Matematická analýza I (NOFY151) – 1. zápočtový test (opravný)

29. října 2019

1. [2 b] Dokažte pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ matematickou indukcí Moivreovu větu

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx).$$

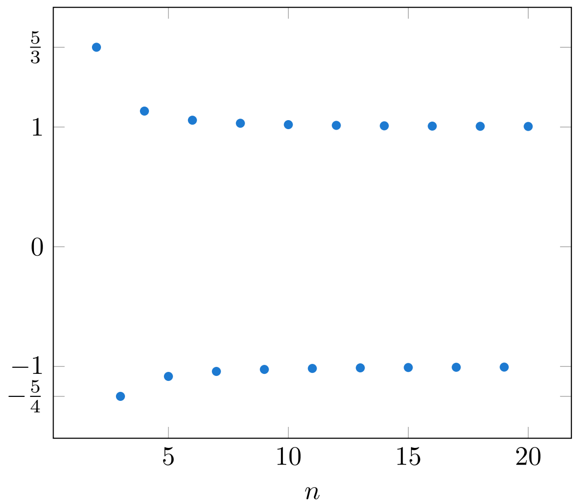
> **Řešení:** Pro $n = 1$ máme
> $$\cos x + \mathrm{i}\sin x = \cos x + \mathrm{i}\sin x,$$
> a rovnost je tedy splněna. Ukažme, že pokud rovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$ platí i pro $n + 1$.
> $$\begin{aligned}(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^{n+1} &= (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n \overset{\mathrm{IP}}{=} (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)) \\ &= \cos x\cos(nx) - \sin x\sin(nx) + \mathrm{i}(\sin x\cos(nx) + \cos x\sin(nx)) \\ &= \cos((n+1)x) + \mathrm{i}\sin((n+1)x),\end{aligned}$$
> kde jsme v poslední rovnosti využili goniometrické vzorce
> $$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y,\\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y.\end{aligned}$$

2. [2 b] Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost
$$4^{n-1} \geq n^2.$$
Pro důkaz použijte matematickou indukci.

> **Řešení:** Pro $n = 1$ dostaváme
> $$1 \geq 1,$$
> nerovnost je tedy splněna. Ukažme, že pokud rovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$ platí i pro $n + 1$. Podle indukčního předpokladu máme
> $$4^n = 4 \cdot 4^{n-1} \overset{\mathrm{IP}}{\geq} 4n^2.$$
> Stačí tedy dokázat nerovnost
> $$4n^2 \geq (n+1)^2,$$
> která ale po odmocnění a snadné úpravě vede na
> $$n \geq 1.$$

3. [2 b] Podmnožina reálných čísel P je definována předpisem
$$P \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2-1} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \right\}.$$
Nalezněte její minimum, maximum, infimum a supremum (pokud existují). Ověřte z definice příslušných pojmů.

> **Řešení:** Napišme si prvních pár prvků množiny
> $$P = \left\{ \frac{5}{4}, -\frac{5}{3}, \frac{17}{15}, -\frac{13}{12}, \dots \right\}.$$
> Tušíme, že pro velká n se prvky budou blížit k ± 1, a tedy kandidát na největší prvek množiny bude první prvek $\frac{5}{4}$ a na nejmenší prvek druhý prvek $-\frac{5}{3}$. Pro lepší představu je níže vykresleno prvních 19 prvků množiny P.



- $\min P = -\frac{5}{4}$:

  Chceme ukázat, že pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

  $$-\frac{5}{4} \leq (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2-1}.$$

  Pro sudá n nerovnost zřejmě platí. Stačí tedy dokázat, že pro $n = \{3, 5, \dots\}$ platí

  $$-\frac{5}{4} \leq -\frac{n^2+1}{n^2-1}.$$

  Snadnou úpravou se ale ukáže, že to je ekvivalentní s $n \geq 3$.

- $\inf P = -\frac{5}{4}$:

  Protože existuje $\min P$, existuje i $\inf P$ a jejich hodnoty se rovnají.

- $\max P = \frac{5}{3}$:

  Chceme ukázat, že pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

  $$(-1)^n \frac{n^2+1}{n^2-1} \leq \frac{5}{3}.$$

  Pro $n = \{3, 5, \dots\}$ nerovnost zřejmě platí. Stačí tedy dokázat, že pro sudá n platí

  $$\frac{n^2+1}{n^2-1} \leq \frac{5}{3}.$$

  Snadnou úpravou se ale ukáže, že to je ekvivalentní s $n \geq 2$.

- $\sup P = \frac{5}{3}$:

  Protože existuje $\max P$, existuje i $\sup P$ a jejich hodnoty se rovnají.

4. [2 b] Spočtěte (bez použití l'Hôpitalova pravidla nebo Taylorova rozvoje)

$$\lim_{x \to 0} (x + \mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení: Platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(x+\mathrm{e}^x) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(x+\mathrm{e}^x)\cdot \frac{x+\mathrm{e}^x-1}{x+\mathrm{e}^x-1} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)\cdot \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\mathrm{e}^x)}{x+\mathrm{e}^x-1} \\ &= (1+1)\cdot 1 = 2,\end{aligned}$$

kde v předposlední rovnosti jsme využili znalost limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1, \qquad \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1,$$

a substituci $y = x+\mathrm{e}^x-1$.

Konečně dostáváme

$$\lim_{x\to 0}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(x+\mathrm{e}^x)} = \mathrm{e}^2.$$

5. [2 b] Pro $n, m \in \mathbb{N}$ spočtěte (bez použití l'Hôpitalova pravidla nebo Taylorova rozvoje)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x^2}-\sqrt[m]{1-x^2}}{\sin(x^2)}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x^2}-\sqrt[m]{1-x^2}}{\sin(x^2)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x^2}-\sqrt[m]{1-x^2}}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin(x^2)} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[n]{1+x^2}-1}{x^2}-\frac{\sqrt[m]{1-x^2}-1}{x^2}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin(x^2)} \\ &= \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\cdot 1 = \frac{m+n}{mn},\end{aligned}$$

kde v předposlední rovnosti jsme využili znalost limit

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1, \qquad \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[n]{1\pm y}-1}{y}=\pm\frac{1}{n},$$

a substituci $y = x^2$.