

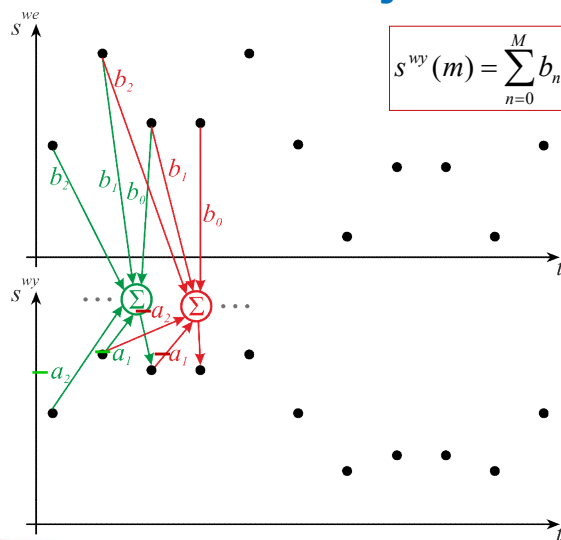
# **FILTRY O NIESKOŃCZONEJ ODPOWIEDZI IMPULSOWEJ - IIR**

ang. Infinite Impulse Response (IIR)

## **Spis treści**

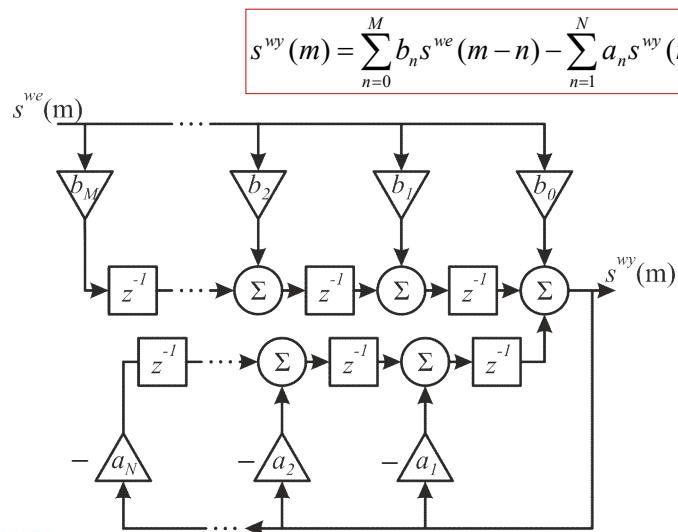
1. Definicja filtru IIR
2. Stabilność filtrów IIR
3. Metody projektowania filtrów IIR
4. Przykład
5. Dwuwymiarowe filtry rekursywne
6. Optymalizacyjna metoda projektowania filtrów 2-D IIR

## Definicja filtru IIR



$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^M b_n s^{we}(m-n) - \sum_{n=1}^N a_n s^{wy}(m-n)$$

## Definicja filtru IIR



$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^M b_n s^{we}(m-n) - \sum_{n=1}^N a_n s^{wy}(m-n)$$

## Transmitancja filtru IIR



$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^M b_n s^{we}(m-n) - \sum_{n=1}^N a_n s^{wy}(m-n)$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \sum_m s^{wy}(m) z^{-m}$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \sum_n b_n \sum_m s^{we}(m-n) z^{-m} - \sum_n a_n \sum_m s^{wy}(m-n) z^{-m}$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \sum_{n=0}^M b_n \bar{s}^{we}(z) z^{-n} - \sum_{n=1}^N a_n \bar{s}^{wy}(z) z^{-n}$$

$$\bar{s}^{wy}(z) \left[ 1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n} \right] = \bar{s}^{we}(z) \sum_{n=0}^M b_n z^{-n}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = H(z) \bar{s}^{we}(z)$$

