Matematická analýza II (NOFY152) – DÚ 2

Číselné řady s obecnými členy

Použitím kritérií pro konvergenci řad rozhodněte o konvergenci (absolutní i neabsolutní, je-li to možné) či divergenci následujících řad. Pokud řada obsahuje parametry, proveďte vzhledem k nim diskuzi.

1.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

Řešení: Absolutní konvergence je zřejmě vyloučená, neboť

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

a harmonická řada diverguje.

Ukažme, že zadaná řada konverguje neabsolutně. Všimněme si, že můžeme psát $a_n = b_n c_n$, kde $b_n := \frac{1}{n}$ a c_n jsou prvky posloupnosti

$$\{+1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, \dots\}$$

Označme C_n n-tý částečný součet posloupnosti c_n. Posloupnost C_n je tvaru

$$\{1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, \dots\}.$$

Vidíme, že se jedná o periodickou posloupnost s periodou 6. Speciálně, $0 \leq C_n \leq 3,\ n \in \mathbb{N}$, a posloupnost $\{C_n\}$ je tedy omezená.

Protože navíc b_n je klesající posloupnost, která konverguje k nule (to se běžně zapisuje jako $b_n \searrow 0$ pro $n \to +\infty$), jsou splněny všechny předpoklady Dirichletova kritéria pro konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n c_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, a tato řada tedy konverguje.

Závěr: Řada konverguje neabsolutně.

2.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Řešení: Označme jako M množinu těch $x \in \mathbb{R}$, pro která řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \tag{1}$$

konverguje a jako $s(x),\ x \in M$, součet této řady. Pak je zřejmé, že $0 \in M,\ s(0) = 0$. Dále je-li $x \in M$ pak zřejmě i $-x \in M$ a pro takové x platí $s(-x) = -s(x)$. Můžeme se tedy omezit na případ $x > 0$.

Zvolme nyní pevně $x > 0$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $x < 3^{n_0}\frac{\pi}{2}$. Pak pro $n \geq n_0$ platí $0 < \frac{x}{3^n} < \frac{\pi}{2}$ a tedy $0 < \sin(\frac{x}{3n}) < 1$. Tudíž řada

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \tag{2}$$

obsahuje pouze kladné členy. Dále z Heineho věty dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n \sin(\frac{x}{3^n})}{x(\frac{2}{3})^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\frac{x}{3^n})}{\frac{x}{3^n}} = 1.$$

Jelikož
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} x\left(\frac{2}{3}\right)^n = x\left(\frac{2}{3}\right)^{n_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = x\left(\frac{2}{3}\right)^{n_0}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3x\left(\frac{2}{3}\right)^{n_0},$$
pak z limitního srovnávacího kritéria plyne, že řada (2) konverguje. Tudíž konverguje i řada (1), a to dokonce absolutně, neboť

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|2^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| &= \sum_{n=1}^{n_0-1}\left|2^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| + \sum_{n=n_0}^{+\infty}\left|2^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| \\ &= \sum_{n=1}^{n_0-1}\left|2^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| + \sum_{n=n_0}^{+\infty}2^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right) < +\infty.\end{aligned}$$

Je-li $x<0$, pak

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|2^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| &= \sum_{n=1}^{n_0-1}\left|2^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| + \sum_{n=n_0}^{+\infty}\left|2^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| \\ &= \sum_{n=1}^{n_0-1}\left|2^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| + \sum_{n=n_0}^{+\infty}2^n\sin\left(\frac{-x}{3^n}\right) < +\infty.\end{aligned}$$

Závěr: Řada konverguje absolutně pro každé $x\in\mathbb{R}$.

3.
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$$

Řešení: Ukažme, že není splněná nutná podmínka konvergence. Protože $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ je ekvivalentní $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=0$ pro každou posloupnost $\{a_n\}$, stačí hledat limitu

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right)^n \\ &= \lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right)}.\end{aligned}$$

Dále platí

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right) &= \lim_{n\to+\infty}n\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln e\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}n\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O(n^{-3})\right)-1\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}n\left(-\frac{1}{2n}+O(n^{-2})\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}+O(n^{-1}) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Tudíž

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Vidíme, že není splněna nutná podmínka pro konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$$

a řada tedy nekonverguje.

