概率分布

离散型

1.二项分布 $X \sim B(n,p)$

(放回抽样)

概率质量函数

$$f(k,n,p) = \left(egin{array}{c} n \ k \end{array}
ight) p^k (1-p)^{n-k}$$

(其中<math>n为重复次数p为成功概率k为成功次数)

累积分布函数

$$F(x;n,p) = \Pr(X \leq x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x
floor} \left(egin{array}{c} n \ i \end{array}
ight) p^i (1-p)^{n-i}$$

期望

$$E(X) = np$$

方差

$$D(X) = np(1-p)$$

2.超几何分布 $X \sim H(n,K,N)$

(不放回抽样)

概率质量函数

$$f(k,n;M;N) = rac{\left(egin{array}{c}K\k\end{array}
ight)\left(egin{array}{c}N-K\n-k\end{array}
ight)}{\left(egin{array}{c}N\n\end{array}
ight)}$$

期望

$$E(X) = n\frac{K}{N}$$

方差

$$D(X) = n \frac{K}{N} \frac{(N-K)}{N} \frac{N-n}{N-1}$$

3.Poisson分布 $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$

(单位时间内随机事件发生的次数,可看作频率.前提是一次抽样概率相对很小,而抽样次数相对很大)

概率质量函数

$$f(k;\lambda) = rac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

累积分布函数

$$F(k;\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\lfloor k
floor} rac{\lambda^i}{i!}$$

期望

$$E(X) = \lambda$$

方差

$$D(X) = \lambda$$

4.离散型均匀分布

概率质量函数

$$f(k,n) = \left\{ egin{array}{l} rac{1}{b-a+1}, a \leq k \leq b \ 0, ext{ otherwise} \end{array}
ight.$$

累积分布函数

$$F(k;a,b) = \left\{egin{array}{l} 0,k < a \ rac{\lfloor k
floor - a + 1}{b - a + 1}, a \leqslant k \leqslant b \ 1,k > b \end{array}
ight.$$

期望

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

方差

$$D(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

连续型概率分布

1.连续型均匀分布

略

2.正态分布 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2 ight)$

(最理想的连续型随机变量分布)

概率密度函数

$$f(x)=rac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-rac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

累积分布函数

$$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t - \mu)^{2}}{2\sigma^{2}}\right) dt$$

$$\Phi(x) = F(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^{2}}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

期望

$$E(X) = \mu$$

方差

$$D(X) = \sigma^2$$

3.Gamma分布 $X \sim \Gamma(lpha,eta)$ 或 $X \sim \Gamma(lpha,\lambda)$

(常用于对等待时间进行建模)

概率密度函数

$$f(x) = rac{x^{(lpha-1)}\lambda^lpha e^{(-\lambda x)}}{\Gamma(lpha)} = rac{x^{(lpha-1)}e^{\left(-rac{1}{eta}x
ight)}}{eta^lpha\Gamma(lpha)}, x>0$$

累积分布函数

$$F(x) = rac{1}{\Gamma(lpha)} \gamma(lpha, eta x)$$

期望

$$E(X) = k\theta, \quad or \quad E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

方差

$$D(X)=k heta^2, \quad or \quad D(X)=rac{lpha}{eta^2}$$

4.指数分布

(参数 $\alpha=1$ 的Gamma分布,可以用来表示独立随机事件发生的间隔)

概率密度函数

$$f(x;\lambda) = egin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \ 0 & x < 0 \end{cases}$$

累积分布函数

$$F(x;\lambda) = egin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \ 0 & x < 0 \end{cases}$$

期望

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

方差

$$D(X) = rac{1}{\lambda^2}$$

5.Beta分布 $X \sim \mathrm{Be}(lpha,eta)$

(多个独立二项分布)

概率密度函数

$$f(x;lpha,eta) = rac{x^{lpha-1}(1-x)^{eta-1}}{\int_0^1 u^{lpha-1}(1-u)^{eta-1}du} \ = rac{\Gamma(lpha+eta)}{\Gamma(lpha)\Gamma(eta)}x^{lpha-1}(1-x)^{eta-1} \ = rac{1}{\mathrm{B}(lpha,eta)}x^{lpha-1}(1-x)^{eta-1}$$

累积分布函数

$$F(x;lpha,eta) = rac{\mathrm{B}_x(lpha,eta)}{\mathrm{B}(lpha,eta)} = I_x(lpha,eta)$$

其中

$$B(x; a, b) = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

期望

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

方差

$$D(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

6.卡方分布 $X \sim \chi^2(k)$

(多个符合正态分布的随机变量的平方和,常用于独立性检验)

概率密度函数

$$f_k(x)=rac{1}{2^{rac{k}{2}}\Gamma\left(rac{k}{2}
ight)}x^{rac{k}{2}-1}e^{rac{-x}{2}}$$

累积分布函数

$$F_k(x) = rac{\gamma\left(rac{k}{2},rac{x}{2}
ight)}{\Gamma\left(rac{k}{2}
ight)}$$

其中

$$\gamma(s,x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt$$

期望

$$E(X) = k$$

方差

$$D(X) = 2k$$

7.Laplace分布 $X\sim$ Laplace (μ,b)

(可以看成两个平移后的指数分布背靠背拼接在一起,也叫双指数分布)

概率密度函数

$$f(x; \mu, b) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2b} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\mu - x}{b}\right) & \text{if } x < \mu \\ \exp\left(-\frac{x - \mu}{b}\right) & \text{if } x \ge \mu \end{cases}$$

