

Matematická analýza II (NOFY152) – DŮ 5

Integrační faktor, lineární ODR s konstantními koeficienty

Nalezněte maximální řešení rovnic

1.

$$(1 - x^2)y' + xy = 1, \quad y(0) = 1$$

Řešení: Nejprve přepíšme rovnici do tvaru

$$y' + \frac{xy}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2}, \quad x \neq \pm 1. \quad (1)$$

V dalším se omezíme na $x \in (-1, 1)$, neboť na tomto intervalu se nachází počáteční podmínka. Máme

$$\int \frac{x}{1 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln |1 - x^2| + c = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + c.$$

Rovnici (1) přenásobíme funkcí $e^{\ln \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ a dostaneme

$$\left(y \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} y' + \frac{xy}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$

Protože platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} & v = x \\ u' = \frac{x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} & v' = 1 \end{array} \right| = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \int \frac{x^2}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx - \int \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx, \end{aligned}$$

dostáváme odsud, že

$$\int \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + d,$$

a tudíž

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2} \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + d \right) = d\sqrt{1 - x^2} + x.$$

Jelikož $1 = y(0) = d$, pak funkce

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2} + x, \quad x \in (-1, 1) \quad (3)$$

řeší zadanou počáteční úlohu. Jelikož $\lim_{x \rightarrow -1+} y'(x) = +\infty$ a $\lim_{x \rightarrow 1-} y'(x) = -\infty$, pak (3) nelze rozšířit jako C^1 funkci na žádný větší otevřený interval. Tudíž (3) je maximální řešení.

Alternativně můžeme rovnici (2) přímo integrovat od 0 do x s využitím počáteční podmínky

$$\frac{y(x)}{\sqrt{1 - x^2}} - y(0) = \int_0^x \frac{1}{(1 - s^2)^{\frac{3}{2}}} ds = \left[\frac{s}{\sqrt{1 - s^2}} \right]_0^x = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

což implikuje (3).

2.

$$x(x - 1)y' = y - 1$$

Řešení: (Lze zavést novou funkci $z = y - 1$, pak se rovnice zjednoduší na $x(x-1)z' = z$.)

Ze zadání je zřejmé, že $y(x) = 1$ je stacionárním řešením úlohy pro $x \in \mathbb{R}$. Pro nalezení netriviálních řešení nejprve přepíšeme rovnici do tvaru

$$y' - \frac{y}{x(x-1)} = -\frac{1}{x(x-1)}, \quad (4)$$

kterou řešíme na intervalech, kde $x \neq 0, 1$. Máme

$$\begin{aligned} -\int \frac{1}{x(x-1)} dx &= -\int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \ln|x| - \ln|x-1| + c = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + c. \end{aligned}$$

Nyní rozlišujeme dva případy, a to

- (a) $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, pak $\frac{x}{x-1} > 0$, a
- (b) $x \in (0, 1)$, kde $\frac{x}{x-1} < 0$.

Jestliže platí (a), pak rovnici (4) přenásobíme funkcí $e^{\ln \frac{x}{x-1}} = \frac{x}{x-1}$ a dostaneme

$$\left(y \frac{x}{x-1} \right)' = \frac{x}{x-1} y' - \frac{y}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Dále

$$-\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \frac{1}{x-1} + d,$$

a tudíž

$$y(x) = \frac{x-1}{x} \left(\frac{1}{x-1} + d \right) = d \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} = d + \frac{1-d}{x}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Jestliže platí (b), pak rovnici (4) přenásobíme funkcí $e^{\ln \frac{-x}{x-1}} = \frac{-x}{x-1}$. Pak ale dostaneme rovnici, která se od té v (a) liší jen o znaménko, jedná se tudíž o stejnou diferenciální rovnici. Řešení (4) je tedy na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, +\infty)$ dáno předpisem

$$y(x) = d + \frac{1-d}{x}, \quad d \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Řešení (5) se dají napojit v $x = 1$, je-li navíc $d = 1$, pak dokonce i v $x = 0$. Maximální řešení zadané rovnice jsou tedy

$$\begin{aligned} y(x) &= d + \frac{1-d}{x}, \quad d \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, x \in (-\infty, 0) \vee x \in (0, +\infty), \\ y(x) &= 1, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3.

$$y'' - \frac{1 + \ln^2 2}{\ln 2} y' + y = 2^x$$

Řešení: Charakteristický polynom má tvar

$$\lambda^2 - \frac{1 + \ln^2 2}{\ln 2} \lambda + 1 = (\lambda - \ln 2) \left(\lambda - \frac{1}{\ln 2} \right).$$

