

# Matematická analýza II (NOFY152) – DŮ 6

## ODR se separovanými proměnnými, speciální typy rovnic

1. Pro diferenciální rovnici

$$xy' = -\arccos y \sqrt{1-y^2},$$

nalezněte

(i) všechna maximální řešení,

(ii) všechna maximální řešení splňující  $y(\pi) = 0$ .

### Řešení:

(i) Nejprve si všimněme, že zadaná rovnice degeneruje pro  $x = 0$  a že na celé reálné ose máme dvě stacionární řešení  $y \equiv \pm 1$ . Zbylá řešení budeme hledat metodou separace proměnných převedením zadané diferenciální rovnice do tvaru

$$y' = f(x)g(y),$$

kde  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(y) = -\arccos y \sqrt{1-y^2}$ . Rovnice má smysl pro  $x$  z intervalů  $I_1 = (-\infty, 0)$  a  $I_2 = (0, +\infty)$ . Funkce  $g$  je spojitá a nenulová na intervalu  $J = (-1, 1)$ .

Spočteme primitivní funkce

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int f(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln(c|x|), \quad c > 0,$$

$$G(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{1}{g(y)} dy = \int \frac{-1}{\arccos y \sqrt{1-y^2}} dy = \left| \begin{array}{l} t = \arccos y \\ dt = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} dy \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| = \ln(\arccos y),$$

kde v posledním výrazu nepíšeme absolutní hodnotu argumentu logaritmu, neboť  $\arccos y > 0$  pro  $y \in (-1, 1)$ .

Rovnost primitivních funkcí

$$\ln(\arccos y) = \ln(c|x|),$$

je ekvivalentní

$$\arccos y = c|x|.$$

Protože levá strana nabývá hodnot z intervalu  $(0, \pi)$  dostáváme podmínky

$$x > 0 \implies cx \in (0, \pi) \iff x \in \left(0, \frac{\pi}{c}\right),$$

$$x < 0 \implies -cx \in (0, \pi) \iff x \in \left(-\frac{\pi}{c}, 0\right).$$

Na těchto intervalech potom máme netriviální řešení  $y(x) = \cos(cx)$ , kde jsme využili sudosti funkce  $\cos$ . Tato řešení lze slepit v počátku (vzpomeňte si, že původní rovnici má smysl uvažovat pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ ). Navíc je možné v krajních bodech intervalů  $\left(0, \frac{\pi}{c}\right)$ ,  $\left(-\frac{\pi}{c}, 0\right)$  napojovat získaná řešení na stacionární řešení  $y \equiv \pm 1$ .

Všechna maximální řešení potom tedy jsou ( $c > 0$ )

$$y(x) = \pm 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{c}] , \\ \cos(cx), & x \in (-\frac{\pi}{c}, \frac{\pi}{c}) , \\ -1, & x \in [\frac{\pi}{c}, +\infty) , \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{c}] , \\ \cos(cx), & x \in (-\frac{\pi}{c}, 0) , \\ 1, & x \in [0, +\infty) , \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0] , \\ \cos(cx), & x \in (0, \frac{\pi}{c}) , \\ -1, & x \in [\frac{\pi}{c}, +\infty) . \end{cases}$$

- (ii) Všimněme si nejdřív, že stacionární řešení  $y \equiv \pm 1$  nemůžou splňovat počáteční podmínku  $y(\pi) = 0$ . Hledejme proto hodnotu konstanty  $c > 0$ , pro kterou bude netriviální řešení splňovat počáteční podmínku

$$0 = y(\pi) = \cos(c\pi) \implies c = \frac{1}{2},$$

neboť musí platit  $\pi \in (0, \frac{\pi}{c})$ .

