Индивидуальное ДЗ по курсу "Методы оптимизации"
Выполнила студентка группы Ф480-201Б Чапанда М.О
Вариант N26

Вариант N26

$f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \to extr$

при ограничениях: $x_2 \leq 3$

$x_1^2 + x_2 \leq 4$

Этап N2 Тема: Методы решения ЗНП при ограничениях типа неравенства

Задание:

а) Сделать чертеж к задаче: построить ограничения, линии уровня функции функции, указать точки экстремумов

б) Аналитически отыскать регулярные экстремумы функции при ограничениях типа неравенства, используя аппарат необходимых и достаточных условий.

Методы решения задачи нелинейного прог- при ограничениях типа неравенства

Дано: $f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \to extr$

$x_2 \leq 3$

$x_1^2 + x_2 \leq 4$

Задание 1а)

Сделать чертеж к задаче: построить ограничения, линии уровня функции, указать точки экстремумов

Решение:

Построим на чертеже множество допустимых решений, задаваемых ограничениями:

$x_2 \leq 3 \quad (1)$

$x_1^2 + x_2 \leq 4 \quad (2)$

Ограничени (1) в задаче задается прямой $x_2 = 3$

Множество допустимых решений в задаче будет ограничено этой прямой и будет содержать точку (0,0) так как при подстановке координат этой точки в ограничение (1) получается верное неравенство: $0 \le 3$

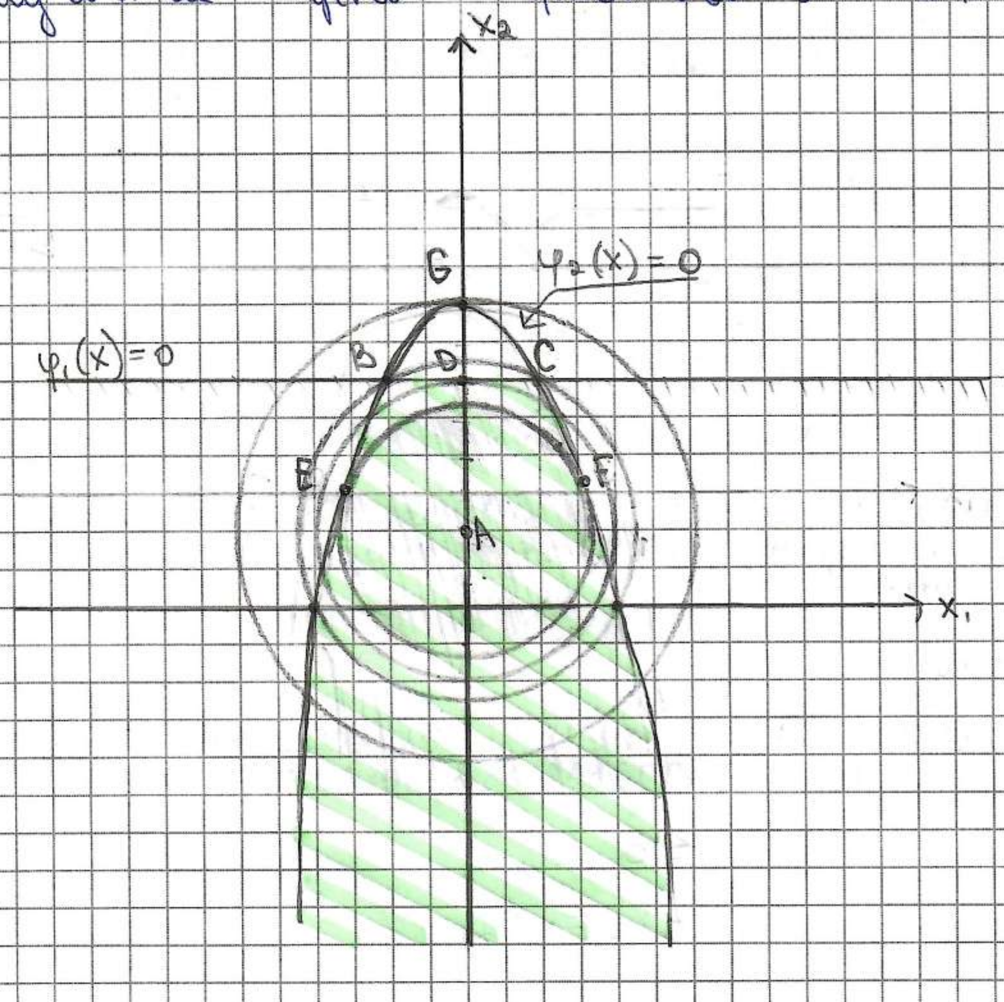
Ограничение (2) в задаче задается параболой

