Funktionalanalysis

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Thorsten Schmidt

Department for Mathematical Stochastics, University Freiburg www.stochastik.uni-freiburg.de
thorsten.schmidt@stochastik.uni-freiburg.de
SS 2020

Organisation

- Die Vorlesung wird in diesem Jahr als inverted Classroom stattfinden. Sie finden vorab die Vorlesung und Materialien im ILIAS und auf github.
- Wir rechnen in 12 Einheiten
- Der Vorlesungstermin Montags fällt aus.
- Zu dem Vorlesungstermin Mittwochs können Sie sich einwählen und Fragen stellen. Gerne können Sie vorab auch die Fragen an Marc Weber (Übungsleiter) schicken, sie werden dann gesammelt und auf einem Wiki für alle zugänglich gemacht.
- Die Vorlesung basiert auf dem Skript von Prof. Růžička.

Stundenplan

1. 13.5. Einführung und Notationen, Satz von Hahn-Banach (bis Seite 32)
2. 20.5. Weitere Beispiele, konjugiert-konvexe Funktionen (bis Seite 36)
3. 27.5. Satz von Banach-Steinhaus, Sätze von der offenen Abbildung und dem abgeschlossenen Graphen (bis Seite 45)
4. 3.6. Adjungierte Operatoren (nicht ganz bis Seite 57)
5. 10.6. Sobolev - Räume (bis Seite 61)
6. 17.6. Schwache Topologien und reflexive Räume (bis Seite 69)
7. 24.6. Schwach-*-Topologien bis Satz von Eberlein-Smuljan, Seite 85)
8. 1.7. Weiter, L^p-Räume (bis Seite 108)
9. 8.7. Ab Radon-Integral bis Seite 118
10. 15.7. Hilbert-Räume (bis Seite 136)
11. 22.7. Kompakte Operatoren (bis Seite 151)
12. 29.7. Spektraltheorie

1.1 Einführung

- Lesen Sie die Einführung.

Funktionalanalysis

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Michael Růžička

basierend auf einer Mitschrift von S. Eckstein

- ”Eine zentrale Idee der Funktionalanalysis ist es, bekannte Ergebnisse aus dem endlichdimensionalen auf den unendlichdimensionalen Fall zu übertragen. Hierbei ist allerdings größte Vorsicht geboten, wie die folgenden im $\mathbb{R}^n$ ungewohnten Effekte zeigen sollen.”

Im $\mathbb{R}^n$ ist jede surjektive lineare Abbildung auch injektiv (und umgekehrt). Im unendlichen ist beides falsch:

a) Surjektive lineare Abbildungen können einen nichttrivialen Kern haben.

Beispiel: Sei

$$V = \{ (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid c_j \in \mathbb{R} \}$$

der unendlich-dimensionale Vektorraum der reellen Folgen. Hier ist die komponentenweise Addition die additive Verknüpfung und die komponentenweise Multiplikation mit Skalaren $\alpha \in \mathbb{R}$ die Skalarmultiplikation. (Man könnte $V = \mathbb{R}^\infty$ oder besser $\mathbb{R}^\omega$ schreiben.) Die lineare Abbildung $A : V \to V$ sei für $c = (c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$Ac = (c_2, c_3, c_4, \dots).$$

Offensichtlich ist $A(V) = V$, aber $A(c_1, 0, 0, \dots) = (0, 0, \dots)$.

Skriptum S.2

b) Ist der Kern $N(A)$ einer linearen Abbildung trivial, so ist A nicht notwendig surjektiv.

Beispiel: V sei wieder wie oben definiert. Sei $Ac = (0, c_1, c_2, c_3, \dots)$. Aus $Ac = 0$ folgt $c = 0$, also $N(A) = 0$. Offensichtlich ist aber $A(V)$ ein echter Teilraum von V.

Skriptum S.2

c) Lineare Abbildungen - selbst einfachster Art - müssen keinen Eigenwert haben.

Beispiel: Sei $C([a,b])$ der Vektorraum der $\mathbb{R}$-wertigen stetigen Funktionen auf $[a,b]$ (mit der componentenweisen Addition und Skalarmultiplikation). Sei $A : C([a,b]) \to C([a,b])$ definiert durch

$$(Af)(x) = (\sin x) f(x).$$

A ist ein sehr einfacher und häufig auftretender linearer Operator, nämlich ein **Multiplikationsoperator** - die Multiplikation mit $\sin x$.