## Charakterystyki częstotliwościowe filtrów IIR



$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

$$z = e^{2\pi j \underline{f}}$$

$$H(\underline{f}) = A(\underline{f}) e^{j\theta(\underline{f})}$$

$$\underline{f} = f \Delta t = f / f_p$$

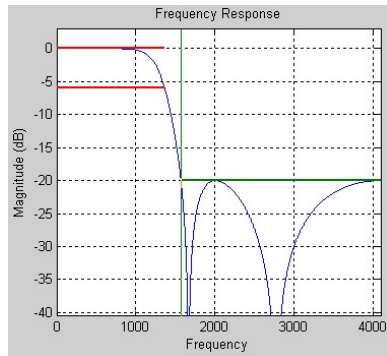
$$H(\underline{f}) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n e^{-2\pi j n \underline{f}}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n e^{-2\pi j n \underline{f}}}$$

$$\theta(\underline{f}) = \arctg \frac{\text{Im}(H(\underline{f}))}{\text{Re}(H(\underline{f}))}$$

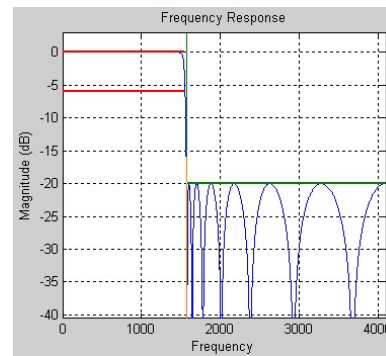
## Przykładowe charakterystyki amplitudowe



### Dolnoprzepustowe filtry Czebyszewa - typ I



Rząd 4

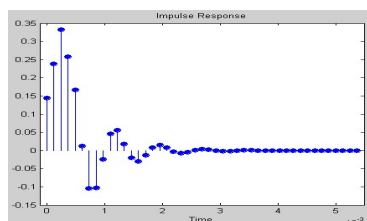
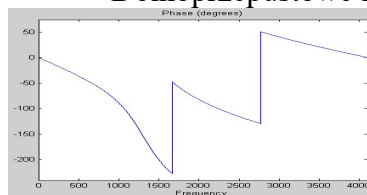


Rząd 14

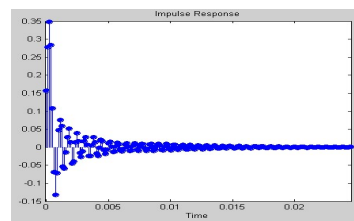
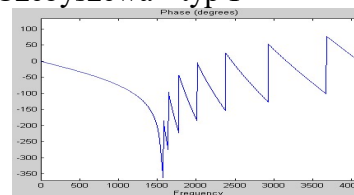
## Przykładowe charakterystyki fazowe i odpowiedzi impulsowe



### Dolnoprzepustowe filtry Czebyszewa - typ I

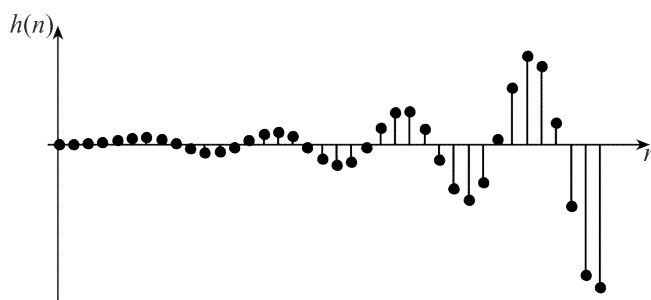


Rząd 4



Rząd 14

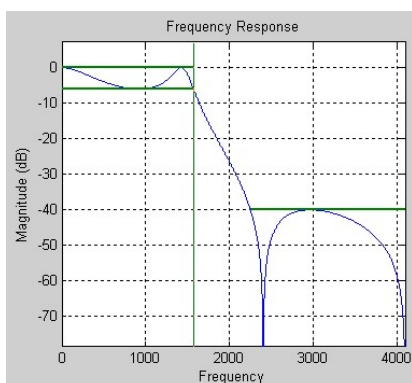
## Odpowiedz impulsowa filtru niestabilnego



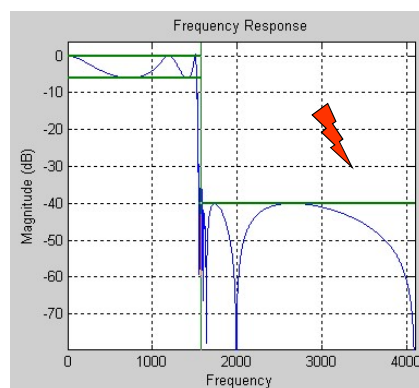
## Przykładowe charakterystyki amplitudowe



