Matematická analýza II (NOFY152) – DÚ 8

Totální diferenciál, lokální a vázané extrémy funkcí více proměnných

1. U následujících funkcí zjistěte, ve kterých bodech existuje totální diferenciál (a určete ho).
   (i) $f(x, y, z) = \cos x \cosh y$
   (ii) $f(x, y) = |x||y|$
   (iii) $f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}$

Řešení:

(i) Zřejmě platí $D_f = \mathbb{R}^3$. Na celém definičním oboru existují parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\sin x \cosh y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \cos x \sinh y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0,$$

které jsou zde navíc spojité. Funkce f má tedy totální diferenciál na celém $\mathbb{R}^3$, který je pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$ dán předpisem

$$\mathrm{d}f(x, y, z)(\mathbf{h}) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{h} = -(\sin x \cosh y)h_1 + (\cos x \sinh y)h_2.$$

(ii) Zřejmě platí $D_f = \mathbb{R}^2$. Mimo osový kříž, tj. pro $xy \neq 0$, platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (\operatorname{sign} x)|y|,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (\operatorname{sign} y)|x|.$$

Protože jsou zde parciální derivace spojité, funkce f má mimo osový kříž totální diferenciál.

Na osovém kříži mimo počátek, tj. na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0, (x, y) \neq (0, 0)\}$, vždy jedna z parciálních derivací neexistuje. Skutečně, pro $y \neq 0$ máme podle definice

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{h \to 0} \frac{|h||y| - 0|y|}{h} = \lim_{h \to 0} (\operatorname{sign} h)|y|,$$

a parciální derivace f podle x zde tedy neexistuje. Analogicky postupujeme na ose x mimo počátek, kde neexistuje parciální derivace f podle y.

V počátku podle definice parciální derivace platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

a tedy, pokud zde funkce f má totální diferenciál, musí se jednat o nulové zobrazení. Ověřme, zda platí

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - 0}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

To je ovšem jednoduchý důsledek nerovností

$$0 \leq \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - 0}{\|\mathbf{h}\|_\infty} = \frac{|h_1||h_2|}{\max(|h_1|, |h_2|)} = \min(|h_1|, |h_2|) \leq \max(|h_1|, |h_2|) = \|\mathbf{h}\|_\infty,$$

kde jsme použili maximovou normu. (Na konečně dimenzionálním prostoru jsou všechny normy ekvivalentní, takže je jedno, kterou zvolíme v definici totálního diferenciálu.)

Konečně tedy dostáváme, že na množině $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\neq 0 \vee (x,y)=(0,0)\}$ má funkce totální diferenciál daný pro každé $\mathbf{h}\in\mathbb{R}^2$ předpisem

$$\mathrm{d}f(x,y,z)(\mathbf{h}) = \nabla f(x,y,z)\cdot\mathbf{h} = (\operatorname{sign} x)|y|h_1 + (\operatorname{sign} y)|x|h_2.$$

(iii) Pro definiční obor zadané funkce platí

$$D_f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\neq 0 \wedge (x>0 \vee (x=0 \wedge yz>0))\}$$

Na množině $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\neq 0, x>0\}$ máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{y}{xz}x^{\frac{y}{z}}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\ln x}{z}x^{\frac{y}{z}},\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= -\frac{y\ln x}{z^2}x^{\frac{y}{z}},\end{aligned}$$

a ze spojitosti příslušných parciálních derivací zde proto dostáváme existenci totálního diferenciálu.

Na množině $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\neq 0, x=0, yz>0\}$ neexistuje parciální derivace f podle x (funkce není definovaná pro $x<0$), a proto zde nemůže mít ani totální diferenciál.

