

Общие сведения.

Будем рассматривать двумерную евклидову плоскость \mathbb{R}^2 и семейство замкнутых кривых $\gamma(t)$, заданных гладкими погружениями $x(s, t): S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$. По определению affine curvature flow гладкая вложенная кривая γ_0 , задаваемая радиус вектором $x_0(\cdot)$, удовлетворяет affine curvature flow, если

$$\begin{cases} x_0(s) = x(s, 0) \\ \text{для } x(\cdot, t) : \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = k(s, t)^{1/3} \cdot N(s, t) \end{cases}, \quad (1)$$

где $N(\cdot, t)$ – поле единичных внутренних нормалей к кривой $\gamma(t)$, а $k(s, t)$ – кривизна этой кривой, взятая в соответствующей точке с учетом знака.

Свойства решений (1).

1. Если $\gamma_0 = \gamma(0)$ выпуклая кривая, то эволюционируя под действием потока кривизны она будет оставаться выпуклой вложенной кривой и за конечное время C^∞ -гладко сожмется в “эллиптическую” точку. То есть кривые $\gamma(t)$ C^∞ -гладко сходятся к некоторой фиксированной точке так, что если мы нужным образом будем масштабировать $\gamma(t)$, то полученные после масштабирования кривые будут сходиться к эллипсу.
2. Решения (1) инварианты относительно аффинных преобразований плоскости.
3. Принцип вложенности: если одна кривая лежит в области, ограничиваемой другой кривой, то под действием потока такое расположение сохранится. А именно, пусть $\gamma^1(t)$ и $\gamma^2(t)$ решения (1), задающие эволюцию под действием affine curvature flow начальных кривых $\gamma_0^1 = \gamma^1(0)$ и $\gamma_0^2 = \gamma^2(0)$. Тогда, если $\gamma_0^1 \cap \gamma_0^2 = \emptyset$, то $\gamma_1(t) \cap \gamma_2(t) = \emptyset$ для любого $t \in [0, T)$.

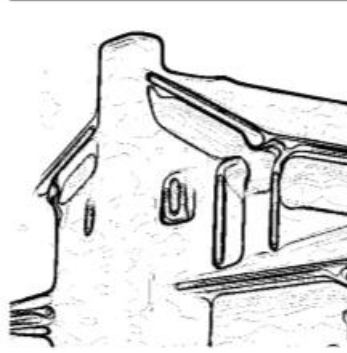
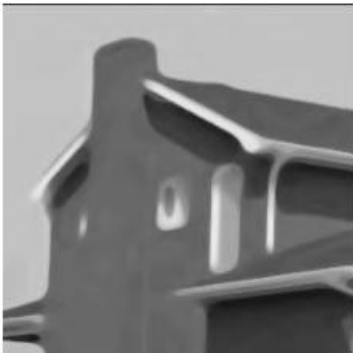
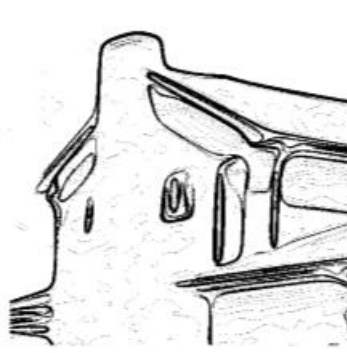
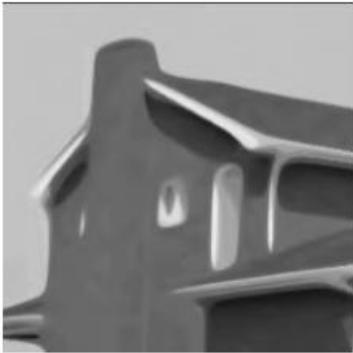
Идея практического применения affine curvature flow.

рарегс рарегс

рарегс рарегс

Черно-белое изображение представляет собой функцию $u_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, задающую оттенки серого цвета точек (пикселей) изображения. Используя u_0 , изображение может быть разложено в семейство Γ_0 линий уровня $u_0 = \text{const}$. Заметим, что Γ_0 состоит из непересекающихся линий. Для Γ_0 применяется affine curvature flow (1), в результате которого получаем эволюцию $\Gamma(t)$ (affine morphological scale space) семейства Γ_0 . Для любого t , по $\Gamma(t)$ можно восстановить черно-белое изображение. Полученное таким образом изображение является сглаженным исходным изображением u_0 в силу того, что поток кривизны сожмет в точки несущественные детали изображения (шум), а оставшиеся линии сгладит.

