Matematická analýza I (NOFY151) – 3. zápočtový test

7. ledna 2020

Při vyšetřování průběhu funkce nás zajímá:

1. definiční obor
2. obor spojitosti
3. sudost/lichost, periodicita, jiné symetrie
4. limity v krajních bodech definičního oboru (či jeho podintervalů) a v bodech nespojitosti
5. průsečíky s osami
6. první derivace (i jednostranné derivace v bodech, které derivaci nemají)
7. druhá derivace
8. vyhodnocení první a druhé derivace:
   (a) množiny monotonie
   (b) lokální a globální extrémy
   (c) obor hodnot
   (d) konvexita, konkávnost, inflexní body
9. asymptoty
10. náčrt grafu

---

1. [4 b] Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{\ln x}.$$

Řešení:

1. Jmenovatel zadané funkce je definovaný a nenulový pro všechna $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, tedy $D_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$.
2. Protože čitatel i jmenovatel zadané funkce jsou spojité funkce na D_f, na stejné množině je tedy spojitá i celá funkce f (podíl spojitých funkcí je spojitá funkce).
3. Funkce není definovaná pro záporné hodnoty nemůže být tedy ani sudá ani lichá. Taktéž není periodická a nevykazuje ani jiné symetrie.
4. Limity v krajních bodech definičního oboru vycházejí následovně

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{x}{\ln x} &\stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 0,\\
\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln x} &\stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty,\\
\lim_{x\to 1-} \frac{x}{\ln x} &= -\infty,\\
\lim_{x\to 1+} \frac{x}{\ln x} &= +\infty,
\end{aligned}$$

   kde jsme v prvních dvou případech využili l'Hôpitalovo pravidlo pro výpočet limity typu “$\frac{\text{něco}}{\infty}$”.

5. Protože funkce není definovaná v nule, nemá průsečík s osou y. S osou x taktéž neexistuje žádný průsečík, protože čitatel zadané funkce by v takovém případě musel být nulový, což opět vylučuje definiční obor funkce.

6. První derivace je rovna
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$
Všimněme si, že $D_{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}} = D_f$.

   V bodě 0 není funkce f definovaná, nemůže tam mít tedy ani jednostrannou derivaci. Můžeme ale jako dodatečnou informaci spočítat limitu první derivace pro x jdoucí k nule zprava
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{2\ln x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{2\ln x} = 0.$$

7. Druhá derivace je rovna
$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1)\cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}.$$
Všimněme si, že $D_{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}} = D_f$.

8. Z podmínky nulové první derivace dostaneme kandidáty na lokální extrémy
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}.$$
Protože $D_{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}} = D_f$, první derivace existuje všude a nedostáváme tak žádné další kandidáty na extrém.

   Z podmínky nulové druhé derivace dostaneme kandidáty na inflexní body
$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}^2.$$
Protože $D_{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}} = D_f$, první derivace existuje všude a nedostáváme tak žádné další kandidáty na inflexní body.

   Definiční obor funkce tak můžeme podle významných bodů rozdělit na 4 intervaly a určit funkční hodnoty v těchto bodech a znaménka derivací na příslušných intervalech

	0	$(0,1)$	1	$(1,\mathrm{e})$	e	$(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$	e^2	$(\mathrm{e}^2,+\infty)$	$+\infty$
f	0		$\mp\infty$		e		$\frac{\mathrm{e}^2}{2}$		$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$		$-$		$+$		$+$	0	$-$	

   (Zde rozumíme „funkční hodnotou“ v bodech 0, 1 a $+\infty$ (jednostrannou) limitu příslušné funkce v těchto bodech.)