Funkce f má tedy totální diferenciál na množině $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\neq 0, x>0\}$, který je pro každé $\mathbf{h}\in\mathbb{R}^3$ dán předpisem

$$\mathrm{d}f(x,y,z)(\mathbf{h}) = \nabla f(x,y,z)\cdot\mathbf{h} = x^{\frac{y}{z}}\left(\frac{y}{xz}h_1 + \frac{\ln x}{z}h_2 - \frac{y\ln x}{z^2}h_3\right).$$

2. Najděte lokální extrémy následujících funkcí.

(i) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

(ii) $f(x,y) = \begin{cases} xy\ln\left(x^2+y^2\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(iii) $f(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Řešení:

(i) Všimněme si, že použití polárních souřadnic vede na zkoumání lokálních extrémů funkce

$$g(r) \overset{\text{def}}{=} r^2\mathrm{e}^{-r^2},$$

kde $r\in(0,+\infty)$. Protože g je funkcí jedné reálné proměnné, stačí použít nástroje známé ze zimního semestru. Platí

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}(r) = 2r\left(1-r^2\right)\mathrm{e}^{-r^2},$$

a tedy ze znaménka první derivace dostáváme, že g je rostoucí pro $r\in(0,1)$ a klesající pro $r\in(1,+\infty)$. V bodě $r=1$ je tedy lokální maximum funkce g, z čehož plyne, že funkce f má lokální maxima na jednotkové kružnici, tj. na množině $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$. Navíc vidíme, že v počátku má funkce f lokální minimum.

(ii) Mimo bod $(0,0)$ se jedná o nekonečněkrát diferencovatelnou funkci. Dále okamžitě vidíme, že $(0,0)$ není lokální extrém, neboť

$$\begin{aligned} f(x,x) &= x^2\ln(2x^2) < 0, \quad x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\\ f(x,-x) &= -x^2\ln(2x^2) > 0, \quad x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Jedná se tedy o tzv. sedlový bod.

Mimo počátek hledáme stacionární body, tj. body, které řeší rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + xy\frac{2x}{x^2+y^2} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\ln(x^2+y^2) + xy\frac{2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Je-li $y=0$, pak první rovnice se nuluje a v druhé zbyde $x\ln x^2 = 0$. Dostáváme stacionární body $(\pm 1, 0)$. Analogicky pro $x=0$, dostaneme podezřelé body $(0,\pm 1)$. Všechny tyto body můžeme ale rovnou vyloučit, neboť $f(1,0)=0$ a $f(1,y)>0$ pro $y>0$ a $f(1,y)<0$ pro $y<0$. Analogicky pro ostatní body $(-1,0)$ a $(0,\pm 1)$.

Je-li $xy\neq 0$, pak můžeme vydělit první rovnici y, druhou x a dostaneme rovnice

$$\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = 0,$$
$$\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Tudíž

$$\frac{2x^2}{x^2+y^2} = \frac{2y^2}{x^2+y^2} \Leftrightarrow |x| = |y|.$$

Je-li $x=\pm y$, pak

$$0 = \ln(2x^2) + \frac{2x^2}{2x^2} = \ln(2x^2)+1,$$

a tedy dostáváme 4 stacionární body

$$\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2e}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2e}}\right).$$

Všimněme si, že platí následující symetrie

$$f(x,y) = f(-x,-y) = -f(x,-y) = f(-x,y).$$

Odsud plyne, že stačí zkoumat chování funkce f v bodě $\left(\sqrt{\frac{1}{2e}}, \sqrt{\frac{1}{2e}}\right)$. Protože

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2xy(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2xy(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \frac{2(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

dostáváme, že v bodě $(x,y) = \left(\sqrt{\frac{1}{2e}}, \sqrt{\frac{1}{2e}}\right)$ je Hessova matice $\mathbb{H}_f$ rovna

$$\mathbb{H}_f\left(\left(\sqrt{\frac{1}{2e}}, \sqrt{\frac{1}{2e}}\right)\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jedná se evidentně o positivně definitní matici a tedy f má v bodě $\left(\sqrt{\frac{1}{2e}}, \sqrt{\frac{1}{2e}}\right)$ lokální minimum. To samé pak platí i pro bod $\left(-\sqrt{\frac{1}{2e}}, -\sqrt{\frac{1}{2e}}\right)$. Naopak body $\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2e}}, -\sqrt{\frac{1}{2e}}\right)$ jsou lokální maxima.