Trotzdem hat A *keinen* Eigenwert. Andernfalls gäbe es ein $f \in C([a,b])$, $f \not\equiv 0$ (d.h. f ist nicht die Null-Funktion) und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $(\sin x) f(x) = \lambda f(x)$. Wenn aber $f \not\equiv 0$, so existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x) \neq 0$ für $x \in U(x_0)$. Dort könnten wir durch $f(x)$ teilen und erhielten

$$\sin x = \lambda = \text{const}\,, \ \text{für alle } x \in U(x_0)\,.$$

Dies ist nicht möglich, da die Sinusfunktion auf keiner offenen Menge konstant ist. Also hat A keinen Eigenwert.

Skriptum S.3

Man bemüht sich in der Funktionalanalysis, durch Zusatzbedingungen an A, die im $\mathbb{R}^n$ bekannten Sätze zu retten. Im Falle der "Eigenwertproblematik" gibt man Klassen von linearen Operatoren (= Abbildungen) an, für die das Eigenwertproblem ähnlich wie bei $n \times n$-Matrizen behandelt werden kann. Außerdem werden verschiedene Abschwächungen des Begriffs „Eigenwert" eingeführt, um eine Analogie zu $n \times n$-Matrizen zu bekommen. Zudem sind diese Abschwächungen durch die Quantenphysik motiviert. Hiermit beschäftigt sich die „Spektraltheorie", welche wir im Abschnitt 7.3 besprechen werden.

Skriptum S.3

Es hat sich herausgestellt, dass die meisten Funktionenräume, mit denen man Analysis betreiben möchte, eine **Norm** oder zumindest eine **Metrik** besitzen. Bekannte Beispiele sind:

$$C([a,b], \|\cdot\|_\infty),\ L^2([a,b], \|\cdot\|_{L^2([a,b])}).$$

Vektorräume mit einer Norm heißen **normierte Vektorräume**. Eine Norm impliziert immer eine Metrik und eine Metrik impliziert immer einen Konvergenzbegriff (eine Topologie). In Funktionenräumen gibt es jedoch weitere Konvergenzbegriffe, wie das nächste Beispiel zeigt:

- Schauen Sie sich zusätzliche Literatur an. Auf Wikipedia finden Sie bereits eine schöne Liste von Funktionenräumen: `https://en.wikipedia.org/wiki/Function_space`

Skriptum S.3

Functional analysis [edit]

Functional analysis is organized around adequate techniques to bring function spaces as topological vector spaces within reach of the ideas that would apply to normed spaces of finite dimension. Here we use the real line as an example domain, but the spaces below exist on suitable open subsets $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$

- $C(\mathbf{R})$ continuous functions endowed with the uniform norm topology
- $C_c(\mathbf{R})$ continuous functions with compact support
- $B(\mathbf{R})$ bounded functions
- $C_0(\mathbf{R})$ continuous functions which vanish at infinity
- $C^r(\mathbf{R})$ continuous functions that have continuous first *r* derivatives.
- $C^\infty(\mathbf{R})$ smooth functions
- $C_c^\infty(\mathbf{R})$ smooth functions with compact support
- $C^\omega(\mathbf{R})$ real analytic functions
- $L^p(\mathbf{R})$, for $1 \leq p \leq \infty$, is the L^p space of measurable functions whose *p*-norm $||f||_p = \left(\int_{\mathbf{R}} |f|^p\right)^{1/p}$ is finite
- $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, the Schwartz space of rapidly decreasing smooth functions and its continuous dual, $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ tempered distributions
- $D(\mathbf{R})$ compact support in limit topology
- $W^{k,p}$ Sobolev space of functions whose weak derivatives up to order *k* are in L^p
- $\mathcal{O}_U$ holomorphic functions
- linear functions
- piecewise linear functions
- continuous functions, compact open topology
- all functions, space of pointwise convergence
- Hardy space
- Hölder space
- Càdlàg functions, also known as the Skorokhod space
- $\mathrm{Lip}_0(\mathbf{R})$, the space of all Lipschitz functions on $\mathbf{R}$ that vanish at zero.

d) In unendlichdimensionalen Räumen gibt es häufig mehrere natürliche Konvergenzbegriffe.

Im $\mathbb{R}^n$ gibt es außer der euklidischen Norm noch beliebig viele andere Normen - diese sind aber alle äquivalent und induzieren somit denselben Konvergenzbegriff. In unendlichdimensionalen Räumen ist dies anders.