Jednonásobné kořeny $\ln 2$, $\frac{1}{\ln 2}$ dávají fundamentální systém

$$\left\{ e^{(\ln 2)x}, e^{\frac{x}{\ln 2}} \right\} = \left\{ 2^x, e^{\frac{x}{\ln 2}} \right\}.$$

Pravou stranu zadané rovnice si přepíšeme do tvaru $e^{x \ln 2}$, což už má tvar speciální pravé strany. Protože $\ln 2$ je jednonásobný kořen charakteristického polynomu, partikulární řešení y_p hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = A x e^{(\ln 2)x} = A x 2^x.$$

První a druhá derivace partikulárního řešení vychází

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A 2^x + A (\ln 2) x 2^x, \\ y_p''(x) &= 2A (\ln 2) 2^x + A (\ln^2 2) x 2^x. \end{aligned}$$

Po dosazení do zadané rovnice pak dostáváme, že musí platit

$$A = \frac{\ln 2}{\ln^2 2 - 1}.$$

Obecné řešení definované pro $x \in \mathbb{R}$ je tedy

$$y(x) = C_1 2^x + C_2 e^{\frac{x}{\ln 2}} + \frac{\ln 2}{\ln^2 2 - 1} x 2^x,$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

4.

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 40 \cos^2 x$$

Řešení: Charakteristický polynom p má tvar

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4.$$

Uhádneme, že jeden z kořenů je 1. Dělením mnohočlenu mnohočlenem pak dostaneme

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4).$$

Jednonásobné kořeny $1, \pm 2i$ dávají fundamentální systém

$$\{e^x, \cos 2x, \sin 2x\}.$$

Pravou stranu zadané rovnice si přepíšeme pomocí identity $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ do tvaru

$$20 + 20 \cos 2x.$$

Pravá strana je tedy součtem dvou funkcí, které mají tvar speciální pravé strany, a partikulární řešení budeme tudíž hledat jako součet partikulárních příslušejících jednotlivým sčítancům. Partikulární řešení $y_{p,1}$ odpovídající pravé straně 20 se dá jednoduše uhádnout

$$y_{p,1}(x) = -5.$$

Protože $2i$ je jednonásobný kořen charakteristického polynomu, partikulární řešení $y_{p,2}$ odpovídající pravé straně $20 \cos 2x$ budeme hledat ve tvaru

$$y_{p,2}(x) = x(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

První, druhá a třetí derivace $y_{p,2}$ vychází

$$\begin{aligned} y_{p,2}'(x) &= A \cos 2x + B \sin 2x + x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x), \\ y_{p,2}''(x) &= -4A \sin 2x + 4B \cos 2x + x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x), \\ y_{p,2}'''(x) &= -12A \cos 2x - 12B \sin 2x + x(8A \sin 2x - 8B \cos 2x). \end{aligned}$$

Po dosazení do zadané rovnice pak dostáváme, že musí platit

$$A = -2, \quad B = -1.$$

Obecné řešení definované pro $x \in \mathbb{R}$ je tedy

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x - x(2 \cos 2x + \sin 2x) - 5,$$

kde $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

5.

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\sin x}$$

Řešení: Kořeny charakteristického polynomu

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2$$

jsou $1 \pm i$. Fundamentální systém je tedy

$$\{e^{-x} \cos x, e^{-x} \sin x\}.$$

Pravá strana zadané rovnice nemá speciální tvar (ani ji na něj nemůžeme převést), takže budeme úlohu řešit variací konstant, tj. partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x)e^{-x} \cos x + c_2(x)e^{-x} \sin x,$$

kde funkce c_1, c_2 dostaneme vyřešením soustavy

$$\begin{bmatrix} e^{-x} \cos x & e^{-x} \sin x \\ -e^{-x} (\cos x + \sin x) & e^{-x} (-\sin x + \cos x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^{-x}}{\sin x} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

a následnou integrací nalezených c_1', c_2' . Rovnici (6) můžeme přenásobit e^x a dostaneme

$$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x - \sin x & -\sin x + \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin x} \end{bmatrix}.$$

Protože

$$\det \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x - \sin x & -\sin x + \cos x \end{bmatrix} = -\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x = 1,$$

podle Cramerova pravidla dostáváme

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= \det \begin{bmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\sin x} & -\sin x + \cos x \end{bmatrix} = -1, & \implies & c_1(x) = -x, \\ c_2'(x) &= \det \begin{bmatrix} \cos x & 0 \\ -\cos x - \sin x & \frac{1}{\sin x} \end{bmatrix} = \frac{\cos x}{\sin x}, & \implies & c_2(x) = \ln |\sin x|. \end{aligned}$$

Obečné řešení definované na intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, je tedy

$$y(x) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x - x e^{-x} \cos x + \ln |\sin x| e^{-x} \sin x,$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.