Matematická analýza I (NOFY151) – 2. zápočtový test (opravný)

10. prosince 2019

1. [2 b] Určete definiční obor funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x - \sqrt{x}},$$

a v jeho vnitřních bodech spočtěte derivaci f.

Řešení: Kvůli „vnitřní“ odmocnině musí být nutně $x \geq 0$. Dále argument „vnější“ odmocniny musí být nezáporný, tj.

$$x - \sqrt{x} \geq 0.$$

Po přehození $\sqrt{x}$ na pravou stranu a umocnění nerovnosti dostáváme

$$x^2 \geq x,$$

což je ekvivaletní s

$$x(x-1) \geq 0.$$

Z poslední nerovnosti pak plyne, že $D_f = [1, +\infty)$.

Ve vnitřních bodech definičního oboru, tj. na intervalu $(1, +\infty)$, najdeme derivaci funkce f pomocí věty o derivaci složené funkce

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(x - x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(x - x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x(x-\sqrt{x})}}.$$

2. [4 b] Spočtěte

$$\int \ln\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) \mathrm{d}x$$

na maximálním možném intervalu (a ten určete).

Řešení: Předně argument logaritmu musí být kladný, tj.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} > 0.$$

Po přehození členu $\sqrt{x-1}$ na pravou stranu a umocnění nerovnosti dostáváme

$$x + 1 > x - 1.$$

To je ovšem splněno pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Další omezení plyne z požadavku nezáporného argumentu odmocnin, které dává $x \geq -1$ a $x \geq 1$. Definiční obor integrandu je tedy $[1, +\infty)$, což je interval, na kterém je integrand spojitý a bude na něm tedy mít primitivní funkci.

Protože budeme chtít pro výpočet integrálu použít metodu per partes, spočtěme si nejdřív derivaci integrandu

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) &= \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}.
\end{aligned}$$

Nyní již můžeme počítat

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) \mathrm{d}x &= \left| \begin{matrix} u = \ln\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) & v = x \\ u' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}} & v' = 1 \end{matrix} \right| \\
&= x \ln\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) + \int \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Poslední integrál vyřešíme první substituční metodou

$$\int \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = x^2 - 1 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{t} + c = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + c.$$

Celkově tedy dostáváme

$$\int \ln\big(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\big)\mathrm{d}x = x\ln\big(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\big) + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + c.$$

3. [2 b] Spočtěte

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x$$

na maximálních možných intervalech (a ty určete).

Řešení: Integrand je zjevně definovaný a spojitý na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(1, +\infty)$. Na těchto intervalech tedy budeme hledat primitivní funkci.

Byť je integrand ve tvaru vhodném k rozkladu na parciální zlomky, byla by chyba tento postup použít, protože by to vedlo k hledání 100 konstant. Místo toho použijeme jednoduchou substituci

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} t = x - 1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int \frac{(1+t)^3}{t^{100}}\mathrm{d}t = \int \frac{1+3t+3t^2+t^3}{t^{100}}\mathrm{d}t \\ &= \int \big(t^{-100} + 3t^{-99} + 3t^{-98} + t^{-97}\big)\mathrm{d}t = -\frac{1}{99t^{99}} - \frac{3}{98t^{98}} - \frac{3}{97t^{97}} - \frac{1}{96t^{96}} + c \\ &= -\frac{1}{99(x-1)^{99}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{1}{96(x-1)^{96}} + c.\end{aligned}$$

4. [2 b] Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x.$$

Řešení: Platí

$$\lim_{x\to 0+} x\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln\big(\ln\frac{1}{x}\big)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\cdot x\cdot\big(-\frac{1}{x^2}\big)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}\frac{x}{\ln\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} x\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\ln\frac{1}{x}} = 0\cdot 0 = 0,$$

kde jsme v druhé rovnosti využili l'Hôpitalova pravidla pro výpočet limity typu "$\frac{\text{něco}}{\infty}$".

Pro původní limitu potom dostáváme

$$\lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0+} x\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$