$x_1^2 + x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = -x_1^2 + 4$ с вершиной в (0,4).

Найдем несколько точек для построения параболы:

x_1	x_2
0	4
1	
-1	3
2	
-2	0

Множество допустимых решений в задаче будет ограничено этой параболой и будет содержать точку (0,0), так как при подстановке координат этой точки в ограничение (2) получается верное неравенство: $0^2 + 0 \le 4$



Запишем уравнения линии уровня функции $x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = C \Rightarrow x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = C$, это уравнение окружности с центром в точке $(0, 1)$ и радиусом $\sqrt{C}$

Точка $A = (0, -1)$ являющаяся безусловным локальным минимумом функции принадлежит множеству допустимых решений.

Построим несколько линий уровня функции при различных значениях C.

Ответ: по графику видно, что

- условный локальный максимум в точке $B = (-1, 3)$ (точка "внешнего" касания)
- условный локальный максимум в точке $C = (1, 3)$ (точка "внешнего" касания)

Задание 1б)

Аналитически отыскать регулярные экстремумы функции при ограничениях типа неравенства, используя аппарат необходимых и достаточных условий.

Решение:

Преобразуем ограничения к виду: $\varphi_j(x) \leq 0$

$x_2 \leq 3 \Rightarrow x_2 - 3 \leq 0 \Rightarrow \varphi_1(x) = x_2 - 3$

$x_1^2 + x_2 \leq 4 \Rightarrow x_1^2 + x_2 - 4 \leq 0 \Rightarrow \varphi_2(x) = x_1^2 + x_2 - 4$

Запишем классическую функцию Лагранжа:

$L(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 + \lambda_1(x_2 - 3) + \lambda_2(x_1^2 + x_2 - 4)$

Запишем необходимые условия экстремума функции при ограничениях типа неравенства:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x_2 - 3) = 0 \\ \lambda_2(x_1^2 + x_2 - 4) = 0 \end{cases}$$

Решим полученную систему, рассматривая все случаи:

Случай а)

Ограничение $\varphi_1(x) = x_2 - 3 < 0$ – пассивно, $\lambda_1 = 0$

Ограничение $\varphi_2(x) = x_1^2 + x_2 - 4 < 0$ – пассивно, $\lambda_2 = 0$

Тогда получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2x_2 - 2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Т.о получено первое решение системы - точка А с координатами $A=(0,1,0,0)$. Построим эту точку на чертеже

Случай б)

Ограничение $\varphi_1(x) = x_2 - 3 = 0$ - активно

Ограничение $\varphi_2(x) = x_1^2 + x_2 - 4 = 0$ - активно

Тогда получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ 2x_2 - 2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x_2 - 3 = 0 \\ x_1^2 + x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}}$$

Таким образом получено второе и третье решение системы - точки B, C с координатами соответственно:

$B = (-1, 3, -3, -1)$, $C = (1, 3, -3, -1)$

Построим эти точки на чертеже

Случай в)

Ограничение $\varphi_1(x) = x_2 - 3 = 0$ - активно

Ограничение $\varphi_2(x) = x_1^2 + x_2 - 4 < 0$ - пассивно, $\lambda_2 = 0$

Тогда получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2x_2 - 2 + \lambda_1 = 0 \\ x_2 - 3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \\ \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Таким образом получено четвертое решение системы - точка D с координатами $D = (0, 3, -4, 0)$. Построим точку на чертеже