Maximální řešení splňující počáteční podmínku  $y(\pi) = 0$  tedy jsou

$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -2\pi] , \\ \cos(\frac{x}{2}), & x \in (-2\pi, 2\pi) , \\ -1, & x \in [2\pi, +\infty) , \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0] , \\ \cos(\frac{x}{2}), & x \in (0, 2\pi) , \\ -1, & x \in [2\pi, +\infty) . \end{cases}$$

2. Najděte maximální řešení počáteční úlohy

$$y^2 y' = x^2, \quad y(1) = 2.$$

**Řešení:** Jedná se o homogenní rovnici 1. řádu, která nikde nede degeneruje. Je-li  $y \neq 0$ , pak můžeme vydělit  $y^2$  a získáme rovnici

$$y' = \frac{x^2}{y^2}. \quad (1)$$

Zavedeme  $z = \frac{y}{x}$  pro  $x \neq 0$ , pak (1) přejde na rovnici se separovanými proměnnými

$$\begin{aligned} z'x + z &= z^{-2} \\ z' &= \frac{1}{x} \frac{1 - z^3}{z^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Vidíme, že  $z(x) = 1$  je stacionární řešení, tj.  $y(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Pro  $z(x) \neq 1$  platí

$$\int \frac{z^2}{1 - z^3} dz = -\frac{1}{3} \ln |1 - z^3| + c_1, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c_2.$$

Řešení (2) tedy vyhovuje vztahu

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \ln |1 - z^3(x)| &= \ln |x| + c \\ \ln |1 - z^3(x)| &= -3 \ln |x| - 3c \\ |1 - z^3(x)| &= e^{-3c} |x|^{-1} \\ \left| 1 - \left( \frac{y(x)}{x} \right)^3 \right| &= e^{-3c} |x|^{-3} \\ |x^3 - y^3(x)| &= e^{-3c} |x|^{-3} |x^3| \\ |x^3 - y^3(x)| &= e^{-3c} \\ y^3(x) &= x^3 \pm e^{-3c} \\ y(x) &= \sqrt[3]{x^3 + \alpha}, \quad \alpha = \pm e^{-3c}. \end{aligned}$$

Protože jsme uvažovali, že  $y \neq 0$ , můžeme se nyní pokusit slepit nalezená řešení v bodě  $x = -\sqrt[3]{\alpha}$ . To se nám ale nepovede, neboť

$$y'(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + \alpha)^2}},$$

a vidíme, že derivace nemá v bodě  $x = -\sqrt[3]{\alpha}$  konečnou hodnotu. Maximální řešení tedy dostáváme na intervalech  $(-\infty, -\sqrt[3]{\alpha})$  a  $(-\sqrt[3]{\alpha}, +\infty)$ .

Jestliže  $2 = y(1) = \sqrt[3]{1 + \alpha}$ , pak  $\alpha = 2^3 - 1 = 7$ .

Závěr: Maximální řešení počáteční úlohy je

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 7}, \quad x \in (-\sqrt[3]{7}, +\infty)$$

3. Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$xyy' = 3x^2 - y^2.$$

**Řešení:** Jedná se o homogenní rovnici 1. řádu, která degeneruje v bodě  $x = 0$ .

Nechť dále  $y, x \neq 0$ , pak můžeme vydělit  $xy$  a získáme rovnici

$$y' = \frac{3x^2 - y^2}{xy}. \quad (3)$$

Položíme  $z = \frac{y}{x}$ , pak (3) přejde na rovnici se separovanými proměnnými

$$\begin{aligned} z'x + z &= \frac{3 - y^2/x^2}{y/x} = \frac{3 - z^2}{z} \\ z' &= \frac{1}{x} \frac{3 - 2z^2}{z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Vidíme, že  $z = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$  jsou stacionární řešení, tj.  $y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Je-li nyní  $z \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ , pak

$$\int \frac{z}{3 - 2z^2} dz = -\frac{1}{4} \ln |3 - 2z^2| + c_1, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c_2.$$