Так как гладкие кривые в памяти компьютера могут храниться в виде многоугольников (дискретизации кривых), то для реализации представленной выше схемы необходимо научиться моделировать affine curvature flow для многоугольников. В статье такая схема под названием affine σ -erosion многоугольников была предложена.





Идея алгоритма.

Пусть $\gamma \subset E^2$ замкнутая положительно ориентированная выпуклая вложенная кривая на плоскости, $x(s)$ - ее радиус-вектор, s - натуральный параметр на γ и $\sigma > 0$ некоторое (небольшое) число. Affine σ -erosion кривой γ называется кривая γ_σ , представляющая собой геометрическое место точек середин всевозможных хорд $x(s - \delta(\sigma))x(s + \delta(\sigma))$. Для γ_σ справедлив следующий результат.

Лемма А. Пусть γ кусочно C^2 -гладкая выпуклая вложенная кривая на плоскости, $x(s)$ - ее радиус-вектор, s - натуральный параметр на γ , $\sigma > 0$. Если γ_σ является affine σ -erosion кривой γ , причем $x_\sigma(s)$ - радиус-вектор γ_σ , то

$$x_\sigma(s) = x(s) + \omega \sigma^{\frac{2}{3}} k(s)^{\frac{1}{3}} N(s) + \bar{o}\left(\sigma^{\frac{2}{3}}\right), \quad \sigma \rightarrow 0,$$

где $2\omega = 3/2^{2/3} = \text{const.}$

Лемма А показывает, что affine σ -erosion является, в некотором смысле, хорошим приближением affine curvature flow (1).

Для того, чтобы моделировать σ -erosion многоугольника необходимо моделировать erosion angle.

Лемма В. Affine σ -erosion angle $W = \{xe_1 + ye_2 : x > 0, y > 0\}$ является одна ветвь гиперболы, задаваемой $\{xy = \frac{\sigma}{2[e_1, e_2]} : x > 0, y > 0\}$ в аффинном базисе $\{O, e_1, e_2\}$ (тут $[e_1, e_2]$ - неориентированная площадь параллелограмма, натянутого на базисные векторы e_1 и e_2).

Описание алгоритма.

Пусть $\mathcal{P}^0 := P_0P_1 \dots P_{n-1}$ - выпуклый многоугольник, пронумерованный против часовой стрелки.

1. Рассмотрим пары $(i, k)_{i=0, k=0}^{n-1, n-1}$ номеров вершин \mathcal{P}^0 , отсортированные в лексикографическом порядке.

Для каждой пары (i, k) от $(0, 0)$ до $(n-1, n-1)$:

(*1*) Найдём точку $I := P_{i-1}P_i \cap P_kP_{k+1}$ (рис. 1).

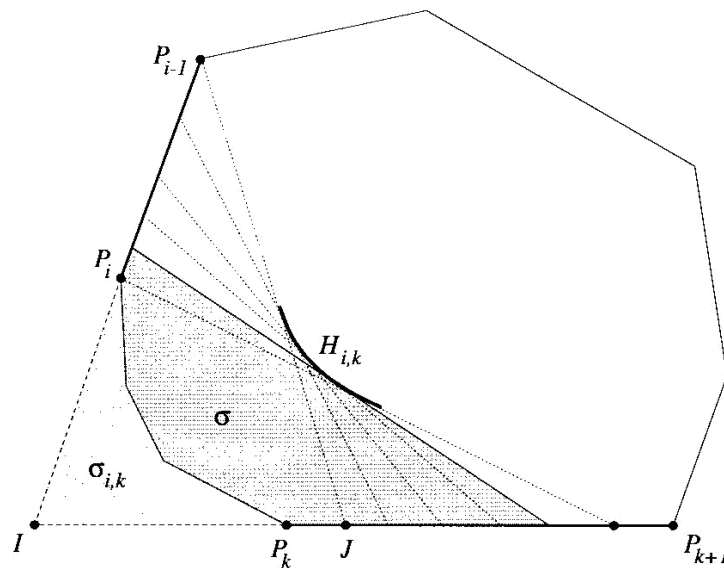


Рис.1

(*2*) Найдём площадь $\sigma_{i,k}$ многоугольника $IP_i \dots P_k$:

