Gaussov algoritem za računanje datuma velike noči

Marjetka Zupan
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko
13. marec 2023

- cilj: poiskati način za določanje datuma brez dodatnih pripomočkov, zgolj z uporabo enostavnih računskih operacij

Kdaj sploh praznujemo veliko noč?

- ~~„prva nedelja po prvi spomladanski polni luni“~~

$$n_a = (A \bmod 19) + 1$$

- „prva nedelja po prvi spomladanski polni luni“ ni povsem natančna in ni enolična

- do 325 določil papež, leta 325 na podlagi opazovanj določijo postopek za določanje prve spomladanske polne lune in veliko noč praznujejo na prvo nedeljo po njej
- potopek ni povsem natančen, datumi se ne ujemajo nujno, za določanje datuma velike noči pa so pomembni le datumi iz napovedi -> pashalna polna luna (PPL)

- lunin mesec = čas med zaporednima polnima lunama

- leta 325 julijanski koledar (kaj je to)
- metonski cikel – 19 let = 235 luninih mesecev -> datumi pashalnih polnih lun se vsakih 19 let ponovijo
- zlato število = položaj v ciklu

zlato število	pashalna polna luna	zlato število	pashalna polna luna	zlato število	pashalna polna luna
1	5. april	8	18. april	15	1. april
2	25. marec	9	7. april	16	21. marec
3	13. april	10	27. marec	17	9. april
4	2. april	11	15. april	18	29. marec
5	22. marec	12	4. april	19	17. april
6	10. april	13	24. marec		
7	30. marec	14	12. april		

- datum PPL iz tabele, velika noč prva nedelja po njem

Kdaj sploh praznujemo veliko noč?

- ~~„prva nedelja po prvi spomladanski polni luni“~~

$$n_a = (A \bmod 19) + 1$$
$$e_j = (11 \cdot (n_a - 1)) \bmod 30$$
$$S = \left\lfloor \frac{3 \cdot C}{4} \right\rfloor \qquad L = \left\lfloor \frac{8 \cdot C + 5}{25} \right\rfloor$$
$$e_g = \left(e_j - S + L + 8\right) \bmod 30$$

- 1582 uvedejo gregorijanski koledar (kaj je to) – zmanjša neskladje med dolžino Zemljinega obhoda okoli sonca in leta v koledarju
- poleg koledarja spremenijo tudi postopek določanja velike noči

- uvedejo epakto = mera za starost lune na določen dan; kaj je epakta leta

- epakto računamo s pomočjo zlatega števila:
    - v julijanskem 19 možnih epakt $e' = (11 \cdot (a - 1)) \bmod 30$
    - v gregorijanskem uvedemo popravke pri računanju epakte

Epakto v gregorijanskem koledarju določimo po naslednjem postopku, pri čemer so vsa deljenja celoštevilska:

1. Uporabimo formulo za julijanski koledar $e_j = (11 \cdot (a - 1)) \bmod 30$
2. Uvedemo solarno enačbo $S = \frac{3 \cdot C}{4}$

   Ta odraža razliko med julijanskim in gregorijanskim koledarjem in se vsako leto, ki je prestopno v julijanskem, ne pa tudi v gregorijanskem koledarju, poveča za 1.
3. Uvedemo lunarno enačbo $L = \frac{8 \cdot C + 5}{25}$

   Ta odraža napako pri uporabi metonskega cikla v gregorijanskem koledarju in se vsakih 2500 let osemkrat poveča za 1.
4. Izračunamo $e_g' = e_j - S + L + 8$.
5. Podamo gregorijansko epakto $e_g' \bmod 30$, pri čemer ponovno namesto 0 vzamemo 30.

epakta	pashalna polna luna	epakta	pashalna polna luna	epakta	pashalna polna luna
1	12. april	11	2. april	21	23. marec
2	11. april	12	1. april	22	22. marec
3	10. april	13	31. marec	23	21. marec
4	9. april	14	30. marec	24	18. april
5	8. april	15	29. marec	25	18. ali 17. april
6	7. april	16	28. marec	26	17. april
7	6. april	17	27. marec	27	16. april
8	5. april	18	26. marec	28	15. april
9	4. april	19	25. marec	29	14. april
10	3. april	20	24. marec	30	13. april

- datum PPL iz tabele glede na epakto, velika noč na nedeljo, ki sledi

- dva datuma pri epakti 25 -> kdaj izberemo katerega, oba načina ekvivalentna (dokaz v članku)

Kdaj sploh praznujemo veliko noč?

