Szybka Transformacja Fouriera

(ang. Fast Fourier Transform - FFT)

Spis treści

1. Nieefektywność obliczeniowa DFT
2. Usprawnienia zaproponowane przez Cooley'a i Tukey'a
3. Szybka transformacja Fourier'a
4. Porównanie efektywności DFT i FFT

Cechy charakterystyczne procedury obliczeniowej DFT

Obliczenia DFT można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \hat{s}(0) \\ \hat{s}(1) \\ \hat{s}(2) \\ \hat{s}(3) \\ \hat{s}(4) \\ \hat{s}(5) \\ \hat{s}(6) \\ \hat{s}(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \rightarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \nwarrow & \uparrow & \nearrow \\ \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow \\ \rightarrow & \swarrow & \uparrow & \searrow & \leftarrow & \nearrow & \downarrow & \nwarrow \\ \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & \nwarrow & \downarrow & \nearrow & \leftarrow & \searrow & \uparrow & \swarrow \\ \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow \\ \rightarrow & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \leftarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \\ s(3) \\ s(4) \\ s(5) \\ s(6) \\ s(7) \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\searrow = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}} \qquad \swarrow = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}} \qquad \nwarrow = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}} \qquad \nearrow = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}}$$

Przykład dublowania obliczeń

Obliczenia DFT można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \hat{s}(0) \\ \hat{s}(1) \\ \hat{s}(2) \\ \hat{s}(3) \\ \hat{s}(4) \\ \hat{s}(5) \\ \hat{s}(6) \\ \hat{s}(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \rightarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \nwarrow & \uparrow & \nearrow \\ \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow \\ \rightarrow & \swarrow & \uparrow & \searrow & \leftarrow & \nearrow & \downarrow & \nwarrow \\ \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & \nwarrow & \downarrow & \nearrow & \leftarrow & \searrow & \uparrow & \swarrow \\ \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow \\ \rightarrow & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \leftarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \\ s(3) \\ s(4) \\ s(5) \\ s(6) \\ s(7) \end{bmatrix}$$

Wynika stąd

$$\hat{s}(0) = s(0) + s(2) + s(4) + s(6) + \big(s(1) + s(3) + s(5) + s(7)\big)$$

$$\hat{s}(4) = s(0) + s(2) + s(4) + s(6) - \big(s(1) + s(3) + s(5) + s(7)\big)$$

Przykład dublowania obliczeń

Obliczenia DFT można zapisać w postaci macierzowej

$$
\begin{bmatrix} \hat{s}(0) \\ \hat{s}(1) \\ \hat{s}(2) \\ \hat{s}(3) \\ \hat{s}(4) \\ \hat{s}(5) \\ \hat{s}(6) \\ \hat{s}(7) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\
\rightarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \nwarrow & \uparrow & \nearrow \\
\rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow \\
\rightarrow & \swarrow & \uparrow & \searrow & \leftarrow & \nearrow & \downarrow & \nwarrow \\
\rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow \\
\rightarrow & \nwarrow & \downarrow & \nearrow & \leftarrow & \searrow & \uparrow & \swarrow \\
\rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow \\
\rightarrow & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \leftarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \\ s(3) \\ s(4) \\ s(5) \\ s(6) \\ s(7) \end{bmatrix}
$$

Wynika stąd

$$\hat{s}(2) = s(0) - s(2) + s(4) - s(6) + j\big(-s(1) + s(3) - s(5) + s(7)\big)$$

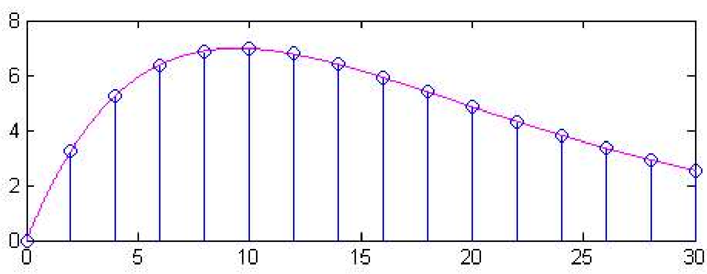
$$\hat{s}(6) = s(0) - s(2) + s(4) - s(6) - j\big(-s(1) + s(3) - s(5) + s(7)\big)$$

Nakład obliczeniowy dla dyskretnej transformacji Fouriera

Dyskretne widmo jest obliczane przy pomocy wzoru

$$\boxed{\hat{s}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)\, w_N^{kn}} \qquad \text{gdzie} \qquad w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$2N^2$ mnożeń bo: jest N składników sumy (ze względu na n), jest N równań (ze względu na k) i są to mnożenia liczb rzeczywistych przez zespolone (stąd 2).