Случай г)

Ограничение $\varphi_1(x) = x_2 - 3 < 0$ - пассивно, $\lambda_1 = 0$

Ограничение $\varphi_2(x) = x_1^2 + x_2 - 4 = 0$ - активно

Тогда получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ 2x_2 - 2 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ x_1^2 + x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1(1+\lambda_2) = 0 \\ 2x_2 - 2 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ x_1^2 + x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda_2 = -1 \\ 2x_2 = 3 \\ \lambda_1 = 0 \\ x_1^2 + x_2 - 4 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 - 2 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \\ x_2 = 1{,}5 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -6 \end{cases} \end{array}\right.$$

Т.о. получено пятое, шестое и седьмое решения системы - точки E, F, G с координатами соответственно:

$E = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{3}{2}, 0, -1\right)$, $F = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{3}{2}, 0, -1\right)$,

$G = (0, 4, 0, -6)$

Построим эти точки на чертеже.

Выпишем полученные точки

Точка	Проверка условий на знак		Проверка точек на прин. МДР	
	Условия	Вывод	Условия	Вывод
$A=(0,1,0,0)$	$\lambda_1=0$ $\lambda_2=0$	кандидат на min или max	$\varphi_1(A)=-2<0$ $\varphi_2(A)=-3<0$	точка принадлежит МДР
$B=(-1,3,-3,-1)$	$\lambda_1<0$ $\lambda_2<0$	кандидат на max	$\varphi_1(B)=0$ $\varphi_2(B)=0$	точка принадлежит МДР
$C=(1,3,-3,-1)$	$\lambda_1<0$ $\lambda_2<0$	кандидат на max	$\varphi_1(C)=0$ $\varphi_2(C)=0$	точка принадлежит МДР
$D=(0,3,-4,0)$	$\lambda_1<0$ $\lambda_2=0$	кандидат на max	$\varphi_1(D)=0$ $\varphi_2(D)=-1<0$	точка принадлежит МДР
$E=(-\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{3}{2},0,-1)$	$\lambda_1=0$ $\lambda_2<0$	кандидат на max	$\varphi_1(E)=-1,5<0$ $\varphi_2(E)=0$	точка принадлежит МДР
$F=(\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{3}{2},0,-1)$	$\lambda_1=0$ $\lambda_2<0$	кандидат на max	$\varphi_1(F)=-1,5<0$ $\varphi_2(F)=0$	точка принадлежит МДР
$G=(0,4,0,-6)$	$\lambda_1=0$ $\lambda_2<0$	кандидат на max	$\varphi_1(G)=1>0$ $\varphi_2(G)=0$	точка не принадлежит МДР и отбраковывается

Таким образом, после отбраковки остались 6 точек:

$A=(0,1,0,0)$ – точка является кандидатом на максимум или минимум

$B=(-1,3,-3,-1)$ – точка является кандидатом на максимум

$C=(1,3,-3,-1)$ – точка является кандидатом на максимум

$D=(0,3,-4,0)$ – точка является кандидатом на максимум

$E=(-\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{3}{2},0,-1)$ – точка является кандидатом на максимум

$F=(\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{3}{2},0,-1)$ – точка является кандидатом на максимум

