Matematická analýza I (NOFY151) – 2. zápočtový test

3. prosince 2019

1. [2 b] Určete definiční obor funkce
$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\ln x)^x,$$
a v jeho vnitřních bodech spočtěte derivaci f.

Řešení: Přepišme si funkci do tvaru
$$f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(\ln x)}.$$
Odsud vidíme, že funkce je definovaná pro $x > 1$, neboť „vnější" přirozený logaritmus musí brát kladné hodnoty a „vnitřní" přirozený logaritmus je kladný pro $x > 1$. Tedy $D_f = (1, +\infty)$.

Derivaci ve všech bodech definičního oboru (všechny jsou vnitřní) pak spočítáme pomocí vět o derivaci složené funkce a derivace součinu dvou funkcí
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{x\ln(\ln x)}\right) = \mathrm{e}^{x\ln(\ln x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln(\ln x))\\ &= \mathrm{e}^{x\ln(\ln x)}\left(\ln(\ln x) + x\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right) = (\ln x)^x\left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right).\end{aligned}$$

2. [4 b] Spočtěte
$$\int \frac{1}{\cos^3 x}\mathrm{d}x,$$
na maximálních možných intervalech (a ty určete).

Řešení: Integrand je definovaný a spojitý na intervalech, kde je kosinus vždy kladný nebo vždy záporný, tj. $((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$. Na těchto intervalech bude mít tedy primitivní funkci, kterou nyní najdeme.

Nejprve integrand rozšíříme funkcí $\cos x$, využijeme identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, a pomocí první substituční metody ($u = \sin x$) dostaneme
$$\int \frac{1}{\cos^3 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = \sin x \\ \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x\end{matrix}\right| = \int \frac{1}{(1-u^2)^2}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{(1-u)^2(1+u)^2}\mathrm{d}u.$$
Integrand posledního integrálu můžeme rozložit na parciální zlomky
$$\int \frac{1}{(1-u)^2(1+u)^2}\mathrm{d}u = \int\left(\frac{A}{1-u} + \frac{B}{(1-u)^2} + \frac{C}{1+u} + \frac{D}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u,$$
kde pro reálné konstanty A, B, C, D musí platit
$$1 = A(1-u)(1+u)^2 + B(1+u)^2 + C(1-u)^2(1+u) + D(1-u)^2.$$
Dosazením $u = 1$ dostaneme $B = 1/4$, dosazením $u = -1$ potom $D = 1/4$. Srovnání absolutních členů (u^0) dává
$$1 = A + B + C + D.$$
Pro koeficienty členů u^3 dále musí platit
$$0 = -A + C.$$
Z posledních dvou rovnic pak už po dosazení za B a D dostáváme $A = 1/4, C = 1/4$.

Rozklad na parciální zlomky nám tedy dává
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1-u)^2(1+u)^2}\mathrm{d}u &= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{1+u} + \frac{1}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{4}\left(-\ln|1-u| + \frac{1}{1-u} + \ln|1+u| - \frac{1}{1+u}\right) + c,\end{aligned}$$

a pro původní integrál tak po dosazení za u dostáváme

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(-\ln|1-\sin x| + \frac{1}{1-\sin x} + \ln|1+\sin x| - \frac{1}{1+\sin x}\right) + c.$$

Absolutní hodnoty nejsou nutné, $\sin x$ na příslušných intervalech nabývá hodnot (-1,1). Výsledek se dá navíc ještě dále upravit do tvaru

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\right) + c.$$

3. [2 b] Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right).$$

Řešení: Členy v závorce převedeme na společného jmenovatele a počítáme

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x(\mathrm{e}^x - 1)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - 1 + x\mathrm{e}^x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x} = \frac{1}{2},$$

kde jsme v prvních dvou rovnostech využili l'Hôpitalova pravidla pro výpočet limity typu "$\frac{0}{0}$".

Výraz za druhou rovností lze alternativně před aplikací l'Hôpitalova pravidla upravit do tvaru

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x(\mathrm{e}^x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2},$$

kde jsme využili aritmetiku limit a znalost limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

4. [2 b] Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to +\infty} n\left(\sqrt[n]{7} - 1\right).$$

Řešení: Vypočítejme nejprve limitu funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{7^x - 1}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{7^x \ln 7}{1} = \ln 7,$$

kde jsme v první rovnosti využili l'Hôpitalova pravidla pro výpočet limity typu "$\frac{0}{0}$". Použijeme-li nyní Heineho větu s volbou $x_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n}$, dostáváme, že limita zadané posloupnosti je taktéž rovna $\ln 7$.

Limita výše se dá samozřejmě spočítat i bez použití l'Hôpitalova pravidla následovně

$$\lim_{x\to 0} \frac{7^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x\ln 7} - 1}{x \ln 7} \ln 7 = \ln 7,$$

kde jsme využili větu o limitě složené funkce a znalost limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$