Cooley i Tukey 1965 rok

Dla poprawy efektywności, przeprowadźmy obliczenia osobno dla próbek o numerach parzystych i osobno o numerach nieparzystych. Otrzymamy

$$\hat{s}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) w_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} s(2n) w_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} s(2n+1) w_N^{(2n+1)k}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} s(2n) w_{N/2}^{kn} + w_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} s(2n+1) w_{N/2}^{kn}$$

$$\boxed{\hat{s}(k) = \hat{s}_p(k) + w_N^k \hat{s}_n(k)} \quad \text{dla} \quad k \in \{0,1,\ldots,N/2-1\}$$

gdzie $w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ natomiast $w_N^2 = w_{N/2} = e^{-j\frac{4\pi}{N}}$

A co z wartościami dla $k \in \{N/2,\ldots,N-1\}$?

Okresowość widm dyskretnych

Otrzymaliśmy $\boxed{\hat{s}(k) = \hat{s}_p(k) + w_N^k \hat{s}_n(k)}$

Widma zarówno dla próbek o numerach parzystych jak i nieparzystych są funkcjami okresowymi, tzn.

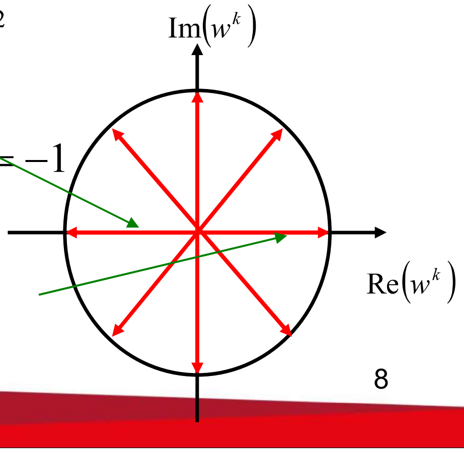
$$\begin{cases} \hat{s}_p(k) = \hat{s}_p(k - N/2) \\ \hat{s}_n(k) = \hat{s}_n(k - N/2) \end{cases}$$

Dodatkowo zauważmy, że

$$w_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}k} e^{j\pi} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-N/2)} = -w_N^{k-N/2}$$

A więc $\boxed{w_N^k = -w_N^{k-N/2}}$

Na przykład dla $k = 8$ i $N = 8$ $\begin{cases} w_N^{k-N/2} = -1 \\ w_N^k = 1 \end{cases}$



Wzór wynikający z okresowości funkcji dyskretnych

Z warunków

$$\begin{cases} \hat{s}_p(k) = \hat{s}_p(k - N/2) \\ \hat{s}_n(k) = \hat{s}_n(k - N/2) \end{cases} \quad \text{oraz} \quad w_N^k = -w_N^{k-N/2}$$

wynika, że

$$\boxed{\hat{s}(k) = \hat{s}_p(k) + w_N^k \hat{s}_n(k)}$$

co jest równoważne

$$\boxed{\hat{s}(k) = \begin{cases} \hat{s}_p(k) + w_N^k \hat{s}_n(k) & \text{dla} \quad k = 0,1,\ldots,N/2-1 \\ \hat{s}_p(k - N/2) - w_N^{k-N/2} \hat{s}_n(k - N/2) & \text{dla} \quad k = N/2,\ldots,N-1 \end{cases}}$$

Efektywność algorytmu

Liczba mnożeń w otrzymanym wzorze

$$\boxed{\hat{s}(k) = \begin{cases} \hat{s}_p(k) + w_N^k \hat{s}_n(k) & \text{dla} \quad k = 0,1,\ldots,N/2-1 \\ \hat{s}_p(k - N/2) - w_N^{k-N/2} \hat{s}_n(k - N/2) & \text{dla} \quad k = N/2,\ldots,N-1 \end{cases}}$$

wynosi $N^2 + 2N$

bo zarówno $\hat{s}_p(k)$ jak i $\hat{s}_n(k)$ dla $k = 0, 1, \ldots, N/2-1$ wymaga 2x $2(N/2)^2$ mnożeń i dodatkowo trzeba wykonać $4(N/2)$ mnożeń dla $w_N^k \hat{s}_n(k)$ (mnożenie dwóch liczb zespolonych!).