   Z tabulky výše pak dostáváme

   (a) funkce je klesající na intervalech $(0,1)$ a $(1,\mathrm{e})$ a rostoucí na intervalu $(\mathrm{e},+\infty)$

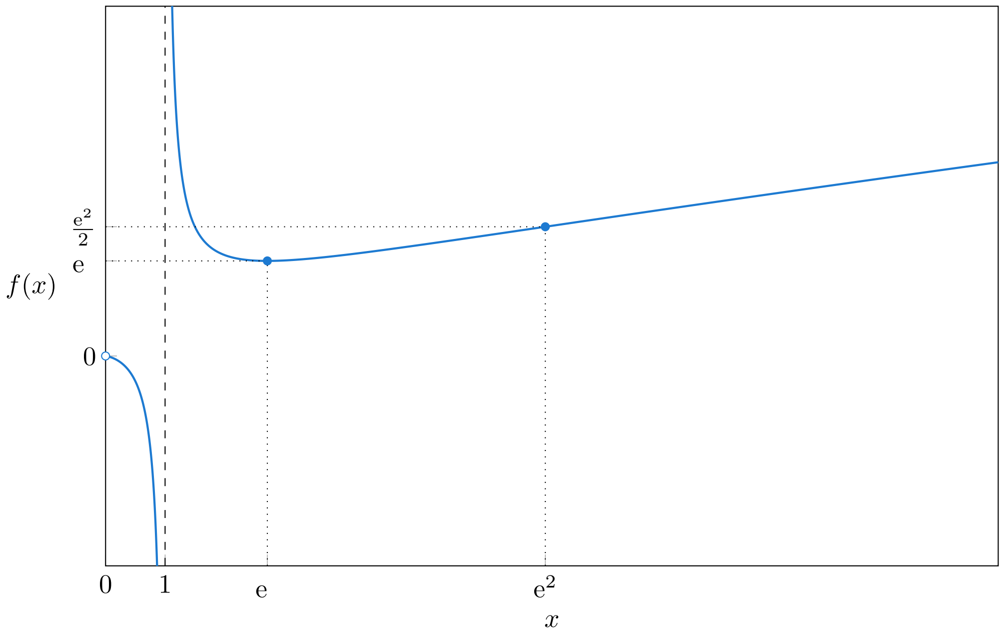
   (b) v bodě e má funkce lokální minimum, globální extrémy funkce nemá

   (c) $R_f = (-\infty, 0) \cup [\mathrm{e}, +\infty)$

   (d) funkce je konvexní na intervalu $\left(1,\mathrm{e}^2\right)$, konkávní na intervalech $(0,1)$ a $\left(\mathrm{e}^2,+\infty\right)$ a v bodě e^2 má inflexní bod

9. Podle bodu 4 má funkce vertikální asymptotu v bodě 1. Pro ověření zda má funkce asymptotu v nekonečnu vypočítejme, jakou by musela mít směrnici k
$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0.$$
Asymptota v nekonečnu by pak musela být horizontální přímka a muselo by tedy platit
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}.$$
To je ale ve sporu s bodem 4. Asymptotu v nekonečnu tedy funkce f nemá.

10. Graf funkce f vypadá následovně



2. [6 b] Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2|\sin x| + |\cos 2x|.$$

Řešení:

1. Funkce je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tedy $D_f = \mathbb{R}$.
2. Goniometrické funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbb{R}$, absolutní hodnota též a jejich složení a součet taktéž. Celkově je tedy obor spojitosti funkce f celá reálná osa.
3. Funkce $|\sin x|$ je π-periodická a funkce $|\cos 2x|$ je $\frac{\pi}{2}$-periodická (nakreslete si obrázky). Celkově je tedy zadaná funkce π-periodická. Navíc platí
$$f(-x) = 2|\sin(-x)| + |\cos(-x)| = 2|-\sin x| + |\cos x| = 2|\sin x| + |\cos 2x| = f(x).$$
Zadaná funkce je tedy sudá. Z těchto pozorování plyne, že se můžeme při vyšetřování průběhu funkce omezit na interval $[0, \frac{\pi}{2}]$. Na tomto intervalu pak můžeme funkci f psát jako
$$f(x) = \begin{cases} 2\sin x + \cos 2x, & \text{na } [0, \frac{\pi}{4}], \\ 2\sin x - \cos 2x, & \text{na } (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \tag{1}$$
4. Zadaná funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, tedy i v krajních bodech intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Stačí tedy spočítat funkční hodnoty v těchto bodech
$$f(0) = 1,$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$$
5. Průsečík s osou y už máme z předchozího bodu: $f(0) = 1$. Abychom dostali průsečík s osou x, je potřeba vyřešit rovnici
$$2|\sin x| + |\cos 2x| = 0.$$
Protože absolutní hodnota je vždy nezáporná, vidíme, že rovnost může nastat pouze, pokud
$$\sin x = 0, \quad \wedge \quad \cos 2x = 0,$$
což je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ ekvivalentní
$$x = 0, \quad \wedge \quad x = \frac{\pi}{4}.$$
To ale nemůže nastat a funkce tak žádný průsečík s osou x nemá.

