Индивидуальное ДЗ по курсу "Методы оптимизации"
Выполнила студентка группы М8О-201Б Чапаида М.Д

Вариант №26

Задание:

| Вариант #26 | Этап №3. Тема: Методы решения ЗЛП |
|---|---|
| $f(x) = -4x_1 + x_2 \to extr$ | Задание: |
| 1) $x_1 + 2x_2 \le 6$ <br> $2x_1 - x_2 \le 2$ <br> $x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$ | а) Найти максимум в задачах 1 и 2 графически |
| 2) $f(x) = x_1 - 5x_2 \to extr$ <br> $-x_1 + x_2 \ge 3$ <br> $4x_1 - x_2 \le 4$ <br> $x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0$ | б) Найти симплекс-методом в задаче 1 и минимум во задаче 2 |

## 3. Методы решения задачи линейного программирования

Задание а). Пример 1.

Дано: $f(x) = -4x_1 + x_2 \to extr$

$x_1 + 2x_2 \le 6 \quad (1)$

$2x_1 - x_2 \le 2 \quad (2)$

$x_1, x_2 \ge 0 \quad (3)$

Найти решение задачи графически

Решение:

1) Для графического решения задачи построим множество допустимых решений, задаваемое ограничениями (1) - (3).

Ограничение (1) в задаче определяется прямой $x_1 + 2x_2 = 6$, проходящей через точки:

| $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 6 | 0 |

Множество допустимых решений в задаче будет ограничено этой прямой и будет содержать точку (0,0), так как при подстановке координат этой точки в ограничение (1) получится верное неравенство: $0+0 \leq 6$.

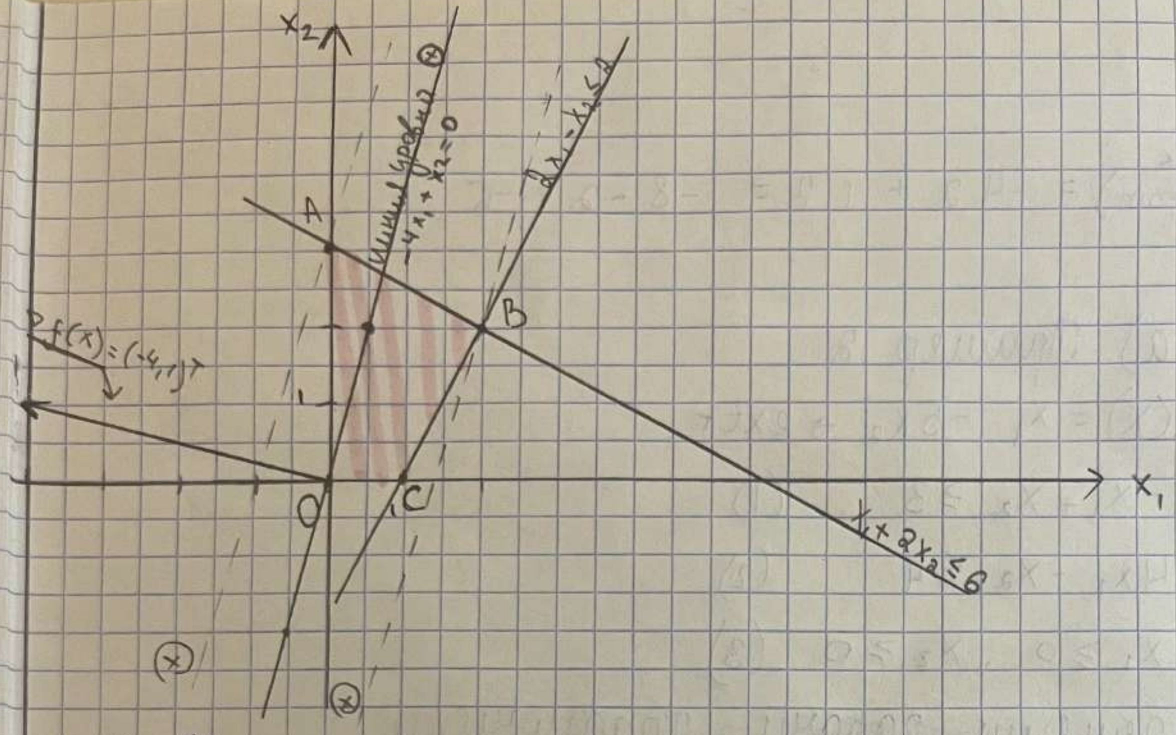
Ограничение (2) в задаче определяется прямой $2x_1 - x_2 \leq 2$, проходящей через точки:

| $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | -2 |

Множество допустимых решений в задаче будет ограничено этой прямой и будет содержать точку (0,0), так как при подстановке координат этой точки в ограничение (1) получится верное неравенство: $-0-0 \leq 2$

Ограничения (3) в задаче задают I четверть координатной плоскости.