(iii) Zřejmě platí $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0\}$. Na D_f máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2+y^2+x-3y}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x^2-2y^2+y+3x}{x^2+y^2},$$

a stacionární body tedy dostaneme vyřešením rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + x - 3y &= 0, \\ -2x^2 - 2y^2 + y + 3x &= 0. \end{aligned}$$

Vynásobením první rovnice 2 a následným sečtením s druhou rovnicí dostáváme podmínku $x = y$. Po dosazení do první rovnice pak dostáváme

$$2x^2 - 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 1.$$

Řešením soustavy výše jsou tak body $(0,0)$ a $(1,1)$. Počátek ale můžeme rovnou vyloučit, protože v něm není funkce f definována.

Pro druhé parciální derivace f platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-x^2 + 6xy + y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{x^2 - 6xy - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{-3x^2 - 2xy + 3y^2}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

a Hessova matice $\mathbb{H}_f$ je proto v bodě $(1,1)$ rovna

$$\mathbb{H}_f((1,1)) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Protože $\det \mathbb{H}_f((1,1)) = -\frac{9}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{2} < 0$, je matice indefinitní a v bodě $(1,1)$ je tedy sedlový bod. (Determinant matice je roven součinu jejích vlastních čísel, což v našem případě znamená, že $\det \mathbb{H}_f((1,1))$ má dvě nenulová vlastní čísla s opačnými znaménky.)

3. Najděte extrémy daných funkcí vzhledem k příslušné vazbě.
   (i) $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$; $\quad x^2 + y^2 = 1$
   (ii) $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$; $\quad x + y + z = \frac{\pi}{2}, \quad x,y,z > 0$

Řešení:

(i) Jednotková kružnice $\{(x,y) : \ x^2 + y^2 - 1\}$ je kompaktní. Dále funkce f je spojitá a nabývá tedy na K svého maxima i minima. Položme $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Nyní spočteme gradienty

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right), \ \ \nabla g(x,y) = (2x, 2y).$$

Podle věty o Lagrangeových multiplikátorech musí v bodě extrému $(x_0, y_0) \in K$ platit

$$(\nabla f)(x_0,y_0) = \lambda (\nabla g)(x_0,y_0)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. To vede na soustavu lineárních rovnic:

$$2\lambda x_0 = \frac{1}{a}, \ 2\lambda y_0 = \frac{1}{b}.$$

Vidíme, že nutně $x_0 \neq 0$ a $y_0 \neq 0$. Z první rovnice tedy plyne $\lambda = \frac{1}{2ax_0}$ a dosazením do druhé rovnice dostaneme:

$$y_0 = \frac{1}{2\lambda b} = \frac{2ax_0}{2b} = \frac{ax_0}{b}.$$

Dále musí platit $x_0^2 + y_0^2 = 1$ a tedy

$$1 = x_0^2 + \left(\frac{ax_0}{b}\right)^2 = x_0^2 (1 + \frac{a^2}{b^2}) = \frac{x_0^2}{b^2}(a^2 + b^2) \Leftrightarrow x_0 = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ y = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Označme
$$A := \operatorname{sign}(ab)\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$
Pak
$$\begin{aligned} f(\pm A) &= \frac{\operatorname{sign}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{\pm b}{a}+\frac{\pm a}{b}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sign}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{\pm(b^2+a^2)}{ab}\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{\pm 1}{|ab|}\right). \end{aligned}$$

Závěr: f nabývá globálního maxima v bodě A a globálního minima v bodě $-A$.

(ii) Funkce f má zřejmě následující symetrie:
$$f(x,y,z) = f(\sigma(x),\sigma(y),\sigma(z)) = f(x+2k_1\pi, y+2k_2\pi, z+2k_3\pi),$$
kde σ je libovolná permutace na třech prvcích a $k_i \in \mathbb{Z},\ i=1,2,3$. Dále na množině
$$M := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x+y+z=\frac{\pi}{2},\ x,y,z>0\}$$
platí $0<x,y,z<\frac{\pi}{2}$. Tudíž $0<f(x,y,z)<1$.