6. První derivace je rovna (využíváme zápisu funkce f ve tvaru (1))

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \begin{cases} 2\cos x - 2\sin 2x, & \text{na } \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \\ 2\cos x + 2\sin 2x, & \text{na } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Jednostranné derivace v krajních bodech intervalů $(0, \frac{\pi}{4})$ a $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ vychází následovně

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f_+}{\mathrm{d}x}(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{x\to 0+} (2\cos x - 2\sin 2x) = 2, \\ \frac{\mathrm{d}f_-}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}-} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}-} (2\cos x - 2\sin 2x) = \sqrt{2} - 2, \\ \frac{\mathrm{d}f_+}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}+} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}+} (2\cos x + 2\sin 2x) = \sqrt{2} + 2, \\ \frac{\mathrm{d}f_-}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} (2\cos x + 2\sin 2x) = 0. \end{aligned}$$

7. Druhá derivace je rovna (opět využíváme zápisu funkce f ve tvaru (1))

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = \begin{cases} -2\sin x - 4\cos 2x, & \text{na } \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \\ -2\sin x + 4\cos 2x, & \text{na } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

8. Z podmínky nulové první derivace ve vnitřních bodech intervalů, kde derivace existuje, dostaneme kandidáty na lokální extrémy. Na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$ by mělo platit

$$2\cos x - 2\sin 2x = 0,$$

což se s využitím vzorce $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ a nenulovosti $\cos x$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$ redukuje na rovnici

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Dostáváme tak kandidáta na extrém v bodě $x = \frac{\pi}{6}$.

Na intervalu $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ by mělo platit

$$2\cos x + 2\sin 2x = 0,$$

což se opět s využitím vzorce $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ a nenulovosti $\cos x$ na intervalu $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ redukuje na rovnici

$$\sin x = -\frac{1}{2}.$$

To ale není splněno pro žádné x z intervalu $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Podle bodu 6 dostáváme ještě kandidáta na extrém v bodě $\frac{\pi}{4}$, neboť zde neexistuje první derivace (jednostranné derivace v tomto bodě se různí).

Z podmínky nulové druhé derivace ve vnitřních bodech intervalů, kde derivace existuje, dostaneme kandidáty na inflexní body. Na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$ by mělo platit

$$-2\sin x - 4\cos 2x = 0.$$

Na tomto intervalu jsou ovšem $\sin x$ i $\cos 2x$ kladné, takže rovnost nemůže nastat.

Na intervalu $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ by mělo platit

$$-2\sin x + 4\cos 2x = 0.$$

Na tomto intervalu je ovšem $\sin x$ kladný a $\cos 2x$ záporný, takže rovnost opět nemůže nastat.

Jak už víme, v bodě $\frac{\pi}{4}$ neexistuje první derivace a v takovém bodě tedy nemůže být ani inflexní bod (funkce musí být v inflexním bodě diferencovatelná). Žádní kandidáti na inflexní bod tedy neexistují.

Interval $[0, \frac{\pi}{2}]$ tak můžeme podle významných bodů rozdělit na 3 intervaly a určit funkční hodnoty v těchto bodech a znaménka derivací na příslušných intervalech

	0	$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$
f	1		$\frac{3}{2}$		$\sqrt{2}$		3
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	2	$+$	0	$-$	$\sqrt{2}\mp 2$	$+$	0
$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}$		$-$		$-$		$-$	

(Zde rozumíme „funkční hodnotou“ první derivace v bodech 0, $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$ jednostrannou derivaci v příslušných bodech.)