Řešení (4) tedy vyhovuje vztahu

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4} \ln |3 - 2z^2| &= \ln |x| + c \\
 \ln |3 - 2z^2| &= -4 \ln |x| - 4c \\
 |3 - 2z^2| &= |x|^{-4} e^{-4c} \\
 |3 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2| &= e^{-4c} |x|^{-4} \\
 |3x^2 - 2y^2| &= e^{-3c} |x|^{-4} |x^2| \\
 |3x^2 - 2y^2| &= e^{-3c} x^{-2} \\
 2y^2 &= 3x^2 \pm e^{-3c} x^{-2} = \frac{3x^4 + \alpha}{x^2}, \quad \alpha = \pm e^{-3c}.
 \end{aligned}$$

Levá strana je kladná, tudíž musí platit  $3x^4 + \alpha > 0$ . Je-li  $\alpha \geq 0$ , pak tato podmínka je prázdná. Je-li  $\alpha < 0$ , pak musí platit  $|x| > \sqrt[4]{-\alpha/3}$ , tedy

$$x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-\alpha/3}) \vee x \in (\sqrt[4]{-\alpha/3}, \infty).$$

Konečně vidíme, že není možné v počátku navazovat řešení.

Závěr: Maximální řešení jsou tvaru

$$y = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

nebo

$$y = \pm \sqrt{\frac{3x^4 + \alpha}{2x^2}},$$

kde

$$\begin{aligned}
 x \in (-\infty, 0) \vee x \in (0, \infty) &\text{ pro } \alpha > 0 \text{ nebo} \\
 x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-\alpha/3}) \vee x \in (\sqrt[4]{-\alpha/3}, \infty) &\text{ pro } \alpha < 0.
 \end{aligned}$$

#### 4. Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$x^2 y' + 2(\sqrt{y} + y) = 0.$$

**Řešení:** Nejprve si všimněme, že zadaná rovnice degeneruje pro  $x = 0$  a že na celé reálné ose máme stacionární řešení  $y \equiv 0$ . Zbylá řešení budeme hledat převedením zadané diferenciální rovnice do tvaru Bernoulliho rovnice

$$y' + \frac{2}{x^2} y = -\frac{2}{x^2} \sqrt{y}, \quad (5)$$

kterou budeme řešit na množinách  $(-\infty, 0) \times (0, +\infty)$  a  $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ . Položme  $z := \sqrt{y}$ . Rovnice (5) potom přejde do tvaru

$$z' + \frac{1}{x^2} z = -\frac{1}{x^2},$$

kterou vyřešíme pomocí integračního faktoru  $e^{\int \frac{1}{x^2} dx} = e^{-\frac{1}{x}}$ . Dostáváme

$$z(x) = -e^{\frac{1}{x}} \int e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx = -e^{\frac{1}{x}} (e^{-\frac{1}{x}} - c) = ce^{\frac{1}{x}} - 1.$$

Protože  $z = \sqrt{y}$ , dostáváme  $y(x) = (ce^{\frac{1}{x}} - 1)^2$ . Zároveň ovšem musí platit  $z > 0$  (a tedy nutně  $c > 0$ ), tj.

$$ce^{\frac{1}{x}} - 1 > 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x} > -\ln c. \quad (6)$$

Pro  $x \in (0, +\infty)$ :

- $c \in (0, 1)$ : Podmínka (6) je ekvivalentní  $x < -\frac{1}{\ln c}$ , kde  $-\frac{1}{\ln c} > 0$ , a tedy  $x \in (0, -\frac{1}{\ln c})$ .
- $c \in [1, +\infty)$ : Podmínka (6) je ekvivalentní  $x > -\frac{1}{\ln c}$ , kde  $-\frac{1}{\ln c} < 0$ , a tedy  $x \in (0, +\infty)$ .

Pro  $x \in (-\infty, 0)$ :

- $c \in (0, 1]$ : Výraz  $-\ln c$  na pravé straně podmínky (6) je kladný, a tedy  $x \in \emptyset$ .
- $c \in (1, +\infty)$ : Podmínka (6) je ekvivalentní  $x < -\frac{1}{\ln c}$ , kde  $-\frac{1}{\ln c} < 0$ , a tedy  $x \in (-\infty, -\frac{1}{\ln c})$ .

