Matematická analýza I (NOFY151) – 1. zápočtový test (opravný)

29. října 2019

1. [2 b] Dokažte pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ matematickou indukcí Moivreovu větu

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx).$$

Řešení: Pro $n = 1$ máme

$$\cos x + \mathrm{i}\sin x = \cos x + \mathrm{i}\sin x,$$

a rovnost je tedy splněna. Ukažme, že pokud rovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$ platí i pro $n + 1$.

$$\begin{aligned}(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^{n+1} &= (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n \overset{\text{IP}}{=} (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)) \\ &= \cos x\cos(nx) - \sin x\sin(nx) + \mathrm{i}(\sin x\cos(nx) + \cos x\sin(nx)) \\ &= \cos((n+1)x) + \mathrm{i}\sin((n+1)x),\end{aligned}$$

kde jsme v poslední rovnosti využili goniometrické vzorce

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y.\end{aligned}$$

2. [2 b] Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$4^{n-1} \geq n^2.$$

Pro důkaz použijte matematickou indukci.

Řešení: Pro $n = 1$ dostaváme

$$1 \geq 1,$$

nerovnost je tedy splněna. Ukažme, že pokud rovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$ platí i pro $n + 1$. Podle indukčního předpokladu máme

$$4^n = 4 \cdot 4^{n-1} \overset{\text{IP}}{\geq} 4n^2.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$4n^2 \geq (n+1)^2,$$

která je ekvivalentní s

$$3n^2 - 2n - 1 \geq 0.$$

Snadno zjistíme, že funkce $f(x) \overset{\text{def}}{=} 3x^2 - 2x - 1$ má kořeny $\{-\frac{1}{3}, 1\}$ a pro $x \geq 1$ je nezáporná. Poslední nerovnost je tedy splněna.

3. [2 b] Podmnožina reálných čísel P je definována předpisem

$$P \overset{\text{def}}{=} \left\{ (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2-1} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \right\}.$$

Nalezněte její minimum, maximum, infimum a supremum (pokud existují). Ověřte z definice příslušných pojmů.

Řešení:

- $\min P = -\frac{5}{4}$:

  Chceme ukázat, že pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

  $$-\frac{5}{4} \leq (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2-1}.$$

Pro sudá n nerovnost zřejmě platí. Stačí tedy dokázat, že pro $n = \{3, 5, \dots\}$ platí

$$-\frac{5}{4} \leq -\frac{n^2+1}{n^2-1}.$$

Snadnou úpravou se ale ukáže, že to je ekvivalentní s $n \geq 3$.

- $\inf P = -\frac{5}{4}$:

  Protože existuje $\min P$, existuje i $\inf P$ a jejich hodnoty se rovnají.

- $\max P = \frac{5}{3}$:

  Chceme ukázat, že pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

  $$(-1)^n \frac{n^2+1}{n^2-1} \leq \frac{5}{3}.$$

  Pro $n = \{3, 5, \dots\}$ nerovnost zřejmě platí. Stačí tedy dokázat, že pro sudá n platí

  $$\frac{n^2+1}{n^2-1} \leq \frac{5}{3}.$$

  Snadnou úpravou se ale ukáže, že to je ekvivalentní s $n \geq 2$.

- $\sup P = \frac{5}{3}$:

  Protože existuje $\max P$, existuje i $\sup P$ a jejich hodnoty se rovnají.

4. [2 b] Spočtěte (bez použití l'Hôpitalova pravidla nebo Taylorova rozvoje)

$$\lim_{x\to 0} (x + \mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení: Platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(x+\mathrm{e}^x) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(x+\mathrm{e}^x) \cdot \frac{x+\mathrm{e}^x-1}{x+\mathrm{e}^x-1} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+\mathrm{e}^x)}{x+\mathrm{e}^x-1} \\
&= (1+1)\cdot 1 = 2,
\end{aligned}$$

kde v předposlední rovnosti jsme využili znalost limit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1,$$

a substituci $y = x + \mathrm{e}^x - 1$.

Konečně dostáváme

$$\lim_{x\to 0} (x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(x+\mathrm{e}^x)} = \mathrm{e}^2.$$

5. [2 b] Pro $n, m \in \mathbb{N}$ spočtěte (bez použití l'Hôpitalova pravidla nebo Taylorova rozvoje)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x^2} - \sqrt[m]{1-x^2}}{\sin(x^2)}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x^2}-\sqrt[m]{1-x^2}}{\sin(x^2)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x^2}-\sqrt[m]{1-x^2}}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin(x^2)}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[n]{1+x^2}-1}{x^2}-\frac{\sqrt[m]{1-x^2}-1}{x^2}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin(x^2)}\\ &= \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\cdot 1=\frac{m+n}{mn},\end{aligned}$$

kde v předposlední rovnosti jsme využili znalost limit

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1,\qquad \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[n]{1\pm y}-1}{y}=\pm\frac{1}{n},$$

a substituci $y=x^2$.