Množina M není kompaktní, neboť není uzavřená. Nicméně
$$\overline{M} := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x+y+z=\frac{\pi}{2},\ x,y,z\geq 0\}$$
je kompaktní množina s hranicí
$$\partial M = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x+y+z=\frac{\pi}{2},\ xyz=0,\ x,y,z\geq 0\}.$$

Nejprve najdeme globální extrémy f na $\overline{M}$. Vidíme, že $f=0$ na ∂M a $0\leq f(x,y,z)\leq 1$ na $\overline{M}$. Jelikož $f>0$ na M, pak nutně $0=\inf_M f$ a tedy f na M nenabývá globálního minima. Zbývá najít bod z $\overline{M}$, kde f nabývá globálního maxima. Jelikož $f>0$ na M a $f=0$ na ∂M, pak globální maximum musí ležet v M.

Položme $g(x,y,z)=x+y+z-\frac{\pi}{2}$. Máme:
$$\nabla f = (\cos x\sin y\sin z, \sin x\cos y\sin z, \sin x\sin y\cos z),\ \ \nabla g=(1,1,1).$$
V bodě globálního extrému (x,y,z) tedy musí platit
$$\begin{aligned} \cos x\sin y\sin z &= \lambda, \\ \sin x\cos y\sin z &= \lambda, \\ \sin x\sin y\cos z &= \lambda, \end{aligned}$$
pro nějaké $\lambda\in\mathbb{R}$. Víme, že pro $(x,y,z)\in M$ musí být výrazy
$$\sin x, \sin y, \sin z, \cos x, \cos y, \cos z$$
kladné. Z první a druhé rovnice dostaneme
$$\cos x\sin y = \sin x\cos y \Leftrightarrow \sin(x-y)=0 \Leftrightarrow y-x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$
Z první a třetí rovnice dostaneme analogickým postupem $z-x=\ell\pi,\ \ell\in\mathbb{Z}$, a konečně z druhé a třetí rovnice plyne $z-y=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$. Celkem máme, že
$$y=x+k\pi,\ z=x+\ell\pi,\ k,\ell\in\mathbb{Z}.$$
Jelikož $\frac{\pi}{2}\geq x,y,z\geq 0$ na $\overline{M}$, pak nutně $x=y=z=\frac{\pi}{6}$. Více podezřelých bodů jsme nenašli, to znamená, že $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$ je bod maxima. Konečně $f((\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}))=(\sin\frac{\pi}{6})^3=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$.

4. Nalezněte největší a nejmenší hodnotu daných funkcí na příslušné množině.
   (i) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y; \quad x^2 + y^2 \le 25$
   (ii) $f(x,y,z) = x + y + z; \quad x^2 + y^2 \le z \le 1$

Řešení:

(i) Množina
$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 25\}$$
je omezená a uzavřená. Jedná se tedy o kompaktní množinu. Zřejmě platí
$$K^o = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 25\}, \ \ \partial K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 25\}.$$
Funkce f je spojitá na K a nabývá tudíž na K svého maxima i minima. Nejprve najdeme podezřelé body uvnitř K, tj. na K^o.

Spočteme gradient
$$\nabla f(x,y) = (2x - 12, 2y + 16).$$
Vidíme, že $\nabla f = (0,0)$ jen v bodě $(6,8)$. Tento bod ale neleží v K^o. To znamená, že f musí nabývat maxima a minima na hranici ∂K.

Platí
$$\partial K := \{(x,y) : \ g(x,y) = 0\}, \ \ g(x,y) = x^2 + y^2 - 25, \ \ \nabla g(x,y) = (2x, 2y).$$
Podle Lagrangeovy věty o vázaných extrémech musí v bodě extrému $(x_0, y_0) \in \partial K$ platit:
$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$
To vede na soustavu rovnic
$$2x - 12 = 2\lambda x, \ \ 2y + 16 = 2\lambda y.$$
Z první rovnice dostaneme $x \neq 0$ a $\lambda = \frac{x-6}{x} = 1 - \frac{6}{x}$. Dosadíme do druhé rovnice a získáme
$$y + 8 = y - \frac{6y}{x} \Leftrightarrow 8x = -6y \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x.$$
Tento vztah dosadíme do vazby a dostaneme
$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = \frac{25}{9}x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 3, \ y = \mp 4.$$
Konečně
$$f(3,-4) = -75, \ \ f(-3,4) = 125.$$
Závěr: f nabývá maxima v bodě $(-3,4)$ a maxima v bodě $(3,-4)$.