$$\sigma_{i,k} := \text{Area}(IP_i \dots P_k).$$

(*3*) Если $\frac{1}{2} [\overrightarrow{IP_k}, \overrightarrow{IP_i}] \leq \sigma + \sigma_{i,k} \leq \frac{1}{2} [\overrightarrow{IP_{k+1}}, \overrightarrow{IP_{i-1}}]$,

$$\text{то для } \lambda := \sqrt{\frac{\sigma + \sigma_{i,k}}{2[\overrightarrow{IP_{k+1}}, \overrightarrow{IP_{i-1}}]}}$$

- найдём значения $t_1 := \begin{cases} \log \frac{|\overrightarrow{IP_k}|}{2\lambda |\overrightarrow{IP_{k+1}}|}, & \text{Area}(IP_{i-1}P_k) > \sigma + \sigma_{i,k}, \\ \log(2\lambda), & \text{иначе} \end{cases}$,

$$t_2 := \begin{cases} -\log \frac{|\overrightarrow{IP_i}|}{2\lambda |\overrightarrow{IP_{i-1}}|}, & \text{Area}(IP_iP_{k+1}) > \sigma + \sigma_{i,k}, \\ -\log(2\lambda), & \text{иначе} \end{cases}$$

- построим гиперболу $H_{i,k}$ в параметрическом виде

$$M(t) = I + \lambda(e^t \overrightarrow{IP_{k+1}} + e^{-t} \overrightarrow{IP_{i-1}}), \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (*)$$

(*4*) Конкатенация полученных кусков гипербол

$$\mathcal{H}^0 := \bigsqcup_{(i,k)} H_{i,k}$$

является affine σ -erosion \mathcal{P}^0 .

2. Итерируем шаг 1. Для этого построим новый многоугольник \mathcal{P}^1 как дескритизацию кривой \mathcal{H}^0 , полученной на предыдущем шаге. Оказывается, это можно сделать аффинно-инвариантным образом. Несложно показать, что хорда $M(t)M(t+x)$ отсекает от гиперболы, задаваемой (*), заданную площадь ε тогда и только тогда, когда $2\varepsilon = (\sigma + \sigma_{i,k})(\sinh x - x)$. Заметим, что полученное уравнение зависит только от значения x , на которое мы сдвигаемся вдоль гиперболы по параметру, и не зависит от начального значения t .

Зафиксируем $\varepsilon \ll \sigma$. Используя указанный выше факт мы можем дискретизировать гиперболу $H_{i,k}$ точками

$$P_{i,k}^s := M\left(\left(1 - \frac{s}{m}t_1\right) + \frac{s}{m}t_2\right) \in H_{i,k}, \quad s \in \{0, \dots, m-1\},$$

где количество m находится как целочисленное округление решения уравнения $2\varepsilon = (\sigma + \sigma_{i,k})\left(\sinh \frac{t_2-t_1}{x} - \frac{t_2-t_1}{x}\right)$, понимаемого как уравнение относительно x .

Тем самым ε задает так называемую пространственную дискретизацию решения, в то время как σ моделирует временную дискретизацию. При этом, по построению, каждая хорда $P_{i,k}^s P_{i,k}^{s+1}$ вместе с соответствующей гиперболой ограничивает область площади ε .

