Počítání limit funkcí

Mark Dostalík
mark.dostalik@gmail.com
17. listopadu 2019

Binomická věta

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Faktorizace $x^n - y^n$

$$x^n - y^n = (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k\right).$$

Aritmetika limit

Pro $x_0 \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x),$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)},$$

pokud pravé strany mají smysl v $\mathbb{R}^*$. Výrazy

$$\pm(+\infty-\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \pm\infty\cdot 0, \qquad \frac{a}{0}.$$

kde $a \in \mathbb{R}^*$, nemají smysl v $\mathbb{R}^*$.

Zachování nerovnosti v limitě

$$f \le g \quad \text{na } \mathcal{P}(x_0) \implies \lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Dva strážníci

2

Důležité limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{n},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Limita funkce tvaru $f(x)^{g(x)}$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln[f(x)]}$$

L'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokud nastává jedna z následujících možností

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$,
2. $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$.

Aplikace l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\ln x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 0+} x^b \ln x = 0,$$

kde $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$.