Matematická analýza II (NOFY152) – DÚ 6

ODR se separovanými proměnnými, speciální typy rovnic

1. Pro diferenciální rovnici
$$xy' = -\arccos y\sqrt{1-y^2},$$
nalezněte
   (i) všechna maximální řešení,
   (ii) všechna maximální řešení splňující $y(\pi) = 0$.

Řešení:

(i) Nejprve si všimněme, že zadaná rovnice degeneruje pro $x = 0$ a že na celé reálné ose máme dvě stacionární řešení $y \equiv \pm 1$. Zbylá řešení budeme hledat metodou separace proměnných převedením zadané diferenciální rovnice do tvaru
$$y' = f(x)g(y),$$
kde $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = -\arccos y\sqrt{1-y^2}$. Rovnice má smysl pro x z intervalů $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, +\infty)$. Funkce g je spojitá a nenulová na intervalu $J = (-1, 1)$.

Spočtěme primitivní funkce
$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(c\,|x|\right), \quad c > 0,$$
$$G(y) \overset{\text{def}}{=} \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int \frac{-1}{\arccos y\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \left| \begin{aligned} t &= \arccos y \\ \mathrm{d}t &= \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \end{aligned} \right| = \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln|t| = \ln\left(\arccos y\right),$$
kde v posledním výrazu nepíšeme absolutní hodnotu argumentu logaritmu, neboť $\arccos y > 0$ pro $y \in (-1, 1)$.

Rovnost primitivních funkcí
$$\ln\left(\arccos y\right) = \ln\left(c\,|x|\right),$$
je ekvivalentní
$$\arccos y = c\,|x|\,.$$
Protože levá strana nabývá hodnot z intervalu $(0, \pi)$ dostáváme podmínky
$$x > 0 \implies cx \in (0, \pi) \iff x \in \left(0, \frac{\pi}{c}\right),$$
$$x < 0 \implies -cx \in (0, \pi) \iff x \in \left(-\frac{\pi}{c}, 0\right).$$
Na těchto intervalech potom máme netriviální řešení $y(x) = \cos(cx)$, kde jsme využili sudosti funkce cos. Tato řešení lze slepit v počátku (vzpomeňte si, že původní rovnici má smysl uvažovat pro všechna $x \in \mathbb{R}$). Navíc volný parametr řešení může mít jinou hodnotu pro záporné x než pro kladné. (Používáme tedy v dalším symboly α, β pro konstantu c na příslušných intervalech.) V krajních bodech intervalů $\left(-\frac{\pi}{\alpha}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{\beta}\right)$ můžeme dále napojovat získaná řešení na stacionární řešení $y \equiv \pm 1$.

Všechna maximální řešení potom tedy jsou ($\alpha, \beta > 0$)

$$y(x) = \pm 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{\alpha}\right], \\ \cos(\alpha x), & x \in \left(-\frac{\pi}{\alpha}, 0\right), \\ \cos(\beta x), & x \in \left[0, \frac{\pi}{\beta}\right), \\ -1, & x \in \left[\frac{\pi}{\beta}, +\infty\right), \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{\alpha}\right], \\ \cos(\alpha x), & x \in \left(-\frac{\pi}{\alpha}, 0\right), \\ 1, & x \in [0, +\infty), \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0], \\ \cos(\beta x), & x \in \left(0, \frac{\pi}{\beta}\right), \\ -1, & x \in \left[\frac{\pi}{\beta}, +\infty\right). \end{cases}$$

(ii) Všimněme si nejdřív, že stacionární řešení $y \equiv \pm 1$ nemůžou splňovat počáteční podmínku $y(\pi) = 0$. Hledejme proto hodnotu konstanty $\beta > 0$, pro kterou bude netriviální řešení splňovat počáteční podmínku

$$0 = y(\pi) = \cos(\beta\pi) \implies \beta = \frac{1}{2},$$

neboť musí platit $\pi \in \left(0, \frac{\pi}{\beta}\right)$.

