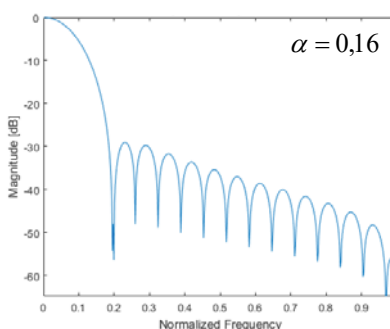
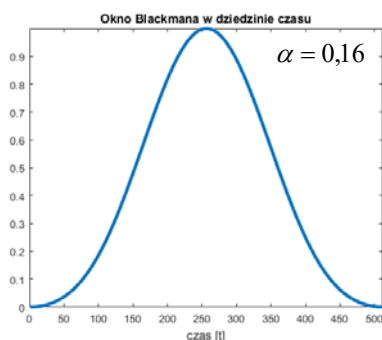
gdzie T - szerokość okna
 a_0 - środek okna



Okno Blackmana

$$w(t) = \alpha_0 - \alpha_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right)$$

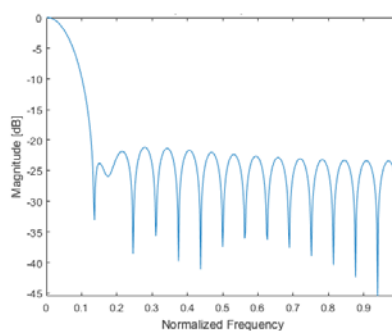
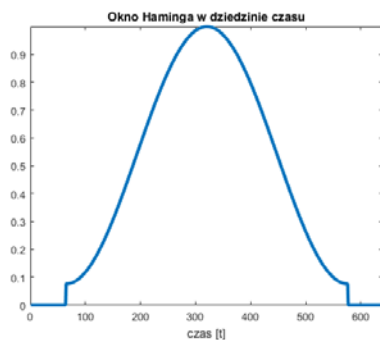
gdzie $\alpha_0 = \frac{1-\alpha}{2}$ $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ $\alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$



Okno Hamminga

$$w(t) = \begin{cases} \alpha - \beta \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & \text{dla } |t - a_0| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{dla } |t - a_0| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

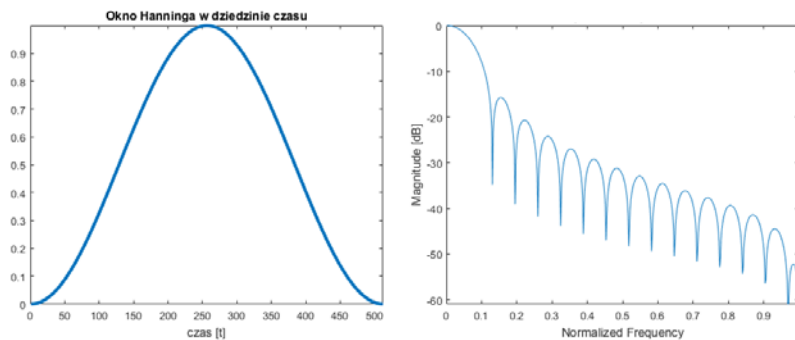
gdzie $\alpha = 0,538$
 $\beta = 0,462$



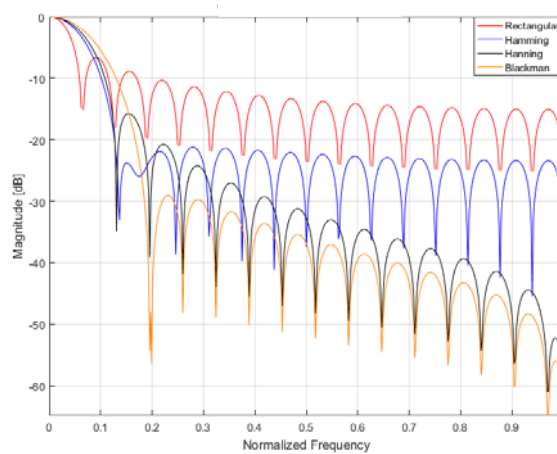
Okno Hanninga (Hanna)



$$w(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2 \pi t}{T} \right) \right) = \sin^2 \left(\frac{\pi t}{T} \right)$$



Porównanie charakterystyk częstotliwościowych różnych okien cyfrowych



Widmo sygnału wyciętego przez okno

Sygnał $s(n)$ pomnożony przez okno $win(t)$ posiada widmo zależne zarówno od widma sygnału (**bardzo dobrze!**) jak i widma zastosowanego okna (**bardzo źle!**)

Widmo iloczynu dwóch sygnałów (w dziedzinie czasu)

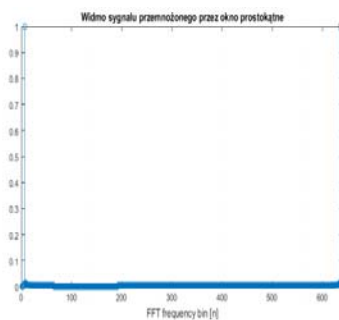
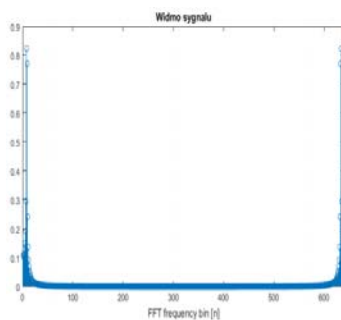
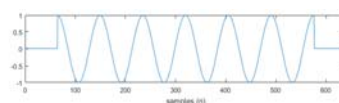
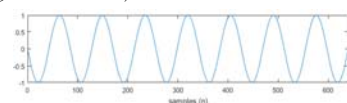
$$s_{win}(n) = s(n)win(n)$$