Множество допустимых решений включает все точки в которых ограничения выполняются одновременно. Отметим крайние точки получившегося множества: O, A, B, C.




2) Построим градиент функции $\nabla f(X) = \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ в точке (0, 0)

3) Построим линию уровня функции $f(X) = C$, проходящую через точку (0,0). Для этого найдем значение константы C, подставив координаты в целевую функцию: $C = -4 \cdot 0 + 0 = 0$ и затем построим прямую $-4x_1 + x_2 = 0$. Заметим, что построенная прямая перпендикулярна градиенту.

Построенная линия уровня пересекает МДР, отметим ее ⊕

4) Будем искать точку минимума функции как последнюю точку касания линии уровня и множества допустимых решений при параллельном переносе линии ⊕ в направлении градиента функции. Как видно из чертежа это точка $A = (0, 3)$. Таким образом, получено решение задачи поиска максимума функции:

$x_1^* = 0$

$x_2^* = 3$

$f(A) = f(X^*_{max}) = -4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$

Будем искать точку минимума функции как последнюю точку касания линии уровня и множества допустимых решений при параллельном переносе линии ⊕ в направлении противоположном градиенту функции. Как видно из чертежа, это точка $B = (2, 2)$. Таким образом, получено решение задачи поиска минимума функции:

$x_1^* = 2$

$x_2^* = 2$

$f(C) = f(x^*_{min}) = -4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = -8 + 2 = -6$

Задание а). Пример 2.

Дано: $f(X) = x_1 - 5x_2 \rightarrow extr$

$-x_1 + x_2 \geq 3$ (1)

$4x_1 - x_2 \leq 4$ (2)

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (3)

Найти решение задачи графически

Решение:

1) Для графического решения задачи построим множество допустимых решений, задаваемое ограничениями (1) - (3)

Ограничение (1) в задаче задается прямой $-x_1 + x_2 = 3$, проходящей через точки:

| $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|
| 0 | 3 |
| -3 | 0 |

Ограничение (2) в задаче задается прямой $4x_1 - x_2 = 4$, проходящей через точки:

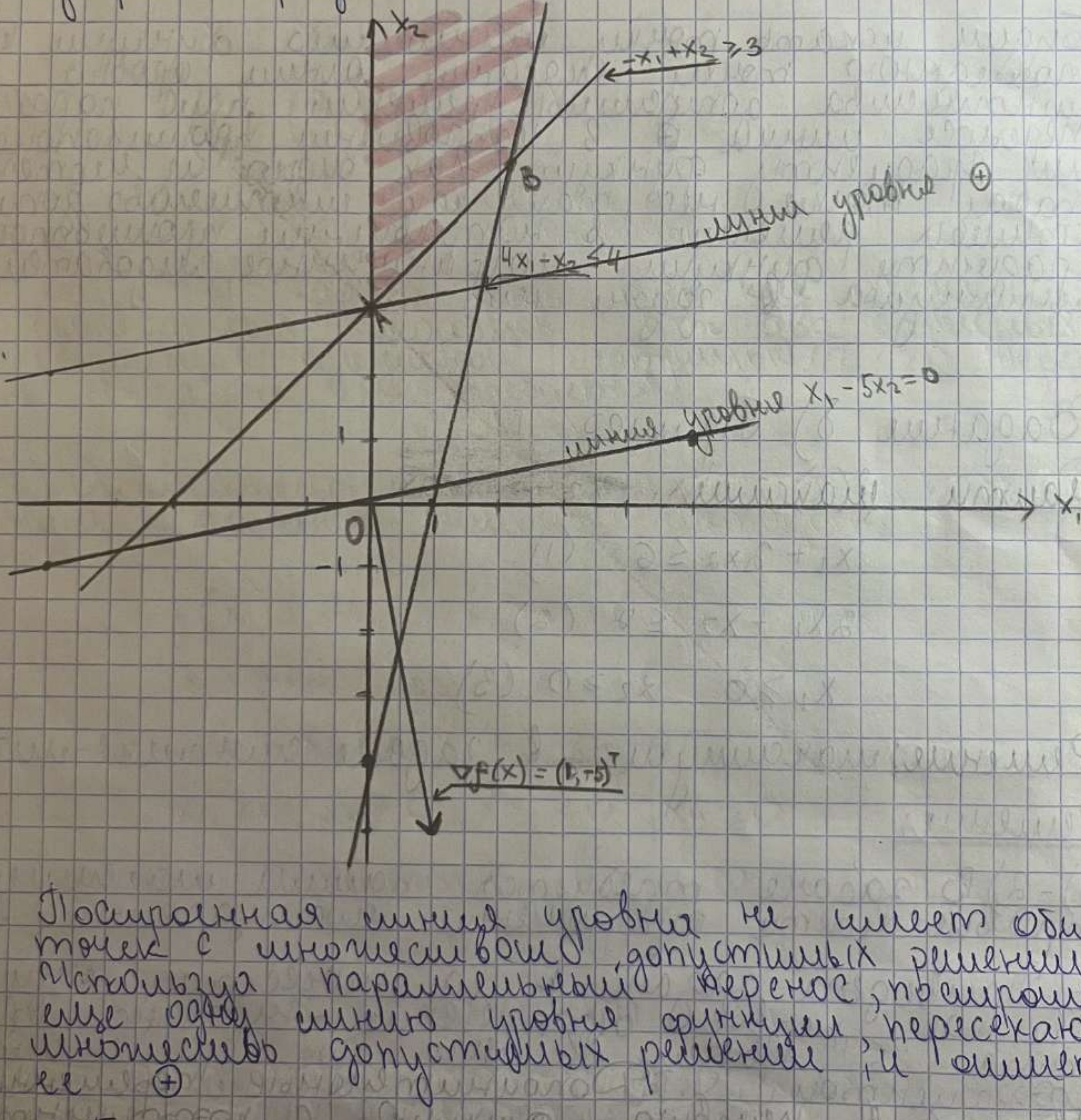
| $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | -4 |