Maximální řešení splňující počáteční podmínku $y(\pi) = 0$ tedy jsou

$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -2\pi], \\ \cos(\alpha x), & x \in \left(-\frac{\pi}{\alpha}, 0\right) \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right), & x \in [0, 2\pi), \\ -1, & x \in [2\pi, +\infty), \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0], \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right), & x \in (0, 2\pi), \\ -1, & x \in [2\pi, +\infty). \end{cases}$$

2. Najděte maximální řešení počáteční úlohy

$$y^2 y' = x^2, \quad y(1) = 2.$$

Řešení: Jedná se o homogenní rovnici 1. řádu, která nikde nedegeneruje. Je-li $y \neq 0$, pak můžeme vydělit y^2 a získáme rovnici

$$y' = \frac{x^2}{y^2}. \tag{1}$$

Zavedeme $z = \frac{y}{x}$ pro $x \neq 0$, pak (1) přejde na rovnici se separovanými proměnnými

$$\begin{aligned} z'x + z &= z^{-2} \\ z' &= \frac{1}{x}\frac{1 - z^3}{z^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Vidíme, že $z(x) = 1$ je stacionární řešení, tj. $y(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$. Pro $z(x) \neq 1$ platí

$$\int \frac{z^2}{1 - z^3}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{3}\ln|1 - z^3| + c_1, \quad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c_2.$$

Řešení (2) tedy vyhovuje vztahu

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{3}\ln|1-z^3(x)| &= \ln|x|+c\\
\ln|1-z^3(x)| &= -3\ln|x|-3c\\
|1-z^3(x)| &= e^{-3c}|x|^{-1}\\
|1-\big(\frac{y(x)}{x}\big)^3| &= e^{-3c}|x|^{-3}\\
|x^3-y^3(x)| &= e^{-3c}|x|^{-3}|x^3|\\
|x^3-y^3(x)| &= e^{-3c}\\
y^3(x) &= x^3 \pm e^{-3c}\\
y(x) &= \sqrt[3]{x^3+\alpha}, \quad \alpha=\pm e^{-3c}.
\end{aligned}
$$

Protože jsme uvažovali, že $y \neq 0$, můžeme se nyní pokusit slepit nalezená řešení v bodě $x=-\sqrt[3]{\alpha}$. To se nám ale nepovede, neboť

$$
y'(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+\alpha)^2}},
$$

a vidíme, že derivace nemá v bodě $x=-\sqrt[3]{\alpha}$ konečnou hodnotu. Maximální řešení tedy dostáváme na intervalech $(-\infty,-\sqrt[3]{\alpha})$ a $(-\sqrt[3]{\alpha},+\infty)$.

Jestliže $2=y(1)=\sqrt[3]{1+\alpha}$, pak $\alpha=2^3-1=7$.

Závěr: Maximální řešení počáteční úlohy je

$$
y=\sqrt[3]{x^3+7}, \quad x\in\Big(-\sqrt[3]{7},+\infty\Big)
$$

3. Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$
xyy' = 3x^2-y^2.
$$

Řešení: Jedná se o homogenní rovnici 1. řádu, která degeneruje v bodě $x=0$.

Nechť dále $y,x\neq 0$, pak můžeme vydělit xy a získáme rovnici

$$
y' = \frac{3x^2-y^2}{xy}. \tag{3}
$$

Položíme $z=\frac{y}{x}$, pak (3) přejde na rovnici se separovanými proměnnými

$$
\begin{aligned}
z'x+z &= \frac{3-y^2/x^2}{y/x} = \frac{3-z^2}{z}\\
z' &= \frac{1}{x}\frac{3-2z^2}{z}. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Vidíme, že $z=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ jsou stacionární řešení, tj. $y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}x,\ x\in\mathbb{R}$. Je-li nyní $z\neq\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, pak

$$
\int \frac{z}{3-2z^2}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{4}\ln|3-2z^2|+c_1, \quad \int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|+c_2.
$$