Przedstawiony algorytm jest bardziej efektywny jeśli spełniona jest nierówność

$$2N^2 > N^2 + 2N$$

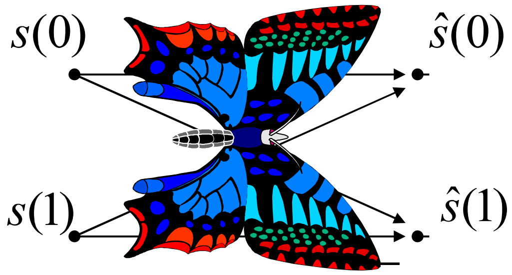
czyli musi być $N > 2$, a przecież tak jest zawsze!

Szybka transformacja Fouriera

ang. **F**ast **F**ourier **T**ransform - FFT

Dla zwiększenia efektywności obliczeń, przedstawiony schemat można zastosować do obliczenia widm dla próbek parzystych i nieparzystych, a również i dalej. Wymaga to dzielenia ilości próbek przez 2. Cooley i Tukey przyjęli $N = 2^M$. Stosując M **-** krotnie podział na próbki o numerach parzystych i nieparzystych, na końcu otrzymujemy dla $N = 2$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{s}(0) &= s(0) + s(1)\\ \hat{s}(1) &= s(0) - s(1)\end{aligned}}$$



