

Matematická analýza I (NOFY151) – 3. zápočtový test

7. ledna 2020

Při vyšetřování průběhu funkce nás zajímá:

1. definiční obor
2. obor spojitosti
3. sudost/lichost, periodicitu, jiné symetrie
4. limity v krajních bodech definičního oboru (či jeho podintervalů) a v bodech nespojitosti
5. průsečíky s osami
6. první derivace (i jednostranné derivace v bodech, které derivaci nemají)
7. druhá derivace
8. vyhodnocení první a druhé derivace:
 - (a) množiny monotonie
 - (b) lokální a globální extrémy
 - (c) obor hodnot
 - (d) konvexita, konkávnost, inflexní body
9. asymptoty
10. náčrt grafu

-
1. [4 b] Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{\ln x}.$$

Řešení:

1. Jmenovatel zadané funkce je definovaný a nenulový pro všechna $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, tedy $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
2. Protože čítec i jmenovatel zadané funkce jsou spojitě funkce na D_f , na stejné množině je tedy spojitá i celá funkce f (podíl spojitých funkcí je spojitá funkce).
3. Funkce není definovaná pro záporné hodnoty nemůže být tedy ani sudá ani lichá. Taktěz není periodická a nevykazuje ani jiné symetrie.
4. Limity v krajních bodech definičního oboru vycházejí následovně

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\ln x} &\stackrel{\text{IH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} &\stackrel{\text{IH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x}{\ln x} &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x}{\ln x} &= +\infty,\end{aligned}$$

kde jsme v prvních dvou případech využili l'Hôpitalovo pravidlo pro výpočet limity typu " $\frac{\text{něco}}{\infty}$ ".

5. Protože funkce není definovaná v nule, nemá průsečík s osou y . S osou x taktěz neexistuje žádný průsečík, protože čítec zadané funkce by v takovém případě musel být nulový, což opět vylučuje definiční obor funkce.

6. První derivace je rovna

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

Všimněme si, že $D_{\frac{df}{dx}} = D_f$.

V bodě 0 není funkce f definovaná, nemůže tam mít tedy ani jednostrannou derivaci. Můžeme ale jako dodatečnou informaci spočítat limitu první derivace pro x jdoucí k nule zprava

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{df}{dx}(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{2 \ln x} = 0.$$

7. Druhá derivace je rovna

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = \frac{\frac{1}{x} \ln^2 x - (\ln x - 1) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}.$$

Všimněme si, že $D_{\frac{d^2 f}{dx^2}} = D_f$.

8. Z podmínky nulové první derivace dostaneme kandidáty na lokální extrémy

$$\frac{df}{dx}(x) = 0 \iff x = e.$$

Protože $D_{\frac{df}{dx}} = D_f$, první derivace existuje všude a nedostáváme tak žádné další kandidáty na extrém.

Z podmínky nulové druhé derivace dostaneme kandidáty na inflexní body

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = 0 \iff x = e^2.$$

Protože $D_{\frac{d^2 f}{dx^2}} = D_f$, první derivace existuje všude a nedostáváme tak žádné další kandidáty na inflexní body.

Definiční obor funkce tak můžeme podle významných bodů rozdělit na 4 intervaly a určit funkční hodnoty v těchto bodech a znaménka derivací na příslušných intervalech

	0	(0, 1)	1	(1, e)	e	(e, e ²)	e ²	(e ² , +∞)	+∞
f	0		$\mp\infty$		e		$\frac{e^2}{2}$		+∞
$\frac{df}{dx}$	0	−		−	0	+		+	
$\frac{d^2 f}{dx^2}$		−		+		+	0	−	

(Zde rozumíme „funkční hodnotou“ v bodech 0, 1 a +∞ (jednostrannou) limitu příslušné funkce v těchto bodech.)