### Dolnoprzepustowy filtr eliptyczny

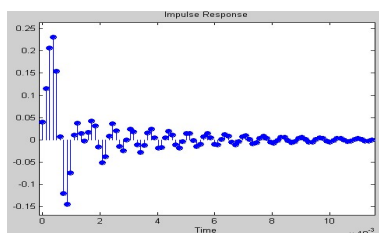
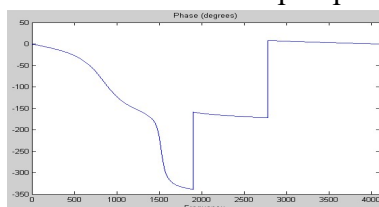


Rząd 3

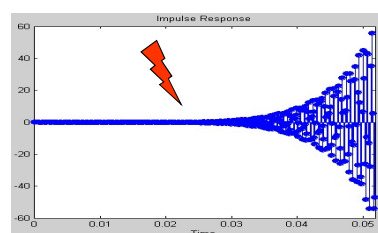
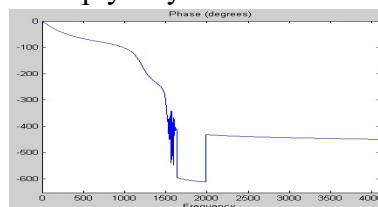


Rząd 21 - niestabilny !!!

## Przykładowe charakterystyki fazowe oraz odpowiedzi impulsowe Dolnoprzepustowy filtr eliptyczny



Rząd 3



Rząd 21 - niestabilność !!!

11

## Definicja stabilności filtru IIR



Filtr IIR jest **stabilny** jeżeli istnieją ograniczone stałe

$$c_1 > 0$$

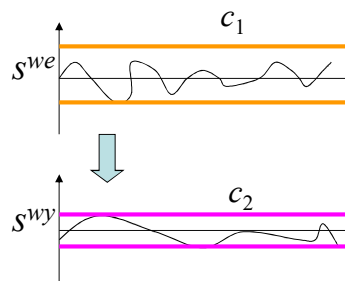
$$c_2 > 0$$

takie, że z warunku

$$\|s^{we}\| \leq c_1$$

wynika

$$\|s^{wy}\| \leq c_2$$



Na ogół przyjmujemy  $\|s\| = \max_m |s(m)|$

12

## Definicja asymptotycznej stabilności



Filtr IIR jest *asymptotycznie stabilny* jeżeli

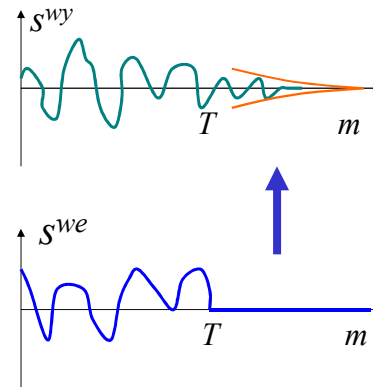
$$\lim_{m \rightarrow \infty} s^{wy}(m) = 0$$

gdy

$$s^{we}(m) = 0$$

dla wszystkich

$$m \geq T.$$



## Twierdzenie o stabilności filtrów IIR



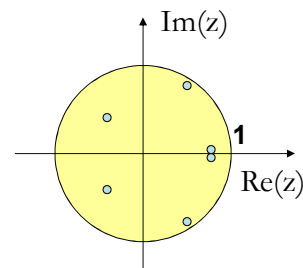
$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

Filtr IIR jest asymptotycznie stabilny *wtedy i tylko wtedy*,  
gdy wszystkie zera wielomianu charakterystycznego