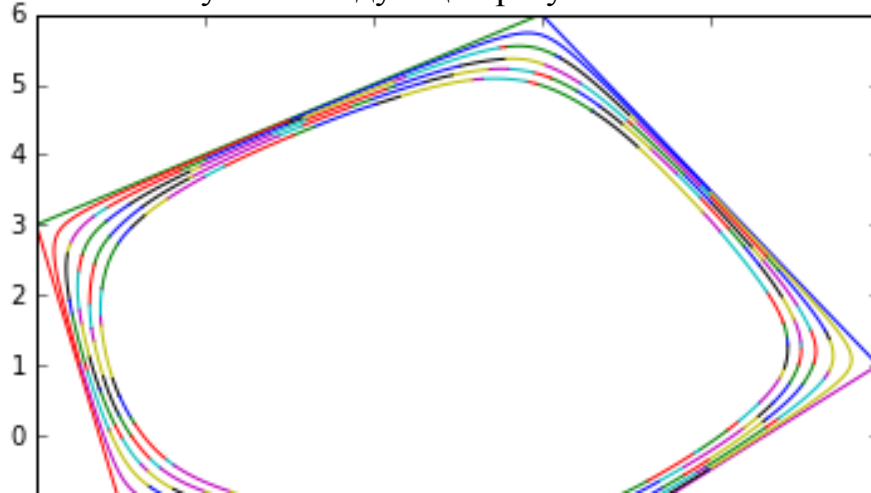
Определим новый многоугольник \mathcal{P}^1 как $\mathcal{P}^1 := \bigcup_{(i,k)} \bigcup_{s=0}^{m-1} P_{i,k}^s$. После этого можно повторить шаг 1 для \mathcal{P}^1 . И так далее.

В статье доказывается корректность работы такого алгоритма и его сходимости. Последовательность полученных после применения алгоритма кривых \mathcal{H}^l affine σ -erosion многоугольников \mathcal{P}^l ($l = 0, 1, 2, \dots$) является моделью эволюции исходного многоугольника \mathcal{P}^0 под действием affine curvature flow (1).

Выводы.

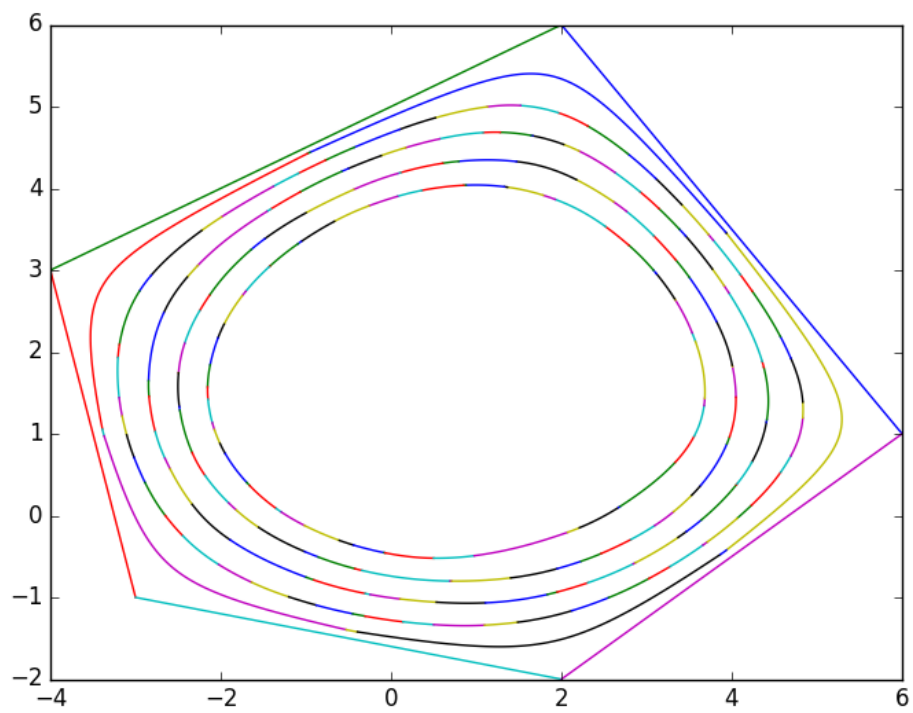
Входные параметры: $\varepsilon = 0.01$, количество итераций = 5, координаты начального многоугольника, $\sigma = \{0.1, 0.5, 1, 1.5\}$.