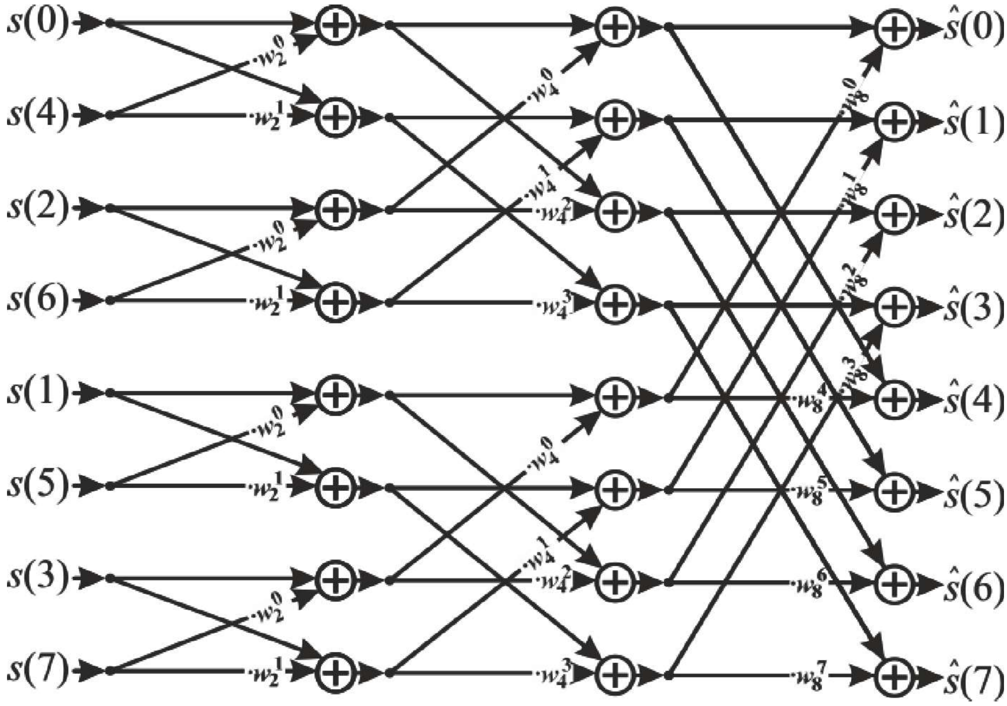
Szybka transformacja Fouriera

ang. **F**ast **F**ourier **T**ransform - FFT

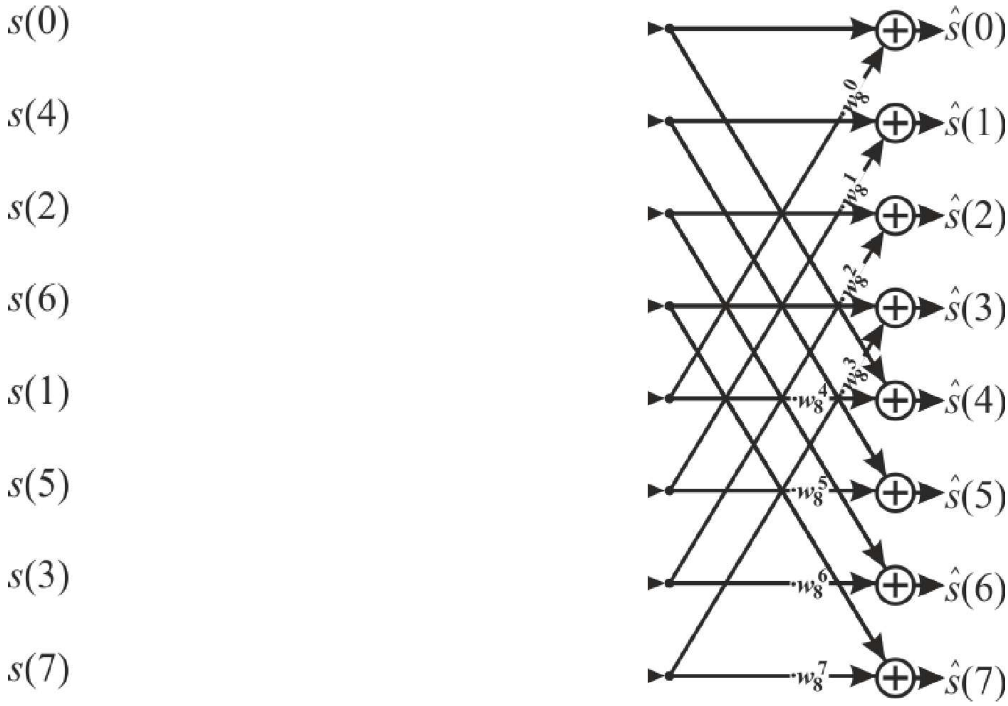
W wyprowadzeniu schematu obliczeń FFT, korzystamy ostatecznie z wzoru

$$\boxed{\hat{s}(k) = \begin{cases} \hat{s}_p(k) + w_N^k \hat{s}_n(k) & \text{dla} \quad k = 0,1,\ldots,N/2-1 \\ \hat{s}_p(k-N/2) + w_N^k \hat{s}_n(k-N/2) & \text{dla} \quad k = N/2,\ldots,N-1 \end{cases}}$$

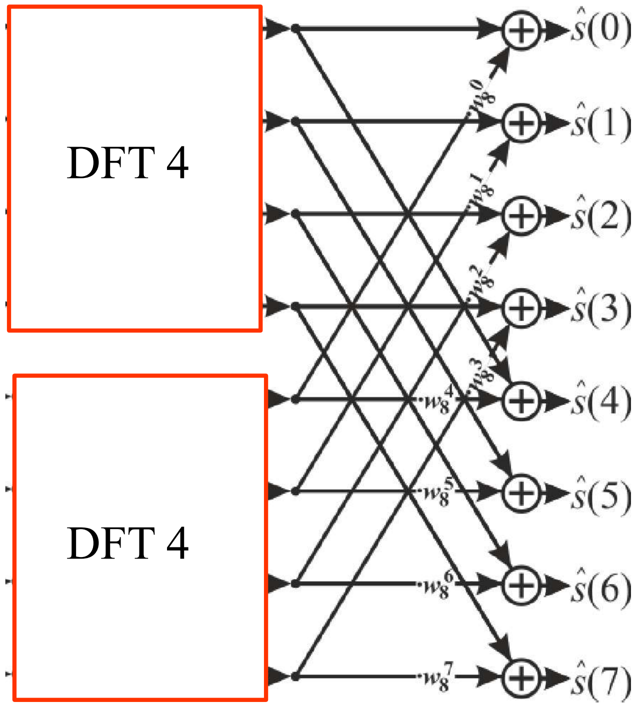
Schemat motylkowy FFT z podziałem próbek w dziedzinie czasu