Řešení (4) tedy vyhovuje vztahu

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\ln|3-2z^2| &= \ln|x| + c\\
\ln|3-2z^2| &= -4\ln|x| - 4c\\
|3-2z^2| &= |x|^{-4}e^{-4c}\\
|3-2(\frac{y}{x})^2| &= e^{-4c}|x|^{-4}\\
|3x^2-2y^2| &= e^{-3c}|x|^{-4}|x^2|\\
|3x^2-2y^2| &= e^{-3c}x^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
2y^2 = 3x^2 \pm e^{-3c}x^{-2} = \frac{3x^4+\alpha}{x^2}, \quad \alpha = \pm e^{-3c}.
$$

Levá strana je kladná, tudíž musí platit $3x^4 + \alpha > 0$. Je-li $\alpha \geq 0$, pak tato podmínka je prázdná. Je-li $\alpha < 0$, pak musí platit $|x| > \sqrt[4]{-\alpha/3}$, tedy

$$
x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-\alpha/3}) \vee \ x \in (\sqrt[4]{-\alpha/3}, \infty).
$$

Konečně vidíme, že není možné v počátku navazovat řešení.

Závěr: Maximální řešení jsou tvaru

$$
y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad x \in \mathbb{R},
$$

nebo

$$
y = \pm\sqrt{\frac{3x^4+\alpha}{2x^2}},
$$

kde

$$
\begin{aligned}
&x \in (-\infty, 0) \ \vee \ x \in (0,\infty) \ \text{ pro } \ \alpha > 0 \text{ nebo}\\
&x \in \big(-\infty, -\sqrt[4]{-\alpha/3}\big) \vee \ x \in \big(\sqrt[4]{-\alpha/3}, \infty\big) \ \text{ pro } \ \alpha < 0.
\end{aligned}
$$

4. Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$
x^2y' + 2\,(\sqrt{y} + y) = 0.
$$

Řešení: Nejprve si všimněme, že zadaná rovnice degeneruje pro $x = 0$ a že na celé reálné ose máme stacionární řešení $y \equiv 0$. Zbylá řešení budeme hledat převedením zadané diferenciální rovnice do tvaru Bernoulliho rovnice

$$
y' + \frac{2}{x^2}y = -\frac{2}{x^2}\sqrt{y}, \tag{5}
$$

kterou budeme řešit na množinách $(-\infty, 0) \times (0, +\infty)$ a $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Položme $z := \sqrt{y}$. Rovnice (5) potom přejde do tvaru

$$
z' + \frac{1}{x^2}z = -\frac{1}{x^2},
$$

kterou vyřešíme pomocí integračního faktoru $\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$. Dostáváme

$$
z(x) = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - c\right) = c\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1.
$$

Protože $z = \sqrt{y}$, dostáváme $y(x) = \left(c\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2$. Zároveň ovšem musí platit $z > 0$ (a tedy nutně $c > 0$), tj.

$$
c\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1 > 0, \quad \iff \quad \frac{1}{x} > -\ln c. \tag{6}
$$

Pro $x \in (0, +\infty)$:

- $c \in (0,1)$: Podmínka (6) je ekvivalentní $x < -\frac{1}{\ln c}$, kde $-\frac{1}{\ln c} > 0$, a tedy $x \in \left(0, -\frac{1}{\ln c}\right)$.
- $c \in [1,+\infty)$: Podmínka (6) je ekvivalentní $x > -\frac{1}{\ln c}$, kde $-\frac{1}{\ln c} < 0$, a tedy $x \in (0,+\infty)$.

Pro $x \in (-\infty, 0)$:

- $c \in (0,1]$: Výraz $-\ln c$ na pravé straně podmínky (6) je kladný, a tedy $x \in \emptyset$.
- $c \in (1,+\infty)$: Podmínka (6) je ekvivalentní $x < -\frac{1}{\ln c}$, kde $-\frac{1}{\ln c} < 0$, a tedy $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\ln c}\right)$.

