Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

П Р О Е К Т

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2020/2021

Тема № СИ21-П-124

15.06.2021 Изготвил: Мария Георгиева Велева

София Ф. № 62445

Група 5

Оценка :…………………….....

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

1. Тема (задание) на проекта

Учебен проект по "Диференциални уравнения и приложения"
спец. Софтуерно инженерство,
2 курс, летен семесътр, уч. год. 2020-2021

Име...,
Ф.No............, група ....

Тема СИ21-П-124. Дадена е системата

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = (y-1)(y+2) \\ \dot{y} = x - 2y. \end{array}\right.$$

1. Намерете нейните равновесни точки. Напишете линейното приближение на системата в околност на една от намерените равновесни точки.

2. Начертайте фазов портрет на написанта линейна система в подточка (1). Към всяка една от изобразените фазови криви (без равновесната точка) начертайте по един тангенциален вектор. Маркирайте със символа звезда положението на равновесие.

2. Решение на задачата

2.1 Теоретична част

$$\begin{cases} \dot{x} = (y-1)(y+2) \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$

1. Равновесните точки са там където скоростите се нулират. В нашия случай, това е когато десните страни на системата се нулират.

$$\begin{cases} (y-1)(y+2) = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \qquad x = 2y \qquad \begin{matrix} y_1 = 1 \\ x_1 = 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} y_2 = -2 \\ x_2 = -4 \end{matrix}$$

Равновесните точки на системата са:

$B_1(2, 1)$ и $B_2(-4, -2)$

Намираме Якобианът на системата:

$f = (y-1)(y+2) = y^2 + y - 2$

$f'_x = 0$

$f'_y = 2y + 1$

$g = x - 2y$

$g'_x = 1$

$g'_y = -2$

$$Ja(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y+1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Линейното приближаване ще получим като пресметнем Якобианът в съответните равновесни точки:

$$Ja(B_1) = Ja(2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

=> Линейното приближаване в B_1 ще е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ja(2,1)\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\left| \begin{aligned} \dot{x} &= 0.(x-2) + 3(y-1) \\ \dot{y} &= 1(x-2) - 2(y-1) \end{aligned} \right. \iff \left| \begin{aligned} \dot{x} &= 3y - 3 \\ \dot{y} &= x - 2y \end{aligned} \right.$$

$$Ja(B_2) = Ja(-4,-2) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

=> Линейното приближаване в B_2 ще е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ja(-4,-2)\begin{pmatrix} x-(-4) \\ y-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+4 \\ y+2 \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\left| \begin{aligned} \dot{x} &= 0(x+4) - 3(y+2) \\ \dot{y} &= 1(x+4) - 2(y+2) \end{aligned} \right. \iff \left| \begin{aligned} \dot{x} &= -3y - 6 \\ \dot{y} &= x - 2y \end{aligned} \right.$$

2. За $B_1(2,1)$ матрицата на системата е A_1.
От характеристичното уравнение $\det(A_1 - \lambda E) = 0$ получаваме собствените числа.

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda - 3 &= 0 \\ (\lambda+3)(\lambda-1) &= 0 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = 1$

Тъй като собствените числа са реални, различни и с различни знаци, то фазовият портрет е седло. (нестабилно)

За $B_2(-4, -2)$ матрицата на системата е A_2.
От характеристичното уравнение $\det(A_2 - \lambda E) = 0$ получаваме собствените числа.

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{2}{2}\right)^2 - 3 = 1 - 3 = -2 = 2i^2$$

$$\lambda_3 = \frac{-1 + \sqrt{2i^2}}{1} = -1 + \sqrt{2}\, i$$

$$\lambda_4 = \frac{-1 - \sqrt{2i^2}}{1} = -1 - \sqrt{2}\, i$$

Тъй като собствените числа са комплексни, трябва да определим посоката на въртене на фазовите криви относно положението на равновесие. Това еднозначно се определя от вектора:

$$(\dot{x}, \dot{y})\big|_{x=1,\, y=0} = (a_{11}, a_{21}) = (0, 1)$$

Тъй като $a_{21} = 1 > 0$, то посоката на въртене на фазовите криви е срещу часовника.
Тъй като собствените числа са комплексни и с отрицателна реална част, то фазовият портрет е устойчив фокус.