Множество допустимых решений будет содержать точку (0,0), так как при подстановке получается верное неравенство: $4 \cdot 0 - 0 \leq 4$.

Ограничения (3) в задаче зададут I четверть координатной плоскости.

2) Построим градиент функции $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ в точке (0,0)

3) Построим линию уровня функции $f(x) = C$, проходящую через точку (0,0). Для этого найдём значение константы C, подставим координаты в целевую функцию: $C = 0 - 5 \cdot 0 = 0$, и затем построим прямую $x_1 - 5x_2 = 0$. Заметим, что построенная прямая перпендикулярна градиента.




Построенная линия уровня не имеет общих точек с множеством допустимых решений. Используя параллельный перенос, построим еще одну линию уровня функции, пересекающую множество допустимых решений, и отметим ее.

4) Будем искать точку максимума функции как последнюю точку касания линии уровня функции как последнюю точку касания линии уровня функции и множества допустимых

решений при параллельном переносе линии ⊕ в направлении градиента функции: как видно из чертежа, это точка $A = (0,3)$,
Таким образом получено решение задачи поиска максимума:

$x_1^* = 0$,

$x_2^* = 3$

$f(A) = 0 - 5 \cdot 3 = -15 = f(x^*_{min})$

Будем искать точку минимума функции как последнюю точку касания линии уровня и множества допустимых решений при параллельном переносе линии ⊖ в направлении, противоположном градиенту функции. Как видно из чертежа, такой точки нет, так как множество допустимых решений в направлении противоположном градиенту функции неограниченное, следовательно, минимума в задаче нет.

Задание б) Пример 1.

<u>Дано:</u> $f(x) = -4x_1 + x_2 \to max$

$x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (1)$

$2x_1 - x_2 \leq 2 \quad (2)$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad (3)$

Найти максимум в задаче симплекс-методом

<u>Решение:</u>

1)-2) В задаче требуется найти максимум, правые части ограничений неотрицательные.

3) Приведем задачу к каноническому виду. Так как первое ограничение – неравенство типа "≤", вводим в него доп. переменную с коэффициентом 1. Так как второе ограничение – неравенство типа "≤", вводим в него доп. переменную с коэффициентом 1.
Дополнительные переменные введем в целевую функцию с коэффициентами, равными нулю.

$$f(x) = -4x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 \to max$$

$$x_1 + 2x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 6$$

$$2x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$x_3, x_4 \geq 0$ – дополнительные переменные

4) Выпишем столбцы при переменных ограничениях:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{базисные столбцы}} & \end{array}$$

Базис в задаче есть, так как среди выписанных столбцов есть два базисных столбцов единичной матрицы $(2 \times 2)$. Перехода к М-задаче не требуется!

