Matematická analýza II (NOFY152) – DÚ 5

Integrační faktor, lineární ODR s konstantními koeficienty

Nalezněte maximální řešení rovnic

1.

$$(1-x^2)y' + xy = 1, \quad y(0) = 1$$

Řešení: Nejprve přepišme rovnici do tvaru

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \neq \pm 1. \tag{1}$$

V dalším se omezíme na $x \in (-1,1)$, neboť na tomto intervalu se nachazí počáteční podmínka. Máme

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c = \ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c.$$

Rovnici (1) přenásobíme funkcí $e^{\ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a dostaneme

$$\left(y\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y' + \frac{xy}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

Protože platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \\ u' = \dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} & v' = 1 \end{vmatrix} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x,$$

dostáváme odsud, že

$$\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + d,$$

a tudíž

$$y(x) = \sqrt{1-x^2}\Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + d\Big) = d\sqrt{1-x^2} + x.$$

Jelikož $1 = y(0) = d$, pak funkce

$$y(x) = \sqrt{1-x^2} + x,\ x \in (-1,1) \tag{3}$$

řeší zadanou počáteční úlohu. Jelikož $\lim_{x\to -1+} y'(x) = +\infty$ a $\lim_{x\to 1-} y'(x) = -\infty$, pak (3) nelze rozšířit jako $\mathcal{C}^1$ funkci na žádný větší otevřený interval. Tudíž (3) je maximální řešení.

Alternativně můžeme rovnici (2) přímo integrovat od 0 do x s využitím počáteční podmínky

$$\frac{y(x)}{\sqrt{1-x^2}} - y(0) = \int_0^x \frac{1}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}s = \left[\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\right]_0^x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

což implikuje (3).

2.

$$x(x-1)y' = y - 1$$

Řešení: (Lze zavést novou funkci $z = y - 1$, pak se rovnice zjednoduší na $x(x-1)z' = z$.)

Ze zadání je zřejmé, že $y(x) = 1$ je stacionárním řešením úlohy pro $x \in \mathbb{R}$. Pro nalezení netriviálních řešení nejprve přepišme rovnici do tvaru

$$y' - \frac{y}{x(x-1)} = -\frac{1}{x(x-1)}, \tag{4}$$

kterou řešíme na intervalech, kde $x \neq 0, 1$. Máme

$$\begin{aligned} -\int \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x &= -\int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| - \ln|x-1| + c = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + c. \end{aligned}$$

Nyní rozlišujme dva případy, a to

(a) $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, pak $\frac{x}{x-1} > 0$, a

(b) $x \in (0, 1)$, kde $\frac{x}{x-1} < 0$.

Jestliže platí (a), pak rovnici (4) přenásobíme funkcí $e^{\ln\frac{x}{x-1}} = \frac{x}{x-1}$ a dostaneme

$$\left(y\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{x}{x-1}y' - \frac{y}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Dále

$$-\int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x-1} + d,$$

a tudíž

$$y(x) = \frac{x-1}{x}\left(\frac{1}{x-1} + d\right) = d\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} = d + \frac{1-d}{x}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Jestliže platí (b), pak rovnici (4) přenásobíme funkcí $e^{\ln\frac{-x}{x-1}} = \frac{-x}{x-1}$. Pak ale dostaneme rovnici, která se od té v (a) liší jen o znaménko, jedná se tudíž o stejnou diferenciální rovnici. Řešení (4) je tedy na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, +\infty)$ dáno předpisem

$$y(x) = d + \frac{1-d}{x}, \quad d \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Řešení (5) se dají napojit v $x = 1$, je-li navíc $d = 1$, pak dokonce i v $x = 0$. Maximální řešení zadané rovnice jsou tedy

$$\begin{aligned} &y(x) = d + \frac{1-d}{x}, \quad d \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x \in (-\infty, 0) \vee x \in (0, +\infty)\,, \\ &y(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3.

$$y'' - \frac{1 + \ln^2 2}{\ln 2}y' + y = 2^x$$

Řešení: Charakteristický polynom má tvar

$$\lambda^2 - \frac{1 + \ln^2 2}{\ln 2}\lambda + 1 = (\lambda - \ln 2)\left(\lambda - \frac{1}{\ln 2}\right).$$

Jednonásobné kořeny $\ln 2$, $\frac{1}{\ln 2}$ dávají fundamentální systém

$$\left\{\mathrm{e}^{(\ln 2)x}, \mathrm{e}^{\frac{x}{\ln 2}}\right\} = \left\{2^x, \mathrm{e}^{\frac{x}{\ln 2}}\right\}.$$

Pravou stranu zadané rovnice si přepíšeme do tvaru $\mathrm{e}^{x\ln 2}$, což už má tvar speciální pravé strany. Protože $\ln 2$ je jednonásobný kořen charakteristického polynomu, partikulární řešení y_p hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{(\ln 2)x} = Ax2^x.$$

