Matematická analýza II (NOFY152) – DÚ 7

Topologické pojmy v $\mathbb{R}^d$, funkce více proměnných

1. Najděte vnitřek, uzávěr a hranici množiny $A \overset{\text{def}}{=} M \setminus K$, kde

$$M \overset{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1,\ 0 < y \le 2\},$$
$$K \overset{\text{def}}{=} \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = 1\Big\}.$$

Řešení: Platí

$$A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| < 1,\ 0 < y < 2\} \setminus K,$$
$$\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| \le 1,\ 0 \le y \le 2\},$$
$$\partial A = \{(\pm 1, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le 2\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| \le 1\} \cup \{(x,2) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| \le 1\} \cup K.$$

Pozorujeme, že $A^\circ \cup \partial A = \overline{A}$.

2. Pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ platí, že počátek leží v uzávěru množiny

$$M \overset{\text{def}}{=} \{(k^\alpha \cos k, k^\alpha \sin k) : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}?$$

Zdůvodněte.

Řešení: Nejprve připomeňme definici.

1. Je-li $\alpha = \frac{p}{q}$ racionální, kde p, q jsou nesoudělné a q liché, pak $k^\alpha = k^{\frac{p}{q}}$ je definováno pro každé $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,
2. Není-li α tvaru jako v 1, pak $k^\alpha = e^{\alpha \ln k}$ je definováno jen pro $k > 0,\ k \in \mathbb{Z}$. V tomto případě můžeme uvažovat jen $k > 0$.

Máme najít všechna α tak, aby pro každé $\varepsilon > 0$ platilo $U_\varepsilon((0,0)) \cap M \neq \emptyset$. Zde

$$U_\varepsilon((0,0)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon\},$$

je otevřená koule o poloměru $\varepsilon > 0$ se středem v počátku. Platí

$$\|(k^\alpha \cos k, k^\alpha \sin k)\| = |k^\alpha| = |k|^\alpha.$$

Je-li $\alpha \ge 0$, pak $|k|^\alpha \ge 1$ a tedy $U_{\frac{1}{2}}((0,0)) \cap M = \emptyset$. Je-li naopak $\alpha < 0$, pak $|k|^\alpha$ klesá pro $k \to +\infty$ monotonně k nule, existuje tedy $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $k \ge k_0$ platí $|k|^\alpha < \varepsilon$. Tedy $U_\varepsilon((0,0)) \cap M \neq \emptyset$ pro každé $\varepsilon > 0$.

Alternativně lze argumentovat přes hromadné body, což jsou v tomto případě body, které dostaneme pro $k \to +\infty$ nebo $k \to -\infty$. Podobné úvahy jako výše pak vedou k závěru, že $(0,0)$ je hromadný bod dané množiny, jen pokud $\alpha < 0$.

Závěr: Bod $(0,0)$ leží v uzávěru množiny M jen pro $\alpha < 0$.

3. Je množina

$$M = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 > 1,\ |x| \le 1,\ |y| \le 1\Big\}$$

omezená? Zdůvodněte.

Řešení: Z definice M plyne omezení $x^2 + y^2 > z^2 + 1$. Dále pro $(x,y,z) \in M$ platí

$$|x| + |y| \le 2, \qquad 4 = 2^2 \ge (|x|+|y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \ge x^2 + y^2 > z^2 + 1.$$

Tudíž $z^2 < 3$ a $|z| < \sqrt{3}$. Množina M leží uvnitř omezené množiny

$$\{(x, y, z) : \ |z| < \sqrt{3}, \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\},$$

která je podmnožinou krychle se středem v počátku a délkou strany $2\sqrt{3}$, tj.

$$M \subset B_{\sqrt{3}}(0) = \left\{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}|_\infty < \sqrt{3}\right\}.$$

M je tedy omezená.

4. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Rozhodněte, zda platí následující rovnosti nebo alespoň jedna inkluze, tj. dokažte nebo najděte protipříklady,
   (i) $\overline{\partial A} = \partial \overline{A}$
   (ii) $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$
   (iii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Řešení:

(i) Inkluze $\overline{\partial A} \subseteq \partial \overline{A}$ neplatí. Stačí vzít $A = \mathbb{Q}$. Pak $\overline{\partial A} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ a $\partial \overline{\mathbb{Q}} = \partial \mathbb{R} = \emptyset$.