При различных σ получаем следующие результаты:

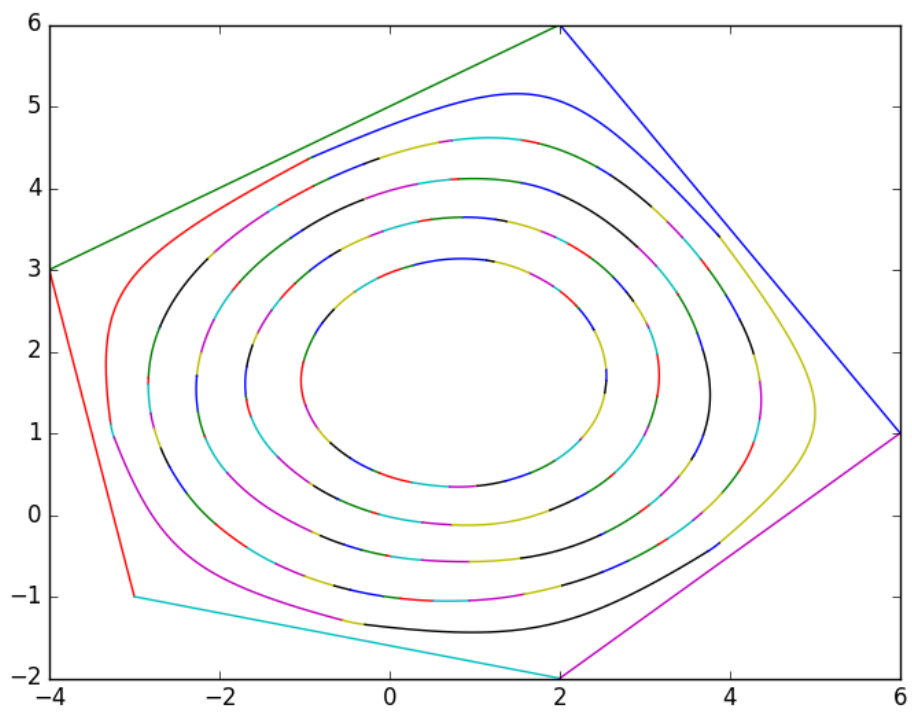


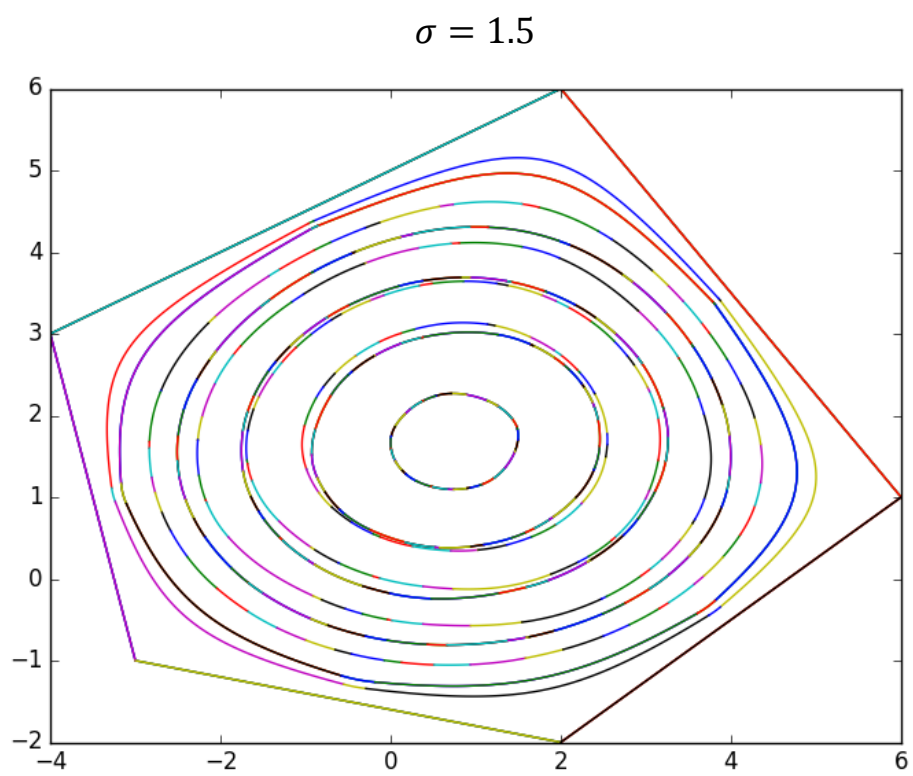
$\sigma = 0.1$

$\sigma = 0.5$



$\sigma = 1$





Из полученных результатов видно, что чем больше σ , тем быстрее affine curvature flow сходится к “эллиптической” точке.