Beispiel: Wir betrachten den Vektorraum

$$V = \ell^2 := \left\{ (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty \right\}.$$

Skriptum S.3

$$V = \ell^2 := \{ (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty \}.$$

Durch $\|c\|_{\ell^2} = (\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2)^{1/2}$ ist auf V einen Norm gegeben.

Hier hat man zunächst die **Konvergenz in der Norm** auch die **starke ℓ^2-Konvergenz** genannt:

$$c^j \to c \text{ in } \ell^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|c^j - c\|_{\ell^2} \to 0 \quad \text{für } j \to \infty.$$

Zusätzlich hat man die **punktweise Konvergenz**:

$$c^j \to c \text{ punktweise} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_i^j \xrightarrow{j\to\infty} c_i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Diese **punktweise Konvergenz** oder auch **komponentenweise Konvergenz** hängt nur von der Norm des Grundkörpers ab; also in unserem Falle dem Betrag in $\mathbb{R}$. Im $\mathbb{R}^n$ sind die letzten beiden Konvergenzen äquivalent. Im unendlichem nicht; die Folge $c^j = (0, \ldots, 0, \underbrace{j}_{\text{j-te Stelle}}, 0, \ldots)$ konvergiert punktweise gegen $(0, 0, \ldots)$ jedoch ist $\|c^j\|_{\ell^2} = j \to \infty$.

Die dritte wichtige natürliche Konvergenz ist die **schwache Konvergenz**, die wir später kennen lernen werden.

Skriptum S.4

Wir haben also **Vektorräume**, auf welchen mehrere Konvergenzbegriffe existieren. Daraus ergibt sich die Frage, wie diese Begriffe zusammenhängen. Tatsächlich besteht die Grundlage der Funktionalanalysis in der Untersuchung der Verträglichkeit von Vektorraumstruktur mit der Konvergenzstruktur (d.h. Norm, Metrik, Topologie). Wie empfindlich dieses Verhältnis is, zeigt das nächste wichtige Beispiel:

Skriptum S.4

e) Lineare Abbildungen sind nicht notwendig stetig.

Sei V der Vektorraum der Polynome auf $[-2,2]$, versehen mit der **gleichmäßigen Konvergenz** als Konvergenzbegriff, d.h.

$$p^j \to p \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|p^j - p\|_\infty \to 0 \text{ für } j \to \infty.$$

Hierbei ist

$$\|q\|_\infty = \max_{x\in[-2,2]} |p(x)|.$$

Wir definieren die lineare Abbildung $A : V \to V$, indem wir sie auf den Basiselementen x^n definieren:

$$Ax^n = 3^n x^n \,.$$

Mit $p^n(x) = \frac{1}{(2{,}5)^n} x^n$ gilt $p^n \to 0$ $(n \to \infty)$, aber

$$\|Ap^n(x)\|_\infty = \frac{3^n \cdot 2^n}{(2,5)^n} \to \infty \,.$$

Skriptum S.4

Schließlich betonen wir noch, dass man auch das konkrete Studium einzelner Funktionenräume zur Funktionalanalysis zählen kann. Es gibt zahllose Funktionenräume in der Analysis, welche besondere Beachtung verdienen. Der Anfänger kennt vermutlich die Räume $C([a,b])$, $C^1(\Omega)$, $C^m(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $L^p(\Omega)$. Man benötigt diese vielen Funktionenräume und deren besonderen Eigenschaften unter anderem, um (allgemeine) Sätze der Funktionalanalysis einer konkreten Situation anzupassen.

Skriptum S.5

Zusammenfassend

- In unendlichdimensionalen Räumen ist vieles anders !
- Die starke Verbindung zwischen Kern, Injektivität und Surjektivität in endlicher Dimension gelten nicht mehr.
- Lineare Abbildungen müssen keine Eigenwerte haben
- Lineare Abbildungen sind nicht notwendigerweise stetig
- Es gibt eine große Menge an Funktionenräume, mit denen wir uns anfreunden werden
- Dazu kommen unterschiedliche Konvergenzbegriffe, die nicht äquivalent sein müssen

2.1 Der Satz von Hahn-Banach:I

In diesem Abschnitt lernen folgendes kennen:

- Der Satz von Hahn-Banach: analytische Formulierung als Erweiterungssatz von linearen Funktionalen
- Der Beweis hiervon
- Das Lemma von Zorn.

Seiten 21-26 im Skriptum.