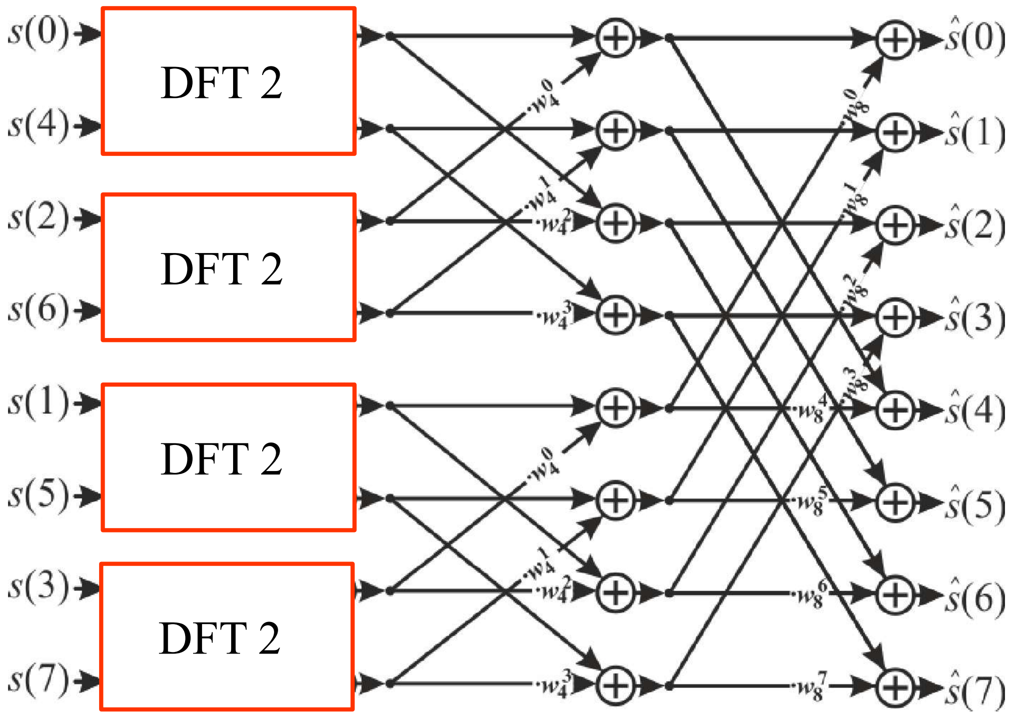
Schemat motylkowy FFT z podziałem próbek w dziedzinie czasu



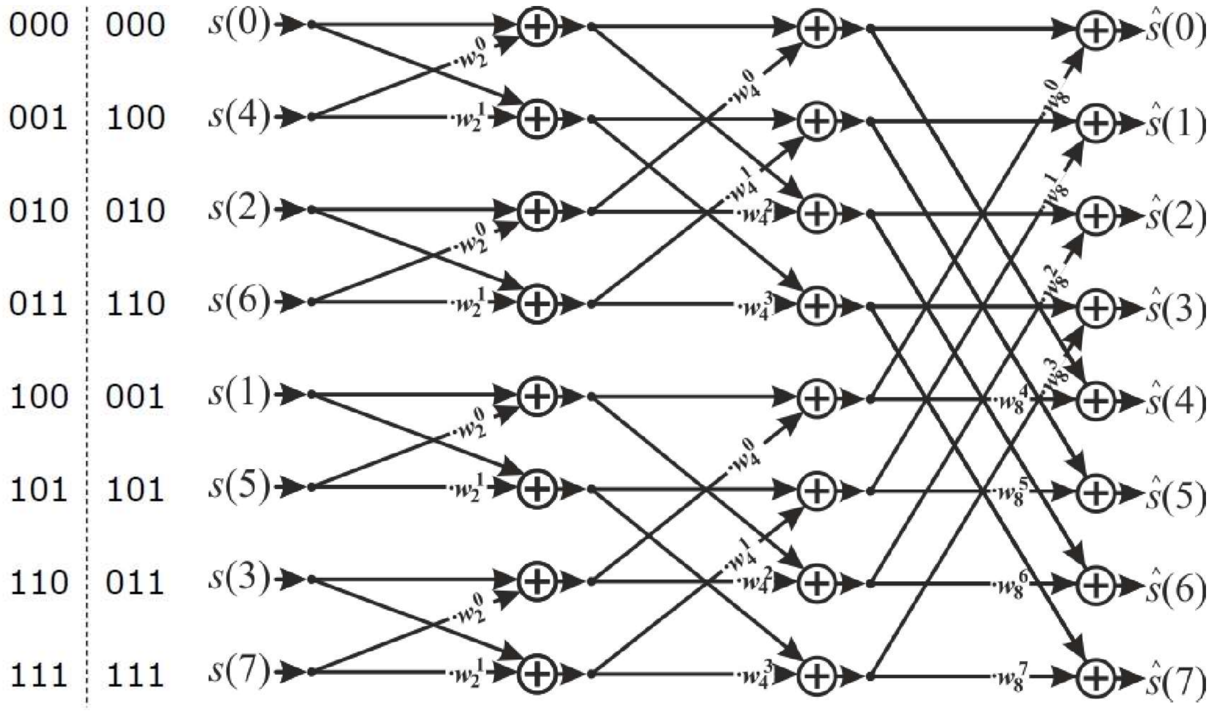
Schemat motylkowy FFT z podziałem próbek w dziedzinie czasu