累积分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) du$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\mu - x}{b}\right) & \text{if } x < \mu \\ 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x - \mu}{b}\right) & \text{if } x \ge \mu \end{cases}$$

$$= 0.5[1 + \operatorname{sgn}(x - \mu)(1 - \exp(-|x - \mu|/b))]$$

期望

$$E(X) = \mu$$

方差

$$D(X) = 2b^2$$

8.Pareto分布 $X \sim \operatorname{Pareto}(k, x_{\min})$

(经济学中常用,大致满足柏拉图分布的例子有:财富在个人之间的分布、人类居住区域大小、互联网中文件尺寸的分布、油田的石油储量,其离散形式又叫zeta分布,即齐夫定律)

概率密度函数

$$f(x) = \left\{egin{array}{ll} 0, & ext{if } x < x_{\min} \ rac{kx_{\min}^k}{x^{k+1}}, & ext{if } x > x_{\min} \end{array}
ight.$$

累积分布函数

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_{
m m}}{x}\right)^k$$

期望

$$E(X)=rac{kx_{
m m}}{k-1}$$
 , $k>1$

方差

$$D(X) = rac{x_{
m m}^2 k}{(k-1)^2 (k-2)}$$
 , $\ k > 2$

9.柯西分布 $X \sim \operatorname{Cauchy}(\mu, \gamma)$

(物理学中常用,又叫洛伦兹分布,是两个均值为零的正态分布随机变量之比的分布)

概率密度函数

$$f\left(x;x_{0},\gamma
ight)=rac{1}{\pi\gamma\left[1+\left(rac{x-x_{0}}{\gamma}
ight)^{2}
ight]} \ =rac{1}{\pi}\left[rac{\gamma}{\left(x-x_{0}
ight)^{2}+\gamma^{2}}
ight]$$

累积分布函数

$$F\left(x;x_{0},\gamma
ight)=rac{1}{\pi}rctan\left(rac{x-x_{0}}{\gamma}
ight)+rac{1}{2}$$

各类分布的矩母函数和特征函数

Distribution	$M_{X}(t)$ Moment-generating function	Characteristic function $\varphi(t)$
Degenerate δ_a	e^{ta}	e^{ita}
Bernoulli $P(X=1)=p$	$1-p+pe^t$	$1-p+pe^{it}$
Geometric $(1-p)^{k-1}p$	$rac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, t<-\ln(1-p)$	$\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
Binomial $B(n, p)$	$\left(1-p+pe^t\right)^n$	$\left(1-p+pe^{it} ight)^n$
Negative binomial $NB(r,p)$	$\left(rac{p}{1-e^t+pe^t} ight)^r, t<-\ln(1-p)$	$\left(rac{p}{1{-}e^{it}{+}pe^{it}} ight)^r$
Poisson $Pois(\lambda)$	$e^{\lambda\left(e^{t}-1 ight)}$	$e^{\lambda\left(e^{it}-1 ight)}$
Uniform (continuous) $U(a,b)$	$rac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$	$rac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Uniform (discrete) $DU(a,b)$	$rac{e^{at} - e^{(b+1)t}}{(b-a+1)(1-e^t)}$	$rac{e^{ait} - e^{(b+1)it}}{(b-a+1)(1-e^{it})}$
Laplace $L(\mu, b)$	$rac{e^{t\mu}}{1-b^2t^2}, t < 1/b \ e^{t\mu + rac{1}{2}\sigma^2t^2}$	$rac{e^{it\mu}}{1+b^2t^2} \ _{m{ ho}it\mu-rac{1}{2}\sigma^2t^2}$
Normal $N\left(\mu,\sigma^2\right)$		· ·
Chi-squared χ^2_k	$(1-2t)^{-rac{k}{2}}, t < 1/2$	$(1-2it)^{-rac{k}{2}}$
Noncentral chi-squared $\chi_k^2(\lambda)$	$e^{\lambda t/(1-2t)}(1-2t)^{-rac{k}{2}}$	$e^{i\lambda t/(1-2it)}(1-2it)^{-rac{k}{2}}$
Gamma $\Gamma(k,\theta)$	$(1-t heta)^{-k}, t<rac{1}{ heta} \ (1-t\lambda^{-1})^{-1}, t<\lambda$	$(1-it heta)^{-k}$
Exponential $\text{Exp}(\lambda)$	$\left(1-t\lambda^{-1} ight)^{-1}, t<\lambda$	$(1-it heta)^{-k} \ \left(1-it\lambda^{-1} ight)^{-1}$
Beta	$1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1}rac{lpha+r}{lpha+eta+r} ight)rac{t^k}{k!}$	$_1F_1(\alpha; \alpha + \beta; it)$ (see Confluent hypergeometric function)
$N(\mu, \mathbf{\Sigma})$	$e^{\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\left(oldsymbol{\mu}+rac{1}{2}oldsymbol{\Sigma}\mathbf{t} ight)}$	$e^{\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\left(ioldsymbol{\mu}-rac{1}{2}oldsymbol{\Sigma}\mathbf{t} ight)}$
Cauchy Cauchy (μ, θ)	Does not exist	$e^{it\mu- heta t }$
Multivariate Cauchy MultiCauchy (μ, Σ) [3]	Does not exist	$e^{i\mathbf{t}^{\mathrm{T}}oldsymbol{\mu}-\sqrt{\mathbf{t}^{\mathrm{T}}oldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}}}$