Matematická analýza I (NOFY151) – 1. zápočtový test

22. října 2019

1. [2 b] Ukažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$
Pro důkaz použijte matematickou indukci.

Řešení: Pro $n = 1$ máme
$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2+1}$$
a rovnost je tedy splněna. Ukažme, že pokud rovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$ platí i pro $n+1$.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &\overset{\text{IP}}{=} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{n}{2n+1} = \frac{1+2n^2+3n}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.\end{aligned}$$

2. [2 b] Ukažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}.$$
Pro důkaz použijte matematickou indukci.

Řešení: Pro $n = 1$ je máme
$$\frac{1}{1} \leq 2\sqrt{1},$$
a nerovnost je tedy splněna. Ukažme, že pokud rovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$ platí i pro $n+1$. Podle indukčního předpokladu máme
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \overset{\text{IP}}{\leq} \frac{1}{n+1} + 2\sqrt{n}.$$
Stačí tedy dokázat nerovnost
$$\frac{1}{n+1} + 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}.$$
Odečtením $2\sqrt{n}$ a rozšířením pravé strany o $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ dostaneme
$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$
což po jednoduché úpravě vede na
$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq 2(n+1).$$
Poslední nerovnost už však platí, neboť
$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} = 2\sqrt{n+1} \leq 2(n+1).$$

3. [2 b] Podmnožina reálných čísel P je definována předpisem
$$P \overset{\text{def}}{=} \left\{ \frac{1-x}{x} \mid x > 0 \right\}.$$

Nalezněte její minimum, maximum, infimum a supremum (pokud existují). Ověřte z definice příslušných pojmů.

Řešení: Platí $P = (-1, +\infty)$. (Nakreslete si graf funkce $(1-x)/x$.)

- $\nexists \min P$:
$$\forall m \in P \quad \exists x \in P \quad x < m. \quad \left(\text{Volme např. } x := \frac{m-1}{2} \in P.\right)$$
- $\inf P = -1$:
$$\forall x \in P \quad -1 \leq x \quad \wedge \quad \forall i > -1 \quad \exists x \in P \quad x < i. \quad \left(\text{Volme např. } x := \frac{i-1}{2} \in P.\right)$$
- $\nexists \max P$:
$$\forall M \in P \quad \exists x \in P \quad x > M. \quad (\text{Volme např. } x := 2M \in P.)$$
- $\nexists \sup P$: (stačí ověřit, že neexistuje horní závora)
$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \exists x \in P \quad x > s. \quad (\text{Volme např. } x := 2s \in P.)$$

4. [2 b] Spočtěte (bez použití l'Hôpitalova pravidla nebo Taylorova rozvoje)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

Řešení:
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}} \cdot \frac{\sqrt{1 + x\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{1 + x\sin x} + \sqrt{\cos x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1 + x\sin x - \cos x} \cdot \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1 + x\sin x} + \sqrt{\cos x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x} + \frac{1-\cos x}{x^2}} \cdot 2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{4}{3},
\end{aligned}$$
kde jsme využili znalost limit
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

5. [2 b] Pro $n \in \mathbb{N}$ spočtěte (bez použití l'Hôpitalova pravidla nebo Taylorova rozvoje)
$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}.$$

Řešení:
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdot\ldots\cdot(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} &= \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \cdots \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdots \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1} \\
&= \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!},
\end{aligned}$$
kde jsme v poslední rovnosti využili znalost limity
$$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+y}-1}{y} = \frac{1}{n},$$
a substituci $y = x - 1$.