Schemat motylkowy FFT z podziałem próbek w dziedzinie czasu

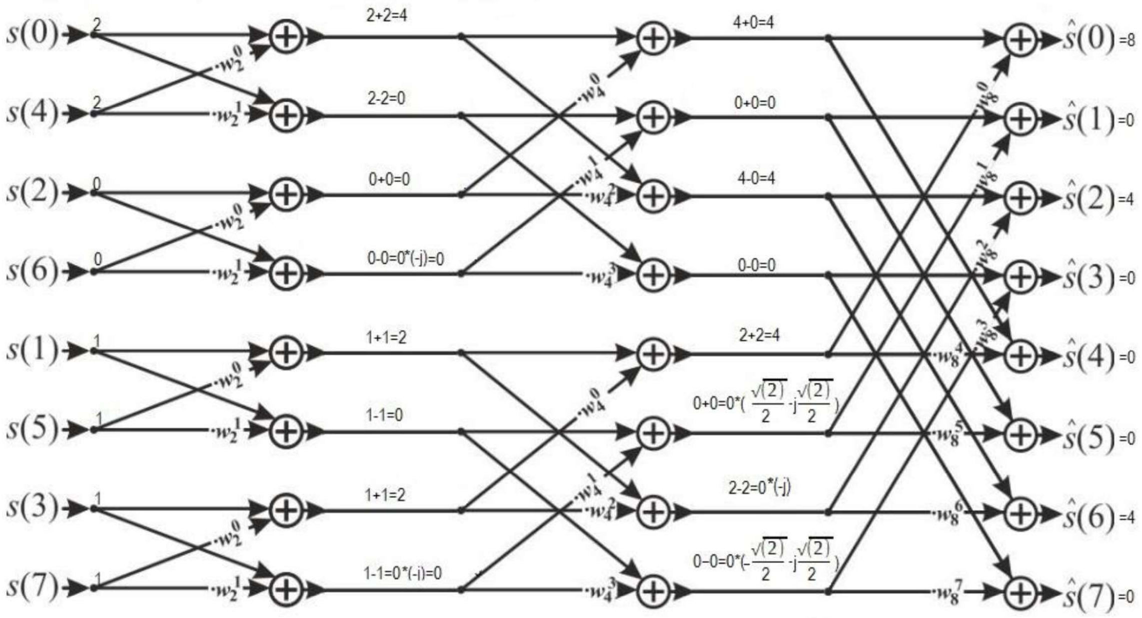


Schemat motylkowy FFT z podziałem próbek w dziedzinie czasu



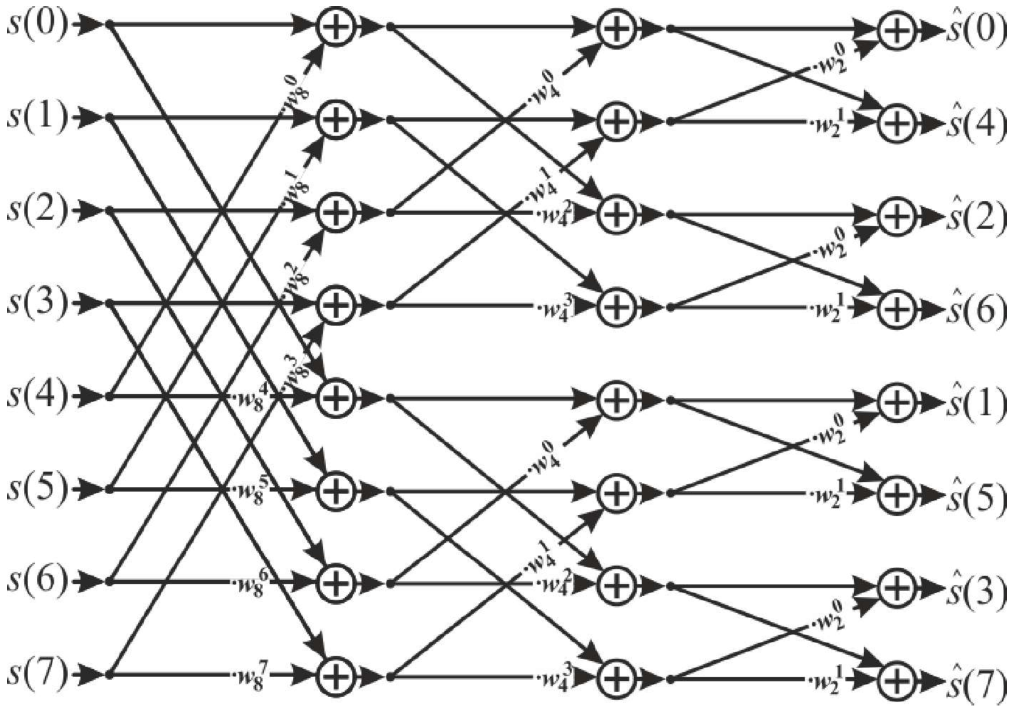
Przykład obliczenia FFT

Oblicz FFT dla następującego sygnału: $s(n) = [2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$