- ~~„prva nedelja po prvi spomladanski polni luni“~~

$$n_a = (A \bmod 19) + 1$$
$$e_j = (11 \cdot (n_a - 1)) \bmod 30$$
$$S = \left\lfloor \frac{3 \cdot C}{4} \right\rfloor \qquad L = \left\lfloor \frac{8 \cdot C + 5}{25} \right\rfloor$$
$$e_g = \left(e_j - S + L + 8\right) \bmod 30$$

Primer: velika noč letos

epakta	pashalna polna luna	epakta	pashalna polna luna	epakta	pashalna polna luna
1	12. april	11	2. april	21	23. marec
2	11. april	12	1. april	22	22. marec
3	10. april	13	31. marec	23	21. marec
4	9. april	14	30. marec	24	18. april
5	8. april	15	29. marec	25	18. ali 17. april
6	7. april	16	28. marec	26	17. april
7	6. april	17	27. marec	27	16. april
8	5. april	18	26. marec	28	15. april
9	4. april	19	25. marec	29	14. april
10	3. april	20	24. marec	30	13. april

Primer: velika noč letos

Gaussov algoritem – julijanski koledar

$$a = A \bmod 19$$
$$b = A \bmod 4$$
$$c = A \bmod 7$$
$$d = (19 \cdot a + M) \bmod 30$$
$$e = (2 \cdot b + 4 \cdot c + 6 \cdot d + N) \bmod 7$$

$$M = 15$$
$$N = 6$$

$$p = \left\lfloor \frac{8k+13}{25} \right\rfloor \qquad q = \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor$$
$$M = (15 + k - p - q) \bmod 30$$
$$N = (4 + k - q) \bmod 7$$

$$22 + d + e.\,\text{marec}$$
$$d + e - 9.\,\text{april}$$

Gauss v svojem delu podaja enostavnejši algoritem za izračun datuma velike noči tako po julijanskem kot tudi po gregorijanskem koledarju. Najprej vpelje nekatere oznake: a, b, c, d, e, pri čemer sta M in N za računanje datuma v julijanskem koledarju konstanti, za računanje datuma v gregorijanskem koledarju pa ju v splošnem lahko izračunamo iz stoletja na naslednji način: … (k je za leta 100k do 100k + 99, pred uveljavitvijo pa 16 (za 1582 -)).

Pri tem imamo v gregorijanskem koledarju ti dve izjemi:
1. Če za datum velike noči dobimo 26. april, namesto tega vedno vzamemo 19. april.
2. Če dobimo d = 28 in e = 6 ter število 11M+11 pri deljenju s 30 da ostanek, manjši od 19, namesto 25. aprila vzamemo 18.

zgled – letošnja velika noč

Razmislimo, da podan algoritem velja. Začnimo pri julijanskem koledarju. Prvi korak algoritma je deljenje po modulu 19, ki ga najdemo tudi v prej opisanem postopku. Z njim namreč določimo zlato število leta.

Kdaj sploh praznujemo veliko noč?

- ~~„prva nedelja po prvi spomladanski polni luni“~~

$$n_a = (A \bmod 19) + 1$$

datum PPL iz tabele

zlato število	pashalna polna luna	zlato število	pashalna polna luna	zlato število	pashalna polna luna
1	5. april	8	18. april	15	1. april
2	25. marec	9	7. april	16	21. marec
3	13. april	10	27. marec	17	9. april
4	2. april	11	15. april	18	29. marec
5	22. marec	12	4. april	19	17. april
6	10. april	13	24. marec		
7	30. marec	14	12. april		

namesto datuma PPL število dni od 21. marca do nje

zlato število	pashalna polna luna	zlato število	pashalna polna luna	zlato število	pashalna polna luna
1	15	8	28	15	11
2	4	9	17	16	0
3	23	10	6	17	19
4	12	11	25	18	8
5	1	12	14	19	27
6	20	13	3		
7	9	14	22		

- alternirajoče prištevanje 19 in odštevanje 11 = prištevanje 19 in deljenje mod 30
- ničla pri $n_a = 16$

Sledi: $d = 19 \cdot (n_a - 16) \bmod 30 = 19 \cdot (a - 15) \bmod 30 = (19 \cdot a - 19 \cdot 15) \bmod 30 = (19 \cdot a + 15) \bmod 30$