Zkusme nyní $\supseteq$. Je-li $x \in \partial \overline{A}$ a $\varepsilon > 0$, pak $U_\varepsilon(x) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ a $U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}) \neq \emptyset$. Jelikož $(\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}) \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus A)$, pak i $U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$. Zvolme $x' \in U_\varepsilon(x) \cap \overline{A}$. Pak $U_\varepsilon(x)$ je otevřené okolí x' a jelikož $x' \in \overline{A}$, pak $U_\varepsilon(x)$ musí obsahovat bod z A. Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ platí $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Každé otevřené okolí bodu x tedy protne A i $\mathbb{R}^n \setminus A$. To ale z definice znamená, že $x \in \partial A$ a tedy i $x \in \overline{\partial A}$. Dokázali jsme $\overline{\partial A} \supseteq \partial \overline{A}$.

(ii) Inkluze $\partial(A \cup B) \supseteq \partial A \cup \partial B$ neplatí. Stačí vzít otevřené intervaly $A = (-1, 1)$ a $B = (0, 2)$. Pak $\partial(A \cup B) = \partial(-1, 2) = \{-1, 2\}$ a $\partial A \cup \partial B = \{-1, 1\} \cup \{0, 2\} = \{-1, 1, 0, 2\}$.

Obrácená inkluze $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ platí a nyní ji dokážeme nepřímo. Není-li $x \in \partial A \cup \partial B$, pak $x \notin \partial A$ a $x \notin \partial B$. Pak ale x je vnitřní bod A nebo $\mathbb{R}^n \setminus A$ a současně je to vnitřní bod B nebo $\mathbb{R}^n \setminus B$. Je-li $x \in A^o$ nebo $x \in B^o$, pak máme vyhráno, neboť pak je x nutně i vnitřním bodem $A \cup B$. Zbývá tedy probrat případ, kde x je vnitřním bodem $\mathbb{R}^n \setminus A$ i $\mathbb{R}^n \setminus B$. Najdeme $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tak, aby $U_{\varepsilon_1}(x) \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus A)$ a $U_{\varepsilon_2}(x) \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus B)$. Pak ale $U_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$, kde $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Tudíž x je vnitřní bodem $\mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$ a nemůže tedy ležet na hranici této množiny. Ukázali jsme implikaci $x \notin \partial A \cup \partial B \Rightarrow x \notin \partial(A \cup B)$ a tím i $x \in (\partial A \cup \partial B) \Rightarrow x \in \partial A \cup \partial B$. Důkaz je hotov.

(iii) Inkluze $\overline{A \cap B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ neplatí. Stačí vzít otevřené intervaly $A = (-1, 0)$ a $B = (0, 1)$. Pak $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ a současně $\overline{A} \cap \overline{B} = [-1, 0] \cap [0, 1] = \{0\}$.

Dokážeme $\subseteq$. Je-li $x \in \overline{A \cap B}$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí $U_\varepsilon(x) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Speciálně $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ a $U_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset$. Ukázali jsme, že libovolné otevřené okolí x má netriviální průnik s A i s B. Tedy $x \in \overline{A}$ a $x \in \overline{B}$, nutně tedy $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

5. Spočtěte limity (pokud existují)
   (i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2 + xy}{|x| + |y|}$,
   (ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (\cos(x + y))^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

Řešení:

(i) Pomocí Youngovy nerovnosti dostáváme

$$0 \leq \left|\frac{x^2 - y^2 + xy}{|x| + |y|}\right| \leq \frac{x^2 + y^2 + |xy|}{|x| + |y|} \leq \frac{3}{2}\frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \leq \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{2}|(x, y)|_2,$$

odkud vidíme, že zadaná limita je rovna 0. V poslední nerovnosti jsme navíc využili

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \leq 1 \quad \iff \quad x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2 \quad \iff \quad 0 \leq |xy|.$$

