概率分布

离散型

1.二项分布 $X \sim B(n,p)$

（放回抽样）

概率质量函数

$$f(k,n,p)=\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)p^k(1-p)^{n-k}$$

（其中n为重复次数p为成功概率k为成功次数）

累积分布函数

$$F(x;n,p)=\Pr(X\le x)=\sum_{i=0}^{\lfloor x\rfloor}\left(\begin{array}{c}n\\i\end{array}\right)p^i(1-p)^{n-i}$$

期望

$$E(X)=np$$

方差

$$D(X)=np(1-p)$$

2.超几何分布 $X \sim H(n,K,N)$

（不放回抽样）

概率质量函数

$$f(k,n;M;N)=\frac{\left(\begin{array}{c}K\\k\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}N-K\\n-k\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}N\\n\end{array}\right)}$$

期望

$$E(X)=n\frac{K}{N}$$

方差

$$D(X)=n\frac{K}{N}\frac{(N-K)}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

3.Poisson分布 $X\sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$

（单位时间内随机事件发生的次数，可看作频率.前提是一次抽样概率相对很小,而抽样次数相对很大）

概率质量函数

$$f(k;\lambda)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

累积分布函数

$$F(k;\lambda)=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\lfloor k\rfloor}\frac{\lambda^i}{i!}$$

期望

$$E(X)=\lambda$$

方差

$$D(X)=\lambda$$

4.离散型均匀分布

概率质量函数

$$f(k,n)=\begin{cases}\frac{1}{b-a+1}, a\leq k\leq b\\ 0,\ \text{otherwise}\end{cases}$$

累积分布函数

$$F(k;a,b)=\begin{cases}0,k<a\\ \frac{\lfloor k\rfloor-a+1}{b-a+1},a\leqslant k\leqslant b\\ 1,k>b\end{cases}$$

期望

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

方差

$$D(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$$

连续型概率分布

1.连续型均匀分布

略

2.正态分布 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

（最理想的连续型随机变量分布）

概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sigma \sqrt{2 \pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \sigma^2}}$$

累积分布函数

$$F(x ; \mu, \sigma)=\frac{1}{\sigma \sqrt{2 \pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left(-\frac{(t-\mu)^2}{2 \sigma^2}\right) \mathrm{d} t$$

$$\Phi(x)=F(x ; 0,1)=\frac{1}{\sqrt{2 \pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d} t=\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

期望

$$E(X)=\mu$$

方差

$$D(X)=\sigma^2$$

3.Gamma分布 $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ 或 $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$

（常用于对等待时间进行建模）

概率密度函数

$$f(x)=\frac{x^{(\alpha-1)} \lambda^\alpha e^{(-\lambda x)}}{\Gamma(\alpha)}=\frac{x^{(\alpha-1)} e^{\left(-\frac{1}{\beta} x\right)}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, x>0$$

累积分布函数

$$F(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \gamma(\alpha, \beta x)$$

期望

$$E(X) = k\theta, \quad or \quad E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

方差

$$D(X) = k\theta^2, \quad or \quad D(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

4.指数分布

（参数$\alpha = 1$的Gamma分布，可以用来表示独立随机事件发生的间隔）

概率密度函数

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

累积分布函数

$$F(x;\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

期望

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

方差

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

5.Beta分布 $X \sim \mathrm{Be}(\alpha, \beta)$

（多个独立二项分布）
概率密度函数

$$\begin{aligned} f(x;\alpha,\beta) &= \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \\ &= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \end{aligned}$$

累积分布函数

$$F(x;\alpha,\beta) = \frac{\mathrm{B}_x(\alpha,\beta)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} = I_x(\alpha,\beta)$$

其中
$\mathrm{B}(x;a,b)=\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t$

期望

$$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

方差

$$D(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

6.卡方分布 $X\sim\chi^2(k)$

（多个符合正态分布的随机变量的平方和，常用于独立性检验）

概率密度函数

$$f_k(x)=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{\frac{-x}{2}}$$

累积分布函数

$$F_k(x)=\frac{\gamma\left(\frac{k}{2},\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

其中
$\gamma(s,x)=\int_0^x t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$

期望

$$E(X)=k$$

方差

$$D(X)=2k$$

7.Laplace分布 $X\sim$ Laplace (μ,b)

（可以看成两个平移后的指数分布背靠背拼接在一起，也叫双指数分布）

概率密度函数

$$
\begin{aligned}
f(x;\mu,b) &= \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right) \\
&= \frac{1}{2b}\begin{cases}\exp\left(-\frac{\mu-x}{b}\right) & \text{if } x<\mu \\ \exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right) & \text{if } x\geq\mu\end{cases}
\end{aligned}
$$

