Matematická analýza II (NOFY152) – DÚ 4

Taylorův polynom, určitý integrál, ODR se separovanými proměnnými

1. Pomocí Taylorova polynomu spočtěte

   (i)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} x \sin x}{\ln^4(1+x)},$$

   (ii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

   Při výpočtu nepoužívejte l'Hôspitalovo pravidlo ani znalost základních limit.

Řešení:

(i) Uvažujme následující Taylorovy rozvoje v počátku (tj. pro $x \to 0$)

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \\ \ln(1+x) &= x + o(x). \end{aligned}$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} x \sin x}{\ln^4(1+x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - 1 + \frac{1}{2} x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}{(x + o(x))^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2\cdot 3!}\right) x^4 + o(x^5)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{24} x^4}{x^4 + o(x^4)} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{24}}{1 + \frac{o(x^4)}{x^4}} + \lim_{x\to 0} \frac{\frac{o(x^4)}{x^4}}{1 + \frac{o(x^4)}{x^4}} = -\frac{1}{24}, \end{aligned}$$

kde jsme při výpočtu využili aritmetiku limit.

(ii) Užitím následujících Taylorových rozvojů v počátku (tj. pro $x \to 0$)

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \\ \ln(1+x) &= x + o(x), \\ \mathrm{e}^x &= 1 + x + o(x), \end{aligned}$$

postupně dostáváme

$$\begin{aligned} (\cos x)^{\sin x} &= \mathrm{e}^{\sin x \ln(\cos x)} = \mathrm{e}^{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)} = \mathrm{e}^{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3). \end{aligned}$$

Po dosazení tedy máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

2. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací oblasti

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le \frac{\ln \frac{1}{x}}{\left(1+x^2\right)^2} \right\}$$

kolem osy y.

Řešení: Pro hledaný objem V platí

$$V = 2\pi \int_0^1 \frac{x \ln \frac{1}{x}}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Označme si primitivní funkci integrandu

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{x \ln \frac{1}{x}}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x,$$

a metodou per partes počítejme (integrační konstanta není důležitá, tak ji nepíšeme)

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{vmatrix} u = \ln \frac{1}{x} & v = \frac{-1}{2\left(1+x^2\right)} \\ u' = -\frac{1}{x} & v' = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2} \end{vmatrix} = \frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)} - \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)} - \frac{1}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right) - \frac{x^2 \ln x}{2\left(1+x^2\right)}. \end{aligned}$$

Všimněte si, že v tomto příkladě nelze využít metodu per partes pro Newtonův integrál, neboť pro první výraz za druhým rovnítkem výše platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)} = -\infty.$$

(Podívejte se na přesné znění příslušné věty.)

Limity primitivní funkce F v krajních bodech vychází následovně

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1-} F(x) &= \lim_{x\to 1-}\left(\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right) - \frac{x^2\ln x}{2\left(1+x^2\right)}\right) = \frac{1}{4}\ln 2, \\ \lim_{x\to 0+} F(x) &= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right) - \frac{x^2\ln x}{2\left(1+x^2\right)}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1+\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{l'H}}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = 0, \end{aligned}$$

kde jsme v předposlední rovnosti využili l'Hôspitalova pravidla pro výpočet limity typu „$\frac{\text{něco}}{\infty}$“.

Nakonec tedy dostáváme

$$V = 2\pi\left(\lim_{x\to 1-} F(x) - \lim_{x\to 0+} F(x)\right) = 2\pi\left(\frac{1}{4}\ln 2 - 0\right) = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

3. Pro diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\mathrm{e}^{-x}\sqrt{1-y},$$

nalezněte

(i) všechna maximální řešení,

(ii) všechna maximální řešení splňující $y(0) = 1$.

Řešení:

(i) Diferenciální rovnice je ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y),$$

kde $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$, $g(y)=2\sqrt{1-y}$ a můžeme ji tedy řešit metodou separace proměnných. Rovnice má smysl pro x z intervalu $I=\mathbb{R}$. Na celé reálné ose máme stacionární řešení $y\equiv 1$. Zbylá řešení y hledáme z intervalu $J=(-\infty,1)$, kde je g spojitá a nenulová.

Spočtěme primitivní funkce

$$F(x)\overset{\text{def}}{=}\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}-c,\quad c\in\mathbb{R},$$
$$G(y)\overset{\text{def}}{=}\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y=\int \frac{1}{2\sqrt{1-y}}\,\mathrm{d}y=-\sqrt{1-y}.$$

Z jejich rovnosti

$$\sqrt{1-y}=\mathrm{e}^{-x}+c,$$

a nezápornosti levé strany potom dostáváme

- $c\geq 0 \implies x\in\mathbb{R}$,
- $c<0 \implies x\in(-\infty,-\ln(-c))$.

Všechna maximální řešení tedy jsou

$$y(x)=1,\quad x\in\mathbb{R}$$
$$y(x)=1-\left(\mathrm{e}^{-x}+c\right)^2,\quad x\in\mathbb{R},\quad c\geq 0,$$
$$y(x)=\begin{cases}1-\left(\mathrm{e}^{-x}+c\right)^2, & x\in(-\infty,-\ln(-c)),\\ 1, & x\in[-\ln(-c),+\infty),\end{cases}\quad c<0,$$

kde jsme v posledním případě navíc slepili nalezené řešení se stacionárním.

(ii) Všimněme si nejdřív, že stacionární řešení $y\equiv 1$ splňuje počáteční podmínku $y(0)=1$. Dále najděme hodnotu konstanty c, pro kterou bude i netriviální řešení splňovat počáteční podmínku

$$1=y(0)=1-(1+c)^2 \implies c=-1.$$

Díky napojování na stacionární řešení pak dostáváme, že i všechna netriviální řešení s $c\leq -1$ splňují počáteční podmínku.

Maximální řešení splňující počáteční podmínku $y(0)=1$ tedy jsou

$$y(x)=1,\quad x\in\mathbb{R}$$
$$y(x)=\begin{cases}1-\left(\mathrm{e}^{-x}+c\right)^2, & x\in(-\infty,-\ln(-c)),\\ 1, & x\in[-\ln(-c),+\infty),\end{cases}\quad c\leq -1.$$