Z tabulky výše pak pro funkci f na intervalu $[0,\frac{\pi}{2}]$ dostáváme

(a) funkce je klesající na intervalu $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ a rostoucí na intervalech $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ a $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

(b) v bodě $\frac{\pi}{4}$ má funkce lokální minimum, v bodě $\frac{\pi}{6}$ lokální maximum, v bodě 0 globální minimum a v bodě $\frac{\pi}{2}$ globální maximum

(c) $R_f = [1,3]$

(d) funkce je konkávní na intervalech $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ a $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, inflexní body nemá

Vlastnosti z bodů 8a, 8b a 8d by se s využitím sudosti a periodicity funkce f snadno rozšířily na celý definiční obor zadané funkce.

9. Zadaná funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, takže nemá žádné vertikální asymptoty. Pro ověření zda má funkce asymptotu v nekonečnu vypočítejme, jakou by musela mít směrnici k

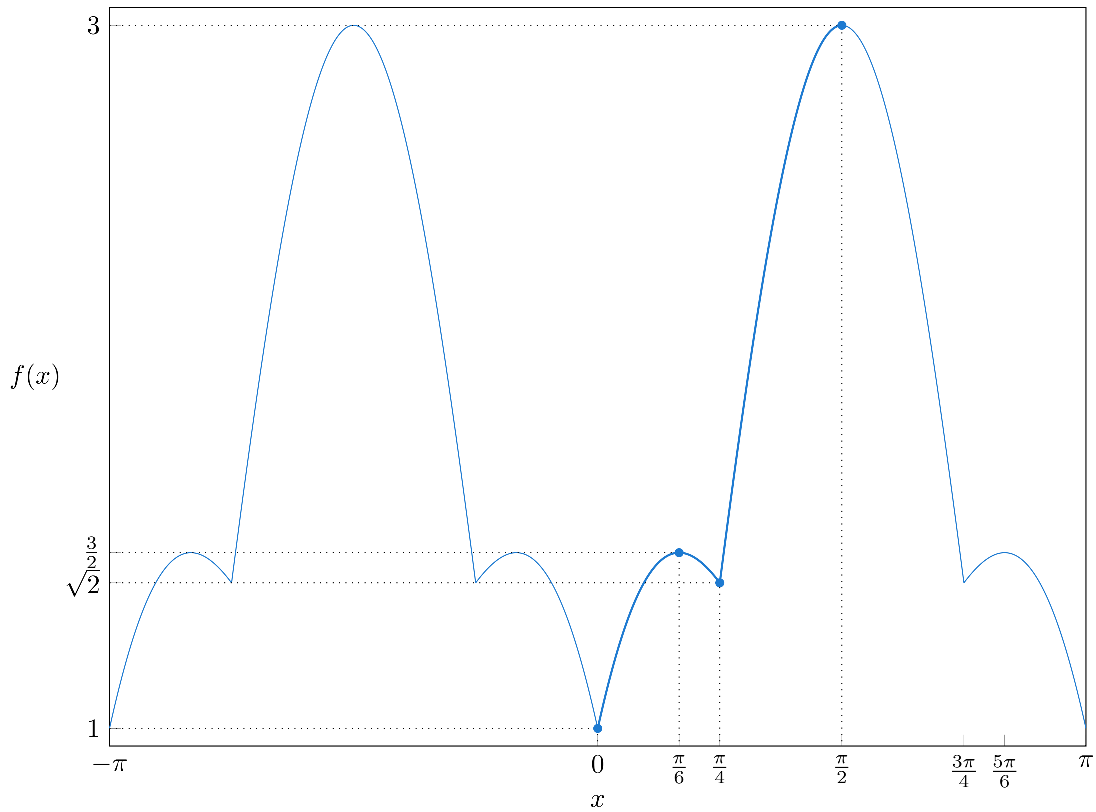
$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

neboť f je omezená a $\frac{1}{x}$ jde k nule pro $x \to +\infty$. Asymptota v nekonečnu by pak musela být horizontální přímka a muselo by tedy platit

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}.$$

Protože je ale f periodická a nekonstantní, z Heineho věty plyne, že její limita v nekonečnu neexistuje. Asymptotu v nekonečnu tedy funkce f nemá.

10. Graf funkce f vypadá následovně



Zvýrazněná část grafu odpovídá zkoumané funkci na intervalu $[0,\frac{\pi}{2}]$, kde jsme vyšetřovali její průběh.