累积分布函数

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\mu-x}{b}\right) & \text{if } x<\mu \\ 1-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right) & \text{if } x\geq\mu \end{cases} \\
&= 0.5[1+\operatorname{sgn}(x-\mu)(1-\exp(-|x-\mu|/b))]
\end{aligned}
$$

期望

$$
E(X)=\mu
$$

方差

$$
D(X)=2b^2
$$

8.Pareto分布 $X \sim \text{Pareto}(k, x_{\min})$

（经济学中常用，大致满足柏拉图分布的例子有：财富在个人之间的分布、人类居住区域大小、互联网中文件尺寸的分布、油田的石油储量，其离散形式又叫$zeta$分布，即齐夫定律）

概率密度函数

$$
f(x)=\begin{cases} 0, & \text{if } x<x_{\min} \\ \frac{kx_{\min}^k}{x^{k+1}}, & \text{if } x>x_{\min}\end{cases}
$$

累积分布函数

$$
F(x)=1-\left(\frac{x_{\mathrm{m}}}{x}\right)^k
$$

期望

$$
E(X)=\frac{kx_{\mathrm{m}}}{k-1}, \ k>1
$$

方差

$$
D(X)=\frac{x_{\mathrm{m}}^2 k}{(k-1)^2(k-2)}, \ k>2
$$

9.柯西分布 $X \sim \mathrm{Cauchy}(\mu, \gamma)$

（物理学中常用，又叫洛伦兹分布，是两个均值为零的正态分布随机变量之比的分布）

概率密度函数

$$
\begin{aligned}
f\left(x ; x_0, \gamma\right) & =\frac{1}{\pi \gamma\left[1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]} \\
& =\frac{1}{\pi}\left[\frac{\gamma}{\left(x-x_0\right)^2+\gamma^2}\right]
\end{aligned}
$$

累积分布函数

$$
F\left(x ; x_0, \gamma\right)=\frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)+\frac{1}{2}
$$

各类分布的矩母函数和特征函数

Distribution	Moment-generating function $M_X(t)$	Characteristic function $\varphi(t)$
Degenerate δ_a	e^{ta}	e^{ita}
Bernoulli $P(X=1)=p$	$1-p+pe^t$	$1-p+pe^{it}$
Geometric $(1-p)^{k-1}p$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, t<-\ln(1-p)$	$\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
Binomial $B(n,p)$	$(1-p+pe^t)^n$	$\left(1-p+pe^{it}\right)^n$
Negative binomial $\mathrm{NB}(r,p)$	$\left(\frac{p}{1-e^t+pe^t}\right)^r, t<-\ln(1-p)$	$\left(\frac{p}{1-e^{it}+pe^{it}}\right)^r$
Poisson $\mathrm{Pois}(\lambda)$	$e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$	$e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$
Uniform (continuous) $\mathrm{U}(a,b)$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Uniform (discrete) $\mathrm{DU}(a,b)$	$\frac{e^{at}-e^{(b+1)t}}{(b-a+1)(1-e^t)}$	$\frac{e^{ait}-e^{(b+1)it}}{(b-a+1)(1-e^{it})}$
Laplace $L(\mu,b)$	$\frac{e^{t\mu}}{1-b^2t^2}, \|t\|<1/b$	$\frac{e^{it\mu}}{1+b^2t^2}$
Normal $N\left(\mu,\sigma^2\right)$	$e^{t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$	$e^{it\mu-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
Chi-squared χ_k^2	$(1-2t)^{-\frac{k}{2}}, t<1/2$	$(1-2it)^{-\frac{k}{2}}$
Noncentral chi-squared $\chi_k^2(\lambda)$	$e^{\lambda t/(1-2t)}(1-2t)^{-\frac{k}{2}}$	$e^{i\lambda t/(1-2it)}(1-2it)^{-\frac{k}{2}}$
Gamma $\Gamma(k,\theta)$	$(1-t\theta)^{-k}, t<\frac{1}{\theta}$	$(1-it\theta)^{-k}$
Exponential $\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\left(1-t\lambda^{-1}\right)^{-1}, t<\lambda$	$\left(1-it\lambda^{-1}\right)^{-1}$
Beta	$1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1}\frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r}\right)\frac{t^k}{k!}$	${}_1F_1(\alpha;\alpha+\beta;it)$ (see Confluent hypergeometric function)
Multivariate normal $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$	$e^{\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\mu}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\right)}$	$e^{\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\left(i\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\right)}$
Cauchy Cauchy (μ,θ)	Does not exist	$e^{it\mu-\theta\|t\|}$
Multivariate Cauchy MultiCauchy (μ,Σ) [3]	Does not exist	$e^{i\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}-\sqrt{\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}}}$