6) Окончательно получаем задачу, подготовленную к решению симплекс-методом:

$$f(x) = -4x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 \to max$$

$$x_1 + 2x_2 + \underline{1\cdot x_3} + 0\cdot x_4 = 6$$

$$2x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + \underline{1\cdot x_4} = 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Базисные переменные в задаче:

в I ограничении: $x_3$

во II ограничении: $x_4$

Остальные переменные: $x_1, x_2$ – свободные

Начальное базисное решение:

$$\frac{x_3 = 6 \quad x_4 = 2}{x_1 = 0 \quad x_2 = 0}$$

В исходных переменных $x_1$ $x_2$ это решение соответствует точке $O = (0, 0)$

Проведем вычисления с помощью симплекс-таблицы:

Таблица №1

| | | | -4 | 1 | 0 | 0 | $C_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_Б$ | $Б_П$ | $Б_Р$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $r_i$ |
| 0 | $x_3$ | 6 | 1 | 2 | 1 | 0 | 3 |
| 0 | $x_4$ | 2 | 2 | -1 | 0 | 1 | -2 |
| | | $\Delta$ | -4 | 1 | 0 | 0 | |

⊕-строка

⊕-столбец

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = -4 - \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = -4 - 0 = -4$$

$$\Delta_2 = 1 - \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 1 - 0 = 1$$

Так как $\Delta_2 = \max(\Delta_1, \Delta_2)$ и $\Delta_2 > 0$ то в состав базисных вводится переменная $x_2$ соотв. этой переменной — ⊕-столбец (разреш. столбец)

Вычислим величины $r_i$ как отношения столбца $Б_Р$ к соотв. элементам ⊕-столбца:

$$r_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$r_2 = \frac{2}{-1} = -2$$

Из базиса выводится переменная $x_3$, так как ей соответствует минимальная неотрицательная величина $r_1$, соотв. ей строка — ⊕-строка (разрешающая строка)

На пересечении ⊕-столбца и ⊕-строки находится разрешающий элемент $R = 2$.

Осуществим пересчет таблицы:

· запишем коэф. функции в верхнюю строку новой таблицы №2

· запишем в новую таблицу №2 базисные переменные $x_2$ и $x_4$

· запишем коэф. функции при базисных переменных в первый столбец №2

· пересчитаем ⊕-строку: разделим ⊕ строку на разрешающий элемент, результат запишем в 1-ю строку таблицы №2 – получится строка N;

| ⊕-строка: | 6 | 1 | 2 | 1 | 0 | / (R = 2) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| результат: | 3 | 1/2 | 1 | 1/2 | 0 | |

· пересчитаем оставшуюся строку: умножим строку N на коэф. пересчета – это 2-й элемент ⊕-столбца, равный –1 и вычтем из 2-ой строки таблицы №1, результат запишем во 2-ю строку таблицы №2

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Стр. 2 таблицы №1 – | 2 | 2 | -1 | 0 | 1 |
| Строка N: (KП = –1) | -3 | -1/2 | -1 | -1/2 | 0 |
| результат | -1 | 5/2 | 0 | 1/2 | 1 |

Таблица №2

| | | | -4 | 1 | 0 | 0 | $C_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_{iБ}$ | Бп | Бр | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\Gamma_i$ |
| 1 | $x_2$ | 3 | 1/2 | 1 | 1/2 | 0 | |
| 0 | $x_4$ | -1 | 5/2 | 0 | 1/2 | 1 | |
| | | Δ | -9/2 | 0 | -1/2 | 0 | |

Базисное решение, соотв. таблице №2:

$x_2 = 3$ $x_4 = -1$

$x_1 = 0$ $x_3 = 0$

В исходных переменных это решение соотв. точке $A = (0, 3)^T$

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = -4 - \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\5/2\end{pmatrix}\right) = -4 - \left(\frac{1}{2} + 0\right) = -4 - \frac{1}{2} = -9/2$$

$$\Delta_3 = 0 - \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}\right) = 0 - \left(\frac{1}{2} + 0\right) = -\frac{1}{2}$$

Так как все симплекс-разности в таблице №2 неположительны, вычисления закончены.

Проанализируем получившийся результат: так как при решении не использовались искусственные переменные, то получено решение задачи:

$x_1^* = 0$

$x_2^* = 3$

$x_3^* = 0$

$x_4^* = -1$

Это решение единственное, т.к строка симплекс-разностей таблицы №3 содержит два нулевых значения (по числу ограничений в задаче). Решение исходной задачи получается отбрасыванием доп. переменных: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 3$. Ему соотв. точка $A = (0, 3)$

Ответ: Функция имеет максимум в в точке $A$ с координатами $x_1^* = 0$, $x_2^* = 3$, $f(A) = f(x^*_{max}) = 3$

Задание б) Пример 2.