Pro  $x \rightarrow 0$  nalezené řešení nemá konečnou limitu, takže lepení řešení v počátku je vyloučené. V bodě  $-\frac{1}{\ln c}$  ale lze slepit řešení se stacionárním.

Všechna maximální řešení tedy jsou

$$y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = \begin{cases} \left(ce^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2, & x \in (0, -\frac{1}{\ln c}), \\ 0, & x \in [-\frac{1}{\ln c}, +\infty), \end{cases} \quad c \in (0, 1),$$

$$y(x) = \left(ce^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2, \quad x \in (0, +\infty), \quad c \in [1, +\infty),$$

$$y(x) = \begin{cases} \left(ce^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2, & x \in (-\infty, -\frac{1}{\ln c}), \\ 0, & x \in [-\frac{1}{\ln c}, +\infty), \end{cases} \quad c \in (1, +\infty).$$

##### 5. Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + (\cotg x) y = \frac{\cos x}{2y}.$$

**Řešení:** Jedná se o Bernoulliho rovnici, kterou budeme řešit na intervalech  $(k\pi, (k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Žádná stacionární řešení zřejmě neexistují. Po zavedení pomocné proměnné  $z := y^2$  zadaná rovnice přechází do tvaru

$$z' + 2(\cotg x) z = \cos x,$$

kterou vyřešíme pomocí integračního faktoru  $e^{\int 2 \cotg x \, dx} = e^{2 \ln |\sin x|} = \sin^2 x$ . Dostáváme

$$z(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{\sin^2 x} \left( \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{c}{3} \right) = \frac{\sin^3 x - c}{3 \sin^2 x}.$$

Protože  $z = y^2$ , dostáváme  $y(x) = \pm \sqrt{\frac{\sin^3 x - c}{3 \sin^2 x}}$ . Zároveň ovšem musí platit  $z > 0$ , tj.

$$\sin^3 x - c > 0. \tag{7}$$

Pro  $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ :

(Na těchto intervalech je  $\sin x$  kladný.)

- $c \in (-\infty, 0]$ : Nerovnost (7) je splněna pro všechna  $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $c \in (0, 1)$ : Nerovnost (7) je ekvivalentní podmínce  $x \in (2k\pi + \arcsin(\sqrt[3]{c}), (2k+1)\pi - \arcsin(\sqrt[3]{c}))$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $c \in [1, +\infty)$ : Nerovnost (7) zřejmě nemůže být splněna.

Pro  $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ :

(Na těchto intervalech je  $\sin x$  záporný.)

- $c \in (-\infty, -1)$ : Nerovnost (7) je splněna pro všechna  $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $c \in [-1, 0)$ : Nerovnost (7) je ekvivalentní podmínce  $x \in ((2k-1)\pi, (2k-1)\pi - \arcsin(\sqrt[3]{c}))$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  nebo  $x \in (2k\pi + \arcsin(\sqrt[3]{c}), 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $c \in [0, +\infty)$ : Nerovnost (7) zřejmě nemůže být splněna.

Všechna maximální řešení jsou tedy dána předpisem

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{\sin^3 x - c}{3 \sin^2 x}},$$

kde pro  $k \in \mathbb{Z}$

$$x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),$$

$$c \in (-\infty, 0],$$

$$x \in (2k\pi + \arcsin(\sqrt[3]{c}), (2k+1)\pi - \arcsin(\sqrt[3]{c})),$$

$$c \in (0, 1),$$

$$x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi),$$

$$c \in (-\infty, -1),$$

$$x \in ((2k-1)\pi, (2k-1)\pi - \arcsin(\sqrt[3]{c})) \vee x \in (2k\pi + \arcsin(\sqrt[3]{c}), 2k\pi),$$

$$c \in [-1, 0).$$