4.

$$\sum_{n=10}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln\ln\ln n}$$

Řešení: Nejprve zkoumejme, zda daná řada nekonverguje absolutně. Funkce $\frac{1}{\ln\ln\ln x}$ je záporná pro $x \in [10, e^e)$ a kladná pro $x \in (e^e, +\infty)$. (V bodě $x = e^e \approx 15.154$ není definovaná, neboť $\ln\ln\ln e^e = 0$.) Vynecháme tedy prvních pět členů, u kterých bychom museli řešit znaménka a budeme vyšetřovat konvergenci/divergenci řady

$$\sum_{n=16}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln\ln\ln n} \right| = \sum_{n=16}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln\ln\ln n}. \tag{3}$$

Zkoumejme nejdřív chování posloupnosti $\{\sqrt[n]{n}\}$. Položme

$$f(x) := \sqrt[x]{x} = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}.$$

Derivace funkce f

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

je pro $x \in (e, +\infty)$ záporná a f je tedy na tomto intervalu klesající. Navíc platí

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}} \overset{\text{l'H}}{=} \mathrm{e}^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

kde jsme využili větu o limitě složené funkce a l'Hôspitalovo pravidlo pro výpočet limity funkce typu "$\frac{\text{něco}}{\infty}$". Dohromady tedy dostáváme, že posloupnost $\{\sqrt[n]{n}\}$ je omezená a klesající pro $n \geq 10$. Speciálně, pro $n \geq 16$ je $\sqrt[n]{n} > 1$ a jistě pak platí

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln\ln\ln n} > \frac{1}{\ln\ln\ln n} > \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)(\ln\ln\ln n)}. \tag{4}$$

Funkce

$$g(x) := \frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)(\ln\ln\ln x)},$$

je na intervalu $[16, +\infty)$ součinem spojitých, kladných a klesajících funkcí, a je tedy sama spojitá, kladná a klesající. Protože platí

$$\int_{16}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)(\ln\ln\ln x)} \,\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} t &= \ln\ln\ln x \\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)} \mathrm{d}x \end{aligned} \right| = \int_{\ln\ln\ln 16}^{+\infty} \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t = [\ln t]_{\ln\ln\ln 16}^{+\infty} = +\infty,$$

Cauchyho integrální kritérium dává divergenci řady $\sum_{n=16}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)(\ln\ln\ln n)}$ a nerovnost (4) spolu se srovnávacím kritériem pak i divergenci řady (3). Zadaná řada tedy nekonverguje absolutně.

Vraťme se ke zkoumání konvergence původní řady. Nejprve ukažme, že řada

$$\sum_{n=10}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln\ln\ln n}, \tag{5}$$

konverguje. Podle Leibnizova kritéria stačí ukázat, že posloupnost

$$a_n := \frac{1}{\ln\ln\ln n},$$

je od jistého $n_0 \in [10, +\infty)$ monotonní a $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Druhý předpoklad zřejmě platí, ověřme tedy monotonii. Protože funkce $\ln\ln\ln x$ vznikne složením tří rostoucích funkcí, je sama rostoucí a navíc, jak už víme, je pro $x > e^e \approx 15.154$ kladná. Funkce $\frac{1}{\ln\ln\ln x}$ je tudíž na intervalu $(e^e, +\infty)$ klesající, a tedy i posloupnost a_n je pro $n \geq n_0 = 16$ klesající.

Konvergenci zadané řady nám nyní dá Abelovo kritérium, neboť, jak už víme, řada (5) konverguje a posloupnost $\{\sqrt[n]{n}\}$ je omezená a klesající pro $n \geq 10$.

Závěr: Řada konverguje neabsolutně.

5.
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n}$$

Řešení: V následujícím budeme hojně využívat faktu, že posloupnosti $\{\sin(an)\}$, $\{\cos(an)\}$ mají omezené částečné součty pro $a \in \{1,2\}$. (Viz Tvrzení 9.3.5. ve skriptech Roberta Černého a Milana Pokorného.)

Dále se nám bude hodit, že funkce $\sin(\frac{a}{n})$, $a \in \{1,2\}$ je omezená, kladná a klesající pro $n \geq 2$ a funkce $\cos(\frac{a}{n})$, $a \in \{1,2\}$ je omezená, kladná a rostoucí pro $n \geq 2$. To plyne z faktu, že pro $a \in \{1,2\}$ a $n \geq 2$ platí
$$0 < \frac{a}{n} < \frac{\pi}{2}.$$

Nejprve ukažme, že daná řada nekonverguje absolutně, tj. vyšetřujme řadu
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)\right|}{\ln\ln n}, \tag{6}$$
kde jsme z praktických důvodů vynechali první člen posloupnosti, neboť $\ln\ln 2 < 0$. Protože $\left|\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)\right| \in (0,1)$ pro každé $n \geq 3$, jistě platí
$$\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)\right|}{\ln\ln n} > \frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n} = \frac{1-\cos\left(2n+\frac{2}{n}\right)}{2\ln\ln n} = \frac{1-\cos 2n\cos\frac{2}{n}+\sin 2n\sin\frac{2}{n}}{2\ln\ln n}, \tag{7}$$
kde jsme využili identit $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ a $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$. Naším cílem je nyní ukázat divergenci řady
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1-\cos 2n\cos\frac{2}{n}+\sin 2n\sin\frac{2}{n}}{2\ln\ln n}. \tag{8}$$
Budeme proto zkoumat konvergenci následujících řad
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2\ln\ln n}, \tag{9a}$$
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\cos 2n\cos\frac{2}{n}}{2\ln\ln n}, \tag{9b}$$
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\sin 2n\sin\frac{2}{n}}{2\ln\ln n}. \tag{9c}$$

Srovnávácí kritérium a Cauchyho integrální kritérium nám dá divergenci řady (9a) (využijeme podobné úvahy jako v Příkladu 4).

