Počítání limit funkcí

Mark Dostalík
mark.dostalik@gmail.com
29. října 2019

Binomická věta

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Speciálně, pro $n = 2, 3$

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2,\\
(x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2,\\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,\\
(x-y)^3 &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.
\end{aligned}$$

Faktorizace $x^n - y^n$

$$x^n - y^n = (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k\right).$$

Speciálně, pro $n = 2, 3$

$$\begin{aligned}
x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y),\\
x^3 - y^3 &= (x-y)\big(x^2 + xy + y^2\big).
\end{aligned}$$

Aritmetika limit

Pro $x_0 \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),\\
\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x),\\
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)},
\end{aligned}$$

pokud pravé strany mají smysl v $\mathbb{R}^*$. Výrazy

$$\pm(+\infty - \infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \pm\infty \cdot 0, \qquad \frac{a}{0}.$$

kde $a \in \mathbb{R}^*$, nemají smysl v $\mathbb{R}^*$.

Důležité limity

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} &= \frac{1}{n},\\
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} &= 1,\\
\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2},\\
\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} &= 1,\\
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1.
\end{aligned}$$

Limita funkce tvaru $f(x)^{g(x)}$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to x_0} g(x) \ln[f(x)]}$$