2.2 MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му.

Код и резултати за равновесна точка B1

```
function zad1
clc
clf
% Инициализираме матрицата A – матрицата A1 от теоретичното решение
A=[0,3;1,-2];
% Вектор стълб със свободните членове
b=[-3;0];
% Равновесна точка
eqp = A\(-b)
% Собствени стойности и собствени вектори
[T,D]=eig(A)
x=eqp(1)-4:1:eqp(1)+4;
y=eqp(2)-4:1:eqp(2)+4;
% Чертаем равновесната точка със звезда
plot(-4,-2,'r*')
axis([eqp(1)-5,eqp(1)+5,eqp(2)-5,eqp(2)+5])
hold on
% Прави, върху които лежат фазови криви
if imag (D(1,1))==0
      if T(1,1)~=0
            plot(x,eqp(2)+T(2,1)*(x-eqp(1))/T(1,1),'k')
      else plot(0*x+eqp(1),x,'k')
      end
      if T(1,2)~=0
            plot(x,eqp(2)+T(2,2)*(x-eqp(1))/T(1,2),'k')
      else plot(0*x+eqp(1),x,'k')
      end
end
% Функция за дясната страна
function z=ff(t,y)
z=A*y+b;
end
% Фазов портрет
[X,Y]=meshgrid(x,y);
tmax=50;
for i=1:length(x)
      for j=1:length(y)
            [T1,Y1]=ode45(@ff,[0,tmax],[X(i,j),Y(i,j)]);
            [T2,Y2]=ode45(@ff,[0,-tmax],[X(i,j),Y(i,j)]);
            plot(Y1(:,1),Y1(:,2),'b',Y2(:,1),Y2(:,2),'b')
      end
end
% Танценциални вектори
deltaX=A(1,1)*X+A(1,2)*Y+b(1);
deltaY=A(2,1)*X+A(2,2)*Y+b(2);
d=sqrt(deltaX.^2+deltaY.^2);
quiver(X,Y,deltaX./d,deltaY./d,0.5,'m')
end
```

```
eqp =

     2
     1
```

```
T =

    0.9487   -0.7071
    0.3162    0.7071
```

```
D =

    1.0000         0
         0   -3.0000
```

Код и резултати за равновесна точка B2

```
function zad2
clc
clf
% Инициализираме матрицата А - матрицата А2 от теоретичното решение
A=[0,-3;1,-2];
% Вектор стълб със свободните членове
b=[-6;0];
% Равновесна точка
eqp = A\(-b)
% Собствени стойности и собствени вектори
[T,D]=eig(A)
x=eqp(1)-4:1:eqp(1)+4;
y=eqp(2)-4:1:eqp(2)+4;
% Чертаем равновесната точка със звезда
plot(-4,-2,'r*')
axis([eqp(1)-5,eqp(1)+5,eqp(2)-5,eqp(2)+5])
hold on
% Прави, върху които лежат фазови криви
if imag (D(1,1))==0
      if T(1,1)~=0
            plot(x,eqp(2)+T(2,1)*(x-eqp(1))/T(1,1),'k')
      else plot(0*x+eqp(1),x,'k')
      end
      if T(1,2)~=0
            plot(x,eqp(2)+T(2,2)*(x-eqp(1))/T(1,2),'k')
      else plot(0*x+eqp(1),x,'k')
      end
end
% Функция за дясната страна
function z=ff(t,y)
z=A*y+b;
end
% Фазов портрет
[X,Y]=meshgrid(x,y);
tmax=50;
for i=1:length(x)
      for j=1:length(y)
            [T1,Y1]=ode45(@ff,[0,tmax],[X(i,j),Y(i,j)]);
            [T2,Y2]=ode45(@ff,[0,-tmax],[X(i,j),Y(i,j)]);
            plot(Y1(:,1),Y1(:,2),'b',Y2(:,1),Y2(:,2),'b')
      end
end
% Танценциални вектори
deltaX=A(1,1)*X+A(1,2)*Y+b(1);
deltaY=A(2,1)*X+A(2,2)*Y+b(2);
d=sqrt(deltaX.^2+deltaY.^2);
quiver(X,Y,deltaX./d,deltaY./d,0.5,'m')
end
```