jest równe splotowi ich widm, czyli

$$\hat{s}_{win}(f) = \hat{s}(f) \otimes \hat{win}(f)$$

Przykład 3: Zastosowanie okna prostokątnego do sygnału sinusoidalnego

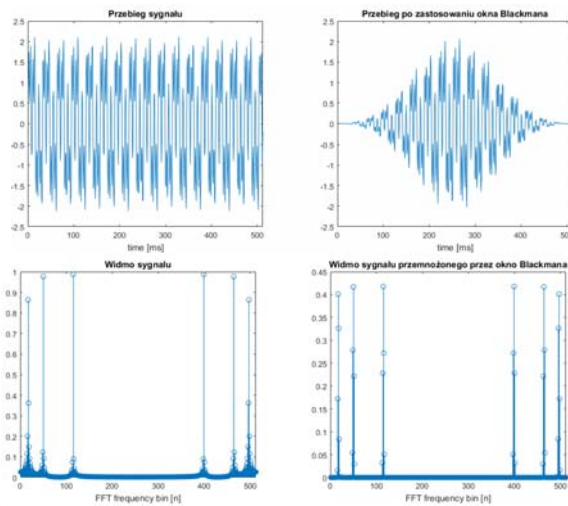
Okno o długości będącej niecałkowitą oraz całkowitą liczbą okresów sinusoidy



Przykład 4: Zastosowanie okna Blackmana

Sygnał wejściowy i sygnał przemnożony przez okno

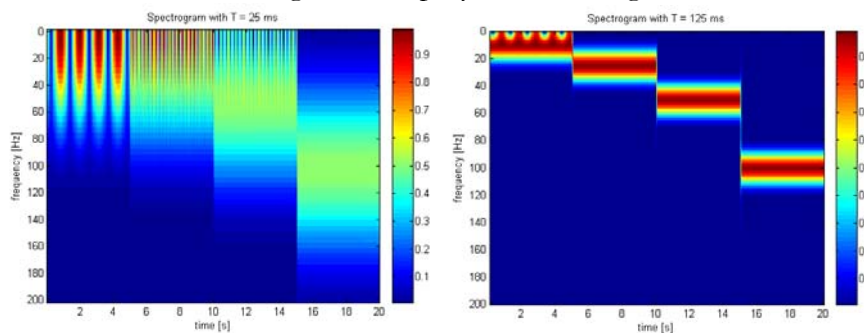
Widmo amplitudowe sygnału bez i po zastosowaniu okna Blackmana



Przykład 5: Zmiana długości okna w analizie krótkoczasowej Fouriera

Sygnał $s(t)$ składa się z 4 funkcji sinusoidalnych o częstotliwościach: 10, 25, 50, 100 Hz w kolejnych interwałach czasowych o długości 5 sekund.

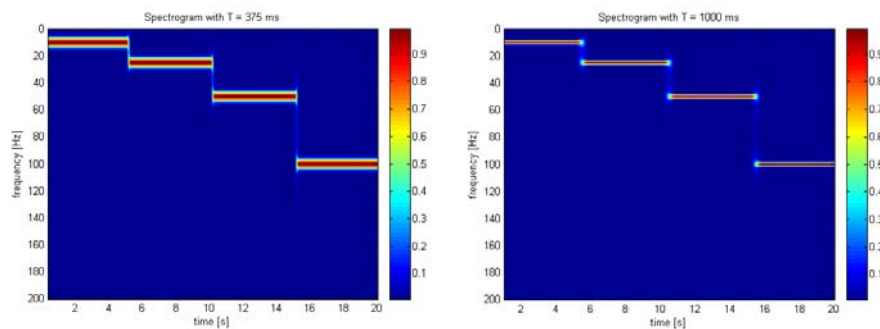
Efekt obserwowanego widma przy zmianie długości okna.



Przykład 5: Zmiana długości okna



Efekt obserwowanego widma przy zmianie długości okna.



https://en.wikipedia.org/wiki/Short-time_Fourier_transform
www.agh.edu.pl

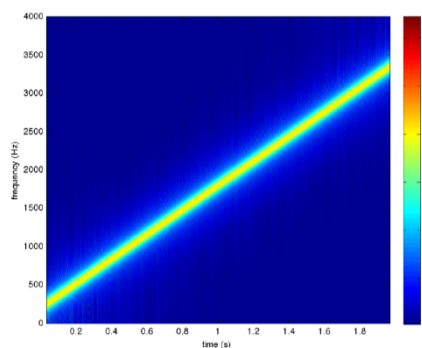
19

Przykład 6: Stosowanie różnych okien

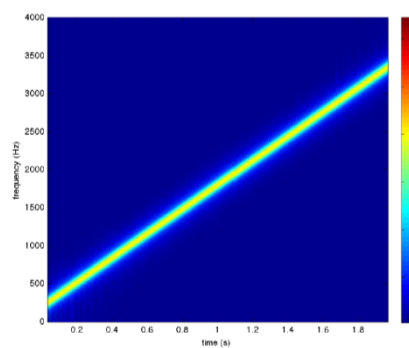


Widmo dla funkcji chirp po transformacji STFT przy użyciu:

okna prostokątnego



okna parametrycznego



www.agh.edu.pl

20