Z tabulky výše pak dostáváme

(a) funkce je klesající na množině $(0, 1) \cup (1, e)$ a rostoucí na množině $(e, +\infty)$

(b) v bodě e má funkce lokální minimum, globální extrémy funkce nemá

(c) $R_f = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$

(d) funkce je konvexní na intervalu $(1, e^2)$, konkávní na intervalech $(0, 1)$ a $(e^2, +\infty)$ a v bodě e^2 má inflexní bod

9. Podle bodu 4 má funkce vertikální asymptotu v bodě 1. Pro ověření zda má funkce asymptotu v nekonečnu vypočítejme, jakou by musela mít směrnici k

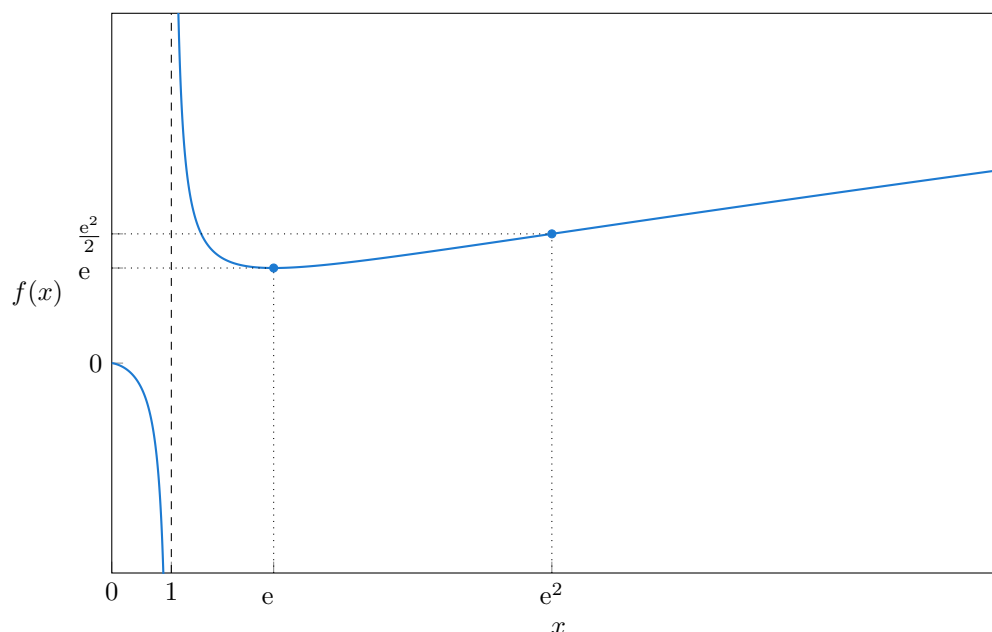
$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0.$$

Asymptota v nekonečnu by pak musela být horizontální přímka a muselo by tedy platit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}.$$

To je ale ve sporu s bodem 4. Asymptotu v nekonečnu tedy funkce f nemá.

10. Graf funkce f vypadá následovně



2. [6 b] Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2|\sin x| + |\cos 2x|.$$

Řešení:

1. Funkce je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tedy $D_f = \mathbb{R}$.
2. Goniometrické funkce \sin a \cos jsou spojité na \mathbb{R} , absolutní hodnota též a jejich složení a součet taktéž. Celkově je tedy obor spojitosti funkce f celá reálná osa.
3. Funkce $|\sin x|$ je π -periodická a funkce $|\cos 2x|$ je $\frac{\pi}{2}$ -periodická (nakreslete si obrázky). Celkově je tedy zadaná funkce π -periodická. Navíc platí

$$f(-x) = 2|\sin(-x)| + |\cos(-x)| = 2|-\sin x| + |\cos x| = 2|\sin x| + |\cos 2x| = f(x).$$

Zadaná funkce je tedy sudá. Z těchto pozorování plyne, že se můžeme při vyšetřování průběhu funkce omezit na interval $[0, \frac{\pi}{2}]$. Na tomto intervalu pak můžeme funkci f psát jako

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin x + \cos 2x, & \text{na } [0, \frac{\pi}{4}], \\ 2 \sin x - \cos 2x, & \text{na } [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \quad (1)$$

4. Zadaná funkce je spojitá na celém \mathbb{R} , tedy i v krajních bodech intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Stačí tedy spočítat funkční hodnoty v těchto bodech

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 3. \end{aligned}$$

5. Průsečík s osou y už máme z předchozího bodu: $f(0) = 1$. Abychom dostali průsečík s osou x , je potřeba vyřešit rovnici

$$2|\sin x| + |\cos 2x| = 0.$$

Protože absolutní hodnota je vždy nezáporná, vidíme, že rovnost může nastat pouze, pokud

$$\sin x = 0, \quad \wedge \quad \cos 2x = 0,$$

což je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ ekvivalentní

$$x = 0, \quad \wedge \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

To ale nemůže nastat a funkce tak žádný průsečík s osou x nemá.