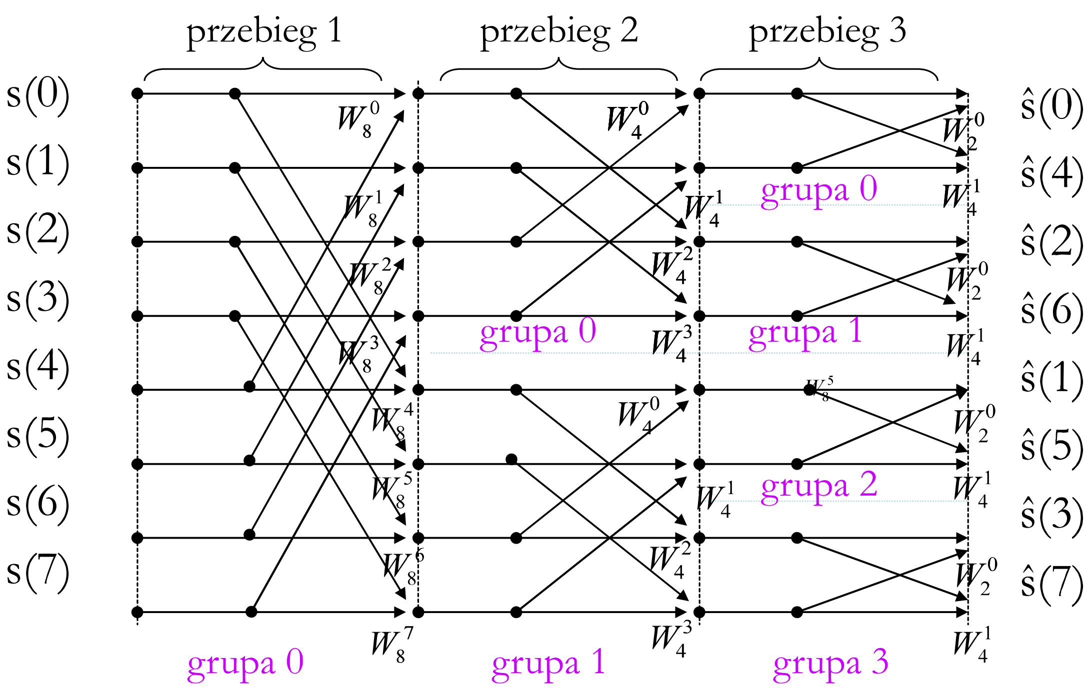


Otrzymane widmo sygnału to: $\hat{s}(k) = [8 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0]$