PPL v julijanskem je 21. + d. marec oz. ustrezno april

Gaussov algoritem – julijanski koledar

$$a = A \bmod 19 \quad \checkmark$$
$$b = A \bmod 4$$
$$c = A \bmod 7$$
$$d = (19 \cdot a + M) \bmod 30 \quad \checkmark$$
$$e = (2 \cdot b + 4 \cdot c + 6 \cdot d + N) \bmod 7$$

$$M = 15 \quad \checkmark$$
$$N = 6$$

$$22 + d + e.\,\text{marec}$$
$$d + e - 9.\,\text{april}$$

- hočemo datum nedelje po PPL, ne datuma PPL
- Gaussov e

$$22 + d + e.\,\text{marec A}$$
$$19.\,\text{april } 1500$$
$$d + e - 28 + i + 365(A - 1500)$$
$$i = \left\lfloor \frac{A - 1500}{4} \right\rfloor = \frac{A - 1500 - (A \bmod 4)}{4}$$
$$d + e - 28 + \frac{A - 1500 - b}{4} + 365(A - 1500) \bmod 7 = 0$$
$$e = (2b + 4c + 6d + N) \bmod 7,\ N = 6$$

- izpeljimo e; izhajamo iz datuma, za katerega vemo, da je nedelja = 19. april 1500
- Med 19. aprilom 1500 in $22 + d + e$. marcem leta A je $d + e - 28 + i + 365(A – 1500)$ dni; i za prestopna
- Velja: $i = (A – 1500) // 4 = (A – 1500 – (A \bmod 4)) / 4$

Dobimo:
$d + e – 28 + (A – 1500 – b)/4 + 365(A – 1500)$ / + 28, +7/4 (A – 1500 – b)
$d + e + 2 A – 3000 – 2b + 365(A – 1500)$ / + 550494, - 364 A
$d + e + 3 A – 6 – 2b$ / - (3 A – 3c)
$d + e + 3c – 6 – 2b$ / - (7d + 7c)
$e – 2b – 4c – 6d – 6$
⇔ e = (2b + 4c + 6d + 6) mod 7

Gaussov algoritem – julijanski koledar

$$a = A \bmod 19$$
$$b = A \bmod 4$$
$$c = A \bmod 7$$
$$d = (19 \cdot a + M) \bmod 30$$
$$e = (2 \cdot b + 4 \cdot c + 6 \cdot d + N) \bmod 7$$

$$M = 15$$
$$N = 6$$

$22 + d + e$. marec

$d + e - 9$. april

Gaussov algoritem – gregorijanski koledar

$$a = A \text{ mod } 19$$
$$b = A \text{ mod } 4$$
$$c = A \text{ mod } 7$$
$$d = (19 \cdot a + M) \text{ mod } 30$$
$$e = (2 \cdot b + 4 \cdot c + 6 \cdot d + N) \text{ mod } 7$$
$$p = \left\lfloor \frac{8k+13}{25} \right\rfloor \qquad q = \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor$$
$$M = (15 + k - p - q) \text{ mod } 30$$
$$N = (4 + k - q) \text{ mod } 7$$

$$22 + d + e. \text{ marec}$$
$$d + e \ - 9. \text{ april}$$

Pokažimo, da algoritem velja tudi za gregorijanski koledar.

Kdaj sploh praznujemo veliko noč?

- ~~„prva nedelja po prvi spomladanski polni luni“~~

$$n_a = (A \bmod 19) + 1$$
$$e_j = (11 \cdot (n_a - 1)) \bmod 30$$
$$S = \left\lfloor \frac{3 \cdot C}{4} \right\rfloor \qquad L = \left\lfloor \frac{8 \cdot C + 5}{25} \right\rfloor$$
$$e_g = \left(e_j - S + L + 8\right) \bmod 30$$