Alternativně můžeme postupovat takto

$$0 \leq \left| \frac{x^2 - y^2 + xy}{|x| + |y|} \right| \leq \frac{x^2 + y^2 + |xy|}{|x| + |y|} \leq \frac{|x|^2 + |y|^2 + 2|xy|}{|x| + |y|} = \frac{(|x| + |y|)^2}{|x| + |y|} = |x| + |y| = |(x, y)|_1.$$

(ii) Ukažme, že limita neexistuje. Na paprsku $y = x$ dostáváme

$$\lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{\ln(\cos 2x)}{2x^2}} = \mathrm{e}^{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{2x^2}} = \mathrm{e}^{\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{2x^2}} = \mathrm{e}^{-1},$$

kde jsme využili věty o limitě složené funkce a limitě součinu a znalost základních limit

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{2}.$$

Na druhou stranu na paprsku $y = -x$ máme

$$\lim_{x \to 0} (\cos 0)^{\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x \to 0} 1^{\frac{1}{2x^2}} = 1.$$

Protože se limity neshodují, zadaná limita neexistuje.

6. Jestliže dodefinujeme funkce z předchozího příkladu v počátku nulou, rozhodněte, zda jsou takto definované funkce spojité nebo omezené na nějakém okolí počátku.

Řešení:

(i) Podle Příkladu 5(i) víme, že funkce

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{x^2 - y^2 + xy}{|x| + |y|} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

je spojitá v počátku, a tudíž je i omezená na nějakém okolí počátku (podle věty o nabývání extrémů pro spojitou funkci na kompaktní množině).

(ii) Podle Příkladu 5(ii) není funkce

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (\cos(x + y))^{\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

spojitá v počátku. V dalším uvažujme funkci f na množině

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| < \frac{\pi}{2} \right\},$$

neboť na takové množině je f definovaná a zároveň obsahuje počátek. Pro $(0, 0) \neq (x, y) \in M$ je z definice funkce f omezená zdola, neboť

$$(\cos(x + y))^{\frac{1}{x^2 + y^2}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(\cos(x + y))}{x^2 + y^2}} > 0.$$

Dále platí

$$\mathrm{e}^{\frac{\ln(\cos(x+y))}{x^2+y^2}} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\ln(\cos(x + y))}{x^2 + y^2} \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(x + y) \leq 1,$$

což je splněno pro všechna $(x, y) \in M$, a tedy f je na této množině omezená i shora. Existuje tedy okolí počátku, na kterém je funkce f omezená.

7. Určete definiční obor následujících funkcí a spočtěte jejich první parciální derivace

(i) $f(x, y, z) = \cos(x + y) \sin(x - y + z)$,

(ii) $f(x, y) = \mathrm{e}^{\operatorname{tg}(xy)}$.

Řešení:

(i) Zřejmě platí $D_f = \mathbb{R}^3$. S využitím součtového vzorce $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$, potom pro první parciální derivace na celém D_f dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\sin(x+y)\sin(x-y+z) + \cos(x+y)\cos(x-y+z) = \cos(2x+z),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\sin(x+y)\sin(x-y+z) - \cos(x+y)\cos(x-y+z) = -\cos(2y-z),$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \cos(x+y)\cos(x-y+z).$$

(ii) Z podmínky $xy \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ dostáváme

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \left(x, \frac{(2k+1)\pi}{2x} \right) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Na D_f potom máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y \mathrm{e}^{\operatorname{tg}(xy)}}{\cos^2(xy)},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x \mathrm{e}^{\operatorname{tg}(xy)}}{\cos^2(xy)}.$$

8. Najděte směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+2x^2y+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

v počátku v obecném směru $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $u^2+v^2=1$.

Řešení: Označme si $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} (u,v)$. Podle definice derivace ve směru máme

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}((0,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(u,v)) - f((0,0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f((hu,hv))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4u^4+2h^3u^2v+h^3v^3}{h^2u^2+h^2v^2}}{h}.$$

S využitím $u^2+v^2=1$, pak dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}((0,0)) = \lim_{h\to 0}\left(hu^4+2u^2v+v^3\right) = 2u^2v+v^3.$$