Дано: $f(x) = x_1 - 5x_2 \to min$

$-x_1 + x_2 \geq 3$ (1)

$4x_1 - x_2 \leq 4$ (2)

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ (3)

Найти минимум в задаче симплекс-методом

9/2

Решение:

Подготовим задачу к решению симплекс-методом

1) Перейдем к задаче поиска максимума, умножив функцию на (-1)

$$f(x) = -x_1 + 5x_2 \to max$$

2) Правые части ограничения неотрицательные

3) Приведем задачу к каноническому виду. Так как первое ограничение типа "≥", введем в него доп. переменную с коэфф. (-1). Так как второе ограничение типа "≤" введем в него доп. переменную с коэф. 1. Дополнительные переменные введем в целевую функцию с коэф., равными нулю.

$$f(x) = -x_1 + 5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to max$$

$$-x_1 + x_2 - 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 3$$

$$4x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$x_3, x_4 \geq 0$ - доп. переменные

4) Выпишем столбцы при переменных в ограничениях

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ |

базисный столбец

Базис в задаче отсутствует, так как среди выписанных нет достаточного количества базисных (столбцов единичной матрицы размеров $(2 \times 2)$)

5) Переходим к М-задаче. Введем в первое ограничение искусственную переменную $x_5 \geq 0$ с коэф. 1, тогда получим новую систему ограничений:

$-x_1 + x_2 - 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 = 3$

$4x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_3, x_4 \geq 0$ – доп. переменные

$x_5 \geq 0$ искусственная

1) Выпишем столбцы при переменных в ограничениях:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{базисные столбцы}} \end{array}$$

Столбцы при переменных $x_4$ и $x_5$ образуют единичную матрицу размеров (2×2) следовательно находим начальный базис в задаче.

Введем искусственную переменную $x_5$ в функцию с коэф. (−M)

$$f(X) = -x_1 + 5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - M \cdot x_5 \to max$$

б) Окончательно получаем задачу, подготовленную к решению симплекс-методом:

$$f(X) = -x_1 + 5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - M \cdot x_5 \to max$$

$-x_1 + x_2 - 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + \underline{1 \cdot x_5} = 3$

$4x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + \underline{1 \cdot x_4} + 0 \cdot x_5 = 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_3, x_4 \geq 0$

$x_5 \geq 0$

Базисные переменные в задаче:

в первом ограничении – $x_5$

во втором ограничении – $x_4$

$x_1, x_2, x_3$ – свободные

Начальное базисное решение:

$x_4 = 4 \qquad x_5 = 3$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 0$

В исходных переменных $x_1, x_2$ это решение соотв. точке $O = (0,0)$. Проведем вычисления с помощью симплекс-таблиц.

Таблица №1

| | | | -1 | 5 | 0 | 0 | -M | $C_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_{iб}$ | Бп | Бр | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $r_i$ |
| -M | $x_5$ | 3 | -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 3 ⊕-стр |
| 0 | $x_4$ | 4 | 4 | -1 | 0 | 1 | 0 | -4 |
| | | Δ | -1-M | M+5 | -M | 0 | 0 | |
| | | | | ⊕столб | | | | |

Вычислим симплекс-разности. В состав базисных вводится переменная $x_2$, так как ей соответствует максимальная положительная величина $\Delta_2$, соотв. этой переменной столбец ⊕-столбец.

Вычислим величины $r_i$. Из базиса выводится переменная $x_5$ т.к. ей соотв. минимальная неотрицательная величина $r_i$, соотв. ей строка ⊕-строка. На пересечении ⊕-столбца и ⊕-строки находится разрешающий элемент $R = 1$

Таблица №2

| | | | -1 | 5 | 0 | 0 | -M | $C_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_{iб}$ | Бп | Бр | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $r_i$ |
| 5 | $x_2$ | 3 | -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | -3 |
| 0 | $x_4$ | 7 | 3 | 0 | -1 | 1 | 1 | -7 |
| | | Δ | 4 | 0 | 5 | 0 | -M-5 | |
| | | | | | ⊕-столб | | | |

Базисное решение, соотв. таблице №2

$x_2 = 3 \qquad x_4 = 7$ соотв. точке $A = (0,3)$

$x_1 = 0 \qquad x_3 = 0$

Проанализируем. Так как среди (4)-столбца нет положительных элементов, то задача не имеет решения вследствие неограниченности множества допустимых решений.

Ответ: задача не имеет решений.