Řada (9b) konverguje podle Abelova kritéria, neboť řada $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{\cos 2n}{2\ln\ln n}$ je konvergentní podle Dirichletova kritéria (posloupnost $\{\cos 2n\}$ má omezené částečné součty a posloupnost $\{\frac{1}{2\ln\ln n}\}$ konverguje monotonně k nule) a posloupnost $\{\cos\frac{2}{n}\}$ je omezená a rostoucí.

Konečně, řada (9c) konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť posloupnost $\{\sin 2n\}$ má omezené částečné součty a posloupnost $\{\frac{\sin\frac{2}{n}}{2\ln\ln n}\}$ je klesající (jedná se o součin kladných klesajících funkcí) a konverguje k nule.

Celkově tedy z aritmetiky řad dostáváme, že řada (8) je divergentní a srovnávací kritérium spolu s nerovností (7) nám dává divergenci řady (6). Zadaná řada tedy nekonverguje absolutně.

Vraťme se ke zkoumání konvergence původní řady. S využitím součtového vzorce $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$ můžeme psát
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n\cos\frac{1}{n}+\cos n\sin\frac{1}{n}}{\ln\ln n} \tag{10}$$
a opět budeme zvlášť zkoumat konvergenci následujících řad
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{\ln\ln n}, \tag{11a}$$
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos n\sin\frac{1}{n}}{\ln\ln n}. \tag{11b}$$

Podobně jako výše, řada (11a) konverguje podle Abelova kritéria, neboť řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n}{\ln\ln n}$ je konvergentní podle Dirichletova kritéria (posloupnost $\{\sin n\}$ má omezené částečné součty a posloupnost $\{\frac{1}{\ln\ln n}\}$ konverguje monotonně k nule) a posloupnost $\{\cos\frac{1}{n}\}$ je omezená a rostoucí.

Konečně, řada (11b) konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť posloupnost $\{\cos n\}$ má omezené částečné součty a posloupnost $\{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\ln\ln n}\}$ je klesající (jedná se o součin kladných klesajících funkcí) a konverguje k nule.

Z aritmetiky řad tedy dostáváme, že řada (10) konverguje.

Závěr: Řada konverguje neabsolutně.

6.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^p}, \quad p\in\mathbb{R},\ 0<x<\pi$$

Řešení: Pro $p\leq 0$ posloupnost $\{\frac{\sin nx}{n^p}\}$ osciluje pro každé $x\in(0,\pi)$ a není tak splněna nutná podmínka konvergence řady. Pro $p\leq 0$ tedy zadaná řada nekonverguje (a nemůže tedy konvergovat ani absolutně).

Vyšetřujme absolutní konvergenci pro $p>1$, tj. konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin nx|}{n^p}.$$

Protože platí

$$\frac{|\sin nx|}{n^p} \leq \frac{1}{n^p},$$

ze srovnávacího kritéria dostáváme, že pro $p>1$ zadaná řada konverguje absolutně, neboť pro tato p je řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ konvergentní.

Ukažme, že pro $p\in(0,1]$ zadaná řada nekonverguje absolutně. Protože $|\sin nx|\in[0,1]$ pro každé $x\in(0,\pi)$ a $n\in\mathbb{N}$, jistě platí

$$\frac{|\sin nx|}{n^p} \geq \frac{\sin^2(nx)}{n^p} = \frac{1-\cos(2nx)}{2n^p}, \tag{12}$$

kde jsme využili identitu $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Podobně jako v Příkladu 5 se dá ukázat, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos(2nx)}{2n^p} \tag{13}$$

diverguje. Skutečně, řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ pro $p\in(0,1]$ diverguje a řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{2n^p}$ konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť posloupnost $\{\cos(2nx)\}$ má omezené částečné součty (využíváme Tvrzení 9.3.5. ve skriptech Roberta Černého a Milana Pokorného a toho, že $x\in(0,\pi)$) a posloupnost $\{\frac{1}{2n^p}\}$ konverguje monotonně k nule. Divergence řady (13) pak plyne z aritmetiky řad.

Zbývá vyšetřit konvergenci zadané řady pro $p\in(0,1]$. Ta je ale jednoduchým důsledkem Dirichletova kritéria, neboť posloupnost $\{\sin(nx)\}$ má omezené částečné součty a posloupnost $\{\frac{1}{n^p}\}$ konverguje monotonně k nule. Pro $p\in(0,1]$ tedy daná řada konverguje neabsolutně.

Závěr: Řada nekonverguje pro $p\leq 0$, konverguje neabsolutně pro $p\in(0,1]$ a konverguje absolutně pro $p>1$. Uvedené výsledky jsou nezávislé na parametru $x\in(0,\pi)$.