

Мария Георгиева Велева
Група 5 ФН. 62445 Софтуерно инженерство

Заг 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x + 2y + xy \end{cases}$$

а) равновесни точки

$$\begin{cases} y + x = 0 & x = -y \\ x + 2y + xy = 0 & -y + 2y + (-y)y = 0 \end{cases}$$

$$y - y^2 = 0$$

$$y(1 - y) = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = 0 \quad x_1 = 0$$

$$y_2 = 1 \quad x_2 = -1$$

\Rightarrow Равновесни точки

$$B_1(0, 0) \quad B_2(-1, 1)$$

б) Напишете линейното приближаване на системата в околността на нулевата равновесна точка.

$$J_a(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+y & 2+x \end{pmatrix}$$

$$f'_x = 1 \quad f'_y = 1$$

$$g'_x = 1+y \quad g'_y = 2+x$$

Линейното приближаване ще получим като пресметнем якобианът на съответната точка:

$$J_a(B_1) = J_a(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad J_a(B_2) = J_a(-1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow линейното приближаване ще е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J_a(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J_a(-1, 1) \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x+y \\ \dot{y} = x+2y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x+1+y-1 \\ \dot{y} = 2x+2+y-1 = 2y+2x+1 \end{cases}$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$$

$$\lambda_4 = 1 - \sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{5}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$\lambda_{1,2} > 0 \Rightarrow$ равновесната точка е от тип неустойчив фокус
 ~~$\lambda_3 > 0 > \lambda_4 < 0 < \lambda_1$~~ неустойчив

Заг 2

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, 0 < x < 2, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{3\pi x}{4}, 0 \leq x \leq 2 \\ u_x(0, t) = 0, u(2, t) = 0, t \geq 0 \end{cases}$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$$a = 2$$

$$u(x, t) =$$

$$u = X(x)T(t)$$

$$XT'' = X''T \Rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \text{ константа}$$

$$\begin{cases} T'' + \lambda T = 0 \\ X'' + \lambda X = 0 \end{cases}$$

$$u|_{x=0} \rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u|_{x=2} \rightarrow X(2)T(t) = 0 \Rightarrow X(2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X(2) = 0 \end{cases}$$