6. První derivace je rovna (využíváme zápisu funkce f ve tvaru (1))

$$\frac{df}{dx}(x) = \begin{cases} 2 \cos x - 2 \sin 2x, & \text{na } (0, \frac{\pi}{4}), \\ 2 \cos x + 2 \sin 2x, & \text{na } (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Jednostranné derivace v krajních bodech intervalů $(0, \frac{\pi}{4})$ a $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ vychází následovně

$$\begin{aligned} \frac{df_+}{dx}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{df}{dx}(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (2 \cos x - 2 \sin 2x) = 2, \\ \frac{df_-}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{df}{dx}(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-} (2 \cos x - 2 \sin 2x) = \sqrt{2} - 2, \\ \frac{df_+}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} \frac{df}{dx}(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} (2 \cos x + 2 \sin 2x) = \sqrt{2} + 2, \\ \frac{df_-}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{df}{dx}(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} (2 \cos x + 2 \sin 2x) = 0. \end{aligned}$$

7. Druhá derivace je rovna (opět využíváme zápisu funkce f ve tvaru (1))

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = \begin{cases} -2 \sin x - 4 \cos 2x, & \text{na } (0, \frac{\pi}{4}), \\ -2 \sin x + 4 \cos 2x, & \text{na } (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

8. Z podmínky nulové první derivace ve vnitřních bodech intervalů, kde derivace existuje, dostaneme kandidáty na lokální extrémy. Na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$ by mělo platit

$$2 \cos x - 2 \sin 2x = 0,$$

což se s využitím vzorce $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ a nenulovosti $\cos x$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$ redukuje na rovnici

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Dostáváme tak kandidáta na extrém v bodě $x = \frac{\pi}{6}$.

Na intervalu $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ by mělo platit

$$2 \cos x + 2 \sin 2x = 0,$$

což se opět s využitím vzorce $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ a nenulovosti $\cos x$ na intervalu $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ redukuje na rovnici

$$\sin x = -\frac{1}{2}.$$

To ale není splněno pro žádné x z intervalu $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Podle bodu 6 dostáváme ještě kandidáta na extrém v bodě $\frac{\pi}{4}$, neboť zde neexistuje první derivace (jednostranné derivace v tomto bodě se různí).

Z podmínky nulové druhé derivace ve vnitřních bodech intervalů, kde derivace existuje, dostaneme kandidáty na inflexní body. Na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$ by mělo platit

$$-2 \sin x - 4 \cos 2x = 0.$$

Na tomto intervalu jsou ovšem $\sin x$ i $\cos 2x$ kladné, takže rovnost nemůže nastat.

Na intervalu $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ by mělo platit

$$-2 \sin x + 4 \cos 2x = 0.$$

Na tomto intervalu je ovšem $\sin x$ kladný a $\cos 2x$ záporný, takže rovnost opět nemůže nastat.

Jak už víme, v bodě $\frac{\pi}{4}$ neexistuje první derivace a v takovém bodě tedy nemůže být ani inflexní bod (funkce musí být v inflexním bodě diferencovatelná). Žádní kandidáti na inflexní bod tedy neexistují.

Interval $[0, \frac{\pi}{2}]$ tak můžeme podle významných bodů rozdělit na 3 intervaly a určit funkční hodnoty v těchto bodech a znaménka derivací na příslušných intervalech

	0	$(0, \frac{\pi}{6})$	$\frac{\pi}{6}$	$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$
f	1		$\frac{3}{2}$		$\sqrt{2}$		3
$\frac{df}{dx}$	2	+	0	-	$\sqrt{2} \mp 2$	+	0
$\frac{d^2f}{dx^2}$		-		-		-	

(Zde rozumíme „funkční hodnotou“ první derivace v bodech $0, \frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$ jednostrannou derivaci v příslušných bodech.)