Ponovno začnemo z določanjem zlatega števila. Kot prej opazimo:
$n_a = a + 1$
$e_j = (11 \cdot a) \bmod 30$
$e_g = (((11 \cdot a) \bmod 30) – S + L + 8) \bmod 30$
$ = (11a – S + L + 8) \bmod 30$
$ = (11a – 3 (k + 1)//4 + (8 (k + 1) + 5)//25 + 8) \bmod 30$
$ = (11a – k + k//4 + (8 (k + 1) + 5)//25 + 8) \bmod 30$

epakta	pashalna polna luna	epakta	pashalna polna luna	epakta	pashalna polna luna
1	12. april	11	2. april	21	23. marec
2	11. april	12	1. april	22	22. marec
3	10. april	13	31. marec	23	21. marec
4	9. april	14	30. marec	24	18. april
5	8. april	15	29. marec	25	18. ali 17. april
6	7. april	16	28. marec	26	17. april
7	6. april	17	27. marec	27	16. april
8	5. april	18	26. marec	28	15. april
9	4. april	19	25. marec	29	14. april
10	3. april	20	24. marec	30	13. april

epakta	pashalna polna luna	epakta	pashalna polna luna	epakta	pashalna polna luna
1	22	11	12	21	2
2	21	12	11	22	1
3	20	13	10	23	0
4	19	14	9	24	28
5	18	15	8	25	28 ali 27
6	17	16	7	26	27
7	16	17	6	27	26
8	15	18	5	28	25
9	14	19	4	29	24
10	13	20	3	30	23

$21 + ((23 - e_g) \bmod 30)$. marec   *razen za $e_g = 25$ in 24
$21 + (23 - (11a - k + k/4 + (8 (k + 1) + 5)/25 + 8) \bmod 30)) \bmod 30$
$21 + (23 - 11a + k - k/4 - (8 (k + 1) + 5)/25 - 8) \bmod 30$
$21 + (15 - 11a + k - p - q) \bmod 30$
$21 + (11a + M) \bmod 30$
$21 + d$

Gaussov algoritem – gregorijanski koledar

$$a = A \bmod 19 \quad ✓$$
$$b = A \bmod 4$$
$$c = A \bmod 7$$
$$d = (19 \cdot a + M) \bmod 30 \quad ✓$$
$$e = (2 \cdot b + 4 \cdot c + 6 \cdot d + N) \bmod 7$$
$$p = \left\lfloor \frac{8k+13}{25} \right\rfloor ✓ \quad q = \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor ✓$$
$$M = (15 + k - p - q) \bmod 30 \quad ✓$$
$$N = (4 + k - q) \bmod 7$$

$$22 + d + e.\,\text{marec}$$
$$d + e\; - 9.\,\text{april}$$

$$22 + d + e.\,\text{marec A}$$
$$21.\,\text{marec } 1700$$
$$d + e + 1 + i + 365\,(A - 1700)$$
$$i = \left\lfloor \frac{A - 1700}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A - 1700}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A - 1700}{400} \right\rfloor$$
$$i = \frac{A - 1700 - (A \bmod 4)}{4} - C + 18 + \frac{C - 17 - ((C - 1) \bmod 4)}{4}$$

$$d + e + 1 + i + 365\,(A - 1700) \bmod 7 = 0$$

$$e = (2b + 4c + 6d + N) \bmod 7,\ N = (4 + k - q) \bmod 7$$

\$e\$ pravi (kot prej) -> nedelja 21. marec 1700.
Dobimo:
\$d + e + 1 + (A – 1700 – (A \bmod 4))/4 – C + 18 + ()/4\$ … - podobno kot za julijanski koledar; izpeljavo opustimo

Izjemi

1. Če za datum velike noči dobimo 26. april, namesto tega vedno vzamemo 19. april.
2. Če dobimo $d = 28$ in $e = 6$ ter število $11 \cdot M + 11$ pri deljenju s 30 da ostanek, manjši od 19, namesto 25. aprila vzamemo 18.

- izjeme pri Gaussu = izjeme v tabeli (dokaz, da v obeh primerih velja ekvivalenca (? – odvisno od časa))

Gaussov algoritem – gregorijanski koledar

$$a = A \bmod 19$$
$$b = A \bmod 4$$
$$c = A \bmod 7$$
$$d = (19 \cdot a + M) \bmod 30$$
$$e = (2 \cdot b + 4 \cdot c + 6 \cdot d + N) \bmod 7$$

$$p = \left\lfloor \frac{8k+13}{25} \right\rfloor \qquad q = \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor$$
$$M = (15 + k - p - q) \bmod 30$$
$$N = (4 + k - q) \bmod 7$$

$$22 + d + e.\,\text{marec}$$
$$d + e \; - 9.\,\text{april}$$

zgled: Gaussov rojstni dan