(ii) Množina
$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le z \le 1\}$$
je omezená a uzavřená. Je tedy kompaktní. Dále platí
$$K^o = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < z < 1\},$$
$$\partial K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le z = 1 \ \vee \ x^2 + y^2 = z \le 1\}.$$
Funkce f je spojitá na K a nabývá tudíž na K svého maxima i minima.

Nejprve najdeme podezřelé body uvnitř K, tj. na K^o. Platí
$$\nabla f = (1,1,1).$$
Jelikož $\nabla f \neq (0,0,0)$ na $\mathbb{R}^3$, pak v K^o neleží žádný podezřelý bod. Stačí tedy hledat extrémy na ∂K.

Hranici ∂K rozdělíme ještě na dvě části, a to na
$$\partial K_0 = \{(x,y,x^2+y^2) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le 1\} \ \text{a} \ \partial K_1 = \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Pak platí $\partial K = \partial K_0 \cup \partial K_1$ a obě množiny $\partial K_0,\ \partial K_1$ jsou kompaktní. Nejprve najdeme extrémy f na ∂K_0 a pak na ∂K_1. Pak tyto extrémy mezi sebou porovnáme. Ještě si všimneme, že

$$\partial K_0 \cap \partial K_1 = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 = 1\} \tag{1}$$

je kružnice v $\mathbb{R}^3$.

Nyní najdeme extrémy f na ∂K_0. Definujme pomocnou funkci

$$g_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g_0(x, y, z) = z - x^2 - y^2.$$

Jestliže extrém leží na podmnožině

$$H_0 := \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 < 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ g_0(x, y, z) = 0,\ x^2 + y^2 < 1\},$$

pak v takovém bodě musí platit:

$$\nabla f = \lambda \nabla g_0 = \lambda(-2x, -2y, 1).$$

To vede na soustavu rovnic

$$1 = -2\lambda x = -2\lambda y = \lambda.$$

Máme $\lambda = 1,\ x = y = -\frac{1}{2}$ a získali jsme podezřelý bod $A = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \partial K_0$. Ostatní podezřelé body na ∂K_0 musí ležet na kružnici (1) a tyto body najdeme později.

Analogicky postupujeme na ∂K_1. Definujme pomocnou funkci

$$g_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g_0(x, y, z) = z - 1.$$

Jestliže extrém leží na podmnožině

$$H_1 := \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 < 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ g_1(x, y, z) = 0,\ x^2 + y^2 < 1\},$$

pak v takovém bodě musí platit:

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 = \lambda(0, 0, 1).$$

Dostáváme soustavu rovnic $1 = 0, 1 = \lambda$, která nemá řesení. To znamená, že na H_1 žádný podezřelý bod není. Zbývá najít podezřelé body na kružnici (1) a porovnat hodnoty v těchto bodech s $f(A)$.

Máme

$$\partial K_0 \cap \partial K_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ g_0(x, y, z) = g_1(x, y, z) = 0\}.$$

V bodě extrému na této množině musí platit

$$\nabla f = \lambda_0 \nabla g_0 + \lambda_1 \nabla g_1,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1.$$

To vede na soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2x & 0 & 1 \\ -2y & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

pro neznámé λ_0 a λ_1. Tato soustava má řešení jen pro $x = y$. Jelikož musí platit $x^2 + y^2 = 1$, pak $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Celkem existují pouze tři podezřelé body:

$$A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ \pm B = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

Platí

$$f(A) = -\frac{1}{2},\ f(\pm B) = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Jelikož $-\frac{1}{2} < 1 - \sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}$, pak jsme ukázali

Závěr: f nabývá maxima v bodě B a minima v bodě A.