Pro $x \to 0$ nalezené řešení nemá konečnou limitu, takže lepení řešení v počátku je vyloučené. V bodě $-\frac{1}{\ln c}$ ale lze slepit řešení se stacionárním.

Všechna maximální řešení tedy jsou

$$
\begin{aligned}
y(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\
y(x) &= \begin{cases} \left(c\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2, & x \in \left(0, -\frac{1}{\ln c}\right), \\ 0, & x \in \left[-\frac{1}{\ln c}, +\infty\right), \end{cases} \quad c \in (0,1), \\
y(x) &= \left(c\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2, \quad x \in (0,+\infty), \quad c \in [1,+\infty), \\
y(x) &= \begin{cases} \left(c\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2, & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\ln c}\right), \\ 0, & x \in \left[-\frac{1}{\ln c}, +\infty\right), \end{cases} \quad c \in (1,+\infty).
\end{aligned}
$$

5. Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + (\operatorname{cotg} x)\, y = \frac{\cos x}{2y}.$$

Řešení: Jedná se o Bernoulliho rovnici, kterou budeme řešit na intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Žádná stacionární řešení zřejmě neexistují. Po zavedení pomocné proměnné $z := y^2$ zadaná rovnice přechází do tvaru

$$z' + 2(\operatorname{cotg} x)\, z = \cos x,$$

kterou vyřešíme pomocí integračního faktoru $\mathrm{e}^{\int 2 \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{2\ln|\sin x|} = \sin^2 x$. Dostáváme

$$z(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \int \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sin^2 x}\left(\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{c}{3}\right) = \frac{\sin^3 x - c}{3\sin^2 x}.$$

Protože $z = y^2$, dostáváme $y(x) = \pm\sqrt{\frac{\sin^3 x - c}{3\sin^2 x}}$. Zároveň ovšem musí platit $z > 0$, tj.

$$\sin^3 x - c > 0. \tag{7}$$

Pro $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$:

(Na těchto intervalech je $\sin x$ kladný.)

- $c \in (-\infty, 0]$: Nerovnost (7) je splněna pro všechna $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $c \in (0,1)$: Nerovnost (7) je ekvivalentní podmínce $x \in (2k\pi + \arcsin(\sqrt[3]{c}), (2k+1)\pi - \arcsin(\sqrt[3]{c}))$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $c \in [1,+\infty)$: Nerovnost (7) zřejmě nemůže být splněna.

Pro $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$:

(Na těchto intervalech je $\sin x$ záporný.)

- $c \in (-\infty, -1)$: Nerovnost (7) je splněna pro všechna $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $c \in [-1, 0)$: Nerovnost (7) je ekvivalentní podmínce $x \in ((2k-1)\pi, (2k-1)\pi - \arcsin(\sqrt[3]{c}))$, $k \in \mathbb{Z}$ nebo $x \in (2k\pi + \arcsin(\sqrt[3]{c}), 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $c \in [0,+\infty)$: Nerovnost (7) zřejmě nemůže být splněna.

Všechna maximální řešení jsou tedy dána předpisem

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{\sin^3 x - c}{3\sin^2 x}},$$

kde pro $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), && c \in (-\infty, 0], \\
&x \in \left(2k\pi + \arcsin\left(\sqrt[3]{c}\right), (2k+1)\pi - \arcsin\left(\sqrt[3]{c}\right)\right), && c \in (0, 1), \\
&x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi), && c \in (-\infty, -1), \\
&x \in \left((2k-1)\pi, (2k-1)\pi - \arcsin\left(\sqrt[3]{c}\right)\right) \vee x \in \left(2k\pi + \arcsin\left(\sqrt[3]{c}\right), 2k\pi\right), && c \in [-1, 0).
\end{aligned}$$