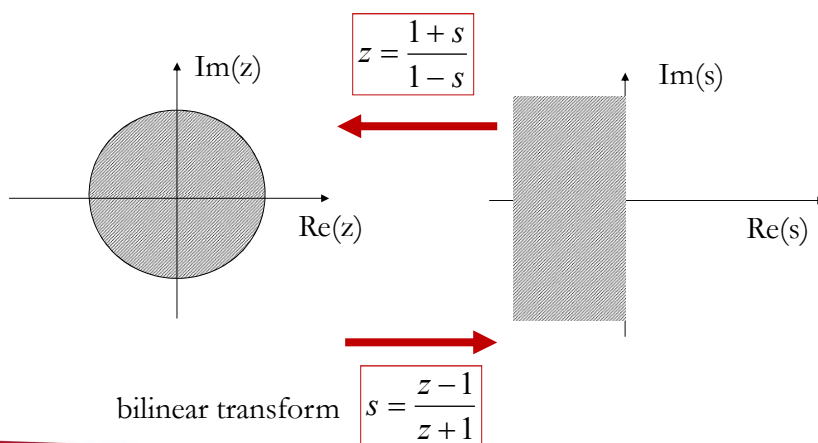
$$P(z) = z^N + \sum_{n=1}^N a_n z^{N-n}$$

leżą wewnątrz koła jednostkowego, tzn.

$$|z_n| < 1 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots, N.$$



## Graficzna interpretacja przekształcenia koła jednostkowego w lewą półpłaszczyznę



## Twierdzenie o przekształceniu warunków stabilności Schura na warunki stabilności Hurwitza



Dla przekształceń

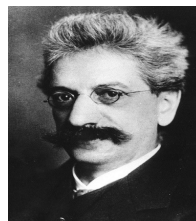
$$z = \frac{1+s}{1-s}$$

$$s = \frac{z-1}{z+1}$$

warunek  $|z| < 1$

jest równoważny nierówności  $\text{Re}(s) < 0$ .

**Issai Schur**  
(1875 – 1941)



**Adolf Hurwitz**  
(1859 – 1919)



## Twierdzenie o przekształceniu warunków stabilności Schura na warunki stabilności Hurwitza

Dla przekształceń

$$z = \frac{1+s}{1-s}$$

$$s = \frac{z-1}{z+1}$$

warunek  $|z| < 1$

jest równoważny nierówności  $\operatorname{Re}(s) < 0$ .

*Dowód :*

$$|z| = \left| \frac{1+s}{1-s} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{|1+s|}{|1-s|} < 1 = \frac{|1-s|}{|1-s|} \quad \Rightarrow \quad |1+s| < |1-s|$$

$$\sqrt{(1+\operatorname{Re}(s))^2 + \operatorname{Im}^2(s)} < \sqrt{(1-\operatorname{Re}(s))^2 + \operatorname{Im}^2(s)}$$

$$(1+\operatorname{Re}(s))^2 + \operatorname{Im}^2(s) < (1-\operatorname{Re}(s))^2 + \operatorname{Im}^2(s)$$

$$1 + 2\operatorname{Re}(s) + \operatorname{Re}^2(s) + \operatorname{Im}^2(s) < 1 - 2\operatorname{Re}(s) + \operatorname{Re}^2(s) + \operatorname{Im}^2(s)$$

$$4\operatorname{Re}(s) < 0$$

## Twierdzenie o wielomianowej stabilności typu Hurwitza

$$P\left(z = \frac{1+s}{1-s}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^N c_n s^n = 0$$

Wszystkie pierwiastki wielomianu

$$P(s) = \sum_{n=0}^N c_n s^n$$

z dodatnimi współczynnikami, tzn.

$$c_n > 0$$

mają ujemne części rzeczywiste **wtedy i tylko wtedy**, gdy wszystkie minory wiodące wyznacznika  $\Delta_N$  są większe od zera.

## Definicja minorów wiodących wyznacznika

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} c_{N-1} & c_N & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{N-3} & c_{N-2} & c_{N-1} & c_N & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{N-5} & c_{N-4} & c_{N-3} & c_{N-2} & c_{N-1} & c_N & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \end{vmatrix}$$

Trzy pierwsze minory:

$$\Delta_1 = c_{N-1} > 0$$

$$\Delta_2 = c_{N-1}c_{N-2} - c_Nc_{N-3} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{N-1} & c_N & 0 \\ c_{N-3} & c_{N-2} & c_{N-1} \\ c_{N-5} & c_{N-4} & c_{N-3} \end{vmatrix} > 0$$

## Przykładowe zadania tablicowe:

1. odpowiedź impulsowa filtrów typu IIR
2. stabilność filtrów typu IIR
3. charakterystyka częstotliwościowa filtrów typu IIR