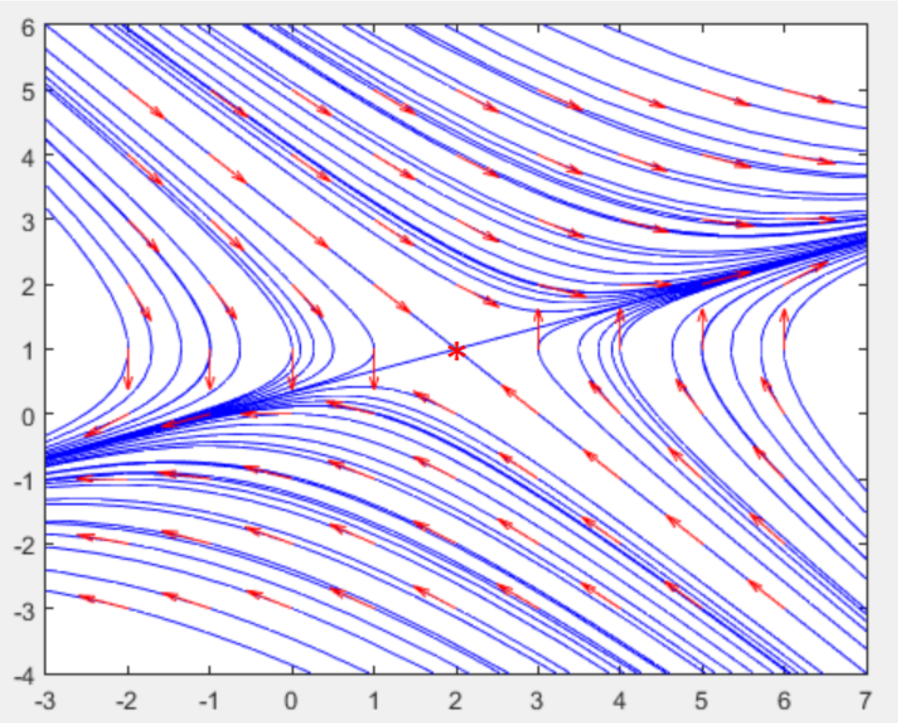
```
eqp =

    -4
    -2
```

```
T =

   0.8660 + 0.0000i   0.8660 + 0.0000i
   0.2887 - 0.4082i   0.2887 + 0.4082i


D =

  -1.0000 + 1.4142i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i  -1.0000 - 1.4142i
```

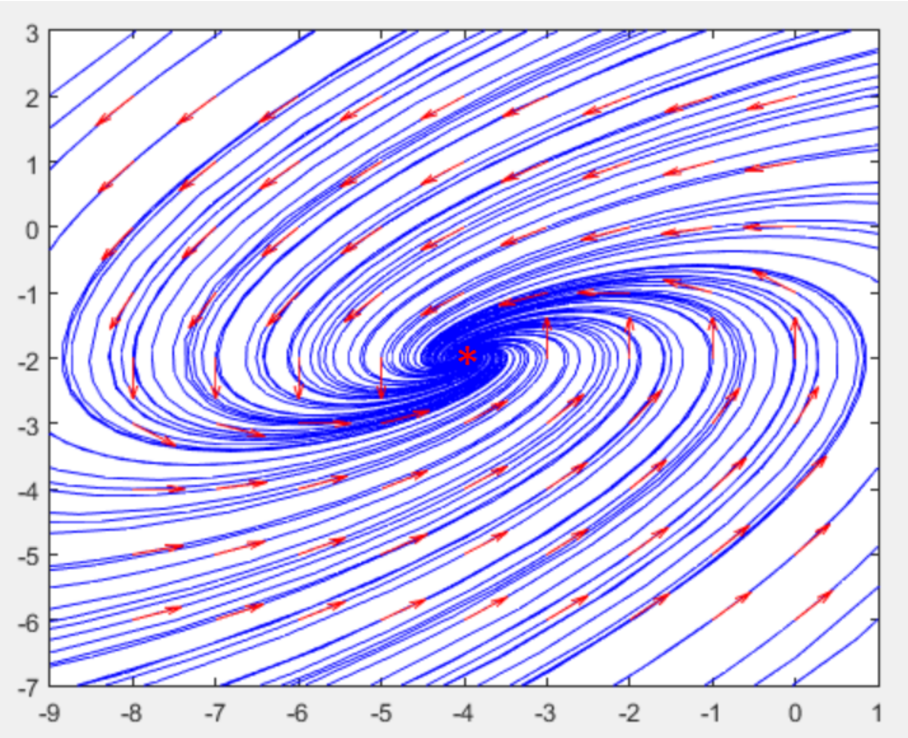
2.3 Графики

Това представлява изпълнението на по-горните кодове в MatLab.

Графика за равновесна точка B1



Графика за равновесна точка B2



2.4 Коментари към получените с MatLab резултати.

<u>За равновесна точка В1</u>

От резултатите получени с MatLab се потвърждават намерените в теоритичната част факти. Вижда се, че равновесната точка е (2, 1) и е от тип седло.Тя е маркирана със символа звазда. Получените собствени стойности са реални числа, които са различни и с различни знаци, което потвърждава, че точката е от тип седло.

<u>За равновесна точка В2</u>

От графиката се вижда, че равновесната точка наистина е (-4,-2). Тя е маркирана със символа звезда и е устойчив фокус. Фазовият портрет на системата се състои от равновесната точка и спирали. Към всяка една от фазовите криви (спирали) без равновесната точка е начертан по един тангенциален вектор. Векторите са насочени в посока приближаване на равновесната точка, което потвърждава нейната устойчивост.