

Goniometrické vzorce

Mark Dostálík

mark.dostalik@gmail.com

29. září 2019

Sudost/lichost

$$\sin x = -\sin(-x),$$

$$\cos x = \cos(-x),$$

$$\tan x = -\tan(-x),$$

$$\cot x = -\cot(-x).$$

Posunutí argumentu

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Součtové vzorce

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y},$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y}.$$

Speciálně, pro *dvojnásobný úhel* platí

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x},$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}.$$

Pro *poloviční úhel* pak odsud dále dostáváme

$$\left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$$

$$\left| \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$

$$\left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}},$$

$$\left| \cot\left(\frac{x}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}.$$

Součty a rozdíly goniometrických funkcí

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right),$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right),$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \sin\left(\frac{x - y}{2}\right),$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y},$$

$$\cot x \pm \cot y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y},$$

$$\tan x \pm \cot y = \pm \frac{\cos(x \mp y)}{\cos x \sin y}.$$

Součiny goniometrických funkcí

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)],$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x - y) + \sin(x + y)],$$

$$\tan x \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y},$$

$$\cot x \cot y = \frac{\cot x + \cot y}{\tan x + \tan y},$$

$$\tan x \cot y = \frac{\tan x + \cot y}{\cot x + \tan y}.$$

Speciálně, pro *mocniny goniometrických funkcí* máme

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)],$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)],$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4} [3 \sin x - \sin(3x)],$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} [3 \cos x + \cos(3x)].$$