První a druhá derivace partikulárního řešení vychází

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A2^x + A(\ln 2)\,x2^x, \\ y_p''(x) &= 2A(\ln 2)\,2^x + A\left(\ln^2 2\right)x2^x. \end{aligned}$$

Po dosazení do zadané rovnice pak dostáváme, že musí platit

$$A = \frac{\ln 2}{\ln^2 2 - 1}.$$

Obecné řešení definované pro $x \in \mathbb{R}$ je tedy

$$y(x) = C_1 2^x + C_2 \mathrm{e}^{\frac{x}{\ln 2}} + \frac{\ln 2}{\ln^2 2 - 1}x2^x,$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

4.

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 40\cos^2 x$$

Řešení: Charakteristický polynom p má tvar

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4.$$

Uhádneme, že jeden z kořenů je 1. Dělením mnohočlenu mnohočlenem pak dostaneme

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 4\right).$$

Jednonásobné kořeny 1, $\pm 2\mathrm{i}$ dávají fundamentální systém

$$\left\{\mathrm{e}^x, \cos 2x, \sin 2x\right\}.$$

Pravou stranu zadané rovnice si přepíšeme pomocí identity $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ do tvaru

$$20 + 20\cos 2x.$$

Pravá strana je tedy součtem dvou funkcí, které mají tvar speciální pravé strany, a partikulární řešení budeme tudíž hledat jako součet partikulárních příslušejících jednotlivým sčítancům. Partikulární řešení $y_{p,1}$ odpovídající pravé straně 20 se dá jednoduše uhádnout

$$y_{p,1}(x) = -5.$$

Protože $2\mathrm{i}$ je jednonásobný kořen charakteristického polynomu, partikulární řešení $y_{p,2}$ odpovídající pravé straně $20\cos 2x$ budeme hledat ve tvaru

$$y_{p,2}(x) = x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right).$$

První, druhá a třetí derivace $y_{p,2}$ vychází

$$\begin{aligned} y_{p,2}'(x) &= A\cos 2x + B\sin 2x + x\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right), \\ y_{p,2}''(x) &= -4A\sin 2x + 4B\cos 2x + x\left(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x\right), \\ y_{p,2}'''(x) &= -12A\cos 2x - 12B\sin 2x + x\left(8A\sin 2x - 8B\cos 2x\right). \end{aligned}$$

Po dosazení do zadané rovnice pak dostáváme, že musí platit

$$A = -1, \quad B = -2.$$

Obecné řešení definované pro $x \in \mathbb{R}$ je tedy

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x - x\left(2\cos 2x + \sin 2x\right) - 5,$$

kde $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

5.

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$$

Řešení: Kořeny charakteristického polynomu

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2$$

jsou $1 \pm \mathrm{i}$. Fundamentální systém je tedy

$$\left\{\mathrm{e}^{-x}\cos x, \mathrm{e}^{-x}\sin x\right\}.$$

Pravá strana zadané rovnice nemá speciální tvar (ani ji na něj nemůžeme převést), takže budeme úlohu řešit variací konstant, tj. partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x)\mathrm{e}^{-x}\cos x + c_2(x)\mathrm{e}^{-x}\sin x,$$

kde funkce c_1, c_2 dostaneme vyřešením soustavy

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-x}\cos x & \mathrm{e}^{-x}\sin x \\ -\mathrm{e}^{-x}(\cos x + \sin x) & \mathrm{e}^{-x}(-\sin x + \cos x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sin x} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

a následnou integrací nalezených c_1', c_2'. Rovnici (6) můžeme přenásobit e^x a dostaneme

$$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x - \sin x & -\sin x + \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin x} \end{bmatrix}.$$

Protože

$$\det \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x - \sin x & -\sin x + \cos x \end{bmatrix} = -\sin x\cos x + \cos^2 x + \sin x\cos x + \sin^2 x = 1,$$

podle Cramerova pravidla dostáváme

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= \det \begin{bmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\sin x} & -\sin x + \cos x \end{bmatrix} = -1, &\implies&\quad c_1(x) = -x, \\ c_2'(x) &= \det \begin{bmatrix} \cos x & 0 \\ -\cos x - \sin x & \frac{1}{\sin x} \end{bmatrix} = \frac{\cos x}{\sin x}, &\implies&\quad c_2(x) = \ln|\sin x|. \end{aligned}$$

Obecné řešení definované na intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, je tedy

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x}\cos x + C_2\mathrm{e}^{-x}\sin x - x\mathrm{e}^{-x}\cos x + \ln|\sin x|\,\mathrm{e}^{-x}\sin x,$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.