Проверим достаточные условия первого порядка в каждой из полученных точек

Точка	Активные ограничения		Знак λ_j	Вывод
$A=(0,1,0,0)^T$	—	Число активных огр. меньше числа переменных – ДУ I порядка не выполнены	—	необходима проверка ДУ второго порядка
$B=(-1,3,-3,-1)^T$	$\varphi_1=0$ $\varphi_2=0$	Число активных ограничений равно числу переменных	$\lambda_1<0$ $\lambda_2<0$	Достаточные условия I порядка выполнены - точка условн. лок. max
$C=(1,3,-3,-1)^T$	$\varphi_1=0$ $\varphi_2=0$	Число активных ограничений равно числу переменных	$\lambda_1<0$ $\lambda_2<0$	ДУ I порядка выполнены – точка условный локальный max
$D=(0,3,-4,0)^T$	$\varphi_1=0$	Число активных огр. меньше числа переменных – дост. усл. I порядка не вып	—	Необходима проверка ДУ второго порядка
$E=(-\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{3}{2},0,-1)^T$	$\varphi_2=0$	Число активных огр. меньше числа переменных – ДУ I порядка не выполн	—	Необходима проверка ДУ второго порядка
$F=(\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{3}{2},0,-1)^T$	$\varphi_2=0$	Число активных огр. меньше числа переменных – ДУ I порядка не выполн	—	Необходима проверка ДУ второго порядка

Таким образом, получено: точка $B=(-1,3,-3,-1)$ – условный локальный максимум; точка $C=(1,3,-3,-1)$ – условный локальный максимум.

Для оставшихся точек проверим достаточные условия экстремума второго порядка.

Запишем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=2+2\lambda_2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}=0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=2$$

$$\boxed{d^2L=(2+2\lambda_2)(dx_1)^2+2(dx_2)^2}$$

Запишем дифференциал ограничения φ_1:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}=0 \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}=1 \Rightarrow \boxed{d\varphi_1(x)=1\cdot dx_2}$$

Запишем дифференциал ограничения φ_2:

$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = 2x_1 \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{d\varphi_2(x) = 2x_1 dx_1 + 1 \cdot dx_2}$

Исследуем точку $A = (0, 1, 0, 0)^T$ - кандидат на минимум и кандидат на максимум, активных ограничений нет.

Имеем $d^2L(A) = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2$ на дифференциалы условия не накладываются, dx_1 и dx_2 являются независимые

Получим $d^2L(A) = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2 > 0$ при $dx_1 \neq 0, dx_2 \neq 0$, следовательно, точка D-условной локальный минимум

Исследуем точку $D = (0, 3, -4, 0)^T$ - кандидат на максимум, активным в ней является ограничение φ_1, при этом $\lambda_1 = -4 \neq 0$, тогда

$d^2L(D) = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2$ при условии

$d\varphi_1(D) = 1 \cdot dx_2 = 0$ получим $dx_2 = 0$

Получим $d^2L(D) = 2(dx_1)^2 > 0$ при $dx_1 \neq 0$, но точка A - кандидат на максимум (противоречие), следовательно, в точке D нет экстремума

Исследуем точку $E = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{3}{2}, 0, -1\right)^T$ - кандидат на максимум, активным в ней является ограничение φ_2, $\lambda_2 \neq 0$, $d\varphi_2(E) = -\sqrt{10}\,dx_1 + dx_2 = 0$, получим:

$dx_2 = \sqrt{10}\,dx_1 \Rightarrow d^2L(E) = 2\sqrt{10}\,(dx_1)^2 > 0$ при $dx_1 \neq 0$, т.к точка является кандидатом на максимум (противоречие), следовательно в точке E нет экстремума.

Исследуем точку $F = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{3}{2}, 0, -1\right)^T$ - кандидат на максимум, активным в ней является ограничение φ_2, при этом $\lambda_2 \neq 0$, тогда

$d^2L(F) = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_2(F) =$

$= \sqrt{10}\,dx_1 + dx_2 = 0 \Rightarrow dx_2 = -\sqrt{10}\,dx_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2L(F) = 22(dx_1)^2 > 0$ при $dx_1 \neq 0$, т.к точка является кандидатом на максимум (противоречие), следовательно, в точке F нет экстремума

Ответ: функция $f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2$ при ограничениях $x_2 \leq 3$, $x_1^2 + x_2 \leq 4$ имеет:

- условный локальный максимум в точке $B = (-1, 3)^T$, $f(B) = 4$
- условный локальный максимум в точке $C = (1, 3)^T$, $f(C) = 4$
- условный локальный минимум в точке $A = (0, 1)^T$, $f(A) = -1$