Z tabulky výše pak pro funkci f na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ dostáváme

- (a) funkce je klesající na množině $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ a rostoucí na množině $(0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$
- (b) v bodě $\frac{\pi}{4}$ má funkce lokální minimum, v bodě $\frac{\pi}{6}$ lokální maximum, v bodě 0 globální minimum a v bodě $\frac{\pi}{2}$ globální maximum
- (c) $R_f = [1, 3]$
- (d) funkce je konkávní na intervalech $[0, \frac{\pi}{4}]$ a $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, inflexní body nemá

Vlastnosti z bodů 8a, 8b a 8d by se s využitím sudosti a periodicity funkce f snadno rozšířily na celý definiční obor zadané funkce.

9. Zadaná funkce je spojitá na celém \mathbb{R} , takže nemá žádné vertikální asymptoty. Pro ověření zda má funkce asymptotu v nekonečnu vypočítejme, jakou by musela mít směrnici k

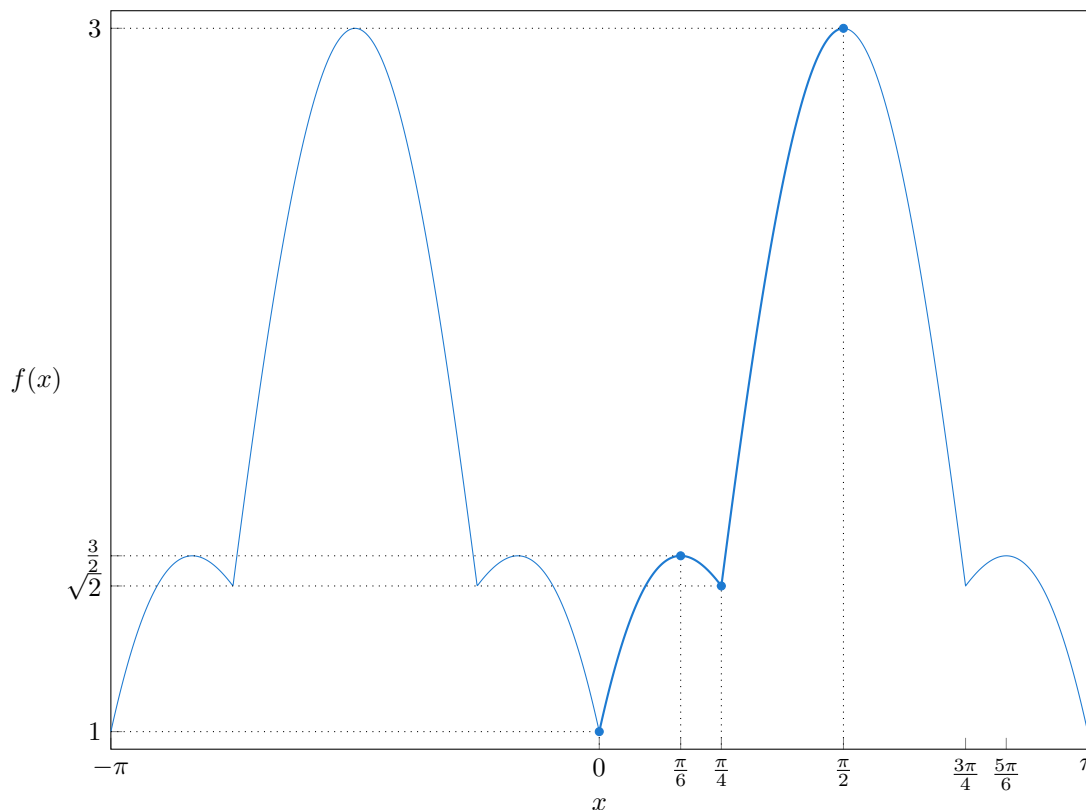
$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

neboť f je omezená a $\frac{1}{x}$ jde k nule pro $x \rightarrow +\infty$. Asymptota v nekonečnu by pak musela být horizontální přímka a muselo by tedy platit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}.$$

Protože je ale f periodická a nekonstantní, z Heineho věty plyne, že její limita v nekonečnu neexistuje. Asymptotu v nekonečnu tedy funkce f nemá.

10. Graf funkce f vypadá následovně



Zvýrazněná část grafu odpovídá zkoumané funkci na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$, kde jsme vyšetřovali její průběh.