Schemat motylkowy FFT z podziałem próbek w dziedzinie częstotliwości



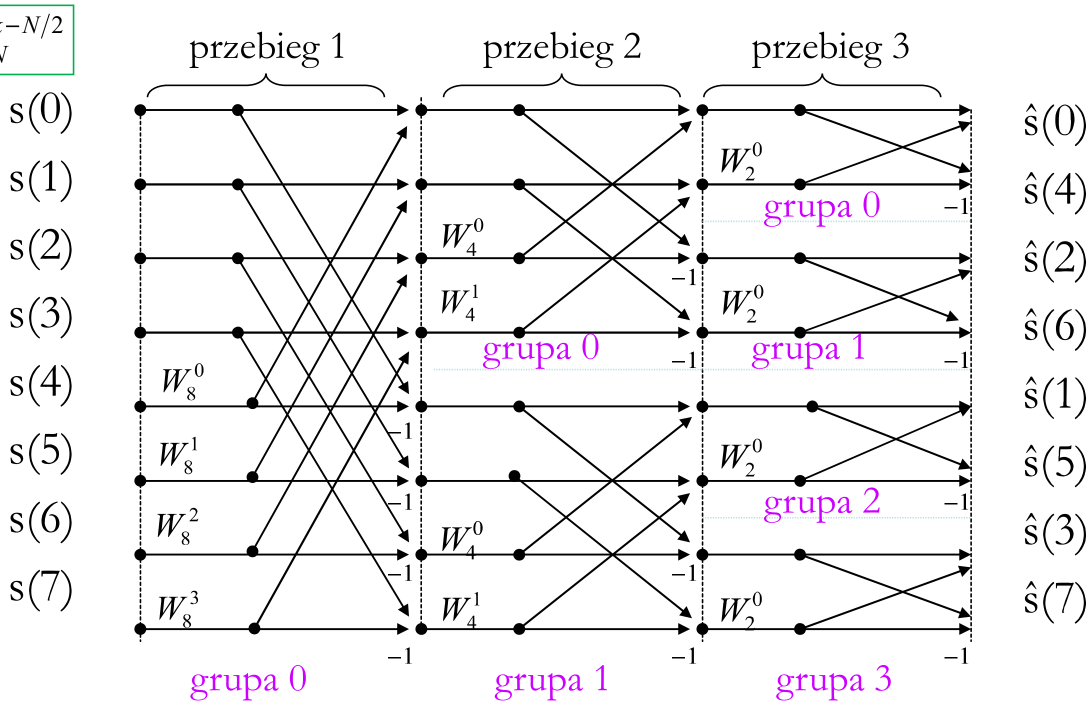
Operacje motylkowe – uproszczenie 1/2



Uprościmy wykorzystując $\boxed{w_N^k = -w_N^{k-N/2}}$

Operacje motylkowe – uproszczenie 2/2

$$\boxed{w_N^k = -w_N^{k-N/2}}$$



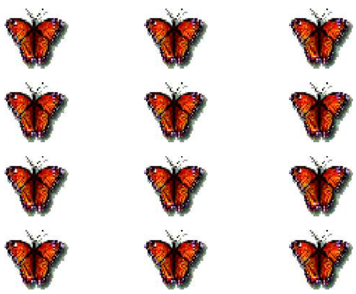
Efektywność operacji motylkowych

Liczba próbek $N = 2^M$.

Poziomów jest $M = \lg_2 N$ a na każdym z nich $N/2$ operacji motylkowych.
Czyli ostatecznie mnożeń (na ogół liczb zespolonych) jest .

$$\boxed{4M\frac{N}{2} = 2N\log_2 N}$$

Reasumując, liczba mnożeń dla dyskretnej transformacji Fouriera jest proporcjonalna do drugiej potęgi ilości próbek, a dla szybkiej transformacji Fouriera proporcjonalna do iloczynu ilości próbek i logarytmu z ilości próbek.



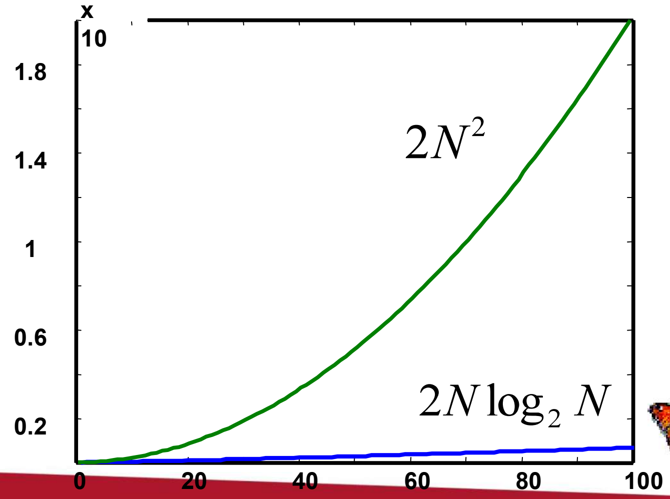
$DFT \sim \mathrm{N}^2$

$FFT \sim N\log_2 N$

Porównanie efektywności DFT i FFT

Liczba mnożeń DFT i FFT dla N próbek

N	4	8	16	32	64	128
$2N^2$	32	128	512	2048	8192	32768
$2N\lg_2 N$	16	48	128	320	768	1792



Metoda: liczenie odwrotnego FFT (Inverse FFT - IFFT)

1) W widmie $\hat{s}(k)$ zamienić miejscami część rzeczywistą i urojoną, otrzymując $\tilde{s}(k)$

2) Obliczyć FFT z $\tilde{s}(k)$ zgodnie z wybranym schematem motylkowym, otrzymując $\bar{s}(n)$ [schemat taki jak dla transformaty FFT]

3) W wyliczonym sygnale $\bar{s}(n)$ zamienić miejscami część rzeczywistą i urojoną oraz

4) Przemnożyć otrzymany sygnał przez 1/N, otrzymując wynikowy sygnał w dziedzinie czasu $s(n)$

Przykład zadania znajduje się w załączonych materiałach.