Matematická analýza I (NOFY151) – 1. zápočtový test (opravný)

29. října 2019

1. [2 b] Dokažte pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ matematickou indukcí Moivreovu větu

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx).$$

Řešení: Pro $n = 1$ máme

$$\cos x + \mathrm{i}\sin x = \cos x + \mathrm{i}\sin x,$$

a rovnost je tedy splněna. Ukažme, že pokud rovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$ platí i pro $n+1$.

$$\begin{aligned}(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^{n+1} &= (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n \overset{\text{IP}}{=} (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx))\\ &= \cos x\cos(nx) - \sin x\sin(nx) + \mathrm{i}(\sin x\cos(nx) + \cos x\sin(nx))\\ &= \cos((n+1)x) + \mathrm{i}\sin((n+1)x),\end{aligned}$$

kde jsme v poslední rovnosti využili goniometrické vzorce

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y,\\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y.\end{aligned}$$

2. [2 b] Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$4^{n-1} \geq n^2.$$

Pro důkaz použijte matematickou indukci.

Řešení: Pro $n = 1, 2, 3$ pořadě dostáváme

$$\begin{aligned}1 &\geq 1,\\ 4 &\geq 4,\\ 16 &\geq 9,\end{aligned}$$

a pro tato n je tedy nerovnost splněna. Ukažme, že pokud rovnost platí pro $n \geq 3$ platí i pro $n+1$. Podle indukčního předpokladu máme

$$4^n = 4 \cdot 4^{n-1} \overset{\text{IP}}{\geq} 4n^2.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$4n^2 \geq (n+1)^2,$$

která je ekvivalentní s

$$2n^2 - 2n - 1 \geq 0.$$

Snadno zjistíme, že kořeny funkce $f(x) \overset{\text{def}}{=} 2x^2 - 2x - 1$ jsou $1 \pm \sqrt{3}$. Pro $x > 0$ je f nezáporná na intervalu $[1+\sqrt{3}, +\infty)$. Protože ale $1 + \sqrt{3} < 3 \leq n$, poslední nerovnost je splněna.

3. [2 b] Podmnožina reálných čísel P je definována předpisem

$$P \overset{\text{def}}{=} \left\{ (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2-1} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \right\}.$$

Nalezněte její minimum, maximum, infimum a supremum (pokud existují). Ověřte z definice příslušných pojmů.

Řešení:

- $\min P = -\frac{5}{4}$:

Chceme ukázat, že pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$-\frac{5}{4} \leq (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2-1}.$$

Pro sudá n nerovnost zřejmě platí. Stačí tedy dokázat, že pro $n = \{3, 5, \dots\}$ platí

$$-\frac{5}{4} \leq -\frac{n^2+1}{n^2-1}.$$

Snadnou úpravou se ale ukáže, že to je ekvivalentní s $n \geq 3$.

- $\inf P = -\frac{5}{4}$:

  Protože existuje $\min P$, existuje i $\inf P$ a jejich hodnoty se rovnají.

- $\max P = \frac{5}{3}$:

  Chceme ukázat, že pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

  $$(-1)^n \frac{n^2+1}{n^2-1} \leq \frac{5}{3}.$$

  Pro $n = \{3, 5, \dots\}$ nerovnost zřejmě platí. Stačí tedy dokázat, že pro sudá n platí

  $$\frac{n^2+1}{n^2-1} \leq \frac{5}{3}.$$

  Snadnou úpravou se ale ukáže, že to je ekvivalentní s $n \geq 2$.

- $\sup P = \frac{5}{3}$:

  Protože existuje $\max P$, existuje i $\sup P$ a jejich hodnoty se rovnají.

4. [2 b] Spočtěte (bez použití l'Hôpitalova pravidla nebo Taylorova rozvoje)

$$\lim_{x \to 0} (x + \mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení: Platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(x + \mathrm{e}^x) &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(x + \mathrm{e}^x) \cdot \frac{x + \mathrm{e}^x - 1}{x + \mathrm{e}^x - 1} \\
&= \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + \mathrm{e}^x)}{x + \mathrm{e}^x - 1} \\
&= (1+1) \cdot 1 = 2,
\end{aligned}$$

kde v předposlední rovnosti jsme využili znalost limit

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1,$$

a substituci $y = x + \mathrm{e}^x - 1$.

Konečně dostáváme

$$\lim_{x \to 0} (x + \mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(x + \mathrm{e}^x)} = \mathrm{e}^2.$$

5. [2 b] Pro $n, m \in \mathbb{N}$ spočtěte (bez použití l'Hôpitalova pravidla nebo Taylorova rozvoje)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x^2} - \sqrt[m]{1-x^2}}{\sin(x^2)}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x^2} - \sqrt[m]{1-x^2}}{\sin(x^2)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x^2} - \sqrt[m]{1-x^2}}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(x^2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt[n]{1+x^2} - 1}{x^2} - \frac{\sqrt[m]{1-x^2} - 1}{x^2} \right) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(x^2)} \\
&= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \cdot 1 = \frac{m+n}{mn},
\end{aligned}$$

kde v předposlední rovnosti jsme využili znalost limit

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[n]{1 \pm y} - 1}{y} = \pm\frac{1}{n},$$

a substituci $y = x^2$.